

T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
FELSEFE ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

WITTGENSTEIN'DA MATEMATİĞİN
TEMELLERİ SORUNU

Mehmet ARSLAN

2502150067

TEZ DANIŞMANI
Doç. Dr. Özgüç GÜVEN

İSTANBUL - 2019



T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

DOKTORA
TEZ ONAYI



ÖĞRENCİNİN:

Adı ve Soyadı : M. İ. M. ARSLAN Numarası : 2502150037
Anabilim Dalı / Anasayışat Dalı / Programı : FELSEFE ANADİLİM DALI Danışmanı : DOÇ. DR. ÖZGÜÇ GÖVEN
Tez Savunma Tarihi : 24.04.2019 Saati : 14.30
Tez Başlığı : "WITTGENSTEIN DA MATEMATİĞİN TEMELLERİ SORUNU"

TEZ SAVUNMA SINAMI, İÜ Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinin 50. Maddesi uyarınca yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin KABULÜNE CYBİRLİCİ DOÇ. DR. ÖZGÜÇ GÖVEN tarafından verilmiştir.

JÜRI ÜYESİ	İMZA	KANAATİ (KABUL / RED / DÜZELTME)
PROF. DR. CENGİZ ÇAKMAK		Kabul
PROF. DR. LOKMAN ÇİLİNGİR		Kabul
PROF. DR. AHMET AYHAN ÇİTİL		Kabul
DOÇ. DR. ÖZGÜÇ GÖVEN		Kabul
DR. ÖĞR. ÜYESİ EGEMEN SEYFETTİN KUŞÇU		Kabul

YEDEK JÜRI ÜYESİ	İMZA	KANAATİ (KABUL / RED / DÜZELTME)
PROF. DR. YÜCEL YÜKSEL		
DR. ÖĞR. ÜYESİ GAMZE KESKİN YURDAKURBAN		

ÖZ

WITTGENSTEIN'DA MATEMATİĞİN TEMELLERİ SORUNU

Mehmet ARSLAN

Wittgenstein'in felsefesi üzerine yapılan çalışmaların çok büyük bir kısmı O'nun mantık ve dil anlayışı ile ilişkilidir. Bununla birlikte, sayıca az da olsa O'nun din, sanat ve zihin anlayışını konu edinen çalışmalar mevcuttur. Ancak, felsefeye yaptığı en büyük katkının matematik felsefesi alanında olduğunu söyleyen Wittgenstein'in, matematik felsefesini konu edinen çalışmaların sayısı neredeyse yok denecek kadar azdır. Bu tezde, Wittgenstein'in birinci ve ikinci döneminde ortaya koymuş olduğu felsefi söylem, matematik felsefesi tartışmaları ile ilişkisi içerisinde ele alınmıştır. Çalışmanın iki veçhesi mevcuttur. Bunlardan ilki, Wittgenstein'in her iki döneminde ortaya koymuş olduğu matematik felsefesini tüm yönleri ile serimlemektir. İkincisi ise, Wittgenstein'in matematik felsefesine, kendi matematik felsefesi yaklaşımımız üzerinden bir eleştiri getirmektir. Bu eleştirinin ana fikri şudur: Wittgenstein'in *Tractatus*'ta biçimsel nesneler, biçimsel bağıntılar ve ikinci dönem eserlerinde benimsediği sonlucu matematik anlayışı üzerinden çizdiği matematiksel çerçeve, matematiğin bütünü kuşatmak bakımından yetersizdir.

Anahtar Kelimeler: Mantık, matematik, biçimsel dizge, mantıksalcılık, biçimselcilik, görüselcilik, sonluculuk.

ABSTRACT
THE PROBLEM OF THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS
IN WITTGENSTEIN
Mehmet ARSLAN

A major part of the studies on Wittgenstein's philosophy is related with his understanding of logic and language. There are also few studies on his understanding of religion, art and mind. However, studies on Wittgenstein's philosophy of mathematics are even less in number although Wittgenstein said that his chief contribution to philosophy was in the area of the philosophy of mathematics. In this dissertation, Wittgenstein's philosophical discourse in the first and second period of his philosophy was discussed in relation with the discussions of the philosophy of mathematics. There are two aspects of the study. First of these is to expose Wittgenstein's philosophy of mathematics in both periods. Second aspect of this study is to criticize Wittgenstein's philosophy of mathematics through our approach of the philosophy of mathematics. Main idea of this criticism is this; the mathematical framework that is structured through formal objects and formal relations in *Tractatus*, and finitistic mathematics that Wittgenstein adopted in his second period writings is insufficient to encompass the whole of mathematics.

Key Words: Logic, mathematics, ideal language, formal system, logicism, formalism, intuitionism, finitism.

ÖNSÖZ

Lisans eğitimini matematik alanında tamamlamış birisi olarak, felsefe yüksek lisansına başladığımda emin olduğum tek şey, çalışmalarımın odağında hep mantık ve matematik felsefesi tartışmaları olacaktı. Yüksek lisansımı Kant ve Frege'nin matematiksel yargı anlayışları üzerine yazdığım bir tezle tamamladığımda ise, doktora tezimde Frege sonrası matematik felsefesini çalışmak istediğimden neredeyse emindim. Ama hangi problemi, hangi dönemi ya da filozofu merkeze alacağım sorusu benim için tam bir muammaydı. Aklımda birkaç tane tez konusu ile doktora yeterlilik sınavına girdim. Sonrasında hocalarımla tez konusu istişarelerini yaparken kıymetli hocalarım Doç. Dr. Özgüç GÜVEN ve Prof. Dr. Ahmet Ayhan ÇİTİL Wittgenstein'in matematik felsefesinin gerek ulusal gerek de uluslararası akademik çevrelerde yeterince çalışılmadığını, bu minvalde yapılacak bir tez çalışmasının özgün olabileceğini ve felsefe literatürüne ciddi katkılar sağlayabileceğini belirttiler. Wittgenstein'in matematik felsefesi hâlihazırda aklımdaki tez konularından birisi olduğundan böyle bir çalışma yapma fikri daha ilk konuşulduğunda beni heyecanlandırdı. Bu tez çalışmasının başlangıç hikâyesi yaklaşık olarak budur.

Gerek tezimle ilgili sıkıntılarında, gerek de akademi içerisinde yaşadığım diğer bütün sıkıntılarında ne zaman ihtiyacım olsa yardımını, dostluğunu, hocalığını hiçbir zaman esirgemeyen, akademi içerisindeki duruşu ile her zaman örnek aldığım tez danışmanım Doç. Dr. Özgüç GÜVEN'e, tanıdığım ilk günden beri felsefeye dair kafama takılan her probleme büyük bir özveri ve heyecanla cevaplar veren ve felsefe anlayışımın şekillenmesinde derin izleri olan hocam Prof. Dr. Ahmet Ayhan ÇİTİL'e, doktora ders döneminde kendisinden aldığım Wittgenstein derslerinde Wittgenstein'in matematik felsefesini çalışmam hususunda beni yüreklendiren hocam Prof. Dr. Cengiz ÇAKMAK'a, İstanbul'da kaldığım süre zarfında işyerimde izinle alakalı en ufak bir sorun yaşatmayan hocam Prof. Dr. Lokman ÇİLİNGİR'e, tez çalışmalarım için Samsun'dan İstanbul'a her gittiğimde bana evlerini açan ve acaba nerede kalacağım endişesini hiç yaşatmayan dostlarım Fatih, Emrah ve Çağla'ya, toplandığımız felsefe masalarında tezimle ilgili her ayrıntıyı rahatça konuşabildiğim ve tartışabildiğim, her zaman dostluklarını ve içtenliklerini yanımda

hissettiğim dostlarım Gamze, Utkan ve Zeynep'e, tezimdeki biçimsel düzenlemelerde bana yardımcı olan ve beni her zaman sabırla dinleyen mesai arkadaşım Elif'e ve tez yazma sürecinde, ben her ne kadar kendilerini çok ihmal etmiş olsam da, bunun burukluğunu bana hiçbir zaman hissettirmeyen ve en sıkıntılı zamanlarımda her zaman yanımda olup bana destek olan kızım Gülnihal'e, oğlum Ahmet Arif'e ve eşim Pınar'a, teşekkürden çok daha fazlasını borçluyum. Onların desteği olmasaydı bu tez ortaya çıkmazdı.

Umuyorum ki bu tez, Wittgenstein'in matematik felsefesi üzerine yapılacak başka çalışmaların önünü açar ve araştırmacılara bu konuda cesaret verir.

Samsun-2019

Mehmet ARSLAN

İÇİNDEKİLER

ÖZ	iii
ABSTRACT	iv
ÖNSÖZ.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	x
KISALTMALAR LİSTESİ	xi
GİRİŞ	1

BİRİNCİ BÖLÜM

WITTGENSTEIN'IN BİRİNCİ DÖNEMİNDE MATEMATİĞİN TEMELLERİ SORUNU

1.1. Sayı Kavramının Analizi	12
1.1.1. Wittgenstein'in Erken Dönem Sayı Sayı Anlayışı	12
1.1.2. Tractatus'ta Sayı Anlayışı	25
1.2. Matematiksel Önergelerin Analizi.....	35
1.2.1. Wittgenstein'in Erken Dönem Matematiksel Önerme Anlayışı.....	35
1.2.2. Tractatus'ta Matematiksel Önerme Anlayışı.....	45

İKİNCİ BÖLÜM

WITTGENSTEIN'IN İKİNCİ DÖNEMİNDE MATEMATİĞİN TEMELLERİ SORUNU

2.1. Geçiş Dönemi	53
2.2. Wittgenstein'in İkinci Dönem Felsefesinde Brouwer Etkileri	59
2.3. Tractatusçu Resim Teorisinden Dil Oyunlarına	64
2.4. Wittgenstein'in Doğrulamacılığı	74
2.5. Matematiksel Önergelerin Anlamı	77
2.6. Matematiksel Kanıtlamanın Doğası.....	82
2.7. Dil, Matematik ve Kurala Uyma.....	87

2.8.	Wittgenstein'in Matematikte Aktüel Sonsuzu Reddi ve Sonluculuğu	92
2.9.	Bir Hesaplama Süreci Olarak Matematik ve Hesaplamanın Grameri	97
2.10.	Wittgenstein'in İkinci Dönem Matematik Felsefesinde Sayı Anlayışı 103	
2.11.	Wittgenstein ve Görüselcilik.....	110
2.12.	Wittgenstein'in İkinci Dönem Matematik Felsefesinde Küme Teorisi, Reel Sayılar ve Tümevarım	117

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

WITTGENSTEIN'IN MODERN MATEMATİK ELEŞTİRİSİ

3.1.	Wittgenstein'in Gödel Eleştirisi.....	122
3.1.1.	Gödel Teoremleri	122
3.1.2.	Wittgenstein'in Bakış Açısından Gödel Teoremleri	128
3.2.	Wittgenstein'in Cantor Eleştirisi	134
3.2.1.	Cantor'un Sonsuzluk Kavramına İlişkin Çalışmaları.....	134
3.2.2.	Wittgenstein'in Cantor Yorumu	140

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

WITTGENSTEIN'IN MATEMATİK FELSEFESİNİN ELEŞTİRİSİ

4.1.	Tractatus'ta Ortaya Konulan Göndergesel Olmayan Sayı Anlayışının Eleştirisi	148
4.2.	Tractatus Bağlamında Matematik Yalnızca Eşitlik Bildiren Önermelerden Müteşekkil Bir Yapı Olması Fikrinin Eleştirisi	155
4.3.	Wittgensteinci Resim Kuramının ve Doğrulamacılığın Gödel'in Tamamlanamazlık Teoremlerinin Ardından Yeniden Gözden Geçirilmesi	175
4.4.	Wittgenstein'in Sonlucu Matematik Anlayışının Eleştirisi	178
SONUÇ.....		183
KAYNAKÇA		188
ÖZGEÇMİŞ.....		200

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1.:Cantor'un Köşegen Argümanı	138
Şekil 4.1.:Sürekli Fonksiyon Grafiği Örneği.....	179
Şekil 4.2.: Süreksiz Fonksiyon Grafiği Örneği.....	179



KISALTMALAR LİSTESİ

A.e. :Aynieser

Alm. :Almanca

Bkz. :Bakınız

Çev. :Çeviren

Ed. :Editör/Editörler

İng. :İngilizce

s. :Sayfa/Sayfalar

GİRİŞ

Wittgenstein'a göre felsefe problemlerinin çok büyük bir kısmı, dilin mantığının ya hiç anlaşılmaması ya da yanlış anlaşılması ile ilişkilidir. Bu durumun bir sonucu olarak, filozoflar problemi çözmek adına dil kavrayışlarındaki sorunlu noktalarla yüzleşmek yerine, problemi bilimsel bir problem olarak görme ve çözümünü bilimsel metotlarla ortaya koyma eğilimindedir.¹ Sözgelimi Tanrı'nın varlığı ya da yokluğu meselesi Wittgenstein'a göre, bilimsel yordamlarla kuşatılabilecek bir mesele değildir. Ancak felsefe tarihinde pek çok düşünür, Tanrı'nın varlığına ilişkin bilimsel kanıtlamalar sunulabileceğini iddia etmiştir. Wittgenstein bu kanıtlamaları **anlam-dışı** (*Alm.* Unsinnig) bulur. Bu durum felsefenin diğer bütün alanlarında olduğu gibi matematik felsefesinin temel problemlerinde de aynı şekilde karşımıza çıkar. Bu hususu biraz daha açmak adına şunlar söylenebilir: Wittgenstein'ın birinci döneminde matematik, şeyler arasında değil, biçimler arasında ortaya çıkan bir bağıntı olarak karşımızda durmaktadır. Eşdeyişle, matematik sadece sentaktik düzeyde ele alınabilir. Ancak Wittgenstein'a göre matematiğin temelleri üzerine çalışmalar yapan pek çok düşünür, sentaksın sınırlarını aşarak semantiğin alanına girmiştir. Wittgenstein bu durumun ortaya çıkmasını, matematik dilinin mantığının yanlış anlaşılmış olmasına bağlar.

Matematik felsefesi, Wittgenstein'ın felsefesinde en başından en sonuna kadar merkezi bir yerde durur. “Bunu, 1911 güzünde Cambridge’e Russell’ın yanına felsefe çalışmaya geldiğinde, kendisi de belirtmiştir.”² Ulusal ya da uluslararası akademik çevrelerde Wittgenstein üzerine yapılmış çok sayıda araştırma vardır. Çağdaş felsefede, Wittgenstein'ın düşünceleri üzerinde yapılan akademik çalışmalar, özellikle O'nun dil felsefesini ve mantık anlayışını konu edinmektedir. Bununla birlikte, Wittgenstein'ı zihin felsefesi, ahlak, din gibi konularla ilişkilendiren çalışmalara az da olsa rastlanmaktadır. Ama bu araştırmaların çok azı onun matematik felsefesini ele alır. Tez çalışması olarak *Wittgenstein'da Matematiğin Temelleri Sorunu*'nu seçerken amacımız, bu konunun hali hazırda ülkemizde hiçbir

¹ Alice Ambrose, “Wittgenstein on Some Questions in Foundations of Mathematics”, *The Journal of Philosophy* Vol. 52, 1955, s. 197.

²Michael Potter, “Wittgenstein on Mathematics”, (Çevrimiçi), <https://www.phil.cam.ac.uk/people/teaching-research-pages/potter/articles/wittgenstein-maths-doc.pdf>, 13 Eylül 2018.

yüksek lisans ve doktora tezi bağlamında çalışılmamış olduğunu da hesaba katarak, Wittgenstein'in gerek birinci döneminde, gerek de ikinci döneminde ortaya koymuş olduğu matematik felsefesi anlayışının bütün ayrıntılarını derli toplu olarak Türkçe bir tezde araştırmacılara sunmaktır. Bununla birlikte Wittgenstein'in matematiğe bakışında problemli olarak nitelendirdiğimiz kimi hususlara kendi matematik felsefesi anlayışımızdan hareketle bir eleştiri getirmek de bu tezin bir diğer amacıdır.

Bu tez çalışmasını dört ana bölüm halinde kurguladık. Bunlardan ilki, **Wittgenstein'in Birinci Döneminde Matematiğin Temelleri Sorunu** başlığını taşıyor. Wittgenstein'in matematik felsefesini incelerken, her ne kadar her iki döneminde değişmeden kalan düşünceleri olsa da, birinci dönem ve ikinci dönem ayrımı yapmanın Wittgenstein'in dile ve matematiğe bakışının sarıh bir şekilde serimlenmesi için elzem olduğu kanaatindeyiz. Bizce Wittgenstein'in birinci dönem felsefesini çalışmak, bir bakıma *Tractatus* üzerine yapılacak muhakemenin derinleştirilmesi demektir. Bununla birlikte, Wittgenstein'in *Tractatus*-öncesi³ yazılarında ortaya koyduğu düşünceler de, *Tractatus*'a giden yolda Wittgenstein'in düşünüş tarzını anlayabilmek adına oldukça mühimdir. Bu sebeple, tezin birinci ana bölümünde sayı ve matematiksel önerme kavramları üzerinden yürüttüğümüz muhakemeyi, kendi içerisinde erken dönem ve *Tractatus* dönemi olarak bölümledik. Dolayısıyla ilk alt bölümün başlığını **Sayı Kavramının Analizi** şeklinde attık. Bunun da altında ilk olarak **Wittgenstein'in Erken Dönem Sayal Sayı Anlayışı** başlığı altında, Wittgenstein'in *Defterler: 1914-1916* adıyla basılan eserinden hareketle, sayal sayılara ilişkin Frege'nin *Aritmetiğin Temelleri*'nde ve Russell'in *Principles of Mathematics* ve *Principia Mathematica*'da öne sürdükleri mantıksalci (*Ing. Logician*) tanımlamaları reddedişinin gerekçeleri üzerinde durduk. Wittgenstein'in Fregeci ve Russellci sayı kuramlarını reddederkenki esas gerekçesi, özdeşlik bağıntısının Frege ve Russell'in düşündüğünün aksine şeyler arasında değil biçimler arasında zuhur eden bir bağıntı olduğunu düşünmesidir. Bunun anlaşılabilmesi için, Wittgenstein'in erken dönem felsefesinin temel kavramlarından anlam, önerme, sözde-önerme ve genel önerme gibi kavramların açıkça anlaşılması gerektiğini düşündüğümüzden muhakememizi bu kavramlar üzerinden yaptık.

³ Buradan sonra "erken dönem" olarak anılacak.

Bundan sonra **Tractatus'ta Sayı Anlayışı** başlığı altında Wittgenstein'in *Tractatus'ta* ortaya koyduğu sayı anlayışının ayrıntılarını irdeledik. Bu irdelemeyi esas itibariyle *Tractatus'un* temel kavramlarından dizi, içsel bağıntı-dışsal bağıntı, biçimsel kavram, sahici kavram, işlem, ardıllık bağıntısı, sayı dizilerinin sıralı olması... v.b. kavramların derinlemesine incelenmesi üzerine kurguladık. Bu incelemeler neticesinde, Wittgenstein'in *Tractatus'ta* benimsediği sayı anlayışının özünün "Sayı a priori verili biçimsel bir kavramdır" şeklindeki sav olduğu sonucuna ulaştık.

Ardından Wittgenstein'in birinci döneminde ortaya koyduğu matematiksel önerme anlayışının incelenmesine geçtik. Bu bölümün üst başlığını **Matematiksel Önergelerin Analizi** olarak attık. Ardından sayı anlayışını analiz ederken uygulanan bölümlerle paralel olacak şekilde **Wittgenstein'in Erken Dönem Matematiksel Önerme Anlayışı** başlığı altında Wittgenstein'in erken döneminde ortaya koymuş olduğu matematiksel önerme anlayışının ayrıntılarını ele aldık. Bilindiği üzere, Wittgenstein'in ilk dönem felsefesi büyük ölçüde Frege ve Russell'in mantıksalcılığı üzerinden şekillenmiştir. Bu sebeple, ilk olarak mantıksalcılığın temel tezini ve bu tezin tarihsel ve kavramsal çözümlemesini yapmaya çalıştık. Bunu yaparken, Frege'nin dizgesinde ortaya çıkan paradoks, bu paradoksun Frege'nin dizgesi için ne anlama geldiği, Russell'in bu paradoksun yıkıcı etkilerini aşmak adına ne gibi çözümler önerdiği ve Russell'in nasıl bir matematik kurmaya çalıştığı üzerinde durduk. Sonrasında Wittgenstein'in erken döneminde Fregeci ve Russellci matematik anlayışına, matematiğin yalnızca biçimsel nesneler ve biçimsel bağıntılardan müteşekkil bir yapı olması fikri üzerinden getirdiği eleştirileri ele aldık.

Sonrasında **Tractatus'ta Matematiksel Önerme Anlayışı** başlığı altında Wittgenstein'in matematiksel önermeden ne anladığına değindik. Wittgenstein'a göre matematiksel bir önerme, sayıların/işaret dizilerinin bir takım biçimsel kurallar uyarınca birbirlerinin yerine kullanılabilir/yer değiştirebilir olduğunu ifade eden, eşdeyişle, eşitlik bildiren bir tümcedir. Dolayısıyla Wittgenstein'a göre, matematiksel bir önerme yalnızca sentaktik düzeyde kalınarak analiz edilmelidir. Ancak Wittgenstein, Frege ve Russell'in kuramlarında sentaksı aşır semantiğin alanına giren yanlar bulunduğunu ve bu sebeple bu kuramların hatalı olduğunu

savunur. Bu bölümde yürütülen tartışmalarla Wittgenstein'in Frege ve Russell'in kuramlarına karşı çıkışının altında yatan saikleri serimlemeye çalıştık.

Çalışmanın ikinci ana bölümünün başlığı **Wittgenstein'in İkinci Döneminde Matematiğin Temelleri Sorunu**'dur. Her ne kadar Wittgenstein'in ikinci dönem matematik felsefesini, sonlucu matematik felsefesi, doğrulamacı matematik felsefesi ya da pragmatik matematik felsefesi diye ayrıca bölümlemek mümkün olsa da biz literatürdeki yaygın bölümlemeye riayet ederek anılan kısımları ikinci dönem matematik felsefesi üst başlığı altında inceledik. Bu bölümde ilk olarak Wittgenstein'in felsefeye yeniden dönmesi sürecinin tarihsel arka planına değindik. Ardından **Geçiş Dönemi** başlığı altında Wittgenstein'in ikinci dönemiyle birlikte Tractatusçu felsefe yapma şeklinden vazgeçmesinin altında yatan saikleri inceledik.

Ardından **Wittgenstein'in İkinci Dönem Felsefesinde Brouwer Etkileri** başlığı altında, Brouwer'in görüselci matematik felsefesinin Wittgenstein'in felsefi söylemi üzerinde bıraktığı etkileri irdeledik. Wittgenstein'in ikinci dönem matematik felsefesinin temel yönelimlerinden doğrulamacılık ve sonluculuğun büyük ölçüde yukarıda anılan Brouwer etkisi ile açıklanabileceği sonucuna ulaştık.

Sonrasında **Tractatusçu Resim Teorisinden Dil Oyunlarına** başlığı altında Wittgenstein'in felsefi metamorfozunu resim teorisi ve dil oyunları bağlamında açıklamaya çalıştık. Bu bölümde öne çıkan iddia, ikinci dönemiyle birlikte dile ve dünyaya bakışı değişen Wittgenstein'in bunlara paralel olacak şekilde matematiğe bakışının da değiştiği iddiasıdır. Wittgenstein'in birinci döneminde benimsediği ideal dil anlayışı matematiği de biçimselcilik üzerinden ele alması ile sonuçlanırken, ikinci döneminde felsefesinin merkezine yerleştirdiği gündelik dil anlayışı pragmatik bir matematik anlayışının ortaya çıkması ile sonuçlanmıştır.

Ardından **Wittgenstein'in Doğrulamacılığı** başlığı altında Wittgenstein açısından matematiksel önermelerin anlamı mevzuunu irdeledik. Birinci döneminde matematik mevzubahis olduğunda sınırların sentaks⁴ üzerinden çizildiğini belirten Wittgenstein, ikinci döneminde benimsediği pragmatik anlam yaklaşımı neticesinde

⁴ Burada sentakstan kasıt, matematiğin yalnızca biçimsel nesnelerle ve biçimsel ilişkilerle kaim bir yapı olmasıdır.

biçimselcilikten uzaklaşmış ve matematiksel önermelerin anlamlarının bu önermelerin kullanım bağlamlarında ortaya çıktığını düşünür olmuştur. Bu bölümün ana fikri şudur: Wittgenstein'a göre sonlu adımda doğrulanabilir olanın dışında bir matematiksel önerme yoktur. Wittgenstein'ın bu düşünüş biçimi matematik felsefesi bağlamında oldukça ciddi sonuçlar doğurmuştur. Çalışmanın son bölümünde bu sonuçlardan bazılarını tekrar ele aldık ve eleştirdik.

Sonrasında **Matematiksel Önermelerin Anlamı** başlığı altında bir önceki bölümde giriş yapılan anlam mevzuunu derinleştirilmeye çalıştık. Wittgenstein için matematiğin bizatihi kendisinin de bir dil oyunu olmasının ne anlama geldiği ve böylesi bir düşünüşün matematiğe bakışımızı nasıl etkilediği meselelerini açtık. Son olarak da dilin kendisi ile uygulaması arasındaki farkların matematik dili bağlamındaki yansımaları üzerinde durduk.

Bundan sonraki bölümde ise **Matematiksel Kanıtlamanın Doğası** başlığı altında, Wittgenstein'ın ilk döneminde varsaydığı mantıksal zorunluluk ve matematiksel kanıtlama arasındaki ilişkiyi ikinci dönemi ile birlikte terk etmesi ve bunun yerine matematiksel kanıtlamaları yargı uzlaşımı üzerinden, insan merkezli bir fenomen olarak görmesi üzerinde durduk.

Ardından **Dil, Matematik ve Kurallara Uyuma** başlığı altında Wittgenstein'ın ikinci döneminin temel metaforu olan oyun metaforunun ayrıntılarını ele aldık. Bir oyunu oyun yapan en önemli bileşenlerinin oyunu oynayanlar ve oyunun kuralları olduğu düşüncesinin, matematik söz konusu olduğunda nasıl değerlendirilmesi gerektiğini, Wittgenstein'ın söylemleri üzerinden açtık.

Sonrasında **Wittgenstein'ın Matematikte Aktüel Sonsuzu Reddi ve Sonluculuğu** başlığı altında ikinci dönem matematik felsefesinin temel yönelimlerinden olan sonluculuğunu, özellikle *Remarks on Foundations of Mathematics*'teki değiniler üzerinden ele aldık. Wittgenstein'ın ikinci döneminde Brouwer etkisiyle benimsediği sonlucu matematik anlayışının ana fikri şudur: Sonlu adımda inşa edebilir olduğumuz nesne çeşitliliği dışında bir şeye vardır diyemeyiz ve bunlar hakkında doğru önermeler kuramayız. Bu düşünüş tarzı, bugün matematik yaparken kullandığımız pek çok yordamın matematik sahnesinin dışına atılması

anlamına gelmektedir. Bu bahisle oldukça ciddi sonuçları haizdir. Bu sonuçların bir kısmını tezin son bölümünde yeniden tartışmak adına bu bölümün sonunda listeledik.

Ardından gelen bölümün başlığı **Bir Hesaplama Süreci Olarak Matematik ve Hesaplamanın Grameri**'dir. Bu bölümde Wittgenstein'in gramerci yaklaşımı çerçevesinde "Matematik yapmak ne demektir?", "Matematiksel sembollerin anlamı nasıl belirlenir?", "Hesaplamanın özünde linguistik bir pratik olması ne demektir?", "Hesaplamanın kuralları nasıl belirlenir ve bu kurallar gramerle ne gibi bir ilişki içerisindedir?" minvalinde sorulara cevaplar aramaya çalıştık. Son olarak, Wittgenstein'in matematiksel problemler ile matematiksel soruşturmanın problemleri arasında yapmış olduğu ayrıma değindik.

Takip eden bölümün başlığı **Wittgenstein'in İkinci Dönem Matematik Felsefesinde Sayı Anlayışı**'dir. Çalışmanın birinci ana bölümünde, Wittgenstein'in birinci döneminde sayıyı a priori verili biçimsel bir kavram olarak nitelendirdiğini belirtilmişti. Bu bölümde ise Wittgenstein'in ikinci döneminde benimsediği gramerci tutumla paralel olacak şekilde "Sayı nedir?" sorusunun yerini "Sayı tümcesinin grameri nedir?" sorusunun aldığı tespitini yaptık ve bu durumun gerekçelerini irdeledik.

Ardından **Wittgenstein ve Görüselcilik** başlığı altında Brouwer'in görüselci matematik felsefesine ilişkin ortaya koymuş olduğu eleştirileri irdeledik. Wittgenstein'in ikinci dönem matematik felsefesinde görüselci matematik felsefesinin kimi yanlarından etkilendiği açıktır. Ancak Wittgenstein, bu etkileşim neticesinde görüselcilerin düşüncelerini olduğu gibi değil, kendince revize ederek kendi felsefi paradigmasına eklemlenmiştir. Bu bölümde anılan hususların ayrıntılarına değindik.

Çalışmanın bu ana bölümünün son başlığı **Wittgenstein'in İkinci Dönem Matematik Felsefesinde Küme Teorisi, Reel Sayılar ve Tümevarım**'dir. Wittgenstein'in ikinci dönem matematik felsefesi oldukça dağınık bir yapıdadır. Bu sebeple, Wittgenstein'in farklı metinlerde değindiği konuları bir araya getirmek ve bunları bütünlüklü bir sistem içerisinde incelemek epeyce zordur. Ancak bazı kavramlar bu dağınık değiniler arasında ön plana çıkmıştır. İşte bu bölümde bu

kavramlardan üçü olan küme teorisini, reel sayıları ve tümevarımı Wittgenstein'in bakış açısı üzerinden inceledik.

Çalışmanın üçüncü ana bölümünün başlığı **Wittgenstein'in Modern Matematik Eleştirisi**'dir. Bu bölümde esas olarak Wittgenstein'in özellikle *Remarks on Foundations of Mathematics*'de andığı ve oldukça sert bir şekilde eleştirdiği iki matematiksel kuramı irdledik. Bunlardan ilki Gödel'in tamamlanamazlık teoremleridir, ikincisi ise Cantor'un sonsuz sayılara ilişkin kuramlarıdır.

Wittgenstein'in Gödel eleştirisine geçmeden önce **Gödel Teoremleri** başlığı altında Gödel'in tamamlanamazlık teoremlerinin ne ifade ettiği ve felsefi sonuçları üzerinde durduk. Ardından da Wittgenstein'in tamamlanamazlık teoremlerini eleştirirken ortaya attığı gerekçeler üzerinde durduk.

Sonrasında ise Wittgenstein'in Cantor eleştirisine geçtik. Bir önceki bölümde yaptığımız gibi, ilk olarak **Cantor'un Sonsuzluk Kavramına İlişkin Çalışmaları** başlığı altında Cantor'un bakış açısının ayrıntılarını serimledik. Ardından da Wittgenstein'in Cantor'un sonsuzluğa ilişkin çalışmalarını ne gibi saiklerle değersizleştirmeye çalıştığı üzerinde durduk.

Çalışmanın son ana bölümü için **Wittgenstein'in Matematik Felsefesinin Eleştirisi** başlığını attık. Bu bölümde Wittgenstein'in her iki döneminde ortaya koyduğu kimi yaklaşımlar üzerinde yaptığımız muhakemeyi derinleştirerek Wittgensteinci matematik felsefesine yönelik bazı eleştiriler getirdik.

İlk olarak Wittgenstein'in *Tractatus*'ta ortaya koymuş olduğu göndergesel olmayan sayı anlayışını eleştirdik. Sonrasında (F. P. Ramsey'in eleştirilerini de hesaba katarak geliştirdiğimiz varsayım üzerinden⁵) Wittgenstein'in matematiksel önermeler yalnızca eşitlik bildiren önermelerdir düşüncesi üzerinden, bu düşüncenin matematiğin bütününe kuşatmaktan uzak olduğunu, eşitsizlikleri hesaba katarak göstermeye çalıştık. Ardından, Wittgenstein'in birinci döneminde ortaya koyduğu resim kuramının ve ikinci döneminde ortaya koyduğu doğrulamacılık anlayışının

⁵ Varsayımımız ve Ramsey'in eleştirisi için tezimizin 4.1.inci bölümüne bakılabilir.

Gödel'in tamamlanamazlık teoremleri ile bir arada düşünülmesinin çelişkiler doğurduğunu ve Gödel teoremlerini kabul ettiğimiz takdirde, Wittgensteinci doğrulamacılığı ve sonluculuğu reddetmemiz gerektiğini iddia ettik. Sonrasında ise Wittgenstein'in ikinci döneminde benimsediği sonlucu matematik anlayışının eleştirisini yaptık ve böyle bir matematik anlayışının kabul edilmesi durumunda bugün matematik yaparken kullanılan pek çok yordamın meşruiyet zeminini yitireceğini iddia ettik.

Bu çalışmada Wittgenstein'in eserlerini çoğunlukla kronolojik bir sırayı gözeterek inceledik. Aşağıda bu eserlere ilişkin kronolojik bir sıra verdik. Bununla birlikte, konu bütünlüğünü sağlamak adına, yeri geldiğinde bu eserler arasında geriye ve ileriye sıçramalar yaptık. Sıralamada ölçü olarak eserlerin basım tarihlerini değil, yazıldığı tarihleri dikkate aldık.

- *Defterler 1914-1916* (Alm. Tagebücher 1914-1916, İng. Notebooks 1914-1916). Bu eser ilk olarak Blackwell yayınevi tarafından 1960'ta basıldı.
- *Prototractatus*. 1965 yılında Wittgenstein'in öğrencisi olan G. H. von Wright Viyana'da Wittgenstein'in evinde bir el yazması bulur. Bu el yazması nerede ise *Tractatus*'un aynısıdır. Bu el yazması 1971 yılında Wright'ın önerisi ile *Prototractatus* adı ile basılır.
- *Tractatus-Logico Philosophicus*. Wittgenstein'in Birinci Dünya Savaşı öncesinde başlayıp 1918'de bitirdiği *Tractatus* ilk olarak 1921 yılında yayınlandı.
- *Russell, Keynes ve Moore'a Mektuplar* (İng. Letters to Russell, Keynes and Moore). Bu mektuplar G. H. von Wright tarafından 1974 tarihinde yayınlandı.
- *Felsefi Değiniler* (Alm. Philosophische Bemerkungen, İng. Philosophical Remarks). *Felsefi Değiniler* Wittgenstein'in 1929-1930 yılları arasında tuttuğu notlarından derlendi ve Rush Rhees tarafından ilk olarak 1964 yılında yayınlandı.
- *Ludwig Wittgenstein ve Viyana Çevresi* (Alm. Ludwig Wittgenstein und der Wiener Kreis, İng. Ludwig Wittgenstein and Vienna Circle) Friedrich

Waismann'ın 1929-1932 yılları arasında Wittgenstein ile yaptığı söyleşilerde tuttuğu bu notlar ilk olarak 1967 yılında yayınlanmıştır.

- *Wittgenstein's Lectures: Cambridge, 1930-1932*. Wittgenstein'in 1930-1932 yılları arasında Cambridge'de verdiği derslerin notlarından Alice Ambrose tarafından derlenip basılan kitap.
- *Wittgenstein's Lectures, Cambridge 1930-32*. Wittgenstein'in 1930-1932 yılları arasında Cambridge'de verdiği derslerin notlarından Desmond Lee tarafından derlenip basılan kitap.
- *Wittgenstein's Lectures, 1932-35*. Wittgenstein'in 1932-1935 yılları arasında Cambridge'de verdiği derslerin notlarından Alice Ambrose tarafından derlenip basılan kitap.
- *Felsefi Dilbilgisi* (Alm. Philosophische Grammatik, İng. Philosophical Grammar). Wittgenstein'in 1933 yılına kadar tuttuğu notlardan derlenen bu eseri Rush Rhees tarafından ilk olarak 1969 yılında yayınlanmıştır.
- *Mavi Kitap* (Alm. Das Blaue Buch, İng. The Blue Book), *Kahverengi Kitap* (Alm. Das Braune Buch, İng. The Brown Book). Türkçede birlikte basılan bu iki kitap Wittgenstein'in 1933-1936 yılları arasında Cambridge'de verdiği derslerde öğrencileri tarafından tutulan notlardan oluşmaktadır ve Rush Rhees tarafından yayınlanmıştır.
- *Matematiğin Temelleri Üstüne Değiniler* (Alm. Bemerkungen Über die Grundlagen der Mathematik, İng. Remarks on the Foundations of Mathematics). Bu değiniler Wittgenstein'in 1937-1944 yılları arasında tuttuğu notlardan G. E. M. Anscombe, Rush Rhees ve G. H. von Wright tarafından seçilerek yayınlanmıştır.
- *Matematiğin Temelleri Üstüne Dersler* (Alm. Vorlesungen Über die Grundlagen der Mathematik, İng. Lectures on the Foundations of Mathematics). Bu eser Wittgenstein'in 1939 senesinde Cambridge'de verdiği ders notlarının bir derlemesidir ve 1978'de Cora Diamond tarafından yayınlanmıştır.
- *Felsefi Araştırmalar* (Alm. Philosophische Untersuchungen, İng. Philosophical Investigations) Wittgenstein'in ikinci dönem felsefesini en iyi yansıtan

alışması kuşkusuz *Felsefi Araştırmalar*'dır. Wittgenstein bu kitabını 1945'de bitirir ancak çeşitli nedenlerle kendisi hayatta iken yayınlamaz. Ancak vefatından iki yıl sonra yani 1953'te Blackwell yayınevinde yayınlanır.

- *Kesinlik Üstüne* (Alm. Über Gewissheit, İng. On Certainty) Wittgenstein'in 1949-1951 yılları arasında Almanca olarak yazdığı bu metin notlardan G. E. M. Anscombe ve G. H. von Wright tarafından 1969 yılında yayınlanmıştır.
- *Kültür ve Değer* (Alm. Vermischte Bemerkungen, İng. Culture and Value). Wittgenstein'in 1929-1949 yılları arasında tuttuğı notlardan derlenen bu seçki G. H. von Wright tarafından yayınlanmıştır.

BİRİNCİ BÖLÜM

WITTGENSTEIN'IN BİRİNCİ DÖNEMİNDE MATEMATİĞİN TEMELLERİ SORUNU

Wittgenstein'in matematik felsefesi genellikle diğer felsefi eğilimlerinin gölgesinde kalmıştır. Bu durum her ne kadar Wittgenstein'in kendisi için bu şekilde olmasa da,⁶ Wittgenstein yorumcularının çoğu onun matematik felsefesini göz ardı etmiştir. Hatta bazı yorumcular, Wittgenstein'in felsefeye başlarken ilk hedefinin matematik felsefesi olduğunu ama zaman içerisinde ilgisinin felsefenin diğer alanlarına kaydığını düşünmektedir.⁷ Öte yandan, bazı Wittgenstein yorumcuları da, O'nun felsefesinin bütünü göz önünde bulundurulduğunda mantık ve matematik tartışmalarının merkezi bir yer tuttuğunu sıklıkla dile getirmişlerdir. Soykan, *Felsefe ve Dil* adlı çalışmasında Wittgenstein'in her iki döneminde de mantık ve matematiğin önemli bir yer tuttuğunu, Wittgenstein'in çabasının mantık ve matematiği dünyaya iz düşürmek olduğunu ve *Tractatus*'un böyle bir çabanın ürünü olduğunu söyler.⁸ Bununla birlikte, Wittgenstein'in gerek erken dönem yazılarında, gerek de bizzat *Tractatus*'ta amacının matematik felsefesinde tartışılan konuların bütününe içine alacak şekilde açıklamalar getirmek olmadığı açıktır. Anılan çalışmalar incelendiğinde, Wittgenstein'in yalnızca kimi matematik felsefesi problemlerine kendi felsefe dizgesinden hareketle açıklamalar getirdiği ve bu açıklamaları sistemli bir şekilde temellendirmek gibi bir niyetinin olmadığı kolaylıkla görülecektir.

Wittgenstein'in matematik felsefesini incelediğimiz bu çalışmada O'nun felsefi yönelimlerdeki farklılaşmayı hesaba katarak bir bölümlenme yaptık. Buradan hareketle, çalışmanın birinci ana bölümünde Wittgenstein'in birinci döneminde benimsemiş olduğu matematik anlayışını ele aldık. Wittgenstein'in birinci dönem felsefesi genellikle *Tractatus* ile özdeşleştirilmekle beraber, bu bölümde *Defterler*'den yaptığımız alıntılarla erken döneminde Wittgenstein'in nasıl bir

⁶ Wittgenstein felsefeye yaptığı en büyük katkının matematik felsefesi alanında olduğunu belirtmiştir. Bkz. Ray Monk, **Wittgenstein**, Çev. Berna Kılınçer ve Tülin Er, Kabalcı Yayınları, İstanbul, 2005, s. 659.

⁷ Michael B. Wrigley, "Wittgenstein's Early Philosophy of Mathematics", (Yayınlanmamış Doktora Tezi), University of California, Berkeley, 1987, s. 6.

⁸ Ömer N. Soykan, **Felsefe ve Dil**, Kabalcı Yayınları, İstanbul, 1995, s. 17.

matematik felsefesi benimsediğini ortaya koymaya çalıştık. Wittgenstein'in birinci dönem matematik felsefesi incelenirken çalışmanın odağına sayı ve matematiksel önerme kavramlarını aldık.

1.1. Sayı Kavramının Analizi

Bu bölümde incelememizin odağında Wittgenstein'in erken döneminde ve *Tractatus*'ta benimsemiş olduğu "sayı" anlayışı bulunmaktadır.

1.1.1. Wittgenstein'in Erken Dönem Sayal Sayı Anlayışı

Çalışmanın bu bölümünün amacı, Wittgenstein'in erken döneminin kimi kavramları üzerine yapılacak muhakemeyi derinleştirmek suretiyle, Wittgenstein'in Russellci sayal sayı anlayışını reddederkenki saikleri gözler önüne sermektir. Wittgenstein ilk başlarda Frege ve Russell'in sayal sayılar hakkındaki düşüncelerini benimsemiş görünmektedir. Ancak sonraları sayal sayılara ilişkin Russellci kavrayıştan uzaklaşmış ve zamanla bu kavrayışı bütünüyle reddetmiştir. Wittgenstein'in reddiyesinin altında yatan gerekçeleri anlayabilmek adına yüzümüzü onun erken dönem felsefesinin **anlam, önerme, sözde-önerme, genel önerme** gibi kavramlarının ve önerme ile olgu durumu arasındaki **resmetme bağıntısının** ayrıntılarına dönmemiz gerekmektedir. Ancak bundan sonra Wittgenstein'in Russellci sayı kuramına "Özdeşlik bildiren tümceler dünyayı betimlemez" gibi bir düşünce üzerinden getirdiği eleştiriler anlam kazanacaktır.

Bu bölümde ilk olarak Frege ve Russell'in sayal sayılara ilişkin ortaya koyduğu yaklaşımları irdelleyeceğiz. Wittgenstein'in eleştirilerinin asıl muhatabı bilindiği üzere Russell'dir. Ancak Russell'in dizgesini oluştururken çıkış noktası Frege olduğundan işe Frege'nin *Aritmetiğin Temelleri*'nde vermiş olduğu sayal sayı tanımı ile başlayacağız.

"0 sayısını, altına hiçbir nesnenin düşmediği kavrama ait sayı olarak tanımlamak akla yatkın geliyor. Ancak burada, 0'ın yerine aynı anlama gelen "yok" geçmiş görünüyor; bu yüzden şu şekilde tanımlamayı tercih ediyoruz: Eğer a ne olursa olsun, a 'nın bir kavram altına düşmediği tümcesi tümel olarak doğruysa, 0 sayısı bu kavrama aittir. Benzer biçimde, 1 sayısının F kavramına

ait olduğunu söyleyebiliriz, eğer a ne olursa olsun, “ a ’nın F kavramının altına düşmediği” tümel olarak doğru değilse ve “ a F ’in altına düşer” ve “ b F ’in altına düşer” tümcelerinden, a ’nın ve b ’nin aynı oldukları sonucu tümel olarak çıkıyorsa. Şimdi geriye, herhangi verilmiş bir sayıdan bir sonraki sayıya geçmeyi sağlayacak genel bir tanım vermek kalıyor. Aşağıdaki şekilde ifade etmeyi deneyelim: Eğer F kavramının altına düşen bir a nesnesi varsa ve n sayısı da “ F ’in altına düşen ama a olmayan” kavramına ait olursa, $(n + 1)$ sayısı F kavramına ait olur.”⁹

Frege’nin amacı, aritmetiksel nesneleri ve nesneler arasındaki bağıntıları, Kant’ın iddia ettiğinin aksine, işin içerisine görüsel/deneyimden gelen hiçbir unsuru dâhil etmeksizin, yalnızca mantıksal yordamlar aracılığıyla tesis etmektir. Frege, bu yolla aritmetik yargıların analitik yargılar olduğunun gösterilebileceğini ve aritmetiğin biçimsel aksiyomatik bir dizge olarak tesis edilebileceğini düşünür. Aristoteles mantığının, matematiksel kesinliği ifade etmek için yeterince yetkin olmadığını düşündüğünden *Begriffsschrift*’te bu sorunla uğraşır. Frege’nin *Begriffsschrift*’te ortaya koyduğu yeni mantık anlayışı, bugün **niceleme mantığı** olarak adlandırılan mantığın öncüsü konumundadır. Frege için geriye niceleme mantığının sunduğu olanaklarla, sayıları görüsel hiçbir şeye müracaat etmeden, sadece mantıksal yordamlarla tanımlamak kalmıştır. Yukarıda *Aritmetiğin Temelleri*’nden alıntılanan düşünce böyle bir kavrayışın ürünüdür.

Frege, aritmetiğin mantığa indirgenebileceğini gösterdiğini düşündüğü sırada Russell’dan bir mektup alır. Mektupta yazılanları okuduğunda çalışmasının oldukça ciddi bir problemi haiz olduğunu fark eder.

“Russell, 16 Haziran 1902’de Frege’ye yazdığı mektubunda, *Aritmetiğin Temelleri*’ni heyecanla okuduğunu, ancak sistemdeki beşinci aksiyomun¹⁰ bir paradoksa yol açtığını fark ettiğini bildirir. Kısaca bahsetmek gerekirse bu paradoks şu şekildedir: Diyelim ki w , kendi kendisine yüklenemeyecek olan yüklem olsun. Bu durumda w kendisine yüklenenebilir mi? Verilecek her yanıt karıştıyla sonuçlanıyor. Bu paradoksun Frege’nin sisteminde yol açtığı açmazı şöyle özetleyebiliriz: Doğal sayıların sonsuz olduğu pek çok farklı yolla ispatlanabilir, ama bu sonsuzluğu Frege’nin *Grundgesetze der Arithmetik*’in

⁹ Gottlob Frege, *Aritmetiğin Temelleri*, Çev. H. Bülent Gözkân, Yapı Kredi Yayınları, İstanbul, 2012, s. 150.

¹⁰ Frege’nin sisteminin beşinci aksiyomu şöyledir: İki fonksiyon aynı argümanlar için aynı değere sahiptirler; yalnızca ve yalnızca, onların değer alanları aynı ise.

birinci cildinde ortaya koyduğu aksiyomlarını kullanarak ispatlayamayız.¹¹ Bunu yapmaya kalkıştığımızda Russell'in bulduğu paradoksla karşılaşırız. Russell paradoksu, Frege'nin aritmetiği aksiyomatize ederek mantığa indirgeme çabasının en azından işin matematiği itibariyle akamete uğraması anlamına gelir."¹²

Frege, Russell'in mektubunun ardından, paradoksun dizgesi için oluşturduğu tehdidi bertaraf etmek adına çeşitli denemelerde bulunur. Ancak paradoksu eleyecek bir çözüm bulamaz. Öte yandan, Russell kendi bulduğu paradoksa rağmen aritmetiğin mantığa indirgenebileceği tezinden vazgeçmez. Çalışmalarının odağına bu tezi alır.

Öncelikle, Russell'in sayal sayı tanımlamasında Frege ile benzer bir noktadan hareket ettiğine dikkat çekmek isteriz. Russell'in sayı tanımlamasını daha önceki bir çalışmamızdan¹³ alıntılacak olursak:

"Russell *The Principles of Mathematics*'te¹⁴ sonlu kardinal sayıları ve sonlu ötesi sayal X_0 'ı tanımlarken Peano aksiyomları ile işe başlar. Başlangıçta elinde sadece üç kavram vardır. Bunlar; "0", "doğal sayı" ve "ardıl" (*Ing.* successor) kavramlarıdır.

- 0 bir sayıdır.
- Eğer n bir sayı ise, ardılı da bir sayıdır.
- Eğer n ve m sayılarının ardılları aynı ise, $n = m$ 'dir.
- 0 hiçbir sayının ardılı değildir.
- Eğer bir σ kümesi 0'ı ve σ 'daki her sayının ardılını kapsıyorsa her sayı σ 'dadır.

Russell sonlu sayal sayıların her hangi bir tanımının Peano aksiyomlarını sağlaması gerektiğini düşünür. Bu sebeple ilk olarak sadece Peano aksiyomlarını içeren bir " X_0 " sınıfı tanımlar. Sonrasında sayal sayılar sınıfını Peano aksiyomlarından bağımsız olarak tanımlamaya çalışır. Ardından sayal

¹¹ Şahabettin Yalçın, "Frege: Semantikten Matematiğe Paradokslar", **Felsefe Tartışmaları**, Sayı 30, 2003, s. 57.

¹² Mehmet Arslan, "Matematiğin Felsefi Temelleri Üzerine Bir İnceleme", **3. Uluslararası Felsefe, Eğitim, Sanat ve Bilim Tarihi Sempozyumu Bildiri Kitabı**, Ed. Çağlar Kaya v.d., 2018, s. 169. (Çevrimiçi) https://drive.google.com/file/d/16d1Et43jjp0J9Pay8M0A_ydVRDTXDOT/view

¹³ Mehmet Arslan, Selvi Elif Gök, "Gödel'in Tamamlanamazlık Teoremlerinin Ardından Matematiğin Temelleri Tartışmaları", **Uluslararası İstanbul Felsefe Kongresi Bildiri Kitabı**, Cilt 2, Ed. Özgüç Güven, Egemen Kuşçu, Mantık Derneği Yayınları, 2018, s. 3-4.

¹⁴ Bkz. Bertrand Russell, **The Principles of Mathematics**, George Allen and Unwin, London, 1937, s. 124-125.

sayılar sınıfının X_0 'a ait olduğunu gösterir.¹⁵ Bunu yapmak için bire-bir bir bağıntı tanımlar, öyle ki bu bağıntıya göre, eğer x ve x' y ile bağıntılı ise, o zaman $x = x'$, ve eğer x , y ile ve y' ile bağıntılı ise, o zaman $y = y'$ olur.¹⁶ Sonra X_0 'ı, μ sınıflarının sınıfı olarak tanımlar. Burada varsaydığı şeyler şunlardır:

- Her μ aynı zamanda her hangi bir bire-bir bağıntının tanım kümesini oluşturur,
- Yukarıda tanımlanan bağıntı μ 'nun her bir elemanı için uygulanabilir,
- Herhangi bir elemanın ardılı olmayan en az bir eleman vardır,
- Herhangi bir elemanın ardılı olan elemanın bir ardılı mutlaka vardır,
- μ kendisinin önceli (*Ing.* predecessor) olmayan bir elemanını içeren ve σ 'ya ait olan her elemanın ardılını içeren bir σ sınıfı tarafından içerilir.¹⁷

Russell bu tanımlamalar ve varsayımların ardından sonlu sayal sayıları şu şekilde tanımlar:

- 0, tek elemanı boş sınıf (*Ing.* null class) olan sınıfların sınıfıdır.
- 1, boş olmayan ve her hangi iki elemanı x ve y ise $x = y$ olan sınıfların sınıfıdır.
- Eğer n bir sayı ise, $n + 1$; n elemanlı bir sınıfa bir eleman eklenmesi ile oluşan sınıfın sınıfı olarak tanımlanır.”

Russell *The Principles of Mathematics*'te bu yolla sonlu sayal sayıların tanımının verilebileceğini iddia eder.¹⁸ Ona göre sonlu sayal sayıların bu tanımı Peano aksiyomlarına uygun olacak şekilde,

- 0'ın bir sayı olduğunun,
- Eğer n 'in ardılının $n + 1$ olduğunu kabul edersek, n 'in ve $n + 1$ 'in sayı olduklarının,
- Eğer $n + 1 = m + 1$ ise, $n = m$ olduğunun,
- Eğer n herhangi bir sayı ise $n + 1$ 'in 0'dan farklı olduğunun,
- Eğer σ , 0'ı, n 'i ve $n + 1$ 'i içeren bir sınıf ise bütün sonlu sayıları da içerdiğinin ispatlarının verilebileceğini düşünür.

Şimdi, Russell'in dizgesinin olmazsa olmazı konumdaki sonsuzluk aksiyomuna (*Ing.* Axiom of Infinity) da kısaca değinelim. Zira Wittgenstein'in Russellci sayı kuramına getireceği eleştirinin bir vechesi de sonsuzluk aksiyomuna ilişkindir.

Şöyle düşünelim: Dünyada n sayıda birey olsun ve n sayısı sonlu bir sayı olsun. O zaman 2^n sayıda birey sınıfı ve 2^{2^n} sayıda sınıfların sınıfı olacaktır. Böylelikle bu

¹⁵ A.e., s. 127.

¹⁶ A.e., s. 113.

¹⁷ A.e., s. 127.

¹⁸ A.e., s. 117-118.

şekilde verilecek olan her sınıfın sayal sayısı sonlu olacaktır. Bu yolla verilen her sayal sayı sınıfından daha büyük sınıflar inşa etmek mümkündür. Ancak ne yaparsak yapalım ekleme veya sayıları arttırma yoluyla sonsuz bir sayıya ulaşamayız. Bu sebeple, tam da bu noktada, Russell “Hiç bir sonlu birey sınıfı var olan bütün bireyleri içeremez” iddiasından hareketle sonsuzluk aksiyomunu tanımlar.¹⁹ Sonsuzluk aksiyomu, Zermelo-Fraenkel sisteminde biçimsel olarak şöyle tanımlanır:

$$\exists X(\emptyset \in X \& \forall Z(Z \in X \supset Z \cup \{Z\} \in X))$$

Eşdeyişle, öyle X kümeleri vardır ki, $\emptyset \in X$ ve her $Z \in X$ için $Z \cup \{Z\} \in X$ ’tir.²⁰ Ramsey sonsuzluk aksiyomunun ne ifade ettiğini özetle şöyle belirtir: “Sonsuz sayıda birey vardır.”²¹ Russell sonlu sayal sayılara dair bu belirlemelerden sonra sonsuz sayı X_0 ’ın veya Cantor’un herhangi bir sonlu-ötesi sayısının tanımlanması için sonsuzluk aksiyomunun gerekli olduğunu savlar.²²

Bu bölümde buraya kadar Frege ve Russell’in sayal sayı kavrayışlarının ayrıntılarını irdeledik. Şimdi ise Wittgenstein’in Russellci sayı kuramı hakkındaki görüşlerini ele alacağız. Wittgenstein’in önceleri Russell’in “sayal sayılar sınıfların sınıfları olarak tanımlanabilir” şeklindeki görüşünü benimsediğini ifade etmiştik. Bu durumun, erken dönem Wittgenstein’in felsefi anlamda öncelinin Russell olması ile açıklanabileceğini düşünüyoruz. Wittgenstein’in öğrencileri olan Janik ve Toulmin *Wittgenstein’in Viyana’sı* adlı çalışmalarında Wittgenstein’i, “Bertrand Russell’in ve G. E. Moore’un düşünce ve yöntemlerini benimseyerek onları ilk yazarlarının tasavvur etiği herhangi bir şeyin çok ötesinde yeniden tanımlayan adam”²³ olarak nitelendirirler. Çakmak da, *Tractatus’da Dil ve Felsefe İlişkisi* adlı çalışmasında

¹⁹ Eric A. Snyder, “The Philosophy of Mathematics of Wittgenstein’s Tractatus Logico-Philosophicus”, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), The University of Western Ontario Faculty of Graduate Studies, London, 2000, s. 24.

²⁰ A. G. Dragalin, “Axiom of Infinity”, (Çevrimiçi) https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Infinity_axiom_of, 26 Şubat 2018.

²¹ Frank P. Ramsey, *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, Ed. R. B. Braithwaite, Routledge & Kegan Paul, London, 1931, s. 59.

²² Bertrand Russell, Alfred North Whitehead, *Principia Mathematica 2nd edition Vol. 2*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927, s. 203.

²³ A. Janik, S. Toulmin, *Wittgenstein’in Viyana’sı*, Çev. Hüsametdin Arslan, Paradigma Yayıncılık, İstanbul, 2008, s. 13.

Wittgenstein'in ilk dönem felsefesinin Russell ve Frege'nin mantık incelemelerinin belli bir odağa çekilmesi olduğunu ifade etmektedir.²⁴

The Principles of Mathematics'de ortaya konulan düşünceler Wittgenstein'in zihninde bir ışık yakar. Bilindiği üzere "*Matematiğin İlkeleri*"nin [The Principles of Mathematics] merkezi teması, teorik matematiğin tamamının, Kant ve diğer birçok filozofun görüşlerinin aksine, az sayıda temel mantıksal ilkeden türetilebileceğiydi."²⁵ Russell bu türetimin sadece doğruluğu apaçık olan birkaç küçük aksiomun varsayılması ile yapılabileceğini düşünür. Ancak Wittgenstein, *Principia Mathematica*'da Russell ve Whitehead'ın öne sürdüğü sonsuzluk aksiyonu üzerinde çalışırken şunu fark eder: Russell'ın sayal sayı tanımlamasında sonlu sayılardan hareketle sonsuz sayılara ilişkin yaptığı genellemede varsaydığı "Eğer σ , 0'ı, n 'i ve $n + 1$ 'i içeren bir sınıf ise bütün sonlu sayıları da içerdiğinin ispatı verilebilir" şeklindeki kabulü, eşdeyişle sonsuzluk aksiyonu, mantıksal olarak gösterilebilecek bir varsayım değil, empirik kökenli bir varsayımdır. Dolayısıyla Wittgenstein'a göre, Russell matematiği mantıktan türetmeye çalışırken kendisi mantıksal olmayan bir aksiyomdan yardım almıştır. Wittgenstein'a göre bu durum *Principia Mathematica*'da verilen sayal sayı tanımlarının başarısını akamete uğratmaktadır.

Wittgenstein'ın Russell eleştirisine geçmeden önce onun anlam, önerme, genel-önerme, sözde-önerme v.b kavramlarının üzerinde durulması gerekmektedir. "Frege der ki: Uygun bir biçimde kurulmuş her tümce anlamlı olmalıdır; ve ben diyorum ki: her olanaklı tümce uygun biçimde kurulmuştur ve eğer anlamlı değilse, bu, bizim onun bazı parçalarına hiçbir anlam vermememizden kaynaklanır."²⁶ Bu alıntı şöyle çözümlenebilir: Wittgenstein'a göre bir tümcenin uygun biçimde kurulması demek tümcenin gramer kurallarına, başka bir ifadeyle sentaksa uyması demektir. Wittgenstein, Frege'nin tümcenin anlamlı olmasından anladığının, yalnızca tümcenin sentaksa uyması olduğunu düşünür. Diğer bir deyişle, Wittgenstein Frege'nin sentaksa uyan her tümceyi anlamlı bir tümce olarak gördüğünü düşünür. Ancak

²⁴ Cengiz Çakmak, *Tractatus'da Dil ve Felsefe İlişkisi*, Çantay Kitabevi, İstanbul, 2000, s. 2.

²⁵ Monk, *Wittgenstein*, s. 63.

²⁶ Ludwig Wittgenstein, *Defterler: 1914-1916*, Çev. Ali Utku, Birey Yayınları, İstanbul, 2004, s. 11.

Wittgenstein’a göre tümce ve anlam arasındaki ilişki Frege’nin düşündüğünden farklıdır. O’na göre olanaklı her tümce sentaksa uyar. Anlamalı tümceler de olanaklı tümceler olduklarından onlar da sentaksa uyar. Ancak sentaksa uymak anlamlı olmak için her ne kadar koşul olsa da, tek başına yeterli değildir. Wittgenstein’a göre olgu dünyasındaki her bir tekil nesnenin başka hangi nesnelerle ne tarz bağıntılar içerisinde olacağı mantıksal mekânda mevcuttur/belirlidir. Aynı şekilde tekil nesnelerde olan bu imkân ve belirlenmişlik, bu nesnelerin dildeki karşılığı olan adlarda da mevcuttur. Sözelimi “ışık ekşidir” tümcesini ele alalım. Bu tümce özne, yüklem, kopula ve bunların sıralanması bağlamında sentaksa uyan olanaklı bir tümcedir. Wittgenstein, Frege’nin bu tümceyi sentaksa uygun olduğu için anlamlı bir tümce olarak göreceğini düşünürdü. Ancak Wittgenstein’a göre, gerek nesne düzeyinde gerek de dil düzeyinde “ışık” ve “ekşi” bir araya gelebilecek/bağıntı içerisine girebilecek entiteler olmadıklarından bu tümce anlamlı bir tümce değildir. Wittgenstein *DeFTERLER*’de, melodinin sadece notaların bir araya gelmesinden müteşekkil bir yapı olmadığını ve benzer bir şekilde önermelerin de yalnızca sözcüklerin karmakarışık bir yığını olmadığını dile getirir.²⁷ Ona göre sözcüklerin anlamlı bir tümce ortaya koyabilmeleri, onların bağlamsal bir ilişki ve bütünlüğe sahip olmalarını gerektirir.

Wittgenstein’a göre bir önerme **olgu durumunun** (*Alm.* Sachveralt, *İng.* State of affairs) mantıksal bir resmini vermelidir. Wittgenstein’ın birinci dönem felsefesinin temelinde bu anlayış yatar. Bu sebeple bize düşen öncelikli iş, bu anlayışı mümkün olduğunca açıklamaktır. Önerme dile ait bir entitedir. Olgu durumu ise dilden ve dile getirilişten bağımsız, kendi varlık mekânında bir entitedir. Önermenin olgu durumunu resmetmesinden, olgu durumunu kendi varlık mekânından alıp dil mekânına taşımasını, başka bir şekilde söyleyecek olursak olgu durumunu dilde temsil etmesini anlıyoruz. Bu durumu şöyle de ifade edebiliriz: “Önerme temsil ettiği mümkün olgu durumu ile izomorfik²⁸ bir ilişki içerisinde

²⁷ A.e., s. 55.

²⁸ İzomorfik sözcüğü ile matematikteki izomorfik kümelerle gönderme yapan bir analogi kurulmaktadır. Eğer iki küme arasında bire-bir, üzerine ve işlemleri koruyan bir ilişki varsa bu iki küme birbiri ile izomorfiktir. Benzer bir ilişkinin önerme ile olgu-durumu arasında da olduğu düşünülmektedir.

olmak durumundadır.”²⁹ “aRb” önermesini ele alalım: Bu önerme aRb olgusunun mantıksal bir resmidir. Şu sebeple ki; a ve b özel adları a ve b şeyleri/nesneleri ile ilgilidir. Wittgenstein *Defterler*’de kimi zaman önerme için **im** ve olgu durumu için **imlenen şey** kavramlarını kullanır ve şu önemli soruyu sorar: “İm ile imlenen şeyin mantıksal özdeşliği gerçekten neye dayanır?”³⁰ Wittgenstein’a göre, eğer im imlenen şeyin mantıksal bir resmini verecekse bu ikisi arasında **mantıksal bir özdeşlik** olmalıdır. Mantıksal özdeşliğin temelinde ise im ve imlenen şeyin **mantıksal içeriklerinin** aynı olması yatar.

“İm ve imlenen şey arasındaki mantıksal özdeşlik, onunimde, imlediği şeydekinden daha az ya da daha çok tanınmasına izin verilmemesine dayanır. İm ve imlenen şey, bütün mantıksal içerikleri bakımından özdeş olmasaydılar, o zaman mantıktan daha temel bir şeyin de olması gerekecekti.”³¹

Her ne kadar çalışmanın bu bölümünde Wittgenstein’ın erken dönemini merkeze alarak konuyu açmıyor olsak da, Wittgenstein benzer bir tartışmayı *Tractatus*’ta da sürdürdüğünden, ilgili kısımları alıntılamanın ve bu hususlara dikkat çekmenin yerinde olacağı kanaatindeyiz.

Wittgenstein im ve imlenen arasında varsaydığı mantıksal özdeşliği *Tractatus*’ta şu şekilde anar; “Tasarım³² [Resim], tasarımılanan ile mantıksal tasarım kurma biçimine ortaklaşa sahiptir.”³³ (*Tractatus* 2. 2) Almancasını da verecek olursak: “Das Bild hat mit dem Abgebildeten die **logische Form**³⁴ der Abbildung gemein.”³⁵ (*Tractatus* 2. 2) Görüldüğü üzere, Wittgenstein burada dil ile dilin resmettiği olgu bağlamlarının aynı mantıksal forma sahip olduklarını belirtir.

²⁹ Edward N. Zalta (ed.), “Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics” (Çevrimiçi) <https://plato.stanford.edu/entries/wittgenstein-mathematics/>, 14 Kasım 2017.

³⁰ Wittgenstein, *Defterler*, s. 12.

³¹ *A.e.*, s. 13.

³² Oruç Aruoba Almanca “Bild” sözcüğünü “tasarım” olarak Türkçeleştiriyor. Ancak biz çalışmamız dâhilinde aynı sözcüğü “resim” olarak Türkçeleştireceğiz. Ancak doğrudan yapılan alıntılarda “tasarım” olarak kalacak.

³³ Ludwig Wittgenstein, *Tractatus: Logico-Philosophicus*, Çev. Oruç Aruoba, Metis Yayınları, İstanbul, 2013, s. 25.

³⁴ Vurgu bana aittir.

³⁵ Ludwig Wittgenstein, *Tractatus: Logico-Philosophicus*, s. 24.

Wittgenstein’a göre bu aynılık olmasa, olgu bağlamlarının dilde temsil edilebilmeleri sözkonusu olamazdı.

Wittgenstein’a göre “Dilin dünya nesnelerini zorunlu olarak yansıtabilmesinin temel koşulu, nesnelerin ve bu nesneleri karşılayan adların mantıksal uzay [mekân] içinde bulunmuş olmalarıdır.”³⁶ Bu **mantıksal mekân** (Alm. logischen Raum) nesnenin kurulmasının ve kavranılmasının bütün olanaklarını taşıdığı gibi, içerisinde kurulacak nesnelerin birbirleriyle ne gibi bağıntılar içerisinde olacaklarının da belirleyicisidir. Diğer bir deyişle, Wittgenstein’a göre bütün nesneler olgu bağlamları içerisinde imkânlarla birlikte verilidirler. Aynı imkânlar nesnede olduğu gibi dilde de vardır. Sözelimi, “gözlük” nesnesi ile “metal olma” özelliğini nesne düzeyinde yan yana getirebiliyorsak eşdeyişle, metalden bir gözlük üretebiliyorsak, aynı şekilde bunu dilde de ifade edebiliriz yani metal olma ile gözlük sözcüklerini yan yana getirebiliriz ve “bu gözlük metaldir” önermesini kurabiliriz. Dolayısıyla mantıksal form, nesne ve bu nesnenin diğer başka nesnelerle girdiği mümkün bütün bağıntılardan ve aynı şekilde ad ve adın diğer başka adlarla girdiği mümkün bütün bağıntılardan müteşekkil bir mantıksal yapıya gönderme yapmaktadır.

Tractatus’tan alıntılanarak devam edecek olursak: “Olgu bağlamında nesneler birbirlerinin [birbirlerinin] içinde dururlar, bir zincirin baklaları gibi.”³⁷ (*Tractatus* 2.03) Wittgenstein gerek olgu bağlamındaki nesnelerin, gerek de dilde bu nesnelere karşılık gelen adların tıpkı bir zincirin baklalarının/halkalarının birbirlerinin içine geçmesi gibi iç içe geçme bağıntısını haiz olduğunu düşünür. Ancak bu iç içe geçme her nesne diğer bütün nesneler ile ve her ad diğer bütün adlar ile iç içe geçebilir şeklinde anlaşılmamalıdır. “Olgu bağlamında nesneler birbirleriyle [birbirleriyle] belirli bir tarzda bağlantı içindedirler.”³⁸ (*Tractatus* 2.031) Alıntıdan da anlaşılacağı üzere olgu bağlamındaki nesneler birbirleriyle gelişigüzel değil belirli bir tarzda iç içe geçer, bir nesne her nesne ile değil iç içe geçme bağıntısı içerisinde oldukları ile iç içe geçer, aynı koşutluk dilde nesnelere karşılık gelen adlarda da vardır. Wittgenstein bu durumu şöyle anlatır: “Tasarımın öğeleri, tasarım içinde, nesneleri

³⁶ Çakmak, *Tractatus*’da Felsefe ve Dil İlişkisi, s. 25.

³⁷ Ludwig Wittgenstein, *Tractatus: Logico-Philosophicus*, s. 21.

³⁸ A.e., s.21.

karşılarlar.”³⁹ (*Tractatus* 2.031) Burada resmin ögelerinden kasıt dilde nesnelere karşılık gelen adlardır. “Tasarımın ögelerinin birbirleriyle belirli bir tarzda bağlantı içinde olmaları, şeylerin öyle bir bağlantı içinde olduklarını ortaya koyar.”⁴⁰ (*Tractatus* 2.15) Eşdeyişle, dildeki adlar ile olgu bağlamı içerisindeki nesneler başka adlar ve başka nesnelerle belirli bir tarzda mümkün bağıntı içindedirler.

Wittgenstein bağlamında önerme ve olgu durumu arasındaki bağıntıyı açıkladıktan sonra bir önermenin doğru ya da yanlış olmasının ne demek olduğu üzerinde duracağız. Bir önermenin doğruluk değeri olgu durumunun nasıl olduğunun bir fonksiyonudur.⁴¹ Şöyle ki, eğer önermenin ortaya koyduğu mantıksal resim olgu durumu ile örtüşüyor ise bu önerme doğru değerini alır. Aksi halde önerme yanlış değerini alır. Dolayısıyla her hangi bir önermenin doğruluk değerinin belirlenmesi, dilin dışına çıkmayı ve olgusal gerçekliğe müracaatı gerektirir.⁴² Wittgenstein *Defterler*’de ortaya koyduğu bu düşünüyü tarzını *Tractatus*’ta da sürdürür: “Tasarımın doğru mu yanlış mı olduğunu bilmek için, onu gerçeklik ile karşılaştırmamız gerekir.”⁴³ (*Tractatus* 2. 223) Bir doğa bilimi önermesini ele alalım: Bu önerme olgu bağlamında bir durumun, eşdeyişle dünyanın bir halinin, doğru ya da yanlış bir resmini vermektedir ve bu resim ancak resim ile olgu örtüşürse doğru aksi halde yanlış olacaktır.

Öte yandan, Wittgenstein’in **sözde-önerme** (*İng.* Pseudo proposition, *Alm.* Scheinsätze) dediği bazı önerme türleri de vardır ki onlar herhangi bir olgu durumunu resmetmezler. “Sözde-önergeler öyledirler ki, çözümlendiklerinde, söylemeleri gereken şeyi yalnızca gösterirler.”⁴⁴ “Matematiksel önermelerin [sözde-önergelerin] doğruluk değeri, bütünüyle önermenin kurucu sembollerinin ve bu sembollerin içinde bulunduğu biçimsel dizgenin bir fonksiyonudur.”⁴⁵ Dolayısıyla

³⁹ A.e., s.23.

⁴⁰ A.e., s.23.

⁴¹ Edward N. Zalta (ed.), “Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics” (Çevrimiçi) <https://plato.stanford.edu/entries/wittgenstein-mathematics/>, 14 Kasım 2017.

⁴² Edward N. Zalta (ed.), “Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics” (Çevrimiçi) <https://plato.stanford.edu/entries/wittgenstein-mathematics/>, 14 Kasım 2017.

⁴³ Wittgenstein, *Tractatus: Logico-Philosophicus*, s. 27.

⁴⁴ Wittgenstein, *Defterler*, s. 27.

⁴⁵ Edward N. Zalta (ed.), “Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics” (Çevrimiçi) <https://plato.stanford.edu/entries/wittgenstein-mathematics/>, 14 Kasım 2017.

herhangi bir sözde-önermenin doğruluğunun belirlenmesi doğabilimi önermelerinde olduğu gibi dilin dışına çıkmayı gerektirmez. Yapılması gereken önermenin, kurulduğu biçimsel dizgenin sentaktik kurallarına uyup uymadığının belirlenmesidir. Bu kurallara uyan önerme doğru, uymayan önerme de yanlış değerini alır. Wittgenstein’a göre bu sebeple mantık ve matematiğin önermeleri sözde-önermelerdir.

Wittgenstein’in sayı anlayışına geçmeden önce, bu geçişte kritik bir role sahip olan **tam genel önerme**⁴⁶ (*Ing.* completely general proposition) kavramına değineceğiz. “Odamdaki masa kahverengidir” önermesini ele alalım. Bu önerme yukarıda bahsedildiği gibi bir mantıksal forma sahiptir. Wittgenstein’a göre bu olgu durumu önermesi, ancak ve ancak “Bir şey bir şeydir” gibi genel bir önerme var ise olanaklıdır. Wittgenstein’a göre genel önermeler ile hiçbir isim türü ya da başka gösterici imler kullanmaksızın, dünya betimlenebilir. Örnek verecek olursak: $(\exists x)F(x)$ önermesi, bu önermenin neyin bir temsili olduğu bilinmeksizin dünyayı betimlemede kullanılabilir. Wittgenstein *Defterler*’de aşağıdaki örneği verir:

“Örneğin, dünyanın A ve B şeylerinden ve F niteliğinden oluştuğunu ve $F(A)$ ’nin durum olduğunu ve $F(B)$ ’nin olmadığını varsayalım. Bu dünya aynı zamanda aşağıdaki önermelerle de betimlenebilir:

$$\begin{aligned} &(\exists x, y). (\exists \emptyset). x \neq y. \emptyset x. \sim \emptyset y: \emptyset u. \emptyset z. \supset_{u, z}. u = z \\ &(\exists \emptyset). (\psi). \psi = \emptyset \\ &(\exists x, y). (z). z = x \vee z = y”^{47} \end{aligned}$$

Wittgenstein genel önerme üzerinden yürüttüğü tartışmayı *Tractatus*’ta da sürdürür.

“Şimdi, en genel tümce biçimini [önerme biçimi, *Alm.* Satzform] vermek olanaklı gözüküyor: yani, herhangi bir im dilinin tümcelerinin öyle bir betimlemesini vermek ki, her olanaklı anlam, betimlemenin uyduğu bir simge yoluyla dilegetirilebilsin, betimlemenin uyduğu her simge de bir anlamı dilegetirebilsin, yeter ki adların imlemleri uygun olarak seçilmiş olsun.

⁴⁶ Bundan sonra “genel-önerme” olarak kullanılacak.

⁴⁷ Wittgenstein, *Defterler*, s. 25.

Açık ki, en genel tümce biçiminin betimlenmesinde, bunun yalnızca özsel olan yanı betimlenebilecektir. –yoksa bu, işte, en genel olmazdı.

Bir genel tümce biçiminin varolduğu, şu yolla kanıt bulur ki, biçimi öngörülemez (yani, kurulamayacak) hiçbir tümce olamaz. Tümcenin genel biçimi şudur: Bu, böyle böyledir.”⁴⁸ (*Tractatus* 4. 5)

Alıntıdan da anlaşılacağı üzere, Wittgenstein genel önermelerin her hangi bir önermenin özsel yanı, onları mümkün kılan biçimi olduğu fikrini *Tractatus*’ta da sürdürmüştür.

Konunun daha iyi anlaşılabilmesi, “Dünyanın betimlenmesi ne demektir? ve Nasıl oluyor da $(\exists x)F(x)$ önermesi dünyayı betimleyebiliyor?” sorularının cevaplanmasını gerektirir. Şu iki önermeyi düşünelim:

- Bu kalem mordur.
- Şu at dişidir.

Bir kalemin mor olması ve bir atın dişi olması olgu durumlarıdır. Yukarıdaki önermeler de bu olgu durumlarının tasvirleri olmaları bakımından dünyayı betimlemektedirler. Dikkat edilecek olursa yukarıdaki önermelerin ikisi de $(\exists x)F(x)$ biçiminde yazılabilecek önermelerdir. Olgu durumlarının tasviri olan, eşdeyişle dünyayı betimleyen ve $(\exists x)F(x)$ biçiminde yazılabilecek benzer önermelerin sayısını arttırmak mümkündür.

Genel önermeler doğabilimi önermelerinde olduğu şekliyle doğrudan olgu durumları ile ilişkilendirilemezler. Bununla birlikte genel önermeler mantık ve matematik önermeleri gibi totoloji ya da çelişki de değildir. Onlar sadece olgu durumlarının genel bir tarifidir.⁴⁹ Aynı deyişle, genel önerme bir önermeden empirik içeriğini çekip çıkardığımızda elimizde kalan içeriksiz yapıdır/formdur. Yukarıdaki önermeler üzerinden sözel olarak ifade edecek olursak: Wittgenstein’a göre “Bir şey bir şeydir ya da bir şey bir şey özelliğini taşır” gibi genel bir önerme olmaksızın Bu at dişidir” tekil önermesi kurulamaz. Wittgenstein dünyanın betimlenebilmesi için her ne türden olursa olsun isimlerin ve diğer başka gösterici sembollerin hiç birinin

⁴⁸ Wittgenstein, *Tractatus: Logico-Philosophicus*, s. 85-87.

⁴⁹ Snyder, “The Philosophy of Mathematics of Wittgenstein’s *Tractatus Logico-Philosophicus*”, s. 29.

olmadığı genel önermelerin yettiğini, özdeşlik fonksiyonuna gerek olmadığını savunur. Wittgenstein, *Defterler*'de genel önermeleri tanımlama çalışmaları neticesinde şöyle bir soru sorar: $(\exists x).x = x$ bildirimi bir genel önerme midir, yoksa değil midir? Sözel bir dille ifade edecek olursak, “Kendisi ile özdeş olan en az bir şey vardır” dediğimiz zaman aslında ne söylemiş oluyoruz ve bu tümce bir genel bir önerme midir? Wittgenstein benzer durumun $(\exists x):(y).y = x$ önermesinde, $x = y$ özdeşlik fonksiyonunda veya $a = a$ ya da $a = b$ şeklinde ki bildirimlerde de karşımıza çıktığını düşünür. Wittgenstein bu ve benzeri özdeşlik bildiren tümcelerin genel önerme olmadığını, hatta önerme bile olmadığını, olsa olsa anlamsız sözde-önermeler olduğunu düşünür. Wittgenstein’a göre $x = y$ gibi bir ifadenin olgusal bir karşılığı yoktur. Çünkü, O’na göre, **özdeşlik nesneler arasındaki değil, biçimler arasındaki bir ilişkidir**. Diğer bir deyişle, şeyler hiçbir zaman özdeş olamaz, yani olgu dünyasında birbirleriyle özdeş olan iki tane şey yoktur. Bu sebeple, Wittgenstein’a göre, özdeşlik tümceleri dünyayı betimlemede hiçbir şekilde kullanılamazlar. Wittgenstein genel önermeler ve özdeşlik fonksiyonu üzerine yaptığı analizler neticesinde $(\exists x).x = x$ tümcesinin anlamsız bir sözde-önerme olduğuna kanaat getirir ve bu önermenin hiçbir matematiksel kanıtlamada kullanılamayacağını söyler.⁵⁰

$(\exists x).x = x$ önermesinin dünyayı betimlemede kullanılamaması mevzuunu biraz daha irdелейelim. Yukarıda verilen $(\exists x)F(x)$ önermesinde Wittgenstein şunu iddia ediyordu: En az bir tane birey vardır ve bu birey F özelliğini taşımaktadır. Burada x’i değişken ve F’yi yüklem bildiren fonksiyon olarak düşünebiliriz. Aynı deyişle, $(\exists x)F(x)$ biçimine uyan belirli bir x ve belirli bir yüklem bir olgu durumunun unsurlarıdır ve x’in F özelliğini taşıyor olması bize dünyanın bir hâli hakkında bildirimde bulunmaktadır. Ancak $(\exists x).x = x$ önermesini düşündüğümüzde görmekteyiz ki, bu önerme dünyanın herhangi bir hâlini tasvir etmemektedir. $(\exists x).x = x$ önermesi, ancak x’te x’e içkin olan ve herkese açık olan bir şeyi tekrar eden bir bildirimdir. Dolayısıyla Wittgenstein’a göre böyle bir tümce dünyayı betimlemez.

⁵⁰ A.e., s. 33.

Wittgenstein'a göre, Russell'ın sayı tanımlamalarındaki genel önermelerin genelliği (*İng.* Generality of completely general proposition) ve $x = y$ şeklindeki özdeşlik fonksiyonun kullanımı mevzuları da problemlidir. Burada problem olan şey şudur: Örneğin boş sınıf gibi sınıfların tanımlarında özdeşliğin kullanılması ve belirli bir takım özellikleri haiz belirli sayıda şeylerin olduğu şeklindeki savlar Russell'ın sayal aritmetiğinin ana omurgasını oluştururlar, fakat bu savlar üzerine inşa edilen tanımlar tanımlamayı vaat ettikleri şeylere dair bir anlayışı önvarsayar. Bu hususun daha iyi anlaşılması adına Wittgenstein'ın yukarıda değinmiş olduğumuz “Özdeşlik şeyler arasındaki bir ilişki değildir” görüşünü tekrarlamak yerinde olacaktır. Zira Frege'nin ve Russell'ın dizgelerinde “Belirli bir takım özellikleri haiz belirli şeyler vardır ve bu şeylerin bazıları birbirleriyle özdeşdir” şeklinde özetlenebilecek bir kavrayış vardır. Tam da bu noktada, Wittgenstein, Frege'nin ve Russell'ın tamamen biçimsel bir ilişki olan özdeşlik ilişkisinin şeyler arasında da kurulabileceğini varsaymakla hata ettiklerini düşünür. Bu sebeple, Wittgenstein'a göre, Frege'nin ve Russell'ın sayal sayı tanımı doğru bir tanım değildir.

Toparlayacak olursak, Wittgenstein erken dönem matematik felsefesinde “Sayal sayılar sınıfların sınıflarıdır” şeklinde özetlenebilecek Fregeci ve Russellcı sayı kuramına karşı çıkar. Wittgenstein'ın karşı çıkışının altında onun önerme, genel önerme, olgu durumu, özdeşlik, sonsuzluk... v.s. kavramlara yüklediği özel anlamlar vardır. Wittgenstein'ın Russellcı sayı kuramına karşı çıkışı, ancak Wittgensteinci terminolojinin anılan kavramlarının açık bir şekilde kavranılması neticesinde anlaşılabilir.

1.1.2. Tractatus'ta Sayı Anlayışı

Bu bölümde, Wittgenstein'ın *Tractatus*'ta ortaya koyduğu sayı anlayışını ele alacağız. Wittgenstein'ın matematik felsefesinin özünü hiç şüphesiz *Tractatus* oluşturur.⁵¹ *Tractatus*'ta ortaya konulan sayı anlayışını tam olarak serimleyebilmek için öncelikli olarak Wittgenstein'ın dizi, içsel bağıntı, dışsal bağıntı, sayı dizilerinin sıralı olması, biçimsel kavram, sahici kavram, sıral sayı, biçimler dizisinin genel terimi, ardıllık ve öncelik, işlem, işlemin genel biçimi ve işlem-fonksiyon ayrımı,

⁵¹ Edward N. Zalta (ed.), “Wittgenstein's Philosophy of Mathematics” (Çevrimiçi) <https://plato.stanford.edu/entries/wittgenstein-mathematics/>, 14 Kasım 2017.

doğruluk fonksiyonunun genel biçimi, sistem ve tümlük kavramları ve bunların ayrımları ve son olarak da bir işlemin ardışık uygulamaları gibi ifadelerden ne anladığına değineceğiz. Zannediyoruz ki, anılan kavramlar açık bir şekilde serimlenebilirse, Wittgenstein'in *Tractatus*'ta sayıya dair yapmış olduğu çözümlemeler de anlaşılacaktır. Konuyu etraflıca ele almaya başlamadan evvel Soykan'ın *Tractatus*'un nasıl bir kitap olduğuna dair tespitlerini alıntılarla istiyoruz:

“*Tractatus*, matematiğe ilişkin bir kitap gibi görünmüş olmasına karşın, o bir matematik kitabı değil ama bir ‘meta-matematik’ olarak anlaşılabilir. Wittgenstein sonraki döneminde ise bir meta-matematiğin olmadığını söyleyecektir. *Tractatus* bir bakımdan matematik dilinin bir eleştirisi, bir felsefesidir. Orada matematik yapılmıyor, aritmetik üstüne bir çalışma yapılıyor; daha çok da aritmetiğin sayılar alanına ilişkin bir çalışma. Matematikte ortaya çıkan dilsel yapıların, matematik cümlelerin özelliği nedir; matematik nerededir; matematik nedir gibi sorular gündemin başında yer alıyor.”⁵²

Wittgenstein'in *Tractatus*'taki sayı anlayışı, *DeFTERLER*'de konu edilen *Principia Mathematica*'nın sayal aritmetiğinin reddi ile başlar. *Principia Mathematica*'da sayılar, gerekli sayıda mümkün argüman tarafından sağlanan fonksiyonlar aracılığı ile tanımlanmaktadır. Böyle bir tanımlama, sayının a priori kurallar uyarınca değil de, dünyanın rastlantısal özelliklerine bağlı olarak ortaya konulur.⁵³ Daha önceden de belirtildiği üzere, Wittgenstein böylesi bir tanımlamaya karşı çıkar, çünkü O'na göre sayı a posteriori olarak kurulan değil, a priori verili biçimsel bir kavramdır. Bilindiği üzere Wittgenstein deneyim kökenli bir matematik anlayışını reddeder. Bununla birlikte Wittgenstein'in Kantçı matematik anlayışına bütünüyle yakın olduğunu söylemek de oldukça güçtür. İşte tam da bu noktada, Wittgenstein'in a priori ifadesinden ne anladığı üzerinde durmak çalışmanın devamının anlaşılabilmesi bakımından önemlidir. Wittgenstein *Tractatus*'un muhtelif yerlerinde a priori

⁵² Soykan, **Felsefe ve Dil**, s. 63.

⁵³ Snyder, “The Philosophy of Mathematics of Wittgenstein's *Tractatus Logico-Philosophicus*”, s.43.

ifadesini kullanır. Bunlardan bazılarını alıntıladıktan sonra Wittgenstein'in a priorilikten ne anladığını irdelemeye devam edeceğiz:

“...Mantığın a priori olması, mantık-dışı düşünülememesine dayanır.”⁵⁴
(Tractatus 5.4731)

“Şimdi, temel tümcelerin bütün olanaklı biçimleriyle ilgili soruyu a priori yanıtlamalıyız.”⁵⁵ (Tractatus 5.55)

“Sözümüne tümevarım yasası, en azından bir mantık yasası olamaz, çünkü bu, açıkça anlamlı bir tümcedir. –Bu yüzden de bir a priori yasa olamaz.”⁵⁶
(Tractatus 6.31)

“...(Burada da, her yerde olduğu gibi, a priori kesin olan, saf mantıksal olan olarak çıkıyor ortaya.)”⁵⁷ (Tractatus 6.3211)

Alıntılardan da anlaşılacağı üzere, Wittgenstein için bir şeyin a priori olması demek, o şeyin mantıksal olması demektir. Yani olguların ya da başka empirik unsurların işin içerisine karışmadığı, saf mantıksal şeyler a prioridir. Bununla birlikte, a priori kavramlar mantıksal mekânın içerisinde var olan mantıksal yapılardır. Sayının a priori verili olmasından kasıt, sayının mantıksal mekânda bizden bağımsız olarak var oluşudur. **Biçimsel kavram** ise şöyle açıklanabilir: Deneyisel bir kavram çözümlendiğinde karşımızda dilin dışında, dünyanın hâlleri, unsurları bulunur. Öte yandan, biçimsel bir kavram kavramın inşa edildiği biçimsel dizgenin gramerine uygun bir biçimde çözümlediğinde karşımıza sadece bu biçimsel dizgenin unsurları çıkar. *Tractatus*'ta biçimsel kavramlar şöyle anlatılır:

“... ”

Bir şeyin bir biçimsel kavramın nesnesi olarak onun altına girdiği bir tümceyle dile getirilemez. Bu, o nesnenin iminde kendisini gösterir. (Ad, bir nesneyi imlediğini gösterir, sayı imi, bir sayıyı imlediğini, vb.)

⁵⁴ Wittgenstein, *Tractatus: Logico-Philosophicus*, s.113.

⁵⁵ A.e., s. 129.

⁵⁶ A.e., s. 157.

⁵⁷ A.e., s. 157.

Biçimsel kavramlar da sahici kavramlar gibi, bir işlev⁵⁸ aracılığıyla ortaya konamazlar.

Çünkü onların göstergeleri, biçimsel nitelikler işlevler yoluyla dile getirilemezler.

Biçimsel niteliğin dile getirilişi, belirli simgelerin bir çizgisidir.

Bir biçimsel kavramın göstergelerinin imi, öyleyse, imlemleri kavramın altına giren bütün simgelerin kendilerine özgü bir çizgisidir.

Biçimsel kavramın dile getirilişi de, öyleyse, içinde yalnızca bu kendine özgü çizginin sabit olduğu bir tümce değişkenidir.”⁵⁹ (*Tractatus* 4.126)

“Tümce değişkeni, biçimsel kavramı; aldığı değerlerde, bu kavramın altına giren nesneleri imler.”⁶⁰ (*Tractatus* 4.127)

Wittgenstein’a göre bir olgunun tümce ile dile getirilmesi ancak o olgu durumunun tümce aracılığıyla mantıksal resminin çizilmesine bağlıdır. Bu ancak doğabilimi önermelerinde gerçekleştirilecek bir durumdur. Dolayısıyla, yukarıdaki alıntıda da belirtildiği üzere, biçimsel nesnelere dair **altına düşme** ilişkisi tümcelerle dile getirilemez. Biçimsel kavramların sahici kavramlar gibi bir fonksiyon aracılığıyla ortaya konulamamaları şu anlama gelir: Dilin yüklemelerini gerçekleyen ya da sağlayan fonksiyon olarak nesnelerin varolduğu alan dünyadır. Dünya hakkında bildirimde bulunan önermeler ise matematiksel önermeler değil, doğabilimi önermeleridir. Bu sebeple biçimsel kavramlar bir fonksiyon aracılığıyla ortaya konulamazlar/dile getirilemezler. Biçimsel nesnelerin dile getirilişi dünyadaki nesneler aracılığıyla değil, çeşitli simgeler/işaret dizileri aracılığıyla olur. Alıntının sonunda anılan tümce değişkeni, biçimsel kavramların imi olarak karşımızda durmaktadır. Ezcümle, Wittgenstein’a göre matematiksel nesnelerin ve matematiksel bağıntıların biçimsel oluşu onların kavranılmasında biçimsel dizgenin kendisinin, eşdeyişle dilin, yeterli olması anlamına gelir.

⁵⁸ Oruç Aruoba **funktionen** sözcüğünü **işlev** olarak Türkçe’ye çevirmiş. Biz tezimizde işlev yerine artık Türkçeye tam anlamıyla yerleştiğini düşündüğümüz **fonksiyon** sözcüğünü kullanacağız.

⁵⁹ Wittgenstein, **Tractatus: Logico-Philosophicus**, s. 67-69.

⁶⁰ **A.e.**, s. 69.

Wittgenstein *Tractatus*'ta sayıların dışsal değil içsel bağıntılar aracılığıyla düzenlendiğini söyler.⁶¹ Wittgenstein'in içsel bağlantıdan ve dışsal bağlantıdan ne anladığını *Tractatus*'tan alıntılararak açıklamaya çalışalım:

“Belirli bir anlamda nesnelerin ve olgu bağlamlarının biçimsel niteliklerinden, dolayısıyla olguların yapı niteliklerinden, aynı anlamda da, biçimsel bağlantılardan ve yapıların bağlantılarından söz edebiliriz. (Yapı niteliği yerine “iç nitelik”; yapıların bağlantısı yerine de “iç bağlantı” diyorum. Bu dile getirişleri, filozoflar arasında çok yaygın olan, iç bağlantı ile sahici (dış) bağlantı arasındaki karıştırmanın nedenini göstermek için işe katıyorum.) Böyle iç nitelik ve bağlantıların varoluşu ise tümceler yoluyla savlanamaz; bunların varoluşu o olgu bağlamlarını ortaya koyan ve o nesnelerin sözünü eden tümcelerde kendini gösterir.”⁶² (*Tractatus* 4.122)

“Bir nitelik, nesnesinin ona sahip olmaması düşünülemez ise, içseldir.”⁶³ (*Tractatus* 4.123)

Bu alıntılardan da anlaşılacağı üzere, içsel nitelikler ve içsel bağıntılar olgudurumlarının dile getirildiği önermelerde, yani dilde karşımıza çıkar. Wittgenstein'a göre içsel bağıntılar yoluyla düzenlenen diziler, biçim dizileridir ve sayı dizileri de içsel bağıntılarla düzenlenmiş dizilerdir. Diğer bir deyişle, sayı dizilerinin tanımlanmasında dünyanın hallerine gönderme yapan fonksiyonlar (dışsal bağıntılar) kullanılamaz, yapılması gereken sayı dizilerinin içsel bağıntılarla dilde kalarak tanımlanmasıdır.

Wittgenstein sayı dizilerinin tanımlanmasında önemli bir yeri olan ardıllık ilişkisini *Tractatus*'ta şöyle açıklar:

“Aynı şekilde, “aRb” tümcelerinin dizisi de,

“(∃x): aRx. xRb”

“(∃x, y): aRx. xRy. yRb”, v.b

⁶¹ A.e., s. 67.

⁶² A.e., s. 63-65.

⁶³ A.e., s. 65.

(b, a ile bu ilişkilerden biri içindeyse, b'ye, a'nın izleyicisi derim.)"⁶⁴ (*Tractatus* 4.1252)

Wittgenstein *Tractatus*'ta biçimsel bir kavram olarak gördüğü sayının a priori bir kural uyarınca ortaya konulabileceğini düşünür. Bununla birlikte, bu priori kuralın a prioriliğinin zemini hakkında konuşmaz. Hatta bu konuşmayı söylenilemez alana iterek iptal eder. Ayrıca sayıya ilişkin şu iki gerçeği açık kılmak ister:

- i. Sayı kavramı temel olarak sayı dizileri kavramıdır.
- ii. Sayı dizileri sıralıdır, bu sıralama dışsal değil içsel bağıntılar aracılığıyla düzenlenmiştir.

Sayı dizilerinin sıralı olması ve bu sıralamanın meşru zemini, Wittgenstein'in Russell ile ayrı düştüğü hususlardan bir diğeridir. Russell sayıların sıral (*İng.* ordinal) özelliklerini sayal aritmetikten bağımsız olarak açıklamaya çalışır, bunu yaparken de bir çeşit bağıntı aritmetiği kullanır. Russell'a göre bu bağıntılar düzgün sıralanmış (*İng.* Well-ordered) bağıntılar olursa, bu bağıntı aritmetiği sıral aritmetiğe⁶⁵ dönüşür. Aynı deyişle Russell'a göre bir sıral sayı, düzgün sıralanmış dizilerin bir sınıfıdır.⁶⁶ Wittgenstein Russell'ın sıral sayı anlayışını ve Russell'ın sözünü ettiği sayal sayıların sıral özelliklerini reddeder. O'na göre sayı dizilerinin sıral özellikleri Russell'ın iddia ettiğinin aksine içsel bağıntılara dayanmaktadır. Ancak Wittgenstein'in içsel bağıntıların zemini hakkında da konuşmaz. Wittgenstein'in bu tutumu eşitsizliklerin kavranılması mevzuunda oldukça ciddi problemler doğurmuştur. Bu meseleyi çalışmanın son bölümünde tekrar ele alacağımızdan şimdilik bu kadarı ile yetiniyoruz.

Wittgenstein'in *Tractatus*'ta ortaya koymuş olduğu sayı anlayışına doğru ilerlerken karşımıza iki önemli kavram çıkar. Bunlar **biçimler dizisinin genel terimi** ve **değişken** kavramlarıdır. Wittgenstein'a göre biçimler dizisinin genel terimi kavramı biçimsel bir kavramdır. Bu sebeple bu kavram biçimsel bir kural uyarınca

⁶⁴ A.e., s. 67.

⁶⁵ Sıral sayıların aritmetiği Cantor tarafından geliştirilmiştir.

⁶⁶ Bertrand Russell, "Mathematical Logic as based on the Theory of Types", **From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic**, Ed. J. Van Heijenoort, Harvard University Press, Cambridge, 1977, s. 180.

inşa edilmelidir. Wittgenstein'in *Tractatus* 4.1252'de verdiği örneği tekrar edecek olursak:

“aRb”

“(∃x): aRx. xRb”

“(∃x, y): aRx. xRy. yRb”⁶⁷

Yukarıda yazılan bağıntı b, a'nın ardılıdır demenin kavram-yazımındaki (*Ing.* conceptual notation) karşılığıdır ve a priori bir kurala uyularak yazılır. Öte yandan Wittgenstein'a göre biçimsel kavram kendi altına giren bir nesneyle zaten verilmiştir.⁶⁸ (*Tractatus* 4.12721) Biçimler dizisinin genel terimi ancak bir değişken, sözelimi x değişkeni (sözde-imi) yoluyla dile getirilebilir.

Wittgenstein *Tractatus*'ta değişken terimini şöyle açıklar:

“Her değişken bir biçimsel kavramın imidir. Çünkü her değişken, ortaya, bütün değerlerinin sahip olduğu ve bu değerlerin biçimsel niteliği olarak yorumlanabilecek bir sabit biçim koyar.”⁶⁹ (*Tractatus* 4.1271)

Konuyu biraz daha açacak olursak: Herhangi bir biçimsel kavramı açıklayacak olalım, bu biçimsel kavramın altına düşen tek tek nesnelerle uğraşmamıza gerek yoktur, tek yapmamız gereken bir değişken aracılığıyla dizinin genel terimini vermektir. Bunun içinse bu dizinin ilk elemanı ve bir elemandan sonraki elemanı türeten genel işlemi bilmek yeterlidir. Wittgenstein *Tractatus*'ta işlem derken neyi kastettiğini şöyle açıklar:⁷⁰

⁶⁷ Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, s. 67.

⁶⁸ A.e., s. 71.

⁶⁹ A.e., s. 69.

⁷⁰ A.e., s. 99.

“Tümcelerin yapıları birbirleriyle içsel ilişkiler içinde durur.” (*Tractatus* 5.2)

“Bu içsel ilişkileri, dile getiriş tarzımızda belirginleştirmenin bir yolu, bir tümceyi, bir işlem sonucu olarak başka tümcelerden (işlemin dayanaklarından) çıkarılıp meydana getirilmiş şekliyle ortaya koymaktır.” (*Tractatus* 5.21)

“İşlem, sonucunun ve dayanaklarının yapıları arasındaki bir ilişkinin dile getirilişidir.” (*Tractatus* 5.22)

“İşlem, bir tümceden bir başka tümcenin yapılabilmesi için birincisinin başından geçmesi gerekendir.” (*Tractatus* 5.23)

“Ve bu da, tabii ki, bunların biçimsel niteliklerine, biçimlerin içsel benzerliklerine bağımlı olacaktır.” (*Tractatus* 5.231)

“Bir diziyi düzenleyen içsel bağıntı, dizinin bir ögesinin ötekinden çıkarılarak meydana getirilmesi işlemi ile eşdeğerdir.” (*Tractatus* 5.232)

“İşlem, ancak bir tümcenin bir başkasından çıkıp mantıksal olarak imlemli bir tarzda meydana geldiği yerde ortaya çıkabilir. Yani tümcenin mantıksal kurulmasının başladığı yerde.” (*Tractatus* 5.233)

“İşlem kendini bir değişken içinde gösterir; bir tümce biçiminden çıkarak bir başkasına nasıl varılabileceğini gösterir. Biçimlerin farkını dile getirir.” (*Tractatus* 5.24)

Wittgenstein’a göre bir işlem kendi sonucu üzerinde sürekli olarak uygulanabilir. Wittgenstein bu duruma **ardışık uygulama** der. *Tractatus*’ta bir işlemin genel biçiminden ne anladığını doğruluk işleminin (*İng.* truth operation) genel biçimini kullanarak anlatır. Wittgenstein’a göre doğruluk fonksiyonlarının tümü, doğruluk işlemlerinin temel önermelerine ardışık uygulamaların sonucudur ve doğruluk fonksiyonlarının genel formu, bir önermenin genel formudur.⁷¹ (*Tractatus* 5) Bu sebeple genel önermesel form bir değişkendir, bir biçimsel kavramdır. Wittgenstein doğruluk fonksiyonunun genel biçimini şöyle verir: $[\neg p, \neg \xi, O(\neg \xi)]$. Bu ifade “her tümcenin $O(\neg \xi)$ işleminin temel tümceler üzerindeki ardışık uygulanmasının bir sonucu olduğundan başka bir şey söylemez.”⁷² (*Tractatus* 6.001)

⁷¹ A.e., s. 87.

⁷² A.e., s. 137.

Wittgenstein *Tractatus*'ta sözünü ettiği genellenebilirliğin iki ayrımını 1929-1930 yıllarında Waismann'la yaptığı söyleşide detaylandırmıştır.⁷³ Wittgenstein'a göre bu ayrımın temelinde **sistem** ve **tümlük** kavramları arasındaki ayrım yatmaktadır. Burada tümlük denilen kavram bir önermesel fonksiyona dayanır. Şöyle ki, tümlük önermesel fonksiyonun doğru olduğu bütün argümanlarca belirlenir. Öte yandan sistem, önermesel fonksiyona değil, bir işleme dayanır. Daha önceden de belirtildiği üzere bir işlem kendi sonuçlarına tekrar tekrar uygulanabilir. Bu sebeple işlem, önermesel biçim sistemleri oluşturmakta kullanılabilir. Sistem, işlemin ardışık uygulamalarından türeyen mümkün bütün önerme biçimlerinde belirlenir. Wittgenstein'a göre matematik daima sistemlerle çalışır, tümlüklerle değil. Wittgenstein bu nokta, Russell'ın temel yanılgısının deneysel tümlüklerle sistemleri hiçbir ayrım gözetmeksizin aynı sembolle karşılamaya çalışması olduğunu düşünür.⁷⁴

Wittgenstein'a göre, $aRb, (\exists x): aRx. xRb, (\exists x, y): aRx. xRy. yRb$ şeklindeki önermesel biçim dizisi, biçimsel bir genelleme ile temsil edilir. Burada dikkat edilmesi gereken husus, bu genellemenin bir tümlük değil bir sistem oluşturduğudur. Dizinin terimleri, dizinin terimlerini üreten işlemin ardışık uygulamaları ile sistematik olarak üretilebilir. İşlemi ve dizinin ilk terimini biliyor isek dizinin tamamını oluşturabiliriz. Unutulmamalıdır ki bu genellemeyi mümkün kılan en önemli nokta, işlemin ardışık uygulanabilirliğidir.

Buraya kadar yapılan bütün açıklamalar *Tractatus*'un sayı anlayışını ortaya koymaya yöneliktir. Wittgenstein *Tractatus*'ta doğal sayılar dizisini **bir işlem tarafından sıralanan biçimsel bir dizi** olarak tanımlar ve bu sayı dizisinin biçimsel karakterini izah etmek için mantıksal bir işlemin genel karakterini kullanır. $\Omega'(-\eta)$ işleminin genel biçimi şöyledir; $[-\xi, O(-\xi)]'(-\eta)$ veya $[-\eta, -\xi, O(-\xi)]$. Burada $O(-\xi)$, önermesel değişken ξ 'in bütün değerleri için değilleme işlemidir. Wittgenstein işlemin genel biçimini bu şekilde verdikten sonra doğal sayıları işlemin

⁷³ F. Waismann, **Wittgenstein and the Vienna Circle**, Ed. B. F. McGuinness, Basil Blackwell, Oxford, 1979, s. 213.

⁷⁴ **A.e.**, s. 216-217.

kuvveti olacak şekilde tanımlar. Bundan sonraki kısmı *Tractatus*'tan alıntılacak olursak:⁷⁵

$$“x = \Omega^0 x \text{ Tan. ve}$$

$$\Omega \Omega^v x = \Omega^{v+1} x \text{ Tan.}$$

Bu im kuralına göre de, $\Omega x, \Omega \Omega x, \Omega \Omega \Omega x, \dots$ dizisini şöyle yazıyoruz:

$$\Omega^0 x, \Omega^{0+1} x, \Omega^{0+1+1} x, \Omega^{0+1+1+1} x, \dots$$

Böylece, “[x, ξ , $O\xi$]” yerine şöyle yazıyorum:

$$“[\Omega^0 x, \Omega^v x, \Omega^{v+1} x]”.$$

Ve tanımlıyorum:

$$0 + 1 = 1 \text{ Tan.}$$

$$0 + 1 + 1 = 2 \text{ Tan.}$$

$$0 + 1 + 1 + 1 = 3 \text{ Tan.}$$

(vb.)” (*Tractatus* 6.02)

Wittgenstein yaptığı bu tanımlamalardan sonra tam sayıların genel biçiminin $[0, \xi, \xi + 1]$ şeklinde olacağını söyler. Burada 0, tam sayılar dizisinin ilk terimi, ξ bu dizide rastlantısal seçilen her hangi bir eleman ve $\xi + 1$ bu elemanın ardıdır.

Toparlayacak olursak, daha önceden de belirtildiği üzere, Wittgenstein *Tractatus*'ta sayı sözcüğünün biçimsel bir kavrama gönderme yaptığını ve bu sebeple Frege ve Russell'ın iddia ettikleri gibi fonksiyon veya sınıf kavramları ile değil, kavram yazımında bir değişkenle temsil edilmesi gerektiğini düşünür. Ezcümle, Wittgenstein'ın *Tractatus*'ta ortaya koymuş olduğu yaklaşıma göre sayı a priori verili biçimsel kavramdır.

⁷⁵ Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, s. 139.

1.2. Matematiksel Önermelerin Analizi

Bu bölümde Wittgenstein'in birinci döneminde benimsediği matematiksel önerme anlayışını erken dönem ve Tractatus dönemi şeklinde bölümleyerek inceleyeceğiz.

1.2.1. Wittgenstein'in Erken Dönem Matematiksel Önerme Anlayışı

Çalışmanın bu bölümünde, Wittgenstein'in erken döneminde ortaya koymuş olduğu matematiksel önerme anlayışını ele alacağız. Daha önceden de belirtildiği üzere, Wittgenstein'in erken dönemde ortaya koymuş olduğu felsefi söylem büyük ölçüde Russell'in mantıksalcılığı etrafında şekillenmiştir. Bu bağlamda irdedeceğimiz temel yaklaşım, Russell ve Whitehead'ın *Principia Mathematica*'da ortaya koymuş oldukları, “Saf matematiğin önermeleri mantık önermelerinden türetilebilir” şeklindeki iddialarıdır. Bu iddia mantıksalcılığın temel tezini teşkil etmektedir ve ilk olarak –yalnızca aritmetik önermeleri kapsayacak şekilde– Frege tarafından ortaya atılmıştır. Ancak Russell, Frege'nin dizgesinde bulunduğu paradoksla aritmetiği mantığa indirgeme işinin en azından Fregeci bir yolla başılamayacağını göstermiştir. Bu sebeple, çalışmanın bu bölümünde ilk olarak Russell paradoksunu ana hatları ile ele alacağız. Russell'in Frege'nin dizgesinde bulunduğu bu paradoks, sonrasında Russellci mantıksalcılığın dizgesel olarak kurulmasında da kilit bir rol üstlenmiştir. “Russell ve Whitehead bu ve benzer paradoksların yıkıcı etkilerini bertaraf edebilmek adına *Principia Mathematica*'da **mantıksal tipler teorisini** (*İng.* Theory of Logical Types) ortaya atmışlardır.”⁷⁶ Bununla birlikte, Russell ve Whitehead için mantıksal tipler teorisini dizgelerine eklemek aynı zamanda **indirgenebilirlik aksiyomu** (*İng.* Axiom of Reducibility), **sonsuzluk aksiyomu** ve **çarpımsal aksiyom** (*İng.* Multiplicative Axiom) gibi aksiyomları da dizgelerine eklemek anlamına gelmektedir. Çalışma dâhilinde mantıksal tipler teorisinin ve anılan aksiyomların ayrıntılarına kısaca değineceğiz. Ardından, bu aksiyomların dizgede bulunuyor oluşunun Wittgenstein için mantıksalcılığın reddedilmesinin de

⁷⁶ Arslan, “Matematiğin Felsefi Temelleri Üzerine Bir İnceleme”, s. 169.

sebebi haline gelmesinin gerekçelerine değineceğiz. Bu bölümünde son olarak Russellcı kuramı reddeden Wittgenstein'in, kendi matematiksel önerme anlayışının detaylarını irdelleyecek ve son olarak Russell'in Wittgenstein'in eleştirilerine verdiği cevaplara yer vereceğiz.

Russell paradoksu, Ray Monk'un yazdığı Wittgenstein biyografisinde şöyle anlatılmaktadır:

“O zamana kadar *Kaideler [Aritmetiğin Temel Kaideleri (Alm. Grundgesetze der Arithmetik)]* fazlasıyla göz ardı edilmiş bir eserdir. Eseri okuma zahmetine katlananların sayısı az, anlayanlarınsı ise daha da azdı; Russell belki de eserin önemini takdir eden ilk kişiydi. Fakat Frege'nin eserine dair yaptığı acele incelemede Frege'nin gözden kaçırdığı bir pürüz fark etmişti. Bunun ortaya çıkardığı sorun ilk başta küçük bir sorun gibi görünüyordu, ama çözümü çok geçmeden matematiğin temellerine dair en önemli sorun olacaktı.

Sayının mantıksal tanımını yapmak için Frege, bir kavramın genişletilmiş hali olarak tanımladığı sınıf anlayışından faydalanmıştı. Yani ‘insan’ kavramına insanlar sınıfı, ‘masa’ kavramına masalar sınıfı karşılık geliyordu. Her anlamlı kavrama bir nesnenin, genişletilmiş hali olan bir sınıfın karşılık gelmesi onun dizgesinin bir ilksavıydı. Russell belirli bir usamlama zinciriyle bunun çelişkiye yol açtığını keşfetti. Çünkü bu hipoteze göre kendilerine dâhil olan bazı sınıflar ve dâhil olmayan bazı sınıflar olacaktı, bütün sınıfların sınıfının kendisi bir sınıftır ve dolayısıyla kendisine dâhildir; insanlar sınıfının kendisi bir insan değildir dolayısıyla kendisine dâhil değildir. Bu temel üzerine ‘kendilerine dâhil olmayan bütün sınıfların sınıfı’nı oluştururuz. Şimdi soru şu; bu sınıf kendisine dâhil midir, değil midir? Dâhildir cevabı da, dâhil değildir cevabı da çelişkiye yol açar. Ve şurası açıktır ki, eğer Frege'nin ilksavlarından bir çelişki türetilabiliyorsa, onun mantık dizgesi matematiğin tamamını üzerine inşa etmek için yetersiz bir temeldir.”⁷⁷

Russell paradoksu olarak anılan bu paradoks, sadece Frege için değil, aynı zamanda Russell'in kendisi için de büyük sorun oluşturmaktadır. Öyle ki, Wittgenstein'a göre, eğer mantıksalcı bir matematik anlayışı benimsenecekse, eşdeyişle matematik mantıktan türetililecekse, Russell paradoksu ile yüzleşmek ve

⁷⁷ Monk, **Wittgenstein**, s. 64-65.

onu bertaraf edecek bir çözüm önermek kaçınılmazdır.⁷⁸ Russell ve Whitehead mantıksal tipler teorisini bu gerekçeyle ortaya atarlar.

“Mantıksal tipler teorisi, bir çeşit nesne tipleri hiyerarşisi varsayar. Teoriye göre bu nesnelerin toplamları kümeleri oluşturur. Kümeler aynı tip nesnelerin toplamları olur, dolayısıyla paradoksun zemininde yer alan kendi kendisinin üyesi olan bir küme, zaten fiili olarak yoktur. Aynı şekilde, fonksiyonların hiyerarşisi (*İng.* Hierarchy of Functions), değer alanı (*İng.* Range of Significance) ve birinci düzey mantık⁷⁹ (*İng.* First Order Logic) gibi kavramlar da aynı saiklerle ortaya atılmışlardır.”⁸⁰

Anılan bütün bu kavramların daha sarıh bir şekilde anlaşılabilmesi adına öncelikli olarak Russell’ın matematiksel bir önermeden ne anladığı üzerinde durulması gerekir.

Russell’ın saf matematiğin önermesinden ne anladığı, onun saf matematik tanımında yatar. Ona göre sadece değişken ve mantıksal sabitler içeren p ve q önermeleri için, “ p , q ’yu içerir” biçimindeki bütün önermeler saf matematiğin önermeleridir. Saf matematik içerim (içerme ilişkisi), bağıntı ve bir terimin ait olduğu sınıfla olan bağıntısı gibi mantıksal sabitleri içerir. Ayrıca Russell’a göre matematik, matematiksel önermelerde değil, mantıksal önermelerde içerilen doğruluk kavramını kullanır.⁸¹ Russell, saf matematiğin önermelerinin yalnızca içerimler öne sürdüğüne inanır. Çünkü ona göre saf matematik gerçekte ne olduğuyla değil, mümkün olan ile ilgilidir. Sözgelimi, Russell’a göre Eukleides geometrisi ve Eukleides-dışı geometriler açık bir şekilde saf matematik tarafından içerilirler. Çünkü saf matematik Eukleides geometrisinin ya da Eukleides-dışı geometrilerin aktüel uzayı yansıtıp yansıtmadığıyla ilgilenmez. Russell’a göre bu olsa olsa uygulamalı matematiğin bir işidir. Saf matematiğin iddia ettiği tek şey, eğer

⁷⁸ Wrigley, “Wittgenstein’s Early Philosophy of Mathematics”, s. 7.

⁷⁹ Aynı kavram “ilk basamak mantığı” olarak da Türkçeleştirilebilir. Bkz. Teo Grünberg, Adnan Onart, **Mantık Terimleri Sözlüğü**, METU Press, Ankara, 2003, s. 168.

⁸⁰ Arslan, “Matematiğin Felsefi Temelleri Üzerine Bir İnceleme”, s. 169-170.

⁸¹ Bu cümle Russell’ın mantıksalci pozisyonunu tam anlamıyla göstermektedir. Alt metinde matematiksel doğruluk denilen şeyin aslında mantıksal doğruluktan başka bir şey olmadığı yargısı vardır.

Eukleides aksiyomları aktüel uzay için doğru ise, bu aksiyomlar temel alınarak kurulan Eukleidesçi önermelerin tümü de aktüel uzay için doğru olacaktır. Diğer bir deyişle, Russell'a göre saf matematik biçimsel kurallar ortaya koyar ve bu biçimsel kuralların işletilip işletilmediğine bakar. Uygulamalı matematik ise önermelerin aktüel olanı yansıtır yansıtmadığına bakar. *The Principles of Mathematics*'te saf matematiği **önermenin biçimsel niteliği** dediği şey ile ilişkilendirir.⁸² Ona göre bir önermenin biçimsel niteliği değişkenlerin ardışık olarak önerme sabitlerinin yerlerine konmaları, başka bir deyişle ardışık genelleme süreci ile açıklanabilir. Russell'a göre saf matematiğin genel geçerliliği, onun yalnızca mantıksal sabitleri içeriyor olması ile açıklanabilecek bir durumdur. Mantıksal bir sabit ise biçimsel bir kavramdır. Durumu daha iyi aktarabilmek adına *The Principles of Mathematics*'te şöyle bir örnek verilir: "Sokrates insandır" önermesinde Sokrates yerine x değişkenini koyalım. Önerme x insandır olacaktır. Şimdi şayet " x Yunandır" hipotezi doğru olursa, bu hipotez " x insandır" önermesini doğrular. Ve karşımıza şöyle bir sonuç çıkar: " x Yunandır", " x insandır" önermesini içerir. Burada Yunan ve insan kavramlarının yerine de değişkenler konulabilir. O zaman sonuç şöyle olacaktır: a ve b sınıf iseler ve b , a 'yı içeriyorsa, x , a 'dır, x , b 'dir'i içerir.⁸³ Russell'a göre bu çıkarım yalnızca a , b , x değişkenlerini ve sınıf, içermek gibi mantıksal sabitleri içerdiğinden, saf matematiğin bir çıkarımıdır.

Russell'ın saf matematikten ne anladığı hususunu ele aldıktan sonra yavaş yavaş matematiğin mantık aracılığıyla türetilbileceği iddiasına doğru geliyoruz. Russell saf matematiğin önermeleri ile mantık önermeleri arasında önemli bir fark olmadığını düşünür.⁸⁴ Ona göre her ikisinin de önermeleri sadece değişkenler ve mantıksal sabitler içerirler. Russell'a göre matematik, biçimsel içerimler ve matematiksel aksiyomlardan türetilen önermelerden müteşekkildir. Bu matematiksel aksiyomlar, ondan daha geniş olan mantıksal aksiyomlardan türetilirler. Matematiğin mantıktan türetimi işine temel teşkil eden mantıksal tipler teorisinin yol açtığı problemler, indirgenebilirlik aksiyomu, sonsuzluk aksiyomu ve çarpımsal aksiyomu dizgesine eklemeyi kaçınılmaz hale getirir. Çünkü

⁸² Russell, *The Principles of Mathematics*, s. 7.

⁸³ A.e., s. 7.

⁸⁴ A.e., s. 9.

bu aksiyomların işin içine dâhil edilmediği durumlarda sayal sayılardaki kendi kendinin elemanı olmayan sınıfların sınıfı gibi **kendine-gönderimli** (*İng.* Self-referential) paradokslar ortaya çıkar. Öte yandan bu aksiyomların kullanılması, belli başlı bazı sorunların ortaya çıkmasına sebep olmaktadır. Bu problemlerin neler olduğuna bu bölümün ilerleyen sayfalarında değineceğiz. Şimdi Russell'ın mantıksal tipler teorisini biraz daha açalım.

“Russell, *Principia Mathematica*'da mantıksal ve matematiksel önermeleri tipler hiyerarşisine göre sıralar. Bu sıralama özetle şöyledir: Kendine gönderimli paradokslar, bir tamlığın elemanlarının tamlığın kendisi aracılığıyla tanımlanabileceğinin varsayılmasıyla ortaya çıkarlar. Bu paradokslardan kurtulmak için mantık ve matematiğin bir çeşit kısır-döngüye (*İng.* vicious-circle) göre inşa edilmesi gerekir. Bu şu demektir: Eğer belirli bir sınıf tamlık içeriyorsa, o sınıf sadece o tamlık aracılığıyla tanımlanan elemanlar içermelidir.⁸⁵ Russell'a göre, her önermesel fonksiyon belirli bir değer alanına sahiptir. Aynı deyişle, eğer x argümanı F fonksiyonunun değer alanında ise, F fonksiyonunun x argümanı için aldığı bir değer vardır. Bir fonksiyonun değer alanı fonksiyonun her değeri için doğru ve yanlış değerlerini aldığı argümanları içerir. Fonksiyon değer alanı dışındaki bir argüman için anlamsızdır. Değer alanı, fonksiyonun değer aldığı argümanların sınıfı olarak tanımlanır. Tip, bir önermesel fonksiyonun değer alanı olarak tanımlanır. Diğer bir deyişle, bir fonksiyonun tipi, o fonksiyonun değer aldığı argümanların sınıfıdır. Nesnelerin en düşük tipini Russell'ın temel önermeler (*İng.* elementary proposition) dediği ve hiçbir görünür değişken (*İng.* apparent variable) içermeyen önermeleri kuran tekiler oluşturur. Temel önermelerin genellemeleri ile ikinci mantıksal tipi oluşturan ilk basamak önermeler elde edilir. Birinci düzey önermelerin görünür değişken olarak olduğu önermeler ikinci düzey önermeleri (*İng.* second-order propositions) oluşturur. İkinci düzey önermeler ise üçüncü mantıksal tipi oluştururlar. Aynı şekilde devam edersek eğer şöyle bir sonuca ulaşırız; $(n + 1)$ 'inci mantıksal tip n 'inci düzey önermeleri içerir.”⁸⁶

Russell'a göre fonksiyonların hiyerarşisi, önermelerin hiyerarşisine dayanır. Argümanları tekiler olan ve aldığı değer her zaman ilk basamak bir önerme olan bir fonksiyon, **birinci düzey fonksiyon** (*İng.* first-order function) olarak tanımlanır. Russell'a göre önermeler ve fonksiyonlar belirli bir çeşit tipler hiyerarşisine göre sıralı olduklarından indirgenebilirlik aksiyomunu varsaymak gereklidir. Çeşitli

⁸⁵ Bertrand Russell, Alfred N. Whitehead, *Principia Mathematica 2nd edition Vol. 1*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927, s. 37.

⁸⁶ Arslan, Gök, “Gödel'in Tamamlanamazlık Teoremlerinin Ardından Matematiğin Temelleri Tartışmaları”, s. 5.

tiplerde önerme ve fonksiyon olduğundan ve genelleme sadece belirli bir tip içinde mümkün olduğundan bütün önermeler, bazı önermeler, bütün fonksiyonlar ve bazı fonksiyonlar gibi söylemler anlamını yitirmektedir. Ama öte yandan matematiğin mümkün olabilmesi için, “x argümanı tarafından sağlanan bütün önermesel fonksiyonlar” gibi söylemlerin bir şekilde anlamlı kılınması gerekmektedir. Zira matematik bu tarz önermelerle doludur. O zaman bu önermelerin kurulabilmesi için bir önermesel fonksiyonun değerlerinin doğruluğunu ya da yanlışlığını etkilemeden onun basamağını indirgeyecek bir metot bulunması gerekmektedir. Bu da ancak indirgenebilirlik aksiyomunun varsayılmasıyla mümkündür. Kısaca söylemek gerekirse, indirgenebilirlik aksiyomu ile “Herhangi verili bir fonksiyon için onunla biçimsel olarak eşdeğer bir yüklemsel fonksiyon vardır”ı kabul etmiş oluruz. Russell her ne kadar matematiğin mantıktan türetilmesinde indirgenebilirlik aksiyomuna kaçınılmaz olarak ihtiyaç duyuyorsa da, bu aksiyomun dizgeye eklenmesinin doğuracağı güçlüklerin de farkındadır. Çünkü O’na göre indirgenebilirlik aksiyomu apaçık değildir. İndirgenebilirlik aksiyomu ile bir önermesel fonksiyonun, değerlerinin doğruluğunu ya da yanlışlığını etkilemeden, basamağı indirgenebilir. Ama bir önermesel fonksiyonun bütün değerleri için bir yüklemsel fonksiyon ile eşdeğer olup olmadığı konusu halâ müphem kalmaktadır.

Russell’in matematiği mantıktan türetmek için dizgesine eklemesi gerektiği diğer bir aksiyom da sonsuzluk aksiyomudur. Sonsuzluk aksiyomuna ilişkin şöyle bir tespit yapar: “Evrendeki tekilerin sayısı10367’dir diye iddia eden birisi olsun, bu iddiayı reddetmenin a priori bir yolu yoktur.”⁸⁷ Bu tespit, evrendeki tekilerin sayısının sonlu ya da sonsuz olmasından bağımsız olarak empirik bir tespittir. Russell empirik yollarla, tekilerin sayısının sonlu olmadığını kanıtlanamayacağını, ama bir şekilde sonlu olmasının, sonsuz olmasından daha çok probleme yol açacağını düşünür. Bu sebeple, empirik temeller üzerinde de olsa, sonsuzluk aksiyomunun dizgeye eklenmesi gerektiğini düşünür. İndirgenebilirlik aksiyomunda olduğu gibi, sonsuzluk aksiyomunun da dizgeye eklenmesi kimi güçlükleri beraberinde getirir. Russell *Principia Mathematica*’da, mantıkta hiçbir şeyin sonsuzluk aksiyomunun

⁸⁷ Russell, “Mathematical Logic as Based on the Theory of Types”, s. 179.

doğruluğu ya da yanlışlığını gerektirmediğini söyler.⁸⁸ Deneyim alanının tamamen dışında bir yapı olarak kurulacak olan mantık ve matematiğin temellerinde ancak empirik olarak anlaşılabilecek bir aksiyomun olması Russell'ın isteyebileceği bir durum değildir.

Russell ve Whitehead'ın *Principia Mathematica*'da matematiği mantıktan türetmek için dizgelerine ekledikleri bir diğer aksiyom da çarpımsal aksiyomdur. Aslında çarpımsal aksiyom 1904'te Ernst Zermelo'nun formüle ettiği **seçim aksiyomunun** (*Ing.* Axiom of Choice) matematiksel bir uygulamasından başka bir şey değildir. Çarpımsal aksiyomun temel iddiası şudur: Ortak elemanı olmayan ve hiçbir boş olmayan sınıfların sınıfı verili olsun, en az bir sınıf vardır ki, bu sınıf sınıfların sınıfındaki her sınıfın bir elemanını içerir. Russell çarpımsal aksiyomun doğru olmadığı mümkün bir evren olduğunu göstermenin a priori bir yolunun olmadığını iddia eder.⁸⁹ Çarpımsal aksiyomun doğruluğu da sonsuzluk aksiyomunda olduğu gibi empirik yollarla gösterilmektedir. Russell aynı sebeplerle dizgesinde çarpımsal aksiyomun kullanımını da sınırlandırır. Diğer bir deyişle, Russell ve Whitehead *Principia Mathematica*'da matematiği mantıktan türetmek için zorunlu olarak kullandıkları bu üç aksiyomu, barındırdıkları problemlerden ve hiçbirinin mantıksal önermeler olmamalarından ötürü mümkün olduğunca az kullanmayı tercih ettiler.

Wittgenstein *Defterler*'de "Eğer içinde mantığın tüm ilkelerinin doğru olduğu bir dünya varsa, o dünyada tüm matematik tutar"⁹⁰ demektedir. Wrigley'e göre, bu alıntı adeta Wittgenstein'in mantıksalcı pozisyonunun da kısa bir özeti gibidir.⁹¹ Bu savı destekleyecek başka bir iddia da şudur: Wittgenstein *Defterler*'de matematiksel önermelerin bütünü'nün modus ponens'in⁹² sembolik bir temsili olduğunu söyler.⁹³ Modus ponens mantığın bir yasasıdır, eğer her matematik önermesi mantığın bu

⁸⁸ Russell, Whitehead, *Principia Mathematica 2nd edition Vol. 2*, s. 183.

⁸⁹ Russell, *The Principles of Mathematics*, s. vii.

⁹⁰ Wittgenstein, *Defterler: 1914-1916*, s. 98.

⁹¹ Wrigley, "Wittgenstein's Early Philosophy of Mathematics", s.10.

⁹² Modus ponens: geleneksel ve çağdaş mantık terimi (tam adı *modus ponendo ponens*). 'p ise q' biçimindeki çıkarım. $p \rightarrow q$. Kimi mantıkçılar q'nun $p \rightarrow q$ ve p önermelerinden elde ettiği çıkarım kuralını modus ponens olarak adlandırırlar. Koşullu tasımlardan sayılmıştır. Bkz. Grünberg, Onart, *Mantık Terimleri Sözlüğü*, s. 88.

⁹³ Wittgenstein, *Defterler: 1914-1916*, s. 73.

yasasını temsil ediyor ise aynı zamanda mantıksal bir şeyi de temsil ediyordur, buradan hareketle Wittgenstein'a göre matematik mantığın bir parçasıdır denilebilir.⁹⁴ Dolayısıyla Wittgenstein'a göre matematiğin temellendirilmesinde mantıksal olmayan hiçbir yordam kullanılmamalıdır. Buradan hareketle Wittgenstein Russell ve Whitehead'ın ortaya atmış oldukları indirgenebilirlik aksiyomunu, sonsuzluk aksiyomunu ve çarpımsal aksiyomu mantıksal aksiyomlar olmadıkları gerekçesiyle reddeder. Russell ve Whitehead matematiği mantıktan türetmek adına kendisi mantıksal olmayan, eşdeyişle sentaksın sınırları içerisinde kalarak anlaşılabilen üç aksiyomu dizgelerine eklemişlerdir. Wittgenstein'ın itirazı kendileri mantıksal olmayan bu aksiyomları dizgeye ekleyerek mantıksal bir dizge olarak matematiğin tesis edilemeyeceği fikri üzerinden şekillenir.

Wittgenstein'a göre mantıksal önermeler totolojilerin veya çelişkilerin *Defterler*'de belirtilen DY-yazımı (*İng.* TF-notation) ile yapılan genellemelerinden başka bir şey değildir. Bu yazımda D doğruyu, Y ise yanlış temsil etmektedir. DY-yazımına göre p önermesi D-p-Y, $\neg p$ önermesi de Y-D-p-Y-D olarak yazılır. Wittgenstein, DY-yazımı ile Russell'ın birinci düzey dediği bütün mantıksal önermelerin, *Principia Mathematica*'nın tımdengelim teorisinin (*İng.* Theory of Deduction) bütün mantıksal önermelerinin ve görünür değişkenler teorisinin (*İng.* Theory of Apparent Variables) bütün birinci düzey önermelerinin totoloji olduklarının gösterilebileceğine inanır.⁹⁵

Wittgenstein bu yolla *Principia Mathematica*'nın bütün mantık önermelerinin totolojik olduğunun gösterilebileceğini düşünür. Aynı zamanda, Wittgenstein'a göre bir mantık önermesinin doğruluğu zorunlu bir doğruluktur. Ama *Principia Mathematica*'da varsayılan üç aksiyom için aynı şeyin söylenemeyeceği, Wittgenstein için açıktır. Çünkü bu önermeler ona göre mantıksal önermeler değildirler ve bu önermelerin doğrulukları olumsaldır.⁹⁶ Wittgenstein'a göre bir şeyin var olduğunu bize fizik söyler, oysa sonsuzluk aksiyomu X_0 şey olduğunu söyler. Bu sebeple sonsuzluk aksiyomu mantıksal bir önerme değildir. Wittgenstein aynı şekilde

⁹⁴ Wrigley, "Wittgenstein's Early Philosophy of Mathematics", s. 12.

⁹⁵ Ludwig Wittgenstein, **Cambridge Letters, Correspondence with Russell, Keynes, Moore, Ramsey and Sraffa**, Ed. B. F. McGuinness, G. H. von Wright, Basil Blackwell, Oxford, 1995, s. 23.

⁹⁶ A.e., s. 22.

indirgenebilirlik aksiyomunun da mantıksal bir önerme olmadığını söyler, çünkü X_0 tane şeyin olduğu mümkün başka bir dünyada bu önerme bu şekilde olamayabilir, doğru olmayabilir. Diğer bir deyişle, dünyanın ne şekilde olduğu ve olacağı mantığın karar vereceği bir şey değildir.

Artık Wittgenstein'in erken döneminde ortaya koymuş olduğu matematiksel önerme anlayışına geçebiliriz. Bilindiği üzere, Wittgenstein birinci döneminde esas olarak **söylenebilen** (İng. Sayable) ile **söylenemeyen** (İng. Unsayable) arasındaki ayrımı belirginleştirmeye çalışmıştır.⁹⁷ Bu iki kavram ve bu kavramlar aracılığı ile konumlandırılan önermeler Wittgenstein felsefesinde matematik önermelerinin yerinin anlaşılması bakımından oldukça önemlidir. Wittgenstein'a göre anlamlı önermeler olgusal gerçeklik ile örtüşüp örtüşmemelerine bağlı olarak doğru ya da yanlış değeri alabilen doğabilimi önermeleridir.⁹⁸ Çakmak, *Tractatus'da Dil ve Felsefe İlişkisi* adlı çalışmasında bu hususu şöyle ifade eder: "Wittgenstein'in ilk dönem felsefesi açısından, dünya resimleri olan düşüncelerin ifade edildiği önermelerin doğruluk ve yanlışlığı ancak gerçeklik ile karşılaştırılarak anlaşılabilir."⁹⁹ Dolayısıyla Wittgenstein'a göre doğabilimi önermeleri söylenebilen önermelerdir. Söylenebilmek ya da söylenememek kavramları Wittgenstein felsefesinde gündelik dildeki kullanımımızdan farklı anlamlarda kullanılmıştır. Şöyle ki, Wittgenstein için

⁹⁷ Cengiz Çakmak, "Susma ve İfade Edilemeyen", **Felsefe Arkivi**, Sayı 31, 2007, s. 14.

⁹⁸ Ülkemizin önde gelen Wittgenstein yorumcularından olan Ömer Naci Soykan Wittgenstein'da cümle türleri bağlamında şöyle bir sınıflandırmanın yapılabileceğini belirtir; "1) Dünya ile ilgili cümleler: Bunlar, dünyaya ilişkin şey-durumunu, dünyada olduğu öne sürülen bir şeyi yansıtan, resmeden önermelerdir. Wittgenstein'in asıl 'cümle' dediği bunlardır. Bunları genellikle *olaysal* ya da nesnel önermeler diye niteleyebiliriz. Örneğin, "Bu masanın uzunluğu iki metredir," cümlesi böyle bir önermedir. Bu önerme doğru veya yanlış olabilir. Ama o, doğru da olsa, yanlış da olsa anlamlı bir önermedir. "*İnce Memed*"in yazarı Aziz Nesin'dir," cümlesi, anlamlı ama yanlış bir cümledir. Bu cümlelerin doğruluklarını, onların kendileri bize vermez. Bunun için ilgili şey-durumuna bakmak, deneye başvurmak gerekir. Bu nedenle onlar için "zorunlu doğru" denemez. 2) Mantıksal-matematiksel cümleler: Doğrulukları ve Yanlışlıkları kendilerinden çıkan önermelerdir. Örneğin, i. "Yağmur yağıyor veya yağmıyor," ii. "Yağmur yağıyor ve yağmıyor," iii. " $2 + 2 = 4$ ". Bunlar bir şey söylemezler; sözde cümlelerdir. Onların doğru olup olmadıklarını anlamak için onlardan başka bir şeye bakmayız. Bunu bize onarın kendileri söyler. Bunlara mantıkta "totoloji" ve "çelişme", matematikte "eşitlik" denir. Zorunluluk, ancak bu tür önermeler için söz konusudur. Bunlar bir şey söylemezler, anlamları yoktur. Çünkü onlar bir şey-durumunu resmetmezler. Ama onlar saçma değildirler." Soykan, burada bizim anlam-dışı olarak kullandığımız 'unsinn' yerine saçma tabirini kullanmaktadır. Soykan, makalesinin ilerleyen bölümlerinde metafizik cümleleri de bir sınıf olarak ele alır. Ona göre metafizik cümleler doğru ya da yanlış olamayan anlam-dışı (ya da saçma) cümlelerdir. Soykan, dilimizin sınırlarının bu cümleleri kurmaya yetmeyeceğinden bu konularda susmamız gerektiğini belirtir. Bkz. Ömer N. Soykan, "Wittgenstein Felsefesi: Temel Kavram ve Sorunlar", **Cogito**, Sayı 33, 2002, s. 52.

⁹⁹ Çakmak, *Tractatus'da Dil ve Felsefe İlişkisi*, s. 31.

söylenebilir olmak kavramı sadece doğa bilimi önermeleri ile ilişkilendirilebilecek bir özelliktir. Sadece doğa bilimi önermeleri olgusal bir gerçekliği doğru ya da yanlış olacak şekilde resmeder. Bu sebeple, bilim dili içerisinde ancak bu önermeler söylenebilir önermelerdir. Burada şu önemli hususa dikkat çekmek isteriz: Yukarıda andığımız bilim dili, dilin bütününe kapsamaz. Dolayısıyla Wittgenstein’in ifade ettiği önerme türlerini her hangi bir değersel hiyerarşiye tâbi imiş gibi düşünmek doğru olmayacaktır. Öte yandan, Wittgenstein’a göre mantık ve matematik önermeleri söylenilemeyen önermeler sınıfına dâhil edilirler. Mantık ve matematik önermelerinin söylenilemez oluşu, bu önermelerin her hangi bir olgu durumunun resmi olmamaları ile açıklanabilir. Bununla birlikte mantık ve matematik önermeleri de doğabilimi önermelerinde olduğu şekli ile olmasa da doğru ya da yanlış değeri alır. Konuyu biraz daha irdelemek adına şunlar söylenebilir:

“Mantık ve matematik önermeleri de “Doğru-Yanlış” değeri alırlar. Bunların doğruluğu ya da yanlışlığı ise tamamen biçimsel sentaktik kurallar aracılığıyla belirlenir. Ancak sözelimi, bir doğa bilimi önermesinin aldığı doğru değeri ile bir matematik önermesinin aldığı doğru değeri her ne kadar aynı sözcükle karşılansa da kategorik olarak birbirinden farklıdır. Doğa bilimi önermesinde, ifadenin gönderim yaptığı olgusal bir gerçeklik vardır ve önermenin doğruluğunun ya da yanlışlığın belirlenmesi için önermenin kurulduğu dilin sınırlarının dışına çıkıp olgusal gerçekliğe bakmak gerekir. Matematik önermesinde sadece tanımdan ve aksiyomlardan söz edebiliriz, herhangi bir gönderim yoktur bu sebeple dilin dışına çıkmayı gerektirmez. Başka bir şekilde ifade edecek olursak; matematiksel bir önerme ya totolojidir ya da çelişki. Totolojiler ve çelişkiler ise mümkün olgu durumlarını ya da olgu bağlamlarını resmetmezler. Dolayısıyla deneysel önermelerde olduğu şekliyle “doğru-yanlış” değeri almazlar. Bir fizik önermesinin doğruluk değeri dünyanın nasıl olduğunun bir fonksiyonudur, bir matematik önermesinin doğruluk değeri ise önermenin sembollerinin ve bu sembollerin içerisinde bulunduğu biçimsel dizgenin bir fonksiyonudur.”¹⁰⁰

Russell, Wittgenstein’in *Principia Mathematica*’daki aksiyomlara yönelik eleştirilerini kabul etmiştir.¹⁰¹ Hatta, Ottoline Morrell’e yazdığı bir mektupta *Principia Mathematica*’nın ilk ispatlarının hatalı olduğu konusunda Wittgenstein’in

¹⁰⁰ Mehmet Arslan, “Wittgenstein’da Matematik Felsefesi”, **VII. Mantık Çalıştayı Kitabı**, Ed. Şafak Ural, Vedat Kamer, Mantık Derneği Yayınları, İstanbul, 2017, s. 46.

¹⁰¹ Bertrand Russell, **Introduction to Mathematical Philosophy**, George Allen & Unwin, London, 1919, s. 206.

kendisini ikna ettiğini yazmıştır.¹⁰² Bununla birlikte, indirgenebilirlik aksiyomunu onunla aynı sonuçları verecek ve aynı zamanda mantıksal olacak başka bir aksiyomla değiştiremediğini de belirtmiştir. Russell indirgenebilirlik aksiyomundan yerine başka bir aksiyom koymaksızın vazgeçemez, çünkü indirgenebilirlik aksiyomundan vazgeçmesi demek aynı zamanda matematiği mantıktan türetmek iddiasından da vazgeçmek anlamına gelir. Russell ve Whitehead Wittgenstein'in eleştirilerine rağmen *Principia Mathematica*'nın temel tezi olan matematiğin mantıktan türetilebileceği iddiasından da hiçbir zaman vazgeçmezler. Russell *The Principles of Mathematics*'te şunları söyler: “Bu sorunun tam çözümünün ne olabileceğini keşfetmekte başarılı olamadım, ama bu usamlamanın temellerini etkilediği için, bunun üzerine çalışmayı bütün mantık öğrencilerinin ilgisine ciddiyetle bırakıyorum.”¹⁰³

Toparlayacak olursak, Wittgenstein, Russell ve Whitehead'ın kendine gönderimli paradokslardan kurtulmak adına ortaya atmış oldukları mantıksal tipler teorisi ve bu teorinin geçerli olması için dizgelerine ekledikleri mantıksal olmayan aksiyomlar sebebiyle mantıksalcılığın savunulamayacağını düşünür.

1.2.2. Tractatus'ta Matematiksel Önerme Anlayışı

Çalışmanın bu bölümüne, Wittgenstein'in *Tractatus*'ta **sayı sistemleri** ve bu sistemlerin “+ 1 işlemi” uyarınca inşa edilmeleri, aritmetiksel ifadelerin **yer değiştirebilirliği**, **anlamsız**, **anlam-dışı** ve **söylenemez** kavramları, Wittgenstein'in Frege'nin eşitlik anlayışlarına karşı çıkışı gibi konuları irdelleyeceğiz. Bu yolla Wittgenstein'in *Tractatus*'ta ortaya koyduğu matematiksel önerme anlayışını serimlenmeye çalışacağız.

Prototractatus'ta eşitlikler şöyle açıklanır:

¹⁰²Bertrand Russell, “Letter to Lady Ottoline: 23 Şubat 1913”, (Çevrimiçi) <https://mulpress.mcmaster.ca/russelljournal/article/.../1475> 12 Ocak 2018.

¹⁰³ Russell, *The Principles of Mathematics*, s. 528.

“Aritmetikte eşitlikleri inşa etmenin olanağı, mantıkta totolojileri inşa etmenin doğruluk fonksiyonlarının bir sistemini varsayması gibi, bir sayı sistemini varsaymaktan geçer. Bu sayı sistemi ‘+ 1’ işlemi uyarınca inşa edilir. Sayı sistemi inşa edildikten sonra belirli bir takım sayıların birbirlerine eşit olduğu ya da belirli bir takım aritmetiksel eşitliklerin kurulabileceği iddia edilebilir. Daha ileri aritmetiksel eşitlikler, sayıları verili eşitlikler uyarınca yerlerine koyma metodu ile türetilir.” (*Prototractatus* 6.24)

Alıntıdan da anlaşılacağı üzere, Wittgenstein’a göre aritmetiksel bir eşitlik yalnızca iki farklı ifadenin yer değiştirebilir olduğunu gösterir.

“Wittgenstein’a göre bir matematik önerme, alınan iki ifadenin eş değer olduğunu dolayısıyla yer değiştirilebilir olduğunu ya da olmadığını söylemekten başkaca bir şey söylemez. ‘ $5+7=12$ ’ önermesinin bize sunduğu tek şey şudur; sol tarafta ki ifade ile sağ taraftaki ifade eş değer ifadelerdir. Dolayısıyla bu iki ifade yer değiştirebilir, başka bir şekilde söyleyecek olursak bu iki ifade birbirlerinin yerine kullanılabilirler.”¹⁰⁴

Wittgenstein anlamsız ve söylenilemez olarak nitelendirdiği eşitliklerin dünyanın mantığını yansıttığını düşünür. Daha önceden de ifade edildiği üzere, Wittgenstein **anlamsız** ve **söylenilemez** kavramlarını günlük konuşma dilindeki karşılıklarından başka anlamlara gelecek şekilde kullanır. O’na göre bir önermenin anlamlı olması için, bir olgu durumunu resmetmesi gerekir. Diğer bir deyişle, olgusal içeriği haiz olması gerekir. Bu bakımdan anlamlı önermeler yalnızca doğa bilimi önermeleridir. Anlamlı önermeler olgusal gerçeklik ile örtüşüp örtüşmemeleri üzerinden doğru-yanlış değeri alırlar. Mantık ve matematiğin önermeleri ise herhangi bir olgu durumunu resmetmez. Bu bakımdan anlamsız önermelerdir. Mantık ve matematiğin önermeleri yalnızca biçimsel bir dilin sınırları içerisinde kalınarak inşa edilirler. Doğruluk-yanlışlıkları da bu biçimsel dilin kurallarına uyup uymamaları ile belirlenir. Wittgenstein’a göre etik, din ve estetik önermeleri de olgusal içeriği

¹⁰⁴ Arslan, “Wittgenstein’da Matematik Felsefesi”, s. 47.

olmayan önermelerdir. Bununla birlikte O'na göre etik, din ve estetik önermelerinin doğruluğundan ya da yanlışlığından söz edilemez. Onlar anlam-dışıdır. Wittgenstein *Tractatus*'u “Üzerine konuşulamayan konusunda susmalı”¹⁰⁵ diyerek bitirir. (*Tractatus* 7) O'na göre üzerinde konuşulabilen, eşdeyişle söylenebilir olan yalnızca doğa bilimi önermeleridir. Mantık, matematik, din, etik, estetik önermeleri ise üzerinde konuşamayacağımız, bu sebeple söylenilemez olan önermelerdir. Bununla birlikte, Wittgenstein *Tractatus*'ta “Yineleme [totoloji] ve çelişme anlamsızdır.”¹⁰⁶ der. (*Alm.* Tautologie und Kontradiktion sind **sinnlos**¹⁰⁷)¹⁰⁸ (*Tractatus* 4.461) Ardından da ekler: “Ama Yineleme [totoloji] ve çelişme, saçma [anlam-dışı] değillerdir”¹⁰⁹ diye ekler. (*Alm.* Tautologie und Kontradiktion sind aber nicht **unsinnig**¹¹⁰)¹¹¹ (*Tractatus* 4.4611) Bu alıntıdan Wittgenstein'in mantık-matematik tümceleri ile ahlak, din ve estetik tümceleri arasında bir fark gözettiği sonucu açıkça görülmektedir.¹¹²

Wittgenstein'a göre aritmetiksel eşitlikler, sayısal ifadelerin belirli bir takım kurallar uyarınca yer değiştirmesi yoluyla türetilir. $2 + 2 = 1 + 3$ eşitliğini düşünelim.

$$1 + 1 = 2 \text{ (Tanım)}$$

$$1 + 1 + 1 = 3 \text{ (Tanım)}$$

Yukarıda ifade edilen iki tanımdan yola çıkılarak $(1 + 1) + (1 + 1) = 1 + (1 + 1 + 1)$ eşitliğine, buradan da $2 + 2 = 1 + 3$ eşitliğine ulaşılır. Bu yolla $2 + 2$ ve $1 + 3$ ifadelerinin birbirinin yerine geçebilen ifadeler olduğu görülebilir. $+ 1$ işleminin ardışık uygulamaları ile $2 + 2$ ve $1 + 3$ ifadelerinin aynı biçimsel kavramı temsil ettikleri, eşitliğin kendisinden bağımsız olarak gösterilebilir. Diğer bir deyişle, $2 + 2$

¹⁰⁵ Wittgenstein, *Tractatus*, s. 173.

¹⁰⁶ *A.e.*, s. 83.

¹⁰⁷ Vurgu bana aittir.

¹⁰⁸ Wittgenstein, *Tractatus*, s. 82.

¹⁰⁹ *A.e.*, s. 83.

¹¹⁰ Vurgu bana aittir.

¹¹¹ Wittgenstein, *Tractatus*, s. 82.

¹¹² Bu farkı başka bir şekilde şöyle de ifade edebiliriz: Wittgenstein'a göre mantık-matematik önermeleri anlamsızdır. Etik, din, estetik önermeleri ise anlam-dışıdır. Ancak bunların hepsi söylenilemezdir.

ve $1 + 3$ ifadelerinin eşit ifadeler olduğu $2 + 2 = 1 + 3$ eşitliği kurulmadan gösterilebilir.

Wittgenstein *Tractatus*'ta iki şeyin özdeş olduğunu söylemenin saçma olduğunu, bir şeyin kendisi ile özdeş olduğunu söylemenin de aslında hiçbir şey söylememekle aynı olduğunu söyler.¹¹³ (*Tractatus* 5.5303) Wittgenstein'a göre eşitliğin kendisi bir işlem değildir. $4 + 6 = 3 + 7$ eşitliğinde $4 + 6$ ve $3 + 7$ işlemin ifadeleridir. Ancak eşitliğin kendisi yani “=” işlemin bir ifadesi değildir.

Frege eşitlikte karşımıza çıkan iki ifadenin anlamlarının ayrı, gönderimlerinin aynı olduğunu düşünür.¹¹⁴ Wittgenstein ise, bir eşitlikte önemli olan noktanın eşitliğin kendisinin her iki tarafındaki ifadenin anlamlarının aynı olduğunu göstermek gibi bir zorunluluğu olmadığını düşünür. *Tractatus*'ta¹¹⁵ bu durum şöyle dile getirilir:

“İki dile getiriş eşitlik imiyle bağlanınca, bu, bunlar birbirinin yerine konabilir demektir. Ama bunun öyle olup olmadığı, kendisini bu iki dilegetirişin kendilerinde göstermelidir. İki dilegetirişin birbirinin yerine konabilmeleri onların mantıksal biçimini niteler.” (*Tractatus* 6.23)

“Evetlemenin bir niteliği, çifte değilleme olarak yorumlanabilmesidir. “ $1 + 1 + 1 + 1$ ” in bir niteliği, “ $(1 + 1) + (1 + 1)$ ” olarak yorumlanabilmesidir.” (*Tractatus* 6.231)

Frege, bu iki dilegetirişin imlemlerinin aynı, anlamlarının ise ayrı olduğunu söyler. Oysa eşitlik için özsel olan, eşitlik iminin bağladığı iki dilegetirişin imlemlerinin aynı olduğunu göstermek için zorunlu olmasıdır; çünkü bu, iki dilegetirişin kendilerinde görülebilir. (*Tractatus* 6.232)

“Ve matematik tümcelerinin kanıtlanabilmeleri demek, doğruluklarının, dilegetirdiklerinin kendisinin doğruluğu açısından olgularla karşılaştırılması gerekmeksizin görülebilmesinden başka bir şey demek değildir.” (*Tractatus* 6.2321)

“İki dilegetirişin imlemlerinin özdeşliği, savlanamaz. Çünkü onların imlemleriyle ilgili bir şey savlamak için, imlemlerini bilmem gerekir: ve imlemlerini bilince de, aynı şeyi mi yoksa ayrı şeyleri mi imlediklerini de bilirim.” (*Tractatus* 6.2322)

¹¹³ Wittgenstein, *Tractatus*, s. 123.

¹¹⁴ Gottlob Frege, “On Sense and Reference”, *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Ed. P. Geach, M. Black, Basil Blackwell, Oxford, 1980, s. 61.

¹¹⁵ Wittgenstein, *Tractatus*, s. 153-155.

Frege, toplamadaki birleşme özelliğinin bir aksiyom ya da bir tanım olarak ele alınması gerektiğini düşünür. Bu hususu *Aritmetiğin Temelleri*'nde şöyle dile getirir.

“2 artı 2'nin 4 olması dolaysız bir doğruluk değildir; 3 artı 1'in 4'ü ifade ettiğini kabul etmemiz koşuluyla. Bunun kanıtlanması aşağıdaki gibi yapılabilir:

Tanımlar: 1) 2, 1 artı 1'dir.

2) 3, 2 artı 1'dir.

3) 4, 3 artı 1'dir.

Aksiyom: Eğer eşit olanların yerine onların eşiti konursa, eşitlik korunur.

Kanıtlama: $2 + 2 = 2 + 1 + 1$ (Tanım 1'den) $= 3 + 1$ (Tanım 2'den) $= 4$ (Tanım 3'den)

Demek ki, $2 + 2 = 4$ (Aksiyomdan)

İlk bakışta, bu kanıtlama tümüyle, verilen tanımlarla ve aksiyomla inşa edilmiş gibi görünüyor. Ve yine bu aksiyom, Leibniz'in bizzat kendisinin başka bir yerde yaptığı gibi bir tanıma dönüştürülebilir. Sanki 1, 2, 3, 4 hakkında tanımlarda yer alandan daha fazla bir şey bilmemize gerek yokmuş gibi gözüküyor. Bununla birlikte, daha dikkatle baktığımızda, kanıtlamada, ayrıçların ihmal edilmesi yüzünden saklı kalmış bir açık bulabiliriz. Tam kesinliği sağlamak için kanıtlamayı şu şekilde yazmamız gerekir;

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1)$$

$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4$$

Burada eksik olan

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$$

önermesidir, bu da,

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

önermesinin özel bir durumudur. Eğer bu yasayı varsayarsak, her toplama formülü için benzer bir kanıtlama verebileceğimiz kolaylıkla görülebilir.”¹¹⁶

Alıntıdan da anlaşılacağı üzere, Frege'ye göre toplamının birleşme özelliği, yani $a + (b + c) = (a + b) + c$ olduğu, varsayılmaksızın $2 + 2 = 4$ eşitliği gösterilemez.

¹¹⁶ Frege, *Aritmetiğin Temelleri*, s. 93-94.

Wittgenstein'a göre ise toplamanın birleşme özelliğini ayrıca varsaymaya gerek yoktur. Birleşme özelliği, toplama işleminin içsel bir özelliğidir. Nasıl ki Frege'ye göre $\sim\sim p \equiv p$ apaçık ise¹¹⁷, Wittgenstein'a göre de $1 + 1 + 1 + 1 = (1 + 1) + (1 + 1)$ ifadesi apaçıktır.

Ezcümle, Wittgenstein'ın Tractatus'ta çizdiği çerçeveye göre aritmetiksel bir eşitlik farklı iki ifadenin yer değiştirebilir/birbirinin yerine geçebilir olduğunu gösterir. Yer değiştirmenin zemininde de bu ifadelerin + 1 işlemi üzerinden türetilbilmeleri yatar. Bu bölümü önemli bir noktaya dikkat çekerek bitirmek istiyoruz: Yukarıda da belirttiğimiz gibi, Wittgenstein sayıların + 1 işlemi üzerinden, eşdeyişle birimler üzerinden türetilbileceğini/inşa edilebileceğini ifade eder. Ancak bu türetimin nasıl olduğu, meşru zemininin ne olduğu hakkında konuşmaz. Sayı inşasının zemini üzerine konuşmayı söylenilemez olarak nitelendirip iptal etmesi, Tractatusçu matematik anlayışının oldukça ciddi sorunlarla karşı karşıya kalmasına neden olmuştur. Bu sorunlara çalışmanın son bölümünde yer vereceğiz. Şimdi Wittgenstein'ın ikinci dönem matematik felsefesini incelemeye başlayabiliriz.

¹¹⁷ Gottlob Frege, **The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System Vol. 1**, Ed. M. Furth, University of California Press, Berkley, 1964, s. 24.

İKİNCİ BÖLÜM

WITTGENSTEIN'IN İKİNCİ DÖNEMİNDE MATEMATİĞİN TEMELLERİ SORUNU

Wittgenstein'in ikinci dönemine geçmeden önce, O'nun felsefi metamorfozunu daha iyi anlamak için kısaca da olsa bu geçişin tarihsel arka planına değinmenin yerinde olacağı kanaatindeyiz.

Wittgenstein 1914'te Birinci Dünya Savaşı'nın başlamasıyla birlikte gönüllü olarak Avusturya ordusuna yazılır. Savaşın bitimine kadar cephede kalır. Yanından ayırmadığı not defterine savaşın en şiddetli zamanlarında notlar yazar. Bu notlar, bir bakıma *Tractatus*'un gelişinin müjdecisidir. Savaşın son bir yılını İtalya'da bir hapisanede esir olarak geçirir. *Tractatus*'u bu hapisanede bitirir. *Tractatus*'ta felsefenin bütün problemlerine ilişkin kesin ve tartışmasız çözümler ortaya koyduğunu düşünmektedir. Bu noktayı biraz daha açmakta fayda var: Wittgenstein'a göre *Tractatus*'a kadar felsefede problem olarak anılan hususların azımsanmayacak bir kısmı aslında gerçek anlamıyla felsefe problemi değildir. O'na göre, bunlar olsa olsa dilin mantığının tam anlamıyla kavranılamamasından doğan sözde-problemlerdir. O zaman, böyle düşünen Wittgenstein için geriye yapacak bir iş kalır, o da dilin mantığını doğru bir şekilde çözümlemektir. Wittgenstein *Tractatus*'ta bunu başardığını düşünür ve verdiği merdiven metaforuyla bir bakıma kendisini ve kendisini anlayanları felsefeden kurtarmaya çalışır. Şimdi yapması gereken kitabı yayınlamaktır. Kitabı bir yayıncıya gönderir. Ama yayıncı *Tractatus*'u yayınlamayı kabul etmez. Savaş bitip Viyana'ya döndüğünde artık hiçbir şeyin eskisi gibi olmayacağını anlar. Artık ne Avrupa eski Avrupa'dır, ne Viyana eski Viyana'dır, ne de Wittgenstein eski Wittgenstein'dır. Zira son beş yılını asker olarak geçirmiştir ve bu deneyim kuşkusuz kişiliğinde kalıcı izler bırakmıştır. Anlatılanlara göre Wittgenstein savaşın bitimini takip eden birkaç yılda da asker üniformasını giymeye devam etmiştir.¹¹⁸ Viyana'ya döndükten kısa bir süre sonra bir öğretmen yetiştirme okuluna kaydolur ve ardından küçük bir kasabada öğretmenlik yapmaya başlar.

¹¹⁸ Monk, **Wittgenstein**, s. 253.

Tractatus'u yayınlıyacak birisini halâ bulamamıştır. *Tractatus* en sonunda Russell'in kitaba bir önsöz yazması neticesinde yayınlanır.¹¹⁹

"Felsefede doğru yöntem aslında şu olurdu: Söylenebilir olandan, yani doğabilimi tümcelerinden-yani, felsefeyle hiçbir ilgisi olmayan bir şeyden-başka bir şey söylememek, sonra her seferinde de, başka birisi doğa-ötesi bir şey söylemeye kalkıştığında, ona, tümcelerindeki belirli imlere hiçbir imlem bağlamamış olduğunu göstermek. Bu yöntem ona doyurucu gelmeyecektir- ona felsefe öğrettiğimiz duygusunu duymayacaktır- ama tam doğru yöntem bu olurdu." (*Tractatus* 6.53)

"Benim tümcelerim şu yolla açılmayıp kaldılar ki, beni anlayan, sonunda bunların saçma olduklarını görür, onlarla- onlara tırmanarak- onların üstüne çıktığında. Sanki üstüne tırmandıktan sonra merdiveni devirip yıkması gerekir. Bu tümceleri aşması gerekir, o zaman dünyayı doğru görür." (*Tractatus* 6.54)

"Üzerine konuşulamayan konusunda susmalı."¹²⁰ (*Tractatus* 7)

Tractatus görüldüğü üzere bir çağrıyla, **susma çağrısı**yla biter. Wittgenstein'a göre söylenebilir olan zaten açıkça söylenebilirdir, söylenilemez olanı söylemeye çalışmak ise beyhude bir uğraştır. Filozofun içine düştüğü metafizik, söylenilemez olanı söylemeye çalışmasıdır. **Sınırları** aşmaya çabalamasıdır. Wittgenstein bu durumu *Felsefi Soruşturmalar*'da ortaya attığı şişedeki sinek metaforu¹²¹ ile açıklar. Nasıl ki cam bir şişenin içerisindeki sinek, şişenin içerisinde olduğunu göremez, bilemez ve her defasında çıkmak için kanatlarını çırpıtığında şişeye çarpar ve olduğu

¹¹⁹ Wittgenstein değişik yayıncılara incelemeleri için *Tractatus*'u defalarca götürmüştür. Ama bunlardan hiçbiri kitabı yayınlamaya yanaşmamıştır. En son bir yayınevi kitaba Russell'in bir önsöz yazması halinde kitabı yayınlıyacağını söylemiştir. Çünkü Russell felsefe ve mantık alanının en önemli otoritelerinden biri sayılmaktadır ve onun önsüzünü yazdığı kitap elbette yayınevlerince basılmaya değerdir. Burada dikkat edilirse *Tractatus*'u basan yayınevi Wittgenstein'in yazdıklarına değil Russell'in önsüzüne itibar etmektedir. Ancak buraya Wittgenstein'in öğrencileri olan Janik ve Toulmin'in bu önsöze ilişkin yorumlarını da eklemek istiyoruz; Janik ve Toulmin'e göre Russell'in *Tractatus*'a ilk girişi denemesini yazdığı tarihten beri, İngilizce konuşan filozoflar neredeyse evrensel olarak, *Tractatus*'un ana ilgisinin felsefi mantığın teknik problemleri ve dilin dünya ile bağıntısı olduğunu düşünüyordu. Russell'in bu yorumu Carnap ve Ayer gibi mantıkçı pozitivistlerin *Tractatus*'u bağırllarına basmalarına ve onu empirist Kitab-ı Mukaddes gibi okumaya kaydırdı. Bkz. Janik, Toulmin, **Wittgenstein'in Viyanası**, s. 15. Russell'in *Tractatus* yorumu bugün birçok Wittgenstein uzmanı için *Tractatus*'u tam anlamıyla kavrayamamış bir kalemden çıkan bir yorum olarak görülmektedir.

¹²⁰ Wittgenstein, **Tractatus**, s. 171-173.

¹²¹ Bkz. Ludwig Wittgenstein, **Felsefi Soruşturmalar**, Çev. Haluk Barışcan, Metis Yayınları, İstanbul, 2010, s. 121.

yerden çıkamazsa, metafiziğe saplanmış filozof da dilinin sınırlarını göremez ve bilemez.

Yeri gelmişken, Wittgenstein'in bu düşünüş tarzı ile Kant'ın kritik projesi arasındaki benzerliği/paralelliği anmak istiyoruz. Nasıl ki Wittgenstein *Tractatus*'ta bütün felsefe problemlerini çözdüğünü düşünüyorsa, Kant da *Arı Usun Eleştirisi*'nde metafiziğin bütün problemlerini çözdüğünü düşünür. "... burada çözülmemiş ya da çözümü için en azından bir anahtar sunulmamış tek bir metafiziksel sorun yoktur."¹²² Wittgenstein dilin sınırları üzerinden söylenebilir olan ile söylenemez olan arasında bir ayrım yapar. Söylenemez olanı söylemeye çalışmanın saçma olduğunu belirtir, Kant da aklın sınırları üzerinden bilinebilir olan ile bilinemez olan arasında bir sınır tayin eder ve bilinemez olanı bilebileceğini düşünen aklın bir çeşit vehme/yanılsamaya (*Alm.* Schein) kapıldığını belirtir. Çakmak da Kant ve Wittgenstein arasındaki benzerliği şöyle ifade eder: "Kant'ın olgusal düşüncenin sınırlarını belirlemesi gibi, Wittgenstein da olgusal söylemin sınırlarını belirler."¹²³

Wittgenstein bu yolla felsefede çözülmesi gereken problemlerin bütününe bir çözüm getirdiğine inanır. Dolayısıyla onun için artık felsefede yapacak bir şey kalmamıştır. Yapılması gereken tek şey, yukarıya çıkmak için kullandığı merdiveni devirip yıkmaktır. O da öyle yapar.

2.1. Geçiş Dönemi

Çalışmanın bu bölümünde, *Tractatus*'un yayınlanması ve ardından Viyana Çevresi düşünürleri üzerinde bıraktığı etkiler üzerinde duracağız. Bu bölümde ele alacağımız diğer bir husus da Wittgenstein'in Hollandalı matematikçi Brouwer ile tanışması ve bu tanışmanın Wittgenstein üzerinde bıraktığı derin etkidir. Son olarak, Wittgenstein'in hangi koşullar altında ve nelerden etkilenerek akademik felsefeye yeniden döndüğü ve ne gibi saiklerle *Tractatus*'u artık işlenmiş bir günahı olarak görmeye başladığı üzerinde duracağız.

¹²² Immanuel Kant, *Arı Usun Eleştirisi*, Çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınları, İstanbul, 1993, s. AXIII.

¹²³ Çakmak, *Tractatus'da Dil ve Felsefe İlişkisi*, s. 3.

Wittgenstein'in 1918-1929 yılları arasında felsefe anlamında bir şey yapıp yapmadığını bilmiyoruz. Elbette, böylesi bir dehanın felsefe, mantık ve matematik düşünmekten uzak kalmasının söz konusu edilemeyeceğinin farkındayız. Bununla birlikte anılan döneme ait günümüze ulaşan yazılı hiçbir kaynağın olmadığı da bir vakadır. Wittgenstein'in bu dönemini kar toplama dönemi olarak adlandırıyoruz.¹²⁴ Her ne kadar Wittgenstein'in kendisi -en azından zahiren- felsefeden uzak bir hayat sürmeye başlamış olsa da, artık *Tractatus* yayınlanmıştır ve özellikle Viyana Çevresi düşünürlerinin, neredeyse her toplantılarında tartışma konusu ettikleri en önemli metin haline gelmiştir. Wittgenstein'in bu dönemde Viyana Çevresi düşünürlerinin toplantılarına birkaç kez katıldığı ama sonrasında bu toplantılara devam etmediği bilinmektedir. Sonrasında ise Brouwer'in Viyana'ya gelerek bilim, dil ve matematik konulu bir dizi konferanslar vereceğini öğrenir ve bu konferanslara katılır.

“Wittgenstein'in felsefeye yeniden dönüşünde Viyana Çevresi düşünürlerinin toplantılarının ve Ramsey ile matematiğin temelleri üzerine yapılan hararetli tartışmaların etkisi yadsınamaz ama bu anlamda -tabir yerindeyse- yeniden canlanışı Brouwer'in verdiği bu konferanslara katılmasıyla olur. Bu konferanslarda Wittgenstein ile Brouwer arasında matematiksel zorunluluk hakkında hararetli bir tartışma geçer. Von Wright¹²⁵ ve David Pears'ın¹²⁶ aktardıklarına göre Wittgenstein'in yeniden Cambridge'e ve dolayısıyla felsefeye, dönüşünde Brouwer ile yapılan bu tartışmaların payı oldukça yüksektir. Her ne kadar matematik anlayışları örtüşmese de Wittgenstein'in *Tractatus*'ta matematiksel anlamda öncelleri Frege ve Russell'dır demek sanırım yanlış olmayacaktır. Bununla birlikte ikinci dönem olarak adlandırılan dönemdeki matematik anlayışının arka planında ise Brouwer ve onun görüselci matematik anlayışının eleştirisi yattığını söyleyebiliriz.”¹²⁷

¹²⁴ Wittgenstein'in matematik felsefesini anlamaya çalışmanın ciddi anlamda zorlukları haiz olduğunun farkındayız. Zira bu iş Wittgenstein'in hayatını en ufak ayrıntısına kadar özümsemeyi gerektirmektedir. Çünkü Wittgenstein yazdıkları ve söyledikleriyle yaşantısı büyük ölçüde örtüşen bir filozoftur. Wittgenstein'i daha yakından tanımak adına onun hakkında yazılan her şeyi okumaya gayret ettik. İkinci dönemine giriş üzerine çalışmalarımızı yoğunlaştırdığımızda fark ettik ki, onun anılan ara dönemi tam anlamıyla Türkçede 'kar toplama' deyimini ile karşılanabilecek bir dönem. Bu bölümü yazdıktan sonra hoş bir tevafuk ile karşı karşıya kaldık. Kıymetli hocamız Ömer Naci Soykan da anılan dönem için 'kar toplama' deyimini kullanmış. Bu tevafuk bizi ziyadesiyle onurlandırmıştır. Bkz. Soykan, **Felsefe ve Dil**, s. 81.

¹²⁵ G. H. von Wright, “Ludwig Wittgenstein, A Biographical Sketch”, **The Philosophical Review**, Vol. LXIV, 1955, s. 540.

¹²⁶ David Pears, **Ludwig Wittgenstein**, The Viking Press, Newyork, 1970, s. 140.

¹²⁷ Arslan, “Wittgenstein'da Matematik Felsefesi”, s. 49.

Wittgenstein, arkadaşı Keynes'in de desteği ile tekrar Cambridge'e döner. Russell ve Moore'un jüriliğinde *Tractatus*'u doktora tezi olarak savunur ve felsefe doktoru unvanını alır. Bundan sonra Cambridge'den aldığı bir burs ile felsefe çalışmaya resmi olarak tekrardan başlar. Girdiği her ortamda yüksek sesle felsefe ve mantık tartışmaları yapmaktan da geri durmaz. Bu tartışmalardan, Wittgenstein'in felsefi metamorfozu açısından, en önemlisi felsefe dışından biriyle, o sıralarda üniversitede ekonomi hocalığı yapan İtalyan Pierro Sraffa ile gerçekleşmiştir. Görünen o ki, Sraffa, Wittgenstein'ı olgusal önermelerin zorunlu olarak mantıksal bir form içerdikleri fikrinin savunulamaz olduğu konusunda ikna etmiştir.¹²⁸ Malcolm'um aktardığına göre¹²⁹: Wittgenstein olgusal bir önermenin temsil ettiği olgu durumu ile aynı mantıksal forma sahip olması gerektiğini savunur. Bu, bilindiği üzere *Tractatus* bağlamında “Nasıl oluyor da dilsel bir entite olan önerme olgusal gerçekliğin resmini verebiliyor, aralarındaki bu örtüşmenin zemininde yatan nedir?” sorusunun yanıtıdır. Wittgenstein'in bu savunusunun üzerine Sraffa parmaklarını çenesine götürerek diş fırçalama hareketine benzer bir hareket yapar ve Wittgenstein'a sorar, bu hareketin mantıksal formu nedir? Bir müddet bunun üzerinde tartıştılar ve nihayetinde Wittgenstein bir önermenin temsil ettiği olgu durumunun resmi olması gerekir şeklindeki *Tractatus*çu resim teorisinin ve bu teoriyle ilişkilendirilebilecek diğer bütün teorilerinin hatalı olabileceğini anlar. Bu aynı zamanda, Wittgenstein'in felsefi metamorfozunun ve artık *Tractatus*'u işlenmiş bir günahı olarak görmeye başlamasının da başlangıcıdır. Bu hususta 1945 yılında *Felsefi Soruşturmalar*'a yazdığı önsözde şu satırlara yer verir:

“... bundan 16 yıl önce tekrar felsefeyle uğraşmaya başlayalı beri, bu ilk kitabımda [*Tractatus*] yazıya geçirmiş olduklarımda ciddi hatalar bulunduğunu görmek durumunda kaldım. Bunun farkına varmamda, yaşamının son iki yılı içerisinde yapmış olduğumuz sayısız konuşma sırasında fikirlerimi kendisiyle tartışmış olduğum Frank Ramsey'in eleştirilerinin –boyutunu değerlendirmekten aciz olduğumu söyleyebileceğim ölçüde– yardımı dokundu. Bu her zaman güçlü ve sağlam eleştiriye borçlu olduğumdan daha fazlasını, düşüncelerime bu üniversitenin bir hocası, Bay P. Sraffa tarafından yıllar

¹²⁸ Eugene F. Thibadeau, “Wittgenstein's Later (1929-1951) Philosophy of Mathematics”, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), Newyork University, Newyork, 1972, s. 93.

¹²⁹ Norman Malcolm, **Ludwig Wittgenstein: A Memoir**, Oxford University Press, London, 1958, s. 69.

boyunca aralıksız olarak yöneltmiş olan eleştirilere borçluyum. Bu kitaptaki fikirlerin en verimlilerini bu uyarıya borçluyum.”¹³⁰

Bundan önceki bölümde Wittgenstein’in felsefenin bütün problemlerini dilin mantığının analizi aracılığıyla çözdüğünü ve artık ortada bir problem kalmadığını düşündüğünü belirtmiştik. Wittgenstein artık *Tractatus*’ta başardığını sandığı felsefeyi sahnenin dışına itme projesini başaramadığını fark eder. Wittgenstein’in geçiş döneminin en kritik noktası burasıdır. Zira, Wittgenstein başarısızlığın farkına varmasıyla birlikte aynı projeyi farklı bir bakış açısıyla tekrardan denemeye koyulur. Diğer bir deyişle, Wittgenstein ilk döneminde felsefeyi sahnenin dışına itebilmek adına biçimsel dili merkeze koymuştur. Ama geline nokta başaramadığını kendisi de anlar. İkinci döneminde ise benzer saiklerle gündelik dili paradigmasının odağına yerleştirir. *Felsefi Soruşturmalar*’dan alıntılacak olursak:

“Bir yandan, açıktır ki dilimizdeki her tümcenin ‘olduğu haliyle düzeni yerinde’dir. Yani bir ideale *ulaşmaya çalışmayız*: Sanki alışılmış, muğlâk tümcelerimiz henüz kusursuz bir anlama sahip değilmiş ve mükemmel bir dil de bizim tarafımızdan kurulmayı beklemekteymiş gibi. –Öte yandan, anlamın olduğu yerde, mükemmel bir düzenin olması gerektiği açık gibidir. –Demek ki en muğlâk tümce bile içinde mükemmel düzeni barındırıyor olmalıdır.”¹³¹

Açıkça görüleceği üzere, Wittgenstein için kusursuz mükemmellikte bir ideal dil arayışı artık gereksizdir. Bize lazım olan gündelik dil içerisinde hâlihazırda bulunmaktadır. Wittgenstein’in düşüncelerindeki bu değişimi anlamak, O’nun iki dönemi arasında matematiğe bakışının farklılaşmasının nedenlerini anlamak bakımından da oldukça önemlidir.

Wittgenstein’in felsefi metamorfozu, yani *Tractatus*çu resim teorisinin terk edilip, *Felsefi Soruşturmalar*’daki fikirlerin ortaya çıkması bir süreç dâhilinde gerçekleşmiştir. Thibadeau’ya göre bu süreç 1930 ve 1934 yılları arasında

¹³⁰ Wittgenstein, *Felsefi Soruşturmalar*, s. 20.

¹³¹ Wittgenstein, *Felsefi Soruşturmalar*, s. 64-65.

yayılmıştır.¹³² Moore, 1930 ve 1933 yılları arasında Wittgenstein'in Cambridge'te verdiği derslere katılır. Moore, Wittgenstein'in bu dersler boyunca *Tractatus*çu bakış açısını sürdürür görünmekle birlikte, *Tractatus*'un temel doktrinlerinin doğruluğu hakkında eskisi kadar ısrarcı olmadığını, hatta bazı teorilerini yeniden düşünerek tekrar formülize etmeye çalıştığını aktarmaktadır.¹³³ Monk, Wittgenstein'in geçiş dönemi ile ilgili şu tespitleri yapar:

“Wittgenstein derslerinde tekrar tekrar herhangi bir felsefi teori sunmadığını açıklamaya çalıştı; yalnızca bu tür bir teoriye duyulacak herhangi bir ihtiyaçtan kaçma araçları sunuyordu. Düşüncemizin sözdizimi, grameri daha önceleri düşündüğü gibi, görüngübilimsel veya başka türlü çözümleme aracılığıyla tanımlamaz veya ortaya çıkarılamazdı. “Felsefi çözümleme” diyordu, “bize düşünce hakkında yeni hiçbir şey söylemez (ve eğer söyleseydi de bu bizi ilgilendirmezdi).”¹³⁴ Gramerin kuralları felsefe tarafından doğrulanamaz, hatta tanımlanamazdı. Felsefe, örneğin dilimizin (Chomsky'nin terimini kullanırsak) “gramer-derinliğini” belirleyen türden bir “temel” kurallar listesinden oluşamaz.”¹³⁵

Bununla birlikte Wittgenstein çeşitli yerlerde kendisi tarafından kaleme alınmış veya birilerine dikte ettirilmiş dağınık notları saymazsak, ortaya henüz yazılı bir metin koymamıştır. Monk'un kaleme aldığı Wittgenstein biyografisinden alıntılanarak devam edecek olursak:

“Dönemin sonunda tekrar Wittgenstein'in çalışmasını sürdürmesi için gerekli maddi kaynağın nasıl sağlanacağı sorunu baş gösterdi. Trinity tarafından geçen yaz verilen burs tamamıyla harcanmıştı ve görünüşe göre kolej kurulunun, bu bursun yenilenip yenilenmeyeceğine dair şüpheleri vardı. Bu nedenle Moore, 9 Martta Petersfield'deki Russell'a yazdı ve Wittgenstein'in yaptığı çalışmayı inceleyerek koleje değeri hakkında rapor verip veremeyeceğini sordu... “kurul bir burs vermezse çalışmasına devam etmesi için yeterli geliri sağlamanın başka yolu yokmuş gibi görünüyor ve korkarım ki, konunun uzmanlarından olumlu bir rapor almadıkları sürece burs vermeleri yönünde fazla bir şans yok; ve sen de, tabii ki, bunu yapacak en yetkili kişisin. (G. E. Moore'dan B. Russell'a

¹³² Thibadeau, “Wittgenstein's Later (1929-1951) Philosophy of Mathematics”, s. 94.

¹³³ Gilbert E. Moore, “Wittgenstein's Lectures in 1930-33”, *Mind* LXIII, Vol. 249, 1954, s. 5.

¹³⁴ Ludwig Wittgenstein, *Wittgenstein's Lectures: Cambridge, 1930-1932*, Ed. Alice Ambrose, Blackwell, London, 1980, s. 35.

¹³⁵ Monk, *Wittgenstein*, s. 433-434.

09.03.1930)” Moore’un da beklediği gibi, Russell bu konuda fazla hevesli değildi. “Nasıl reddedebileceğimi bilmiyorum” diye yanıtlamıştı. “ Aynı zamanda onunla tartışmak da işin bir parçası olduğundan bunun çok fazla çaba gerektirdiğinde haklısın. Bir tartışmada onunla karşıt fikirlerde olmaktan daha yorucu bir şey bilmiyorum. (B. Russell’dan G. E. Moore’a 11.03.1930)” Bunu izleyen hafta Wittgenstein, Russell’ı Beacon Hill Okulu’nda ziyaret etti ve ona çalışmasını açıklamayı denedi. Wittgenstein, “Elbette iki gün içinde fazla ilerleme kaydedemedik” diye yazdı Moore’a, “ama birazcık anlamış görünüyordu.” Cambridge’e döndüğünden beri yaptığı çalışmaların bir özetini vermek için Paskalya tatilinden sonra Russell’la tekrar buluşma ayarladı. Böylece Wittgenstein’in Viyana’daki Paskalya tatili, elyazmalarından seçilmiş değinileri bir sekretere daktilo ettirme işiyle geçti.”¹³⁶

Wittgenstein’in elyazmalarından daktilo ettirdiği, bir bakıma temize çektiirdiği, bu notlar bugün Wittgenstein külliyatında *Philosophical Remarks* olarak yer bulan kitaptır. Wittgenstein’in 1933 ve 1935 yılları arasında derslerde değindiği hususlar derslerini düzenli olarak takip eden öğrenciler tarafından kayıt altına alınır. Sonrasında *Mavi ve Kahverengi Kitaplar* olarak basılan kitap bu ders notlarından derlenen kısımlardan oluşur. Öte yandan *Felsefi Soruşturmalar*’ın ilk bölümü 1945’te, ikinci bölümü ise 1949’da tamamlanmıştır. Bu durum Wittgenstein’in 1933-1949 yılları arasındaki çalışmalarının odak noktasının *Felsefi Soruşturmalar* olduğunun göstergesidir.¹³⁷ Nasıl ki Wittgenstein’in birinci dönemini en iyi yansıtan çalışması *Tractatus* ise, ikinci dönemini en iyi yansıtan çalışması da *Felsefi Soruşturmalar*’dır. Yayınlanan diğer bütün çalışmaları bir bakıma ikinci dönem felsefesinin olgunluğa eriştiği *Felsefi Soruşturmalar* için bir eskiz niteliğindedir.

Ezcümle, Wittgenstein Cambridge’e yeniden dönüşüyle birlikte yavaş yavaş *Tractatus*’ta ortaya koymuş olduğu düşünüş ve felsefe yapış şeklini terk etmeye başlamıştır. Artık karşımızda önermeler ve olgu durumları arasında katı bir mantıksal bağ olduğunu, gündelik dilin bulanık yapısının bu mantıksal bağı ortaya koymada yetersiz kalacağını, dolayısıyla ideal, mantıksal bir dil anlayışının benimsenmesi gerektiğini düşünen *Tractatus*’un yazarı Wittgenstein yoktur. Bunun yerini, önermeler ancak kullanım bağlamlarında anlam kazanırlar diyen, dilin uzlaşım

¹³⁶ A.e., s. 422-423.

¹³⁷ Thibadeau, “Wittgenstein’s Later (1929-1951) Philosophy of Mathematics”, s. 95.

kurallara dayanan bir çeşit oyun olduğunu iddia eden *Felsefi Soruşturmalar*'ın yazarı Wittgenstein almıştır.

2.2. Wittgenstein'in İkinci Dönem Felsefesinde Brouwer Etkileri

Çalışmanın bir önceki bölümünde Wittgenstein'in Brouwer ile Viyana'da tanıştığını ve matematiğin temelleri üzerine çeşitli tartışmalar yaptığını söylemiştik. Ayrıca Wittgenstein'in felsefeye yeniden dönüşünde Brouwer'le yapılan bu tartışmaların oldukça etkili olduğunun da altını çizmiştik. Bu bölümde, Brouwer'in görüselci matematik anlayışının, Wittgenstein'in ikinci dönem matematik felsefesinin şekillenmesinde ne gibi etkilerinin olduğu üzerinde duracağız. Bu amaçla irdedeceğimiz noktalardan ilki Wittgenstein'in ikinci dönem felsefesinde, birinci dönem felsefesine oranla, matematik felsefesinin daha geniş yer tutmasıdır. Ardından Brouweri matematik anlayışının iki veçhesi: **Doğrulamacılık** (*İng.* Verificationism) ve **tamamlanmış sonsuz** (*İng.* Completed Infinite) kavramının reddi ve bu iki veçhenin Wittgenstein'in matematik felsefesindeki yansımaları üzerinde duracağız. Bu bölümde irdedeceğimiz son husus da Brouweri ve Wittgensteinci matematik anlayışlarının farklılıkları ve Wittgenstein'in görüselcilik eleştirisidir.

Daha önceden de belirtildiği üzere, Wittgenstein'in birinci döneminde felsefi anlamda öncelleri Frege ve Russell iken, ikinci döneminde bu bağlamda anabileceğimiz isim Brouwer'dır. Wittgenstein'in 1929'da felsefeye yeniden dönüşünün hemen ardından kaleme aldığı yazılarında bu etki açıkça görülebilmektedir. Her ne kadar, *Tractatus* matematik felsefesinin kimi problemlerine değiniyor olsa da, bütünü göz önüne alındığında, bir matematik felsefesi kitabı değildir. Wittgenstein'in *Tractatus*'u kaleme alırken böyle bir hedefi de yoktur. Daha açık bir şekilde ifade edecek olursak, Wittgenstein'in *Tractatus*'ta ki yöneliminin merkezinde matematik felsefesinin problemleri yoktur.¹³⁸ Ancak, görmekteyiz ki, Wittgenstein 1929'da felsefeye dönüşünün ardından kaleme aldığı yazılarında ve derslerinde yoğun bir şekilde matematik felsefesinin problemlerini ele

¹³⁸ Wrigley, "Wittgenstein's Early Philosophy of Mathematics", s. 84.

almaktadır. Bu durumu şu şekilde ifade etmenin yerinde olacağını düşünüyoruz: Wittgenstein felsefeye bıraktığı yerden devam etmemiştir.

Bilindiği üzere, matematik felsefesi Brouwer'ın da felsefi yöneliminin merkezindedir. Elbette Wittgenstein'in ikinci dönemiyle birlikte felsefi yöneliminin merkezine matematik felsefesini alması sadece Brouwer'ın etkisiyle açıklanamaz. Ama şu da bir gerçektir: Brouwer'ın Viyana'da verdiği bilim, dil ve matematik konulu konferanslar Wittgenstein'in içindeki felsefe tutkusunu yeniden ateşlemiştir. Bu konferanslarda Wittgenstein ile Brouwer arasında matematiksel zorunluluk hakkında yaşanan hararetli tartışmalar Wittgenstein'in ikinci dönem felsefesinin başlangıcı olarak da görülebilir. Brouwer'ın matematik anlayışının, Wittgenstein'in düşünceleri üzerinde de yansımalarını görebileceğimiz, kendine özgü bir dizi özelliği vardır. Bunlar, daha önceden de belirtildiği üzere, doğrulamacılık ve sonluculuktur. Buna ek olarak şunu da söylemek mümkündür:

“Wittgenstein Brouwer'ın matematik felsefesinde ele aldığı sorunların bütününe ilgi duymamıştır. Bu sorunların sadece bazılarını merkeze alarak Brouwer'ın etkileri üzerine inşa ettiği kendi matematik modelini oluşturmuştur.”¹³⁹

Wittgenstein üzerinde ciddi manada etki bırakmış olan Brouwer hakkında kısa bir değerlendirme yapmanın yerinde olacağı kanaatindeyiz. 1881-1966 yılları arasında yaşamış olan Hollandalı matematikçi ve filozof Brouwer, gerek klasik matematiğe gerek de matematik felsefesine oldukça önemli katkılar yapmıştır.¹⁴⁰ Klasik matematik alanında, sabit nokta teoremi (*İng.* Fixpoint Theorem) ve boyutun topolojik değişmezliği (*İng.* The Topological Invariance of Dimension) teoremiyle modern topolojiyi geliştirmiştir. Ayrıca boyut kavramının ilk doğru tanımını veren de

¹³⁹ A.e., s. 85.

¹⁴⁰ Brouwer ile ilgili daha detaylı okumalar için Bkz. L. E. J. Brouwer, **Collected Works 1. Philosophy and Foundations of Mathematics**, Ed. A. Heyting, Nort-Holland, Amsterdam, 1975. Bkz. L. E. J. Brouwer, **Collected Works 2. Geometry, Analysis, Topology and Mechanics**, Ed. H. Freudenthal, Nort-Holland, Amsterdam, 1976.

Brouwer'dır.¹⁴¹ Matematik felsefesindeki en çılgır açıcı görüşü ise, çalışmamız dâhilinde değinecek olduğumuz görüselcilik anlayışıdır. Brouwer'in matematiğin temellerine yönelik ortaya koymuş olduğu görüselci anlayışının temel tezi "Matematik, dilden yahut Platonik bir alandan tamamen bağımsız olacak şekilde, insan zihninin inşa süreçlerinin sonucu ortaya çıkar" şeklinde özetlenebilecek görüştür.¹⁴²

"Brouwer'in görüselciliği, "matematiksel nesnelerin kuruluşuna ilişkin görüş temelli bir açıklama denemesidir."¹⁴³ Brouwer, matematiğin temellendirilmesinde temel dayanak noktasının 'zamanın görüşü' olduğunu düşünür.¹⁴⁴ Ona göre matematiksel nesnelerin zaman görüşünde inşası 'matematiksel derin düşünme' adını verdiği edim aracılığı ile gerçekleşir.¹⁴⁵ Brouwer'a göre matematik, zamanda görüsel izlerini teşhis edebileceğimiz doğal sayılar üzerine inşa edilir. Doğal sayıların inşa mekânı ise zaman görüşüdür."¹⁴⁶

Girişte de belirtildiği üzere, bu bölümde Wittgenstein'in ikinci dönem felsefesi üzerinde etkili olduğunu düşündüğümüz Brouweri matematik anlayışının iki veçhesi üzerinde duracağız. Bunlardan birincisi, sonraki bölümde daha genişçe değinecek olduğumuz doğrulamacılık anlayışıdır. Bu anlayışa göre her hangi bir matematik önermesi için, bu önermenin kanıtı olmaksızın doğruluğu üzerine konuşmak anlamsızdır. İkincisi ise, tamamlanmış sonsuz kavramının reddedilmesidir. Wittgenstein Brouwer'in etkisiyle *Philosophical Remarks* ve

¹⁴¹ Mark von Atten, "Luitzen Egbertus Jan Brouwer", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), (Çevrimiçi) <https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/brouwer/> 08 Mart 2018.

¹⁴² 1980 yılında *The Review of Metaphysics* dergisinde Wright'ın *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics* adlı kitabının değerlendirildiği kısa bir yazı yayınlanmıştır. Bu yazıda matematik felsefesi ekollerinden Platonizm ve Görüselcilik şöyle tanımlanmıştır; "Platonist matematik anlayışına göre 'p' eğer matematiksel bir önerme ise biz p önermesinin doğru olduğu koşulları, elimizde bu önermenin doğru olduğunu gösteren bir kanıt olmasa da bilebiliriz. Öte yandan görüselci düşünceye göre de p önermesinin doğru olduğunu gösterecek bir kanıt olmaksızın doğruluğundan söz etmek imkânsızdır." Bkz. C. Wright, "Reviewed Work: Wittgenstein on the Foundations of Mathematics", (Çevrimiçi) <http://www.jstor.org/stable/20127527> 15 Haziran 2017.

¹⁴³ Özgüç Güven, "Brouwer'in Görüselciliği," **VI. Mantık Çalıştayı Kitabı**, Ed. Şafak Ural, Vedat Kamer, Mantık Derneği Yayınları, İstanbul, 2016, s. 221.

¹⁴⁴ Brouwer, **Collected Works I, Philosophy and Foundations of Mathematics**, s. 53.

¹⁴⁵ Güven, "Brouwer'in Görüselciliği," s. 224.

¹⁴⁶ Arslan, Gök, "Gödel'in Tamamlanamazlık Teoremlerinin Ardından Matematiğin Temelleri Tartışmaları", s. 7-8.

Philosophical Grammar'de yazdığı pasajlarda kanıt ile anlam arasındaki ilişkiyi şöyle ifade etmektedir:

“Bir matematik önermesi her zaman kanıtının kanıtladığı şeyi söyler. Bu aynı zamanda şu anlama da gelmektedir, bir matematik önermesi kanıtının kanıtladığı şeyi dışında bir şey söylemez.”¹⁴⁷

“Neyin kanıtlandığını bilmek istiyorsanız, sadece kanıta bakın.”¹⁴⁸

“Bir matematik önermesi, vücudun bir parçasının vücut ile ilişkili olması gibi, kanıtı ile ilişkilidir.”¹⁴⁹

Wittgenstein'in bu pasajlarda özellikle vurguladığı temel hususlar ilk olarak Brouwer'in görüselciliğini akla getirmektedir. Öte yandan Wittgenstein'in sonsuz hakkındaki düşüncelerinin de Brouwer'in görüselciliği ile uyum içerisinde olduğu da söylenebilir. Şöyle ki, Wittgenstein Cambridge derslerinde, matematikte sonsuz tamlık (*İng.* Infinite Totality) kavramının anlamsız olduğunu söyler.¹⁵⁰ Wittgenstein'in bu söyleminin altında da, sonsuz ihtimaller ile örtüşen sonsuz gerçeklik diye bir şeyin olmadığına inanması yatar.¹⁵¹ *Philosophical Remarks*'ta matematiksel sonsuz hakkındaki düşüncelerini de şu şekilde ifade eder:

“Biz insanların doğal sayılar boyunca, onları tek tek geçerek koşması, ilerlemesi imkânsızdır. Aynı zamanda bu fikir anlamsızdır.”¹⁵²

“Ramsey'in sonsuzluğa ilişkin getirdiği açıklamalar anlamsızdır, çünkü bu açıklamalar aktüel sonsuzun bize verili olduğunu önvarsayar.”¹⁵³

¹⁴⁷ Ludwig Wittgenstein, *Philosophical Remarks*, Ed. Rush Rhees, Basil Blackwell, Oxford, 1975, s. 181.

¹⁴⁸ Ludwig Wittgenstein, *Philosophical Grammar*, Ed. Rush Rhees, Blackwell, Oxford, 1974, s.369.

¹⁴⁹ Wittgenstein, *Philosophical Remarks*, s. 192.

¹⁵⁰ Ludwig Wittgenstein, *Wittgenstein's Lectures, Cambridge 1930-32*, Ed. Desmond Lee, Blackwell, Oxford, 1980, s. 15.

¹⁵¹ *A.e.*, s. 14.

¹⁵² Wittgenstein, *Philosophical Remarks*, s. 146.

¹⁵³ *A.e.*, s. 209-210.

Yukarıda verilen alıntılarda da Brouwer'ci görüselciliğin yansımalarını görmekteyiz. Her ne kadar Wittgenstein'in ikinci dönem matematik felsefesinde Brouwer'in matematik anlayışı oldukça mühim bir yer tutuyor olsa da, buradan hareketle Wittgenstein ile Brouwer'in matematik anlayışlarının aynı olduğu sonucunu çıkaramayız. İkisinin de ortak olarak ele aldıkları problemlerden hareketle geliştirdikleri anlayışların, belki de, sadece ilham noktası aynıdır demek daha doğru olacaktır. Zira Brouwer'in matematiksel sonsuz ve matematiksel kanıtlama üzerine ortaya koyduğu iddialar, onun "Matematiğin nesneleri bütünüyle zihinsel inşa süreçlerinin ürünüdür ve bu nesneler ancak zihinsel inşalar sonucunda bilgimize konu edilebilirler" şeklindeki Kantçı anlayışının sonuçlarıdır.¹⁵⁴ Bu Kantçı anlayış, deyim yerinde ise, Brouwer'in matematik felsefesinin temel çerçevesini oluşturur.

Wittgenstein'a göre ise matematiksel sorunların çözümünde gerekli olan görüyü dil ya da hesaplama sürecinin kendisi zaten sağlar.¹⁵⁵ Wittgenstein felsefi temelleri Kant'ın saf görü anlayışı üzerine kurulu olan Brouwer'in görüselciliğini bu haliyle hiçbir zaman kabul etmemiştir. Hatta 1939'da verdiği bir derste şunları söylemiştir: "Görüselcilik bütünüyle bir saçmalıktır."¹⁵⁶ Wittgenstein, matematiksel nesnelerin zihinsel süreçlerin inşa faaliyeti sonucu elde edilen nesneler olması fikrini psikolojizmin (*Ing.* Psychologism) mükemmel bir örneği olarak görür. Matematiksel psikolojizm ise Wittgenstein'a göre matematiksel süreçler anlamaya ilişkin yapılan temel hatalardan biridir. Burada akıllara şu soru gelmektedir: Wittgenstein nasıl oluyor da Brouwer'in matematik felsefesinin temel/kurucu tezini reddederken, Brouwer'in matematik felsefesinin kimi sonuçlarını kabul edebiliyor ve bu kadar etkilenebiliyor? Eğer Wittgensteinci söylem inandırıcılığını sürdürmek istiyorsa, öncelikle bu sorunun yol açtığı güçlüklerin aşılması gerekmektedir.¹⁵⁷

Bu bölümde, Wittgenstein'in ikinci dönem matematik felsefesi üzerinde açıkça görülebilen Brouwer etkisini farklı yönleriyle ele aldık. Kısaca toparlamak adına şunu söyleyebiliriz: Nasıl ki Wittgenstein'in birinci döneminde matematik felsefesi

¹⁵⁴ Bkz. L. E. J. Brouwer, "Intuitionism and Formalism", (Çevrimiçi) <http://math.armstrong.edu/faculty/chang/math/formal.pdf>, 13 Aralık 2017.

¹⁵⁵ Wittgenstein, *Tractatus*, s. 155.

¹⁵⁶ Ludwig Wittgenstein, *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, Ed. Cora Diamond, Harvester, Cambridge, 1976, s. 237.

¹⁵⁷ Wrigley, "Wittgenstein's Early Philosophy of Mathematics", s. 87.

bağlamında hareket noktası Frege ve Russell ise ve bununla birlikte Wittgenstein'ı Frege ve Russell gibi mantıksalcı olarak konumlandırmak doğru bir yaklaşım değil ise, aynı şekilde her ne kadar ikinci dönem matematik felsefesinin hareket noktası Brouwer olsa da, Wittgenstein'ı Brouwer gibi görüselci olarak konumlandırmak da doğru olmayacaktır.

2.3. Tractatusçu Resim Teorisinden Dil Oyunlarına

Bu bölümde, Wittgenstein'ın felsefi metamorfozunu *Tractatus*'un resim teorisi ve *Felsefi Soruşturmalar*'ın dil oyunları teorisi bağlamında inceleyeceğiz. Bu iki teori Wittgenstein'ın dil-dünya kavrayışını ve mantığa/ matematiğe bakış açısını üzerinde temellendirdiği zemini anlayabilmek bakımından oldukça mühimdir. Wittgenstein'ın düşüncelerindeki bu değişimin daha iyi anlaşılabilmesi adına, ilk olarak ideal dil anlayışının terk edilmesi ve bunun yerine olağan, yani günlük dil anlayışının getirilmesi mevzuu üzerinde duracağız. Ardından Wittgenstein'ın ikinci döneminin temel paradigması olan dil oyunları kavramını, matematiğin bir dil oyunu olarak görülmesini ve buradan hareketle temellendirmeden ve teorilerden münezzeh bir matematik anlayışının ikâme edilmesi düşüncesini irdelleyeceğiz. Son olarak, dil oyunları bağlamında Wittgenstein'ın pragmatik anlam yaklaşımı ve anlamın bağlamsallığı konularını tartışacağız.

Soykan, Wittgenstein'ın dil anlayışında ki bu değişimi şu şekilde ifade eder:

“İkinci dönemde değişen düşüncelerden bir başkası, ideal dil anlayışını terk edilmesi ve bunun yerini günlük (olağan) dilin almasıdır. *Tractatus*'un ideal dili, gerçekten bildiğimiz, yani olayları dile getiren bir temel dil, bir ilk sistem, tek biçimli yetkin bir dildi. Ve amaç, böyle bir dille felsefe-bilim söyleminde olağan dilin kusurlarını düzeltmekti.”¹⁵⁸

Kısaca ifade etmek gerekirse, çalışmanın birinci ana bölümünde de değinildiği üzere, Wittgenstein için anlamlı önermeler doğabilimi önermeleridir. Doğabilimi önermeleri olgusal gerçekliğin dildeki resimleri olarak karşımıza çıkmaktadır.

¹⁵⁸ Soykan, *Felsefe ve Dil*, s. 94.

Önermenin olgu durumunu temsil etmesi, olgu durumundaki gerçekliğin dilde resmedilmesi ile mümkün olur. Aynı zamanda önerme ile olgu durumu arasındaki temsil etme bağıntısının zemininde de her ikisinin mantıksal formlarının aynı olması yatar. Eğer önerme olgu durumu ile örtüşüyor ise doğru değerini alır, aksi durumda yanlış değerini alır. Bununla birlikte mantık ve matematiğin önermeleri Wittgenstein için anlamsız sözde-önermelerdir. Sözde-önermeler, önermelerde olduğu gibi herhangi bir olgu durumunu resmetmezler. Sözde önermelerin varlık mekânı, içerisinde inşa edildikleri biçimsel dizgelerdir ve doğrulukları da bu biçimsel dizgenin sentaksına uyup uymamaları ile belirlenir.

Çoğu Wittgenstein yorumcusuna göre, Wittgenstein'in *Tractatus*'ta başardığı en büyük şey, mantıksal doğruluk kavramını totolojiye indirgemesi ve totoloji kavramının sentaktik yönünü işaretlerin birleşimi üzerinden açıklamasıdır.¹⁵⁹ Viyana Çevresi düşünürleri ve onların takipçileri, Wittgenstein'in mantıksal zorunluluğu totolojilere indirgemekle mantıksal doğruluğu kesin olarak açıkladığını, dolayısıyla bilgi teorisinin ve metafiziğin kadim problemlerinin bir çözümünü verdiğini düşünür. Wittgenstein'in kendisi de *Tractatus*'ta felsefenin bütün kadim problemlerini bir şekilde çözdüğünü ya da onların açılmanması neticesinde artık problem olmaktan çıktıklarını iddia eder.¹⁶⁰

Wittgenstein 1930 yılına kadar önermenin anlamı meselesini önermeler ile mümkün olgu durumları arasında zuhur eden bir ilişki biçimi olarak görmeye devam eder. Ama bu tarihten itibaren bu *Tractatusçu* bakış açısında radikal değişimler olur. Yaklaşık olarak bu yıllarda Waismann'a şunları dediğini biliyoruz:

¹⁵⁹ Mark A. Joseph, "Wittgenstein on Truth and Necessity in Mathematics", (Yayınlanmamış Doktora Tezi), Columbia University, Newyork, 1994, s. 112.

¹⁶⁰ Wittgenstein *Tractatus*'un önsözünde şöyle diyor: "Kitap felsefe sorunlarını ele alıyor ve – sanıyorum- gösteriyor ki, bu sorunların sorun olarak ortaya çıkmaları, dilimizin mantığının yanlış anlaşılmasına dayanır." Dolayısıyla Wittgenstein'a göre dilimizin mantığı doğru bir şekilde ortaya konulabilirse sorun olarak görülen bir çok problem ortadan kalkacak. Önsöz bölümünün sonlarına doğru ise şunları söyler: "..., burada bildirilen düşüncelerin doğruluğu bana sorgu-sual edilemez ve kesin görünüyor. Böylece, şu kanıdayım ki, sorunları özünde sonuna kadar çözdüm. Bkz. Wittgenstein, *Tractatus*, s. 11-13.

“Moore’la sürekli tartıştığım bir soru var: Sıradan dilin önermeleriyle söylemek istediğimiz şey yalnızca mantıksal çözümleme ile mi açıklanabilir? Moore böyle düşünmeye eğilimli. Yani insanlar, ‘bugün hava dünden daha açık’ dediğinde anlatmak istedikleri şey konusunda bilgisizler mi? Burada mantıksal çözümleme mi beklemeliyiz? Ne berbat bir fikir!”¹⁶¹

Bilindiği üzere Wittgenstein’ı felsefe çalışmak konusunda motive eden ilk şey, Russell’in *Aritmetiğin Temelleri*’nde bulunduğu paradokstur. O yıllarda bu paradoksu çözmek ve matematik ilkelerini mantıktan türetmek Wittgenstein’in en önemli hedefidir. Wittgenstein her ne kadar sonraları Frege ve Russell’in düşüncelerinden uzaklaştıysa da ilk döneminin bütününe yayılan bir ideal dil anlayışından söz etmek mümkündür. İkinci döneminde ise ideal dil anlayışı yerini gündelik dile bırakacaktır. Bu yeni dil anlayışı bütün felsefi paradigmasını da ciddi bir biçimde değiştirecektir. Sözelimi ilk döneminde felsefenin temel görevi Russell paradoksu gibi mantıksal çelişkileri çözmek iken ikinci dönemiyle birlikte artık Wittgenstein için böylesi çelişkiler artık önemsiz şeyler hâlini almıştır. Hatta artık ona göre hiçbir teori matematiği anlamak noktasında işe yarar değildir. Wittgenstein’a göre matematik kendine has kuralları ve grameri olan bir dildir. Bu dilin sembollerini ve kurallarını doğru kullanmayı becerebilirsek hiçbir matematik teorisine ihtiyacımız yoktur.

“Kendi günlük dilimizi kullanmak için Moore’un çözümlemesine ne kadar ihtiyacımız varsa, matematiği güvenle kullanmak için Frege’nin ve Russell’in mantığına da o kadar ihtiyacımız vardı.

Bu nedenle formalist matematikçi David Hilbert¹⁶² tarafından geliştirilen “metamatematik” gereksiz oluyordu. Hilbert matematiğin bir meta-teorisini kurmaya uğraşıyor, aritmetik için kanıtlanabilir tutarlı bir temel kurmanın yollarını arıyordu. Ancak Wittgenstein kurduğu teorinin meta-matematik değil, matematik olduğunu söylemişti: “Herhangi bir hesaplama farkı bir hesaplama.”¹⁶³

¹⁶¹ Waismann, **Wittgenstein and the Vienna Circle**, s. 129-130.

¹⁶² Hilbert’in matematiğin temellerine formalist yaklaşımı 1904’te Heidelberg’de düzenlenen Üçüncü Matematikçiler Kongresinde yer alan “Mantık ve Aritmetiğin Temelleri Üzerine” başlıklı bir konferansta açıklandı ve 1920’lerde yayımlanan bir dizi makalede geliştirildi. Bu makalelerin bir kısmı Jean von Heijenoort editörlüğünde basılan kitapta yayımlandı. Bkz., J. Heijenoort, **From Frege to Gödel; A Source Book in Mathematical Logic**, Harvard University Press, Harvard, 1967. Bkz. Monk, **Wittgenstein**, s.441-442.

¹⁶³ Monk, **Wittgenstein**, s.441-442.

Wittgenstein artık anlamın resimsel kavranışına (*Ing.* bild conception of mean) ilişkin semantik ve metafizik doktrinlerinin neredeyse tamamını terk eder. *Tractatus*'a göre bir önermenin anlamı, dünyanın bileşenleri ile ilişki içerisinde olan önerme bileşenlerine bağlıdır. Burada dünyanın bileşenlerinden kasıt olgu bağlamında bütün imkânları ile var olan nesnedir. Önerme bileşenleri ise nesnenin dildeki karşılığı olan addır. Ad ile nesne arasında resmetme bağlantısıyla bir temsil ilişkisi kurulur. Wittgenstein'a göre "Nesne yalındır"¹⁶⁴ (*Tractatus* 2.02) çünkü "Nesneler dünyanın tözünü oluştururlar dolayısıyla bileşik olamazlar."¹⁶⁵ (*Tractatus* 2.021) Wittgenstein *Tractatus*'ta "Dünyanın hiçbir tözü olmasaydı, bir tümcenin anlamlı olup olmadığı, başka bir tümcenin doğru olup olmadığına bağımlı olurdu"¹⁶⁶ derken anlamlı önerme, anlamsız önerme ayırımına vurgu yapmaktadır. Eğer dünyanın hiçbir tözü yok ise, yani nesneler ya da onların yerine geçebilecek bir şey yoksa dilde kurulan önermede adın temsil edeceği bir şey de yok demektir. Bu ise, artık önermenin mantık ve matematik önermelerinde olduğu gibi herhangi bir olgu durumunun resmi olmadığı anlamına gelir. Eğer böyle olsaydı, anlamı sadece tümcelerin kendileri arasındaki ilişkide ya da sentaksta aramak gerekecekti ve "O zaman dünyanın (doğru ya da yanlış) bir tasarımını oluşturmak olanaksız olurdu."¹⁶⁷

Wittgenstein'ın dil kavrayışını bütün veçheleriyle açık etmeksizin ne birinci döneminin, ne de ikinci döneminin mantık ve matematik anlayışının doğru bir şekilde serimlenmesi bizce söz konusu değildir. Wittgenstein'ın birinci dönemindeki dil anlayışı ve buna uygun olarak mantık ve matematik anlayışını kısaca tekrar ettikten sonra, ikinci dönemin temel paradigması olan dil oyunları¹⁶⁸ anlayışına

¹⁶⁴ Wittgenstein, *Tractatus*, s. 19.

¹⁶⁵ *A.e.*, s. 19.

¹⁶⁶ *A.e.*, s. 19.

¹⁶⁷ *A.e.*, s. 19.

¹⁶⁸ Dil oyunları bu bölümün ana konusunu teşkil etmektedir ve dil oyunlarına farklı veçheleriyle çalışmanın bundan sonraki bölümlerinde genişçe değinilecektir. Ama burada Wittgenstein'ın Mavi Kitapta yaptığı kanıtlamayı vermenin uygun olduğu kanaatindeyiz. "Gelecekte dikkatinizi tekrar dil oyunları olarak adlandıracağım şeye çekeceğim. Bunlar, hayli karışık günlük dilimizin imlerinden daha basit imleri kullanma yoludur. Dil oyunları bir çocuğun sözcükleri kullanmaya başlamasıyla oluşan dil formlarıdır. Dil oyunlarının araştırılması, dilin ilkel formlarının ya da ilkel dillerin araştırılmasıdır. Eğer önermelerin gerçeklikle olan doğruluk ve yanlışlık, uyuşma ve uyumsuzluk sorunlarını, öne sürümün, varsayımın ve sorunun doğasını araştırmak istiyorsak; bu düşünme

gececeğiz. Ama ikinci dönemin dil oyunları anlayışına geçmeden evvel değinilmesi gerektiğini düşündüğümüz son bir husus daha var. Wittgenstein ikinci döneminin başlarında **dilin resimselliğini** (*Ing.* pictoriality) *Tractatus*'un resim teorisine başvurmaksızın tasvir etmeye çalışır. Burada da karşımıza oldukça önemli bir kavram çıkar. Bu **önergeler sistemi** (*Alm.* Satzsystem) ya da **dilin kalkülüsü** kavramıdır. Bu kavram kimi Wittgenstein yorumcusuna göre Wittgenstein'ın resim teorisi kavrayışı ile dil oyunları kavrayışı arasında bir çeşit geçiş kavramıdır.¹⁶⁹ Önergeler sistemi ya da dilin kalkülüsü anlayışında dil bir nevi biçimsel bir oyuna benzetilir. Steven Gerrard dilin önergeler sistemi kavramının aşağıda sıralayacağımız ilkeleri sağlaması gerektiğini düşünür.¹⁷⁰

- Bir dil ve bu dilin grameri dış kritiklerden bağımsız olarak kapalı bir sistem oluşturur.
- Bir dil ve bu dilin uygulamaları arasında keskin bir ayrım vardır.
- Bir dilin gramerinin kalkülüsü üzerinde yapılan herhangi bir değişiklik ortaya yeni bir gramerin çıkması anlamına gelir.
- Sadece bireysel bir kalkülden bahsedebiliriz, genel bir kalkül yoktur.

Burada birinci ve ikinci ilkeler önergeler sisteminin özerkliğine ve bütünsel karakterine atıf yapar. Biraz daha detaylandırmak adına şunları söyleyebiliriz: Burada ilk ilke bir dilin ya da bir önergeler sisteminin bütünüyle kendi kendine yeter olduğuna, ikinci ilke ise dil ile bu dilin uygulamaları arasında keskin bir ayrım olduğuna vurgu yapar. Örnek verecek olursak, aritmetik başlı başına bir dil, bir önergeler sistemi olarak karşımızda durmaktadır. Öte yandan, elmaları sayarken de aritmetik dilinin bir uygulamasıyla karşılaşırız. Burada aritmetiğin kendisi ile elmaları sayarkenki kullanımı birbirinden farklı şeylerdir. Devam edecek olursak, üçüncü ve dördüncü ilkeler önergeler sisteminin karşılıklı bağımsızlığına gönderme

formlarının ortaya çıktığı dilin ilkel formlarına, hayli karmaşık düşünme süreçlerinin kafa karıştırıcı zemini olmaksızın bakarak büyük yarar sağlayabiliriz. Dilin böyle basit formlarına baktığımızda, dili normal kullanımımızı sarıyormuş gibi görünen zihinsel sis yok olur. Açık ve saydam olan etkinlikleri, tepkileri görürüz.” Bkz. Ludwig Wittgenstein, **The Blue and Brown Books**, Blackwell, Oxford, 1975, s. 17. Bkz. Monk, **Wittgenstein**, s. 483.

¹⁶⁹ Joseph, “Wittgenstein on Truth and Necessity in Mathematics”, s. 111-112.

¹⁷⁰ Steven Gerrard, “Wittgenstein in Transition: The Philosophy of Mathematics”, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), University of Chicago, Chicago, 1987, s. 30-31.

yapar. Önermeler çok çeşitli mantıksal ya da gramatik bağıntıları sergilerler ve birbirlerinden farklı bütün önerme kategorilerinin, doğruluk-fonksiyonel mantığa (*Ing.* Truth-functional logic) ek olarak kendilerine mahsus gramerleri vardır. Farklı önerme kategorilerinin farklı gramer kurallarına uydukları göz önünde bulundurulursa, yalnızca bir tane dilden değil, birçok dilden ya da kendi gramer kurallarına sahip farklı önerme sistemlerinden bahsetmek yerinde olacaktır.¹⁷¹ Diğer bir deyişle, Wittgenstein’a göre, bir önermeler sistemi kuralları aracılığıyla tanımlanır, yani sistemin kuralları sistemin nasıl olacağının da belirleyici unsurları arasındadır. Bu kurallardan herhangi birini değiştirmeye kalkarsak ortaya yeni bir oyun çıkacaktır ve bu oyunun kuralları ilk oyunun kurallarından az veya çok farklı olacaktır.

Wittgenstein’a göre bir çocuğun dil öğrenme süreci yaklaşık olarak şöyle bir şeydir: Bir öğretici vardır ve bu öğretici nesneleri işaret ederek çocuğun dikkatini nesneye yönlendirir ve aynı zamanda o nesnenin adını söyler. Yeterli tekrarın ardından çocuk nesne ile nesnenin telaffuz edilen adı arasında bir ilişki olduğunu fark eder ve bu yolla nesnenin adını öğrenmiş olur. Wittgenstein buna “Sözcüklerin işaret ederek öğretimi” der.¹⁷² İnşaat ustasının, kalfasına kullandığı malzemelerin adını öğretmesi de aşağı yukarı bir çocuğun anadilini öğrenmesine benzer bir süreçtir. Bu bir çeşit oyun gibidir. Seslerle nesneler belirli bir kurala göre birbirlerine bağlanırlar. Wittgenstein bu oyuna dil oyunları der ve ilkel bir dilin bir çeşit dil oyunu olarak görülebileceğini söyler.¹⁷³ Wittgenstein daha karmaşık dilsel yapıların da dil oyunları olarak görülebileceğini düşünür. Gelişmiş dil oyunlarının ilkel dil oyunlarından farkı, kurallarının ve bileşenlerinin sayısının daha fazla olmasıdır.

“Usta ile kalfa arasındaki dilin daha genişlemiş bir haline bakalım: Şimdi bu dil, “küp”, “sütun” v.s. gibi dört sözcüğün yanı sıra elma satıcısının sayı sıfatlarını kullandığı şekilde kullanılan bir sözcük dizisi (bu, alfabedeki harf dizisi olabilir); ayrıca elle gösterme hareketiyle bağlantılı olarak kullanılan iki sözcük ki bunlar da (amaçları yaklaşık olarak belli olduğu için) “şuraya” ve “bu” olabilir; son olarak da belli sayıda renk örnekleri içersin. A şu tür bir emir verir: “d-plaka-şuraya.” Bu sırada kalfasına bir renk örneği gösterir ve “şuraya” sözcüğünü söylerken inşaat alanında bir yere işaret eder. B, plaka yığınınındaki o

¹⁷¹ Joseph, “Wittgenstein on Truth and Necessity in Mathematics”, s. 113-114.

¹⁷² Ludwig Wittgenstein, **Felsefi Soruşturmalar**, s. 25.

¹⁷³ A.e., s. 26.

renk plakalardan, d harfine varana kadar alfabenin her harfı için bir tane alır ve A'nın belirttiği yere götürür. –Başka durumlarda A, “bu-şuraya” emri verir. “Bu” derken de bir taşa işaret eder. vs.”¹⁷⁴

Görüldüğü gibi inşaat ustası ve kalfası arasında dört sözcükten oluşan ilkel dile, sayı sıfatları, işaret sıfatları ve renk sıfatları gibi başka unsurlar eklendi. İkisi arasındaki ilkel dil biraz daha genişledi ve bu dile ve dilin kullanımına başka yeni kurallar eklendi. Ama görüleceği üzere temel çerçeve değişmedi.

Wittgenstein sözcüklerin kullanımını alet kutusu metaforuyla açıklar. Nasıl ki bir alet çantasında çekiç, kerpeten, tornavida, vidalar, çiviler...v.b. varsa ve bunların her birinin farklı işlevleri varsa ve ancak bu işlevler için kullanıldıklarında işe yarayabiliyorlarsa, sözcüklerin de dilde farklı kullanım alanları vardır ve bir sözcük ancak doğru bağlamda kullanılırsa işlevseldir. Dikkat edilirse, Wittgenstein artık sözcüklerin anlamsal ya da gönderimsel özelliklerini ön plana çıkartmak gibi bir gaye gütmeyi, dil kullanımında aslolanın sözcüğün kullanım bağlamı olduğunu düşünür. Aynı yönelim tümceler için de geçerlidir, şöyle ki: Tümceler de dil oyununun içerisinde. Bu oyun olmaksızın, yani bağlam olmaksızın, tümce hiçbir anlamın taşıyıcısı olarak görülemez.

Wittgenstein’a göre dil oyunları dili oluşturan, kuran şeyler değildir. Hatırlanacak olursa: *Tractatus*’ta cümleler dilin temel yapı taşlarıydı ve anlamlı cümlelerin toplamı dili oluşturmaktaydı. Burada ise, dil oyunlarının toplamı dili oluşturur gibi bir düşünce her ne kadar doğru imiş gibi görünse de, doğru değildir. Wittgenstein bu düşüncüyü açıkça reddeder. Soykan, Wittgenstein’ın bu dönemdeki dil anlayışının *Tractatus*’ta ki dil anlayışından ciddi anlamda farklı olduğunu altını çizer. Ona göre dili matematiksel bir toplam olarak görme eğilimi bu dönemde terk edilmiştir. Artık dil durağan, bitmiş bir şey değil, tersine yaşayan, üreyen, dinamik ve canlı bir yapıdır.¹⁷⁵ *Felsefi Soruşturmalar*’dan alıntılacak olursak: “Dilimiz eski bir şehir olarak görülebilir: Dar geçitler ve alanlardan, eski ve yeni evlerden, farklı dönemlerden eklentiler taşıyan evlerden oluşan bir labirent; çevresinde de düz ve

¹⁷⁴ A.e., s. 26.

¹⁷⁵ Soykan, *Felsefe ve Dil*, s.89.

düzenli caddeleri ve tek tip evleriyle pek çok yeni banliyö.”¹⁷⁶ Görüleceği üzere Wittgenstein için dil, bitmiş olmaması ve sürekli olarak değişiyor olması bakımından bir şehre benzetilebilir. Wittgenstein’a göre dildeki “Çeşitlilik sabit, baştan bir kereliğine verili bir şey değildir; tersine, yeni dil tipleri, yeni dil oyunları diyebileceğimiz şeyler ortaya çıkarken diğerleri eskir ve unutulur.”¹⁷⁷

Wittgenstein’ın felsefi gelişimi semantik atomizmden, bütüncülüğe doğru giden bir yol izler.¹⁷⁸ Aslında Wittgenstein’ın ikinci dönem felsefesine geçişini Frege’nin **bağlam ilkesinin** (*Ing.* Context Principle) kapsamını genişletmesi üzerinden de tanımlayabiliriz. Frege bizleri “İzole bir dünyanın anlamı nedir?” gibi sorulardan kaçınmamız ve anlamı önermelerin bağlamlarında aramamız konusunda uyarıyordu. Wittgenstein da bu uyarıyı ikinci dönemiyle birlikte korur ve genişletir: “Tek başına bir sözcüğün ya da tümcenin anlamı nedir?” diye sormamamızı, çünkü sözcüğün ya da tümcenin anlamının ait olduğu önermeler sisteminden bağımsız düşünemeyeceğini belirtir. Wittgenstein’a göre bir önermenin anlamını bulmaya çalıştığımızda, o önermenin ait olduğu önermeler sisteminin bütünü göz önünde bulundurulmalıdır.

Wittgenstein *Tractatus*’ta bir önermenin doğruluk koşullarının (*Ing.* Truth-Conditions) bilinmesi için önermenin mantıksal formunun bilinmesinin yeterli olacağını düşünüyordu. Bu fikri *Felsefi Soruşturmalar*’la birlikte değişti. Şöyle ki, artık Wittgenstein için bir önermenin doğruluk koşullarının bilinmesi, önermenin ait olduğu önermeler sistemindeki (ya da dildeki) karmaşık yapılar arasındaki pozisyonunun anlaşılmasını gerektirir. Wittgenstein’a göre bir önerme semantik olarak tek başına değildir, bir önermeler sisteminin parçasıdır. *Philosophical Remarks*’ta şöyle der: “p önermesini anlamak demek, p önermesinin ait olduğu sistemi anlamak demektir.”¹⁷⁹

Wittgenstein’ın *Felsefi Soruşturmalar*’ı ilk olarak dil kavramı ve bu kavram üzerinde kendisinin yapmış olduğu açıklamalar ile başlar.

¹⁷⁶ Ludwig Wittgenstein, *Felsefi Soruşturmalar*, s. 29.

¹⁷⁷ *A.e.*, s. 32.

¹⁷⁸ Joseph, “Wittgenstein on Truth and Necessity in Mathematics”, s.118.

¹⁷⁹ Wittgenstein, *Philosophical Remarks*, s. 180.

“Dilin şu kullanımını düşün: Birisini alışverişe yolluyorum. Eline verdiğim pusulada şu imler var: “Beş kırmızı elma.” Pusulayı satıcıya veriyor, satıcı, üzerinde “elma” imi bulunan kutuyu açıyor; bir tabelada “kırmızı” sözcüğünü arıyor ve bunu bir renk örneğinin karşısında buluyor; bunun ardından asıl sayılar dizisini söylüyor –ve “beş”e varıncaya kadar söylediği her sayı sıfatı için kutudan, tabelada bulmuş olduğu örneğin renginde bir elma çıkarıyor. – Sözcüklerle böyle ve buna benzer şekilde iş görülür. – “Ama ‘kırmızı’ sözcüğü için nerede, nasıl araması gerektiğini, ya da ‘beş’ sözcüğüyle ne yapacağını nasıl biliyor?” –Doğrusu ben betimlemiş olduğum gibi eylemde bulunduğunu varsayıyorum. Açıklamalar bir yerde son bulur. –Peki “beş” sözcüğünün karşılığı nedir? –Burada söz konusu olan hiç de böyle bir şey değil, “beş” sözcüğünün nasıl kullanıldığıydı yalnızca.”¹⁸⁰

Bilindiği üzere, Wittgenstein’in birinci döneminde asıl vurgusu ideal bir dil anlayışına iken, ikinci dönemde ise bu vurgu günlük dile kaymıştır. Diğer bir deyişle, Wittgenstein ikinci dönemiyle birlikte dilin pragmatik veçhelerini ön plana çıkartma gayesi gütmektedir. Beş sözcüğünün, artık ne epistemik statüsü, ne de ontolojisi Wittgenstein’in ilgisini çekmemektedir. O’nun için artık önemli olan beş sözcüğünün dilde nasıl kullanıldığı ve nasıl iş gördüğüdür.

Wittgenstein’a göre oyun kavramının en önemli bileşeni **kural** kavramıdır. Bir oyunu oyun yapan kurallarının olmasıdır. Bu, ilkel oyunlardan karmaşık oyunlara hiç değişmeyen bir düsturdur. Wittgenstein’in ikinci dönem felsefesinin önemli kavramlarından ikisi olan “kural” ve “kural izleme” çalışmanın ilerleyen bölümlerinde yeniden ele alınacağından burada kısaca anmakla yetineceğiz. Wittgenstein ikinci döneminde dil kavramını da oyun anlayışıyla açıklama yoluna girer. *Felsefi Soruşturmalar*’da verdiği meşhur örneği alıntılacak olursak:

“Bu dil inşaat ustası A ile kalfası B’nin anlaşmalarına yarayacak olsun. A, yapı taşları kullanarak bir bina yapmaktadır. Yapı taşları olarak da küpler, sütunlar, plakalar ve kirişler vardır. B’nin görevi, taşları A’ya, onun ihtiyaç duyduğu sırayla vermektir. Bu amaçla “küp”, “sütun”, “plaka”, “kiriş” sözcüklerinden oluşan bir dilden yararlanırlar. A bunları yüksek sesle söyler; –B, bu sesleniş

¹⁸⁰ Wittgenstein, *Felsefi Soruşturmalar*, s. 23-24.

duyduğunda getirmesi gerektiğini öğrenmiş olduğu taş hangisiyse onu getirir. –
Bunu tam bir ilkel dil olarak kavra.”¹⁸¹

Wittgenstein’in ilkel dil olarak tasvir ettiği bu yapı inşaat ustası ile onun kalfası arasında, en azından yapılacak olan iş bağlamında, sağlıklı bir iletişimi tesis etmiştir. Elbette bu ilkel dil, bu ikisi arasında kurulan dilin bütünü olarak görülemez. Ama anlaşılacağı üzere, bu ilkel dil yapılması planlanan işin yapılması için gerekli olan asgari iletişimi sağlar. Dil oyunu da tam olarak böyle bir şeydir. Usta yüksek sesle küp dediği zaman bunu işiten kalfa gidip küpü getirir ve ustasına verir. Bu olgu durumunu Wittgenstein’in birinci dönemi bağlamında irdeleysek, muhtemelen şunları söyleyecektik: Usta küp dediği zaman nasıl oluyor da kalfa gidip küpü getiriyor? Aslında usta küp demekle her hangi bir şey demiş ya da istemiş olmuyor. Sadece bir nesnenin adını zikretmiş oluyor. Günlük dil işte hep böyle anlam bulanıklıkları ile doludur dolayısıyla günlük dilin belirli bir mantıksal yapısı yoktur. İkinci dönemine gelindiğinde ise usta ve kalfasının kullandıkları dil ne kadar ilkel olursa olsun, yapılması beklenen eylem yapıldığı için bu dil onlar için yeterlidir anlayışının hâkim olduğunu söyleyebiliriz. Wittgenstein’in her iki döneminde de nasıl bir dil anlayışı benimsediğini şu şekilde de ifade edebiliriz: Wittgenstein’in felsefesinde, birinci dönemdeki dil vurgusu dilin daha çok sentaktik yönüne iken, ikinci döneminde bu vurgu dilin pragmatik yönüne kaymıştır. Bu Wittgenstein’in ikinci dönemi için temel teşkil edecek bir yönelimdir. İkinci döneminde ortaya konulacak olan mantık ve matematik anlayışının da zemininde aynı pragmatik anlam yaklaşımının olduğunu ilerleyen bölümlerde göstermeye çalışacağız.

Toparlayacak olursak, Wittgenstein’in felsefi metamorfozunu anlamak için bakmamız gereken ilk yer, O’nun dil anlayışıdır. O, *Tractatus*’ta başı sonu belli, bütün kuralları ile durağan, statik bir dil anlayışı benimsemiştir. İkinci döneminde ise dilin, insanın yaşantısının içinde, canlı ve dinamik bir yapı olduğunu düşünmektedir. İkinci dönem Wittgenstein’a göre dilin kuralları koşullara ve zamana göre değişebilir ve her bir değişim yeni kurallar, yeni anlamlar ve yeni dil oyunları demektir.

¹⁸¹ A.e., s. 24.

2.4. Wittgenstein'in Doğrulamacılığı

Bundan önceki bölümde, Wittgenstein'in her türlü temellendirmeden ve teoriden münezzeh bir matematik anlayışı benimsediğini belirtmiştik. Bununla birlikte ikinci dönemin temel paradigması olan pragmatik anlam yaklaşımını da irdemiştik. Bu iki yaklaşım göz önünde bulundurulduğunda, “Matematiksel bir önermenin anlamını nerede aramalıyız?” sorusu daha önemli hale gelmektedir. Şöyle ki, Wittgenstein ikinci döneminde önermenin anlamını, olgu durumlarında ya da biçimsel dizilerin sentaksında aramak yerine, önermenin kullanıldığı bağlamda aramak gerektiğini düşünür. O zaman Wittgenstein'a göre matematiksel bir önermenin anlamının da, önermenin kullanımında ortaya çıkması gerektiği açıktır. Peki, bu durumda matematiksel bir önermenin doğru mu yoksa yanlış mı olduğuna nasıl karar vereceğiz? Bu soru şöyle de sorulabilirdi: Matematiksel önermeleri doğrulamak için temellere ya da teorilere bakmayacaksak, matematiksel önermelerinin doğrulama yöntemi nasıl olmalıdır? Bu bölümde bu ve buna benzer sorulara Wittgenstein'in **doğrulamacılık** (*İng.* Verificationism) anlayışı üzerinden cevaplar aramaya çalışacağız. Bu bölümde değineceğimiz bir diğer husus da, Wittgenstein'in doğrulamacılığı ile Viyana Çevresi düşünürlerinin bu konudaki düşünceleri olacaktır.

Wittgenstein'in, özellikle ikinci döneminin başlarında yazdığı yazılarda ve verdiği derslerde, matematik felsefesi bağlamında doğrulamacılığa yakın olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi anılan dönemde yazmış olduğu yazılarından bazı alıntılar yapmak suretiyle Wittgenstein'in doğrulamacılığının ayrıntılarına girmek istiyoruz:

“Her önerme doğrulama için bir kılavuzdur.”¹⁸²

“Doğrulama sadece doğruluğun bir işareti değil, aynı zamanda önermenin anlamıdır.”¹⁸³

“Bir önermenin anlamını belirlemek için, önermeyi doğrulayacak yöntemi biliyor olmam gerekir.”¹⁸⁴

¹⁸² Wittgenstein, **Philosophical Remarks**, s. 174.

¹⁸³ **A.e.**, s. 200.

“Nerede farklı doğrulama yöntemleri var ise, orada farklı anlamlar da vardır.”¹⁸⁵

“Bir önermenin anlamı onun doğrulama yöntemidir.”¹⁸⁶

“Bir önerme, doğrulanma yöntemi aracılığıyla bulunandan fazlasını söyleyemez. Eğer “Arkadaşım kızgın” diyorsam ve bunu belirli bir algılanabilir davranış sergilemesi sonucu öğreniyorsam, söylemek istediğim tek şey, onun bu davranışı sergilediğidir. Ve eğer daha fazlasını kastediyorsam, fazladan neye dayandığını açıkça belirtemem. Bir önerme yalnızca ne söylüyorsa onu söyler, bunun ötesinde hiçbir şey yoktur.”¹⁸⁷

Wittgenstein’in çeşitli yazılarından yapılan bu alıntılar, onun bu dönemdeki matematik felsefesi anlayışının doğrulamacılık düşüncesi ile olan ilişkisini gözler önüne sermektedir. Wittgenstein’in matematik felsefesinin doğrulamacılığa evrilmesi, *Tractatus* bağlamında düşünüldüğünde, ilk dönem düşüncelerinde yaptığı bir takım küçük değişiklikler olarak görülemez. Wittgenstein *Tractatus*’un temel bazı fikirlerini doğrulamacılıkla birlikte terk etmiş görünmektedir. Sözgelimi, artık Wittgenstein’a göre bir tümce eğer matematiğin bir önermesi olacaksa, bu tümcenin sonlu adımda kanıtlanabilir olması gerekir. Aksi halde bu tümce matematiksel bir önerme olamaz ve aynı zamanda matematiksel bir bilgiyi aktarıyor da olamaz. *Tractatus* bağlamında düşünüldüğünde, Wittgenstein’in neyin matematiksel bir önerme olacağına ilişkin böyle bir belirlenim ortaya koymadığı görülmektedir.

Bilindiği üzere Wittgenstein, Birinci Dünya Savaşı’nın bitmesinin ardından Viyana’ya döner ve burada “felsefeden uzak” bir hayat sürmeye başlar. Bu esnada da birkaç kere Viyana Çevresi düşünürlerinin toplantılarına katıldığı bilinmektedir. Felsefi yönelimleri bakımından Çevre düşünürleri ile Wittgenstein’in bütünüyle uyuşmasının söz konusu edilemeyeceği zaten açıktır. Bununla birlikte doğrulamacılık fikrini Wittgenstein’in mı Çevre düşünürlerinden, yoksa Çevre düşünürlerinin mi Wittgenstein’den aldığı konusu ihtilaflı bir konudur. Bizim iddiamız, Çevre düşünürlerinin

¹⁸⁴ Waismann, *Wittgenstein and the Vienna Circle*, s. 47.

¹⁸⁵ A.e., s. 53.

¹⁸⁶ A.e., s. 79.

¹⁸⁷ A.e., s. 244.

doğrulamacılık fikrini büyük ölçüde Wittgenstein'dan etkilenecek ortaya koydukları şeklindedir. Çevre düşünürleri bilimsel anlamda radikal empirist tutumlarıyla bilinmektedir. Bilindiği üzere bir dönem neredeyse her toplantılarında *Tractatus*'ta değinilen hususlar çerçevesinde tartışmalar yapmışlardır ve nihayetinde birkaç toplantılarına da olsa Wittgenstein'ı getirebilmeyi başarmışlardır. Çevre düşünürleri radikal empirizmlerini Wittgenstein'dan sonra **anlam teorisi** (*İng.* Theory of Mean) bağlamında tartışmaya başlamışlardır.¹⁸⁸ Öte yandan şurası oldukça çarpıcı bir gerçektir: Mantıkçı Pozitivizmin sonradan en önemli köşe taşlarından birisi konumuna gelecek olan meşhur **anlamın doğrulama ilkesi** (*İng.* Verification Principle of Mean) Viyana Çevresi düşünürlerinin ilk olarak ortaya koydukları *Die Wissenschaftliche Weltauffassung: Der Wiener Kreis*¹⁸⁹ adlı manifestolarında yer almamaktadır. Anlamın doğrulama ilkesi açık bir şekilde çevre düşünürleri üzerindeki Wittgenstein etkisini göstermektedir. Hatta Carnap, önermelerin anlamları mevzularında doğrulamacılık fikrinin ilk olarak Wittgenstein'dan çıktığını 1936 tarihli *Testability and Mean* adlı makalesinde açıkça söylemektedir.¹⁹⁰

Ezcümle, Wittgenstein ikinci döneminde matematiksel önermeyi ve önermenin kanıtlanma yöntemini birbirinden ayrı olan değil, birinin içine geçmiş olan yapılar olarak görür. Artık Wittgenstein'a göre kanıtlanamayan bir matematik önermesi söylemi düpedüz saçmalıktır. Zira bir matematik önermesinin en belirgin özelliklerinden birisi de kanıtlanabilir olmasıdır. Wittgenstein'ın bu düşüncesinin matematikçiler açısından kabul edilmesinin oldukça güç olduğunu düşünüyoruz. Çalışmanın son bölümünde Wittgenstein'ın doğrulamacılığının eleştirisi yapılacağından bu bölümü şimdilik sonlandırıyoruz.

¹⁸⁸ Wrigley, "Wittgenstein's Early Philosophy of Mathematics", s.89.

¹⁸⁹ Bkz. H. Hanz, O. Neurath, R. Carnap, "The Scientific Conception of the World: The Vienna Circle", (Çevrimiçi) <https://philpapers.org/rec/HAHTSC>, 05 Ocak 2018

¹⁹⁰ Rudolf Carnap, "Testability and Meaning", **Philosophy of Science**, Vol. 3, No. 4, 1936, s. 422.

2.5. Matematiksel Önergelerin Anlamı

Wittgenstein'in dilden anladığı, insan yaşantısının bütününe kapsayan ve ona yön veren bir yapıdır. Hatırlanacak olursa *Tractatus*'ta dilin dünyayı resmettiğini söylemekteydi. İkinci döneminin de en başat kavramı yine dil kavramıdır. O'nun için dil düşüncenin evidir. Aynı deyişle, Wittgenstein'a göre düşüncenin varlık bulduğu mekân, dildir. Aklımıza gelebilecek her türlü önerme dilde varlık bulur. Bunu içerisine olgu durumu ile ilişkili önergeler de girer, mantık-matematik önergeleri de girer, etik-estetik, din önergeleri de girer. Bunların hepsine dair tümceler dilde üretilir. Çalışmanın bu bölümünde, ilk olarak, Wittgenstein bağlamında dil ve dilin uygulaması arasındaki bağıntının matematiksel önergeler söz konusu olduğunda nasıl ve ne şekilde zuhur ettiği üzerinde duracağız. Buradan hareketle, Wittgenstein'ın matematiksel olgu kavramına ve zihinlerimizdeki yanlış matematik resimlerine yönelttiği eleştirileri tartışacağız. Ardından, Wittgenstein açısından, matematiksel önergeler ile fiziksel önergeler arasındaki farkların neler olduğuna değineceğiz. Sonrasında ise matematiksel önergelerin **tanımlamanın kuralları** (*Ing.* Rules of Description) olarak verilmesinin ne anlama geldiği üzerinde duracağız. Son olarak da Wittgenstein'ın "Önermenin unsurları ancak önermenin ait olduğu dil oyunu içerisinde anlam kazanır" şeklinde tercüme edilebilecek düşüncesini irdelleyecek ve bölümü sonlandıracacağız.

Daha önce de belirtildiği üzere, Wittgenstein'a göre matematik de bir çeşit dil oyunudur. Dolayısıyla dil oyunları için yapılan tespitlerin bütünü, matematik için de geçerlidir. Şöyle ki, nasıl bir dil ile bu dilin uygulaması arasında keskin bir ayrım var ise, aynı şekilde matematik dili ile bu dilin olgulara uygulanması arasında da keskin bir ayrım vardır.

Matematiği, fizikte olduğu gibi, öznesi madde ya da olgusal durumlar olan bir disiplin olarak görmek yaygın bir eğilimdir.¹⁹¹ Bu eğilim, matematiksel çıkarımların bazılarının olgu durumları ile temsil edilebilir olmaları ve bizim bu temsilin cazibesine kapılıyor olmamızdan kaynaklanıyor olabilir. Sanki matematiksel

¹⁹¹ Ryan Dawson, "Leaving Mathematics As It Is: Wittgenstein's Later Philosophy of Mathematics", (Yayınlanmamış Doktora Tezi), University of East Anglia, Norwich, 2015, s. 49.

çıkarımların doğrulanması, sadece ilgili olgu durumlarının dolayımıyla verilebileceği gibi gelir bize. Wittgenstein bu anlayışın karşımıza dogmatik bir resim çıkarttığını düşünür.

Godfrey Hardy, *Mind* dergisinde yayınlanan *Mathematical Proof* adlı makalesinde gerçeklik (*Ing. Reality*) ile matematiksel teoremlerin birbirleriyle uyumlu olduğunu, örtüştüğünü iddia eder.

“... öyle ya da böyle, matematiksel doğruluğun kesin ve koşulsuz geçerliliğini kabul etmeyen hiçbir felsefe bir matematikçiye çekici gelmeyecektir. Matematiksel teoremler doğru veya yanlışlar; doğrulukları veya yanlışlıkları mutlak ve onlara ilişkin bilginizden bağımsızdır. Bir anlamda, matematiksel doğru nesnel gerçekliğin parçasıdır... ancak matematiksel önermeler, şu ya da bu anlamda, bu anlam ne kadar kolay bulunmaz ve karmaşık olursa olsun, gerçeklikle ilgili teoremlerdir... Zihnimizin yaratıları değildir.”¹⁹²

Wittgenstein bu makaleyi okur ve adeta çileden çıkar. Hardy’e *Lectures on Foundations of Mathematics*’te ve Cambridge derslerinde şöyle yanıt verir:

“Gerçeklik nedir? Gerçekliği işaret edebileceğimiz ya da gösterebileceğimiz bir şeymiş gibi düşünüyoruz... Profesör Hardy matematiğin önermeleri ile fiziğin önermelerini mukayese ediyor. Bu gerçekten yanıltıcıdır.”¹⁹³

“Matematikçilerin konuşmaları matematikten ayrıldıklarında saçmalaşıyor; örneğin Hardy’nin matematiği, zihnimizin bir yarattısı olmayışı gibi tanımlaması. Felsefeyi, matematiğin ve bilimin katı gerçeklerinin çevresindeki bir dekor, bir atmosfer gibi tasarlamış. Bir yanda bu disiplinler, öte yanda felsefe; bir odanın ihtiyaçları ve dekoru gibi düşünülmüşler. Hardy felsefi fikirleri düşünüyor. Bense felsefeyi, düşünceyi aydınlatma etkinliği olarak görüyorum.”¹⁹⁴

Görüldüğü üzere Wittgenstein, Hardy’nin fikirlerine sert ve alaycı bir üslupla karşı çıkar. “... ile örtüşen gerçeklik” ifadesi, bizim empirik tanımlamalarımız

¹⁹² G. Hardy, “Mathematical Proof”, *Mind*, vol. 38, 1929, s. 4.

¹⁹³ Wittgenstein, *Wittgenstein’s Lectures on the Foundations of Mathematics*, s. 239-240.

¹⁹⁴ *A.e.*, s. 225.

uyarınca işaret edebileceğimiz, gösterebileceğimiz ve fiziksel gerçeklik ile bağdaştırdığımız bir ifadedir.¹⁹⁵ Örnek verecek olursak, "... ile örtüşen gerçeklik" ifadesi "Masanın üstünde mavi bir çakmak var" önermesi gibi empirik önermelerin doğrulanmasında kullanılır. Şöyle ki, masanın üzerinde duran mavi çakmağı gösteririz ve önerme doğrulanmış olur. Wittgenstein, matematiksel önermeler ile örtüşen bir gerçeklik üzerine konuşmanın mümkün olabileceğini ancak, bu tarz bir düşünmenin matematiksel önermelerin doğrulanmaları ya da yanlışlanmaları noktasında yanıltıcı olacağını düşünür. Zira Wittgenstein'a göre, olgusal gerçeklikle örtüşen bir matematik önermesinin de doğruluk değeri olgu durumunun dolayımıyla değil, matematik dilinin kuralları ya da sentaksı aracılığıyla belirlenmelidir. Eğer matematiksel önermeleri olgu durumları ile açıklamaya kalkarsak, matematiği de empirik bilimlerde olduğu gibi doğası gereği sahip olduğu evrensellikten, zorunluluktan uzaklaştırmış oluruz ve onu kuşku uyandıran bir bilim haline getirmiş oluruz.¹⁹⁶ Wittgenstein'a göre, "Bu sorunsal matematiğin kendisi ile değil, bizim zihinlerimizdeki matematiksel önermelere dair çizmiş olduğumuz resimler ile alâkalıdır."¹⁹⁷

Doğru olan bir matematik önermesi sadece doğru değildir, o aynı zamanda zorunlu olarak doğrudur. Böyle bir zorunluluk empirik bir doğrulukta yoktur. Matematiksel önermeleri tanımlamalar olarak ele alırsak bu zorunluluk matematiksel nesnelerin bir özelliği olarak karşımıza çıkar.¹⁹⁸ Zorunlu ve zorunlu olmayan (olumsal) önermeler arasındaki fark, Wittgenstein'a göre şu şekilde karakterize edilebilir: Zorunlu önermelerde her hangi bir olgu durumu hiçbir şekilde işin içine dâhil edilmez.¹⁹⁹ Sözelimi, hiçbir empirik gözlem " $2 + 2 = 4$ " önermesini doğrulayamaz ya da yanlışlayamaz.²⁰⁰ Bu önermenin doğruluğu herhangi bir olgu durumunun değil, matematiksel dilin bir fonksiyonudur. Ama empirik bir önermeyi gözlem vasıtasıyla doğrulayabiliriz ya da yanlışlayabiliriz. Sözelimi, biraz önce

¹⁹⁵ Dawson, "Leaving Mathematics As It Is: Wittgenstein's Later Philosophy of Mathematics", s. 50.

¹⁹⁶ Wittgenstein, **Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics**, s. 145.

¹⁹⁷ O. Kuusela, **The Struggle Against Dogmatism: Wittgenstein and the Concept of Philosophy**, Harvard University Press, Cambridge, 2008, s. 198.

¹⁹⁸ Ludwig Wittgenstein, **Remarks on the Foundations of Mathematics**, Ed. G. H. von Wright, G. E. M. Anscombe, R. Rhees, Basil Blackwell, Oxford, 1978, s. 74.

¹⁹⁹ **A.e.**, s. 47.

²⁰⁰ **A.e.**, s. 96-97.

değindiğimiz “Masanın üstünde mavi bir çakmak var” önermesini masanın üstüne bakarak doğrulayabilir ya da yanlışlayabiliriz. Çakmak var ise önerme doğru, yoksa yanlış olacaktır.

Tanımlamanın kurallarını matematiksel önermelere uygulayacak olursak şöyle diyebiliriz; “ $2 + 2 = 4$ ” önermesi 2 ile 4’ün nasıl kullanılacağını gösteren bir kurallar sistemi, kurallar tanımlaması ortaya koyar. Biz de bu sistemi olgu durumlarındaki sayısal ifadeleri tanımlarken kullanırız. Aritmetiğin kendi sistemi, kendi tanımlama kuralları, “Şurada iki tane elma var, burada da iki tane elma var o zaman toplamda dört tane elma var” diyebilmemizin zemininde yatar.²⁰¹

Bu bölümde buraya kadar değinilen noktaları maddeler halinde tekrar edecek olursak:

- Aritmetik bir dildir, önermeler sistemidir.
- Aritmetik dilinin olgu durumlarında çeşitli uygulamaları vardır.
- Aritmetiğin dili ile bu dilin olgu durumlarına uygulanması bir ve aynı şey değildir.
- Aritmetiğin herhangi bir önermesinin doğruluğu, olgu durumlarının dolayımıyla gösterilemez.
- Aritmetiğin kendi sisteminin, olgu durumlarında karşımıza çıkan sayısal ifadelere önceliği vardır. Olgu durumlarındaki sayısal ifadelerin zemininde ve onları mümkün kılacak şekilde aritmetik önermeler vardır.

Matematiğin herhangi bir alt dalındaki herhangi bir işaret, fiziksel bir entite değildir.²⁰² Bu işaret hesaplamanın belirli bir kuralı dâhilinde kullanıldığında anlamlı olur. Konuya başka bir pencereden bakacak olursak, herhangi bir satranç taşını düşünelim, vezir, şah ya da piyon, fark etmez. Bu taş, satranç oyununun dışında oyunda sahip olduğu anlamı taşımaz. O zaman, herhangi bir satranç taşının anlamı ancak satranç oyununda ortaya çıkar diyebiliriz. Wittgenstein, Waismann ile yaptığı söyleşilerin birinde bu hususta şunları demiştir:

²⁰¹ Ludwig Wittgenstein, **Wittgenstein's Lectures, 1932 – 35**, Ed. A. Ambrose, Blackwell, Oxford. 1979, s. 154.

²⁰² Pascolli Frascolla, **Wittgenstein's Philosophy of Mathematics**, Routledge, London, 1994, s. 54.

“Cambridge’de iken bana şöyle bir soru sormuşlardı; “Matematiğin, sadece sayfada oluşan mürekkep izlerinden meydana gelmiş bir şey olabileceği konusunda ne düşünüyorsunuz?” Bu soruyu şöyle cevaplamıştım; Bu satranç oyununun sadece tahtadan figürlerden meydana gelen bir şey olması gibi bir şeydir. Satranç oyunu, tahtadan figürleri damalı masa üzerinde gelişigüzel hareket ettirmek değildir. Oyun, söz gelimi piyonun, oyun içerisinde ki pozisyonunu belirleyen kurallar bütünüdür. Burada piyon sadece mantıktaki ‘x’ gibi bir değişkendir.... Eğer geometrik bir şekil çizdiyse sayfa, tekrar etmek gerekirse ilgilendiğimiz şey sayfaya çizdiğimiz çizgiler değildir. Benzer bir durum kalemin sayfaya bıraktığı mürekkep izlerinin aritmetiğin bir işareti olması ya da tahtadan yapılmış satranç taşlarının satranç oyunundaki yeri konusunda da geçerlidir. Burada asıl önemli olan husus şudur; bu yapıları anlamlı kılan kurallardır.”²⁰³

Wittgenstein benzer iddiaları *Philosophical Remarks*’ta da tekrarlar:

“Kalkülüsü tanımlayan kurallar sistemi aynı zamanda kalkülüsün işaretlerinin gönderimini (*Alm.* Bedeutung) de belirler. Daha kesin bir dille söyleyecek olursak sentaksın formu ve kuralları eşdeğerdir.”²⁰⁴

“Sadece kurallar gurubu işaretlerin anlamını (*Alm.* Sinn) belirler ve kurallardaki herhangi bir değişiklik, anlamın da değişmesi demektir.”²⁰⁵ Wittgenstein burada matematik dilindeki işaretlerin anlamının hesap süreçlerindeki kurallar dolayısıyla ortaya çıktığını söyler.

Toparlamak adına şu örneği inceleyebiliriz: “Eukleidesçi bir üçgenin bir dış açısı, kendisine komşu olmayan diğer iki iç açının toplamına eşittir” şeklindeki matematiksel önermeyi ele alalım. Üçgen, Eukleidesçi üçgen, dış açı, komşu olmak, iç açı, toplam... gibi unsurlar bu matematiksel önermenin unsurları. Bu unsurlar tek başlarına düşünüldüklerinde karşılık geldikleri bir anlam var. Peki, bu anlamları topladığımızda ya da bir araya getirdiğimizde “Eukleidesçi bir üçgenin bir dış açısı, kendisine komşu olmayan diğer iki iç açının toplamına eşittir” önermesinin anlamını verir mi? Elbette vermez. Örneğin “komşu olmak” denildiğinde aklımıza bambaşka

²⁰³ Waismann, *Wittgenstein and the Vienna Circle*, s. 103-105.

²⁰⁴ Wittgenstein, *Philosophical Remarks*, s. 152.

²⁰⁵ *A.e.*, s. 154.

şeyler gelir. O zaman, Wittgenstein'in da belirttiği gibi, sözcükler tek başlarına tümce bağlamını veremezler, sözcükler ve tümceler ancak belirli bir bağlama, yani dil oyununa ait olmaları halinde anlamın taşıyıcısı olurlar.

2.6. Matematiksel Kanıtlamanın Doğası

Çalışmanın bu bölümünde, Wittgenstein'in matematiksel kanıtlamanın doğasına ilişkin ortaya koymuş olduğu düşünceleri, yer yer birinci döneme atıflar yapmak suretiyle ikinci dönemiyle karşılaştırılarak irdeleneceğiz. Bölüme başlarken, ilk olarak Wittgenstein'in "Mantıksal zorunluluk, matematiksel kanıtlamanın zemininde yer alır" şeklindeki Fregeci ve Russellci anlayıştan uzaklaşarak, bu bağlamda, bütünüyle olmasa da kısmen Millci bir anlayışı benimsemesi üzerinde duracağız. Ardından Wittgenstein'in mantıksalcı anlayışta reddettiği noktaların daha iyi anlaşılabilmesi adına, mantıksalcılık açısından ideal dil kavramı ve ideal dilin matematiğin mantıktan türetilmesi işindeki önemi üzerinde duracağız. Bu sayede, Wittgenstein'in, mantıksalcı anlayıştaki "Matematiksel kanıtlama, sonucu zorunlu olarak kabul etmeyi gerektirir" düşüncesini hangi saiklerle reddettiği açıkça görülebilecektir. Buna müteakip, Wittgenstein'in matematiksel doğrulukları **insan merkezli** (*İng.* Anthropocentric) ve matematiğin kendisini de antropolojik bir fenomen olarak görmesinin ne anlama geldiği üzerinde duracağız. Bu bölümün sonunda ise, Wittgenstein'in **yargı uzlaşımı** (*İng.* Agreement in Judgement) kavramını ve bu kavramın matematik felsefesindeki yansımalarını ele alacağız.

Wittgenstein ikinci dönemiyle birlikte matematiksel kanıtlama konusunda mantıksalcı anlayıştan uzaklaşır ve kısmen de olsa John Stuart Mill'in uzlaşımçı (*İng.* Conventionalist) anlayışına yaklaşır. Mill'e göre matematiksel önermeler a priori önermeler değildir. A priori önermeler kaynağında deneyimin hiçbir unsurunu barındırmayan, doğrulanması için deneyime müracaatı gerektirmeyen ve doğruluğu zorunlu doğruluk olan önermelerdir. Mill **zorunlu** sözcüğünü matematiğin dışına atmak suretiyle matematiği yeniden kurgular, bu yeni kurguya göre de matematiksel önermelerin tamamı empirik genellemelerdir.²⁰⁶ Matematiksel önermelerin

²⁰⁶ M. Lazerowitz, *The Structure of Metaphysics*, Routledge & Kegan Paul, London, 1954, s. 258-259.

doğalarını anlamaya yönelik böyle bir yönelimde problem olarak görülebilecek şey şudur: Empirik genelleme ifadesine kavramın kendisinde olan anlamdan fazlası yüklenmiştir. Sözelimi, aritmetiğin bir önermesini empirik bir genelleme olarak karakterize ettiğimizi düşünelim, o zaman bu önermenin yanlış olduğu kanıtlanabilir. Zira bu önerme zorunlu bir önerme değildir. Böyle bir yönelimde matematiksel önermeler bir çeşit olasılık önermeleri halini alırlar. Mill matematiksel önermelerin, mantık önermelerinin olduğu şekliyle, zorunlu doğruluklar olduğunu kabul etmez²⁰⁷ ama matematiksel bir kanıtta karşımıza çıkan zorunluluğa ilişkin yeterli, ikna edici bir açıklama da vermez ve matematiksel kanıtlama mevzuunu göz ardı eder. Wittgenstein, Mill ve diğer bütün uzlaşmacıların bu yetersiz açıklamalarının düzeltilmesi için ciddi manada çaba sarf eder.

Frege ve Russell'a göre matematiksel bir kanıtlama mantıksal zorunluluk üzerine inşa edilir. Bu düşünüş biçimine göre, kanıtlamanın mantığı bizi bir kavramdan diğerine bileşenleri sıralı olacak şekilde yöneltir. Bir aşamadan diğerine geçerken belirli bağıntılar kaçınılmaz olarak zihinlerimize gelir, mantıksal bağıntılar inşa etmeye çalıştığımız kavramı tanımlar, bu sebeple sürecin kendisi ve sonuçları kaçınılmaz olur. Geçerli bir mantıksal kanıtlama, ortaya çıkmasını sağladığı kavramı belirler. Frege ve Russell her hangi bir olgu durumunun, matematiksel bir kanıtı kabul ya da reddetmek için bir ölçüt olmayacağını düşünürler. Onlara göre bir kanıtlama bize sunulduğunda ve bu kanıtlamadaki basamakların hepsini açıkça anladığımızda, mantıksal olarak, sonucu kabul etmek zorundayızdır. Wittgenstein *Philosophical Remarks*'ın çeşitli yerlerinde²⁰⁸ Frege ve Russell'ın sözünü ettiği kanıtın, sonucunu kabule zorlaması fikrini eleştirmiştir. "Wittgenstein, mantığın, nasıl mantıklı düşünebileceğimizin ya da çıkarım kurallarını nasıl takip ettiğimizin bir örneği olduğuna inanır."²⁰⁹ Bununla birlikte Wittgenstein ne tümdengelimsel akıl yürütmeyi, ne de mantıksal zorunluluğu reddeder. Onun reddettiği, bu bağlamda, "Kanıtlamanın basamaklarını anlayan, kanıtlamadan çıkacak sonuçları da zorunlu olarak kabul eder" şeklindeki anlayıştır. *Philosophical Remarks*'ta **mantıksal**

²⁰⁷ D. Pole, *The Later Philosophy of Wittgenstein*, Oxford University Press, New York, 1963, s. 40.

²⁰⁸ Wittgenstein, *Philosophical Remarks*, s. 121, 140.

²⁰⁹ Thibadeau, "Wittgenstein's Later (1929-1951) Philosophy of Mathematics", s. 124.

zorunluluğun katılığı (*İng.* The Hardness of the Logical Must) olarak isimlendirdiği bu anlayışı şöyle eleştirir: “Nasıl olur da bir kanıtlama beni bir şeyi kabul etmeye zorlar?... Sizi bir şeyi kabul etmeye zorlayan değil, size yol gösteren kanıtlamaları dikkate alın.”²¹⁰

Wittgenstein bir piston kolunun makinenin içerisinde hareket etmesi gibi, bir matematik sisteminin bir diğerini belirlemesi fikrine karşı çıkar.²¹¹ Ona göre biz hiçbir zorlamanın baskısı altında kalmaksızın matematik yaparız, matematiksel kavramları inşa ederiz. Dilin ve deneyimin olanakları ölçüsünde nasıl bir matematik sistemi arzu ediyorsak onu inşa ederiz. “Matematik bizim üstümüzde bir otorite değildir.”²¹² Matematik birbirleriyle belirli ilişkiler içerisinde olan kavram ve teorilerin karmaşık bir sistemi değildir.²¹³ Matematik insan etkisinin dışında, onu aşan bir şey değildir. Wittgenstein’a göre dünyanın yapısı, inşa edeceğimiz matematik türlerinin sınırlarını da belirler. Bununla birlikte dil oyunları ve bunların kuralları da deneyim dünyamızın sınırlarını belirler. Bu sınırlar dâhilinde, kavramsal inşalar ve karşılaştırmalar yaparız.²¹⁴ Dolayısıyla Wittgenstein’a göre matematiksel kanıtlamanın bizi sonucunun kabulüne zorlaması bütünüyle yanılsamadır.

Matematiğin mantıktan türetilebileceği fikrinin savunucuları aynı zamanda ideal dil anlayışını da savunurlar. Örneğin Frege ve Russell mantıksal açıdan eksiksiz, tastamam bir dil elde edilinceye kadar bir çeşit diller hiyerarşisi inşa edilebileceğini düşünürler.²¹⁵ Onlara göre mantık ilkeleri ideal dilin ve matematiksel kavramların zemininde yatar. Russell matematik üzerine konuşabilmenin ancak doğal dillerin bu anlamda terk edilmesi ve yerine gücünü mantıktan alan ideal bir dilin konmasıyla mümkün olduğunu düşünür.²¹⁶ Frege’nin ideal dil yaklaşımını Gözkan’dan alıntılacak olursak:

²¹⁰ Wittgenstein, **Philosophical Remarks**, s. 34.

²¹¹ **A.e.**, s. 199.

²¹² Pole, **The Later Philosophy of Wittgenstein**, s. 40.

²¹³ Thibadeau, “Wittgenstein’s Later (1929-1951) Philosophy of Mathematics”, s. 125.

²¹⁴ Wittgenstein, **Philosophical Remarks**, s. IV-18.

²¹⁵ Bertrand Russell, **Logic and Knowledge**, Ed. R. C. Marsh, G. Allen and Unwin, London, 1956, s. 370-371.

²¹⁶ Russell, **The Principles of Mathematics**, s. 4.

“Frege için mantık, doruluğun ne olduğunun açığa çıkması ve doğruluğun yasaları aracılığıyla hakikatin örtüsünün açılmasıdır ki, aslında bu son ifade kendisinden önceki pek çok düşünürle atfen de kullanılabilir. Frege’yi kendisinden önceki düşünürlerden ayırt eden, mantığa, mantıkla doğal dilin ilişkisine olan farklı yaklaşımdır ve bu yaklaşım, mantıkta bir devrime karşılık gelecek ve Frege’yi modern simgesel mantığın kurucu babası yapacaktır.”²¹⁷

“Dilimizin mantıksal bir yapısı var. Ve bu yapı, dünya hakkında bir bildirimde bulunduğumuzda kendi yapısını dünyaya dayatır ve biz dünyayı ancak bu dayatma üzerinden bilebiliriz. Öyleyse, dünya hakkındaki bilgimize dair olan her şey, zorunlu olarak dilin kendi mantığından gelen öğeleri de içinde taşır. Yani dünya hakkında kendinde bir gerçekliği değil, dilin kendi mantığını dünyaya yüklediği öğelerle ortaya çıkan bir gerçekliği bilebiliriz.”²¹⁸

Wittgenstein matematik hakkında konuşmak için bir dil olarak mantığın kullanılabilmesi fikrini reddetmez. Ancak bu işin kullanılabilen tek dilin mantık olduğu fikrini reddeder.²¹⁹ Wittgenstein’a göre mantık doğal dillerin etkisinden bütünüyle münezzehtir. Matematiksel kanıtlamanın inşasında, belirli sabitleri göstermek için çeşitli işaretler kullanırız. Bu sabitlerin ve işaretlerin anlamı ise dilde var olmalıdır. Wittgenstein ikinci dönemiyle birlikte gerçeklikten, olgu durumundan bütünüyle bağımsız bir mantık ve ideal dil anlayışının matematiksel kanıtlamanın ve matematiksel nesnelerin varoluşunun kavranılışının zemininde yattığı fikrini reddeder. Artık Wittgenstein’a göre matematiksel bir kanıtlama nesnel olmak zorunda değildir. Eğer ortada bize sunulan matematiksel bir kanıtlama varsa, bu kanıtlama bizi bir sonucu kabul etmeye zorlayamaz. Aksiyomlar ya da çıkarım kuralları (*Ing.* Inference Rules) kanıtlamayı kabul edip etmeyeceğimizi belirleyemez. Matematiksel kanıtlama basamaklarındaki bir önermenin zorunlu olup olmamasının kararı tamamen bize bağlıdır. Diğer bir deyişle, nasıl ki dilimizde kullandığımız bir sözcüğe anlam yüklemek bize bağlı ise, bir önermenin zorunluluğuna karar vermek de bize bağlıdır. “Bir önermenin bir başkasını gerektirip gerektirmediği sorusu belirli sözcüklerin nasıl kullanıldığına ilişkin bir sorudur.”²²⁰ Ama mantıksalci anlayışa göre, bir sözcüğün anlamı hâlihazırda belirlenmiştir, yoruma ya da başka türlü bir

²¹⁷ Hasan B. Gözkân, “Frege ve Aritmetiğin Temelleri”, (**Aritmetiğin Temelleri** içinde), Frege, **Aritmetiğin Temelleri**, Yapı Kredi Yayınları, İstanbul, 2012, s. 13.

²¹⁸ **A.e.**, s. 15.

²¹⁹ Thibadeau, “Wittgenstein’s Later (1929-1951) Philosophy of Mathematics”, s. 127.

²²⁰ Norman Malcolm, “Are Necessary Propositions Really Verbal?”, **Mind**, Vol. XLIX, 1940, s. 192.

belirlenime olanak yoktur. Wittgenstein'a göre ise yargılarımızın her biri bağımsızdır, yargımızın uymaya zorunlu olduğu bir kural yoktur. Eğer matematik insanlar arasındaki iletişimin bir unsuru ise, bunun sebebi sadece tanımlarda değil, yargılarda da bir uzlaşımın veya anlaşmanın olmasındandır. Bu uzlaşım için bir temel aramaya gerek yoktur. Önemli olan bu uzlaşımın işe yarar olup olmamasıdır.

Wittgenstein'a göre matematiksel zorunluluk, matematik mantıksal bir ideale uymak zorundadır demek değildir, mantıksal kesinlik olmaksızın da matematik yapabiliriz. Matematik, tıpkı dil gibi, insanlardan tamamıyla bağımsız kurallarla sınırlandırılmış bir yapı değildir. Kurallar insanlar tarafından belirlenir, süreç içerisinde bazen değişmeden kalırlar, bazen de koşullar gereği değişirler. Bu sebeple Wittgenstein'a göre matematik yaparken kuralların baskısı altında kalmak saçmadır. Ona göre sözcükler kendi başlarına ne anlamlıdır, ne de anlamsız. Anlam ancak sözcüklerin kullanımı neticesinde ortaya çıkar. Kurallar da aynı şekildedir. İnsanlar kullanım pratiklerine göre kuralları değiştirebilirler. Matematik insanın düşünme ve eyleme faaliyetinin bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla matematiksel doğruluklar insan merkezlidir ve matematiğin kendisi antropolojik bir fenomendir.

Wittgenstein dilin veya matematiğin bir takım kuralları olduğunu ve bu kurallara uyuyor olduğumuz gerçeğini inkâr etmez. O, bir sözcüğün ya da matematiksel bir kavramın anlamı ancak kurallar aracılığıyla belirlenir ve dil ve matematik, matematiğin anlam ve kullanımına sınırlar koyan kurallardan müteşekkildir şeklindeki anlayışa karşı çıkar. Wittgenstein *Tractatus*'ta önermeler ile olgu durumları arasında mantıksal bir örtüşme olduğunu söylüyordu. İkinci dönemiyle birlikte mantıksal örtüşme kavramı yerini yargı uzlaşımı kavramına bırakır. Kısaca tanımlayacak olursak: Yargı uzlaşımı, yargıların ortaya konulması veya dilin kullanılması esnasında kuralların, topluluğun bireylerinin uzlaşımına dayalı olarak tesis edilmesidir. Uzlaşım dayanan bu kurallar herhangi bir temellendirmeye de gereksinim duymaz. İnsanlar bu kurallar uyarınca dili kullanmaya devam ettiği sürece ortaya bir problem çıkmaz. Ne zaman ki bu kurallar artık insanların ihtiyaçlarına cevap veremez, insanlar arası iletişimi besleyemez olur, o zaman yine uzlaşım dayalı olarak terk edilirler ve yerlerine yeni kurallar getirilir. Wittgenstein'a göre yargı uzlaşımının kurallara ve tanımlara da önceliği vardır.

Matematiğin anlamı yargı uzlaşımı aracılığıyla belirlenir çünkü matematiksel bir kuralın veya tanımın doğru olup olmadığı yargı uzlaşımına bağlıdır. Çalışmanın bundan sonraki bölümünde matematiksel dil ve kurallar konuları ele alınacağından bu konudaki açıklamaları sonraki bölüme bırakıyoruz.

Toparlayacak olursak, Wittgenstein’a göre matematiksel dil, konuşma dilinde olduğu gibi insan yaşantısının bir ürünüdür. Bundan ötürü, matematikte insanı aşan bir zorunluluktan söz edilemez.

2.7. Dil, Matematik ve Kurala Uyma

Wittgenstein’a göre, hayatlarımızı bütün yönleri ile kuşatan, sarıp sarmalayan, düşüncelerimize yol veren dil, oyundan başka bir şey değildir. Aynı şekilde matematik dediğimiz şey de bir çeşit dil oyunudur.²²¹ Wittgenstein açısından oyun metaforunun en önemli bileşeni kuşkusuz **kural** kavramıdır. Kuralların zemininde de oyunu oynayanların uzlaşımı yatmaktadır. Bir bireyin dilsel topluluktan izole bir şekilde kurala uyması söz konusu değildir. Ayrıca, Wittgenstein’a göre kurallar anlamı tanımlayan ya da keşfeden değil, yaratan normlar olarak karşımızda dururlar.²²² Çalışmanın bundan önceki bölümünü yargı uzlaşımı kavramını irdeleyerek bitirmiştik. Bu bölümde de, ilk olarak oyun ve kural arasındaki bağıntıyı, Wittgenstein’ın **kurala uyma** (*İng.* Follow a Rule) olarak adlandırdığı anlayış üzerinden tartışacağız. Sonrasında da, kural kavramının daha anlaşılır kılınabilmesi adına, kurallar neye göre ve nasıl ortaya çıkarlar?, bir kimsenin bir oyunun kurallarını kavramış olması ne demektir?, bu kimsenin oyunun kurallarını anlayıp anlamadığından nasıl emin olunabilir? minvalinde sorulara Wittgenstein’ın ikinci dönem matematik felsefesi bağlamında cevaplar aramaya çalışacağız.

Wittgenstein’ın matematik felsefesini diğer matematik felsefelerinden ayıran en önemli kavramlardan birisi kurala uyma kavramıdır.²²³ Öte yandan Wittgenstein “Kurala uymak ne demektir?” sorusunu merkeze alarak, bu minvalde çalışmalar

²²¹ H. Sluga, “Ludwig Wittgenstein, Yaşamı ve Yapıtları”, Çev. Sevinç Altınçekiç, **Cogito**, Sayı 33, 2002, s. 27.

²²² C. Wright, **Wittgenstein on the Foundations of Mathematics**, Harvard University Press, Cambridge, 1980, s. 61.

²²³ Raymond H. Melkom, “Wittgenstein on the Philosophy of Mathematics”, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), The University of Western Ontario, London, 1982, s. 19.

yürütmüş ve bu soruya uygun cevaplar bulmaya çalışmıştır. Wittgenstein’a göre bir kuralı incelerken kuralın dışına bakmak gerekir. Zira O’na göre kural kendi içerisinde ona nasıl uyulacağı sorusunun cevabını barındırmaz.

Wittgenstein *Felsefi Soruşturmalarda*’da şu örneği verir:

“Şimdi şu tür bir dil oyununu inceleyelim: A’nın emri üzerine B, belirli bir oluşturma kuralı uyarınca im dizileri yazmak durumundadır.

Bunlardan ilki, ondalık sistemdeki doğal sayılar dizisi olsun. –Bu sistemi anlamayı nasıl öğrenir? –Önce bazı sayı dizileri yazılıp önüne konur ve bunları kopya etmesi istenir. (“Sayı dizileri” ifadesini garipseme, burada hatalı olarak kullanılmış değil!) Henüz bu noktada bile öğrencinin tepkisi normal ya da anormal olabilir. –Başlangıçta, 0’dan 9’a kadar olan diziyi yazarken elini tutup yönlendirebiliriz diyelim ki; ancak daha sonra *anlaşma olanağı*, yazmaya artık kendi başına devam etmesine bağlı olacaktır. Bu noktada şöyle bir şey düşünebiliriz örneğin: Rakamları kendi başına kopya eder etmesine ama sırayla değil de kuralsız olarak, bir onu, bir bunu. Anlaşma da *burada* son bulur. –Ya da sıralamada ‘hata’ yapar. –Bu durumla ilki arasındaki fark, bir sıklık farkıdır tabii ki. –Sistematik bir hata yapar, örneğin sayıları birer atlayarak veya 0, 1, 2, 3, 4, 5... dizisini 1, 0, 3, 2, 5, 4... şeklinde yazar. Burada neredeyse bizi yanlış anlamış olduğunu söyleyesi geliyor insanın.

Ancak dikkatini çekerim: Kuralsız bir hata ile sistematik bir hata arasında keskin bir sınır yoktur. Yani senin “kuralsız” ve “sistematik” deme eğiliminde oldukların arasında.”²²⁴

Wittgenstein burada karşımıza oyuncuları A ve B olan ve kuralı sıralı bir şekilde 0’dan 9’a kadar olan doğal sayıları dizmek olan bir dil oyunu sunmaktadır. Bizi yönlendirmeye çalıştığı asıl konu ise B kişinin oyunun kuralını nasıl öğreneceği ve uygulayacağıdır. A kişisi diziyi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 şeklinde yazar ve B kişisine verir. B kişisi ise birkaç denemeden sonra diziyi nasıl yazması gerektiğini öğrenir ve 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 şeklinde yazar. Peki, burada B kişisi bu yolla dizinin kuralını öğrenmiş olur mu? Örneğe başka bir açıdan yaklaşacak olursak: Diyelim ki elimizde birbirleriyle aynı özelliklere sahip on tane kutu olsun ve B kişisi ilk on doğal sayıyı sıralı bir şekilde bu kutulara yerleştirecek olsun. A kişinin tekrar tekrar göstermesi neticesinde B kişisi artık her seferinde doğru bir

²²⁴ Wittgenstein, *Felsefi Soruşturmalarda*, s. 76.

şekilde sayıları kutulara yerleştiriyor olsun. Burada, B kişisi sayıların sıraları ve yerleri hakkında bilebileceği her şeyi kavramıştır, ya da 5 sayısının konduğu kutunun neden 4 sayısının konduğu kutunun sağında ve 6 sayısının konduğu kutunun da solunda olduğunu açıkça biliyordur diyebilir miyiz? *Felsefi Soruşturmalar*'dan alıntılarla devam edelim:

“Öğrenci şimdi 0’dan 9’a kadar olan diziyi bizi tatmin edecek şekilde yazmış olsun. –Bunu *sıklıkla* başarması durumunda tatminden söz edilebilir ancak, yüz denemeden birini doğru yaparsa değil...”

Ama şimdi diyelim ki öğretmenin birtakım çabalarını ardından diziyi doğru olarak devam ettirdi, yani biz nasıl yapıyorsak öyle. O halde şimdi sisteme hâkim oldu diyebiliriz. –Ama bunu haklı olarak söyleyebilmemiz için diziyi doğru olarak nereye kadar devam ettirmesi gerekir? Burada bir sınır gösteremeyeceğin açıktır.

Şimdi şöyle sorduğumu düşün: “Diziyi yüz basamak devam ettirdiğinde sistemi anlamış mıdır?” Ya da –ilkel dil –oyunumuzda ‘anlamak’dan bahsetmemem gerekiyorsa: Diziyi *oraya* kadar doğru olarak devam ettirdiğinde sistemi kapmış mıdır? –Burada bekli de şöyle diyeceksin: Sistemi kapmak (ya da anlamak) diziyi *şu* ya da *bu* sayıya kadar devam ettirmekten ibaret olamaz; bu, anlamının uygulamasıdır yalnızca. Anlamanın kendisi, doğru kullanımın *içinden* kaynaklandığı bir haldir...”²²⁵

Wittgenstein için öğrencinin tek başına diziyi her seferinde doğru yazıyor oluşu, öğrencinin dizinin kuralını anladığı anlamına gelmez. Dizi yazma işi bir dil oyunudur ve dolayısıyla kuralları vardır. Öğrencinin dizinin kurallarını anlaması demek kendisine verilecek her sonlu aralıkta her defasında doğru bir şekilde sayıları sıralayabiliyor olması demektir. Burada Wittgenstein’in da belirttiği gibi şu ya da bu sayıda doğru sıralamayı verebiliyor olması değil her seferinde doğru sıralayabiliyor olması gerekir. Peki, öğrencinin sıralamayı her seferde doğru yapacağını, eşdeyişle oyunun kuralını anladığını ve uygulamaya başladığını nereden bilebiliriz? Buna nasıl ikna olabiliriz? Burada bizim için belirleyici olacak olan öğrencinin belirlenen kurala verili her sonlu aralıkta uyabiliyor olmasıdır. Yani kurala uyma kavramı bu noktada belirleyici konumundadır.

²²⁵ A.e., s. 77.

“...Öğrencimiz şimdi asıl sayılar dizisine –alışılmış kıstaslarla değerlendirildiğinde– hâkim olmuş durumdadır. Şimdi başka tam sayı dizileri yazmayı öğretir ve öğrencimizi, örneğin “+ n” biçiminde bir emir üzerine 0, n, 2n, 3n, vs. biçiminde diziler yazacak noktaya getiririz: yani “+ 1” emri üzerine asıl sayılar dizisini yazar. 1000’e kadarki sayılar için alıştırmalar, anlayışını sınamak üzere rastgele sınamalar yapmış olalım.

Şimdi öğrencimizden bu diziyi (diyelim ki “+ 2”) 1000’in ötesine devam ettirmesini istiyoruz –o da 1000, 1004, 1008, 1012 yazıyor.

“Şu yaptığına bir bak!” diyoruz. –Bizi anlamıyor, “İki eklemen gerekiyordu; diziye nasıl başladığına bir bak!” diyoruz. –“Evet! Doğru değil mi yani? Ben böyle yapmam gerektiğini sanmıştım”, yanıtını veriyor. –Ya da, tut ki diziye işaret ederek “Aynı şekilde devam etmişim ya!” diyor... Böyle bir durumda şunu diyebiliriz belki, Bu kişi doğası gereği, açıklamalarımızın ardından verdiğimiz bu emri, bizim “1000’e kadar 2, 2000’e kadar 4, 3000’e kadar 6, ... ekle” emrini anladığımız gibi anlıyor.

Bu durum bir insanın, doğası gereği, parmakla gösterme hareketine, bilekten parmak ucuna doğru uzanan çizgi yönünde değil, parmak ucundan bileğe doğru uzanan çizgi yönünde bakma şeklinde bir tepki vermesine benzer.

Yani senin dediğin, “+ n” emrinin doğru olarak yerine getirilebilmesi için her basamakta yeni bir içgörünün –sezginin– gerekli olduğuna çıkıyor. –Doğru olarak yerine getirebilmesi için! Belirli bir noktada hangi adımın doğru olduğuna nasıl karar verilecek peki? –“Doğru adım, –kastedilmiş olduğu şekliyle– emirle uyuşan adımdır. ” –Yani “+ 2” emrini verdiğin zaman 1000’den sonra 1002 yazması gerektiğini kastetmiştin. –1866’dan sonra 1868, 100034’ten sonra 100036, vs., vs., –sonsuz sayıda böyle tümceler yazmasını da kastetmiş miydin o zaman? –Hayır; yazdığı her sayının ardından iki sonraki sayıyı yazması gerektiğini kastetmiştim ve bu diğer tümcelerinin hepsi de, konumlarına göre buradan çıkar...”²²⁶

Wittgenstein “Doğru adım, emirle uyuşan adımdır” tümcesini açıklamanın zor olduğunu düşünür. Basitçe söyleyecek olursak, bir oyun oynadığımızı varsayalım. Oyunda hamle sırası bizde olsun. Bizin yapabileceğimiz hamlelerden doğru olanı elbette oyunun kurallarına uyan hamledir. Hamle sırası bize her geldiğinde yapmamız gereken kuralı tekrar anımsamamız ve kural uyarınca hamlemizi yapmamızdır. Diğer bir deyişle, oyunun her bir adımında kuralın göz önünde bulundurulması ve kurala uyulması gerekmektedir.

²²⁶ A.e., s. 93-94.

Wittgenstein dili bir çeşit labirente benzetir. Bu labirentte bizi hedeflenen yere götürecek birden fazla yol vardır. Ama Wittgenstein’a göre, bu yollardan yalnızca biri hedefe götüren doğru yoldur ve ancak o yoldan gidilirse hedefe doğru yoldan gidilmiş olur. Her ne kadar aynı yere çıkıyor olsa da, diğer yollar hedefe giden doğru yollar değildir. Doğru yolu, doğru yol yapan ise kurala uygunluğudur. Wittgenstein’a göre kurala uymak bir pratiktir. Öte yandan kurala uyduğunu sanmak kurala uymak değildir.²²⁷

Mevzunun matematik felsefesi bağlamında nasıl yankılandığını ele almak adına şöyle bir örnek verelim: Diyelim ki siz bir matematik öğrencisisiniz ve öğretmeniniz sizden bir teoremin kanıtını yapmanızı istedi. Siz teoremin kanıtını dolaysız kanıtlama (*İng.* Direct Proof) yoluyla yaptınız. Ama öğretmeninizin aklında da teoreme ilişkin saçmaya indirgeme (*İng.* Reductio ad Absurdum) yöntemi ile yapılan bir kanıtlama var. Burada öğretmeninizin size “Hayır, senin kanıtlaman doğru değil, teoremin kanıtını saçmaya indirgeme metoduyla vermeliydin!” diyebilir. Wittgenstein’a göre matematik yapmak demek de bir çeşit dil oyunu oynamak olduğundan, bir matematik probleminin de ancak bir tane doğru çözüm yolu vardır. Bu yol da problemi çözerken kurala uymaktan geçer. Peki, böyle bir durumla karşı karşıya kalındığında hangi çözüm yolunun kurala uyduğuna, diğer bir deyişle, hangi yolun doğru yol olduğuna nasıl, neye göre karar vereceğiz? Kanaatimizce bu soru eğer Wittgenstein kurala uyma hakkında bizleri ikna etmek niyetinde ise mutlaka cevaplandırması gereken bir sorudur. Ancak, konuya ilişkin yazılarında Wittgenstein’ın böyle bir niyetinin olmadığını açıkça görmekteyiz. Wittgenstein *Felsefi Soruşturmalar*’da konuya ilişkin şunları söyler:

“Kurala uymak emre uymakla benzer. Bunun için yetiştirilir ve belirli bir şekilde tepki veririz. Ama ya emre ve eğitime biri böyle, bir başkası da şöyle tepki verirse? Hangisi haklıdır? Diyelim ki bir araştırmacısın ve dili sana tamamen yabancı, bilinmeyen bir ülkeye geliyorsun. Burada yaşayan insanların emirler verdiklerini, yerine getirdiklerini, bunlara karşı çıktıklarını, vs. hangi

²²⁷ A.e., s. 100.

koşullarda söylersin? Ortak insani eylem şekli, kendisi aracılığıyla yabancı bir dili yorumladığımız referans sistemidir.”²²⁸

Görüldüğü gibi Wittgenstein’in ikinci dönem felsefesinde sıklıkla karşımıza çıkan uzlaşımıcılığı kurala uyma mevzuunda da kendisini göstermiştir. Dilin kuralları insandan bağımsız bir şekilde ortaya çıkmaz. Kuralları insanlar koyar. Kural koymanın en önemli bileşeni uzlaşımıdır. Wittgenstein’a göre neyin doğru neyin yanlış olduğu hususunda, yani neyin kurala uyduğu ya da neyin uymadığı hususunda belirleyici olan insanlar arasındaki uzlaşımıdır. Matematik de bir dil olduğundan, insandan bağımsız matematik yapma kuralları yoktur. Matematik kurallarını da insanlar koyar. Burada aslolan, kural konulduktan sonra matematik yaparken kurala uymaktır. Kurala uyulmaksızın yapılan matematik, Wittgenstein’a göre matematik değildir.

Ezcümle, Wittgenstein için matematik bir dil oyunudur. Diğer bütün dil oyunları gibi matematik oyununun da en önemli bileşeni kurallardır. Bu kurallar daha önce de belirtildiği üzere insan merkezli ve antropolojik fenomenlerdir. Diğer bir deyişle, oyunun kurallarının kaynağında insanların uzlaşımı yatmaktadır. Bu sebeple matematiksel kurallarının insan zihnini aşan bir evrenselliği yoktur.

2.8. Wittgenstein’in Matematikte Aktüel Sonsuzu Reddi ve Sonluculuğu

Wittgenstein’in ikinci dönem matematik felsefesinin temel yönelimlerinden biri de **sonluculuktur**. (*İng.* Finitism). Wittgenstein yorumcuları özellikle *Remarks on Foundations of Mathematics* üzerinden yaptıkları değerlendirmelerde Wittgenstein’ı, matematik felsefesi bağlamında, **sıkı sonlucu** (*İng.* Strict Finitist) olarak nitelendirir. Bu bölümde Wittgenstein’in doğrulamacılığının detaylarını irdeleyeceğiz.

Hao Wang *From Mathematics to Philosophy* adlı eserinde sonluculuğu ve sıkı sonluculuğu şöyle tanımlar:

²²⁸ A.e., s. 101.

“Sonluculuk anlayışına göre matematik, doğal sayıları, yinelemeli fonksiyonları (*İng.* Recursive Functions) ve niceleyicisiz kanıtlama metotlarını içerir. Bununla birlikte sonlucu matematik anlayışı, görüselci anlayışta olduğu gibi, sonsuz sayı kavramını potansiyel olarak kabul eder ama daha yüksek mertebede sonsuz sayıların varlığını reddeder. Sıkı sonluculukta ise sonsuz sayı kavramının varlığı bütünüyle reddedildiği gibi, sonlu sayıların dahi bir kısmı görüsel olarak açık olmadıkları gerekçesiyle reddedilir.”²²⁹

Kreisel da Wittgenstein’in *Remarks on Foundations of Mathematics* üzerine yaptığı değerlendirmesinde, Wang ile benzer bir görüş ortaya koyar. Kreisel’a göre, Wittgenstein’in *Remarks on Foundations of Mathematics*’teki pozisyonu sıkı sonluculuğa yakın durmaktadır.²³⁰

Wittgenstein ikinci döneminde sonsuz sayı üzerine konuşmanın meşru zemininin olmadığını düşünür. Çünkü Wittgenstein’a göre sonsuz sayı kavramı, sayı kavramının sahip olması gereken açık-seçikliğe sahip değildir.²³¹ Wittgenstein, “İkinci dönemde matematiksel değer kümesinin (*İng.* Mathematical Domain) sonsuz elemanlı olabileceği görüşünü, başka bir ifadeyle matematikte aktüel sonsuzun varlığını reddeder.”²³²

Wittgenstein artık Tractatusçu matematik anlayışının yanlış olduğunu düşünmektedir. Dolayısıyla *Tractatus*’ta karşımıza çıkan a priori verili matematik nesneler, matematiksel ilişkiler artık terk edilmelidir. Buna göre matematiksel nesneler insan icadıdır ve insanın icat etmesinden bağımsız herhangi bir varlıkları ve nesnellikleri yoktur. Wittgenstein işlem ve kaplam terimlerini mantıkta olduğundan başka bir anlamda kullanır.²³³ Ona göre kaplamalar semboller, sonlu kümeler, sonlu

²²⁹ Hao Wang, **From Mathematics to Philosophy**, Humanities Press, New York, 1974, s. 53.

²³⁰ G. Kreisel, “Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics”, **British Journal for the Philosophy of Science**, Vol. 9, 1958, s. 147.

²³¹ John A. Humphrey, “Ludwig Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics: The Search for a Clear View”, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), Washington University, Washington, 1988, s. 291.

²³² Arslan, “Wittgenstein’da Matematik Felsefesi”, s. 50.

²³³ Geleneksel kullanımda işlem ve kaplam şöyle tanımlanır; **İşlem**: Genel olarak bir sözcüğün çağrışımları. Kaplama giren nesnelere uygulanan nitelik ya da kavram. John Stuart Mill kaplam-işlem karşılaştırmasını ortaya atmış ve bir cins adının işlemi, genel olarak bu adla bir arada anılan ayırıcı niteliklerin kümesi, bu cins adının hangi nesnelere uygulanabileceğini belirleyen ayırıcı nitelik ya da nitelikler kümesi olarak tanımlamıştı. Çağdaş bir terim olan işlem, geleneksel mantık terimi

seriler, önermeler ve aksiyomlardan oluşur. İşlemler ise çıkarım kuralları, dönüşüm kuralları, kural olarak irrasyonel sayılar gibi unsurlardan oluşur.²³⁴

Wittgenstein'a göre sonsuz, bir nicelik değildir.²³⁵ Sözelimi sonsuz ve beş aynı sentaksa sahip değildir. Sonlu veya sonsuz kavramları sayılarda olduğu gibi sınıf veya küme sözcüklerine uygulanan sıfatlar değildir.²³⁶ Sonsuz bir sınıf ya bir çeşit yinelemeli kural ya da bir çeşit tümevarımdır.²³⁷ Matematiksel kaplam zorunlu olarak sembollerin sonlu bir serisi olduğundan, sonsuz matematiksel kaplam deyimi çelişiktir. Bu yaklaşım Wittgenstein'ın sonluculuğunun da merkezinde yer alır. Sözelimi "Sonsuz sayıda çift sayı vardır" dediğimizde "Bu sınıfta 18 kişi vardır" der gibi "Çift sayıların sayısı var olan bir sonsuz sayıdır" gibi bir şey demiyoruzdur. Doğal sayıların sonsuz serileri sonlu sayı serilerinin sonsuz olasılıklarından başka bir şey değildir.²³⁸ Bu sebeple ona göre sonsuz büyüklüklerden bahsetmek anlamsızdır.²³⁹ Şimdi özellikle *Remarks on Foundations of Mathematics* ve *Lectures on Foundations of Mathematics*'teki ilgili bölümleri alıntılararak konuyu biraz daha açmaya çalışacağız.

"Alef sıfır (*İng.* Aleph Nought) sayısını öğrenmiş bir çocuk aslında o kadar önemli bir şeyi öğrenmiş sayılmaz. Çünkü bu, matematikte sonsuzluk diye bir şeyin olduğunu göstermez. Matematikte sonsuz kavramını kullanmanın gereksiz ve yanıltıcı olduğunu söylesem, bu söylemim matematiğin özüne herhangi bir zarar vermez."²⁴⁰

"Alef sıfır ile ilgili bir matematiksel önermeniz olduğunu ve bu yolla sayılar hakkında bir bildirimde bulunduğunuzu düşünüyor iseniz, size aslında hiçbir

'kapsam'dan (comprehension) türemiştir. Arnauld ve Nicole, Port-Royal Mantığı'nda bir idea ya da terimin kapsamını, o idea ya da terimin gerektirdiği yüklemeler ya da özellikler kümesi olarak tanımlamışlardır. **Kaplam:** Bir düzgün deyim kaplamına giren herhangi bir nesneye uygulanmasının gerekli-yeterli koşulu olan nitelik ya da kavram. *Bkz.* Grünberg, Onart, **Mantık Terimleri Sözlüğü**, s. 59-60.

²³⁴ Edward N. Zalta (ed.), "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics" (Çevrimiçi) <https://plato.stanford.edu/entries/wittgenstein-mathematics/>, 14 Kasım 2017.

²³⁵ Waismann, **Wittgenstein and the Vienna Circle**, s. 228.

²³⁶ **A.e.**, s. 102.

²³⁷ Wittgenstein, **Philosophical Grammar**, s. 461.

²³⁸ Edward N. Zalta (ed.), "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics" (Çevrimiçi) <https://plato.stanford.edu/entries/wittgenstein-mathematics/>, 14 Kasım 2017.

²³⁹ Wittgenstein, **Philosophical Remarks**, s. 144.

²⁴⁰ Wittgenstein, **Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics**, s. 142.

şey hakkında bir bildirimde bulunmadığınızı söylerim. Yaptığınız tek şey alef sıfırın kullanım kurallarını vermektir.”²⁴¹

“‘Sonsuz olan hiçbir şey yoktur’ demek anlamsızdır ve gülünçtür. Ama ‘günlük hayatta matematik yaparken bu denli büyük sayılara (sonsuzla yakınsayan sayılara) ihtiyaç duymayız’ denilirse işte bu anlamlıdır.”²⁴²

“Matematik yaparken ‘sonsuz’ sözcüğünden kaçınılmalıdır.”²⁴³

“Günlük hayatımızda sürekli kullandığımız ‘sonsuz’ kavramının anlamı nedir, ve matematiksel kalkül ile ilişkisi nedir?”²⁴⁴

“Matematiksel önermelerdeki sonsuz ondalıklar kavramı, serilerin sınırsızca genişletilme tekniklerinden başka bir şey değildir.”²⁴⁵

Bu alıntıları açıklamaya başlamadan evvel yukarıda sözü edilen alef sıfır kavramını açmakta fayda var: A kümesi doğal sayılar kümesini ve B kümesi de tek sayılar kümesini imliyor olsun. Başka bir şekilde ifade edecek olursak,

$$A = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

Bu iki kümenin de sonsuz sayıda eleman içerdiği düşünülmektedir. Cantor’a göre sonsuz şöyle tanımlanabilir: Eğer bir kümenin elemanları kendisine eşit olmayan bir alt kümesinin elemanları ile birebir eşlenebiliyorsa o küme sonsuzdur ya da sonsuz sayıda eleman içerir. Peki, “Bu iki kümeden hangisinin kardinalitesi daha büyüktür?” şeklinde bir soru ile karşılaşsak cevabımız ne olurdu? Cantor, bu soruyu merkeze alarak yaptığı çalışmaları neticesinde farklı türden sonsuzluklar olduğunu göstermiştir. Her ne kadar yukarıda ki A ve B kümeleri için B, A’nın bir alt kümesi olsa da, Cantor bu iki kümenin de kardinalitelerinin alef sıfır olduğunu kanıtlamıştır. Cantor’a göre alef sıfır sayılabilir sonsuzluk, alef bir ve alef iki ise sayılamaz sonsuzluktur.

²⁴¹ A.e., s. 215.

²⁴² A.e., s. 255.

²⁴³ Wittgenstein, **Remarks on the Foundations of Mathematics**, s. 141.

²⁴⁴ A.e., s. 141.

²⁴⁵ A.e., s. 278.

Wittgenstein'in ikinci dönemiyle birlikte ideal bir dil anlayışını terk edip vurguyu dilin bağlamsallığına –kullanımına– yapması, eşdeyişle ikinci döneminde benimsediği pragmatik dil anlayışı, birçok bakımdan matematik felsefesinde de kendisini gösterir. Wittgenstein'a göre hayatımız içerisinde karşımıza çıkacak olan hiçbir problemin çözümünde alef sıfır ya da alef bir sayılarına ihtiyaç duymayız. Matematiksel yapılarımızda alef sıfırın olması ile olmaması arasında anlamlı en ufak bir fark yoktur. Alef sıfır ve beraberinde gelen sonsuzlar matematiğinin Wittgenstein'ın ikinci dönem matematik felsefesinde bir karşılığı yoktur.

Wittgenstein'a göre matematikte karşımıza çıkan sonsuz kavramı anlaşılması mümkün olmayan bir şey değildir. Aksine sonsuzluğa ve sonsuz şeylere ilişkin zihinsel resimler çizmek insan için gayet sıradan, doğal şeylerdir. Ama bu zihinsel resimlerin hayatta bir karşılığı, bir işlevi olması gerekir ve bu yoktur, bu sebeple de matematik yaparken konu edilmelerine de gerek yoktur. Wittgenstein'a göre sonlu-ötesi sayılara ilişkin çeşitli kurallar verebiliriz, bu kurallar uyarınca çeşitli çıkarımlar yapabiliriz, bu çıkarımlarımız tutarlı da olabilir ama insan yaşantısında bunların bir karşılığı olmayacağından bunlara gerek yoktur. Ona göre kalkülüste karşımıza çıkan sonsuzluk bir kuralın ya da tekniğin kullanımına ilişkin özel bir durumdur. Sonsuz sayılar, devasa büyüklüğü ya da bir sonu imlemez. Wittgenstein'ın ikinci dönem matematik anlayışı hesaplama tekniklerine, kanıtlama yöntemlerine ve bunların nasıl inşa edilip nasıl kullanıldığına dayanır. Wittgenstein'ın matematik felsefesinde sonlucu bir tutum sergilemesi kaçınılmaz birtakım sonuçlar doğurmaktadır. Çalışmanın son bölümünde bu sonuçlar üzerinden bir Wittgenstein eleştirisi yapılacağından şimdilik sadece bu sonuçları listelemek ve bir iki cümleyle açıklamakla yetineceğiz.²⁴⁶

- Sonsuz matematiksel kaplamaların reddi, Wittgenstein matematiksel kaplamanın sonsuz olması fikrinin çelişki doğuracağını iddia eder.
- Matematikte sınırsız nicelleştirmenin reddi, matematiksel sonsuz olsa olsa bir yineleme kuralıdır.

²⁴⁶ Bkz. Edward N. Zalta (ed.), "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics" (Çevrimiçi) <https://plato.stanford.edu/entries/wittgenstein-mathematics/>, 14 Kasım 2017.

- Algoritmik karar verilebilirlik ve karar verilemezlik, matematiksel kaplam zorunlu olarak sonlu olmak durumunda ise, matematiksel kaplam içerisinde bütün önermelerin doğruluğuna ya da yanlışlığına karar verebilmemize olanak tanıyan bir algoritma olmak zorundadır.
- Temellendirmesiz bir reel sayı anlayışı, sonsuz bir küme sadece bir yineleme kuralı ise ve bu kural bütün reel sayıları kapsayamayacaksa, bütün reel sayıların kümesi ya da matematiksel süreklilik diye bir şeyin varlığından söz edemeyiz.
- Farklı sonsuz kardinalitelerin reddi.

Yukarıda da belirtildiği üzere, Wittgenstein'in sonluculuğunun doğal sonuçları olan bu iddiaları çalışmanın son bölümünde tekrar ele alacak ve açımlayacağız.

2.9. Bir Hesaplama Süreci Olarak Matematik ve Hesaplamanın Grameri

Çalışmanın bundan önceki bölümünde Wittgenstein'in ikinci dönem matematik felsefesinde aktüel sonsuzu reddetmesi ve sonluculuğu konularını ele almıştık. Bu bölümde ise, yine bu dönemde, Wittgenstein'in, Matematik yapmak ne demektir?, Matematiksel sembollerin anlamı nasıl belirlenir?, Hesaplamanın özünde linguistik bir pratik olmasını ne demektir?, Hesaplamanın kuralları nasıl belirlenir ve bu kurallar gramerle ne gibi bir ilişki içerisindedir? gibi sorulara verdiği cevaplar O'nun gramerci yaklaşımı çerçevesinde ele alınacaktır. Bununla birlikte, bu bölümde Wittgenstein'in matematiksel problemler ve matematiksel soruşturmanın problemleri arasında yapmış olduğu ayrımı değinecek ve bu ayrımın bir sonucu olarak Riemann Hipotezi'nin ve Fermat'ın Son Teoremi'nin Wittgenstein için neden matematiksel problemler olmadığına değineceğiz.

Wittgenstein matematik yapmanın özü itibarıyla bir çeşit hesaplama yöntemi geliştirmek olduğunu düşünür. Bu yöntem aksiyomları, dönüşüm kurallarını ve doğruluğun kendisine göre belirlendiği karar verme algoritmalarını içerir. Wittgenstein'a göre matematiksel dizgenin içerisinde bulunan işaret dizileri/semboller hiçbir şeye gönderimde bulunmaz. Diğer bir deyişle, bu işaret dizilerinin/sembollerin

hiçbirinin anlamı yoktur. Wittgenstein matematiğin sayılar hakkında konuşmadığını, sadece onları kullandığını düşünür. Bu noktada, Wittgenstein'in ikinci döneminde de matematiksel semantiği yadsıyan bir biçimselciliğe yakın olduğunun atını çizmek isteriz.

Wittgenstein'a göre matematiksel önermeler hesaplamalar ile bu hesaplamaların sonuçlarını bir araya getirir, bu ikisi arasında bir ilişki kurar. Bununla birlikte Wittgenstein hesaplamanın kurallara dayanan linguistik bir pratik olduğunu dolayısıyla matematiksel önermelerin de kalkülüsün gramer kuralları olduğunu düşünür. Monk bu durumu şöyle ifade eder:

“Wittgenstein gramatik önermeleri pek çok biçimde tanımlıyordu –‘doğruluğu apaçık ortada olan önerme’, ‘kavram –oluşturan önerme’ vs –ama en önemlerinden biri onları kurallar olarak tanımlamaktı. Gramatik/maddi ayrımın akışkanlığını vurgularken, kavram –oluşumuna –ve böylece neyi söylemenin anlamlı ve neyi söylemenin anlamsız olduğuna dair kurallar saptanması – tartışılmaz mantıksal form yasaları (*Tractatus*'ta da düşünülmüş olduğu üzere) tarafından saptanmış bir şey olmadığına dikkat çekiyordu. Bu daima bir gelenekle, bir uygulamayla bağlantılı bir şeydi. Bu nedenle farklı gelenekler ya da uygulamalar bizim kullanışlı bulduğumuzdan farklı kavramlar olduğunu varsayar. Bu da benimsediklerimizin yerine farklı kuralların (neyin anlamlı neyin anlamsız olduğuna karar vermek için) kabulünü gerektirecektir. Gramatik önermeler meselesi Wittgenstein'in matematik felsefesinde merkezi bir rol oynar; çünkü matematiğin acımasızlığının belli matematiksel doğruları bilmeye değil, daha çok matematiksel önermelerin gramatik olduğu gerçeğine dayandığını göstermek istiyordu. ‘ $2 + 2 = 4$ ’ün kesinliği, onu bir tanım olarak değil bir kural olarak kullandığımız gerçeğine dayanır.”²⁴⁷

Wittgenstein'a göre bir hesaplamanın nihai sonucu ancak ve ancak hesaplama süreci bütünüyle doğru bir şekilde yapılsa doğru olur. Bütün kalkülüsler kendi grameri olan linguistik sistemlerdir. Bu sistem içerisinde bir önermenin doğru ya da yanlış olduğuna, sistemin gramer kuralları dolayısıyla karar verilir. Diğer bir deyişle, önermenin doğruluğunun ya da yanlışlığının ölçütü sistemin grameridir.

Wittgenstein'in matematiği bir çeşit gramer olarak gördüğünü özellikle *Philosophical Grammar*'in ikinci bölüm beşinci kısmı ve *Philosophical Remarks*'in

²⁴⁷ Monk, **Wittgenstein**, s. 662-663.

ikinci bölüm on üçüncü kısmında ortaya koymuş olduğu görüşlerinden çıkarıyoruz. Wittgenstein *Philosophical Grammar*'ın ikinci bölüm beşinci kısmının başında, hesaplama (*Alm.* Aufgaben der Rechnung) (Wittgenstein için hesaplama aynı zamanda matematiksel problem (*Alm.* Mathematische Problemme) ya da matematikteki problemler (*Alm.* Probleme in der Mathematik) olarak da görülebilir.) ile Fermat'ın Son Teoremi²⁴⁸ ya da Riemann Hipotezi²⁴⁹ gibi matematiksel soruşturmanın problemleri (*Alm.* Problem der Mathematischen Forschung) arasında bir ayrım yapar.

“Fermat probleminin çözümü için ortaya ödülleri konmuştur. Böyle bir problem aslında hiçbir zaman var olmamıştır desem, muhtemelen birileri bana itiraz edecektir. Ve muhtemelen şöyle diyeceklerdir; eğer başına bu kadar ödül kondu ise böyle bir problem vardır. O zaman bende cevaben şöyle derim; muhakkak, ama bu problem üzerine konuşan insanlar ya ‘matematiksel problem’ sözcüğünün ya da ‘çözüm’ sözcüğünün gramerini anlamamaktadır. Ödül gerçekten bilimsel bir problemin çözümü için, çözümün kendisinin dışında bir şey için (Riemann Hipotezi’nde de olduğu gibi) konulmuş olabilir.”²⁵⁰

²⁴⁸ Pierre de Fermat, 17'nci yüzyılda yaşamış ve sayı tarihinde birkaç çok önemli buluşa imza atmış bir Fransız matematikçidir. Fermat, üzerinde çalıştığı kitap olan, Diaphontus'un Aritmetika'sının kenarına pek çok not almış ve teorem ispatlamıştı. Hatta öyle ki, ondan sonra kitap, bu yeni bilgiler eklenerek basılmıştı. “Cubum autem in duos cubos...” Bu küçük not, dünyanın en zor matematik problemidir. Fermat'ın iddiası kısaca şöyle formüle edilebilir. $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \in \mathbb{Z}$ ve $n > 2$ için $x^n + y^n = z^n$ denklemini sağlayan hiçbir x, y, z üçlüsü yoktur. Bu hipotezin altına bir de not ilaştırmıştı: “Demonstrationem mirabilem, Hanc marginis exiguitas non caperet.” “Çok güzel bir ispat buldum ama buraya yazmak için yeterli yer yok!” Bkz. Ali S. Sertöz, “Andrew Wiles Bir Denklem Peşinde”, (Çevrimiçi) <http://www.matematiksel.org/fermata-meydan-okuyan-bir-profesor-andrew-wiles/>. 08 Aralık 2017.

²⁴⁹ Riemann hipotezi (Riemann zeta hipotezi olarak da bilinmektedir), matematik alanında ilk kez 1859 yılında Bernhard Riemann tarafından ifade edilmiş fakat günümüze kadar çözülememiş problemlerden biridir. Bazı pozitif tamsayıların kendilerinden küçük ve 1'den büyük tamsayıların çarpımı (örn. 2, 3, 5, 7, ...) cinsinden yazılamamak gibi bir özelliği vardır. Bu tür sayılara Asal sayılar denir. Asal sayılar, hem matematik hem de uygulama alanlarında çok önemli rol oynar. Asal sayıların tüm doğal sayılar içinde dağılımı bariz bir örüntüyü takip etmemektedir ancak Alman matematikçi Riemann, asal sayıların sıklığının; $s \neq 1$ olmak koşuluyla tüm s karmaşık sayıları için; $\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \dots$ biçiminde belirtilen ve Riemann Zeta Fonksiyonu olarak bilinen fonksiyonun davranışına çok bağlı olduğunu gözlemledi. Riemann hipotezinin iddiasına göre $\zeta(s) = 0$ denkleminin tüm çözümleri karmaşık düzlemde bir doğru üzerinde yer almaktadır. Daha kesin bir söyleyişle, bu denklemin tüm karmaşık sayı çözümlerinin gerçel kısımlarının $1/2$ olduğu tahmin edilmektedir. Bu iddia ilk 1.500.000.000 çözüm için sınanmıştır. Bu iddianın her çözüm için doğru olduğunun ispatlanabilmesi halinde asal sayıların dağılımı ile ilgili çok önemli bilgiler edinmek mümkün olacaktır. Bkz. Kemal Duran, “Asal Sayıların Gizemi”, (Çevrimiçi) http://www.buders.com/DOKUMAN/bukaynak/genel_kultur/asal_sayilarin_gizemi.pdf. 08 Aralık 2017.

²⁵⁰ Wittgenstein, *Philosophical Grammar*, s. 362.

Alıntıdan da anlaşılacağı üzere Wittgenstein için ne Fermat'ın son teoremi, ne de Riemann hipotezi matematiksel problemler değildir. Wittgenstein'a göre matematiksel bir problem her zaman bir hesap önermesinin doğru olup olmadığını sorgular. Herhangi bir probleme matematik problemi diyebilmemiz için p bir hesap önermesi olacak şekilde, problemi “p doğru mudur?” şeklinde formüle edebiliyor olmamız gerekmektedir. Matematiksel bir önermenin doğruluğu diğer bütün önerme türlerinin doğruluklarından farklı bir anlam taşımaktadır.²⁵¹ p bir hesap önermesi olsun, “p doğrudur demek”, “p ait olduğu kalkülüse göre doğrudur” demektir. Bir hesap önermesi, hesaplamanın kendisi ile sonucunu ilişkilendirdiğinden, ancak hesaplamanın sonucu doğru ise doğru olur.

Matematiksel problemler ve matematiksel soruşturmanın problemleri arasındaki ayrımı sezmek kimi zaman oldukça güçtür. Wittgenstein *Philosophical Grammar*'da $x^2 + ax + b = 0$ denkleminin reel sayılarda çözümünün olup olmadığını sorgular.²⁵² Herhangi bir reel sayının bu denklemi sağlayıp sağlamamasından bağımsız olarak, bu denklem, salt hesaplamanın bir problemi olmaktan çok, belirli bir takım özellikleri haiz soyut bir nesnenin varlığına ilişkin bir problem olarak karşımızda durmaktadır. Buna rağmen böyle bir sorunun çözümünü vermek mümkündür. Dolayısıyla bu problem matematiksel bir problemdir. Öte yandan matematiksel soruşturmanın problemleri, matematiksel hesaplamanın problemleri değildir. Matematiksel soruşturmanın problemlerini de “p doğru mudur?” şeklinde formülize etmek mümkün olsa da buradaki p bir hesap önermesi olmadığından bu problem matematik problemi değildir, bu probleme **sahici hipotez** (İng. Genuine Hypothesis) diyebiliriz.²⁵³ Matematiksel soruşturmanın problemleri hesaplanamaz

²⁵¹ Axel Arturo B. Aspeita, “Mathematics as Grammar: Grammar in Wittgenstein's Philosophy of Mathematics During the Middle Period”, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), Indiana University, Bloomington, 2000, s. 52.

²⁵² Wittgenstein, **Philosophical Grammar**, s. 23.

²⁵³ Aspeita, “Mathematics as Grammar: Grammar in Wittgenstein's Philosophy of Mathematics During the Middle Period”, s. 53.

olanın hesaplanması yönünde bir çağrıdır. Dolayısıyla matematiksel soruşturmanın problemlerini sözde-matematiksel problemler olarak görebiliriz.²⁵⁴

Wittgenstein *Philosophical Grammar*'da kalkülüsün kendisinin matematiksel bir kavram olmadığını söyler.²⁵⁵ Bu sebeple hesaplamalar kendi kalkülleri hakkında bir bildirimde bulunamazlar. Wittgenstein'a göre metakalkül diye bir şey yoktur. Örneğin verili bir kalkülüsün deneyimde bir uygulamasının olup olmadığı sorusu her ne kadar matematiksel bir soruymuş gibi görünse de, değildir. Bu soru empirik bir sorudur, kalkülüsün kendisi böyle bir soruya cevap veremez. Bu soruya verilebilecek tek cevap, "Bunu zaman gösterecek" tir.²⁵⁶

Wittgenstein matematiksel soruşturmanın problemlerini, matematiksel bir dil ile yazılan, matematiksel gramere uyan ama henüz matematiksel olmamış problemler olarak konumlandırır. Bu problemlerin matematiksel problemler olmamaları, onlarla uyumlu ve doğru sonuca götürecek kalkülüslerinin olmamasından kaynaklanır. Yukarıda da anılan Fermat'ın son teoremi Wittgenstein'a göre matematiğin değil, matematiksel soruşturmanın bir problemidir. Wittgenstein, Fermat'ın son teoreminin matematiksel bir dille yazılmış ve matematiksel gramere uygun bir teorem olduğunu, ancak elimizde bu teoremi doğrulayacak bir kalkülüsün olmadığını, dolayısıyla bu teoremin henüz matematiksel bir teorem olmadığını düşünür. Her ne kadar teoremden geçen semboller matematiksel kalkülüsün sembolleri olsa da, bunların birleşimi yani $x^n + y^n = z^n$ ifadesi matematiksel bir kalküle ait değildir. Bu sebeple "Fermat'ın son teoremi sayal sayılarda bir çözümü bulunana kadar anlamsızdır."²⁵⁷ Bu tarz bir problemin çözümü, anılan sembollerin anlamlı olacağı yeni bir kalkülüs inşa etmeyi gerektirir. Hesaplama, ilk problemdeki (Fermat'ın son teoremi) soruyu yeni bir kalkülüsün inşası neticesinde çözdüğünde problem anlamlı ve gerçek bir matematiksel problem olur.²⁵⁸

²⁵⁴ A.e., s. 53.

²⁵⁵ Ludwig Wittgenstein, *Philosophical Grammar*, Ed. Rush Rhees, Blackwell, Oxford, 1974, s. 296.

²⁵⁶ A.e., s. 306.

²⁵⁷ Wittgenstein, *Philosophical Remarks*, s. 175.

²⁵⁸ Aspeita, "Mathematics as Grammar: Grammar in Wittgenstein's Philosophy of Mathematics During the Middle Period", s. 54.

Matematiksel problemlerin çözümlerinde karşımıza çıkan matematiksel süreçler **kurala dayalı** (İng. Rule-Governed) süreçlerdir. Kurallar matematiksel problemin çözümünün doğruluğu ya da yanlışlığının ölçütlerini belirlerler. Sözelimi “ $7 \times 7 = 49$ önermesi doğru mudur?” sorusu, sonucu verecek bir hesap yöntemi mevcutsa matematiksel bir sorudur.

Wittgenstein’a göre hesaplama bir olay değildir. Olsa olsa kurala dayalı bir pratiktir. Wittgenstein’ın *Remarks on Foundations of Mathematics*’in başlarında ortaya koyduğu izleme ve sonuç çıkarma ayrımı hesaplamanın doğasının zemininde yer alır. Wittgenstein’a göre sonuç çıkarma insanların yaptığı bir aktivitedir. İnsanlar bazı önermelerden bazılarını çıkarırlar. Bu önermelerinin birbirlerini izleyip izlemediği, bu çıkarımların geçerli çıkarımlar olup olmadığı başka bir tartışma konusudur. “A önermesi B önermesini izler” demek “biz genellikle B önermesinden A önermesini çıkarırız” demek değildir. Bu çıkarım, çıkarımın mantıksal kurallarına dayanır, insanların nasıl eylediklerine değil. Mantık ve matematikte bir önermenin bir diğerini izlemesi önermeler arasındaki gramatik ilişkiden kaynaklanır. “Çıkarım kâğıda yazılı olabilir, sözel olarak söylenebilir ya da sadece düşünülebilir. Hepsinde de şöyle bir sonuçla karşı karşıyayızdır: Bir önerme bir diğerinden çıkarılmıştır.”²⁵⁹ Öte yandan, “p önermesi q önermesini izler” derken ortaya bir iddia atmış olmayız. Matematiksel önermelerin birbirlerini izlemeleri bir önermeden, ya da önermelerden, diğerine geçiş demektir. Ama bu geçiş bir süreç ya da olay değildir. Çünkü önermeler arasındaki bu geçiş zamanda olmaz. Diğer bir deyişle, bu geçiş zamansal bir mefhumla bağlı değildir. ““Bu önerme şu önermeyi izler” dediğimizde anılan izleme zamansal bir mefhumla işaret etmez. Bu da gösterir ki, önermeler bir deneyin sonucunu ifade etmez.”²⁶⁰ Günlük hayatımızda da sürekli çıkarımlar yaparız. Mantıksal çıkarımlar günlük hayattaki çıkarımlardan farklı olarak hesaplama dayanırlar.

Toparlayacak olursak, bölümün girişinde de belirttiğimiz gibi, Wittgenstein’a göre matematik sadece bir hesap yapma yöntemidir ve herhangi bir temellendirilme ihtiyacı gözetilmeksizin yapılabilir. Bu sebeple Wittgenstein’a göre matematiğe

²⁵⁹ Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, s. 5.

²⁶⁰ A.e., s. 30.

sağlam temeller bulmaya çalışsan mantıksalcılık, biçimselcilik ve görüselcilik anlayışları geçersizdir. O'na göre sadece bir hesap yöntemi olan matematik, her kadar doğa bilimlerinde işin içerisine fazlaca dahil ediliyor olsa da, bir bilim değildir. *Philosophical Grammar*'da bu konuya ilişkin şu benzetmeyi yapmıştır: “...mobilyaları temizlemek için kullandığınız sürece süpürgeci bir odanın mobilyalarından biri olduğu yanılgısına düşmemelisiniz.”²⁶¹

2.10. Wittgenstein'in İkinci Dönem Matematik Felsefesinde Sayı Anlayışı

Bundan önceki bölümde, matematiğin bir hesaplama süreci olduğunu ve bu sürecin doğru kavranılmasının da onun gramerini anlamayı gerektirdiğini belirtmiştik. Wittgenstein'in ikinci döneminde ele aldığı neredeyse her problemin çözümünde gramer kavramını işin içine dâhil ettiğini söyleyebiliriz. Wittgenstein ikinci döneminde, artık aritmetiğe mantıksal işlem kavramı aracılığıyla bir temel bulma düşüncesini bütünüyle terk etmiştir. Bununla birlikte “Sayı nedir?” minvalindeki soruların sayıyı tanımlamakta bizleri yanlış yollara saptırdığını, bu sebeple sorulması gereken asıl sorunun “Sayı tümcesinin grameri nedir?” şeklinde olması gerektiğini düşünür. Çalışmanın bu bölümünde bu hususlara değindikten sonra sayı tümcesinin gramerini, kavram, yüklem, sahici kavram gibi sözcüklerle ilişkisi içerisinde açıklamaya çalışacağız. Ardından, sayının kavramın dışsal, kaplamanın ise içsel bir özelliği olmasından Wittgenstein'in ne anladığını irdedeceğiz. Son olarak da, Wittgenstein açısından matematiğin tanımlanan değil bizzat yapılan bir olgu olmasının ne anlama geldiği üzerinde duracağız.

Wittgenstein, Cambridge'e dönmesiyle birlikte yeniden felsefe çalışmaya başladığında, *Tractatus*'ta da kısmen reddedilen matematiğin mantığa indirgenmesi projesini bütünüyle terk etmesi gerektiğinin farkına varır. Aritmetiğe, soyut bir kavram olan mantıksal işlem üzerinden bir temel bulma düşüncesi artık Wittgenstein için gereksiz bir çaba haline gelmiştir. Bu hususu *Philosophical Remarks*'ta şöyle dile getirmiştir: “İşlemin genel formu üzerinden yapmaya çalıştığım ve aslında biraz

²⁶¹ Wittgenstein, *Philosophical Grammar*, s. 375.

da belirsiz olan sayı kavramına giriş denemem ihtiyacımız olan şey değildir.”²⁶² Her ne kadar *Tractatus*’ta yapılmaya çalışılan bu indirgeme tam olarak bir doğal sayı tanımı verme amacı gütmese de, Wittgenstein bu ve benzer indirgemeci yaklaşımların böylesi tanımlar vermek için izlenecek yanlış bir yol olduğuna kanaat getirir. Wittgenstein artık sayıların, temsil ettikleri şeyler aracılığı ile kavranılabileceğini düşünür. Ona göre felsefe sahnesinde birçok sayı tanımlaması ve bu yönde ortaya konulan emek vardır, bunların hepsi de “Sayı nedir?” sorusuna cevap aramaktadır. Ama yüzlerce yıldır ortaya tam anlamıyla doyurucu bir cevap konulabilmiş değildir. Wittgenstein burada asıl problemin “Sayı nedir?” sorusunun kendisinde yattığını düşünür. Bu soru bu haliyle bizi işe yarayacak bir cevaba yönlendirmemektedir. Wittgenstein’a göre asıl önemli olan sayının ne olduğunun değil, sayının gramerinin belirlenmesidir.²⁶³ Çünkü ancak bu gramer uyarınca işimize yarayacak sayı tümceleri inşa edebiliriz. Ayrıca bu tümcelerin doğru olup olmadığına da bu gramer uyarınca karar veririz. Wittgenstein benzer bir bakış açısını *Philosophical Grammar*’da da sergilemektedir. Burada, “Sayı nedir?” sorusunu, “Sayı neye işaret eder?” sorusu ile cevaplandırır ve sayı kavramının anlamının analiz edilmesi ile sayı sözcüğünün gramatik yapısının açılanmasının aynı olduğunu belirtir.²⁶⁴ Soykan bu hususta şunları söyler:

“İnsanlar tarihi yapar, sonra gelir tarihçiler, tarihi yazar, onların yaptıklarını. Matematikte bu ikinci kısım yoktur. O yalnızca yapılır. Aslında bu iki anlam birbirine bağlı: Matematik, yalnızca yapmaktan ibaret olduğu için, matematikte yapıları betimlemekten söz edilemeyecektir. Wittgenstein, bu düşüncesinin çok büyük önemde olduğunu ve buradan pek çok şeyin çıktığını söylüyor. Örneğin nesneleri saymakla sayılar nesnelere uygulanmış olmaz. ‘Sayılar bir şeyin yerini tutmazlar, tersine onlar kendileridirler. Yalnızca nesneler temsil edilirler.’ Söyle düşünelim ‘masa’ sözcüğü belli nesneleri temsil eder. Masa sözcüğü kullanıldığında, onun temsil ettiği nesneyi göz önüne getirebilirim. O halde 3 sayısı söylendiğinde, ben neyi ya da neleri göz önüne getiririm? –Kuşkusuz hiçbir şeyi. Eğer 3 sayısı tek başına bir şeyi temsil etmiyorsa, başka bir sözcükle kullanıldığında da o, kendi payına yine bir şeyi temsil etmeyecektir; örneğin ‘3 masa’ dendiğinde olduğu gibi.”²⁶⁵

²⁶² Wittgenstein, *Philosophical Remarks*, s. 109.

²⁶³ *A.e.*, s. 107.

²⁶⁴ Wittgenstein, *Philosophical Grammar*, s. 321.

²⁶⁵ Soykan, *Felsefe ve Dil*, s.150.

Wittgenstein'in bu yeni düşünüş biçimi, ikinci dönemde ortaya koymuş olduğu dil anlayışı ile de oldukça uyumludur.²⁶⁶ Dil insanlar arasındaki etkileşimin en önemli unsurudur ve basitten karmaşığa bir sürü dil vardır. *Felsefi Soruşturmalar*'ın girişinde verilen inşaat ustası A ile kalfası B arasında ortaya çıkmış olan 4-5 sözcüklü dil de, konuştuğumuz binlerce sözcük içeren dil de insanlar arasında iletişimi tesis eder. Burada aslolan, sözcük sayısı ya da dilin karmaşıklığı değil kurallı ve uzlaşımsal oluşudur. Diğer bir deyişle, dil sözcüklerin rastgele bir araya geldiği bir yapı değildir. Dilde sözcükler belirli kurallar uyarınca bir araya gelirler. Anılan bu kurallar ise iletişimin temel unsurları olan insanlar arasındaki uzlaşımaya dayanır. Burada dil oyunları ve gramer kavramları ön plana çıkar. Daha önce de belirtildiği üzere, Wittgenstein'in ikinci döneminin odağında yer alan pragmatik anlam yaklaşımı, matematik felsefesinde ve sayı anlayışında da kendisini gösterir. Artık Wittgenstein'a göre matematik, biçimsel kurallar yığını değil, kendi grameri olan linguistik bir pratiktir.

Wittgenstein sayıya ilişkin terimlerin anlamları üzerine konuşmanın ciddi anlamda riskler barındırdığını düşünmektedir. Ona göre burada risk olan şudur: Sayıya ilişkin terimlerin anlamları üzerine konuşmaya başladığımızda genellikle sayıları karşımızda duran nesnelermiş gibi görmeye başlarız. Ancak sayıların nesne olduğu fikri Wittgenstein'in her iki döneminde de karşı çıktığı bir fikirdir.

Wittgenstein ikinci döneminde de *Tractatus*'un sayıların anlamları konusundaki ana fikrini muhafaza eder. "xxx" şeklindeki bir seri bir sayı fonksiyonu olarak görülebileceği kadar, üç elemanlı olma özelliğini haiz bir sınıfın dizisel (*Ing. Paradigmatic*) temsili olarak da görülebilir.²⁶⁷ Empirik nesnelerden oluşmuş verili bir kümenin üç elemanlı olduğunun belirlenmesi farklı yollardan yapılabilir. Wittgenstein'a göre ise bu belirlemenin yapılabileceği tek yol, dizi ile 1-1 bir ilişki kurmaktır. *Tractatusçu* bir üslupla söyleyecek olursak, "xxx" serisi sayısal bir bağlamda ifade edildiğinde, tanım gereği sayıya ilişkin bir özelliği gösterir. Sayısal simgeler diziler olarak açıklandıklarında, temel aritmetik süreçler sembolizm ve işlemler üzerinden formalizme bağlı kalmaksızın ortaya konulabilir. Sayısal

²⁶⁶ Frascolla, *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, s. 45.

²⁶⁷ A.e., s. 46.

hesaplamanın temel süreçlerinin uygulaması, Wittgenstein’a göre, matematiksel olmayan dilin gramer kurallarının kabul edilmesini gerektirir. Diğer bir deyişle, çalışmanın farklı bölümlerinde defaatle dile getirildiği gibi, matematik kendi başına bir dildir, bu dilin kendi gramer kuralları vardır. Matematiğin uygulamasının ise matematiksel dil içerisinde bir karşılığı yoktur. Bu sebeple matematiğin uygulaması mevzubahis olduğunda, yüzümüzü matematiksel dile değil, matematiksel olmayan dillere ve bu dillerin gramerine çevirmemiz gerekir. Matematiğin olgusal gerçeklikte nasıl iş yaptığı, matematiksel doğruluğun ve uygunluğun nasıl belirlendiği matematiğin kendi dili içerisinde kalınarak açıklanamaz.

Wittgenstein’ın kavram ve yüklem sözcüklerine yüklediği anlamlar göz önünde bulundurulduğunda, sayı anlayışı bağlamında birinci ve ikinci dönem düşüncelerinde bir çelişki olmadığı fark edilir. Wittgenstein, *Tractatus*’ta matematik anlayışını yavaş yavaş terk etmeye başladığı ikinci döneminin başlarında, deyim yerindeyse, bütün sayılar hakkında konuşmanın anlamsız olduğu şeklindeki *Tractatus*’ta anlayışla adeta flört eder.²⁶⁸ Wittgenstein’a göre bütün sayılar hakkında söylenen tümcelerde niceleyicilerin (*İng.* Quantifiers) artık bir anlamı kalmamıştır.²⁶⁹ Bu noktada, şunu umabiliriz: Eğer sayesinde sayı kavramını ifade ettiğimiz *N* gibi sahici bir yüklem (*İng.* Genuine Predicate) yoksa “*x N x*” ya da “ $\exists x N x$ ” gibi ifadeler anlamsızlaşır. Bunun sonucunda da “2’den büyük bir asal sayı vardır” ya da “4’e bölünebilen bütün sayılar 2’ye de bölünebilir” gibi tümceler de anlamını yitirir.

Yukarıda değinilen *Philosophical Remarks*’ta ve *Philosophical Grammar*’de geçen pasajlarda, Wittgenstein kavram sözcüğünü *Tractatus*’ta geçen **sahici kavram** (*Alm.* Eigentliche Begriff) sözcüğü ile aynı anlama gelecek şekilde kullanır. *Philosophical Remarks*’ta ayrıca sahici kavram yerine **maddi kavram** ya da **maddi fonksiyon** sözcüklerini kullanır.²⁷⁰

Şimdi Wittgenstein’ın Frege’nin *Aritmetiğin Temelleri*’nde ortaya koymuş olduğu sayısal belirlenimler mevzusunu nasıl ele aldığına yeniden değinelim.

²⁶⁸ Juliet H. Floyd, “The Rule of the Mathematical: Wittgenstein’s Later Discussions”, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), Harvard University, Cambridge, Massachusetts, 1990, s. 184.

²⁶⁹ Wittgenstein, *Philosophical Remarks*, s. 148.

²⁷⁰ Bkz., *A.e.*, s. 113.

Frege'ye göre “0 + 1 + 1 + 1 + 1.....+ 1” sayısı F kavramına aittir. Wittgenstein kendine özgü değişkenler yorumu ile bu önermeyi şu şekilde tekrar yazar:

- 0 sayısı F kavramına aittir için $\sim (\exists x)Fx$
- 0 + 1 sayısı F kavramına aittir için $(\exists x)Fx. \sim (\exists x, y)Fx. Fy$
- 0 + 1 + 1 sayısı F kavramına aittir için $(\exists x, y)Fx. Fy: \sim (\exists x, y, z)Fx. Fy. Fz$ ve böylece devam eder.

Wittgenstein bir kavrama atfedilen sayının “kavramın dışsal bir özelliği”²⁷¹ olduğunu düşünür. Wittgenstein’in buradaki kastettiği şey şudur; “Bir kavram ve bu kavramın kaplamına düşen elemanların sayısı arasındaki ilişki olumsal bir ilişkidir.”²⁷² Yani, kavramın kaplamına düşen elemanların sayısı değişse bile kavram aynı kavram olarak kalmaya devam edecektir. Sözelimi, insan olma yüklem ile ifade edilen kavram, iki ayaklı olma, konuşabiliyor olma ya da bir elinde beş parmağa sahip olma gibi ayırt edici yüklemeler aracılığıyla belirlenir. Bu kavramın kaplamına çok sayıda eleman girmektedir. Bununla birlikte kaplamdaki eleman sayısından bağımsız olarak kavram hep aynı kavramdır. Bu anlayışı, Wittgenstein’in linguistik yönelimine bağlı kalarak tekrar ifade etmek istersek şöyle söyleyebiliriz: Sayısal belirlenimler yüklem anlamının açığa çıkması noktasında bir katkı sunmazlar ama genel terimler aracılığı ile belirli olgu durumlarının varlığının açıklanması konusunda yardımcı olurlar. Wittgenstein, maddi kavramlara referansla, sayının, kavramın dışsal özelliği olması ile kavramın kaplamının içsel bir özelliği olması arasında sıkı bir karşılık olduğunu düşünür.²⁷³ Bu karşılığı Cambridge derslerinde şöyle ifade eder:

“Sayı, sınıfın bir özelliğidir demek ne demektir? Sayı bir ABC sınıfının bir özelliği ya da bu sınıfı karakterize eden bir sıfat mıdır? ABC sınıfı üçtür demek anlamsızdır. Bu bir totolojidir ve sınıfın kaplamına dair hiçbir şey söylememektedir. Buna karşılık, ‘odada üç kişi var’ demek anlamlıdır. Sayı kaplamın bir özelliği değildir, o sınıfı tanımlayan fonksiyonun bir niteliğidir...

²⁷¹ Wittgenstein, *Philosophical Grammar*, s.332.

²⁷² Frascolla, *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, s. 48.

²⁷³ A.e., s. 48.

Kaplamda verili bir sınıf hakkında konuşmak ile ayırt edici özelliği verili bir sınıf hakkında konuşmak farklı şeylerdir. İşlem ve kaplam yer değiştiremez.”²⁷⁴

Wittgenstein, *Philosophical Remarks*’ta, sayal sayı kavramını bir kaplamın ya da bir sınıfın içsel bir özelliği olarak sunar. Wittgenstein’a göre sayı kaplamın içsel bir özelliğidir, sayılar ise kavramlar kaplamının bir resmidir.²⁷⁵ (*Alm.* Bilder) Öte yandan, *Philosophical Grammar*’de ise sayal sayı bir dizelgenin (*İng.* List) içsel bir özelliği ve sayı da kavramlar kaplamının içsel bir şeması olarak anılır.²⁷⁶ Wittgenstein’a göre bir sınıf, saf kaplamsal bir bakış açısına göre elemanlarının dizelgesi aracılığıyla belirlenir. Tanım gereği böyle bir dizelge kaplamdaki sınıfların belirlenmesi için uygun olan tek notasyondur.²⁷⁷ Wittgenstein’ın “Bir sınıfın eleman sayısı onun içsel özelliklerinden biridir” şeklinde özetlenebilen yaklaşımı şöyle açıklanabilir: Hiçbir önerme, sınıfın sayal sayısı değiştiğinde anlamını muhafaza edecek şekilde aynı kalmaz. Diğer bir deyişle, sayal sayısı değişen sınıf artık eski sınıf değildir. Bu husus *Philosophical Remarks*’ta şöyle anılır: “Şimdi, inanıyorum ki, sınıfların kaplamsal kavramsallaştırmaları ve mantıksal yapının bir özelliği olarak sayı kavramı arasındaki ilişki daha açık görünmektedir, kaplam önermenin anlamının bir karakteristiğidir.”²⁷⁸ Bu alıntıdan da anlaşılacağı üzere, Wittgenstein önermenin anlamı ile önermenin kaplamı arasında belirleyici bir ilişki olduğunu düşünür. Başka bir şekilde ifade etmeye çalışalım: Önermenin anlamını kaplamı, kaplamını da içindeki elemanların sayısı belirler, bu sebeple kaplamdaki eleman sayısı sınıflara ilişkin önermelerin anlamlarının da belirleyicisi konumundadır. Sayının kavramlar kaplamının bir şeması olması fikri ise, basitçe ifade edecek olursak, sayı, eleman sayısı üzerinden belirlenen sınıf özelliğinin dizisel olarak verili bir temsildir şeklindeki anlayışın bir formülizasyonu olarak karşımızda durmaktadır. Sözelimi, (xxxx) sayısal işaretinin uygun manipölasyonları ile tesis edilen aritmetiksel özellikler (xxxx) sembolü ile ilgilidir.²⁷⁹ Bu aynı zamanda şu anlama da gelir,

²⁷⁴ Wittgenstein, *Wittgenstein’s Lectures, Cambridge 1932–1935*, Ed. Alice Ambrose, s. 205-206.

²⁷⁵ Wittgenstein, *Philosophical Remarks*, s. 100.

²⁷⁶ Wittgenstein, *Philosophical Grammar*, s.332.

²⁷⁷ Frascolla, *Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics*, s. 48.

²⁷⁸ Wittgenstein, *Philosophical Remarks*, s. 105.

²⁷⁹ Frascolla, *Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics*, s. 49.

aritmetiksel özelliklerin farkına varmak, aritmetiğin gramer kurallarının kabul edilmesini gerektirir.

Wittgenstein ikinci dönemin başlarında, matematiksel olmayan bütün tanımları anlamsız olarak nitelendirir ve saf dışı bırakır. İkinci döneminin aritmetik anlayışının temel dayanak noktası ise gramer kurallarıdır. Wittgenstein bu anlayışını sadece dil aracılığıyla ortaya konulan nesne sınıflarının kesişimi, birleşimi gibi empirik süreçlere değil, bir kişinin kendi kendine yaptığı hesaplamalar gibi öznel durumlar içeren simge manipülasyonlarına da uygular. Wittgenstein'in bu yaklaşımı sonradan **aritmetiksel sonuçların geometrik yorumlaması** (*Ing.* Geometrical interpretation of arithmetical results) olarak adlandırılacaktır.²⁸⁰

Matematiksel aktivite saf fenomenal bakış açısıyla ele alındığında şöyle denilebilir: İlkel anlamda aritmetik, uygun fiziksel yapıların manipülasyon süreçlerinin çıktısı olarak da düşünülebilir. Daha önceden de belirtildiği üzere, Wittgenstein böylesi bir yaklaşımdan kaçınır. Waismann ile yaptığı görüşmelerin birisinde şöyle demiştir:

“Matematik bir makinedir, analizdir... Analiz ise bir abaküs gibidir, yani sayılar ve seriler ile çalışan ve hesaplama yapmaya yarayan bir makinedir.”²⁸¹

“Matematik kitaplarında karşılaştığımız şeyler bir şeylerin tanımı, tarifi değil bizzat kendisidir. Matematiği biz yaparız. Nasıl ki birileri tarih yapar birileri de yazarsa, matematiği de yazmayız, yaparız, üretiriz, kurarız.”²⁸²

Wittgenstein *Philosophical Remarks*'ta da benzer bir kabulü şöyle ifade eder:

“Unutmayalım ki matematikteki işaretler matematiği tanımlamaz, tasvir etmez, işaretlerin kendileri bizzat matematiği yapar. Matematiksel işaretler bir abaküsün boncukları gibidir. Abaküsün boncukları uzaysal ve zamansal nesnelerdir, dolayısıyla abaküs üzerine yapılacak bir inceleme aynı zamanda

²⁸⁰ A.e., s. 49.

²⁸¹ Waismann, *Wittgenstein and the Vienna Circle*, s. 106.

²⁸² A.e., s. 34.

uzay ve zaman üzerine de yapılmış olacaktır. Matematiği yazamazsınız, onu sadece yapabilirsiniz. Bundan ötürüdür ki matematiksel işaretler üzerinde oynama yapılamaz.”²⁸³

Wittgenstein, *Philosophical Grammar*’da sayal sayı kavramını kavramın kaplamının içsel bir özelliği olarak açıkladıktan ve 4 sayısı için (xxxx) sembolünü verdikten sonra şöyle der:

“Aritmetiğin ilgilendiği şey (xxxx) sembolüdür. Peki, aritmetik kalemle kâğıda çizdiğim çizgiler hakkında bir şeyler söyler mi? Elbette hayır, aritmetik çizgiler hakkında bir şey söylemez, aritmetik çizgilerle iş(lem) yapar.”²⁸⁴

Wittgenstein aritmetiğin, hesaplamanın genel süreçlerinin bir yığını olmadığını düşünür. Wittgenstein’a göre her bir toplama, her bir çarpma... v.b. işlemi kendine has işaret inşasını gerektirir.

Toparlayacak olursak, Wittgenstein’a göre sayıyı bir nesne olarak görüp, sayı tümcesinden bağımsız olarak tanımlamaya çalışmak boşuna bir uğraştır. Aynı deyişle, Wittgenstein’a göre, hiç kimse “7 sayısı nedir?” gibi bir soruya tam manasıyla cevap veremez. Çünkü “7 sayısı nedir?” tümcesinde, fenomenal nesnelere ilişkin tümcelerde olduğu gibi karşımızda duran bir nesne yoktur. Sayı, ancak sayı tümcesi içerisinde bir anlama ve işleve sahip olur. Dolayısıyla, Wittgenstein’a göre sayılarla ilgili bir araştırma yapmak niyetinde isek, bakmamız gereken yer, sayı tümcelerinin grameridir.

2.11. Wittgenstein ve Görüselcilik

Çalışmanın bu bölümünde ilk olarak Wittgenstein’ın görüşelci matematik felsefesi eleştirisini konu edeceğiz. Ardından Wittgenstein’ın **nesnesiz matematik anlayışı** ve bu anlayışın mantıksalci, biçimselci ve görüşelci matematik felsefelerinden ayrıldığı noktalar üzerinde duracağız. Daha sonra, Wittgensteinci ve

²⁸³ Bkz., A.e., s. 157.

²⁸⁴ Wittgenstein, *Philosophical Grammar*, s. 333.

görüşelci matematik felsefelerinin birbirlerine yaklaştığı noktaları irdeleyeceğiz. Son olarak da, Wittgenstein'in doğrulamacı anlam teorisi üzerinde duracağız.

Wittgenstein *Remarks on The Foundations of Mathematics*'te şöyle der:

“Benim ilgimi çeken şey, dolaysız sezgi²⁸⁵ [*Ing. Immediate insight*] fenomenidir. Ama benim için dolaysız sezgi fenomeni, özel zihinsel bir fenomen olmaktan çok, bir çeşit insan eylemidir.”²⁸⁶

Wittgenstein'in bu iddiası, *Remarks on The Foundations of Mathematics*'te verilen görüşelciliğe ilişkin değinilerin, mantıksalcılığa ve biçimselciliğe ilişkin değinilere oranla neden geri planda kaldığını açıklar niteliktedir. Wittgenstein *Remarks on The Foundations of Mathematics*'te üçüncü halin imkânsızlığı ilkesine dair yaptığı açıklamalarda görüşelci bir anlayışa yaklaştığı söylenebilir. Diğer bir deyişle, Wittgenstein da görüşelciler gibi üçüncü halin imkânsızlığı ilkesinin matematiksel kanıtlamalarda kullanılmasını meşru görmez. Öte yandan Wittgenstein, *Remarks on The Foundations of Mathematics*'te Brouwer'ın ismini hiç anmamıştır. Yukarıda da belirtildiği üzere Wittgenstein'in ilgisini esas olarak dolaysız sezgi kavramı çekmektedir. Ama Kant gibi, Brouwer gibi görüşelci bir matematik anlayışını bütünüyle benimsemiş düşünürler için Wittgenstein'in konuya yaklaşımı savunulamaz bir anlayıştır. Çünkü gerek Kant'a göre, gerek de Brouwer'e göre görüşelciliğin en temel tezi, matematiksel nesnelerin insan zihnine doğrudan verili olmayan, ancak zihinsel inşa süreçleri sonucunda kavranılabilen nesneler olduğudur. Wittgenstein görüşelcilerle matematiğe form vermede insanın etken bir rolü olduğu konusunda hemfikirdir.²⁸⁷ Bununla birlikte Wittgenstein'a göre matematiğe ilişkin zihinsel içerikler ya da zihinsel inşalar anlamsızdır. O'na göre anılan sözde-zihinsel

²⁸⁵ İngilizcede 'intuition' sözcüğü genellikle Türkçeye 'sezgi' ya da 'görü' olarak çevrilir. Her ne kadar biz çalışmalarımızda görü sözcüğünü tercih ediyor olsak da, *Remarks on the Foundations of Mathematics*'in İngilizce çevirisinde 'insight' sözcüğü kullanılmış olduğundan 'intuition' ve 'insight' arasında çevirmenlerin tercihlerini hesaba kattığımız için burada 'sezgi' sözcüğünü kullanmayı uygun gördük.

²⁸⁶ Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, s. 241.

²⁸⁷ Humphrey, "Ludwig Wittgenstein's Philosophy of Mathematics: The Search for a Clear View", s. 119.

içerikleri ya da sözde-zihinsel inşaları kavrayan biri matematiğe dair bir sanrıdan başka hiçbir şey edinmiş değildir. Bilindiği üzere, Wittgenstein ikinci döneminde matematiğin temellendirmeye gerek duymadığını düşünür. O'nun için aslolan matematik ile ne yaptığımızdır. Görüselci düşünürlerin sıklıkla başvurduğu “zihinsel inşa” kavramı tam olarak Wittgenstein'in gereksiz bulduğu temellendirme uğraşı ile alâkalı bir kavramdır. Wittgenstein bu sebeplerle “zihinsel inşa” kavramını kullanmaya yanaşmaz.

“Farz edelim ki birisi ‘görü’ sözcüğünü kullanmak yerine, ‘doğru tahmin’ sözcüğünü kullanıyor olsun. Bu kullanım, görünün değerinin başka bir veçhesini gösterecektir. Çünkü tahmin etme fenomeni psikolojiktir ama düzgün tahmin etme psikolojik değildir.”²⁸⁸

Burada Wittgenstein, hesaplamanın önemli bir unsurunun sonuç ile ilişkilendirebilmek olduğunun altını çizmektedir. Doğru tahminin sonuca ilişkin bir bildirim olmasını ve aynı zamanda psikolojik bir fenomen olmamasını bu değiniyle açıklayabiliriz.

Wittgenstein için görüselci matematik felsefesinin problemli olarak görülebilecek yanlarından birisi de şudur: Görüselcilik dolayısıyla elde edilen sonuçlar **kendi kendini doğrulayan** (İng. Self-validat) sonuçlar değildir.²⁸⁹ Bundan ötürü bir şeyleri görü aracılığıyla biliyor olmak, bilen diğerleri tarafından nasıl kontrol edildiğini açıklamaz. Wittgenstein *Cause and Effect: Intuitive Awareness*'ta bu probleme dair şu benzetmeyi vermiştir:

“Eğer birisi görü dolayısıyla insan anatomisinin bilgisini edinebileceğini söylese ona şunu deriz; elbette, bundan kuşku duymuyoruz. Ama eğer doktor olmak istersen sende herkes gibi sınavları geçmelisin.”²⁹⁰

²⁸⁸ Wittgenstein, **Remarks on the Foundations of Mathematics**, s. 235-236.

²⁸⁹ Humphrey, “Ludwig Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics: The Search for a Clear View”, s. 119

²⁹⁰ Ludwig Wittgenstein, **Ursache und Wirkung: Intuitives Erfassen**, Ed. Rush Rhees, Çev. Peter Winch, **Cause and Effect: Intuitive Awareness**, *Philosophia*, Vol. 6, No, 3-4, 1976, s. 419.

Benzer bir şey görüselciler için de söylenilebilir: Eğer birisini görü dolayımıyla matematik bildiğiniz hususunda ikna etmek istiyorsanız, sizde herkes gibi öncelikle sınavları geçmek zorundasınız.

Wittgenstein'a göre matematik bir bakıma kural koyma işidir. Bu bağlamda ele alınan matematik anlayışı ile "Matematik zihin ya da zihinsel inşa süreçler ile görülen entiteler hakkındadır" şeklindeki görüselci bakış açısıyla bağdaşmaz. Zira Wittgenstein'a göre matematik bizim dışımızda varlığı olan ve inşa faaliyeti neticesinde hakkında bir şeyler bildiğimiz bir varolanlar kümesine ilişkin bir etkinlik değildir. Wittgenstein'ın matematiğe dair ortaya koymuş olduğu bu yaklaşım bir anlamda nesnesiz bir matematik yapma denemesidir. Bu anlayışa göre matematikçi bir şeyleri tanımlamaz, matematikçinin işi kavram ve gramer kuralları türetmektir. Brouwer matematiğin, zihnin iç mimarisi olarak görülebileceğini düşünüyordu. Wittgenstein ise böylesi bir anlayışın kabul edilemez olduğunu düşünür. Ona göre matematik, insan zihninin bir yerlerinde gizlenmiş ve sonrasında oradan çıkartılıp kullanılan bir şey olmak dışında basitçe kavram ve gramer kuralların üretimidir.

Wittgenstein'ın ortaya koyduğu nesnesiz matematik anlayışı geleneksel matematik felsefesinin üç önemli ekolü olan mantıksalcılık, biçimselcilik ve görüselcilikten kendisini ayırmaktadır. Mantıksalcılara göre matematik, nesnel varlıkları olan nesnelerle ilgilidir. Biçimselcilere göre ise matematik kâğıttaki ya da tahtadaki işaretler ile ilgilidir. Biçimselci matematik anlayışına ilişkin *Mavi Kitap*, *Kahverengi Kitap*'ta şu ifadelerle yer verir;

"Frege, formalistlerin [biçimselcilerin] önemli olmayan şeyi, yani imi, önemli olanla, yani anlamla karıştırdıklarını söyleyerek formalist matematik anlayışıyla alay eder. Elbette insan, matematiğin bir kağıt parçası üstündeki çizgilerle ilgilenmediğini söylemek ister. Frege'nin fikri şöyle ifade edilebilir: matematik önermeleri, çizgi karmaşalarından ibaret olsalardı, ölü ve ilginçlikten bütünüyle uzak olurlardı, oysa açık ki onların bu tür bir yaşamı vardır."²⁹¹

²⁹¹ Ludwig Wittgenstein, **Mavi Kitap**, **Kahverengi Kitap**, Çev. Doğan Şahiner, Türkiye İş Bankası Yayınları, İstanbul, 2011, s. 7.

Görüselciler ise matematiğin zihinsel inşa süreçleri sonucunda elde edilen nesneler ile ilgili olduğunu düşünür. Anılan matematik felsefesi ekollerinin hepsinde karşımızda matematik nesne kavramı durmaktadır. Ama Wittgenstein'a göre matematik hiçbir şeyle ilgili değildir. Wittgenstein'a göre matematik nesne, ne Platon'un idealarında, ne insanların zihninde ne de empirik dünyada bulunur. Matematik felsefecileri matematiksel nesnelerin doğasını kavrayabilmek adına farklı teoriler sunmuşlardır. Bu teorilerden bazıları bugün halâ üzerine tartışılan, çalışmalar yapılan teorilerdir. Oysa Wittgenstein, ortada üzerine araştırma yapılacak bir matematik nesnenin olmadığını düşünür. Wittgenstein'a göre var olan tek şey, hesaplama ve hesaplamanın grameridir. Bundan sonra önemli olanda sadece matematiksel önermelerle nasıl iş gördüğümüzdür. Görüldüğü üzere Wittgenstein nesnesiz matematik anlayışıyla yukarıda anılan üç ekolden de ayrılır.

Wittgenstein'a göre bir insan bir ifadeden ya da önermeden ne anladığını, bir başkasına sözcüklerle ya da işaretlerle anlatabilir. Bununla birlikte bir ifadenin ya da önermenin açıklanabiliyor olması, o ifadenin ya da önermenin anlamının da ortaya konulabiliyor olması demek değildir. Wittgenstein'ın ikinci dönem felsefesinin anlama ilişkin mottosu **anlam kullanımda ortaya çıkardır**. Burada kullanım sözcüğünün işin içerisine dâhil edilmesi tesadüfî değildir. Daha önce de belirtildiği üzere, Wittgenstein'ın ikinci döneminin en belirleyici paradigması gündelik dildir. Dil, o dili konuşan ve bu yolla bir şeyleri bir başkasına aktaran insanlar olmaksızın var olamaz. Şu halde karşımıza topluluk ve iletişim kavramları çıkmaktadır. Söz gelimi A ve B kişileri U dilini kullanarak anlaşıyor olsun. A kişisi belirli bir durumu U dilinin gramer kurallarına uygun olacak şekilde bir tümce kurarak B kişisine anlatıyor olsun. Burada tümcenin anlamı ancak doğru bir kullanım neticesinde ortaya çıkar, kendisini gösterir. Dolayısıyla Wittgenstein, matematiksel bir tümcenin de anlamının, bu tümcenin gramere uygun bir şekilde kullanımında yattığını ifade eder.

Görüselciler ise matematiğin dilden önce geldiğini ve dilin matematiksel görüyü bütünüyle açıklamak için yetersiz olduğunu düşünürler. Matematiksel önermelerin anlamının, önermelerin kullanımlarında yattığını düşünen Wittgenstein'a göre, anılan görüselci görüş kabul edilemezdir.

Buraya kadar Wittgenstein ile görüselcilerin uyuşmadıkları noktalara ve bu uyuşmamanın zemininde yatan sebeplere değindik. Şimdi ise Wittgenstein ile görüselcilerin birbirlerine yaklaştıkları noktaları inceleyelim. Kuşkusuz Wittgenstein ile görüselcilerin birbirlerine yaklaştıkları en önemli nokta, her ikisi içinde “Matematikte hiçbir şey insanı öncelemez” düşüncesidir.²⁹² Görüselcilere göre zaten matematik a priori verili bir şey değil, insanın zihinsel süreçleriyle kendisinin inşa ettiği bir şeydir. Wittgenstein’a göre ise matematikçi kâşif değil, mucittir.²⁹³ Her iki düşünüş biçiminde de insan edilgen değil, etken konumdadır. Wittgenstein, matematiğin bir doğa bilimi olmadığını düşünür. Ona göre matematik tanımlamanın formlarının, kurallarının ve gramerinin icadıdır.²⁹⁴ Matematikçi içerisine tanımları yerleştirdiğimiz sembolleri, yapıları, dil oyunlarını icat eder. Biz de matematikçinin icat ettiği kuralları kullanırız. Wittgenstein konuya ilişkin *Remarks on the Foundations of Mathematics*’te şu örneği verir;

“2 elma ile 2 elmayı topladığımızı ve sonuç olarak 3 elma bulduğumuzu düşünelim, sonuçta bir problem var deyip toplama işlemini birkaç kez tekrarladığımızı ve yine 3 elma sonucunu bulduğumuzu düşünelim. Burada demek ki her zaman $2 + 2 = 4$ değilmiş gibi bir şey düşünmeyiz, demek ki elmalardan birisi kaybolmuş deriz.”²⁹⁵

Hem Wittgenstein, hem de görüselciler Platoncuların, mantıksalcıların ve biçimselcilerin benimsediği durağan matematik anlayışına karşı çıkarlar.²⁹⁶ Wittgenstein ve görüselcilere göre matematik sürekli değişmekte olan ve olacak olan bir şeydir. Matematiğin sınırları esnektir, hiçbir zaman tamamıyla belirlenmiş ve bitmiş olmayacaktır. Hem Wittgenstein’a hem de görüselcilere göre, matematiğin doğasının ve sınırlarının belirlenmesi bütünüyle insana bağlıdır.

²⁹² Bu cümleyi şu şekilde de yazabilirdik: İnsandan ve onun türetiminden bağımsız bir matematik alanı yoktur. Matematik dediğimiz şey insan onu üretirse var olur.

²⁹³ Wittgenstein, **Remarks on the Foundations of Mathematics**, s. 111.

²⁹⁴ **A.e.**, s. 99.

²⁹⁵ **A.e.**, s. 97.

²⁹⁶ Humphrey, “Ludwig Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics: The Search for a Clear View”, s. 128.

Wittgenstein'in felsefesini *Tractatus*'taki **doğruluk koşullu semantik**ten (*İng.* Truth-Conditional Semantics), ikinci dönem felsefesindeki **doğrulamacı semantiğe** (*İng.* Verificiationist Semantics) evrilen bir felsefe olarak görmek yaygın bir kanaattir. Bu evrimin zemininde de Wittgenstein'in görüselci matematik felsefesinden aldığı ilham vardır.²⁹⁷ Michael Dummet *Truth and Other Enigmas* adlı eserinde konuyu şöyle ele almıştır.

“Doğrulamacı bir anlam teorisi, Frege'nin çeşitli yazılarında ve Wittgenstein'in *Tractatus*'un da karşımıza çıkan doğruluk koşullu bir anlam teorisinden radikal bir biçimde ayrılır. Doğruluk koşullu anlam teorisinde ön plana 'doğruluk' ve 'yanlışlık' kavramları çıkar. Bu anlayışa göre bir önermenin doğru olacağı koşulları biliyor isek önermenin anlamını da biliyoruzdur. Doğrulamacı anlam teorisinde ise önermenin doğruluğunu ancak önerme kesin olarak doğrulandıktan sonra bilebiliyoruzdur. Bu anlayışta ön plana çıkan kavramlar ise 'doğrulama' ve 'yanlışlama' kavramlarıdır.”²⁹⁸

Aslına bakılırsa, doğrulamacı anlam teorisi, görüselci matematik felsefesinin genişletilmiş halinden başka bir şey değildir.²⁹⁹ Bilindiği üzere görüselcilere göre, bir önermenin doğrulanması demek o önermenin kanıtının yapılabilmesi demektir. Diğer bir deyişle, görüselcilere göre sadece kanıtlanabilen önermeler anlamlı önermelerdir. Görüselcilere göre matematikte çelişkiler ve paradokslardan kurtulmanın yolu böyle bir tutumdan geçer.

Toparlayacak olursak, Wittgenstein'ı ikinci dönem matematik felsefesi bağlamında, Kantçı ya da Brouweri olarak düşünmek doğru bir kavrayış olmayacaktır. Zira O, her şeyden önce matematik nesnenin varlığını yadsır. Yukarıda da belirtildiği üzere matematik nesne anlayışı, Kant'ın ve Brouwer'ın görüselciliğinin zemininde yer alır. Wittgensteinci ve görüselci matematik felsefelerinin birbirlerine yakın söylemler ürettiği hususlar, daha çok her iki

²⁹⁷ A.e., s. 133.

²⁹⁸ Michael Dummett, *Truth and Other Enigmas*, Harvard University Press, Cambridge, 1978, s. 379.

²⁹⁹ Humphrey, “Ludwig Wittgenstein's Philosophy of Mathematics: The Search for a Clear View”, s. 134.

anlayışında eleştirdiği mantıksalci ve biçimselci matematik felsefelerine ilişkin hususlardır.

2.12. Wittgenstein'in İkinci Dönem Matematik Felsefesinde Küme Teorisi, Reel Sayılar ve Tümevarım

Wittgenstein'in, matematik felsefesi bağlamında ele aldığı ya da bir şekilde değindiği konuları bütünlüklü bir sistem içerisinde toplamak, bu konular arasında sistematik bir düzen oluşturmak zordur. Bununla birlikte Wittgenstein'in 1929 sonrası matematik felsefesinde üç kavramın ön plana çıktığını söyleyebiliriz. Çalışmanın bu bölümünde, bu üç kavramı Wittgenstein'in nasıl ele aldığına değineceğiz.

Bunlardan birincisi **küme kuramı** kavramıdır. Wittgenstein'in ikinci döneminde küme kuramına gösterdiği yoğun ilgi, bu dönemde matematik felsefesinde benimsediği semantik yapısalcılığın bir sonucu olarak da görülebilir.³⁰⁰ Wittgenstein *Philosophical Remarks*'ta açık bir şekilde küme kuramının var olma nedeni (*İng.* *raison d'être*) olan sonsuz tamlık kavramını deli saçması olarak nitelendirir.³⁰¹ Wittgenstein'in sonsuz tamlık kavramını saçma olarak nitelendirmesinin altında onun tamamlanmış sonsuz kavramını reddetmesi yatar. Wittgenstein'in tamamlanmış sonsuzu reddetmesini şu şekilde örneklendirebiliriz. Diyelim ki bir yolcu başlangıç noktası A noktası olan bir yolculuğa başlayacak olsun. Bu yolculukta A noktası 0 sayısını temsil etsin. Yolun her bir metresi de bir doğal sayıya denk gelsin. Yani yolcu 1 metre ilerleyince 1 sayısını 17 metre ilerleyince 17 sayısını geçmiş olsun. Wittgenstein bu yolcunun hiçbir zaman sonsuzu geçemeyeceğini düşünür. Çünkü ona göre böyle bir yolculuk, matematikte aktüel sonsuz olmadığı için hiçbir zaman bitmeyecektir. Wittgenstein'a göre sonsuz sayı serileri, sonlu sayı serilerinin sonsuz olasılığından başka bir şey değildir.³⁰²

Wittgenstein'in 1929 sonrası matematik felsefesinde öne çıkan bir diğer kavram da, reel sayı kavramıdır. Yukarıda da ifade edildiği üzere, Wittgenstein

³⁰⁰ Wrigley, "Wittgenstein's Early Philosophy of Mathematics", s. 149.

³⁰¹ Wittgenstein, *Philosophical Remarks*, s. 166.

³⁰² A.e., s. 164.

tamamlanmış sonsuz kavramını reddeder. Wittgenstein'in bu reddiyesi, reel sayıların tanımlanması mevzuunda da bir takım problemleri beraberinde getirir. Sözgelimi, klasik anlayışa göre 0 ile 1 arasında sonsuz sayıda reel sayı olduğu düşünülür. Wittgenstein sonsuzu reddetmekle başlayan süreçte "0 ile 1 arasında kaç tane reel sayı vardır?" ya da "[0,1] kümesinin kardinalitesi kaçtır?" minvalinden soruların sorulamaz olduğunu göstermeyi hedeflemiştir. Wittgenstein'a göre reel sayı bir nicelik değil, aritmetiksel bir kuraldır.³⁰³ Biraz daha açacak olursak, Wittgenstein'a göre reel sayı, ondalık kesirlerin yerlerini belirleyen bir kuraldır. Dolayısıyla ona göre "0 ile 1 arasında sonsuz sayıda reel sayı vardır" gibi bir tümce anlamsız bir tümcedir.

Çalışmanın daha önceki ilgili bölümünde Wittgenstein ile görüselci düşünürlerin matematik felsefesi bağlamında kimi noktalarda uyuştukları kimi noktalarda da ayrı düştiklerini ifade etmiştik. Wittgenstein'ın reel sayı anlayışı ile görüselci matematik felsefecilerinin reel sayı anlayışları her iki tarafın uyuşmadıkları noktalara örnek gösterilebilir. Heyting *The Intuitionist Foundations of Mathematics*'te görüselci matematik felsefesinin reel sayı anlayışı hususunda şunları ifade eder:

"Reel sayıları tanımlayan ondalık açılımın (*Ing.* Decimal Expansion) yerlerinin bir kural uyarınca sonsuza gitmesi fikri reel sayıları tanımlamak için gerekli değildir. Reel sayıları tanımlamak için dizilerin serbest seçim ile adım adım belirlenmesi yeterlidir."³⁰⁴

Heyting reel sayıların belirlenmesinde bir kuralın izinden gidilmesi fikrinin gereksiz olduğunu, seçimin serbestçe de yapılabileceğinin altını çizer. Heyting'in dile getirdiği bu anlayış görüselci kalkülüsün ortaya çıkması ve gelişiminde önemli rolü olan **Seçim Dizilerinin Görüselci Teorisinin** (*Ing.* Intuitionist Theory of Choice

³⁰³ A.e., s. 228.

³⁰⁴ A. Heyting, "The Intuitionist Foundations of Mathematics", **Philosophy of Mathematics; Selected Readings** içinde, Ed. Paul Benacerraf , Hilary Putnam, Cambridge University Press, New York, 1983, s. 55.

Sequences) zemininde yer alır.³⁰⁵ Wittgenstein bu yaklaşımı kesin bir dille reddeder. Wittgenstein'a göre serbestçe ilerleyen dizi kavramı matematiksel bir kavram değildir.³⁰⁶

Wittgenstein'ın ikinci dönem matematik felsefesinden ele alıp irdedeleyeceğimiz son kavram **matematiksel tümevarım** kavramıdır. Wittgenstein'ın matematiksel tümevarım kavramına yaklaşımı ile matematiksel sonsuz kavramına yaklaşımı arasında bir paralellik vardır. Wittgenstein *Philosophical Remarks*'ta Skolem'in doğal sayılarda toplama işleminin birleşme kuralına ilişkin verdiği tümevarımsal kanıtlamaya değinir. Wittgenstein'ın bu değinisi onun matematiksel tümevarım hakkındaki görüşlerinin temelini teşkil etmektedir. Skolem “ $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ ” önermesi için toplamanın birleşme kuralının doğru olduğunu gösterir. Sonrasında da rastgele seçilen bir c için önemenin doğru olduğunu varsayar. Son olarak bu varsayımı kullanarak önermenin $c + 1$ için de doğru olduğunu gösterir. Buradan da “toplama işleminin birleşme kuralı c 'nin bütün değerleri için doğrudur” şeklindeki tümel yargıya varır. Skolem'in bu kanıtlamasına Wittgenstein şöyle cevap verir:

““ $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ ” tekil önermesinin “ $a + (b + c) = (a + b) + c$ ” tümel önermesinin özel bir durumu (özellemesi) olduğunu kanıtlayamam. Buna inanmak için bunun böyle olduğunu görmem gerekir. Aksi halde hiçbir kural beni “ $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ ” tekil önermesinin “ $a + (b + c) = (a + b) + c$ ” tümel önermesinin bir özellemesi olduğu konusunda ikna edemez. Bu aynı zamanda kural ve uygulama ya da tümel yasa ve tümel yasanın özellemesi arasındaki aşılabilir olan uçurumdur.”³⁰⁷

Wittgenstein'a göre tümel yasa kendiliğinden uygulaması ya da özellemesi ile bağ kurmaz. Wittgenstein bu bağın görüsel bir bağ olduğunu düşünmektedir.³⁰⁸

Matematiksel tümevarımı kısaca şöyle betimleyebiliriz:

³⁰⁵ Wrigley, “Wittgenstein's Early Philosophy of Mathematics”, s.150.

³⁰⁶ Waismann, **Wittgenstein and the Vienna Circle**, s. 83.

³⁰⁷ Wittgenstein, **Philosophical Remarks**, s. 198.

³⁰⁸ A.e., s. 195.

1. Verili önermenin $[P(x)] P(1)$ için doğru olduğunu **göster**,
2. Verili önermenin $P(n)$ için doğru olduğunu **varsay**,
3. 1 ve 2'den hareketle $P(n + 1)$ 'in doğru olduğu gösterebilirse, önerme **bütün x'ler** için doğru olacaktır.

Wittgenstein için bu ispatta 1. ve 2. adımlarda ve bu adımlardan hareketle $P(n + 1)$ 'in doğru olduğunun gösterilmesinde problem teşkil deden bir husus yoktur. Burada problemlili olan nokta, değinilen sonlu adımların ardından tümel yasaya geçiş yani genellemedir. Wittgenstein bu genellemenin meşru zemininin olmadığını düşünür.

Ezcümle, Wittgenstein, görüsel bir bağ kurulamayan ve matematiksel sonsuza ilişkin bildirimler içeren önermelerin tümevarımsal kanıtlarının hepsinin geçersiz kanıtlar olduğunu düşünür.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

WITTGENSTEIN'İN MODERN MATEMATİK ELEŞTİRİSİ

- ✓ Benim görevim Gödel'in kanıtı üzerine konuşmak değil, onu devre dışı bırakmaktır.
- ✓ Gödel'in kanıtının bizim için ne gibi bir önem taşıdığı sorulabilir, cevap şöyle olacaktır; bizim için önemli olan, kanıtın bizi içerine soktuğu durumdur. Bu durumda, neyi söyleyeceğimizdir artık tamamız.
- ✓ Doğal sayıları tek tek koşarak geçmek biz insanlar için imkânsızdır, anlamsızdır.
- ✓ $m = 2n$ şeklindeki boş sanı, bir sınıf ile bu sınıfın alt sınıfını ilişkilendirir. Bu durumda da ortada yeni bir belirsiz gramer örneği vardır.

Ludwig Wittgenstein
(Remarks on the Foundations of Mathematics)

Wittgenstein *Remarks on the Foundations of Mathematics*'te özellikle 19. yüzyılın sonlarında ortaya çıkmış ve etkisini halâ sürdürmekte olan iki önemli matematik teorisini ele alır ve tartışır. Bunlar: Gödel'in tamamlanamazlık teoremleri (*İng.* Incompleteness Theorems) ve Cantor'un köşegen argümanıdır. (*İng.* Diagonal Argument)

Russell *Mysticism and Logic*'te Cantor'un yalnızca bir problem geliştirmediğini, onu tamamen çözdüğünü ifade eder ve ekler:

“Çözüm matematiğe aşına olanlar için, en ufak bir şüphe ve zorluğa meydan vermeyecek biçimde nettir. Bu başarı muhtemelen çağımızın en büyük övünç kaynağıdır.”³⁰⁹

Wittgenstein ise Cantor'un çalışmalarını çağımızın en büyük başarıları olmaktan ziyade normal bir bedende anlamsızca büyüyen kanserli bir ura benzettir.³¹⁰ Soykan da Wittgenstein'in Cantor eleştirisini şöyle aktarır:

³⁰⁹ Bertrand Russell, *Mysticism and Logic*, Unwin, London, 1918, s. 57.

“Nasıl ki mantıkta objesiz bir sözcük, sanki objesini gösteriyormuş gibi kullanıldığında (örneğin Giritli yalancı çelişkisinde ‘ben’ sözcüğü ile yapıldığı gibi veya Russell’ın ‘Tipler Kuramı’nda olduğu gibi, biçimsel kavramın sahici kavram diye kullanılması) ortaya yanlışlar çıkıyorsa, matematikte de –ki onun tüm kavramları biçimseldir, sahici değil– bir sözcüğü betimlemeye kalkışmak, yani onun bir objesi varmış gibi görmek, aynı yanlışlara neden olacağından bu tutumdan kaçınılmalıdır. Oysa Cantor ve diğer matematikçiler ‘sürekli’yi betimlemeyi denediklerinde bu yanlışla düşmüşlerdi. Ve yine Dedekind de sonsuzu göstermeksizin onu betimlemek isteyen bir sonsuz küme tanımıyla Wittgenstein’a göre yanlış yapmıştı. Oysa bir biçim betimlenemez, yalnızca gösterilebilir. Bir biçimi göstermek onun kendisini göstermektir. Bu onun bir şeyi gösterdiği anlamına gelmez. Dedekind, ‘sonsuz’ gibi, bir şeyi göstermeyen bir biçimsel kavramı, o sanki bir şeyi gösteriyormuş gibi onu betimlemeye kalkmakla yani sonsuzu sahici kavram sanmakla yanlış yapmıştır.”³¹¹

Çalışmanın bu bölümünde Wittgenstein’ın bu iki matematikçi/filozof teorisyenin teorileri hakkında neler düşündüğü üzerinde duracağız.

3.1. Wittgenstein’in Gödel Eleştirisi

Wittgenstein’ın Gödel yorumuna geçmeden evvel Gödel’in tamamlanamazlık teoremlerine kısaca değineceğiz. Gödel teoremlerinin çalışmaya dâhil ediliyor oluşunun gerekçesi şudur: İleride de gösterileceği üzere, Gödel teoremleri Wittgenstein’ın matematik anlayışı için ciddi manada sorun teşkil etmektedir. Bu sebeple Gödel teoremlerinin doğru bir şekilde kavranılması son bölümde yapacağımız Wittgensteinci matematiğin eleştirisinin zemini bakımından oldukça önemlidir.

3.1.1. Gödel Teoremleri

Çalışmanın bu bölümünde, Gödel teoremlerinin ve bu teoremlerin sonuçlarının daha açık bir şekilde anlaşılabilmesi adına öncelikli olarak Gödel teoremlerinde geçen ve teoremler açısından kritik bir noktada duran bazı kavramları açıklayacağız. Ardından teoremlerin ortaya çıktığı tarihsel bağlama değineceğiz. Sonrasında

³¹⁰ Bkz, Wittgenstein, **Remarks on the Foundations of Mathematics**, s.19.

³¹¹Soykan, **Felsefe ve Dil**, s.144.

teoremlerin matematik tarihi açısından nerede durduğunu irdelleyeceğiz. Son olarak da birinci ve ikinci tamamlanamazlık teoremlerini kısaca açmılayacağız.

Gödel'in tamamlanamazlık teoremlerini matematiksel açıdan incelemek çalışmamız açısından kritik bir yerde durmadığından çalışmamız dâhilinde böyle bir işe kalkışmayacağız. Öte yandan bu teoremlerin sonuçlarının matematik felsefesi açısından incelenmesi, çalışmamız bağlamında oldukça önemlidir. Bu sebeple öncelikli olarak Gödel'in tamamlanamazlık teoremlerinde geçen bazı kavramları açıklayacağız. Bunlardan birincisi **tamdeyim** (*Ing.* Formula) kavramıdır. Tamdeyim kavramı şöyle tanımlanmaktadır: “Bir biçimsel dilin kurma kurallarına göre doğru bir biçimde oluşturulmuş im dizisi.”³¹² Çitil'in aktardığına göre Gödel 1931 tarihli makalesinde tamdeyimlere ilişkin şu tespitleri yapmaktadır:

“Bir biçimsel dizgenin tamdeyimleri (ki biz burada kendimizi PM dizgesiyle sınırlıyoruz) dış görünüşleri itibariyle ilksel işaretlerin sonlu dizileridir... Şüphesiz, üst-matematiksel telakkiler bakımından hangi nesnelerin ilksel işaretler olarak seçildiğinin bir önemi yoktur ve biz doğal sayıları bu amaçla kullanacağız. Sonuç olarak, bir düzgün tamdeyim, doğal sayıların sonlu bir dizisi ve bir ispat dizisi, doğal sayıların sonlu dizilerinin sonlu bir dizisi olacaktır.”³¹³

Sözgelimi “ $7 + 5 = 12$ ” önermesi aritmetiğe ait ve tümüyle aritmetiksel imlerle oluşturulmuş bir aritmetik tamdeyimidir. Öte yandan **üst-matematik** kavramı ise, kendisi matematiksel olmayan fakat matematik hakkında bildirimde bulunan bir dile gönderme yapmaktadır. Bir önceki örnekle devam edecek olursak, “ $7 + 5 = 12$ aritmetiksel bir tamdeyimdir” önermesi matematiğin değil üst-matematiğin bir önermesidir. Aynı deyişle, bu önerme aritmetiğin biçimsel dili dâhilinde kurulmamıştır. Bu önerme üst-matematiksel bir önermedir.

Gödel'in tamamlanamazlık teoremlerini matematik felsefesi açıdan inceleyebilmek için açıklığa kavuşturmamız gereken bir diğer nokta da, biçimsel bir

³¹² Grünberg, Onart, **Mantık Terimleri Sözlüğü**, s. 120-121.

³¹³ Kurt Gödel, "On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems", Çev. A. Ayhan Çitil, (**Matematik ve Metafizik** içinde), s. 157.

dizgenin tutarlı olmasının ne demek olduğudur. Biçimsel dizgelerin tutarlılığı şöyle tanımlanabilir: Eğer biçimsel bir dizgenin herhangi iki aksiyomundan birbirleriyle çelişen iki önerme çıkarmıyor ise bu biçimsel dizge tutarlıdır.

Tamamlanamazlık teoremlerinin ayrıntılarına geçmeden önce son olarak bu teoremlerin ortaya çıktığı tarihsel bağlama kısaca değinmek yerinde olacaktır. Gödel'in tamamlanamazlık teoremlerini ortaya attığı tarihlerde matematik dünyasında bir yanda Russell'in mantıksalcılığı, diğer yanda da Hilbert'in biçimselciliği ön plana çıkmış durumdadır. Her iki yaklaşımın da temelinde matematiği, her hangi bir görüşe müracaatı gerektirmeksizin yalnızca bir dizi temel aksiyom ve mantıksal dönüşüm kuralları uyarınca aksiyomatik bir dizge olarak tesis etmek fikri vardır. Gödel, *Principia Mathematica*'nın çetrefil simge örüntüleri üzerine çalışırken, bu simge örüntülerinin sayı örüntülerine benzediğini fark eder ve zihninde *Principia Mathematica*'da geçen her simgenin bir sayı ile temsil edilebileceği fikri canlanır.³¹⁴ Çalışmalarını bu fikir üzerinde yoğunlaştıran Gödel, *Principia Mathematica*'nın tamdeyimlerinin kendi kendine gönderimli tamdeyimler olduğunu fark eder. Buradan hareketle *Principia Mathematica*'nın, Russell ve Whitehead'in ısrarla kaçınmaya çalıştıkları döngüsellığe saplanmış olduğunu anlar. “Bu tamdeyim *Principia Mathematica*'nın kuralları ile kanıtlanamaz.” Gödel bu şekilde kendine gönderme yapan bir tamdeyim *Principia Mathematica*'nın başarısı önünde çok büyük bir engel teşkil edeceğini anlar. Ardından bu duruma oldukça parlak bir açıklama getirir: “Öyle ki, tamdeyim doğru olduğu, fakat tamdeyim doğruğunun dizgenin kuralları kullanılarak kanıtlanamayacağı gösterilmiş oldu; gerçekten de, önerme, kanıtlanamazlığı doğruluğundan kaynaklanan doğru bir önermeydi.”³¹⁵

“Matematiğin giderek daha çok kesinlik yönünde ilerlemesi, bilindiği gibi, matematiğin büyük bir kısmının biçimselleştirilmesiyle öne çıkmıştır; öyle ki, kanıtlamalar az sayıda mekanik kuralla yapılabilir. Şimdiye kadar kurulan en kapsamlı biçimsel dizgeler, bir yanda *Principia Mathematica*, diğer yanda da

³¹⁴ , D. R. Hofstadter, “Gödel Kanıtlaması İçinde Önsöz”, Bkz. E. Nagel, J. R Newman., **Gödel Kanıtlaması**, Çev. Bülent Gözkân, Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, İstanbul, 2010, s. XXIV.

³¹⁵ A.e., s. XXV.

Zermelo-Fraenkel'in kümeler kuramı için geliştirdiği (daha sonra J. V. Neumann tarafından genişletilen) aksiyomatik dizgedir. Bu dizgeler öylesine kapsamlıdır ki, bugün matematikte kullanılan tüm kanıtlama yöntemleri onlar tarafından biçimselleştirilmiştir; yani az sayıda aksiyoma ve çıkarım kuralına indirgenmiştir. Dolayısıyla, bu aksiyomların ve çıkarım kurallarının söz konusu dizgelerde biçimsel olarak ifade edilebilecek her matematiksel soruya karar verebilmeye yeterli olacakları düşünülmüştür. Aşağıda bunun geçerli olmadığı gösterilmiştir; yani sözü edilen her iki dizgede de tam sayılar kuramı içinde aksiyomlardan kalkılarak karar verilemeyecek oldukça basit önermeler vardır.”³¹⁶

Gödel, 1931 yılında yayınladığı ünlü makalesinin girişinde bunları söyler. Dikkat edilirse, Gödel'in iddialarının ne denli önemli ve büyük iddialar olduğu hemen fark edilir. Birazdan daha detaylı bir şekilde açıklanacak olan bu makalesinde Gödel, kendisinin formülize ettiği birinci ve ikinci tamamlanamazlık teoremlerinin kanıtlarını verir. Matematik tarihi açısından düşünüldüğünde bu kanıtlamalar öylesine büyük önemi haizdirler ki, matematiğin temellerine ilişkin yapılacak çalışmalar artık Gödel'den önce ve Gödel'den sonra olacak şekilde ikiye ayrılmıştır. Casti ve DePauli, Gödel'in kanıtlamalarının inkâr edilemez sonuçlarının matematik dünyasını adeta soğuk ve şiddetli bir kutup rüzgârı gibi yıkıp geçtiğini düşünür.³¹⁷ Gödel'in bu kanıtlamaları yalnızca matematiğin sınırlılıklarını göstermekle kalmamış aynı zamanda matematiğin temelleri üzerine düşünme işinin sınırlarını da çizmiştir.

Gödel'in birinci ve ikinci tamamlanamazlık teoremlerini kısaca şöyle betimlenebilir: Gödel, başlangıç noktası olarak kendisine doğal sayılar aritmetiğini kapsayan biçimsel bir dizge alır ve bu biçimsel dizgede doğruluğuna karar verilemeyen önermeler olduğunu, eşdeyişle bu biçimsel dizgede ne kendisi ne de değili kanıtlanamayan önermeler olduğunu kanıtlar. Ayrıca Gödel, bu biçimsel dizge içerisinde doğruluğuna karar verilemeyen bu önermelerin üst-matematiksel akıl yürütmelerle doğrulanabileceğini de kanıtlar. Bu teorem, Gödel'in birinci

³¹⁶Kurt Gödel, “On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems”, Çev. Bülent Gözkân, (**Gödel Kanıtlaması İçinde**), s. 37.

³¹⁷ J. L. Casti, W. DePauli, **Gödel-Mantığa Adanmış Bir Yaşam**, Çev. Ergün Akça, Kabalıcı Yayınları, İstanbul, 2004, s. 13.

tamamlanamazlık teoremi olarak anılır. Birinci tamamlanamazlık teoremini biraz daha açacak olursak:

“Birinci teoremin ispatı için Gödel biçimsel dizgenin önermeleri ve doğal sayılar arasında **Gödel numaralandırması** olarak bilinen bir eşleşme yapar. Biçimsel dizgenin her ifadesinin ifadenin **Gödel sayısı** olarak adlandırılan bir sayı ile eşleştirilebileceğini ve ifadeler arasındaki biçimsel bağıntıların da ifadelerin Gödel sayılarını içeren aritmetiksel formüllere çevrilebileceğini gösterir. Daha sonraki adımda biçimsel dizgenin içerisinde, kendi Gödel sayısı ile eşleşen ifadenin ispatının verilebileceği biçimsel bağıntısının aritmetiksel formülünün aksine, eşdeğer olan bir ifadenin kurulabileceğini gösterir. **Gödel Cümlesi** olarak adlandırılan bu ifadenin ne kendisinin ne de aksinin ispatının verilemeyeceği şöyle gösterilir: İfadenin kendisinin ispatının dizge içerisinde verilebilmesi, ifadenin ispatının verilebileceği biçimsel bağlantının aritmetiksel formülünün de biçimsel dizge içerisinde ispatlanabilmesini gerektirir. Ama bu, ifadenin kurulumundan dolayı, ifadenin aksinin de dizge içerisinde ispatlanabilir olması demektir. Tutarlı bir dizgede bir ifadenin hem kendisi hem de aksinin ispatının verilebilmesi mümkün olmadığı için, dizge içerisinde Gödel cümlesinin ispatlanamayacağı böylece gösterilmiş olur. Diğer taraftan, ifadenin aksinin ispatının verilebilmesi, dizge tutarlı olduğu için, ifadenin kendisinin dizge içerisinde ispatlanamaz olmasını gerektirir. Bu durumda, aritmetiksel formülün tanımı gereği, ifadenin ispatının verilebileceği biçimsel bağlantısının aritmetiksel formülünün de ispatlanamaz olması gerekmektedir. Ama ifadenin aksinin ispatlanabilmesi aynı zamanda, ifadenin kurulumundan dolayı, ifadenin ispatının verilebileceği biçimsel bağlantısının aritmetiksel formülünün ispatlanabilmesi de demektir. Bu durum sözü edilen biçimsel bağlantının aritmetiksel formülünün belirli bir türden kurulduğu koşullarda dizgenin tutarlılığı ile çelişir. Böylece dizge tutarlı ise, Gödel cümlesinin aksinin de ispat edilemeyeceği gösterilmiş olur.”³¹⁸

Bu noktada önemli bir hususun altını çizmek isteriz: Gödel cümlesi her biçimsel dizge için farklı bir cümledir. Biçimsel bir dizgeye yeni aksiyomlar eklemek suretiyle dizgede bulunan Gödel cümlesinin karar verilemezliği problemini bertaraf edebiliriz. Ancak bu durumda elimizde başka bir dizge olacaktır. Bu ise yeni bir karar verilemeyen Gödel cümlesi anlamına gelmektedir.

“İkinci teorem için, yani biçimsel dizgenin tutarlılığının dizgenin kendi içerisinde ispatlanamayacağını göstermek için, öncelikle dizgenin tutarlılığını

³¹⁸ Arslan, Gök, “Gödel’in Tamamlanamazlık Teoremlerinin Ardından Matematiğin Temelleri Tartışmaları”, s. 9-10.

ifade eden bir biçimsel bağıntının aritmetiksel formülü kurulur. Bu durumda birinci teoremin ilk kısmı, eğer dizgenin tutarlılığını ifade eden biçimsel bağıntının aritmetiksel formülü dizge içinde ispatlanabilirse, eşdeyişle dizge tutarlıysa, Gödel cümlesinin ispatının verilebileceği biçimsel bağıntısının aritmetiksel formülünün aksinin de ispatlanabileceğini gösterir. Bu ise, cümlelerin kurulumu nedeniyle, Gödel cümlesinin dizge içinde ispatlanabileceğinin gösterilebilmesi demektir. Ama bu durum birinci teoremin kendisiyle çelişmektedir. Bu nedenle biçimsel dizgenin tutarlılığının ispatı dizgenin kendi içerisinde verilemez. Burada ilerideki tartışmalarda da önemli olacak bir nokta ikinci teoremin biçimsel dizgenin tutarlılığının dizge içerisinde verilemeyeceğini göstermesidir. Dizgenin tutarlılığının matematiksel olarak da kabul görebilecek başka yöntemlerle verilebilmesinin önü açıktır.

Her iki teorem için de göz önünde bulundurulması gereken başka bir nokta ise teoremlerin yukarıdaki alıntının da belirttiği gibi belirli bir miktar sonlu sayılar teorisi içeren dizgeler için geçerli olduğudur. Teoremlerde bahsi geçen Gödel sayısallaştırmasının yapılabilmesi ve biçimsel bağıntıların aritmetiksel formüllerinin kurulabilmesi için dizgenin belirli bir miktar aritmetik içermesi gerekir. Bu aritmetik Peano Aritmetiği olarak düşünülebilir.”³¹⁹

Gödel’in tamamlanamazlık teoremlerine ilişkin Çitil de şu tespitleri yapar:

“F, aritmetiğe ait doğru önermeleri temsil edebileceğimiz kadar yetkin bir biçimsel dizge olsun. Gödel’in birinci tamamlanamazlık teoremi şunu ifade eder: Şayet F tutarlı bir dizge ise bu biçimsel dizgede ispatı verilemeyen bir düzgün tamdeyim vardır. Eğer F ω -tutarlı ise bu düzgün tamdeyimin değil de biçimsel dizge içerisinde ispatlanamaz. Bu sonuca dayanarak Gödel, ikinci tamamlanamazlık teoreminde şunu ifade eder: Eğer aritmetiğin doğru önermelerini temsil edecek kadar yetkin bir biçimsel dizge tutarlı ise bu biçimsel dizgenin tutarlı olduğu aynı biçimsel dizge içerisinde ispatlanamaz.”³²⁰

İkinci tamamlanamazlık teoreminin ortaya koyduğu bu durum, matematiğin içsel sınırlılıklarının olduğunun fark edilmesi bakımından da oldukça kritik bir yerde durmaktadır. Artık matematiğin temelleri üzerine araştırma yapmayı amaçlayan bütün araştırmacılar bu içsel sınırlılıkları hesaba katmak durumundadır. Putnam ve Conant konuya ilişkin şu tespitleri yapar:

³¹⁹ A.e., s. 11.

³²⁰ Çitil, *Matematik ve Metafizik*, s. 179.

“Gödel’in teoremlerinden sonra matematik felsefesinin problemleri artık daha da zorlaşmış [karmaşılaşmış] görünmektedir. Bunun neden böyle olduğunu anlamak adına bir an için Gödel teoremlerinin henüz kanıtlanmamış olduğunu ve sayı kuramındaki her tümcenin ya bir teorem ya da bir teoremin değillesi olduğunu düşünelim. Ardından sayı kuramında karşımız çıkan doğruluk ile sistem içerisindeki kanıtlanabilirliğin bir bakıma özdeş şeyler gibi görüldüğünü düşünebiliriz... Ancak Gödel teoremlerini kanıtlamıştır. Biz artık sayı kuramında doğruluğuna, kuramı ne kadar genişletirsek [yetkinleştirmeye çalışırsak] genişletelim, karar veremeyeceğimiz önermeler olduğunu biliyoruz.”³²¹

Bilindiği üzere, Gödel, tamamlanamazlık teoremlerini *Principia Mathematica*’yı temel alarak ispatlanmıştır. Ancak 1963’te A. Turing’in biçimsel dizgelerin tam ve genel bir tanımının verilmesine olanak sağlayan çalışmaları neticesinde, belirli bir miktar sonlu sayılar teorisi içeren tutarlı her biçimsel dizgenin karar verilemez önermeleri haiz olduğunu ve bu dizgenin tutarlılığının dizge içinde kalınarak gösterilemeyeceğini ifade etmiştir.³²²

Toparlayacak olursak, Gödel teoremleri matematiğe içkin olan kimi kısıtlılıkların olduğunu göstermiştir. Bununla birlikte Gödel’e göre yalnızca dil içerisinde kalınarak matematiksel doğrulukların bütünü kuşatılamaz. Bu mükerrer iddiaya çalışmanın son bölümünde yeniden dönecek ve bu iddia üzerinden Wittgenstein’a yönelik bir eleştiri getirmeye çalışacağız. Bundan sonraki bölümde ise Gödel teoremlerine Wittgenstein’ın nasıl baktığı hususunu irdelleyeceğiz.

3.1.2. Wittgenstein’in Bakış Açısından Gödel Teoremleri

Bilindiği üzere Gödel tamamlanamazlık teoremlerinin kanıtlamalarında metot olarak *reductio ad absurdum* yöntemini kullanır. Hem Brouwer hem de sıkı sonlucular *reductio ad absurdum* yönteminde *reductio varsayımının* kanıtlanmadan bırakıldığını, bu yüzden *reductio ad absurdum* yönteminin matematiksel anlamda geçerli bir yöntem olamayacağını savunurlar. Aynı deyişle, sıkı sonluculara göre *reductio ad absurdum* yöntemi matematiksel kanıtlamalarda kullanılabilecek meşru

³²¹Putnam H., Conant J., “On Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics”, **Proceedings of the Aristotelian Society**, Supplementary Volumes, Vol. 70, s. 245.

³²²Kurt Gödel, “Note added 28 August 1963”, (“Introductory Note to 1933” içinde), Ed. Feferman, 1986, s. 195.

bir yöntem değildir. Sıkı sonlucuların *reductio ad absurdum* yöntemini meşru bir yöntem olarak görmeyişlerinin altında bu yöntemin üçüncü halin imkânsızlığı ilkesinin kullanımına sınırsızca olanak tanınması yatar. Üçüncü halin imkânsızlığı ilkesinin kullanımı p önermesinin ya da $\neg p$ önermesinin kanıtlanabilir olduğunun kabulünü gerektirir. Wittgenstein ise üçüncü halin imkânsızlığı ilkesi ile ilgili mevzularda sıkı sonlucularla benzer düşüncelere sahiptir.

Wittgenstein *Remarks on the Foundations of Mathematics*'te Gödel'in tamamlanamazlık teoremleri ve bu teoremlerin kanıtlamaları hususunda iki temel eleştiri getirir. Bu eleştirilerin ilki Ek-III'te karşımıza çıkar.³²³ İkincisi ise kitabın VII. Bölümünde verilmiştir.³²⁴ Ek-III'te verilen değiniler Wittgenstein'in Gödel kanıtlamaları üzerine söyleyeceklerine giriş niteliğindedir. Wittgenstein bu bölümde "Bir sistem içerisinde doğru olan ama doğruluğu kanıtlanamayan önerme ne demektir?" diye sorgular. Çünkü daha önceden de ifade edildiği üzere, Wittgenstein'a göre bir dizgede bir önermenin doğruluğu, o dizge içerisinde o önermenin kanıtının verilebiliyor olmasına bağlıdır. Wittgenstein VII. Bölümdeki değinilerde ise Gödel'in teoremlerini anlaşılabilir kılmak adına başka bir dilde yeniden ifade etmeye çalışır.

Bu kısa girişin ardından Wittgenstein'in Gödel yorumunu daha detaylı incelemeye başlayabiliriz. Wittgenstein Ek-III'ün girişinde işe matematiksel tümcelerimizin önerme olup olmadığını sorgulayarak başlar. Bunu şöyle de söyleyebilirdik: Wittgenstein Ek-III'ün girişinde matematikte doğruluk fonksiyonları ile oyun oynayabileceğimiz tümceler olup olmadığını sorgular. Wittgenstein "2 x 2 = 4" önermesi ile "yağmur yağıyor" şeklindeki önermenin arasındaki ilişkinin oldukça yüzeysel olduğunu düşünür.³²⁵ Wittgenstein'a göre matematiksel önermeler kanıtlanana kadar doğru kabul edilemez.

Wittgenstein matematiksel önermelerin olgu durumunun tasvirinden çok, köpeğimize verdiğimiz emirler ile benzerlikler gösterdiğini düşünür.

³²³ Bkz, Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, s. 116-123.

³²⁴ Bkz, *A.e.*, s. 383-390.

³²⁵ Humphrey, "Ludwig Wittgenstein's Philosophy of Mathematics: The Search for a Clear View", s. 203.

“Birisi bize, yapılan bir çarpma işleminde bir hata olduğunu gösterdiğinde, dışarıda yağmur yağmazken dışarıda yağmur yağıyor dendiğinde kafamızı salladığımız gibi sallamayacak mıyız? Ama köpeğimiz istemediğimiz bir şeyi yaptığında, onu durdurmak için çeşitli el kol hareketleri yaparız.”³²⁶

Köpeğin davranışı her hangi bir olgu durumuna karşıt bir eylem değildir. Ama yağmurun yağması eylemi, yağmurun yağmaması eylemin karşıtı olan bir eylemdir. Denilebilir ki, bizim isteklerimizle köpeğimizin davranışı örtüşmediğinden köpeğimizin davranışı bizim isteklerimize karşıttır. Benzer bir şekilde, hatalı yapılmış bir çarpma işlemi de her hangi bir olgu durumunun karşıtı değildir. Sadece bizim doğru yapma isteğimizin karşıtıdır. Çünkü biz bu çarpma işlemini yaparken doğru sonucu bulmayı umuyoruzdur.

Wittgenstein Ek-III’te şu soruyu sorar:

“Russell’in sisteminde, bu sistem içerisinde kalınarak kanıtlanamayacak olan önermeler mi vardır? Öyle ise Russell’in sisteminde neye doğru önerme denilmektedir?”³²⁷

Wittgenstein’a göre ikinci sorunun cevabı şöyledir: Russell’in sisteminde bir önermenin doğruluğu ile önermenin meşru olarak ifade edilebilirliği aynı şeydir. Russell’in sisteminde meşru ifadeler iki çeşittir.

- Meşru bir Russellci kanıtlamanın son cümlesi
- Temel bir ilke

Wittgenstein’ göre bir Gödel cümlesi açık bir şekilde ne Russellci kanıtlamanın son cümlesidir, ne de temel bir ilkedir. Dolayısıyla Gödel cümleleri, Russell’in sisteminde, meşru ifadeler değildir. Gödel “doğruluk” ve “kanıtlanabilirlik” in aynı şey olmadıklarını düşünmektedir. Russell ise *Principia Mathematica*’da şöyle bir

³²⁶ Wittgenstein, **Remarks on the Foundations of Mathematics**, s. 117.

³²⁷ **A.e.**, s. 5.

anlayış benimsemiştir: Doğru'dan anlaşılması gereken, kanıtlanabilir olduğundan ifade edilebilir olandır. Açıkça görüldüğü üzere Russell'ın bu anlayışı ile Gödel'in doğru ile kanıtlanabilirliği bütünüyle birbirinden ayıran anlayışı çelişmektedir.

Wittgenstein Ek-III'te şöyle bir argüman ileri sürer:

“Birisinin şöyle dediğini düşünelim: “Russellcı sembolleştirmeyi kullanarak bir önerme (bundan sonra bu önerme için p sembolünü kullanacağım) inşa ettim. p önermesi temel tanımlar gereği Russell'ın sistemi içerisinde kanıtlanamaz.” Şimdi p önermesinin hem doğru hem de kanıtlanamaz olduğunu söylememeliyim? p önermesi yanlış olsaydı, kanıtlanabilir mi olacaktı? Böyle bir şey mümkün olabilir mi?”³²⁸

Wittgenstein'a göre Russell'ın sisteminde “doğru” demek sistem içerisinde kalınarak kanıtlanabilir olan demektir. Benzer bir akıl yürütme ile “yanlış” olan da değil sistem içerisinde kanıtlanabilir olandır. Diğer bir deyişle, p yanlıştır demek, $\neg p$ 'nin doğruluğu Russell'ın sisteminde kanıtlanabilirdir demektir. Gödel'in kanıtlamaları *Principia Mathematica*'da geçen birinci basamak mantığının kanıtlama süreçlerinin aritmetikleştirilmesine dayanır. Wittgenstein ise p ve $\neg p$ 'nin aynı zamanda aktüel olarak türetilbilmeleri fikrini sorunlu bulur. Diğer bir deyişle, Wittgenstein'a göre aynı zamanda aktüel olarak ya p ya da $\neg p$ türetilbilir. Her ikisinin de aynı zamanda türetilmesi çelişki doğurur.

Wittgenstein'ın Gödel eleştirisini doğru yorumlayabilmek için şu hususu gözden kaçırmamak gerekir: Wittgenstein, Gödel teoremlerini matematiksel açıdan hatalı bulduğu için eleştirmez. Wittgenstein, Gödel'in teoremlerinin matematiksel dil ve matematiksel dilin kullanımı neticesinde geçersiz kılınabileceğini düşünür.³²⁹

Meseleyi daha sarıh açıklamak adına, Wittgenstein'ın matematiksel önermeler ve bu önermelerin kanıtları hakkındaki görüşlerini tekrar edelim: Wittgenstein'a göre matematiksel bir önerme ancak ve ancak kanıtlanınca anlamlı bir matematiksel

³²⁸ A.e., s. 118.

³²⁹ Humphrey, “Ludwig Wittgenstein's Philosophy of Mathematics: The Search for a Clear View”, s. 209.

önerme olur. Gödel ise doğru olduğu üst-matematiksel akıl yürütmelerle bilinebilecek olan ama doğruluğu hiçbir şekilde kanıtlanamayacak önermeler olduğunu gösterdi. Wittgenstein, Gödel'in bu akıl yürütmelerinin matematiksel akıl yürütmeler olmadığını düşünür ve ona göre bu kanıtlamalar matematiksel bir kanıtın sahip olması gereken sarihliği haiz değildir. Dolayısıyla Wittgenstein'a göre Gödel'in kanıtlamaları daha sarih kanıtlamalar adına bir kenara bırakılabilir.

Bu bölümü sonlandırmadan önce bazı Wittgenstein yorumcularının *Remarks on the Foundations of Mathematics*'te konu edilen Gödel eleştirileri üzerinde neler söylediklerine kısaca değineceğiz. Birçok yorumcu, Wittgenstein'ın *Remarks on the Foundations of Mathematics*'te Gödel'in tamamlanamazlık teoremleri üzerine söylediklerini keskin bir zekânın önemsiz ürünleri olarak nitelendirir.³³⁰ Dummet, *Truth and Other Enigmas*'ta *Remarks on the Foundations of Mathematics* hakkında şunları söyler: "... Bazı pasajlar birbirleriyle çelişmektedir; bazıları ise inandırıcı olmaktan bir hayli uzaktır; bazılarının neye, hangi iddialara karşı çıktığı dahi açık değildir; Gödel'in tamamlanamazlık teoremlerine ilişkin pasajlar ise oldukça özensizdir ve belirgin hatalar içermektedir."³³¹ Dummet bu bariz hatalarla ilgili ayrıca şu tespitleri de yapar: Wittgenstein *Remarks on the Foundations of Mathematics*'i hiçbir zaman yayınlamak amacıyla yazmamıştır. O notlar, derslerde öğrencileri tarafından tutulan dağınık notlardan öte bir anlam ifade etmemektedir.³³² Kreisel ise, *Wittgenstein's Remarks* adlı makalesinde, Wittgenstein'ın Gödel yorumun oldukça savruk ve tutarsız olduğunu iddia eder.³³³ Alan Ross Anderson da *Mathematics and Language Game*'de, Wittgenstein'ın Gödel yorumunun ardından açıklık konusunda öncesine göre daha kötü bir durumda olduğumuzu söyler.³³⁴ Ray Monk da yazdığı Wittgenstein biyografisinde, Wittgenstein'ın Gödel yorumunun matematiksel mantık eğitimi alan bir kişi için şaşırtıcı bir biçimde ilkel görüldüğünü belirtir.³³⁵ Aslına bakılırsa, genellikle Wittgenstein'ın Gödel yorumunu keskin bir

³³⁰ A.e., s. 199.

³³¹ Dummett, *Truth and Other Enigmas*, s. 166.

³³² Michael Dummett, "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", *The Philosophical Review*, Vol. 68, No. 3, s. 324.

³³³ Kreisel, "Wittgenstein's Remarks", s. 153.

³³⁴ A. R. Anderson, "Mathematics and the Language Game", *The Review of Metaphysics*, Vol. 11, 1958, s. 451.

³³⁵ Monk, *Wittgenstein*, s. 427.

zekânın önemsiz ürünleri olarak gören yorumcular, aynı zamanda Wittgenstein'in matematik felsefesinin bütününe benzer sıkıntıları haiz olduğunu da düşünmektedir.³³⁶

Bununla birlikte, sayıca az olmakla beraber, Wittgenstein'in Gödel yorumunun oldukça önemli ve dikkate değer olduğunu düşünen yorumcular da vardır. Bu yorumculara göre Wittgenstein'in *Remarks on the Foundations of Mathematics*'teki Gödel'e ilişkin değerlerini bağlamlarından koparıp kendi başlarına değerlendirdiğimizde oldukça savruk olduklarını düşünebiliriz. Ama bu değerleri bağlamları içerisinde ve diğer değerlerle ve Wittgenstein'in matematik felsefesinin bütünüyle ilişkili olacak şekilde değerlendirdiğimizde, onların oldukça zekice kurgulanmış ve oldukça aydınlatıcı değerler olduğunu fark ederiz. Wittgenstein'in Gödel yorumunu destekler nitelikteki bir yaklaşımı Charles Kielkopf'un *Strict Finitism*'inde bulabiliriz.³³⁷ Kielkopf'a göre Gödel'in kanıtlamaları, "Matematiksel bir önermenin bizim kanıtlamamızdan bağımsız olarak ve bizim kanıtlamamıza önceliği olacak şekilde anlamı vardır" şeklindeki felsefi varsayıma dayanır. Kielkopf'a göre bu varsayım, matematikçiyi mucitten ziyade kâşif olarak gören bir anlayışın ürünüdür. Bu noktayı biraz açmaya çalışalım: Bilindiği üzere Wittgenstein matematik felsefesi bağlamında bizim dışımızda var olan matematiksel nesneler ya da matematiksel bir gerçeklik olmadığını savunur. Bu savununun doğal bir sonucu olarak ortaya şöyle bir sonuç çıkar: Matematikçi bir şeyi keşfetmez, dil içerisinde icat eder. Dolayısıyla Wittgenstein için matematikçi kâşif değil mucittir. Bilindiği üzere, Gödel matematik felsefesi bağlamında daha çok Plâtoncu bir konumda durmaktadır. Şöyle de denilebilir: Gödel'e göre matematiksel nesneler ya da matematiksel gerçeklik bizim dışımızda vardır. Şu önermeyi düşünelim: "p önermesi A aksiyom sisteminin teknikleriyle kanıtlanabilir." Kielkopf, bu önermenin sıkı sonluculara göre ya kanıtlanabilir (bu durumda Gödel'in kanıtları verilemez) ya da anlamsız olduğunu, bu sebeple de matematiksel bir kanıtlamada kullanılamaz olduğunu ifade eder. Dolayısıyla Kielkopf'a göre Wittgenstein'in Gödel'in

³³⁶ Humphrey, "Ludwig Wittgenstein's Philosophy of Mathematics: The Search for a Clear View", s. 200.

³³⁷ Bkz. C. F. Kielkopf, *Strict Finitism*, Mouton & Co. N. V, The Hague, 1970, s. 113.

kanıtlamalarına ilişkin güttüğü endişeler kanıtlamaların meşruluğunu yakından ilgilendiren gerçek endişelerdir.

Daha önceden de belirtildiği üzere Wittgenstein *Remarks on the Foundations of Mathematics*'in VII. Bölümünde amacının Gödel'in kanıtlamalarını geçersiz kılmak olduğunu söyler.³³⁸ Wittgenstein'a göre matematiksel bir problemin çözümü de matematiksel olmalıdır ve bu çözüm pratik hayatta karşımıza çıkması muhtemel bir soruna bir cevap verir nitelikte olmalıdır. Neyin matematiksel olduğunu Wittgenstein bağlamında daha önce belirtmiştik. Tekrar etmek gerekirse: Matematiksel olmanın ölçütü kanıtlanabilir olmaktır. Wittgenstein için matematik, önceden belirlenmiş sınırları olmayan bir etkinliktir. Karşımıza daha önce kimsenin karşısına çıkmamış yeni bir problem çıkabilir. Burada bakmamız gereken iki şey vardır. Birincisi, "Eldeki kanıtlama teknikleri ile bu problemleri çözebiliyor muyuz?", ikincisi de "Bu problemi çözecek yeni bir teknik inşa edebiliyor muyuz?" Bunlardan ikisini de yapamıyorsak bu problem matematiğin bir problemi değildir. Wittgenstein bu sebeple Gödel teoremlerinin matematiksel teoremler olmadığını düşünür.

3.2. Wittgenstein'in Cantor Eleştirisi

Wittgenstein'in Cantor eleştirisine geçmeden önce, Cantor'un matematiksel sonsuzluk hakkındaki çalışmalarını kısaca açıklamaya çalışacağız. Cantor'un sonsuzluk kanıtlamalarının çalışmaya dâhil ediliyor oluşunun gerekçesi şudur: Wittgenstein'in özellikle ikinci döneminin temel yönelimlerinden olan sonluculuk, ancak sonlu aralıkta yapılan matematiğin meşru olduğunu salık verir. Bu noktada Wittgensteinci sonluculuk ile Cantor'un kanıtlamalarının örtüşmediği açıktır. Bu örtüşmemenin gerekçeleri ve sonuçlarının anlaşılabilmesi için Cantor'un kanıtlamalarının açık bir şekilde anlaşılması gerekir.

3.2.1. Cantor'un Sonsuzluk Kavramına İlişkin Çalışmaları

Sonsuzluk kavramı 19. yüzyılın sonlarına kadar matematiksel bir kavram olarak tanımlanmamıştı. Öte yandan, sonsuzluk kavramının içeriğine ilişkin matematikçiler arasında da bir uzlaşım yoktu. Fakat Cantor'un kümeler kuramı

³³⁸ Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, s. 383.

üzerine yaptığı çalışmalar, sonsuz kavramının matematiksel olarak tanımlanmasına olanak sağladı.³³⁹ Cantor'un çalışmalarının detaylarına geçmeden evvel problemin daha net bir şekilde anlaşılması adına meşhur Hilbert Oteli paradoksuna kısaca değinmenin yerinde olacağı kanaatindeyiz.

Hilbert sonsuz sayıda odası olan ve odalarının numarası 0, 1, 2, 3,... (doğal sayılar kümesinin bütün elemanları) şeklinde düzenlenmiş kurgusal bir otel düşünmemizi ister. Başka bir şekilde ifade edecek olursak, bu otel öyle bir oteldir ki, hangi doğal sayıyı alırsanız alın numarası o doğal sayı olan bir odası mutlaka bulunmaktadır. Hilbert kurgusuna şöyle devam eder, bu otele sonsuz sayıda koltuğu ve her koltuğunda bir yolcu olan bir otobüs geldiğini düşünelim. Koltuklarda tıpkı otel odaları gibi 0, 1, 2, 3,... şeklinde numaralandırılmış olsun. Koltuk numarası 0 olan yolcu 0 numaralı odaya, koltuk numarası 1 olan yolcu 1 numaralı odaya, koltuk numarası 2 olan yolcu 2 numaralı odaya... olacak şekilde bütün yolcuları bu otele yerleştirmek mümkündür. Peki, otele yukarıda bahsedilen otobüsle aynı özellikleri taşıyan iki otobüs geldiğini düşünelim. Bu durumda karşımıza şöyle bir soru çıkacaktır: Her iki otobüsteki yolcuların tamamını her odaya bir tane yolcu düşecek şekilde bu otele yerleştirebilir miyiz? İlk bakışta sezgisel olarak şöyle bir sonuç çıkmaktadır: Başlangıçtaki yerleştirme hiçbir yolcu ve hiçbir oda boşta kalmayacak şekilde yerleştirilmişti, şimdi ise oda sayısı aynı kalmakla beraber yolcu sayısı iki katına çıktı, dolayısıyla bu yerleştirmeyi yapmak mümkün değildir. Peki, matematiksel olarak bu eşleme mümkün müdür? Soruyu çözüme kavuşturmak adına aşağıdaki modellemeyi inceleyelim.

- İlk olarak birinci otobüse A otobüsü, ikinci otobüse de B otobüsü diyelim, ardından yolcuları kodlayalım. Karşımıza şöyle bir tablo çıkacaktır:
- A otobüsünün 0 numaralı koltuğunda oturan yolcunun kodu (A,0)
- A otobüsünün 1 numaralı koltuğunda oturan yolcunun kodu (A,1)
- A otobüsünün 2 numaralı koltuğunda oturan yolcunun kodu (A,2) olacaktır.

³³⁹ Ali Nesin, **Sezgisel Kümeler Kuramı**, 4. Basım, Nesin Yayınevi, İstanbul, 2010, s. 238-239.

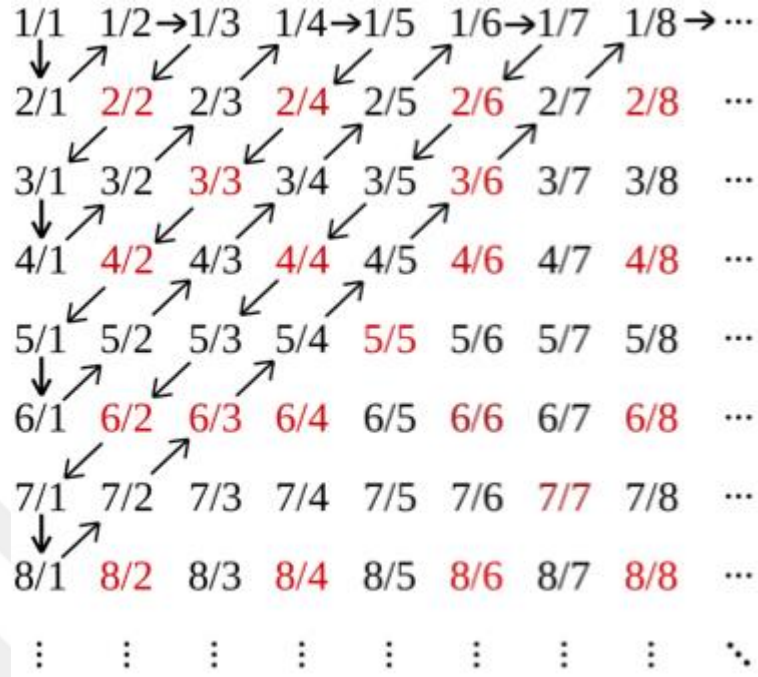
- Bu şekilde A otobüsteki bütün yolcuları kodlayalım. Karşımıza genel terimi (A,n) olan sonsuz bir dizi çıkacaktır. Şimdi aynı işlemi B otobüsü için de yapalım.
- B otobüsünün 0 numaralı koltuğunda oturan yolcunun kodu $(B,0)$
- B otobüsünün 1 numaralı koltuğunda oturan yolcunun kodu $(B,1)$
- B otobüsünün 2 numaralı koltuğunda oturan yolcunun kodu $(B,2)$ olacaktır.

Görüldüğü üzere B otobüsündeki bütün yolcular kodlandığında da karşımıza genel terimi (B,n) olan sonsuz bir dizi çıkacaktır. Şimdi A otobüsündeki yolcuları kodlarında yer alan sayının iki katı olan odalara olacak şekilde yerleştirelim. Yani $(A,0)$ kodlu yolcuyu numarası 0 olan odaya, $(A,1)$ kodlu yolcuyu numarası 2 olan odaya, $(A,2)$ kodlu yolcuyu numarası 4 olan odaya, ..., (A,n) kodlu yolcuyu numarası $2n$ olan odaya yerleştirelim. Görüldüğü üzere A otobüsündeki bütün yolcular her odaya bir kişi olacak şekilde yerleştirildi ve otelin tek numaralı odaları hala boştur. Şimdi B otobüsündeki yolcuları da kodlarındaki sayının iki katının bir fazlası olan odalara yerleştirelim. Yani $(B,0)$ kodlu yolcuyu numarası 1 olan odaya, $(B,1)$ kodlu yolcuyu numarası 3 olan odaya, $(B,2)$ kodlu yolcuyu numarası 5 olan odaya, ..., (B,n) kodlu yolcuyu numarası $2n + 1$ olan odaya yerleştirelim. Bu durumda B otobüsündeki bütün yolcular da her odaya bir kişi olacak şekilde yerleştirilmiş olacaktır. Ve her iki otobüsteki bütün yolcular netice itibarıyla Hilbert otelindeki odalara her odada bir yolcu olacak şekilde yerleştirilmiş olacaktır. Peki, nasıl oluyor da böyle bir eşleme mümkün olabiliyor? Burada bizi yanıltan husus, sonsuzu diğer sayılarda olduğu gibi nicelik bildiren bir kavram olarak görmemizdir. Oysa sonsuz matematiksel bir nesneye yüklenebilecek bir nicelik değildir.

Konuya ilişkin bir örnek de doğal sayılar ve tam sayılar kümesinden verilebilir. Bilindiği üzere doğal sayılar $N = \{0,1,2,3,4,\dots\}$, tam sayılar ise $Z = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ şeklinde gösterilebilir. “Hangi kümenin eleman sayısı daha fazladır?” şeklinde bir soruyla karşı karşıya olduğumuzu düşünelim. Yukarıda anılan Hilbert oteli örneğinde olduğu gibi ilk bakışta tam sayılar kümesinin eleman sayısının daha fazla olduğu düşünülebilir. Ama bu doğru değildir. Çünkü öncelikli olarak burada sorulan eleman sayısı kavramı bir sayısal niceliğe gönderme yapmaktadır. Fakat bu

kümelerin eleman sayıları sonlu olmadığından bu soru anlamını yitirmektedir. Biz bugün matematiksel olarak bu iki kümenin elemanları arasında bire-bir ve örten bir eşleme yapabiliyoruz. Başka bir şekilde ifade edecek olursak, tam sayılar kümesinin her elemanını doğal sayılar kümesindeki bir elemanla tam sayılar kümesinde hiç boşta eleman kalmayacak ve her eleman doğal sayılar kümesinde yalnızca bir elemana gidecek şekilde eşleyebiliyoruz. Şöyle bir fonksiyon tanımladığımızı düşünelim: “ $f(n) = 2n$ ” Bu fonksiyon 0 ve $\mathbb{Z}^+$ ’i doğal sayılar kümesinin çift sayılarına bire-bir ve örten olarak eşler. $g(n) = 2n - 1$ fonksiyonu ise $\mathbb{Z}^+$ ’i doğal sayılar kümesinin tek sayılarına bire-bir ve örten olarak eşler. Buradan çıkacak en önemli sonuç, tam sayılar kümesinin her bir elemanının doğal sayılar kümesinin elemanları ile birebir ve örten olacak şekilde eşlenebileceği ve dolayısıyla bu iki kümenin eş sayılı olduklarıdır.

Doğal sayılar kümesi ile tam sayılar kümesinin eş sayılı olduklarına ikna olduk. Peki, pozitif tam sayılar kümesi ile rasyonel sayılar kümesinin eleman sayılarını karşılaştırmamız istendiğinde ne gibi bir tablo ile karşı karşıya kalırız? $\mathbb{Q}$ simgesi ile gösterilen rasyonel sayılar kümesinin elemanları, a ve b tam sayılar, $b \neq 0$, a ve b ortak böleni olmayan, başka bir ifadeyle aralarında asal olan ve a/b şeklinde ifade edilen sayılardır. Yukarıdaki örneklerde olduğu gibi ilk bakışta rasyonel sayıların sayısının pozitif tam sayıların sayısından daha fazla olduğu düşünülebilir. Yukarıdaki örnekle benzer bir tablo bu örnek için de geçerlidir. Yani rasyonel sayılar kümesi ile pozitif tam sayılar kümesi arasında da bire-bir ve örten bir fonksiyon bulmak mümkündür. Tek farkla, bu sefer bu fonksiyonu bulmak için daha fazla teoreme ihtiyacımız vardır. Tezimizin amacından uzaklaşmaması adına bu teoremlerin detaylarına girmeyeceğiz. Ancak bu eşlemeyi oldukça yetkin bir biçimde açıklayan aşağıdaki görsel üzerinde duracağız.



Şekil 3.1.: Cantor'un Köşegen Argümanı.³⁴⁰

Oklar takip edildiği takdirde rasyonel sayılar kümesinin her bir elemanının pozitif tam sayılar kümesinin bir elemanı ile eşlendiği görülecektir. Biraz açmak gerekirse, yukarıda verilen tablo genişletildiğinde bütün rasyonel sayıları içereceği açıkça görülmektedir. Burada eşlemeyi bir satır ya da bir sütun üzerinden yapmaya kalkıştığımızda, herhangi bir satır ya da sütun sonsuzca genişlediğinden, başka bir satır ya da sütuna geçmek mümkün olmuyor. Ancak eşlemeyi köşegenler boyunca okları takip ederek şekilde görüldüğü gibi yaptığımız takdirde rasyonel sayılar kümesinin elemanları ile pozitif tam sayılar kümesinin elemanları arasında bire-bir ve örten bir eşleme yapabiliyoruz. Diğer bir deyişle, 1/1'i 1'e, 2/1'i 2'ye, 1/2'yi 3'e, 1/3'ü 4'e, 2/2'yi 5'e... olacak şekilde eşlemeyi sürdürdüğümüzde rasyonel sayılar kümesi ile pozitif tam sayılar kümesinin elemanlarının birebir ve örten olarak eşlendiğini görürüz. Dolayısıyla rasyonel sayılar kümesi ile pozitif tam sayılar kümesi aynı miktarda eleman içerirler.

³⁴⁰ (Çevrimiçi) <http://www.acikbilim.com/2013/04/dosyalar/sonsuzlugu-sayamamak.html> 04 Nisan 2018

Yukarıda verilen örnekler hesaba katıldığında şöyle bir tanımlama yapmak mümkündür: Doğal sayılar kümesi ile arasında birebir ve örten bir fonksiyon bulabildiğimiz, eşdeyişle elemanlarını doğal sayılarla birebir ve örten olacak şekilde eşleyebildiğimiz herhangi bir X kümesi sayılabilir çoklukta elemana sahip bir kümedir. Matematikte bu özellikleri haiz kümeler için **sayılabilir küme** (*İng.* Denumerable set) ifadesi kullanılır.

Tam sayılar kümesinin ve rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir kümeler olduğu yukarıda gösterildi. Peki, aynı şeyi reel sayılar kümesi için göstermek mümkün müdür? Cantor reel sayılar kümesinin **sayılamaz küme** (*İng.* Non-Denumerable set) olduğunu kanıtlamıştır. Bu kanıtlamanın detaylarına girmeden konunun özünün anlaşılması adına kısaca reel sayıların sayılamaz olduğunu göstermeye çalışacağız. $[0, 1]$ aralığını düşünelim. Bu aralıktaki sayılar $0,1415329264\dots$ gibi ondalık uzantılı olarak yazılabilir. Şimdi kanıtlamaya başlayabiliriz:

Kanıt: Varsayalım ki $[0, 1]$ aralığında sayılabilir sonsuzlukta sayı olsun, yani bu aralıktaki sayıları doğal sayılar kümesinin elemanları ile birebir ve örten olacak şekilde eşleyebiliyoruz. Diğer bir deyişle, bu aralıktaki sayıları belirli bir sıralamayla listeleyebiliriz. Sözelimi, aşağıdaki sıralamayı ele alalım ve bu sıralamanın $[0, 1]$ aralığındaki bütün reel sayıları içerdiğini düşünelim:

1.Sayı: $0,13567675\dots$

2.Sayı: $0,2567890\dots$

3.Sayı: $0,0021285\dots$

4.Sayı: $0,1427134\dots$

5.Sayı: $\dots$

$\dots$

$\dots$

Şimdi şu kural uyarınca bir x sayısı oluşturalım: 1.Sayı'nın ilk ondalık basamağına bakalım ve bu rakamdan farklı bir rakamı alıp x sayısının ilk basamağı olarak yazalım. Aynı şekilde x sayısının ikinci, üçüncü,... basamaklarını da oluşturalım. Şöyle ki, x sayısının virgülden sonraki ilk basamağı 1'den farklı, ikinci basamağı 5'ten farklı, üçüncü basamağı 2'den farklı, dördüncü basamağı 7'den farklı... olacaktır. Dikkat edecek olursak x sayısı $[0, 1]$ aralığında bir reel sayı olmasına karşılık, bu listede yer alan sayılardan en az bir ondalık basamakta farklı olacaktır ve dolayısıyla bu listede yer almayacaktır. Yukarıda verilen liste rastgele verilmiş bir listedir ve başka bütün listeler için aynı kural izlendiğinde aynı sonucun ortaya çıktığı görülecektir. Şimdi x sayısının $[0, 1]$ aralığında bir reel sayı olmasına karşılık bu listede yer almaması bir çelişkidir. O zaman ilk başta varsaydığımız $[0, 1]$ aralığında sayılabilir sonsuzlukta sayı vardır önermesi yanlış olacaktır. Dolayısıyla bu önermenin değili olan $[0, 1]$ aralığında sayılabilir sonsuzlukta sayı var değildir önermesi doğru olacaktır. Aynı deyişle, $[0, 1]$ aralığında sayılamaz sonsuzlukta sayı vardır.

Ezcümle, Cantor doğal sayılar, tam sayılar ve rasyonel sayılar kümelerinin sayılabilir kümeler ve reel sayılar kümesinin de sayılamaz küme olduğunu matematiksel olarak kanıtlamıştır. Cantor'un kanıtlamaları matematikte birimler ve birimlerin art ardılığı üzerinden teşhis edilemeyecek bir gerçeklik alanının olduğunu göstermiştir. Çalışmanın bundan sonraki bölümünde, Wittgenstein'in Cantor'un bu bölümde değinilen kanıtlamaları hakkında getirdiği eleştiriler üzerinde duracağız.

3.2.2. Wittgenstein'in Cantor Yorumu

Bu bölümde, Wittgenstein'in Cantor'un kanıtlamaları üzerindeki düşüncelerini aktaracağız.

Wittgenstein, Cantor'un kanıtlamalarını şöyle yorumlar: Cantor bize, verili herhangi bir ondalık sayı dizisinde diğerlerinden farklı bir ondalık sayıyı nasıl belirleyeceğimize ilişkin bir metot verdi.³⁴¹ Bir bakıma Wittgenstein'a göre Cantor'un metodu bütünüyle genel bir metot olarak karşımızda durmaktadır.

³⁴¹ Humphrey, "Ludwig Wittgenstein's Philosophy of Mathematics: The Search for a Clear View", s. 223.

Wittgenstein, Cantor'un metodunun potansiyel olarak yanıltıcı bir metot olduğunu düşünür. Çünkü Wittgenstein'a göre, matematikte genel/özel şeklinde bir ayrım yoktur. Wittgenstein *Philosophical Remarks*'ta bir genellemenin aynı anda hem empirik hem de kanıtlanabilir olamayacağını ifade eder.³⁴² Wittgenstein'a göre matematikte bir genel önerme sadece oyunun başka bir kuralı olarak görülebilir. Bu sebeple genel önermeler matematiksel önerme olarak kullanışsızdır ve anlamsızdır.

Cantor'un köşegen metodu, bu bölümün girişinde de zikredildiği üzere, verili herhangi bir ondalık sayı dizisinde diğerlerinden farklı olan ondalık sayıyı tespit etmek amacıyla ortaya atılmıştır. Fakat bilindiği gibi, Cantor'un köşegen metodu sonraları onun sonsuzluk üzerine geliştirdiği söylemlerin merkezine oturmuştur. Matematikte aktüel sonsuzun varlığını reddeden Wittgenstein, doğal olarak Cantor'un köşegen metodunun sonsuzluk üzerine söylemler üreten bu kullanımına karşı çıkar. Monk, Wittgenstein'ın Cantor'un kanıtlamalarına karşı çıkışını ve öfkesini şöyle aktarır.³⁴³

“Wittgenstein, bu kanıtlamaya duyduğu nefreti ve bu tür kanıtlamaların yalnızca cazibeleri yüzünden (bununla muhtemelen, birbirinden farklı sonsuz sayıda sonsuz asal sayı olduğunun kanıtlanabileceğinin söylenmesinin ortaya koyduğu çekiciliği kastetmektedir) ilgi gördüğünü ifade etmişti. Bu cazibenin sonuçlarını ve matematikle ilişkilerini göstermek için elimden geleni yaparım demişti. “Matematik olduğu için... yadsınamaz gibi görünüyor ve bu durum ona daha da büyük bir cazibe kazandırıyor. Bu ifadeyi çevreleyen unsurları açıklayacak olursak, bunun tamamen farklı bir biçimde de ifade edilebileceğini görürüz. Onu öyle bir tanımlayabilirim ki, pek çok insan için cazibesini kaybeder ve kesinlikle benim için de kaybedecektir.” O halde amaç matematiğin yeniden yorumlanmasıydı: Cantor'un kanıtlamasıyla açılmış görünen matematiksel âlem, matematikçilerin keşiflerini bekleyen büyüleyici bir dünya olarak değil de bir bataklık, felsefi karmaşaların yaşandığı bir bataklık olarak sunuluyordu. Matematikçi Hilbert bir defasında şöyle demişti: “Kimse bizi Cantor'un yarattığı cennetten kovamayacak.” Wittgenstein ise sınıfına “Kimseyi bu cennetten kovalamayı düşünmediğimi söyleyebilirim,” diye anlatmıştı. “Çok farklı bir şey yapacağım; size bunun bir cennet olmadığını göstermeye çalışacağım –böylece kendi rızanızla orayı terk edeceksiniz.”³⁴⁴

³⁴² Wittgenstein, *Philosophical Remarks*, s. 145.

³⁴³ Monk, *Wittgenstein*, s. 591.

³⁴⁴ Wittgenstein, *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, s. 103.

Wittgenstein, Cantor'un köşegen metodunun bu kullanımını **dil tarafından büyülenmenin klasik bir örneği** olarak nitelendirir. Bu hususta yapılacak muhakemeyi derinleştirmek adına şunlar söylenebilir: Wittgenstein'a göre matematiksel bir kavram için, elde o kavramı inşa edecek bir yöntem yok ise, o kavram vardır denilemez. Ayrıca Wittgenstein'a göre sonlu sayıda kuralı kullanarak bir resim inşa edemediğimiz hiçbir matematiksel kavramdan vardır diye söz edilemeyeceğini düşünür. Wittgenstein'ın Cantor eleştirisinin zemininde de bu düşünceler yatar. Ona göre Cantor "Sonlu adımda inşa edilemeyen matematiksel kavramlar vardır" demekten öte bir şey dememektedir.

Wittgenstein'a göre Cantor'un kanıtlarının bilim çevrelerinde bu denli büyük ilgi uyandırmasının altında bu çevrelerin analizi (*İng.* calculus) yanlış yorumlamaları yatmaktadır. Wittgenstein köşegen sayının (sayıyı hesaplamada köşegen metodun kullanılması neticesinde elde edilen sayı) ve köşegen sayının matematiksel çerçevesinin gramatik araştırma yapmak için kullanılabileceğini düşünür. Bunun dışında köşegen metodun matematiksel bir araştırmada kullanılması ise Wittgenstein'a göre sorunludur. Çünkü köşegen yöntemi matematikçiye arzu ettiği bir tek geçerli sonuç vermemektedir. Diğer bir deyişle, köşegen yöntemi herhangi bir sonsuz ondalık sayı dizisinden sonsuz sayıda sonuç dizisi çıkarmaktadır. Wittgenstein'a göre burada sorunlu olan kısım şudur: Bir matematik probleminin çözümünün tek bir yolu olması gerekir. Ama köşegen sonuç bize sonsuz sayıda sonuç olasılıkları sunmaktadır. Bu ise ortaya sonsuz sayıda çözüm yolu çıkarmaktadır. Bu bakımdan Wittgenstein'a göre Cantor'un köşegen yöntemi vaat ettiği farklı ondalık sayıyı bulma işini yapamamaktadır.³⁴⁵

Wittgenstein, Cantor'un kanıtlamalarında sıklıkla anılan sayılabilir çokluk ve sayılamaz çokluk gibi kavramları ve bu kavramların kullanımlarını da matematiksel bir etkinlik olarak görmez. Bu sebeple de X kadar sayı sayılamazdır gibi söylemler Wittgenstein için hiçbir anlam ifade etmez.³⁴⁶ "Birisinin şöyle bir şey söylediğini varsayalım; X sayısına/kavramına "sayılamaz" derim ancak ve ancak bu kavram altına düşen sayılardan oluşan herhangi bir dizinin köşegen sayısı da bu kavram

³⁴⁵ Wittgenstein, **Remarks on the Foundations of Mathematics**, s. 126.

³⁴⁶ A.e., s. 128.

altına düşüyorsa.”³⁴⁷ Bunun devamında Wittgenstein “sayılamaz” kavramının ne işe yaradığını sorar.³⁴⁸ Wittgenstein sayılamaz kavramının kendi başına düşünüldüğünde matematiksel anlamda hiçbir işe yaramadığını düşünür. Bununla birlikte Wittgenstein’a göre sayılamaz kavramının dayanağı olan köşegen metodun sonsuza ilişkin olmayan çeşitli meşru kullanımları vardır. Sözgelimi, Wittgenstein’a göre köşegen yöntemi bütün irrasyonel sayıları sayılabilir diziler halinde düzenlemeye çalışan birilerini, yapmaya çalıştıkları işin olmazlığı noktasında ikna etmek için kullanılabilir.³⁴⁹ Wittgenstein *Remarks on the Foundations of Mathematics*’te “reel sayılar bir dizide düzenlenemez” ya da “X Kümesi sayılabilir değildir” gibi düşüncelerin oldukça tehlikeli ve yanıltıcı düşünceler olmasının adeta doğanın bir olgusu gibi olduğunu düşünmektedir.³⁵⁰ Daha önceden de belirtildiği üzere, Wittgenstein, Cantor’un köşegen metodunun bütünüyle hatalı, kullanışsız ve dolayısıyla terk edilmesi gereken bir metot olduğunu düşünmez. Wittgenstein’a göre Cantor’un kanıtlamaları dilimizin kavramlarını ve gramerini değiştirmiştir, yeni bağlantılar kurup bu bağlantıları kavramsallaştırmamıza olanak sağlamıştır.³⁵¹ Öte yandan, doğal sayılar kümesi ile reel sayılar kümesini matematiksel açıdan anlamlı olacak şekilde karşılaştırılabilmesi Cantor’un kanıtlarından sonra mümkün olabilmektedir. Bu durum, Wittgenstein’a göre bir keşif değildir. Çünkü ona göre “öz, gramerde dile getirilmiştir.”³⁵² Benzer ifadeler Monk’un Wittgenstein biyografisinde şu şekilde yer bulur:

“Bu nedenle ona göre Freud bilinçdışını keşfetmemiş; daha çok ‘bilinçdışı düşünceler’ ya da ‘bilinçdışı güdüler’ gibi terimleri psikolojik tanımın gramerine kazandırmıştır. Benzer şekilde Georg Cantor sonsuz sayıda sonsuz kümenin varlığını keşfetmemiş; ‘sonsuz’ sözcüğüne, farklı sonsuzların bir hiyerarşisinden söz edebilmeyi anlamlı kılan yeni bir anlam kazandırmıştır. Böylesi yeniliklerin cevaplaması gereken soru, bu ‘yeni keşfedilmiş’ varlıkların mevcut olup olmadığı değil, sözcük dağarcığımıza yaptıkları bu eklemelerin ve

³⁴⁷ A.e., s. 128.

³⁴⁸ A.e., s. 129.

³⁴⁹ A.e., s. 129.

³⁵⁰ A.e., s. 131.

³⁵¹ A.e., s. 166.

³⁵² Wittgenstein, *Felsefi Soruşturmalara*, s. 134.

gramerimize kazandırdıkları bu değişikliklerin yararlı olup olmadığıdır. (Wittgenstein'a göre Freud'unkiler yararlıydı, ama Cantor'unkiler değildi.)”³⁵³

Wittgenstein'a göre Cantor yalnızca işaret dizileri ile ilgili bir takım bağıntılar bulmuştur.³⁵⁴ Şöyle ki, Wittgenstein, Cantor'un köşegen kanıtı ile bir listede bu listeye ait olmayan bir reel sayının inşa edilebileceğini, burada bir problem olmadığını, ancak buradan hareketle reel sayıların sayalı doğal sayıların sayalından daha büyüktür gibi evrensel bir genellemeye geçişin yapılamayacağını düşünür. O'na göre Cantor'un buldukları fiziksel nesnelere ilişkin bağıntılar olmadığı gibi, matematiksel bağıntılar da değildir. Daha önceden de anıldığı gibi, Wittgenstein'a göre matematiksel olgu diye bir şey yoktur. Ortada olan sadece sentaksın kuralları ve kanıtlama teknikleridir. Bir kanıtlama ve bu kanıtın ortaya çıkardığı sonuç, ya da şöyle ifade edelim: Matematiksel bir önermenin anlamı ve bu önermenin doğruluğu Wittgenstein'a göre ayrılmaz bir bütünlük arz ederler.

“Temel önermelerden farklı olarak, matematiksel önermeler kendilerinin doğru mu ya da yanlış mı olduklarını bilen yaratıklar gibidirler. Onların doğruluğu ya da yanlışlığı kendi içlerinde ‘anlamları’ olarak içerilir.”³⁵⁵

Matematiksel önermelerin ve matematiksel kanıtlamaların kendi anlamlarını içeriyor olmaları dilimizin gramerinin bir parçası olarak da görülebilir.

Wittgenstein, Gödel'in tamamlanamazlık teoremlerinde olduğu gibi, Cantor'un köşegen kanıtlamalarının da matematiksel olarak geçerli olup olmadığını sorgulamaz. Aslında şöyle ifade etmek daha doğru olurdu: Wittgenstein özellikle geç dönem matematik felsefesinde her hangi bir matematiksel teoremin matematiksel anlamda geçerli olup olmadığı konusunda ilgilenmez. Onun bu dönemde ilgilendiği asıl konu, matematik teorileriyle ne iş yapacağımız konusudur. Yani Wittgenstein'a

³⁵³ Monk, **Wittgenstein**, s. 662.

³⁵⁴ Humphrey, “Ludwig Wittgenstein's Philosophy of Mathematics: The Search for a Clear View”, s. 229.

³⁵⁵ Wittgenstein, **Philosophical Remarks**, s. 145.

göre matematik, insanın her şeyden soyutlayarak türettiği saf zihinsel bir faaliyet değildir. Ona göre matematik insan yaşantısının az ya da çok içindedir. Başka bir şekilde ifade edecek olursak, Wittgenstein’a göre matematik insan yaşantısının içinden neşet etmiştir. Bu sebeple de sınırlarının en uç noktası gene insan yaşantısının mümkün sınırlarının içerisine düşmektedir. İnsanın gündelik yaşantısının bütünüyle dışında olan ve kuramsal olarak insan zihninin iddia edebileceği fakat yaşantı alanında örneğini göstermesi imkânsız olan teorik ve soyut düşünceler matematiğe ait düşünceler olamaz. Wittgenstein’ın Gödel eleştirisinin de, Cantor eleştirisinin de zemininde bu düşünceler yatar. Wittgenstein benzer nedenlerle matematikçilerin büyük ilgi gösterdiği küme kuramlarının da anlamsız düşünömler olduğunu iddia eder. Tam da bu noktada *Philosophical Remarks*’tan daha önce de yapmış olduğumuz alıntıyı tekrar etmek yerinde olacaktır.

“Matematikte işaretlerin ve sembollerin kendileri matematiği yapar. Bu işaret ve semboller matematiği tanımlamaz... Matematiği tanımlayamayız, sadece matematik yaparız. Dolayısıyla matematiğin bizzat kendisi bütün küme kuramlarını geçersiz kılmaktadır.”³⁵⁶

$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesini düşönelim. “A kümesinin eleman sayısı nedir?” dediğimde cevabı verilebilir ve anlamlı bir soru sormuş olurum. Fakat “ $B = \{0,1,2,3,4, \dots\}$ kümesinin eleman sayısı nedir?” dediğimde cevap verilebilecek, anlamlı bir soru sormuş olmam. Wittgenstein için böyle bir kümenin eleman sayısına ilişkin ortaya koyacağımız yargıların hiçbir i matematiksel yargılar olmayacaktır. Benzer şekilde Cantor’un ortaya atmış olduğu doğal sayıların sayısı alef sıfırdır iddiası da, alef sıfır sayılabilir sonsuzluktur iddiası da Wittgenstein’a göre matematiksel olmayan iddialardır. Wittgenstein’a göre alef sıfır, Cantor’un iddia ettiğ i gibi sonsuz doğal sayı serisi kavramının sayısı olamaz. Çünkü sonsuz doğal sayı serisi kavramının kendisi, kendisine bir kardinalite atfedebileceğ imiz bir küme ya da sınıf değildir.

³⁵⁶ A.e., s. 186.

Ezcümle, Wittgenstein'ın Cantor kanıtlamalarını eleştirirken savlarının zemininde sonlu adımda inşa edilebilir olan dışında matematiksel bir gerçeklik alanı yoktur şeklinde özetlenebilecek sonlucu matematik anlayışı yatmaktadır.



DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

WITTGENSTEIN'IN MATEMATİK FELSEFESİNİN ELEŞTİRİSİ

- ✓ *Felsefi açıklığın matematiğin gelişmesine etkisi, güneş ışığının patates filizlerinin gelişmesine olan etkisiyle aynı olacaktır. Karanlık bir kilerde metrelerce büyürler.*³⁵⁷
- ✓ *Elbette ki Wittgenstein, bütün felsefi girişiminde olmasa bile matematik konusunda yel değirmenleriyle savaştığını biliyordu.*³⁵⁸
- ✓ *Hiçbir şey bana yazdıklarımı okuyan bir bilim adamının veya bir matematikçinin, çalışma biçiminde benden ciddi bir biçimde etkilenmesinden daha az olası görünmüyor.*³⁵⁹

Çalışmanın bu bölümünde, Wittgenstein'in gerek birinci döneminde, gerek de ikinci döneminde andığı ve eleştirdiği bazı matematiksel tespitleri ele alarak, Wittgenstein'in eleştirilerindeki haklılığını/haksızlığını tartışacağız. Buna ek olarak Wittgenstein'in her iki döneminde benimsediği matematik anlayışına, kendi matematik anlayışımız üzerinden çeşitli eleştiriler getirmeye çalışacağız. Dummet, *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics* adlı makalesinde şu ifadelerle yer verir: "Frege yayınlanmamış yazıları için şöyle söyler: Bunların hepsi altın değildir, ancak aralarından bazıları altın değerindedir ve okuyucuya düşen de altın olanlarını bulup çıkarmaktır"³⁶⁰ der. Buradan hareketle, çalışmanın bu bölümünde Frege'nin altın benzetmesinde olduğu gibi, Wittgenstein'in matematik felsefesinde nelerin altın olmadığını ve bu durumun olası sebeplerini tartışacağız.

³⁵⁷ Wittgenstein, **Philosophical Grammar**, s.381.

³⁵⁸ Monk, **Wittgenstein**, s. 470.

³⁵⁹ Ludwig Wittgenstein, **Culture and Value**, Ed. G. H. von Wright, Blackwell, Oxford, 1980, s. 62.

³⁶⁰ Dummet, "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", s. 324.

4.1. Tractatus'ta Ortaya Konulan Göndergesel Olmayan Sayı Anlayışının Eleştirisi

Wittgenstein *Tractatus*'ta sayıyı göndergesel olmayan (*Ing.* Non-referential) bir kavram olarak nitelendirir.³⁶¹ Wittgenstein'in bu nitelendirmesinin altında sayıyı salt biçimsel bir kavram olarak görmesi yatar. Diğer bir deyişle, Wittgenstein'a göre sayı sadece bir im/işaret dizisi/simge/biçimsel kavramdır. Bu yüzden, sayı hiçbir nesnenin göndergesi değildir. Çalışmanın bu bölümünde, ilk olarak biçimselci bir zeminde tesis edilen sayı anlayışının, sayının mahiyetini tam anlamıyla ortaya koymadığını iddia edeceğiz. Ardından, Wittgenstein'ın sayıyı biçimsellik üzerinden tanımlaması ile Gödel teoremlerinin birlikte düşünülmesinin doğuracağı sonuçları ele alacağız. Gödel teoremlerinin, yalnızca Wittgenstein'ın *Tractatus*'ta ortaya koymuş olduğu biçimselci matematik anlayışını değil, biçimselci bir zeminde tesis edilen/edilecek benzer bütün matematik anlayışlarını da geçersiz kıldığını düşünüyoruz. Şurası açıktır ki, Gödel teoremlerinin ardından matematiğin temelleri üzerine çalışma yapacak araştırmacılar, bir şekilde Gödel teoremleri ile hesaplaşmak durumundadır. Bununla birlikte Gödel teoremlerinin ardından “Matematiğin temellendirilmesi işini nasıl bir zeminde gerçekleştirebiliriz?” sorusu da oldukça önemli bir hâl almıştır. Bu sorunun cevabı çalışmamızın sınırlarını aşacağından böyle bir cevap denemesine girişmeyeceğiz. Ancak, bu soruya cevap vermek üzere tertip edilecek çalışmaların bizce nereden başlaması gerektiğine ilişkin bir tespit/öneri sunacağız.

Bu bölümde getireceğimiz eleştirinin ayrıntılarına geçmeden önce ilk olarak göndergesellikten ne anladığımızı kısaca açıklayalım: Yargıda hakkında bildirimde bulunduğumuz nesneyi temsil eden dilsel bir unsur vardır, bu unsura im, işaret dizisi, ya da simge diyebiliriz. Bu imler imledikleri nesnelerin dildeki temsilleridir. Eşdeyişle, bu imler göndergesel imlerdir, gönderim yaptıkları nesneler vardır. Doğabiliminin anlamlı önermelerini göz önünde bulundurduğumuzda, Wittgenstein önerme ile önermenin temsil ettiği olgu durumu arasında olanaklı bir resmetme/temsil etme bağıntısı olduğunu söyler. Bu resmetme bağıntısının zeminine

³⁶¹ Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, s. 139.

ise, im ile imlenen şeyin mantıksal içeriklerinin/formlarının özdeş olmasını yerleştirir. Olgu durumunda karşımıza çıkan empirik nesneler, tıpkı bir zincirin halkalarının iç içe geçmesi ya da geçmemesi gibi, başka bir takım nesnelerle iç içe geçme ya da geçmeme bağıntısını haizdir. Bununla birlikte, nesnelerin sahip olduğu bu özellik dilde nesnelere karşılık gelen adlarda da mevcuttur. Çalışmanın ilk bölümünde Wittgenstein'in bu düşünüş tarzının ayrıntıları tartışıldığından şimdilik bu kadarı ile yetineceğiz.

Wittgenstein'in göndergesel olmayan sayı anlayışının eleştirisine geçmeden, "Wittgenstein bağlamında sayının **a priori verili biçimsel bir kavram** olması ne demektir?" sorusunun olabildiğince açık bir şekilde cevaplanması gerekir. Bunun için Wittgenstein'in ilk olarak a priorilikten ikinci olarak da biçimsel kavramdan ne anladığına değineceğiz. Çalışmamızın ilk bölümünde bu hususta yürüttüğümüz tartışmayı tekrar edecek olursak: Wittgenstein *Tractatus*'un muhtelif yerlerinde a priori ifadesini kullanır.

"...Mantığın a priori olması, mantık-dışı düşünülememesine dayanır."³⁶² (Tractatus 5.4731)

"Şimdi, temel tümcelerin bütün olanaklı biçimleriyle ilgili soruyu a priori yanıtlamalıyız."³⁶³ (Tractatus 5.55)

"Sözümüne tümevarım yasası, en azından bir mantık yasası olamaz, çünkü bu, açıkça anlamlı bir tümcedir. –Bu yüzden de bir a priori yasa olamaz."³⁶⁴ (Tractatus 6.31)

"...(Burada da, her yerde olduğu gibi, a priori kesin olan, saf mantıksal olan olarak çıkıyor ortaya.)"³⁶⁵ (Tractatus 6.3211)

Alıntılardan da anlaşılacağı üzere, Wittgenstein için bir şeyin a priori olması demek, o şeyin mantıksal olması demektir. Yani olguların ya da başka empirik unsurların işin içerisine karışmadığı, saf mantıksal şeyler a prioridir. Bununla

³⁶² A.e., s.113.

³⁶³ A.e., s. 129.

³⁶⁴ A.e., s. 157.

³⁶⁵ A.e., s. 157.

birlikte, a priori kavramlar mantıksal mekânın içerisinde var olan/verili olan mantıksal yapılardır. Sayının a priori verili olmasından kasıt, sayının mantıksal mekânda bizden bağımsız olarak var oluşudur. Wittgenstein,

- 1 sayısını $0 + 1$
- 2 sayısını $0 + 1 + 1$
- 3 sayısını $0 + 1 + 1 + 1$

...

olacak şekilde tanımlar.³⁶⁶(*Tractatus* 6.02) Wittgenstein'in bu tanımında bizim için önemli olan husus şudur: Wittgenstein sayıyı a priori verili birimlerin çeşitli çoklukları uyarınca inşa eder. Bu birimler a priori verili olmasaydı, sayı üzerine konuşmanın ve sözkonusu inşanın olanağı ortadan kalkardı. Bununla birlikte, Wittgenstein'a göre bu birimlerin tam olarak ne olduğu, ne şekilde a priori verili olduğu, bu birimlerin nasıl bir çokluk oluşturduğu ya da bu birimlerin art ardılığı gibi meseleler üzerinde susulması gereken meselelerdir. Wittgenstein sayının art ardılığının sayı dizisinin içsel bir özelliği olduğunu düşünür. O'na göre sayının bunun ötesinde bir nesne alanı yoktur. Diğer bir deyişle, sayı bir kavrayışa konu olacak bir nesne olarak karşımızda duran bir şey değildir. Wittgenstein sayı ve art ardalık bağıntısı a priori verili demekle ve bu a prioriliği konuşulamaz kılmakla nesne hakkında konuşma olanağını da bütünüyle ortadan kaldırmıştır.

Biçimsel kavram ise şöyle açıklanabilir: Deneysel bir kavram çözümlediğinde karşımızda dilin dışında dünyanın halleri, unsurları bulunur, öte yandan biçimsel bir kavram kavramın inşa edildiği biçimsel dizgenin gramerine uygun bir biçimde çözümlediğinde karşımıza sadece bu biçimsel dizgenin unsurları çıkar. *Tractatus*'ta biçimsel kavramlar şöyle anlatılır:

“ ...

Bir şeyin bir biçimsel kavramın nesnesi olarak onun altına girdiği bir tümceyle dile getirilemez. Bu, o nesnenin iminde kendisini gösterir. (Ad, bir nesneyi imlediğini gösterir, sayı imi, bir sayıyı imlediğini, vb.)

³⁶⁶ A.e., s.139.

Biçimsel kavramlar da sahici kavramlar gibi, bir işlev aracılığıyla ortaya konamazlar.

Çünkü onların göstergeleri, biçimsel nitelikler işlevler yoluyla dile getirilemezler.

Biçimsel niteliğin dile getirilişi, belirli simgelerin bir çizgisidir.

Bir biçimsel kavramın göstergelerinin imi, öyleyse, imlemleri kavramın altına giren bütün simgelerin kendilerine özgü bir çizgisidir.

Biçimsel kavramın dile getirilişi de, öyleyse, içinde yalnızca bu kendine özgü çizginin sabit olduğu bir tümce değişkenidir.”³⁶⁷ (*Tractatus* 4.126)

Alıntılardan da anlaşılacağı üzere Wittgenstein’a göre biçimsel bir kavram inşa edildiği dil dışına çıkılmaksızın bütünüyle kuşatılabilir.

Çalışmanın bundan önceki bölümlerinde Wittgenstein’ın matematik felsefesi bağlamında Hilbertçi biçimselciliğe yakın olduğunu ifade etmiştik. Biraz detaylandırarak olursak, böyle düşünmemizin altında Wittgenstein’ın matematiksel semantiği yadsıması, eşdeyişle, matematik yapabilmek için yalnızca sentaksın yeterli olduğunu düşünmesi yatmaktadır. Bilindiği üzere “dil” sentaktik bir yapıdır. Bu noktada Hilbert’in de çalışmalarının merkezine koyduğu şu soru sorulabilir: Gerçeklik sadece dil üzerinden kuşatılabilir mi? Matematik’in yalnızca sentaktik düzlemde ele alınmasından, matematik’in yalnızca işaret dizileri, bu işaret dizilerinden başka işaret dizileri elde etmeye yarayan dönüştürme kuralları ve kanıtlamalarla kaim bir yapı olmasını anlıyoruz. O zaman, şu tespiti yapabiliriz: Wittgenstein’da matematiksel işaretlerin ve işaretler arasındaki bağıntıların kaynağı yalnızca sentaktır. Eşdeyişle, biçimsel dizgenin kendi içsel özellikleridir. Diğer bir ifadeyle, Wittgenstein’a göre matematik biçimsellik üzerinden/dil üzerinden ele alınabilir ve kapatılabilir. Biçimsel dizge dışında herhangi bir unsurun, Wittgenstein’ın *Tractatus*’ta ortaya koyduğu matematik anlayışında yeri yoktur.

Şimdi bu düşünüş tarzının eleştirisine geçebiliriz. İlk olarak A ve B kişilerinin sohbet ettiklerini ve A kişinin B kişisine “1, 4, 9, 16, ...örüntüsünde... yerine ne gelir?” şeklinde bir soru yönelttiğini, B kişinin de bir müddet düşündükten

³⁶⁷ A.e., s. 67-69.

sonra/örüntüye dair bir kuralı kavradıktan sonra 25 cevabını verdiğini varsayalım. Burada bizim için önemli olan, B kişinin neden 21 ya da başka bir cevap değil de 25 cevabını verdiğidir. Demek ki B kişisi bu örüntüde karşılaştığı ilişkinin doğal sayıların karesi ile ilişkili olduğunu görmüştür. Peki, B kişisi 1, 4, 9, 16 sayılarını sadece öylesine yan yana duran işaretler olarak görüyor olsaydı 25 cevabını verebilir miydi? Diyelim ki kare alma işlemini bir sayının kendisi ile çarpılması üzerinden biçimsel olarak tanımladığımızı ve bu biçimsel tanımlamanın bizi tatmin ettiğini varsayalım. Buradan hareketle bu örüntüde ... yerine yalnızca 25'in gelebiliyor oluşu açıklanabilir mi? B kişisi 36 yanıtını verse idi neden yanlış bir yanıt vermiş olacaktı? Dikkat edilecek olursa bu örüntüde,

$$1 = 1^2$$

$$4 = 2^2$$

$$9 = 3^2$$

$$16 = 4^2$$

$$25 = 5^2 \text{ dir.}$$

Burada, sayıların imleri arasında değil ama gönderimleri arasında bir sıralılık/art ardalık olduğunu ve B kişinin bu sıralılığa/art ardaliğe dair bir kavrayışının olduğunu düşünebiliriz. Zira sayının kendisindeki sıralılık ve sıraya dair bizdeki kavrayış olmaksızın, diğer bir deyişle, doğal sayıları sadece yan yana duran işaretler olarak görmek suretiyle, 4'ten sonra neden 5'in geldiğini ve örüntü kuralı uyarınca 5'in karesi alınarak 25 cevabı verildiğini açıklayamayız. Burada sıralamaya tabi olan 1, 2, 3, 4, 5 işaretlerinin kendileri değil, bu işaretlerin gönderim yaptığı/temsili ettiği matematiksel nesnelerdir. Demek ki, yalnızca işaret dizileri ve işaret dizileri arasında tanımlanan kurallar uyarınca yukarıda anılan matematiksel doğruluk anlaşılır kılınamaz. İşaret dizilerinin dışına çıkmaksızın/biçimsel dizgenin dışına çıkmaksızın/işin içerisine sıralılık ve sıraya dair bir kavrayış katmaksızın anlaşılır kılınamaz matematiksel doğrulukların oluşu, bizce Wittgenstein'inki de dâhil olmak üzere, bu tarz bir biçimselciliğin sayının mahiyetini ortaya koymak bakımından yetersiz olduğunu gösterir. Tam da bu noktada yazdıklarımızı okuyan

biri şöyle bir itiraz getirebilir: “Bu örüntü doğal sayılar üzerinde kare alma işlemi üzerinden kodlanabilir/biçimselleştirilebilir. Bir bilgisayar bizden çok daha hızlı bir biçimde örüntüde gelecek sayıları bulur. Üstelik bilgisayar bu işlemi yaparken sayının mahiyeti, birimler, birimlerin art ardılığı, birimlerin sırası gibi meselelerin hiçbir şekilde kavrayışına sahip değildir. Demek ki bu işlemi yapabilmek için bu tarz kavrayışlara gereksinim yoktur.” Ancak unutulmamalıdır ki, bilgisayar ya da başka her hangi bir yapay zekâ biz onlara çeşitli kodlar yazmaksızın çalışmaz. Bizim bu kodları yazabiliyor oluşumuz birimlere, birimlerin art ardılığına ve bizde bunlara ilişkin bir kavrayışın olmasına bağlıdır. Şöyle bir analogi yapalım: Ekmek makinesine yeterli miktarda un, su, tuz ve maya koyalım. Ve makineyi çalıştıralım. Belirli bir zaman sonra makine içine koyduğumuz şeyleri karıştırıp, yoğurup, pişirdikten sonra bize ekmek verecektir. Makinenin bunu başarılı bir biçimde yapabiliyor oluşu elbette ekmek yaptığının farkında olduğu anlamına gelmez. Onun yaptığı tek şey çeşitli işaret dizilerinin bir araya gelmesi ile belirli bir takım elektriksel devreleri aktive ya da deaktive etmekten başka bir şey değildir. Ancak bu makineyi tasarlayan insanlar işaret dizilerinin ve bunların bireşimlerinin ne anlama geldiğini bilir. Bu bilinç olmaksızın zaten böyle bir makine yapılamazdı.

Bu bağlamda Gödel teoremlerinin önemli bir sonucunu anmak yerinde olacaktır³⁶⁸, **matematik salt biçimsel yordamlarla bütünüyle kuşatılamaz**. Diğer bir ifadeyle, matematiği yalnızca biçimsellik üzerinden kavramaya çalıştığımızda karşımıza tamlık ve tutarlılık sorunu çıkmaktadır. Bu sonucu açmakta fayda var: Gödel matematiği temellendirmenin biçimselcilik üzerinden gerçekleştirilemeyeceğini göstermiştir. Bu durumun altında, matematiksel nesnelerin ve matematiksel ilişkilerin salt biçimsel nesneler ve biçimsel ilişkiler olmaması, biçimsellikten fazlasını içermesi (biçimsel dilin dışına taşması, biçimsel dilin olanağıyla kuşatılamayan doğrulukları içermesi) yatmaktadır.

Yukarıda Wittgenstein’in matematiğin biçimsellik üzerinden/dil üzerinden ele alınıp kapatılabileceğini düşündüğünü ifade etmiştik. Açıkça görüldüğü üzere Wittgenstein ve Gödel matematiğin salt biçimsel bir yapı olması/olmaması

³⁶⁸Bu bölümde tekrara düşmemek adına Gödel teoremlerinin ayrıntılarına girilmedi. Dileyen bu ayrıntılar için tezimizin ilgili bölümlerini gözden geçirebilir. Bkz., 3.1.1, 4.1, 4.2.

konusunda ayrılmaktadır. Bu durumda ortaya şöyle bir sonuç çıkmaktadır: Gödel teoremlerini doğru kabul edersek, Wittgenstein'in göndergesel olmayan biçimselci matematik anlayışını reddetmemiz gerekir.

Öte yandan, matematiği biçimsel ilişkilerden, biçimsel yordamlardan ve biçimsel türetimlerden bütünüyle ayrı bir varlık sahası olarak görmek de doğru bir tutum olmayacaktır. Nitekim 1'den n'e kadar olan doğal sayıların toplamının $n \cdot (n + 1) / 2$ olduğunu gösterirken izlediğimiz yol da tamamen biçimsel/mantıksal bir yoldur. Bu formülün kanıtını basitçe şöyle verebiliriz:

Teorem: $1 + 2 + 3 + \dots + n = n \cdot (n + 1) / 2$

Kanıt: $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = x$ olsun. Biz burada $x = n \cdot (n + 1) / 2$ olduğunu göstermeye çalışacağız. Dikkat edilirse burada 1'den n'e kadar olan sayılar küçükten büyüğe doğru sıralı bir şekilde yazılmıştır. Şimdi aynı sayıları bir de büyükten küçüğe doğru yazalım; $n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = x$ olacaktır. Şimdi bu iki eşitliği alt alta yazalım.

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = x$$

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = x$$

Yukarıda verili iki eşitliği alt alta topladığımızda (birinci elemanla birinci elemanı, ikinci elemanla ikinci elemanı, ... n'inci elemanla n'inci elemanı) her seferinde toplamın $n + 1$ olacağını ve bu $n + 1$ 'lerin sayısının n olacağını kolaylıkla görürüz. Eşitliğin sağ tarafı da $2x$ olacaktır. Tanım gereği n tane $n + 1$, $n \cdot (n + 1)$ olacaktır. Şu halde eşitliğin sol tarafı $n \cdot (n + 1)$ ve sağ tarafı da $2x$ olacaktır. Her iki tarafı da 2'ye bölersek $x = n \cdot (n + 1) / 2$ olduğunu görürüz ve teorem kanıtlanmış olur.

Bu oldukça basit kanıtlama matematiğin temelleri tartışmalarında bizim için önemli bir yerde durmaktadır. İlk bakışta teoremi kanıtlarken yapmış olduğumuz biçimsel manipülasyonlara bakarak bu kanıtlamanın bütünüyle biçimsel bir kanıtlama olduğunu iddia edebiliriz gibi durmaktadır. Ancak dikkat edilirse sayıların kendisindeki sıralılık ve kanıtlama işini yapan öznedeki 1'den n'e kadar olan

sayıların sırasına dair kavrayış olmaksızın böyle bir sıralama ve dolayısıyla kanıtlama yapılamazdı. Bu tartışmaya ilişkin ayrıntılar çalışmamızın 4.1'inci bölümünde genişçe ele alındığından tartışmayı burada sonlandırılıyor ve sonuca geçiyoruz.

Toparlayacak olursak: Gödel teoremlerinin ardından matematiksel nesnelerin ve matematiksel bağıntıların salt biçimsellik üzerinden kuşatılamayacağını gördük. Bu durumda, matematiğin temellendirilmesi bağlamında dayanak noktası kabul edeceğimiz sağlam bir referans noktası var mıdır? Bu sorunun çok büyük bir soru olduğunun farkındayız. Öte yandan, bu soruya cevap aramak çalışmamızın sınırlarını aşmaktadır. Ancak bütün bu değinilerden sonra, matematiğin temellendirilmesine yönelik bir araştırmanın başlangıç noktasının en azından şu farkındalık olması gerektiğini iddia edebiliriz: Matematiğin sınırları içerisinde biçimsel yordamlarla açıklanabilecek/kuşatılabilecek bir alan vardır, bu alanda teoremler ispatlamak, bir takım teoremlerden başka teoremler türetmek mümkündür. Ancak bu alan matematiğin bütünü değildir. Matematiğin içerisinde salt biçimsel yordamlarla kuşatılamayacak bir doğruluk alanı da vardır. Diğer bir deyişle, matematikte biçimsel yordamlar ile iş görebiliyor oluşumuz bu dizgenin temel nesnelerinin ve bağıntılarının da biçimsel olmalarını gerektirmez. Dolayısıyla matematik içerisinde hem sentaksı hem de semantiği barındıran bir disiplindir. Sonuç olarak, bizce matematiğin temellerini konu edinen bir çalışma yukarıda anılan düalliteyi hesaba katmak durumundadır.

4.2. Tractatus Bağlamında Matematiğin Yalnızca Eşitlik Bildiren Önergelerden Müteşekkil Bir Yapı Olması Fikrinin Eleştirisi

Wittgenstein *Tractatus*'ta matematiksel önergelerin eşitlikler olduğunu iddia eder. Diğer bir deyişle, Wittgenstein'a göre matematiksel bir öngermeye özsel olan, sayı sistemleri ve bu sistemlerin “+ 1” işlemi uyarınca inşaları neticesinde, “=” sembolünün her iki tarafındaki ifadelerin yer değiştirebilir olmalarıdır. Wittgenstein'ın eşitliklere dair söylediklerini *Tractatus*'tan alıntılacak olursak:

1. “İki imi tek ve aynı imlemde kullanıyorsam, bunu, ikisinin arasına “=” imini koymakla dilegetiriyorum.

“a=b”, öyleyse, şu demektir: “a” iminin yerine “b” imi konabilir.

(Bir eşitlik yoluyla yeni bir “b” imini işe katmak için, bu imin, önceden bilinen bir “a” iminin yerine konmasını belirliyorsam, bu eşitliği –tanımı– (Russell gibi), “a=b Tan.” biçiminde yazıyorum. Tanım, bir im kuralıdır.)³⁶⁹ (*Tractatus* 4.241)

2. ““a=b” biçimindeki dilegetiriler, öyleyse, yalnızca ortaya konuşa yardımcı olan öğelerdir: “a”, “b” imlerinin imlemi üzerine hiçbir şey söylemezler.³⁷⁰ (*Tractatus* 4.242)
3. ... ve sayısal eşitlik kavramı da, bütün özel sayısal eşitliklerin genel biçimidir.”³⁷¹ (*Tractatus* 6.022)
4. “Matematik mantıksal bir yöntemdir. Matematğin tümceleri, eşitliklerdir, yani sözde tümceler.”³⁷² [*Alm. Scheinsatze*]. (*Tractatus* 6.2)
5. “Dünyanın, mantığın yinelemelerle gösterdiği mantığını, matematik eşitliklerle gösterir.”³⁷³ (*Tractatus* 6.22)
6. “İki dilegetiriş eşitlik imiyle bağlanınca, bu, bunlar biribirinin yerine konabilir demektir. Ama, bunun öyle olup olmadığı, kendisini bu iki dilegetirişin kendilerinde göstermelidir. İki dilegetirişin biribirinin yerine konabilmeleri, onların mantıksal biçimini niteler.”³⁷⁴ (*Tractatus* 6.23)
7. “Matematiksel yönteme özsel olan, eşitliklerle iş görmesidir. Çünkü matematğin her tümcesinin kendiliğinden anlaşılır olması gerektiği, bu yönteme dayanır.”³⁷⁵ (*Tractatus* 6.2341)
8. “Matematğin, eşitliklerine varmasının yöntemi biribirinin yerine koyma yöntemidir. Çünkü eşitlikler, iki dilegetirişin biribirinin yerine konabilirliğini dilegetirirler; biz de, bir sayıda eşitlikten hareketle dilegetirişleri eşitliklere uygun şekilde başkalarının yerine koyarak, yeni dilegetirişlere doğru ilerleriz.”³⁷⁶ (*Tractatus* 6.24)

Wittgenstein, *Tractatus*’ta **eşitsizlikler** meselesine hiç değinmez. Ramsey, *Mind* dergisinde 1923 yılında yayınlanan *Tractatus Logico-Philosophicus by Ludwig Wittgenstein; Bertrand Russell* başlıklı değerlendirme yazısında, Wittgenstein’in

³⁶⁹ A.e., s.73-75.

³⁷⁰ A.e., s. 75.

³⁷¹ A.e., s. 139.

³⁷² A.e., s. 153.

³⁷³ A.e., s. 153.

³⁷⁴ A.e., s. 153.

³⁷⁵ A.e., s. 155.

³⁷⁶ A.e., s. 155-157.

eşitsizlikler meselesine hiç değinmemesini bir eksiklik olarak nitelendirir ve bu bağlamda Wittgenstein'in yaklaşımının matematiğin bütününe yansıtmadığı yönünde bir eleştiri getirir.³⁷⁷ Wittgenstein, Ramsey'in bu eleştirisine cevap vermez. Wittgenstein'in böyle bir eleştiriye cevap vermemesi düşündürücüdür. Bununla birlikte, Wittgenstein'in *Tractatus*'ta eşitliklere ilişkin ifade ettiği ve yukarıda alıntıladığımız söylemlerinden hareketle “Eşitsizlik durumunu/halini ifade eden bir önerme matematiğin bir önermesi değildir” gibi bir düşünceye sahip olduğu sonucu da doğrudan çıkmaz. Ancak, biz bu noktada Ramsey'in eleştirisinde haklı olabileceğini düşünüyor ve eleştirimizi bu ihtimâl üzerinden kurduğumuz bir varsayıma dayandırıyoruz. Varsayımımız şudur: Wittgenstein'in *Tractatus*'ta eşitsizlikleri matematiğin içerisine dâhil etmiyor ve hiçbir yerde adlarını anmıyor oluşu O'nun biçimselci matematik anlayışının zorunlu bir sonucudur. Çalışmamızın bu bölümünde sunacağımız eleştirinin öndayanağı bu varsayımdır.

Wittgenstein'in *Tractatus*'ta geliştirdiği matematiksel yaklaşım, matematikte oldukça önemli bir yer tutan eşitsizlikler hakkında hiçbir imada bulunmaz. Oysa eşitsizlikler, bugün matematikte en az eşitlikler kadar yer tutmaktadır. Eşitsizlik kavramı kısaca şöyle tanımlanabilir: Eşitsizlik iki sayısal değer arasındaki farkı gösteren bir bağıntıdır. Nasıl ki eşitlik bildiren genel bir denklemde denklemin ifade ettiği doğruluğu sağlayan bir x değeri ve bu x değerini bulacak aritmetiksel yöntemler var ise, aynı şekilde eşitsizlik bildiren bir denklemde de denklemin ifade ettiği doğruluk değerini sağlayacak x 'ler ve bu x 'leri bulmamızı sağlayacak çeşitli aritmetiksel yöntemler vardır. Örneğin: “ $x^2 - 6x + 9 = 0$ ” eşitliğinde bu eşitliği doğru kılacak sadece bir tane reel sayı vardır, o da 3 sayıdır. “ $x^2 - 6x + 9 > 0$ ” eşitsizliğinde de bu eşitsizliğin doğru olduğu çözüm kümesi matematiksel bir dille şöyle ifade edilebilir: $\{R\} - 3$. Diğer bir deyişle, x , 3 dışında ne olursa olsun bu

³⁷⁷ F. P. Ramsey, *Tractatus Logico-Philosophicus* by Ludwig Wittgenstein; Bertrand Russell, **Mind**, Vol. 32, No. 128, s. 475. Bu bölümde tartışılacak hususlar bakımından Ramsey'in bu eleştirisi oldukça önemlidir. Bu nedenle ilgili kısmın orijinal hâlini de burada ekliyorum. “Other pseudo-propositions are those of mathematics, which, according to Mr. Wittgenstein are equations obtained by writing “=” between two expressions which can be substituted for one another. I do not see how this account can be supposed to cover the whole of mathematics, and it is evidently incomplete since there are also inequalities, which are more difficult to explain.”

eşitsizlik doğru olacaktır. Ancak Wittgenstein'a göre $\{R\} - 3$ kümesi sonlu adımda inşa edilebilecek bir küme olmadığından $\{R\} - 3$ kümesi vardır denilemez. İlk bakışta, sonluculuk Wittgenstein'ın birinci değil de daha çok ikinci dönemine ilişkin bir kavrammış gibi görülebilir. Wittgenstein her ne kadar ikinci döneminde belirgin bir biçimde sonluculuğu savunuyor olsa da, ilk döneminde de sonsuz sayı kavramının dilin sınırları aştığını, bu sebeple matematiksel bir kavram olmadığını düşünür. Hatırlanacak olursa Russell'in *Principia Mathematica*'da sonsuzluk aksiyomunu kullanmasını, sonsuzluk aksiyomunun mantıksal bir aksiyom olmaması üzerinden eleştirmişti.

Bugün matematikte kanıtları çeşitli yollarla verilebilecek çeşitli eşitsizlik teoremleri vardır. Bernoulli eşitsizliğini düşünelim: $p > 1$ ve $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}$ için ; $(1 + p)^n \geq 1 + n.p$. Bu eşitsizlik şu şekilde kanıtlanabilir:

Teorem: $p > 1$ ve $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}$ için ; $(1 + p)^n \geq 1 + n.p$

Kanıt:

- $n = 0$ için $(1 + p)^0 \geq 1 + 0.p \Rightarrow 1 \geq 1$, ($n = 0$ için Bernoulli Eşitsizliği'nin doğru olduğu gösterildi.)
- $n = 1$ için $(1 + p)^1 \geq 1 + 1.p \Rightarrow 1 + p \geq 1 + p$, ($n = 1$ için Bernoulli Eşitsizliği'nin doğru olduğu gösterildi.)
- $n = k$ için $(1 + p)^k \geq 1 + k.p$, ($n = k$ için Bernoulli Eşitsizliği'nin doğru olduğunu varsayalım.)
- $n = k + 1$ için $(1 + p)^{k+1} \geq 1 + (k + 1).p = 1 + k.p + p$, (doğru varsayılan eşitsizlik uyarınca $n = k + 1$ için Bernoulli Eşitsizliği'nin doğru olduğu gösterilmeye çalışılacak.)
- Doğru olarak varsaydığımız $(1 + p)^k \geq 1 + k.p$ eşitsizliğinin her iki tarafını $(1 + p)$ ile çarpalım. Bu durumda şöyle bir eşitsizlik elde ederiz;
- $(1 + p). (1 + p)^k \geq (1 + p).(1 + k.p)$, (burada $p > 1$ olduğundan $p + 1 > 0$ olacaktır, dolayısıyla eşitsizliğin yönü değişmeyecektir.) Çarpma işlemini devam ettirsek şunu elde ederiz;
- $(1 + p)^{k+1} \geq 1 + k.p + p + k.p^2$

- $1 + k.p + p + k.p^2 \geq 1 + k . p + p$ eşitsizliği $k.p^2 > 0$ olduğundan doğru olacaktır.
- $(1 + p)^{k+1} \geq 1 + k.p + p + k.p^2 \geq 1 + k . p + p$ olduğundan
- $(1 + p)^{k+1} \geq 1 + k . p + p = 1 + (k + 1).p$ olacaktır ve Bernoulli Eşitsizliği $n = k$ doğru olarak varsayıldığında $n = k + 1$ için doğru olacaktır.
- Dolayısıyla $p > 1$ ve $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}$ için ; $(1 + p)^n \geq 1 + n.p$ eşitsizliğinin doğru olduğu matematiksel tümevarım yöntemi uyarınca kanıtlanmıştır.

Konuya ilişkin bir başka eşitsizliği de şöyle kanıtlayabiliriz:

Teorem: $n \geq 4$ ve $n \in \mathbb{N}$ olan her n için ' $n! > 2^n$ 'dir. Diyelim ki bu eşitsizliğin adı Ω olsun.

Kanıt:

- $n = 4$ için Ω eşitsizliği $4! > 2^4$ şeklinde yazılır. $24 > 16$ olduğundan $n = 4$ için Ω eşitsizliği doğrudur.
- $n = k$ için Ω eşitsizliği, eşdeyişle $k! > 2^k$ olduğu doğru olarak varsayılır.
- Bu varsayımdan hareketle $n = k + 1$ için Ω eşitsizliğinin, eşdeyişle $(k + 1)! > 2^{k+1}$ 'in doğru olduğunu göstermeye çalışacağız.
- Doğru varsaydığımız eşitsizliğin her iki tarafını $k + 1$ ile çarparsak $(k + 1) . k! > 2^k . (k + 1)$ eşitsizliğini elde ederiz. (Burada $k > 0$ olduğundan $k + 1 > 0$ olacaktır, dolayısıyla eşitsizlik yön değiştirmeyecektir.)
- Faktöriyel işleminin özelliklerini kullanacak olursak $(k + 1)! > 2^k . (k + 1)$ eşitsizliğini elde ederiz.
- $k \geq 4$ olduğundan $(k + 1) > 2$ olacaktır. O zaman, $2^k . (k + 1) > 2^k . 2 = 2^{k+1}$ olacaktır.
- Buradan hareketle $(k + 1)! > 2^k . (k + 1) > 2^{k+1}$ olacaktır.
- O zaman $(k + 1)! > 2^{k+1}$ 'dir ve doğru varsayılan önermeden hareketle ardışığının doğruluğu gösterilmiştir. Dolayısıyla Ω eşitsizliğinin doğruluğu matematiksel tümevarım yöntemi uyarınca kanıtlanmıştır.

Dikkat edilirse yukarı da verilen her iki teoremin kanıtlanmasında da, yöntem olarak matematiksel tümevarım kullanılmıştır. Matematiksel tümevarımı matematiksel teoremlerin kanıtlanmasında kullanılabilecek meşru bir yöntem olarak görmeyen Wittgenstein için, yukarıda verilen kanıtlamalar hiçbir anlam ifade etmemektedir. Wittgenstein bu kanıtlamalarda n 'inci adımdan $n + 1$ 'inci adıma geçişte bir problem görmez. Ancak buradan sonra tümel yargıya geçişte mantıksal bir sıçrama olduğunu düşünür. O'na göre bu mantıksal sıçramanın meşru bir zemini yoktur. Wittgenstein'in *Philosophical Remarks*'ta Skolem'in toplamının birleşme özelliğine ilişkin verdiği tümevarımsal kanıtlamaya ilişkin itirazını yeniden alıntılacak olursak:

““ $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ ’tekel önermesinin ‘ $a + (b + c) = (a + b) + c$ ’ tümel önermesinin özel bir durumu (özellemesi) olduğunu kanıtlayamam. Buna inanmak için bunun böyle olduğunu görmem gerekir. Aksi halde hiçbir kural beni ‘ $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ ’tekel önermesinin ‘ $a + (b + c) = (a + b) + c$ ’ tümel önermesinin bir özellemesi olduğu konusunda ikna edemez. Bu aynı zamanda kural ve uygulama ya da tümel yasa ve tümel yasanın özelleme arasındaki aşılabilir olan uçurumdur.”³⁷⁸

Her ne kadar matematiksel tümevarım matematik sahnesinin dışına itildiğinde bugün kolaylıkla kanıtlanabilecek pek çok teorem kanıtlanamayan hipotezlere dönüşecek olsa da, yukarıda verilen kanıtlamalar Wittgenstein’i eşitsizlikler bağlamında hakıyla eleştirmek için yeterli değildir. Bununla birlikte, yukarıda verilen kanıtlamaların çalışmaya dâhil ediliyor oluşu, bu teoremlerin matematiksel tümevarım ile ne kadar hızlı ve etkili bir şekilde kanıtlanabileceğini göstermesi ile ilişkilidir.

Çalışma dâhilinde çeşitli başlıklar altında defaatle değinildiği üzere, Wittgenstein için bir önermenin matematiksel bir önerme olmasının koşulu, sonlu adımda kanıtlanabilir olmasıdır. Şimdi aşağıdaki örnekleri Wittgenstein’in matematiksel önerme kabulünü de göz önünde bulundurarak inceleyelim:

³⁷⁸ Wittgenstein, *Philosophical Remarks*, s. 198.

Önerme 1: x bir tam sayı olmak üzere, $2x + 7 > 11$ eşitsizliğini sağlayan her x , 2'den büyüktür.

Kanıt:

$$2x + 7 > 11$$

$$2x > 11 - 7 \text{ (eşitsizliğin diğer tarafına işaret değiştirerek atma)}$$

$$2x > 4$$

$$x > 2 \text{ (sadeleştirme)}$$

Görüldüğü üzere, yukarıda yapılan iki işlem (eşitlik çözümlerinde de kullanılan) verili bir değeri denklemin diğer tarafına işaret değiştirerek göndermek ve sadeleştirme yapmaktır. Bu iki işlem neticesinde $x > 2$ sonucu elde edilmiştir. $x > 2$ ifadesi x 'in 2'den büyük her değeri için bu eşitsizliğin doğru olacağı anlamına gelir. Dolayısıyla “ x bir tam sayı olmak üzere, $2x + 7 > 11$ eşitsizliğini sağlayan her x , 2'den büyüktür” önermesinin doğru bir önerme olduğu tümevarımsal bir metot kullanılmadan gösterilebilir. Ancak Wittgenstein bu örneği inceleyeydi, muhtemelen çözüm kümesi ikiden büyük tam sayılar olan bir problemin bir matematik problemi olamayacağını söylerdi. Çünkü ikiden büyük tam sayılar kümesi sonsuz bir kümeye gönderme yapmaktadır. Eşdeyişle, yukarıda verilen önermenin çözüm kümesi olan ikiden büyük bütün tam sayılar kümesi sonlu adımda inşa edilebilecek bir küme değildir. Dolayısıyla böyle bir küme vardır denemez ve vardır denemeyen şey bir matematik probleminin çözüm kümesi olamaz. O zaman aşağıdaki örneği inceleyelim:

Önerme 2: $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ve x bir tam sayı olmak üzere, $12 > 2x - 6 > -4$ eşitsizliğinin çözüm kümesi A kümesidir.

Kanıt:

$$12 > 2x - 6 > -4$$

$$18 > 2x > 2 \text{ (eşitsizliğin her tarafına 6 eklendi)}$$

$$9 > x > 1 \text{ (eşitsizliğin her tarafı 2 ile sadeleştirildi)}$$

Görüldüğü üzere $12 > 2x - 6 > -4$ eşitsizliğinin çözüm kümesi 1'den büyük, 9'dan küçük tam sayılar olacaktır. Yani $\mathcal{C} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Kolaylıkla anlaşılacağı üzere $\mathcal{C}$ ve A kümeleri aynı kümelerdir. Dolayısıyla “ $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ve x bir tam sayı olmak üzere, $12 > 2x - 6 > -4$ eşitsizliğinin çözüm kümesi A kümesidir” önermesi sonlu adımda tümevarımsal bir metot kullanılmaksızın doğrulanmış olur. Ayrıca çözüm kümesi de, bir önceki örnekte olduğunun aksine, sonlu bir kümedir.

Konuya ilişkin benzer eşitsizlik teoremlerini ve bu teoremlerin kanıtlarını içeren örneklerin sayısını arttırmak mümkündür. Ama çalışmamız dâhilinde yukarıda ele alınan örneklerin yeterli olacağı kanaatindeyiz. Bize göre buradan çıkarılabilecek sonuç şudur: Eşitsizlikler de, tıpkı eşitlikler gibi, matematiksel gramere uygun olacak şekilde yazılabilen, doğru olduğu değerleri hesaplanabilen ve teoremleri kanıtlanabilen matematiksel önermelerdir.

Ancak, Wittgenstein'in eşitsizlikleri matematiksel önerme olarak görmeyişinin altında yatan gerekçelere dair hâlâ matematiğin içerisinden bir eleştiri getirmiş değiliz. Bunun için Wittgenstein'in *Tractatus*'ta ortaya koyduğu mantıksal önerme, sentaks ve eşitlik anlayışı üzerine yapılacak muhakemeyi derinleştirmekle işe başlanılabileceğini düşünüyoruz.

Wittgenstein *Tractatus*'ta şu ifadelere yer verir: “Mantıksal sözdiziminde, [*Alm.* Logischen Syntax] bir imin imleminin [*Alm.* Bedeutung] hiçbir ağırlığı olamaz; sözdizimi, bir imin imlemi üzerine birşeyler söz konusu edilmeden serimlenebilmelidir, yalnızca da dilegetirişlerin betimlenmelerini varsaymalıdır.”³⁷⁹ (*Tractatus* 3. 33) Alıntıdan da anlaşılacağı üzere, Wittgenstein için sentaksın sınırları dilin sınırlarıdır ve sentaktik/mantıksal düzeyde bir kavrayışta dilin dışına çıkılmaksızın gösterilebilecek olan her şey gösterilebilirdir. Diğer bir deyişle, Wittgenstein için sentaktik/mantıksal bir kavrayışta aslolan imin/işaret dizisinin imlediği şey değil, kendisidir. Böyle bir kavrayışta karşımıza çıkan önermeler

³⁷⁹ Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, s. 41.

mantıksal önermelerdir. Wittgenstein için mantıksal önermeler ve bu önermelerin doğruluğu yalnızca işaret dizileri ve sentaksın kuralları dolayısıyla serimlenebilir. Wittgenstein *Tractatus*'ta mantığın bir önermesini deneyim yoluyla çürütmenin de, pekiştirmenin de söz konusu olamayacağını söyler.³⁸⁰ (*Tractatus* 6. 1222) Çünkü O'na göre, mantıksal bir önermeyi başka mantıksal önermelerden yola çıkarak ve sadece işaret dizilerinin kurallarına göre kurarız.³⁸¹ (*Tractatus* 6. 126) Eşdeyişle, Wittgenstein'a göre mantıksal bir önermenin doğruluğunu anlamak için yalnızca işaret dizileri ve sentaksın kurallarına bakmak yeterlidir.

Wittgenstein'ın *Tractatus* bağlamında mantıksal önermeden ve sentakstan ne anladığını ana hatlarıyla ele aldık. Şimdi tartışmayı yavaş yavaş O'nun matematik ve eşitlik anlayışına getirmenin yerinde olacağını düşünüyoruz. Wittgenstein *Tractatus*'ta “Matematik, mantıksal bir yöntemdir”³⁸² der ve ekler “Matematiğin tümceleri, eşitliklerdir, yani sözde tümceler. [Alm. Die Satze der Mathematik sind Gleichungen also Scheinsatze]”³⁸³. (*Tractatus* 6.2) Görüldüğü üzere, Wittgenstein mantık önermeleri için kullandığı Scheinsatze sözcüğünü matematiksel önermeler için de kullanmaktadır. Wittgenstein'ın dizgesinde Satze ile Scheinsatze arasındaki ayrımın kaynağı olgusal karşılıktır/içeriktir. Matematiğin mantıksal bir yöntem olması, matematiksel önermelerin de mantıksal önermelerde olduğu gibi olgusal içeriğinin olmaması ile ilişkilidir. Dolayısıyla yukarıda mantıksal önermeler için ortaya konulan belirlenimler, Wittgenstein'a göre, matematiksel önermeler için de geçerlidir. Eşdeyişle, matematiksel önermelerde işin içerisine deneyim ve semantiğe dair hiçbir unsur katılmaksızın yalnızca dilin/sentaksın sınırları içerisinde kalınarak serimlenebilir. Matematiksel bir önermenin doğruluğu, doğrudan o önermede geçen işaret dizileri ve matematiğin biçimsel dilinin kuralları dolayısıyla sentaktik bir düzeyde gösterilebilir. Wittgenstein'ın bu düşünüş biçiminin arka planında doğrudan olmasa da, dolaylı olarak Hilbertçi biçimselcilik yatmaktadır. Bu iddiamızın zemininde ise her ikisinin de matematiksel nesneleri ve matematiksel bağıntıları yalnızca biçimsel nesneler ve biçimsel bağıntılar olarak görmeleri yatmaktadır.

³⁸⁰ A.e., s. 147.

³⁸¹ A.e., s. 149.

³⁸² A.e., s. 153.

³⁸³ A.e., s. 153.

Hatırlanacağı üzere, Wittgenstein'in gerek *Defterler*'de gerek de *Tractatus*'ta Russell'in sonsuzluk aksiyomuna, indirgenebilirlik aksiyomuna ve çarpımsal aksiyomuna getirdiği eleştirinin ve bunları matematiksel aksiyomlar olarak görmeyişinin zemininde, bu aksiyomları mantıksal önermeler olarak görmeyişi yatmakta idi. O'na göre, bu önermeler sentaktik bir düzeyde kavranılabilecek önermeler değildir. Eşdeyişle, bu önermelerin doğru olup olmadığının belirlenmesi işaret dizileri ve sentaktik kurallar aracılığıyla gerçekleştirilemez. Eğer doğru iseler bu ancak mutlu bir rastlantı sonucu olabilmıştır.³⁸⁴ (*Tractatus* 6. 1232)

Buraya kadar değinilen hususlardan tartışmamız bağlamında çıkartabileceğimiz en önemli husus şudur: Wittgenstein için bir önermenin matematiğin bir önermesi olmasının şartı o önermenin sentaktik bir düzeyde kuşatılabiliyor olmasıdır ya da dilin içerisinde bütünüyle kavranabilir olmasıdır. Diğer bir deyişle, matematiksel bir önermede semantiğe, deneyime ve görüye dair hiçbir unsur olmamalıdır.

Bu bölümün girişinde de yer verildiği üzere, Wittgenstein'a göre aritmetiksel bir önerme sayılar üzerinde “+ 1” işlemi uyarınca çeşitli manipülasyonlar yapmak suretiyle “=” sembolünün sağ tarafındaki ve sol tarafındaki iki ifadenin yer değiştirebilir/birbirlerinin yerine konulabilir olduklarını ifade eder. Sözgelimi, “2+ 3 = 5” önermesi aritmetiksel bir önermedir. Bu önermeyi Wittgensteinci bir tutumla analiz edecek olursak³⁸⁵ karşımıza şunlar çıkar:

- =, 2 + 3 ve 5 sadece imlerdir/işaret dizileridir, bunun dışında bir anlamları yoktur.
- 2, 1 + 1'dir, 3, 1 + 1 + 1'dir, 5 ise 1 + 1 + 1 + 1 + 1'dir.
- Dolayısıyla “2+ 3 = 5” önermesinde eşitliğin sol tarafındaki “2+ 3” imi ile sağ tarafındaki “5” imi birbirinin yerine kullanılabilir imlerdir.

Görüldüğü üzere, Wittgenstein açısından aritmetiksel bir eşitlik yalnızca biçimsel yollarla sentaksın sınırları içerisinde kalınarak mantıksal olarak kuşatılabilir. Burada Wittgenstein'ın semantiğe nasıl baktığını anlayabilmek adına

³⁸⁴ A.e., s. 149.

³⁸⁵ Bkz., A.e., s. 153-155. Yukarıda yaptığımız analizin dayanağı *Tractatus*'un 6.231 ve 6.24 nolu önermeleridir.

bir parantez açmanın yerinde olacağını düşünüyoruz. Wittgenstein semantiği bütünüyle sahnenin dışına itmek ister düşüncesi doğru değildir. O, yalnızca matematik söz konusu olduğunda sentaksın yeterli olacağını düşünür. Wittgenstein'ın matematiği yalnızca sentaksın sınırları içerisinde kalarak açıklama düşüncesinin altında, onun özdeşlik ve özdeşliğin ifade edilemezliği mevzuu vardır. Hatırlanacak olursa, Wittgenstein'ın Frege ve Russell'a getirdiği temel eleştiri de özdeşlik üzerinden getirdiği bir eleştiri idi. Wittgenstein'a göre “=” işareti semantik düzlemde nesnelere yönelik bir özdeşlik bildirmez, o sadece bir işaret dizisinin bir diğerinin yerine kullanılabilir olduğunu söyler. Eşdeyişle Wittgenstein'a göre özdeşlik nesneler arasında değil biçimsel kavramlar/işaret dizileri arasında vuku bulan bir bağıntıdır. Sentaksın içerisinde kalınarak eşitliklerin kuşatılıp kuşatılamayacağı sorusunu saklı tutarak, Wittgenstein'ın bu düşünüş tarzını eşitsizliklere taşımaya çalışacağız. Aynı deyişle, şimdi “ $3 > 2$ ” önermesini yukarıda ortaya konulan düşünüş tarzına uydurmaya çalışacağız.

- 3, 2 ve $>$ sadece imlerdir/ işaret dizileridir, bunun dışında bir anlamları yoktur.
- 3, $1 + 1 + 1$ 'dir, 2, $1 + 1$ 'dir
- Eşitliklerde elimizde olan yer değiştirme kuralı kavramı, eşitsizliklerde elimizde yok, peki 3 ve 2 ye karşılık gelen “ $1 + 1 + 1$ ” ve “ $1 + 1$ ” işaret dizilerinden hareketle $1 + 1 + 1 > 1 + 1$ dediğimizde aslında ne demiş oluruz? Eşdeyişle bir işaret dizisinin başka bir işaret dizisinden büyük ya da küçük olması ne demektir?

Yukarıda da belirtildiği üzere Wittgenstein eşitliğin mantıksal olarak kuşatılabileceğini düşünür, bu iddiasını üzerinde temellendirdiği temel kavram ise yer değiştirme/yerine geçme kavramıdır. Wittgenstein'ın *Tractatus*'ta ortaya koyduğu sayı tanımlaması üzerinden eşitliklerin yer değiştirme/yerine koyma üzerinden okunmasında bir problem gözükmemektedir. Ancak eşitsizlikler mevzubahis olduğunda Wittgenstein'ın elinde yer değiştirme/yerine geçme gibi mantıksal olarak ifade edilebilecek bir kavram yoktur.

Tractatus'un hiçbir yerinde eşitsizlik sözcüğü geçmediğini bölümün girişinde ifade etmiştik. Dolayısıyla, *Tractatus*'tan hareketle, Wittgenstein'in eşitsizlikler hakkındaki düşüncelerini doğrudan O'na atıf yaparak teşhis etmenin bir yolu yoktur. Bu bölümün girişinde de belirtildiği üzere, bizim bölümü yazarken dayanak noktası kabul ettiğimiz temel varsayım -Ramsey'in de değindiği üzere- "Wittgenstein eşitsizlikleri matematiğin dışına itmek istemiştir" şeklindeki iddiadır. Bu varsayıma dayandırarak sorduğumuz "Wittgenstein eşitsizlik bildiren tümceleri neden matematiksel önermeler olarak görmez?" sorusunun da, dolayısıyla doğrudan bir cevabı yoktur. Bu durumda bu soruyu Wittgenstein'in felsefi söylemi ile tutarlı olacak şekilde cevaplamak bize düşmektedir. Bu sorunun cevaplanması çalışmanın bu bölümünün en kritik işidir. Zira bu soru hakkıyla açıklığa kavuşturulmadan eşitsizlikler üzerinden Wittgenstein'in eleştirilmesi mümkün değildir.

Wittgenstein'in eşitsizlik bildiren tümceleri matematiksel önermeler olarak görmeyişinin altında onları mantıksal önermeler olarak görmüyor olması bu bahiste akla yatkın gelmektedir. Peki, Wittgenstein bu hususta yanılıyor olabilir mi? Eşdeyişle, eşitsizlik tümcelerinde karşımıza çıkan büyüktür-küçüktür bağıntısı mantıksal olarak serimlenebilir mi?

Bu konu üzerine düşünmeye, "Acaba Wittgenstein'in elinde mantıksal olarak, sentaktik düzeyde tanımlanmış sayı ve ardıllık-öncelik bağıntısı olsaydı, büyüktür-küçüktür bağıntısını mantıksal olarak serimleyebilir miydi?" sorusu ile başlamak istiyoruz. Çalışmanın başlarında, Wittgenstein'in *Tractatus*'ta kendi dizgesi ile tutarlı olacak biçimde sayıyı sentaktik düzeyde tanımladığını söylemiştik. O zaman ardıllık-öncelik bağıntısı mevzusuna geçebiliriz.

"İçsel bağıntılar yoluyla düzenlenen dizilere, biçim dizileri diyorum.

Sayılar dizisi, dışsal değil, içsel bir bağıntıyla düzenlenmiştir.

Aynı şekilde, "aRb" tümcelerinin dizisi de,

" $(\exists x): aRx. xRb$ "

" $(\exists x, y): aRx. xRy. yRb$ ", vb.

(b, a ile bu ilişkilerden biri içindeyse, b'ye a'nın izleyicisi [ardılı, *Alm.* Nachfolger]) derim.³⁸⁶ (*Tractatus* 4. 1252)

“b, a'nın izleyicisidir” [b, a'nın ardılıdır, *Alm.* b ist ein Nachfolger von a] genel tümcesini kavram yazımında dilegetirmek istersek, bunun için aRb , $(\exists x): aRx$. xRb , $(\exists x, y): aRx$. xRy . yRb , ... biçimler dizisinin genel ögesi için bir dilegetiriş gerekseriz...³⁸⁷ (*Tractatus* 4. 1273)

Yukarıdaki alıntılardan da anlaşılacağı üzere, Wittgenstein'a göre sayı dizisi içsel bağıntılar, yani sentaktik düzeyde ortaya konulan bağıntılar aracılığıyla düzenlenmiştir. Bununla birlikte bir b sayısının bir a sayısının ardılı olması da görüleceği üzere $(\exists x): aRx$. xRb ya da $(\exists x, y): aRx$. xRy . yRb gibi mantıksal bağıntılar üzerinden tanımlanmıştır. Buradan çıkarılacak sonuç şudur: Wittgenstein *Tractatus*'ta ardıllık-öncelik bağıntısını sentaktik düzeyde tanımlamıştır.

O zaman şimdi, *Tractatus*'ta ardıllık-öncelik bağıntısının olmasının büyüktür-küçüktür bağıntısının da olmasını gerektirip gerektirmediği üzerinde durulması gerekmektedir. Başka bir şekilde ifade edecek olursak, “b sayısı a sayısının ardılıdır” dediğimizde, “Bu sayılar arasında mevcut olan bir büyüklük-küçüklük bağıntısı da vardır” demiş oluyor muyuz? S, doğal sayılar kümesinin sonlu bir altkümesi olmak üzere $a \in S$, $b \in S$ ve “b, a'nın ardılıdır” dediğimizi düşünelim. Burada, “b, a'nın ardılıdır” dediğimizde, aynı zamanda b'yi, a'dan “+ 1” işlemi uyarınca türetebiliriz de demiş oluruz. Bu örnekten de anlaşılacağı üzere ardıllık meselesini sentaktik düzeyde kuşatabiliriz. Dolayısıyla bu ardıllık-öncelik bağıntısından yola çıkarak bir çeşit büyüklük-küçüklük bağıntısı tanımlamak doğru olmayacaktır. Tekrar edecek olursak: Wittgenstein, sayıyı, eşitlik bağıntısını ve ardıllık-öncelik bağıntısını sentaktik düzeyde tanımlamıştır. Ancak büyüktür-küçüktür bağıntısının da sentaktik düzeyde tanımlanabileceği yönünde *Tractatus*'ta hiçbir emare yoktur. Her ne kadar Wittgenstein'ın kendisi *Tractatus*'ta eşitsizliğe hiç değinmese de onun dizgesiyle tutarlı olacak şekilde şu çözümleme yapılabilir: Wittgenstein'a göre, sözgelimi “3 > 2” şeklindeki bir eşitsizlik önermesinde 3 ve 2 sadece imlerdir/işaret dizileridir. Bir imin bir başka imden büyük ya da küçük olması sentaktik düzeyde iddia edilemez.

³⁸⁶ A.e., s. 67.

³⁸⁷ A.e., s. 71.

Çünkü büyüklük ya da küçüklük işaret dizisinin kendisi ile değil, gönderimi ile ilgili bir bağıntıdır. Diğer bir deyişle, 3 sayısı Φ gibi, 2 sayısı da Ψ gibi bir simgedir ve Φ simgesinin Ψ simgesinden büyük ya da küçük olduğu iddia edilemez. 3 simgesinin gönderiminin 2 simgesinin gönderiminden büyük olduğunu iddia etmek de sentaksın sınırlarının aşıp semantiğin alanına girmek demektir. Bu, Wittgenstein'a göre, matematiği aşan bir şeydir. Oysa O'na göre söz gelimi 2 sayısı $1 + 1$ 'den (mantıksal mekânda a priori verili iki birimin bir araya gelerek oluşturduğu çokluk) başka bir şey değildir. Ancak "Bu a priori verili birimler nedir?" veya "A priori verili birimler bir araya gelerek çokluk oluşturması ne demektir?" minvalindeki sorular, üzerine konuşulabilecek sorular değildir. Diğer bir deyişle, sayı bir kavrayışa konu olacak bir nesne olarak karşımızda duran bir şey değildir. Wittgenstein sayı a priori verili demekle ve bu a prioriliği konuşulamaz kılmakla nesne hakkında konuşma olanağını da bütünüyle ortadan kaldırmıştır. Wittgenstein *Tractatus*'ta andığı ve a priori verili kabul ettiği sayı dizilerinin sıralı olmasının onun içsel bir özelliği olması mevzuunun da zemini üzerine konuşmaz. Diğer bir deyişle Wittgenstein sayıların art ardalığını verili kabul eder. Ancak sayıların art ardalığı büyüktür/küçüktür bağıntısının ortaya konulmasında oldukça kritik bir yerde durmaktadır. Dolayısıyla Wittgensteinci çerçevede dâhilinde (göndergesel olmayan sayı anlayışı uyarınca) büyüktür/küçüktür bağıntısını anlaşılır kılmanın bir yolu yoktur.

Buraya kadar ele alınan bütün hususlar birlikte düşünüldüğünde, Wittgenstein'ın büyüklük-küçüklük bildiren eşitsizlik tümcelerini sentaksın sınırları içerisinde kalınarak kuşatılamayacağı için matematiksel önermeler olarak görmemesinin gerekçelerinin ortaya konulduğunu düşünüyoruz. Bu düşünüş tarzı onun ilk döneminde matematiği biçimsel bir dizge ve matematiksel kavramları da bu dizgenin bileşenleri olarak gören Tractatusçu söylem ile de tutarlıdır.

Wittgenstein'ın eşitsizlik bildiren tümceleri matematiksel önermeler olarak görmeyişinin bizce olası gerekçelerini ele aldıktan sonra artık bu düşünüş tarzının eleştirisine geçebiliriz. Eleştirimizin ana fikri şudur: Matematik yalnızca biçimsel nesneler ve biçimsel bağıntılar yoluyla bütünüyle kuşatılamaz, matematikte bu biçimselliği aşan bir yan vardır. Eşitsizlikler de matematiğin bu biçimselliği aşan tarafında serimlenen matematiksel önermelerdir. Bu iddiayı temellendirmek için

Wittgensteinci biçimselcilik ile Gödel'in tamamlanamazlık teoremlerinin bir arada düşünülmesinin doğuracağı sonuçları irdeleyeceğiz.

Wittgensteinci biçimselciliği kısaca tekrar edecek olursak: Wittgenstein'in özellikle *Tractatus* bağlamında, matematiksel nesneleri ve matematiksel bağıntıları biçimsel nesneler ve bağıntılar olarak görmesi bakımından, Hilbert'in biçimselciliğine yakın durduğunu daha önceden de belirtmiştik. Semantik içerikten bütünüyle arındırılmış biçimsel bir matematik temel olarak aksiyomları, işaret dizilerini ve bu işaret dizileri arasında çeşitli manipülasyonlar yapabilmemizi sağlayan dönüştürme kurallarını içerir. Bu biçimsel dizgenin önermeleri içeriksiz/anlamsız önermelerdir. Biçimsel dizge içerisinde teoremlerin kanıtlanması şu şekilde olur: Verili işaret dizileri/önermeler birbirleriyle çeşitli dönüştürme kuralı/çıkarım kuralı uyarınca ilişkiye girerler ve ortaya başka bir takım işaret dizileri çıkar. Bu tasımın son satırı sentaktik düzeyde kanıtlanmış bir teoremdir. Wittgenstein'in *Tractatus*'ta matematik olarak gördüğü tam olarak bu şekilde bir biçimsel matematiktir.

Gödel teoremlerinin ayrıntılarına önceki bölümlerde değinmiştik. Şimdi burada Wittgenstein'in *Tractatus*'ta benimsediği matematik anlayışı ile Gödel teoremlerini bir arada düşündüğümüzde ne gibi sonuçlar çıkacağını görmek için Gödel teoremlerine ilişkin bazı hususları kısaca tekrar edeceğiz.

Gödel, 1931 tarihli makalesinde *Principia Mathematica* ve benzer biçimsel dizgelerde doğruluğu üst-matematiksel akıl yürütmelerle gösterilebilen ama doğru olduğu bu dizgeler içerisinde kalınarak ispatlanamayan matematiksel önermeler olduğunu göstermiştir. Doğru olduğu bilinen ama doğruluğu kanıtlanamayan matematiksel önermelerin olması, doğruluğun kanıtlanabilirliği aşan birtakım özellikleri olduğu anlamına gelir. Buradan çıkarılabilecek önemli bir sonuç, kapsamı ne kadar geniş olursa olsun hiçbir sentaksın semantiği bütünüyle kuşatamayacağıdır. Bir önceki bölümde yapmış olduğumuz tespiti tekrar edecek olursak: Gödel bize matematikte, matematiksel dilin sınırlarından taşan, eşdeyişle, matematiksel dil ile kuşatılamayan bir doğruluk alanı olduğunu göstermiştir.

Toparlayacak olursak, Gödel teoremlerinin de gösterdiği üzere, matematiksel nesneler ve matematiksel ilişkiler yalnızca biçimsellik/dil üzerinden açıklanamaz. Matematiğin dünyasında her ne kadar sentaktik düzeyde çeşitli işlemler yapabiliyor olsak da bu matematiğin bütünü değildir. Sayıyı yalnızca bir im/işaret dizisi olarak ele aldığımızda sayılara ilişkin ortaya konulan büyüktür/küçüktür bağıntısını açıklayamayız. Bunun için sayı iminin imlediği/gönderim yaptığı nesneyi hesaba katmamız gerekir. “ $3 > 2$ ” önermesinde büyüktür bağıntısı “3” ve “2” imleri arasında değil “3” ve “2” imlerinin imlediği matematiksel nesneler olan “3” ve “2” nesneleri arasında zuhur etmektedir. Bu bahiste yapılacak muhakemeyi derinleştirmek adına aşağıdaki tanımlamaları ve örnekleri inceleyelim.

Tanım 1: a ve b herhangi iki eleman ve bu iki eleman arasındaki sıra önemli olmak üzere, (a,b) ifadesine **sıralı ikili** denir. Burada a sıralı ikilinin birinci bileşeni ve b de sıralı ikilinin ikinci bileşenidir. Sıralı ikililere ilişkin dikkat edilmesi gereken hususlardan ikisi, bileşenler arasındaki sıra önemli olduğundan, $a \neq b \Leftrightarrow (a,b) \neq (b,a)$ ve $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$ olduğudur.

Tanım 2: A ve B herhangi iki küme olmak üzere $\{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$ kümesine A kümesi ile B kümesinin **kartezyen çarpımı** denir ve $A \times B$ olarak gösterilir.

Tanım 3: $A \neq \emptyset$ olmak üzere $A \times A$ ’nın her bir altkümesine A kümesinde tanımlı bir **bağıntı** denir. Bununla birlikte $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$ olmak üzere $A \times B$ ’nin her bir altkümesine A kümesinden B kümesine tanımlı bir bağıntı denir ve burada A kümesine tanım kümesi, B kümesine de değer kümesi denir.

Tanım 4: β , A kümesinde tanımlı bir bağıntı olmak üzere $\forall x (x \in A \Rightarrow (x,x) \in \beta)$ önermesi doğru ise A kümesinde tanımlı β bağıntısı **yansıyan** bir bağıntıdır.

Tanım 5: β , A kümesinde tanımlı bir bağıntı olmak üzere $\forall (x,y) ([x \neq y \wedge (x,y) \in \beta] \Rightarrow (y,x) \notin \beta)$ önermesi doğru ise A kümesinde tanımlı β bağıntısı **ters-simetrik** bir bağıntıdır.

Tanım 6: β , A kümesinde tanımlı bir bağıntı olmak üzere $\forall(x,y) \wedge \forall(y,z)$ için $([(x,y) \in \beta \wedge (y,z) \in \beta] \Rightarrow (x,z) \in \beta)$ önermesi doğru ise A kümesinde tanımlı β bağıntısı **geçişli** bir bağıntıdır.

Tanım 7: β , A kümesinde tanımlı bir bağıntı olmak üzere, β bağıntısı yansıyan, ters-simetrik ve geçişli ise β bağıntısına **parçalı sıralama bağıntısı** denir. Burada A kümesine de **sıralı küme** denir. Herhangi bir kümede tanımlı bir sıralama bağıntısı $\leq$ simgesi ile gösterilir. Sembolik olarak ifade edecek olursak; $(x,y) \in \leq \Leftrightarrow x \leq y$. Burada $x \leq y$ ifadesi ' $\leq$ sıralamasına göre x , y 'den önce gelir ya da x , y 'ye eşittir' diye okunur. Özel olarak $x \leq y$ ve $x \neq y$ olması durumunda ise $x < y$ biçiminde gösterilir ve $\leq$ bağıntısına göre ' x , y 'den önce gelir' şeklinde okunur.

Tanım 8: $\leq$, A kümesinde tanımlı bir sıralama bağıntısı ve rastgele seçilen $x, y \in A$ olmak üzere, $x \leq y$ ya da $y \leq x$ ise x ve y elemanları $\leq$ bağıntısına göre **karşılaştırılabilir** elemanlardır.

Tanım 9: $\leq$, A kümesinde tanımlı bir sıralama bağıntısı olmak üzere A kümesinden rastgele seçilen her eleman çifti $\leq$ bağıntısına göre karşılaştırılabilir ise, A kümesine **tam sıralı küme** denir. Bu tanıma göre A kümesinin tam sıralı olması için $\forall x, y \in A$ için $(x \leq y \vee y \leq x)$ önermesinin doğru olması yeter ve gereklidir.

Şimdi buraya kadar ele alınan hususları örneklerle açıklamaya çalışalım.

Örnek 1: $A = \{1, 2\}$ olmak üzere $P(A)$ kümesinde³⁸⁸ tanımlı $\subseteq$ bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır. Öncelikle $\subseteq$ bağıntısının verili A kümesi üzerinde neden bir sıralama bağıntısı olduğunu gösterelim.

$P(A) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ olacaktır. Bunu sembolik bir dille ifade edecek olursak $P(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$.

- $\forall S \in P(A) S \subseteq S$ olduğundan $P(A)$ kümesinde tanımlı $\subseteq$ bağıntısı yansımalıdır.

³⁸⁸ $P(A)$, A kümesinin bütün altkümelerinin kümesi olan kuvvet kümesidir.

- $\forall S_1, S_2 \in P(A)$ için $S_1 \subseteq S_2 \wedge S_2 \subseteq S_1 \Rightarrow S_1 = S_2$ olduğundan $P(A)$ kümesinde tanımlı $\subseteq$ bağıntısı ters-simetriktir.
- $\forall S_1, S_2, S_3 \in P(A)$ için $S_1 \subseteq S_2 \wedge S_2 \subseteq S_3 \Rightarrow S_1 \subseteq S_3$ olduğundan $P(A)$ kümesinde tanımlı $\subseteq$ bağıntısı geçişlidir.
- O halde $P(A)$ kümesinde tanımlı $\subseteq$ bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

Bu örnek üzerinde düşünmeye devam edecek olursak; $\{1\} \in P(A)$, $\{1, 2\} \in P(A)$ ve $\{\{1\}\} \subseteq \{\{1, 2\}\}$ olduğundan $\{1\}$ ve $\{1, 2\}$ elemanları bu bağıntıya göre karşılaştırılabilir elemanlardır. Ancak $\{1\} \in P(A)$, $\{2\} \in P(A)$ ve $\{\{1\}\} \not\subseteq \{\{1, 2\}\}$ olduğundan $\{1\}$ ve $\{2\}$ elemanları bu bağıntıya göre karşılaştırılamaz elemanlardır. Bu nedenle $P(A)$ kümesi $\subseteq$ bağıntısına göre parçalı sıralı bir kümedir, tam sıralı bir küme değildir.

Örnek 2: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olmak üzere, A kümesinde tanımlı $\leq$ bağıntısı tam sıralama bağıntısıdır. Şimdi bunu göstermeye çalışalım.

- $\forall x \in A$, $x \leq x$ olduğundan A kümesinde tanımlı $\leq$ bağıntısı yansımalıdır.
- $\forall x, y \in A$ için $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ olduğundan A kümesinde tanımlı $\leq$ bağıntısı ters-simetriktir.
- $\forall x, y, z \in A$ için $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ olduğundan A kümesinde tanımlı $\leq$ bağıntısı geçişlidir.

Burada A kümesinden rastgele seçeceğimiz bir x ve y sayıları için $x \leq y$ ya da $y \leq x$ olacağından A kümesi $\leq$ bağıntısına göre tam sıralı bir kümedir.

Yukarıdaki işlemlerin aynısını doğal sayılar kümesi için de uygulayabileceğimizden doğal sayılar kümesi de $\leq$ bağıntısına göre tam sıralı bir kümedir diyebiliriz. Ayrıca $(A, \leq)$ 'ı, eş deyişle A kümesi üzerinde tanımlı $\leq$ bağıntısını, düşündüğümüzde $x, y \in A$ olmak üzere $x < y$, $y < x$ ya da $x = y$ durumlarından yalnızca birisi aynı anda geçerli olacaktır. Buradan çıkarılabilecek en önemli sonuç küçüktür ya da büyüktür bağıntısının biçimsel bir dizgede temsil edilebileceğidir. Ancak bu hususta halen tereddütlerimiz vardır. Meseleyi biraz daha derinleştirmek adına aşağıdaki örneği inceleyebiliriz.

Örnek 3: $A = \{a, b, \%, \&, *, ?\}$ olmak üzere, A kümesini ele alalım. Bu kümeyi bilgisayarın klavyesindeki çeşitli işaretler olarak düşünebiliriz. Peki, $\leq$ bağıntısı A kümesi üzerinde tanımlı bir sıralama bağıntısı olabilir mi? Yukarıda verilen tanımlardan ve örneklerden hareketle, A kümesinin elemanları arasında bir küçüklük-büyüklük ilişkisinin olamayacağını söylemek oldukça kolaydır.³⁸⁹ O zaman, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinde $\leq$ bağıntısının bir sıralama bağıntısı olabilmesinin altında ne gibi bir gerekçe yatıyor olabilir? Başka bir şekilde ifade edecek olursak, 1, 2, 3, 4, 5, 6 işaretleri de bilgisayarın klavyesinin işaretleri olarak düşünülebildiği halde, bu küme üzerinde tanımlı $\leq$ bağıntısı bir sıralama bağıntısı olabiliyor. Bu durumda ortaya şöyle bir sonuç çıkıyor, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinde, ya da doğal sayılar kümesinde, küçüktür-büyüktür ilişkisi üzerinden bir sıralama bağıntısından söz edebiliyor isek, bunun zemininde küçüktür-büyüktür ilişkisini kuşatabilmek için işaretlerden/işaret dizilerinden fazlasına ihtiyacımız olduğu sonucu yatmaktadır. Burada, her ne kadar biçimsel bir şekilde doğal sayılar üzerindeki küçüktür-büyüktür bağıntısı temsil edilebiliyormuş gibi görünse de, bu temsil bir doğal sayının ardılından küçük olduğu ön kabulüne dayanır. Diğer bir deyişle, bir sayının başka bir sayıdan küçük olmasına dair bir kavrayış olmaksızın doğal sayılar kümesinin sıralı bir küme oluşunu açıklayamayız. Bizde böyle bir kavrayışın oluşu doğuştan getirdiğimiz bir durum değildir. Belirli bir yaştan sonra sayıların büyüklüğüne/küçüklüğüne ilişkin bir kavrayış ediniriz. Ancak bunun olabilmesinin de altında sayıların kendilerinin büyüklük/küçüklük bağıntısını haiz olmaları yatar. Tekrar edecek olursak, bize göre büyüktür/küçüktür bağıntısı imler/işaret dizileri arasındaki bir bağıntı değildir, aksine bu düzeyi aşan, imlemler/ ya da o işaretlerin gönderimi üzerinden anlaşılabilecek olan bir bağıntıdır. Eşdeyişle, küçüktür-büyüktür bağıntısı yalnızca sentaktik düzeyde kalınarak temsil edilemez.

³⁸⁹ Burada şu hususa dikkat çekmek isteriz: $\{1, 2, 3\}$ kümesinin elemanlarını küçükten büyüğe ya da büyüktür küçüğe sıralayabiliyor, $\{\%, \&, ?\}$ kümesinin elemanlarını ise sıralayamıyor oluşumuzun altında kümelerin elemanları olarak teşhis ettiğimiz simgelerin hiçbir önemi yoktur. Burada sıralamayı simgeler düzeyinde değil simgelerin işaret ettiği matematiksel nesneler arasında yapıyoruzdur. Eşdeyişle aslolan imlemlerdir. Bir toplulukta bu imlemler $\%, \&, ?...$ gibi sembollerin işaret ettiği nesneler olsaydı, bu topluluğun matematikçileri $\{\%, \&, ?\}$ kümesinin elemanlarını sıralayabiliyor, $\{1, 2, 3\}$ kümesinin elemanlarını ise sıralayamıyor olacaktı.

Çalışmanın bu bölümünü sonlandırırken iddiamızı ne şekilde gerekçelendirdiğimizi kısaca tekrar etmenin yerinde olacağını düşünüyoruz. Çalışmanın girişinde de belirtildiği üzere, Wittgenstein *Tractatus*'ta matematiksel önermelere ilişkin eşitlik kavramı üzerinden bir çerçeve çizer, bu çerçeveye göre matematiksel bir önerme yalnızca eşitlik bildiren bir önermedir ve sentaktik düzey aşılıksızın kuşatılabilir. Wittgenstein'in bu çerçevesine onun matematiği yalnızca sentaktik bir düzlemde kalınarak kavranılabilecek bir dizge olarak görmesi eşlik eder. *Tractatus*'ta eşitsizliklere dair hiçbir ima yoktur. Bu durumun neden böyle olduğu sorusunun ise doğrudan bir cevabı yoktur. Bununla birlikte, bu bölümün temel amaçlarından birisi Wittgenstein'in kendisinin nedenini açıklamadığı bu meseleye bir açıklama getirmeyi denemektir. Bu deneme temel olarak şöyle bir varsayıma dayanmaktadır: Wittgenstein matematiksel olanın sentaksın sınırını hiçbir türlü aşmaması gerektiğini düşünür, eşitsizlikler ise sentaksı aşar. Wittgenstein'in eşitsizlik bildiren ifadeleri matematiksel önermeler olarak görmeyişinin altında da işte bu durum vardır. Öte yandan bu bölümde yürüttüğümüz araştırma göstermiştir ki, eşitsizlik bildiren ifadelerde karşımıza çıkan küçüktür-büyüktür bağıntısı sentaksın sınırları aşılıksızın tam anlamıyla kavranılamaz. Dolayısıyla, eğer varsayımımız doğru ise, Wittgenstein eşitsizliklerin sentaktik düzeyde kuşatılamayacağı konusunda haklıdır. Diğer bir deyişle, matematik yalnızca sentakstan ibaret olsa idi, eşitsizlik bildiren ifadelerin matematiksel önermeler olmadığını iddia etmek yadsınamaz bir iddia olurdu.

Ancak çalışmanın bu bölümünün ikinci veçhesi de tam da bu noktada ortaya çıkmaktadır. Bize göre matematik sentakstan fazlasını içerir. Sayı sadece biçim, im ya da işaret dizisi değildir, verili imlerin gönderim yaptığı nesnedir. Bu nedenle eşitsizlikler sentaksı aşan şeyler olarak görülmesi üzerinden matematik sahnesinin dışına itilemez. Bu bölümde Gödel teoremlerini işin içerisine dâhil ediyor oluşumuzun nedeni, elbette Gödel teoremlerinin eşitsizlikler hakkında doğrudan birşeyler söylüyor oluşu değildir. Peki, bu bağlamda Gödel teoremleri bize ne söyler? Gödel teoremleri biçimsel bir dizge içerisinde bu biçimsel dizgenin sınırlarını ne kadar genişletirsek genişletelim (dizgeye istediğimiz kadar yeni aksiyom ekleyelim) bu dizge içerisinde doğruluğuna karar veremeyeceğimiz önermelerin zorunlu olarak

bulunacağını söyler. Aynı deyişle, matematiği bütünüyle biçimsel nesneler ve biçimsel ilişkilerden müteşekkil bir yapı olarak düşündüğümüzde bu nesneler, ilişkiler ve yapının kuralları üzerinden yakalayamayacağımız matematiksel doğruluklar ile kaçınılmaz olarak karşı karşıya kalırız. Demek ki, matematik, içerisinde her ne kadar biçimsel bağıntıları barındırıyor olsa da bütünüyle bu biçimsel bağıntılardan müteşekkil bir yapı değildir, matematikte bu biçimselliği aşan bir taraf vardır. Bu bölüm dâhilinde yürütülen araştırmanın küçüktür-büyüktür bağıntısı üzerinden tesis edilen eşitsizliklerin biçimsellikten fazlasını barındırdığını gösterdiğini düşünüyoruz. Gödel teoremlerinin matematiğin ve bizim araştırmamızın eşitsizliklerin sentaksı aşan yanları haiz olduğunu göstermesi birlikte düşünüldüğünde bizce ortaya şöyle bir sonuç çıkmaktadır: Matematiğin hâlihazırda sentakstan fazlası olması, eşitsizliklerin sentaksı aşması üzerinden elenmesi fikrini geçersiz kılmaktadır.

4.3. Wittgensteinci Resim Kuramının ve Doğrulamacılığın Gödel'in Tamamlanamazlık Teoremlerinin Ardından Yeniden Gözden Geçirilmesi

Çalışmanın bu bölümünde, Gödel'in tamamlanamazlık teoremlerinin ardından, Wittgenstein'in matematik felsefesinde problemleri olarak nitelendirdiğimiz kimi hususları irdeleyeceğiz. Bu irdelemenin esas olarak iki veçhesi mevcuttur. Bunlardan ilkinin, Wittgenstein felsefesinin birinci döneminin mottolarından olan “Dil dünyayı resmeder” anlayışı üzerinden, ikincisini ise Wittgenstein'in ikinci dönem felsefesinde karşımıza çıkan doğrulamacılık anlayışı üzerinden şekillendireceğiz.

Bilindiği üzere Wittgenstein *Tractatus*'ta olgu dünyası ile dil arasında resmetme bağıntısı üzerinden bir koşutluk olduğu fikrini savunur. Casti ve DePauli bu koşutluğu şöyle ifade ederler:

“Wittgenstein kendi, “dilimin sınırları dünyanın sınırlarını gösterir” ilkesini matematiğe uyguladı. Başka bir deyişle, matematiğin nesneleri, matematiksel dil içerisinde formüle edilebilen varlıklarla sınırlanmış olarak anlaşıldı.

Buradaki örtük varsayım, matematiksel doğruluklara aslında biçimselleştirilmiş matematik diliyle ulaşılabileceğidir.”³⁹⁰

Casti ve DePauli’in bu yorumunun *Tractatus*’un ruhu ile uyumlu olduğunu düşünüyoruz. Matematiksel nesneyi yalnızca biçimsel bir kavram olarak gören Wittgenstein, matematiksel doğruluklara da ancak matematiğin biçimsel dili ve bu dilin sentaktik kuralları aracılığıyla ulaşabileceğimizi düşünür. Aynı deyişle, *Tractatus*çu yönelim ile uyumlu olacak şekilde şunlar söylenebilir: Matematiksel doğrulukların tamamı biçimsel bir matematik dili ile resmedilebilir, temsil edilebilir. Biçimsel bir matematik diliyle gösterilemeyen sözde-matematiksel doğruluklar bu bağlamda matematiğin bir parçası olarak sayılmazlar.

Gödel teoremleri üst-matematiksel akıl yürütmelerle doğru olduğu gösterilebilecek ancak, matematiğin biçimsel dilinin bütün olanakları kullanılsa dahi doğruluğuna karar verilemeyecek önermeler olacağını göstermiştir. Diğer bir deyişle, Gödel biçimsel dizgeyi ne kadar yetkinleştirsek yetkinleştirelim dizge içerisinde doğru mu/yanlış mı olduğuna karar veremeyeceğimiz bir matematiksel önermenin olacağını göstermiştir. Buradan hareketle şöyle bir sonuç çıkarabiliriz: Gödel teoremleri matematiksel doğrulukların bütünüün matematiksel dil ile kuşatılamayacağını göstermiştir. Casti ve DePauli’den alıntılararak devam edecek olursak:

“Temel olarak, Gödel’in gösterdiği, hiçbir türden matematiğin gündelik doğruluk kavramını tam olarak ifade edecek kadar kapsamlı olmayacağıdır; dilbilimsel terimlerle söylersek, genişliği ne olursa olsun hiçbir sentaks semantiği bütünüyle eleyemez. Saf sayıların sonlu dünyasında bile, biçimsel olan mantıksal işlemler bize tam sayılar arasındaki ilişkiler hakkındaki her şeyi asla söylemeyecektir.”³⁹¹

³⁹⁰ Casti, DePauli, **Gödel-Mantığa Adanmış Bir Yaşam**, s. 80.

³⁹¹ A.e., s. 19-20.

Casti ve DePauli, buradan hareketle Gödel teoremlerinin Wittgenstein'in dilin sınırları ile dünyanın sınırlarını eşitleme fikrini çürüttüğünü düşünür.³⁹²

Açıkça görülmektedir ki, matematiksel doğrulukların tamamının matematiğin biçimsel dili ve bu dilin sentaktik kuralları dolayısıyla gösterilebileceğini salık veren Tractatusçu söylem ile Gödel teoremleri birbirleriyle çelişmektedir. Dolayısıyla ortaya şöyle bir sonuç çıkmaktadır: Eğer Gödel teoremlerini doğru kabul edersek, Wittgenstein'in yukarıda anılan Tractatusçu söylemini reddetmemiz gerekir.

Şimdi Wittgenstein'in matematik felsefesi ile Gödel teoremlerini bir arada düşünmenin ikinci veçhesine geçebiliriz. Wittgenstein'in ikinci dönem matematik felsefesinin çarpıcı iddialarından birisi de, "Her hangi bir matematik önermesi için, bu önermenin kanıt olmaksızın doğruluğu üzerine konuşmak anlamsızdır"³⁹³ şeklinde özetleyebileceğimiz iddiadır. Wittgenstein'in ikinci döneminde benimsediği doğrulamacı tutumunun bir yansıması olan bu söyleme göre, kanıtlanamayan bir önermenin doğruluğu da tespit edilemezdir. Dummet, Wittgenstein'in matematik felsefesini görüselciliğin sıradışı bir versiyonu olarak konumlandırır ve Wittgenstein'a göre matematiksel bir tümcenin ancak bir kanıtın neticesinde ortaya çıkıyor olduğunu iddia eder.³⁹⁴ Wittgenstein'in bu yönelimin altında, çalışmanın önceki bölümlerinde ele alınan Brouwer etkisinin olduğu gözden kaçmamalıdır.

Gödel'in tamamlanamazlık teoremlerinin ayrıntılarını çalışmamızın 3.1.1.inci bölümünde ele almıştık. Yukarıda da belirtildiği üzere, Gödel doğru olan ama doğru olduğu kanıtlanamayacak olan matematiksel önermelerin var olduğunu matematiksel olarak kanıtlamıştır. Nagel ve Newman *Gödel Kanıtlaması* adlı çalışmalarında şu tespiti yapar:

"Matematiğin içinde her türlü kanıtlama girişimine karşı gelen, ama hiçbir karşı örneği de olmayan birçok genel önerme vardır. Bu konudaki klasik örnek, her çift sayının iki asal sayının toplamı olduğunu öne süren 'Goldbach teoremidir.' Şimdiye kadar iki asal sayının toplamı olmayan hiçbir çift sayı bulunmadığı

³⁹² A.e., s. 81.

³⁹³ Bkz., Ludwig Wittgenstein, **Philosophical Remarks**, s. 181., Bkz. Waismann, **Wittgenstein and the Vienna Circle**, s. 47.

³⁹⁴ Dummett, "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", s.327.

halde, Goldbach'ın iddiasının istisnasız her çift sayı için geçerli olduğunun kanıtı verilememiştir. Öyleyse bu, doğru olabilecek ama sayılar kuramının biçimsel bir ayarlamasının aksiyomlarından türetilmeyecek bir aritmetik önermesine bir örnektir.”³⁹⁵

Casti ve DePauli de Gödel'in doğru olan ile kanıtlanabilir olanın farklı şeyler olduğunu ve bu ikisi arasında sonsuza değin kapatılamayacak olan bir yarık olduğunu kesin olarak gösterdiğini düşünürler.³⁹⁶

Bu noktada Gödel'in tamamlanamazlık teoremleri ile Wittgenstein'in doğrulamacılığının çeliştiği aşikârdır. Dolayısıyla bizim iddiamız şudur: Gödel'in tamamlanamazlık teoremlerini bu yönüyle doğru kabul edersek, Wittgenstein'in “Her hangi bir matematik önermesi için, bu önermenin kanıtı olmaksızın doğruluğu üzerine konuşulamaz” ya da “Matematiksel bir önerme kanıtını da içerir, aksi halde bu önerme matematiksel bir önerme değildir” şeklinde özetlenebilecek doğrulamacı yaklaşımını reddetmemiz gerekir.

4.4. Wittgenstein'in Sonlucu Matematik Anlayışının Eleştirisi

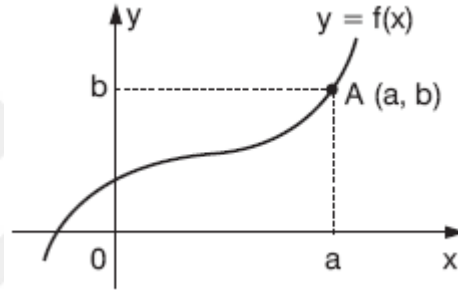
Wittgenstein, ikinci döneminde **sonsuz sayı** kavramı üzerine konuşmanın meşru zemininin olmadığını iddia eder. O, sonsuz sayılara ilişkin önermelerin yanlış önermeler olduklarını düşünmez, ama bu önermeler O'na göre matematiksel önermeler değildir. O'na göre matematiksel olarak var olan, aynı zamanda sonlu adımda inşa edilebilir olandır. Sonsuz sayı kavramı ise, sonlu adımda inşa edilebilir bir kavram değildir. Wittgenstein'in bu düşüncesinin altında, onun matematiği deneyimin içerisinde, başka bir deyişle insan etkinliğinin bir ürünü olarak görmesi yatar. Wittgenstein'in bu tutumu, bir bakıma, neyin matematiksel olduğu ve neyin matematiksel olmadığı konusunda deneyim üzerinden bir sınır çekebilmenin de olanağını ortaya koyar. Wittgenstein'in sonsuza ilişkin bildirimler içeren önermeleri matematiksel önermeler olarak görmeyişi oldukça ciddi sonuçlar doğurmuştur. Sözgelimi, Wittgenstein'in sonluculuğu benimsendiği takdirde, farklı sonsuz

³⁹⁵ Nagel, Newman, **Gödel Kanıtlaması**, s. 77.

³⁹⁶ Casti, DePauli, **Gödel-Mantiğa Adanmış Bir Yaşam**, s. 28.

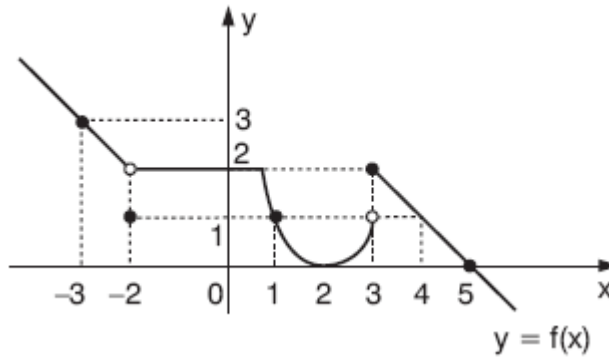
kardinalitelerin olması ya da matematiksel süreklilik diye bir şeyin var olması gibi fikirlerin reddedilmesi gerekir.

Wittgenstein'in sonlucu matematik anlayışını ilk olarak süreklilik kavramı üzerinden tartışmak istiyoruz. Bunun içinde öncelikle matematikte süreklilik kavramının nasıl tanımlandığına ve ne gibi bir önemi haiz olduğuna değineceğiz. Öncelikle süreklilik kavramını görsel olarak kavramak adına aşağıdaki fonksiyon grafiğini inceleyelim.



Şekil 4.1.:Sürekli Fonksiyon Grafiği Örneği.³⁹⁷

Görüldüğü üzere $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinde $x = a$ noktasında her hangi bir kopukluk yoktur.

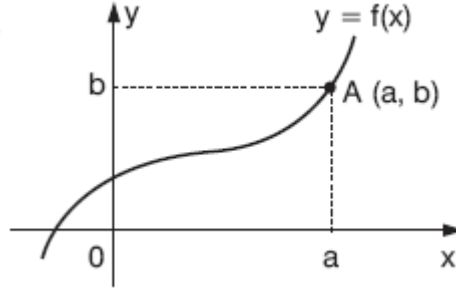


Şekil 4.2.:Süreksiz Fonksiyon Grafiği Örneği.³⁹⁸

³⁹⁷ (Çevrimiçi) <http://hamzakaradumanoglu.blogspot.com/> 14 Nisan 2018

³⁹⁸ (Çevrimiçi) <http://hamzakaradumanoglu.blogspot.com/> 14 Nisan 2018

Burada verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinde ise açıkça görüldüğü üzere $x = 3$ noktasında grafikte bir kopukluk vardır. Başka bir şekilde ifade edecek olursak, $y = f(x)$ fonksiyonu $x = 3$ noktasının sağında ve solunda farklı değerler almaktadır. Kopukluk olarak ifade ettiğimiz husus, sürekliliği açıklamada da oldukça önemlidir. Matematiksel olmayan bir dille ifade edecek olursak, fonksiyonlar kopukluğun olduğu noktalarda süreksiz, kopukluk olmayan noktalarda ise sürekli. Şimdi süreklilik kavramını matematik diliyle ifade etmeye çalışalım: A , reel sayıların bir altkümesi, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $a \in A$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $f((a - \delta, a + \delta) \cap A) \subseteq (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ ilişkisini sağlayan bir $\delta > 0$ varsa, f fonksiyonu a noktasında süreklidır denir. Burada verilen tanımları matematiksel olarak açmak her ne kadar mümkünse de, bu iş konumuz için kritik bir öneme sahip değildir. Sürekliliğin matematik yaparken nasıl kullanıldığını bir örnekle açıklamak adına ilk grafiğe tekrar dönecek olursak:



Şekil 4.1.:Sürekli Fonksiyon Grafiği Örneği.

Sözelimi $y = f(x)$ fonksiyonuna $x = a$ noktasından bir teğet çizdiğimizizi düşünelim ve “Bu teğetin eğimi ne olacaktır?” sorusunu soralım. Aslında sorduğumuz soru “ $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki birinci türevi nedir?” sorusu ile aynı sorudur. Bu soru aynı zamanda günlük hayatta karşımıza çıkabilecek bir olgu durumunun bir vechesinde de karşımıza çıkabilir. Şöyle ki, hız-zaman grafiği $y = f(x)$ fonksiyonu ile gösterilebilecek bir hareketli düşünelim. Bu hareketlinin $t = a$ anındaki ivmesi $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki birinci türevi olacaktır. Burada altını çizmemiz gereken nokta şudur: Bir fonksiyonun herhangi bir noktada türevlenebiliyor olması, o fonksiyonun o noktada sürekli

olmasına bağlıdır. Bu grafikte $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında sürekli olması ise $[a - \delta, a + \delta]$ aralığında sonsuz sayıda reel sayı olmasına bağlıdır.

Fakat Wittgensteinci bir sonluculuk benimsendiği takdirde süreklilik kavramını ve süreklilik üzerinden temellendirilen türev kavramını matematik sahnesinin dışına itmek gerekmektedir. Bununla birlikte, sonlucu bir matematik anlayışı benimsendiği takdirde, bugün matematik yaparken kullanılan pek çok yordam anlamını yitirecek ve kullanılamaz olacaktır. Diğer bir deyişle, Wittgenstein'in ya da görüselci düşünürlerin sonlucu matematik anlayışı, bugün matematik olarak nitelendirilen alanın sınırlarının ciddi anlamda daraltılması ve bu sınırın dışında kalan kısmın elenmesi anlamına gelmektedir.

Buraya kadar sonlu adımda inşa edilebilir olmayan bütün matematiksel yapıları, sürekliliği ve türevi matematik sahnesinin dışına atan Wittgensteinci sonluculuğa matematiğin içinden bir eleştiri getirmiş olmadığımızın farkındayız. Zira Wittgenstein kendi dizgesiyle tutarlı olacak şekilde sürekliliğin matematiksel olarak inşa edilebilir bir kavram olmadığını düşünür. Bunun farkında olmamıza rağmen, bu örneklerinin burada yer alıyor oluşu, Wittgensteinci sonluculuğun **yıkıcı etkilerinin** altının çizilme çabası olarak görülmelidir.

Wittgensteinci sonluculuğa matematiğin içinden bir eleştiri ise, Gödel'in tamamlanamazlık teoremleri üzerinden getirilebilir. Gödel teoremleri ve bu teoremlerin sonuçları daha önceki bölümlerde detaylı bir biçimde ele alındığından burada sadece sonluculuk ile ilişkilendirilebilecek kısma değineceğiz.

Gödel teoremlerinin önemli sonuçlarından birisi de matematiğin tüketilemezliğidir. Matematiğin tüketilemezliğini açacak olursak: Gödel matematiğin soyut kümeler teorisine indirgenmesinin, karşılaşılabilecek her türlü paradokstan kurtulabilmek adına, küme kavramının aksiyomlardan yinelemeli bir şekilde türetilmesi ile mümkün olduğunu düşünür. Bu yinelemeli işlemin her seviyesinde de dizgeye yeni aksiyomlar eklenmesi gerektiğini düşünür. Ama yinelemeli yöntemin sonu olmayacağı için hiçbir seviyedeki aksiyomatik sistem ortaya çıkabilecek bütün kümeleri kapsamayacaktır. Gödel bu durumun sadece küme teorisinde değil, sonlu matematikte karşılaşılan özyinelemeli fonksiyonlarda da karşımıza çıktığını

göstermiştir. Gödel bütün bu hususlar dikkate alındığında matematiğin sonlu sayıda aksiyomla tüketilemeyeceğini göstermiştir.

Wittgensteinci sonluculuğun temel tezi, “Ancak sonlu adımda tanımlanabilen ve doğruluğu gösterilebilen matematiksel önermeler matematik sahnesinde kendilerine yer bulabilir” şeklinde özetlenebilir. Gödel ise, her ne aksiyom eklenirse eklensin, hiçbir sonlu inşaa faaliyetinin matematiğin bütününe kuşatamayacağını ve doğru olduğu bilinebilen, ancak sonlu adımda gösterilemeyen matematiksel önermeler olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla, Gödel teoremleri ile Wittgensteinci sonluculuğun bu hususta çeliştiği aşikârdır. Ezcümle, eğer Gödel teoremlerini doğru kabul edersek, Wittgensteinci sonluculuğu reddetmemiz gerektiği açıktır.

Sonlucu matematiğin eleştirisi bahsinde ismini anmamız gereken bir diğer matematikçi filozof Cantor’dur. Cantor’un sonsuz kavramı üzerinde yaptığı çalışmalar bize şunu gösterdi: Matematikte mevcudiyetini çeşitli tekniklerle gösterebildiğimiz ama sonlu matematikte olduğu gibi birimler ve birimlerin art ardalığı üzerinden kuşatılamayan bir gerçeklik alanı var. Bu alanın var olması bugün matematik yaparken kullandığımız süreklilik, türev, integral gibi tekniklerin meşruiyet zeminin de güvencesi konumundadır. Nasıl ki Gödel teoremleri bize matematikte dil bakımından dışarı taşan yanlar olduğunu gösterdiyse, Cantor’un kanıtlamaları da matematikte gerçeklik bakımından dışarı taşan yanların olduğunu göstermiştir. Diğer bir ifadeyle sonlu matematik matematiksel gerçekliğin bütünü değildir. Açıkça görüldüğü üzere Cantor’un kanıtlamaları ile Wittgenstein’in sonluculuğu birbirlerini dışlayan iki yaklaşımdır. Buradan çıkarılacak en önemli sonuç da şudur: Cantor’un kanıtlamalarını geçerli kanıtlamalar saydığımız takdirde Wittgensteinci sonluculuğu reddetmemiz gerekir.

SONUÇ

Wittgenstein'in dil ve dünya kavrayışında ve bunun doğal bir sonucu olarak matematik anlayışında birinci dönem ile ikinci dönem arasında belirgin farklılıklar olduğunu düşündüğümüzden çalışmamız dâhilinde Wittgenstein'in birinci döneminde ve ikinci döneminde matematiğin temelleri sorunu olacak şekilde bir bölümlmeye gittik. Öte yandan, Wittgenstein'in matematiğe bakışında her iki dönemde ortak olan düşüncelere de çalışma içerisinde ilgili başlıklar altında değindik.

Çalışmanın birinci ana bölümünde Wittgenstein'in birinci döneminde nasıl bir matematik felsefesi benimsediğini açıkça serilmeyebilmek adına Wittgenstein'in sayı ve matematiksel önerme kavramlarına odaklandık. Wittgenstein'in birinci dönem matematik felsefesinin Frege ve Russell'in mantıksalci matematik anlayışlarının eleştirisi olarak da okunabileceği yaygın bir kanaattir. Çalışmanın ilk bölümünde Wittgenstein'in bu eleştirisinin zemininde matematiğe kendisine has bir biçimselcilik penceresinden bakmasının yattığını göstermeye çalıştık. Bilindiği üzere, Frege sayının mantıksal yollarla tanımlanabileceğini düşünür ve *Aritmetiğin Temelleri*'nde bu tanımlama işine kalkışır. Ancak Russell, Frege'nin dizgesinden hareketle bulduğu paradoksla sayının mantıksal yollarla tanımlanmasının en azından Frege'nin yapmaya çalıştığı şekliyle mümkün olamayacağını gösterir. Bununla birlikte Russell hâlâ sayının mantıksal yordamlar aracılığı ile tanımlanabileceğini düşünür. Sayıyı mantıksal olarak tanımlamak ve aritmetiği Frege'nin de arzu ettiği gibi mantığa indirgemek adına *Principia Mathematica*'da zorlu bir uğraşa girer. Russell *Principia Mathematica*'da sonsuzluk aksiyomunu, indirgenebilirlik aksiyomunu ve çarpımsal aksiyomu, her ne kadar kendisi de bu durumdan oldukça rahatsız olsa da, dizgesine ekler. Öte yandan nesneler arasındaki özdeşlik bağıntısının da mantıksal olarak kuşatılabileceğini düşünür. Wittgenstein, Frege'nin ve Russell'in matematik anlayışlarının kimi sebeplerden ötürü hatalı olduğunu düşünür. Bu düşüncesinin zemininde yukarıda da belirtildiği üzere, matematiği yalnızca biçimsel bağıntılar olarak görmesi yatar. Diğer bir deyişle, Wittgenstein'a göre matematik yalnızca sentaksın sınırları içerisinde kalınarak tesis edilmelidir. Russell'in dizgesinde varsaydığı sonsuzluk aksiyomu, indirgenebilirlik aksiyomu ve çarpımsal aksiyom

sentaksın sınırlarını aşan varsayımlardır. Bu nedenle bünyesinde sentaktik düzeyde kuşatılamayacak aksiyomları içeren mantıksalcılık Wittgenstein'a göre doğru bir anlayış değildir. Wittgenstein'ın Frege ve Russell'ın kuramlarına karşı çıkışının bir diğer vechesi de özdeşlik bağıntısı üzerindendir. Wittgenstein özdeşliğin yalnızca biçimler arasında zuhur eden bir ilişki olduğunu nesneler arasında bir özdeşlikten söz etmenin olanaksız olduğunu düşündüğünden mantıksalcı anlayışın savunulamaz olduğunu düşünür. Ezcümle, Wittgenstein'ın birinci dönemindeki sayı anlayışı üzerine yaptığımız araştırmalardan çıkarılabilecek en önemli sonuç şudur: Wittgenstein'a göre sayı sadece sentaksın sınırları dâhilinde kalınarak tesis edilebilecek biçimsel bir nesnedir ve sayılar arasındaki bağıntılar da aynı şekilde biçimsel bağıntılardır. Bu sebeplerle sentaksın sınırlarını aşan her türden izahat ve temellendirme matematiğin doğası ile uyumlu değildir.

Wittgenstein'ın birinci dönemindeki matematiksel önerme anlayışı üzerine yaptığımız araştırmaların neticesinde elde ettiğimiz bir diğer sonuç, Wittgenstein için matematiksel bir önermenin belirli bir takım sentaktik dönüştürme kurallarından hareketle eşitliğin her iki tarafındaki sayısal işaretlerin yer değiştirebilir/birbirinin yerine kullanılabilir olduğunu söyleyen, eşdeyişle eşitlik bildiren tümceler olduğudur. Matematiğe bakış açısını biçimselcilik üzerinden şekillendiren Wittgenstein'a için önermede karşımıza çıkan matematiksel bileşenler sadece işaret dizileridir ve matematik yapmak bu işaret dizileri arasında sentaktik kurallar uyarınca çeşitli manipülasyonlar yapmaktan ibarettir.

Çalışmanın amaçlarından bir diğeri de Wittgenstein'ın ikinci döneminde benimsediği matematik anlayışı ve bu anlayışı nasıl gerekçelendirildiğinin açık bir izahını vermektir. Bilindiği üzere, Wittgenstein'ın ikinci dönemindeki felsefi söylemi ve paradigması ilk dönemine göre daha çetrefil bir yapıdadır. Bu durumun bir sonucu olarak, ikinci dönemde benimsediği matematik anlayışı, ilk dönemine göre daha karmaşıktır. Dolayısıyla, Wittgenstein'ın ikinci dönem matematik felsefesinin izini sürmek ilk dönemine göre daha zordur. Bu zorluğu aşmak adına, ilk olarak araştırmalarımızı Wittgenstein'ın birinci dönemden ikinci döneme geçiş sürecinin tarihsel arka planına ayırdık. Bu araştırmalarımız neticesinde edindiğimiz en önemli bulgu Wittgenstein'ın ikinci dönemine başlarken felsefeye bıraktığı yerden

başlamadığıydı. *Tractatus*'ta felsefe adına söylenebilir olan ne varsa söylediğini ve bütün problemleri çözdüğünü düşünen Wittgenstein, ikinci döneminde durumun böyle olmadığını düşünmeye ve artık *Tractatus*'u işlenmiş bir günahı olarak görmeye başlar. Wittgenstein'in ikinci döneminde felsefeye bakışının değişmesinde en büyük etken hiç şüphesiz dile bakışının değişmesidir. Birinci dönemde söyleminin odağında tamamlanmış bir ideal dil var iken ikinci dönemde söyleminin odağındaki dil hiçbir zaman tamamlanmayacak olan, yaşayan bir dildir. Sözgelimi, birinci dönemde benimsediği ideal dilin kuralları en başından belirli ve her hangi bir değişimden azade iken, ikinci dönemde benimsediği gündelik dilin kurallarının zemininde o dilin paydaşlarının uzlaşımı yatar ve bu kurallar paydaşların uzlaşımlarının değişmesi neticesinde değişebilir. Wittgenstein'in dile bakışındaki bu değişim kaçınılmaz olarak matematiğe bakışında da köklü değişimlere yol açmıştır. Bu değişimlerin neler olduğunu ve değişen dil anlayışı ile ilişkilerini çalışmanın ikinci bölümünün ilgili yerlerinde irdeledik. Burada da kısaca anmak gerekirse: Wittgenstein için artık matematik demek bir çeşit dil oyunu demektir, nasıl oyunun en önemli bileşeni oyunu oynayanların belirli bir uzlaşım dâhilinde kuralları içselleştirmesi/kabul etmesi ise, matematiğin de belirli bir takım kuralları vardır ve bu kurallar insanı aşan bir yapıya sahip değildir. Matematik insanın zihinsel faaliyetleri neticesinde ortaya çıkar.

Wittgenstein'in ikinci döneminde insan merkezli bir matematik anlayışı benimsemesinin altında dile bakışının değişmesi olduğu kadar, görüselci matematik felsefecileri ile olan teması da vardır. Çalışma dâhilinde bu hususu belirginleştirmek adına Wittgenstein'in Brouwer ile olan etkileşiminin ayrıntılarını çeşitli başlıklar altında araştırdık. Araştırmalarımız neticesinde Wittgenstein'in, her ne kadar Wittgenstein görüselciliğin matematiği temellendirmek hususunda bir işe yaramayacağını ifade etse de, ikinci döneminde benimsediği özellikle doğrulamacılık ve sonluculuk gibi yaklaşımlarının altında, Brouweri görüselciliğin yattığını gördük. Bu bulguların insan merkezli bir matematik anlayışı ile ilgisini de, doğrulamacılığın “Sonlu adımda doğruluğunu gösteremeyeceğimiz bir önerme için doğrudur diyemeyiz” şeklinde ve sonluculuğun da “Sonlu adımda inşa faaliyeti neticesinde inşa edemediğim her hangi bir nesne hakkında vardır diyemeyiz ve bu nesneler

hakkında doğru olduğunu iddia ettiğimiz önermeler kuramayız” şeklinde özetlenebilecek sonuçları üzerinden kurduk.

Çalışmanın ikinci ana bölümünü özetleyecek bir cümle yaklaşık olarak şöyle olurdu: Wittgenstein’a göre matematik bir dil oyunudur, bu dil oyununun kendince kuralları vardır ve bu kurallar oyunun paydaşlarının uzlaşımı neticesinde belirlenir, oyunun paydaşları insanlardır, doğrulanamayacak olan önermeler ve sonsuz sayılara ilişkin bildirimler içeren önermeler insanın inşa faaliyetini aşarlar, bu sebeplerle matematik insanın sonlu adımda inşa edebildiği ve doğruluğunu gösterebildiği önermelerden müteşekkil bir yapıdır.

Çalışmanın üçüncü ana bölümünde, Wittgenstein’ın modern matematiğin iki önemli kuramcısı Gödel ve Cantor’un kuramlarına getirdiği eleştirilere yer verdik. Bu bölümde Wittgenstein’ın eleştirilerinin yanı sıra Gödel’in tamamlanamazlık teoremlerinin ve Cantor’un sonsuz sayılara ilişkin yaptığı çalışmaların ayrıntılarına da değindik. Bütün bu değinilerde amaçladığımız şey, son bölümde Wittgenstein’ın matematik felsefesi üzerinden getireceğimiz eleştirilerin zeminini oluşturmaktır.

Çalışmanın son bölümünde, ilk olarak, Wittgenstein’ın *Tractatus*’ta ortaya koymuş olduğu göndergesel olmayan sayı anlayışını irdeledik. Çalışmanın ilgili bölümlerinde de ifade edildiği üzere, Wittgenstein’a göre sayı göndergesi olmayan biçimsel bir kavramdır. Bu bölümde Wittgensteinci biçimsellik ve Gödel teoremlerinin kimi sonuçlarının bir arada düşünülmesinin ortaya çıkardığı sonuçları inceledik. İncelemelerimiz sonucunda Gödel teoremleri ile Wittgensteinci biçimselciliğin çeliştiği ve Gödel teoremlerini doğru kabul ettiğimiz takdirde Wittgenstein’ınki de dâhil olmak üzere her türden biçimselciliği reddetmemiz gerektiği sonucuna ulaştık. Bölümün sonunda, Gödel teoremlerinin ardından matematiğin temelleri üzerine yapılacak bir çalışmanın bizce nereden başlaması gerektiğine dair bir öneri sunduk.

Ardından, Wittgenstein’ın *Tractatus*’ta ortaya koyduğu biçimselci matematik anlayışı ve bu anlayışın bir sonucu olarak eşitsizlikleri matematik sahnesinin dışına atması varsayımını açmaya çalıştık. Eşitsizlikler üzerinden yaptığımız araştırmalar neticesinde elde ettiğimiz en önemli sonuç: Her ne kadar matematik yaparken

sentaktik düzeyde çeşitli işlemler yapabiliyor, teoremler ispatlayabiliyor olsak da, bunun matematiğin bütünü olmadığını göstermektedir. Matematiğin dünyasında sentaktik düzeyi aşan, sayının kendisinde mevcut olan sıralılığı ve bu sıralılığa dair bizdeki kavrayışı hesaba katmayı gerektiren, eşdeyişle, semantiğin alanına giren yönler bulunmaktadır.

Ardından, Wittgensteinci resim kuramının ve doğrulamacılığın Gödel'in tamamlanamazlık teoremleri ile birlikte düşünülmesinin doğuracağı sonuçları araştırdık. Bu araştırmadan çıkan en önemli sonuç: Gödel'in tamamlanamazlık teoremleri ile Wittgenstein'in resim kuramının ve doğrulamacılığının çeliştiği ve Gödel'in teoremlerinin doğru kabul edildiği durumda Wittgensteinci resim kuramının ve doğrulamacılığın reddedilmesi gerektiğidir.

Çalışmanın ikinci ana bölümünde Wittgenstein'in sonlucu matematik anlayışının ayrıntılarına değinmiştik. Bu bölümde de, Wittgenstein'in sonluculuğu kabul edildiği takdirde, matematikte hemen hemen her yerde karşımıza çıkan matematiksel süreklilik fikrinin ve Cantor'un matematiksel olarak ispatını verdiği farklı sonsuz kardinalitelerin olduğu fikrinin meşruiyet zeminini yitireceği iddiası üzerinden bir araştırma yaptık. İlk olarak süreklilik kavramının matematikte nasıl karşımıza çıktığını araştırdık. Bununla birlikte Gödel'in tamamlanamazlık teoremleri üzerinden yürütülen matematiğin tüketilemezliği tartışmaları ile Wittgensteinci sonluculuğun ilişkisini kurmaya çalıştık. Çalışmanın bu bölümünden çıkarılabilecek sonuç şudur: Matematiksel süreklilik mevzuunda yürütülen tartışma Wittgensteinci sonluculuğun yıkıcı etkilerini gözler önüne sermektedir. Öte yandan, Gödel'in tamamlanamazlık teoremleri ve Cantor'un kanıtlamaları ile Wittgensteinci sonluculuk çelişmektedir. Gödel'in tamamlanamazlık teoremleri ve Cantor'un kanıtlamaları doğru kabul edildiği takdirde, Wittgensteinci sonluculuk reddedilmelidir.

KAYNAKÇA

- Ambrose, Alice: “Wittgenstein on Some Questions in Foundations of Mathematics”, **The Journal of Philosophy Vol. 52**, 1955, s. 197-214.
- Anderson, A. R.: “Mathematics and the Language Game”, **The Review of Methaphysics**, Vol. 11, 1958, s. 446-458.
- Arslan, Mehmet: “Wittgenstein’da Matematik Felsefesi”, **VII. Mantık Çalıştayı Kitabı**, Ed. Şafak Ural, Vedat Kamer, Mantık Derneği Yayınları, İstanbul, 2017, s. 43-52.
- “Matematiğin Felsefi Temelleri Üzerine Bir İnceleme”, **3. Uluslararası Felsefe, Eğitim, Sanat ve Bilim Tarihi Sempozyumu Bildiri Kitabı**, Ed. Çağlar Kaya v.d., 2018, s. 164-173.
- Arslan, M., Gök, S. E. “Gödel’in Tamamlanamazlık Teoremlerinin Ardından Matematiğin Temelleri Tartışmaları”, **Uluslararası İstanbul Felsefe Kongresi Bildiri Kitabı**, Cilt 2, Ed. Özgüç Güven, Egemen Kuşçu, Mantık Derneği Yayınları, 2018, s. 1-15.
- Aspeita, Axel Arturo B.: “Mathematics as Grammar: Grammar in Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics During the Middle Period”, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), Indiana University, Bloomington, 2000.

Brouwer, L. E. J.:

Collected Works 1. Philosophy and Foundations of Mathematics, Ed. A. Heyting, Nort-Holland, Amsterdam, 1975.

Collected Works 2. Geometry, Analysis, Topology and Mechanics, Ed. H. Freudenthal, Nort-Holland, Amsterdam, 1976.

“Intuitionism and Formalism”, (Çevrimiçi) <http://math.armstrong.edu/faculty/chang/math/formal.pdf>, 13 Aralık 2017.

Carnap, Rudolf:

“Testability and Meaning”, **Philosophy of Science**, Vol. 3, No. 4, 1936, s. 419-471.

Casti, J. L., DePauli, W.:

Gödel-Mantiğa Adanmış Bir Yaşam, Çev. Ergün Akça, Kabalcı Yayınları, İstanbul, 2004.

Çakmak, Cengiz:

“Susma ve İfade Edilemeyen”, **Felsefe Arkivi**, Sayı 31, 2007, s. 13-26.

Tractatus’da Dil ve Felsefe İlişkisi, Çantay Kitabevi, İstanbul, 2000.

Çitil, Ahmet A.:

Matematik ve Metafizik, Alfa Yayınları, İstanbul, 2012.

Dawson, Ryan:

“Leaving Mathematics As It Is: Wittgenstein’s Later Philosophy of Mathematics”, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), University of East Anglia, Norwich, 2015.

- Dragalin, A. G.: “Axiom of Infinity”, (Çevrimiçi) <https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Infinity, axiom of>, 26 Şubat 2018.
- Dummett, Michael: “Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics”, **The Philosophical Review**, Vol. 68, No. 3, s.324-348.
- Truth and Other Enigmas**, Harvard University Press, Cambridge, 1978.
- Duran, Kemal: “Asal Sayıların Gizemi”, (Çevrimiçi) http://www.buders.com/DOKUMAN/bukaynak/genel_kultur/asal_sayilarin_gizemi.pdf. 08 Aralık 2017.
- Floyd, Juliet H.: “The Rule of the Mathematical: Wittgenstein’s Later Discussions”, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), Harvard University, Cambridge, Massachusetts, 1990.
- Frascolla, Pascolla: **Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics**, Routledge, London, 1994.
- Frege, Gottlob: **Aritmetiğin Temelleri**, Çev. H. Bülent Gözkân, Yapı Kredi Yayınları, İstanbul, 2012.
- “On Sense and Reference”, **Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege**, Ed. P. Geach, M. Black, Basil Blackwell, Oxford, 1980, s. 25-50.

The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System Vol. 1, Ed. M. Furth, University of California Press, Berkley, 1964.

Gerrard, Steven:

“Wittgenstein in Transition: The Philosophy of Mathematics”, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), University of Chicago, Chicago, 1987.

Gödel, Kurt:

"On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems", Çev. A. Ayhan Çitil, (**Matematik ve Metafizik** içinde).

“On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems”, Çev. Bülent Gözkân, (**Gödel Kanıtlaması** İçinde), Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, İstanbul, 2010.

“Note added 28 August 1963”, ("Introductory Note to 1933o" içinde), Ed. Feferman, 1986.

Gözkân, Hasan B.:

“Frege ve Aritmetiğin Temelleri”, (**Aritmetiğin Temelleri** içinde), Frege, **Aritmetiğin Temelleri**, Yapı Kredi Yayınları, İstanbul, 2012, s. 13-74.

Güven, Özgüç:

“Bouwer’in Görüselciliği,” **VI. Mantık Çalıştayı Kitabı**, Ed. Şafak Ural, Vedat Kamer, Mantık Derneği Yayınları, İstanbul, 2016, s. 219-228.

Grünberg, Teo, Onart, Adnan:

Mantık Terimleri Sözlüğü, METU Press, Ankara, 2003

- Hanz, H., v.d.: “The Scientific Conception of the World: The Vienna Circle”, (Çevrimiçi) <https://philpapers.org/rec/HAHTSC>, 05 Ocak 2018.
- Hardy, G.: “Mathematical Proof”, **Mind**, vol. 38, 1929, s. 1-25.
- Heijenoort, J.: **From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic**, Harvard University Press, Harvard, 1967.
- Heyting, A.: “The Intuitionist Foundations of Mathematics”, **Philosophy of Mathematics; Selected Readings** içinde, Ed. Paul Benacerraf , Hilary Putnam, Cambridge University Press, New York, 1983, s. 42-49.
- Hofstadter, D. R.: “Gödel Kanıtlaması İçinde Önsöz”, E. Nagel, J. R Newman., **Gödel Kanıtlaması**, Çev. Bülent Gözkân, Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, İstanbul, 2010.
- Humphrey, John A.: “Ludwig Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics: The Search for a Clear View”, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), Washington University, Washington, 1988.
- Janik, A., Toulmin, S.: **Wittgenstein’in Viyana’sı**, Çev. Hüsamettin Arslan, Paradigma Yayıncılık, İstanbul, 2008.

- Joseph, Mark A.: “Wittgenstein on Truth and Necessity in Mathematics”, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), Columbia University, Newyork, 1994.
- Kant, Immanuel: **Arı Usun Eleştirisi**, Çev. Aziz Yardımlı, İdea Yayınları, İstanbul, 1993.
- Kielkopf, C. F.: **Strict Finitism**, Mouton & Co. N. V, The Hague, 1970.
- Kreisel, G.: “Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics”, **British Journal for the Philosophy of Science**, Vol. 9, 1958, s. 135-158.
- Kuusela, O.: **The Struggle Against Dogmatism: Wittgenstein and the Concept of Philosophy**, Harvard University Press, Cambridge, 2008.
- Lazerowitz, M.: **The Structure of Metaphysics**, Routledge & Kegan Paul, London, 1954.
- Malcolm, Norman: **Ludwig Wittgenstein: A Memoir**, Oxford University Press, London, 1958.
- “Are Necessary Propositions Really Verbal?”, **Mind**, Vol. XLIX, 1940, s. 189-203.
- Melkom, Raymond H.: “Wittgenstein on the Philosophy of Mathematics”, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), The University of Western Ontario, London, 1982.
- Monk, Ray: **Wittgenstein**, Çev. Berna Kılınçer ve Tülin Er, Kabalcı Yayınları, İstanbul, 2005.

- Moore, Gilbert E.: “Wittgenstein’s Lectures in 1930-33”, **Mind** **LXIII**, Vol. 249, 1954, s. 1-27.
- Nagel, E., Newman, J. R.: **Gödel Kanıtlaması**, Çev. Bülent Gözkân, Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, İstanbul, 2010.
- Nesin, Ali: **Sezgisel Kümeler Kuramı**, 4. Basım, Nesin Yayınevi, İstanbul, 2010.
- Pears, David: **Ludwig Wittgenstein**, The Viking Press, Newyork, 1970.
- Pole, D.: **The Later Philosophy of Wittgenstein**, Oxford University Press, New York, 1963.
- Potter, Michael: “Wittgenstein on Mathematics”, (Çevrimiçi), <https://www.phil.cam.ac.uk/people/teaching-research-pages/potter/articles/wittgenstein-maths-doc.pdf>, 13 Eylül 2018.
- Putnam, Hilary, Conant, James: “On Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics”, **Proceedings of the Aristotelian Society**, Supplementary Volumes, Vol. 70, s. 243-265.
- Ramsey, Frank P.: **The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays**, Ed. R. B. Braithwaite, Routledge & Kegan Paul, London, 1931.
- “Tractatus Logico-Philosophicus by Ludwig Wittgenstein; Bertrand Russell”, **Mind**, Vol. 32, No. 128, s. 465-478.
- Russell, B., Whitehead, A. N.: **Principia Mathematica 2nd edition Vol. 2**, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

- Principia Mathematica 2nd edition Vol. 1**, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.
- Russell, Bertrand: **The Principles of Mathematics**, George Allen and Unwin, London, 1937.
- “Mathematical Logic as Based on the Theory of Types”, **From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic**, Ed. J. Van Heijenoort, Harvard University Press, Cambridge, 1977, s. 222-262.
- Introduction to Mathematical Philosophy**, George Allen & Unwin, London, 1919.
- “Letter to Lady Ottoline: 23 Şubat 1913”, (Çevrimiçi)
<https://mulpress.mcmaster.ca/russelljournal/article/.../1475> 12 Ocak 2018
- Logic and Knowledge**, Ed. R. C. Marsh, G. Allen and Unwin, London, 1956.
- Mysticism and Logic**, Unwin, London, 1918.
- Sertöz, Ali S.: “Andrew Wiles Bir Denklemin Peşinde”, (Çevrimiçi)
<http://www.matematiksel.org/fermata-meydan-okuyan-bir-profesor-andrew-wiles/>. 08 Aralık 2017.
- Sluga, H.: “Ludwig Wittgenstein, Yaşamı ve Yapıtları”, Çev. Sevinç Altınçekiç, **Cogito**, Sayı 33, 2002, s. 11-38.

- Snyder, Eric A.: “The Philosophy of Mathematics of Wittgenstein’s Tractatus Logico-Philosophicus”, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), The University of Western Ontario Faculty of Graduate Studies, London, 2000.
- Soykan, Ömer N.: **Felsefe ve Dil**, Kabalcı Yayınları, İstanbul, 1995.
- “Wittgenstein Felsefesi: Temel Kavram ve Sorunlar”, **Cogito**, Sayı 33, 2002, s. 40-79.
- Thibadeau, Eugene F.: “Wittgenstein’s Later (1929-1951) Philosophy of Mathematics”, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), Newyork University, Newyork, 1972.
- Von Atten, Mark: "Luitzen Egbertus Jan Brouwer", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), (Çevrimiçi) <https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/brouwer/> 08 Mart 2018.
- Von Wright, G. H.: “Ludwig Wittgenstein, A Biographical Sketch”, **The Philosophical Review**, Vol. LXIV, 1955, s. 527- 545.
- Waismann, F.: **Wittgenstein and the Vienna Circle**, Ed. B. F. McGuiness, Basil Blackwell, Oxford, 1979.
- Wang, Hao: **From Mathematics to Philosophy**, Humanities Press, New York, 1974.

Wittgenstein, Ludwig:

Defterler: 1914-1916, Çev. Ali Utku, Birey Yayınları, İstanbul, 2004.

Tractatus: Logico-Philosophicus, Çev. Oruç Aruoba, Metis Yayınları, İstanbul, 2013.

Prototractatus, Ed. B. F. McGuiness, T. Nyberg ve G. H. von Wright, Çev. D. F. Pears, B. F. McGuiness, Routledge & Kegan Paul, London, 1972.

Cambridge Letters, Correspondence with Russell, Keynes, Moore, Ramsey and Sraffa, Ed. B. F. McGuiness, G. H. von Wright, Basil Blackwell, Oxford, 1995.

Wittgenstein's Lectures: Cambridge, 1930-1932, Ed. Alice Ambrose, Blackwell, London, 1980.

Philosophical Remarks, Ed. Rush Rhees, Basil Blackwell, Oxford, 1975.

Philosophical Grammar, Ed. Rush Rhees, Blackwell, Oxford, 1974.

Wittgenstein's Lectures, Cambridge 1930-32, Ed. Desmond Lee, Blackwell, Oxford, 1980.

Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Ed. Cora Diamond, Harvester, Cambridge, 1976.

The Blue and Brown Books, Blackwell, Oxford, 1975.

Felsefi Soruşturmalar, ev. Haluk Barışcan, Metis Yayınları, İstanbul, 2010.

Remarks on the Foundations of Mathematics, Ed. G. H. von Wright, G. E. M. Anscombe, R. Rheeseds, Basil Blackwell, Oxford, 1978.

Wittgenstein's Lectures, 1932 – 35, Ed. A. Ambrose, Blackwell, Oxford. 1979.

Ursache und Wirkung: Intuitives Erfassen, Ed. Rush Rhees, ev. Peter Winch, **Cause and Effect: Intuitive Awareness**, *Philosophia*, Vol. 6, No, 3-4, 1976.

Culture and Value, Ed. G. H. von Wright, Blackwell, Oxford, 1980.

Mavi Kitap, Kahverengi Kitap, ev. Doğan şahiner, Türkiye İř Bankası Yayınları, İstanbul, 2011.

Wright, C.:

“Reviewed Work: Wittgenstein on the Foundations of Mathematics”, (evrimii) <http://www.jstor.org/stable/20127527> 15 Haziran 2017.

Wittgenstein on the Foundations of Mathematics, Harvard University Press, Cambridge, 1980.

- Wrigley, Michael B.: “Wittgenstein’s Early Philosophy of Mathematics”, (Yayınlanmamış Doktora Tezi), University of California, Berkeley, 1987.
- Yalçın, Şahabettin: “Frege: Semantikten Matematiğe Paradokslar”, **Felsefe Tartışmaları**, Sayı 30, 2003, s. 47-60.
- Zalta , Edward N.: “Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics” (Çevrimiçi)
<https://plato.stanford.edu/entries/wittgenstein-mathematics/>, 14 Kasım 2017.
- (Çevrimiçi)
<http://www.acikbilim.com/2013/04/dosyalar/so-nusuzlugu-sayamamak.html> 04 Nisan 2018
- (Çevrimiçi)
<http://hamzakaradumanoglu.blogspot.com/> 14 Nisan 2018

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet ARSLAN 1984 yılında Mersin’de doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Mersin’de tamamladıktan sonra 2003 yılında Boğaziçi Üniversitesi’ne kaydoldu. Boğaziçi Üniversitesi’nde matematik eğitimini tamamladıktan sonra bir süre özel eğitim kurumlarında matematik öğretmenliği yaptı. 2012 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Felsefe Anabilim Dalı’nda başladığı yüksek lisansını 2015 yılında “Aritmetiğin Yargıları Analitik A Priori midir, Sentetik A Priori midir? Bir Kant Frege Karşılaştırması” başlıklı tezi ile tamamladı. Aynı yıl İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Felsefe Anabilim Dalı’nda doktora programına kaydoldu. 2013 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Felsefe bölümünde Araştırma Görevlisi olarak başladığı görevini hâlen sürdürmektedir. Çalışmalarının odağında mantık ve matematik felsefesi bulunmaktadır.

Akademik Çalışmalar

- Arslan M., “Aritmetiğin Temelleri Bağlamında Bir Kant-Frege Karşılaştırması”, **V. Uluslararası Mantık Çalıştayı**, Bulgaristan, 2014. (sözlü sunum)
- Arslan M., “Kantçı Geometri Anlayışının Öklid-Dışı Geometrilerin Ortaya Çıkışının Ardından Yeniden Değerlendirilmesi”, **Felsefi Düşün**, 7. Sayı, 2016.
- Arslan M., “Wittgenstein’da Matematik Felsefesi”, **VII. Mantık Çalıştayı Kitabı**, Ed. Vedat Kamer, Şafak Ural, Mantık Derneği Yayınları, İstanbul, 2017.
- Arslan M., “Kant’ta Aritmetik Yargıların Doğası Üzerine Bir İnceleme”, **İnsan ve Toplum Bilimleri Araştırmaları Dergisi**, Cilt 6, Sayı 5, 2017.
- Arslan M., Gök S. Elif, “Gödel’in Tamamlanamazlık Teoremlerinin Ardından Matematiğin Temelleri Tartışmaları”, **Uluslararası İstanbul Felsefe Kongresi**, 2018.

- Arslan M., “Aritmetiksel Eşitlikler vs. Totolojiler Üzerine Tractatusçu Bir Değerlendirme”, **VIII. Mantık Çalıştayı Kitabı**, Ed. Vedat Kamer, Şafak Ural, Mantık Derneği Yayınları, İstanbul, 2018.
- Arslan M., “Dil ve Düşünce İlişkisinin Sınır Kavramı Üzerinden Yeniden Ele Alınması”, **2nd International Blacksea Conference on Language and Language Education**, Sinop, 2018.
- Arslan M., “Matematiğin Felsefi Temelleri Üzerine Bir İnceleme”, **3. Uluslararası Felsefe, Eğitim, Sanat ve Bilim Tarihi Sempozyumu**, Giresun, 2018.
- Arslan M., “Matematiksel Nesnelerin Gerçekliği Sorunu”, **Ontoloji Tartışmaları 3: Gerçeklik**, İstanbul, 2018.