

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$x^2 - kxy - y^2 = \pm k$ DİYOFANT DENKLEMLERİNİN
ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra GED

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Refik KESKİN

Temmuz 2021

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$x^2 - kxy - y^2 = \pm k$ DİYOFANT DENKLEMLERİNİN
ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra GED

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ

Bu tez 06.07.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı

Üye

Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Kübra GED

06.07.2021

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın ve yüksek lisans eğitim hayatımın her aşamasında engin bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, destek olan, yardımlarını ve zamanını hiçbir zaman esirgemeyen saygı değer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Refik KESKİN' e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışmamın yazılımda verdiği destekten dolayı Fatih ERDUVAN'a da teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca doğduğum günden beri maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	iv
ÖZET.....	v
SUMMARY	vi
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ	1
1.1. Temel Tanım ve Teoremler	2
BÖLÜM 2.	
BAZI DİYOFANT DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ.....	12
2.1. $x^2 - kxy \pm y^2 = \pm 1$ Diyofant Denklemelerinin Çözümleri	12
2.2. $x^2 - (k^2 + 4)y^2 = \pm 4$ Diyofant Denklemelerinin Çözümleri	16
2.3. $x^2 - kxy - y^2 = \pm(k^2 + 4)$ Diyofant Denklemelerinin Çözümleri.....	19
2.4. $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = \pm 1$ Diyofant Denklemelerinin Çözümleri	23
BÖLÜM 3.	
ARAŞTIRMA BULGULARI	24
3.1. $x^2 - kxy - y^2 = \pm k$ Diyofant Denklemelerinin Çözümleri	24
3.2. $x^2 - (k^2 + 4)y^2 = \pm 4k$ Diyofant Denklemelerinin Çözümleri.....	33
3.3. $x^2 - 2pxy - y^2 = \pm 2p$ Diyofant Denklemelerinin Çözümleri.....	41
3.4. $x^2 - kxy - y^2 = \pm k(k^2 + 4)$ Diyofant Denklemelerinin Çözümleri	49

BÖLÜM 4.

SONUÇ VE ÖNERİLER 60

KAYNAKLAR..... 63

ÖZGEÇMİŞ 64



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$a b$	: a tam sayısı b tam sayısını böler
(F_n)	: Fibonacci dizisi
$(U_n(k, s))$	: Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
$(V_n(k, s))$	: Genelleştirilmiş Lucas dizisi
(L_n)	: Lucas dizisi
F_n	: n . Fibonacci sayısı
$U_n(k, s)$	: n . genelleştirilmiş Fibonacci sayısı
$V_n(k, s)$	: n . genelleştirilmiş Lucas sayısı
L_n	: n . Lucas sayısı
(P_n)	: Pell dizisi
(Q_n)	: Pell-Lucas dizisi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi

ÖZET

Anahtar kelimeler: Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, genelleştirilmiş Fibonacci sayıları, genelleştirilmiş Lucas sayıları, Diyofant Denklemleri

Bu çalışmanın ilk bölümünde konu ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren bazı Diyofant denklemleri ve çözümleri verilmiştir.

Üçüncü bölüm bazı yeni Diyofant denklemlerinin pozitif tamsayı çözümlerini içeren sonuçlardan oluşmaktadır.

Son bölümde ise üçüncü bölümdeki sonuçlar özetlenerek bu bölümde ele alınan denklemler ile ilgili yeni problemler önerilmiştir.

SOLUTIONS OF THE DIOPHANTINE EQUATIONS

$$x^2 - kxy - y^2 = \pm k$$

SUMMARY

Keywords: Fibonacci numbers, Lucas numbers, generalized Fibonacci numbers, generalized Lucas numbers, Diophantine equations

In the first section of this work, fundamental definitions and theorems related to the subject are given.

In the second section, some Diophantine equations and their solutions including generalized Fibonacci and Lucas numbers are given.

The third section covers our main results and is devoted to finding positive integer solutions of some new Diophantine equations.

In the last section, the results in the third section are summarized and new problems related to the equations discussed in this section are proposed.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci' nin, en yetenekli batılı matematikçi olduğu düşünülür. Fibonacci, modern çağda Hint-Arap sayılarını Avrupa' ya getirmiş ve 13. yüzyıl başlarında Liber Abaci isimli kitabı yazmıştır. Özellikle bu kitapta bir örnek olarak yer alan 1,1,2,3,5,8,13,21, ... sayılarının dizisi olan ve kendi adıyla anılan Fibonacci dizisi sayesinde tanınır. Fibonacci dizisinin elemanları Fibonacci sayıları olarak adlandırılır ve n . Fibonacci sayısı F_n ile gösterilir. Fibonacci dizisi birçok sayı dizisiyle yakından ilgilidir. Bunlardan en ünlü olanı, François Edouard Anatole Lucas tarafından tanıtılan 2,1,3,4,7,11,18,29, ... sayılarının dizisi olan Lucas dizisidir [1]. Lucas dizisinin elemanları Lucas sayıları olarak adlandırılır ve n . Lucas sayısı L_n ile gösterilir. $n \geq 1$ için $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ olmak üzere Fibonacci ve Lucas dizilerinin elemanları sırasıyla,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$$

tekrarlama bağıntılarıyla tanımlanır. Fibonacci dizisi (F_n), Lucas dizisi (L_n) ile gösterilir. Bu sayı dizileriyle ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bunlar arasındaki özdeşlikler, kongrüans bağıntıları ve bu dizilerdeki bölünebilme özellikleri [1] ve [2] nolu kaynaklarda araştırılmıştır. Özellikle, $x^2 - 5y^2 = \pm 4$ ve $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$ gibi bazı Diyofant denklemlerin tamsayı çözümleri [2] nolu kaynakta verilmiştir. Bu denklemlerin çözümlerinin, bu sayı dizilerinin terimleri cinsinden elde edilmesi ilgi çekici olmuştur. Fibonacci ve Lucas sayılarının diğer özellikleri ve uygulamaları için [3] nolu kaynağa bakılabilir. Benzer özellikler, aşağıda tanımını vereceğimiz genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizileri için de geçerli olmuştur. Bu dizilerle ilgili detaylı bilgi için [4] nolu kaynağa bakılabilir.

1.1. Temel Tanım Ve Teoremler

Tanım 1.1.1. k ve s sıfırdan farklı tam sayılar olmak üzere $k^2 + 4s > 0$ olsun. Bu durumda $U_0(k, s) = 0$ ve $U_1(k, s) = 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$U_{n+1}(k, s) = kU_n(k, s) + sU_{n-1}(k, s)$$

ile verilen (U_n) dizisine genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ve U_n sayısına da n . genelleştirilmiş Fibonacci sayısı denir.

Tanım 1.1.2. k ve s sıfırdan farklı tam sayılar olmak üzere $k^2 + 4s > 0$ olsun. Bu durumda $V_0(k, s) = 2$ ve $V_1(k, s) = k$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$V_{n+1}(k, s) = kV_n(k, s) + sV_{n-1}(k, s)$$

ile verilen (V_n) dizisine genelleştirilmiş Lucas dizisi ve V_n sayısına da n . genelleştirilmiş Lucas sayısı denir.

Özel olarak $k = s = 1$ için;

- a) (U_n) genelleştirilmiş Fibonacci dizisi (F_n) Fibonacci dizisine karşılık gelir.
- b) (V_n) genelleştirilmiş Lucas dizisi (L_n) Lucas dizisine karşılık gelir.

Üstelik $k = 2$ ve $s = 1$ için;

- c) (U_n) genelleştirilmiş Fibonacci dizisi (P_n) Pell dizisine karşılık gelir.
- d) (V_n) genelleştirilmiş Lucas dizisi (Q_n) Pell-Lucas dizisine karşılık gelir.

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin sağladığı karakteristik denklem

$$x^2 - kx - s = 0$$

olup bu denklemin kökleri $\alpha = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4s}}{2}$ ve $\beta = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4s}}{2}$ dir. Burada

$$\alpha + \beta = k, \alpha - \beta = \sqrt{k^2 + 4s}, \alpha\beta = -s, \alpha^2 = k\alpha + s, \beta^2 = k\beta + s$$

olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca

$$U_n(k, s) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$V_n(k, s) = \alpha^n + \beta^n$$

formülleri geçerlidir. Bu formüllerin ve bu formüller kullanılarak elde edilen özdeşliklerin ispatı daha sonra yapılacaktır.

Özel olarak, $s = 1$ olmak üzere

$$U_n(k, 1) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$V_n(k, 1) = \alpha^n + \beta^n$$

ve $s = -1$ olmak üzere

$$U_n(k, -1) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$V_n(k, -1) = \alpha^n + \beta^n$$

dir. Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ için negatif terimli genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları

$$U_{-n} = -(-s)^{-n}U_n,$$

$$V_{-n} = (-s)^{-n}V_n$$

ile tanımlanır. Aşağıdaki önermelerde ve teoremlerde, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarına ilişkin bazı özdeşlikler ve bu sayılar ile bu sayı dizilerinin sağladığı karakteristik denklemin kökleri arasındaki bazı formüller verilecektir. Özellikle bu dizilere ilişkin Binet formülleri olarak bilinen formüller yardımıyla bu özdeşliklerin ispatları verilecektir. Bu özdeşlikler, ikinci ve üçüncü bölümde ele alınacak denklemlerin çözümlerinde kullanılacaktır. Bu özdeşliklerin ispatları için [4], [5] ve

[6] nolu kaynaklara bakılabilir. Bütünlük sağlaması açısından bu özdeşliklerin ve formüllerin ispatları bu kısımda verilecektir.

Önerme 1.1.3. Her $n \geq 1$ tamsayısı için $U_n = U_n(k, s)$ olmak üzere

a) $\alpha^n = \alpha U_n + s U_{n-1}$

b) $\beta^n = \beta U_n + s U_{n-1}$

c) $\alpha^n \sqrt{k^2 + 4s} = \alpha V_n + s V_{n-1}$

d) $-\beta^n \sqrt{k^2 + 4s} = \beta V_n + s V_{n-1}$

dir.

İspat: a) İspatı tümevarımla yapalım. $U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ olmak üzere $n = 1$ için

$$\alpha^1 = \alpha \cdot 1 + s \cdot 0 = \alpha U_1 + s U_0$$

olduğundan eşitlik sağlanır. Bu eşitlik n için sağlansın. Yani

$$\alpha^n = \alpha U_n + s U_{n-1}$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \alpha^{n+1} &= \alpha \alpha^n = \alpha(\alpha U_n + s U_{n-1}) = \alpha^2 U_n + \alpha s U_{n-1} = (k\alpha + s)U_n + \alpha s U_{n-1} \\ &= k\alpha U_n + s U_n + \alpha s U_{n-1} = \alpha(k U_n + s U_{n-1}) + s U_n = \alpha U_{n+1} + s U_n \end{aligned}$$

olduğundan bu eşitlik $n + 1$ için de doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

b) İspatı tümevarımla yapalım. $U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ olmak üzere $n = 1$ için

$$\beta^1 = \beta \cdot 1 + 0 = \beta U_1 + s U_0$$

olduğundan eşitlik sağlanır. Bu eşitlik n için sağlansın. Yani

$$\beta^n = \beta U_n + s U_{n-1}$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\beta^{n+1} &= \beta\beta^n = \beta(\beta U_n + sU_{n-1}) = \beta^2 U_n + \beta s U_{n-1} = (k\beta + s)U_n + \beta s U_{n-1} \\ &= k\beta U_n + sU_n + \beta s U_{n-1} = \beta(kU_n + sU_{n-1}) + sU_n = \beta U_{n+1} + sU_n\end{aligned}$$

olduğundan bu eşitlik $n + 1$ için de doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

c) İspatı tümevarımla yapalım. $V_0 = 2$ ve $V_1 = k$ olmak üzere $n = 1$ için

$$\alpha^1 \sqrt{k^2 + 4s} = \alpha(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha \cdot \beta = k\alpha + s + s = k\alpha + 2s = \alpha V_1 + sV_0$$

olduğundan eşitlik sağlanır. Bu eşitlik n için sağlansın. Yani

$$\alpha^n \sqrt{k^2 + 4s} = \alpha V_n + sV_{n-1}$$

olsun. O halde

$$\begin{aligned}\alpha^{n+1} &= \alpha \cdot \frac{\alpha V_n + sV_{n-1}}{\sqrt{k^2 + 4s}} = \frac{\alpha^2 V_n + \alpha s V_{n-1}}{\sqrt{k^2 + 4s}} = \frac{\alpha (kV_n + sV_n + \alpha s V_{n-1})}{\sqrt{k^2 + 4s}} = \frac{\alpha (kV_n + sV_{n-1}) + sV_n}{\sqrt{k^2 + 4s}} \\ &= \frac{\alpha V_{n+1} + sV_n}{\sqrt{k^2 + 4s}} = \frac{\alpha V_{n+1} + sV_n}{\sqrt{k^2 + 4s}}\end{aligned}$$

olduğundan bu eşitlik $n + 1$ için de doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

d) İspatı tümevarımla yapalım. $V_0 = 2$ ve $V_1 = k$ olmak üzere $n = 1$ için

$$-\beta^1 \sqrt{k^2 + 4s} = -\beta(\alpha - \beta) = -\beta\alpha + \beta^2 = s + k\beta + s = k\beta + 2s = \beta V_1 + sV_0$$

olduğundan eşitlik sağlanır. Bu eşitlik n için sağlansın. Yani

$$-\beta^n \sqrt{k^2 + 4s} = \beta V_n + sV_{n-1}$$

olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\beta^{n+1} &= \beta \beta^n = \beta \frac{\beta \frac{V_n + sV_{n-1}}{-\sqrt{k^2 + 4s}}}{-\sqrt{k^2 + 4s}} = \frac{\beta^2 V_n + \beta s V_{n-1}}{-\sqrt{k^2 + 4s}} = \frac{(\beta k + s) V_n + \beta s V_{n-1}}{-\sqrt{k^2 + 4s}} = \beta \frac{k V_n + s V_n + \beta s V_{n-1}}{-\sqrt{k^2 + 4s}} \\
&= \frac{\beta(k V_n + s V_{n-1})}{-\sqrt{k^2 + 4s}} = \frac{\beta V_{n+1} + s V_n}{-\sqrt{k^2 + 4s}}
\end{aligned}$$

olduğundan bu eşitlik $n + 1$ için de doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 1.1.4. $n \geq 1$ olmak üzere n . genelleştirilmiş Fibonacci ve n . genelleştirilmiş Lucas sayıları sırasıyla

a) $U_n(k, s) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$

b) $V_n(k, s) = \alpha^n + \beta^n$

formülleri ile verilir.

İspat: a) Önerme 1.1.3' ün (a) ve (b) şıkında verilen

$$\alpha^n = \alpha U_n + s U_{n-1},$$

$$\beta^n = \beta U_n + s U_{n-1}$$

eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\alpha^n - \beta^n = \alpha U_n - \beta U_n$$

bulunur. Buradan

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

elde edilir.

b) Önerme 1.1.3' ün (c) ve (d) şıkında verilen

$$\alpha^n \sqrt{k^2 + 4s} = \alpha V_n + s V_{n-1},$$

$$-\beta^n \sqrt{k^2 + 4s} = \beta V_n + s V_{n-1}$$

eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$(\alpha - \beta)V_n = \sqrt{k^2 + 4s}(\alpha^n + \beta^n)$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$(\alpha - \beta)V_n = (\alpha - \beta)(\alpha^n + \beta^n)$$

ve böylece $V_n(k, s) = \alpha^n + \beta^n$

elde edilir.

Teorem 1.1.5. Her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$U_n(k, s) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$V_n(k, s) = \alpha^n + \beta^n$$

dir.

İspat: a) $n > 0$ için Teorem 1.1.4' te bunların doğruluğu gösterildi. Şimdi $n < 0$ olsun. O zaman $m > 0$ olmak üzere $n = -m$ yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} U_n(k, s) &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{-m} - \beta^{-m}}{\alpha - \beta} = \frac{\frac{1}{\alpha^m} - \frac{1}{\beta^m}}{\alpha - \beta} = \frac{\beta^m - \alpha^m}{\alpha^m \beta^m (\alpha - \beta)} = \frac{-(\alpha^m - \beta^m)}{(-s)^m (\alpha - \beta)} \\ &= -(-s)^{-m} \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \right) = U_{-m} = U_n \end{aligned}$$

olur. Benzer biçimde

$$\begin{aligned} V_n(k, s) &= \alpha^n + \beta^n = \alpha^{-m} + \beta^{-m} = \frac{1}{\alpha^m} + \frac{1}{\beta^m} = \frac{\alpha^m + \beta^m}{(\alpha\beta)^m} = (\alpha\beta)^{-m}(\alpha^m + \beta^m) \\ &= (-s)^{-m} V_m = V_{-m} = V_n \end{aligned}$$

elde edilir. $n = 0$ için formüllerin doğru olduğunu görmek kolaydır.

Tanım 1.1.6. $U_n(k, s) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ ve $V_n(k, s) = \alpha^n + \beta^n$ formüllerine Binet formülleri denir.

Önerme 1.1.7. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $U_n = U_n(k, s)$ ve $V_n = V_n(k, s)$ olmak üzere

a) $V_n = U_{n+1} + sU_{n-1}$

b) $V_n = kU_n + 2sU_{n-1}$

c) $U_n(k^2 + 4s) = V_{n+1} + sV_{n-1}$

dir.

İspat: Binet formülleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \text{a) } U_{n+1} + sU_{n-1} &= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + s \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} + s\alpha^{n-1} - s\beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^n(\alpha + s\alpha^{-1}) - \beta^n(\beta + s\beta^{-1})}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n(\alpha - \alpha\beta\alpha^{-1}) - \beta^n(\beta - \beta\alpha\beta^{-1})}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^n(\alpha - \beta) + \beta^n(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} = \alpha^n + \beta^n = V_n \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{b) } kU_n + 2sU_{n-1} &= k \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + 2s \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = k \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + 2s \frac{\alpha^n\beta - \alpha\beta^n}{(\alpha\beta)(\alpha - \beta)} \\ &= \frac{k\alpha^n - k\beta^n - 2\alpha^n\beta + 2\alpha\beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n(\alpha + \beta - 2\beta) - \beta^n(\alpha + \beta - 2\alpha)}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^n(\alpha - \beta) + \beta^n(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^n + \beta^n)}{\alpha - \beta} = \alpha^n + \beta^n = V_n \end{aligned}$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned} \text{c) } V_{n+1} + sV_{n-1} &= \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} + s = \alpha^n(\alpha + s\alpha^{-1}) + \beta^n(\alpha + s\beta^{-1}) \\ &= \alpha^n(\alpha - \alpha\beta\alpha^{-1}) + \beta^n(\beta - \beta\alpha\beta^{-1}) = \alpha^n(\alpha - \beta) - \beta^n(\alpha - \beta) \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha^n - \beta^n) = (\alpha - \beta)^2 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = (k^2 + 4s)U_n \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 1.1.8. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $U_n = U_n(k, s)$ ve $V_n = V_n(k, s)$ olmak üzere

a) $\alpha^{2n} = V_n \alpha^n - (-s)^n$

b) $\alpha^{2n} = U_n \alpha^n \sqrt{k^2 + 4s} + (-s)^n$

dir.

İspat: Binet formülleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} \text{a) } V_n \alpha^n - (-s)^n &= (\alpha^n + \beta^n) \alpha^n - (-s)^n \\ &= \alpha^{2n} + (\alpha\beta)^n - (-s)^n \\ &= \alpha^{2n} + (-s)^n - (-s)^n \\ &= \alpha^{2n} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{b) } U_n \alpha^n \sqrt{k^2 + 4s} + (-s)^n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \alpha^n \sqrt{k^2 + 4s} + (-s)^n \\ &= (\alpha^n - \beta^n) \alpha^n + (-s)^n \\ &= \alpha^{2n} - (\alpha\beta)^n + (-s)^n \\ &= \alpha^{2n} - (-s)^n + (-s)^n \\ &= \alpha^{2n} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Bundan böyle $k \geq 1$ tam sayı olmak üzere $U_n(k, 1)$ ve $V_n(k, 1)$ dizileri ele alınacaktır.

Teorem 1.1.9. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $U_n = U_n(k, 1)$ olmak üzere

$$U_n^2 - k U_n U_{n-1} - U_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Binet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
U_n^2 - kU_nU_{n-1} - U_{n-1}^2 &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 - k \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^{2n} - 2(\alpha\beta)^n + \beta^{2n} - k(\alpha^n - \beta^n) \left(\frac{\alpha^n}{\alpha} - \frac{\beta^n}{\beta}\right) - (\alpha^n - \beta^n)^2) \\
&= \frac{1}{k^2 + 4} (\alpha^{2n} - 2(-1)^n + \beta^{2n} + k(\alpha^n - \beta^n)(\alpha^n\beta - \alpha\beta^n) - (\alpha^n\beta - \alpha\beta^2)^2) \\
&= \frac{1}{k^2 + 4} (\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(-1)^n + k(\alpha^{2n}\beta - (\alpha\beta)^n\alpha - (\alpha\beta)^n\beta + \alpha\beta^{2n})) \\
&\quad - \frac{1}{k^2 + 4} (\alpha^{2n}\beta^2 - 2(\alpha\beta)^{n+1} + \alpha^2\beta^{2n}) \\
&= \frac{1}{k^2 + 4} (\alpha^{2n}(1 - \beta^2) + \beta^{2n}(1 - \alpha^2) - 4(-1)^n + k\alpha^{2n}\beta + k\alpha\beta^{2n}) \\
&\quad - \frac{1}{k^2 + 4} (k(-1)^n(\alpha + \beta)) \\
&= \frac{1}{k^2 + 4} (\alpha^{2n}(-\beta k) + \beta^{2n}(-\alpha k) - 4(-1)^n + k\alpha^{2n}\beta + k\alpha\beta^{2n} - k^2(-1)^n) \\
&= \frac{1}{k^2 + 4} (-(-1)^n(k^2 + 4)) = \frac{(-1)^n}{-1} = (-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 1.1.10. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $V_n = V_n(k, 1)$ olmak üzere

$$V_n^2 - kV_nV_{n-1} - V_{n-1}^2 = (-1)^n(k^2 + 4)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Binet formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
V_n^2 - kV_nV_{n-1} - V_{n-1}^2 &= (\alpha^n + \beta^n)^2 - k(\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \\
&\quad - (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})^2 \\
&= \alpha^{2n} + 2(\alpha\beta)^n + \beta^{2n} - k(\alpha^n + \beta^n) \left(\frac{\alpha^n}{\alpha} + \frac{\beta^n}{\beta}\right) - \left(\frac{\alpha^n}{\alpha} + \frac{\beta^n}{\beta}\right)^2 \\
&= \alpha^{2n} + 2(-1)^n + \beta^{2n} + k(\alpha^n + \beta^n)(\alpha^n\beta + \alpha\beta^n) - (\alpha^n\beta + \alpha\beta^n)^2 \\
&= \alpha^{2n} + 2(-1)^n + \beta^{2n} + k(\alpha^{2n}\beta + (\alpha\beta)^n\alpha + (\alpha\beta)^n\beta + \alpha\beta^{2n}) \\
&\quad - (\alpha^{2n}\beta^2 + 2(\alpha\beta)^{n+1} + \alpha^2\beta^{2n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^{2n} + 2(-1)^n + \beta^{2n} + k\alpha^{2n}\beta + k(-1)^n\alpha + k(-1)^n\beta + k\alpha\beta^{2n} \\
&\quad - \alpha^{2n}\beta^2 + 2(-1)^n - \alpha^2\beta^{2n} \\
&= \alpha^{2n}(1 + k\beta) + \beta^{2n}(1 + k\alpha) + 4(-1)^n + k(-1)^n(\alpha + \beta) - \alpha^{2n}\beta^2 - \alpha^2\beta^{2n} \\
&= \alpha^{2n}\beta^2 + \beta^{2n}\alpha^2 + 4(-1)^n + k^2(-1)^n - \alpha^{2n}\beta^2 - \alpha^2\beta^{2n} = (-1)^n(k^2 + 4)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 1.1.11. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $V_n = V_n(k, 1)$ olmak üzere

$$V_n^2 - (k^2 + 4)U_n^2 = 4(-1)^n$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Binet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
V_n^2 - (k^2 + 4)U_n^2 &= (\alpha^n + \beta^n)^2 - (k^2 + 4)\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= \alpha^{2n} + 2(\alpha\beta)^n + \beta^{2n} - (k^2 + 4)\frac{\alpha^{2n} - 2(\alpha\beta)^n + \beta^{2n}}{k^2 + 4} \\
&= \alpha^{2n} + 2(-1)^n + \beta^{2n} - \alpha^{2n} + 2(-1)^n - \beta^{2n} \\
&= 4(-1)^n
\end{aligned}$$

elde edilir.

BÖLÜM 2. BAZI DİYOFANT DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde k pozitif tam sayı olmak üzere

$$x^2 - kxy \pm y^2 = \pm 1,$$

$$x^2 - (k^2 \pm 4)y^2 = \pm 4,$$

$$x^2 - kxy - y^2 = \pm(k^2 + 4),$$

$$x^2 - (k^2 + 1)y^2 = \pm 1,$$

denklemlerinin pozitif tamsayı çözümleri genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin terimleri cinsinden elde edilecektir. Bu denklemlerin pozitif tamsayı çözümleri literatürde mevcut olup bunun için [7] ve [8] nolu kaynaklara, özellikle [5] nolu tezin kendisine ve kaynaklarına bakılabilir.

2.1. $x^2 - kxy - y^2 = \pm 1$ Diyofant Denklemlerinin Çözümleri

Tanım 2.1.1. R boştan farklı bir küme ve $+$ ile $\cdot$ R üzerinde tanımlı iki işlem olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa R 'ye bir halkadır denir. Bu halka $(R, +, \cdot)$ veya kısaca R ile gösterilir.

R1) $(R, +)$ değişmeli gruptur.

R2) Her $a, b, c \in R$ için

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \text{ dir.}$$

R3) Her $a, b, c \in R$ için

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \text{ ve } (b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a) \text{ dir.}$$

Tanım 2.1.2. $(R, +, \cdot)$ halkasının " $\cdot$ " işlemine göre birim elemanı varsa bu halkaya birimli halka denir.

Tanım 2.1.3. $(R, +, \cdot)$ birimli bir halka ve $(R, +, \cdot)$ nin birimi 1_R ile gösterilsin. $x \in R$ için $x \cdot y = y \cdot x = 1_R$ olan bir $y \in R$ varsa x elemanına bir birimsel eleman denir.

Teorem 2.1.4. $k \geq 1$ olmak üzere $\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, $\beta = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ için

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{a\alpha + b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

halkasının birimsel elemanları kümesi $\{\pm \alpha^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dir [7].

Teorem 2.1.5. $k \geq 1$ olmak üzere $\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, $\beta = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ için

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{a\alpha + b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

halkasında, $a\alpha + b$ nin birimsel eleman olması için gerekli ve yeterli şart

$$a^2 - kab - b^2 = \pm 1$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [7].

Teorem 2.1.6. $k \geq 1$ bir tamsayı olsun.

$$x^2 - kxy - y^2 = \pm 1$$

olacak biçimde x, y pozitif tamsayılarının olması için gerekli ve yeterli şart $n \geq 2$ doğal sayısının

$$(x, y) = (U_n(k, 1), U_{n-1}(k, 1))$$

olacak biçimde mevcut olmasıdır.

İspat: Eğer $(x, y) = (U_n(k, 1), U_{n-1}(k, 1))$ ise

$$x^2 - kxy - y^2 = U_n^2(k, 1) - kU_n(k, 1)U_{n-1}(k, 1) - U_{n-1}^2(k, 1) = (-1)^{n-1} = \pm 1$$

eşitliğinin sağlandığı Teorem 1.1.9' dan görülür. Şimdi

$$x^2 - kxy - y^2 = \pm 1$$

olan $x > 0, y > 0$ tam sayıları mevcut olsun. O halde Teorem 2.1.5' e göre $\alpha x + y$ birimsel elemandır ve $\alpha x + y > 1$ dir. Burada

$$\alpha = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

olduğundan $\alpha > 1$ olduğuna dikkat edelim. Öte yandan Teorem 2.1.4'e göre

$$\alpha x + y = \alpha^n$$

olacak biçimde $n \geq 2$ vardır. Önerme 1.1.3' ün (a) şıkkındaki özelliğinden dolayı

$$\alpha x + y = \alpha^n = \alpha U_n(k, 1) + U_{n-1}(k, 1)$$

olduğu görülür. Buradan $x = U_n(k, 1)$ ve $y = U_{n-1}(k, 1)$ elde edilir.

Teorem 2.1.7. $x^2 - kxy - y^2 = 1$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (U_{2n+1}(k, 1), U_{2n}(k, 1))$$

ile verilir.

İspat: Eğer $(x, y) = (U_{2n+1}(k, 1), U_{2n}(k, 1))$ ise Teorem 1.1.9 kullanılarak

$$x^2 - kxy - y^2 = U_{2n+1}^2(k, 1) - kU_{2n+1}(k, 1)U_{2n}(k, 1) - U_{2n}^2(k, 1) = (-1)^{2n} = 1$$

olduğu görülür. Şimdi

$$x^2 - kxy - y^2 = 1$$

denklemini sağlayan x ve y pozitif tam sayıları mevcut olsun. Teorem 2.1.6' ya göre

$$(x, y) = (U_m(k, 1), U_{m-1}(k, 1))$$

olacak biçimde $m \geq 2$ doğal sayısı vardır. Böylece Teorem 1.1.9 kullanılırsa

$$1 = x^2 - kxy - y^2 = U_m^2(k, 1) - kU_m(k, 1)U_{m-1}(k, 1) - U_{m-1}^2(k, 1) = (-1)^{m-1}$$

eşitliği elde edilir. O zaman m tek tir. Dolayısıyla $m = 2n + 1$ olacak biçimde $n \geq 1$ doğal sayısı vardır. O halde $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (U_m(k, 1), U_{m-1}(k, 1)) = (U_{2n+1}(k, 1), U_{2n}(k, 1))$$

elde edilir.

Teorem 2.1.8. $x^2 - kxy - y^2 = -1$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (U_{2n}(k, 1), U_{2n-1}(k, 1))$$

ile verilir.

İspat: $(x, y) = (U_{2n}(k, 1), U_{2n-1}(k, 1))$ ise Teorem 1.1.9 kullanılırsa

$$\begin{aligned} x^2 - kxy - y^2 &= U_{2n}^2(k, 1) - kU_{2n}(k, 1)U_{2n-1}(k, 1) - U_{2n-1}^2(k, 1) \\ &= (-1)^{2n-1} = -1 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

$$x^2 - kxy - y^2 = -1$$

denklemini sağlayan x, y pozitif tam sayıları mevcut olsun. Teorem 2.1.6'ya göre

$$(x, y) = (U_m(k, 1), U_{m-1}(k, 1))$$

olacak biçimde $m \geq 2$ vardır. O halde Teorem 1.1.9 kullanılırsa

$$\begin{aligned} -1 &= x^2 - kxy - y^2 \\ &= U_m^2(k, 1) - kU_m(k, 1)U_{m-1}(k, 1) - U_{m-1}^2(k, 1) \\ &= (-1)^{m-1} \end{aligned}$$

elde edilir. O zaman m çifttir ve dolayısıyla $m = 2n$ yazılabilir. Buradan $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (U_m(k, 1), U_{m-1}(k, 1)) = (U_{2n}(k, 1), U_{2n-1}(k, 1))$$

olduğu görülür.

2.2. $x^2 - (k^2 + 4)y^2 = \pm 4$ Diyofant Denklemlerinin Çözümleri

Teorem 2.2.1. $k \geq 1$ olsun. Bu durumda

$$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = 4$$

denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (V_{2n}(k, 1), U_{2n}(k, 1))$$

ile verilir.

İspat: (x, y) , $x^2 - (k^2 + 4)y^2 = 4$ denkleminin bir pozitif tam sayı çözümü olsun.

Bu denklem

$$x^2 - k^2y^2 - 4y^2 = 4$$

şeklinde yeniden düzenlenirse $x^2 - k^2y^2$ 'nin çift olduğu görülür. O halde x ve ky aynı anda çift veya aynı anda tek tam sayılardır. $u = \frac{x+ky}{2}$ ve $v = y$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} u^2 - kuv - v^2 &= \left(\frac{x+ky}{2}\right)^2 - ky \frac{x+ky}{2} - y^2 \\ &= \frac{x^2 + 2kxy + k^2y^2 - 2kxy - 2k^2y^2 - 4y^2}{4} \\ &= \frac{x^2 - (k^2 + 4)y^2}{4} = 1 \end{aligned}$$

olur. Teorem 2.1.7'ye göre $u = U_{2n+1}(k, 1)$ ve $v = y = U_{2n}(k, 1)$ olan $n \geq 1$ tamsayısı vardır. Böylece $u = \frac{x+ky}{2}$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} x &= 2u - ky \\ &= 2U_{2n+1}(k, 1) - kU_{2n}(k, 1) \\ &= U_{2n+1}(k, 1) + U_{2n+1}(k, 1) - kU_{2n}(k, 1) \\ &= U_{2n+1}(k, 1) + U_{2n-1}(k, 1) \\ &= V_{2n}(k, 1) \end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$(x, y) = (V_{2n}(k, 1), U_{2n}(k, 1))$$

şeklindedir. Diğer yandan yukarıdaki eşitlik sağlanıyorsa Teorem 1.1.11' den

$$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = V_{2n}^2(k, 1) - (k^2 + 4)U_{2n}^2(k, 1) = 4(-1)^{2n} = 4$$

olduğu görülür.

Teorem 2.2.2. $k \geq 1$ olsun. Bu durumda

$$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = -4$$

denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (V_{2n-1}(k, 1), U_{2n-1}(k, 1))$$

ile verilir.

İspat: (x, y) , $x^2 - (k^2 + 4)y^2 = -4$ denkleminin bir pozitif tam sayı çözümü olsun. Bu durumda

$$x^2 - k^2y^2 - 4y^2 = -4$$

bulunur. Dolayısıyla $x^2 - k^2y^2$ çift olur. O halde x ve ky aynı anda çift veya aynı anda tek tam sayılardır. $u = \frac{x+ky}{2}$ ve $v = y$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} u^2 - kuv - v^2 &= \left(\frac{x+ky}{2}\right)^2 - ky \frac{x+ky}{2} - y^2 \\ &= \frac{x^2 + 2kxy + k^2y^2 - 2kxy - 2k^2y^2 - 4y^2}{4} \\ &= \frac{x^2 - (k^2 + 4)y^2}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teorem 2.1.8' e göre $u = U_{2n}(k, 1)$ ve $v = y = U_{2n-1}(k, 1)$ olacak biçimde $n \geq 1$ tamsayısı vardır. Şimdi x değerini bulmak için $u = \frac{x+ky}{2}$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} x &= 2u - ky = 2U_{2n}(k, 1) - kU_{2n-1}(k, 1) \\ &= U_{2n}(k, 1) + U_{2n}(k, 1) - kU_{2n-1}(k, 1) \\ &= U_{2n}(k, 1) + U_{2n-2}(k, 1) \\ &= V_{2n-1}(k, 1) \end{aligned}$$

bulunur. Yani $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (V_{2n-1}(k, 1), U_{2n-1}(k, 1))$$

dir. Şimdi de yukarıda verilen bu ikilinin

$$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = -4$$

denklemini sağladığını gösterelim. Gerçekten x ve y denklemde yerine yazılır ve Teorem 1.1.11 kullanılırsa

$$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = V_{2n-1}^2(k, 1) - (k^2 + 4)U_{2n-1}^2(k, 1) = 4(-1)^{2n-1} = -4$$

olduğu görülür.

2.3. $x^2 - kxy - y^2 = \pm(k^2 + 4)$ Diyofant Denklemlerinin Çözümleri

Teorem 2.3.1. $k \geq 1$ ve $k^2 + 4$ karesiz olsun. Bu durumda

$$x^2 - kxy - y^2 = k^2 + 4$$

denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (V_{2n}(k, 1), V_{2n-1}(k, 1))$$

ile verilir.

İspat: (x, y) , $x^2 - kxy - y^2 = k^2 + 4$ denkleminin bir pozitif tam sayı çözümü olsun. Bu denklem -4 ile çarpılırsa

$$4y^2 + 4kxy - 4x^2 = -4(k^2 + 4)$$

olur. Son denklem tam kareye tamamlanırsa ve yeniden düzenlenirse

$$(2y + kx)^2 - (k^2 + 4)x^2 = -4(k^2 + 4) \quad (1.1)$$

elde edilir. Bu durumda $k^2 + 4 \mid (2y + kx)^2$ olur. $k^2 + 4$ karesiz olduğundan $k^2 + 4 \mid 2y + kx$ dir. Dolayısıyla

$$2y + kx = (k^2 + 4)a$$

olacak şekilde pozitif a tam sayısı vardır. $(k^2 + 4)a$ değeri (1.1)' de yerine yazılırsa ve gerekli sadeleştirmeler yapılsa

$$x^2 - (k^2 + 4)a^2 = 4$$

denklemini elde edilir. Teorem 2.2.1'e göre $x = V_{2n}(k, 1)$, $a = U_{2n}(k, 1)$ olacak biçimde $n \geq 1$ tamsayısı vardır. Böylece

$$2y + kx = (k^2 + 4)a$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} y &= \frac{(k^2+4)U_{2n}(k,1)-kV_{2n}(k,1)}{2} = \frac{V_{2n+1}+V_{2n-1}(k,1)-kV_{2n}(k,1)}{2} = \frac{V_{2n-1}(k,1)+V_{2n-1}(k,1)}{2} \\ &= V_{2n-1}(k, 1) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$(x, y) = (V_{2n}(k, 1), V_{2n-1}(k, 1))$$

olur. Şimdi de yukarıda verilen bu ikilinin

$$x^2 - kxy - y^2 = k^2 + 4$$

denklemini sağladığını gösterelim. Gerçekten x ve y değerleri denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x^2 - kxy - y^2 &= V_{2n}^2(k, 1) - kV_{2n}(k, 1)V_{2n-1}(k, 1) - V_{2n-1}^2(k, 1) \\ &= (-1)^{2n}(k^2 + 4) \\ &= k^2 + 4 \end{aligned}$$

olduğu Teorem 1.1.10' dan görülür.

Teorem 2.3.2. $k \geq 1$ ve $k^2 + 4$ karesiz olsun. Bu durumda

$$x^2 - kxy - y^2 = -(k^2 + 4)$$

denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (V_{2n-1}(k, 1), V_{2n-2}(k, 1))$$

ile verilir.

İspat: (x, y) , $x^2 - kxy - y^2 = -(k^2 + 4)$ denkleminin bir pozitif tam sayı çözümü olsun. Bu denklem -4 ile çarpılırsa

$$4y^2 + 4kxy - 4x^2 = 4(k^2 + 4)$$

olur. Denklem tam kareye tamamlanırsa

$$(2y + kx)^2 - (k^2 + 4)x^2 = 4(k^2 + 4) \quad (1.2)$$

denklemini elde edilir. Dolayısıyla $k^2 + 4 \mid (2y + kx)^2$ olur. Üstelik $k^2 + 4$ karesiz olduğundan $k^2 + 4 \mid 2y + kx$ olduğu görülür. O halde

$$2y + kx = (k^2 + 4)a$$

olan $a > 0$ vardır. $(k^2 + 4)a$ değeri (1.2)'de yerine yazılırsa

$$x^2 - (k^2 + 4)a^2 = -4$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 2.2.2'ye göre $x = V_{2n-1}(k, 1)$, $a = U_{2n-1}(k, 1)$ olacak biçimde $n \geq 1$ tamsayısı vardır. Şimdi y değerini bulmak için

$$2y + kx = (k^2 + 4)a$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} y &= \frac{(k^2+4)a - kx}{2} = \frac{(k^2+4)U_{2n-1}(k,1) - kV_{2n-1}(k,1)}{2} \\ &= \frac{V_{2n}(k,1) + V_{2n-2}(k,1) - kV_{2n-1}(k,1)}{2} \\ &= \frac{V_{2n-2}(k,1) + V_{2n-2}(k,1)}{2} \\ &= V_{2n-2}(k, 1) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$(x, y) = (V_{2n-1}(k, 1), V_{2n-2}(k, 1))$$

olur. Ayrıca yukarıda verilen bu ikilinin

$$x^2 - kxy - y^2 = -(k^2 + 4)$$

denklemini sağladığını görmek kolaydır. x ve y değerleri denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x^2 - kxy - y^2 &= V_{2n-1}^2(k, 1) - kV_{2n-1}(k, 1)V_{2n-2}(k, 1) - V_{2n-2}^2(k, 1) \\ &= (-1)^{2n-1}(k^2 + 4) \\ &= -(k^2 + 4) \end{aligned}$$

olduğu Teorem 1.1.10' dan görülür.

2.4. $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = \pm 1$ Diyofant Denklemlerinin Çözümleri

Teorem 2.4.1. $k \geq 1$ ve $k \neq 2$ olsun. Bu durumda

$$x^2 - (k^2 + 1)y^2 = 1$$

denkleminin pozitif tam sayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = \left(\frac{V_{2n}(2k, 1)}{2}, U_{2n}(2k, 1) \right)$$

ile verilir [8].

Teorem 2.4.2. $k \geq 1$ ve $k \neq 2$ olsun.

$$x^2 - (k^2 + 1)y^2 = -1$$

denkleminin pozitif tam sayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = \left(\frac{V_{2n-1}(2k, 1)}{2}, U_{2n-1}(2k, 1) \right)$$

ile verilir [8].

BÖLÜM 3. ARAŞTIRMA BULGULARI

[9] numaralı kaynakta yazarlar tarafından $k > 3$ olmak üzere,

$$x^2 - kxy + y^2 = \pm(k \pm 2),$$

$$x^2 - (k^2 - 4)y^2 = \pm 4(k \pm 2),$$

$$x^2 - kxy + y^2 = \pm(k^2 - 4)(k \pm 2),$$

$$x^2 - (k^2 + 2)xy + y^2 = -k^2,$$

$$x^2 - (k^2 \pm 2)xy + y^2 = k^2,$$

$$x^2 + 4xy - [(k^2 - 2)y]^2 = 4k^2$$

denklemlerinin tüm pozitif tam sayı çözümleri genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimleri cinsinden ifade edilmiştir. Bu çalışmada k asal sayı ve p tek asal sayı olmak üzere

$$x^2 - kxy - y^2 = \pm k,$$

$$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = \pm 4k,$$

$$x^2 - 2pxy - y^2 = \pm 2p,$$

$$x^2 - kxy - y^2 = \pm k(k^2 + 4)$$

denklemleri ele alınacaktır. Bu denklemlerin pozitif tam sayılardaki tüm çözümleri genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimleri cinsinden elde edilecektir. Bu denklemlerin çözümleri literatürde mevcut değildir.

3.1. $x^2 - kxy - y^2 = \pm k$ Diyofant Denklemlerinin Çözümleri

Teorem 3.1.1. k asal sayı olsun. O zaman $x^2 - kxy - y^2 = k$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri $n \geq 1$ ve $U_n = U_n(k, 1)$ olmak üzere

$$(x, y) = (U_{2n} + U_{2n-1}, U_{2n-1} + U_{2n-2})$$

veya

$$(x, y) = (U_{2n+1} - U_{2n}, U_{2n} - U_{2n-1})$$

ile verilir.

İspat: (x, y) , $x^2 - kxy - y^2 = k$ denkleminin bir pozitif tam sayı çözümü olsun.

$$x^2 - y^2 = kxy + k$$

olup $x^2 - y^2 > 0$ dır. $u = x + y$ ve $v = x - y$ olsun. Bu durumda

$$4uv - k(u^2 - v^2) = 4k$$

dır ve böylece

$$4uv = 4k + k(u^2 - v^2)$$

elde edilir. Şu halde $k|uv$ olur. $k|v$ olsun. O zaman

$$4u \left(\frac{v}{k}\right) - u^2 + v^2 = 4$$

ve buradan

$$u^2 - v^2 - 4u \frac{v}{k} = -4$$

yazılabilir. Kolaylıkla $ku - 2v > 0$ olduğu gösterilebilir. Denklem tam kareye tamamlanırsa

$$\left(u - 2\frac{v}{k}\right)^2 - (k^2 + 4)\left(\frac{v}{k}\right)^2 = -4$$

elde edilir. Teorem 2.2.2'ye göre $u - 2\frac{v}{k} = V_{2n-1}$ ve $\frac{v}{k} = U_{2n-1}$ olacak biçimde $n \geq 1$ tamsayısı mevcuttur. Buradan u ve v değerlerinin

$$u = V_{2n-1} + 2\frac{v}{k} = 2U_{2n-1} + V_{2n-1},$$

$$v = kU_{2n-1}$$

biçiminde olduğu görülür. Ayrıca x ve y değerleri

$$x = \frac{u+v}{2} = \frac{2U_{2n-1} + V_{2n-1} + kU_{2n-1}}{2} = \frac{kU_{2n-1} + 2U_{2n-1} + U_{2n} + U_{2n-2}}{2}$$

$$= \frac{kU_{2n-1} + U_{2n-2} + 2U_{2n-1} + U_{2n}}{2} = \frac{U_{2n} + U_{2n-2} + 2U_{2n-1}}{2} = U_{2n-1} + U_{2n-2},$$

$$y = \frac{u-v}{2} = \frac{2U_{2n-1} + V_{2n-1} - kU_{2n-1}}{2} = \frac{2U_{2n-1} + U_{2n} + U_{2n-2} - kU_{2n-1}}{2}$$

$$= \frac{2U_{2n-1} + 2U_{2n-2}}{2} = U_{2n-1} + U_{2n-2}$$

olarak bulunur. Şu halde

$$(x, y) = (U_{2n} + U_{2n-1}, U_{2n-1} + U_{2n-2})$$

elde edilir. Şimdi yukarıdaki bu ikilinin

$$x^2 - kxy - y^2 = k$$

denkleminin bir çözümü olduğunu gösterelim. x ve y değerleri denklemde yerine yazılırsa

$$x^2 - kxy - y^2 = (U_{2n} + U_{2n-1})^2 - k(U_{2n} + U_{2n-1})(U_{2n-1} + U_{2n-2})$$

$$= U_{2n}^2 + 2U_{2n}U_{2n-1} + U_{2n-1}^2 - k(U_{2n}U_{2n-1} + U_{2n}U_{2n-2} + U_{2n-1}^2 + U_{2n-1}U_{2n-2})$$

$$= (U_{2n}^2 + 2U_{2n}U_{2n-1} + U_{2n-1}^2 - U_{2n}U_{2n-2} - U_{2n-1}U_{2n-2}) - k(U_{2n}U_{2n-1} + U_{2n-1}^2)$$

$$\begin{aligned}
&= U_{2n}^2 + 2U_{2n}U_{2n-1} + U_{2n-1}^2 - kU_{2n}U_{2n-1} - kU_{2n}U_{2n-2} - kU_{2n-1}^2 \\
&\quad - kU_{2n-1}U_{2n-2} - U_{2n-1}^2 - 2U_{2n-1}U_{2n-2} - U_{2n-2}^2 \\
&= U_{2n}(U_{2n} - kU_{2n-1}) + 2U_{2n-1}(U_{2n} - U_{2n-2}) - U_{2n-2}(kU_{2n} + U_{2n-2}) \\
&\quad - kU_{2n-1}^2 - kU_{2n-1}U_{2n-2}
\end{aligned}$$

olup burada U_{2n} yerine $kU_{2n-1} + U_{2n-2}$ ve kU_{2n} yerine de $U_{2n+1} - U_{2n-1}$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
x^2 - kxy - y^2 &= U_{2n}U_{2n-2} + 2U_{2n-1}kU_{2n-1} - U_{2n-2}(U_{2n+1} - U_{2n-1} + U_{2n-2}) \\
&\quad - kU_{2n-1}^2 - kU_{2n-1}U_{2n-2} \\
&= U_{2n-2}(U_{2n} - kU_{2n-1}) + 2kU_{2n-1}^2 - U_{2n-2}U_{2n+1} + U_{2n-1}U_{2n-2} - U_{2n-2}^2 \\
&\quad - kU_{2n-1}^2 \\
&= U_{2n-2}U_{2n-2} + kU_{2n-1}^2 + U_{2n-2}(U_{2n-1} - U_{2n+1}) - U_{2n-2}^2 \\
&= U_{2n-2}^2 + kU_{2n-1}^2 + U_{2n-2}(-kU_{2n}) - U_{2n-2}^2 \\
&= U_{2n-2}^2 - U_{2n-2}^2 + kU_{2n-1}^2 - kU_{2n}U_{2n-2} \\
&= k(U_{2n-1}^2 - U_{2n}U_{2n-2})
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de U_{2n} yerine $kU_{2n-1} + U_{2n-2}$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
x^2 - kxy - y^2 &= k(U_{2n-1}^2 - U_{2n-2}(kU_{2n-1} + U_{2n-2})) \\
&= k(U_{2n-1}^2 - kU_{2n-1}U_{2n-2} - U_{2n-2}^2)
\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 1.1.9' dan dolayı

$$x^2 - kxy - y^2 = k(-1)^{2n-2} = k$$

olur. Şimdi de $k|u$ olsun. Dolayısıyla

$$4uv - k(u^2 - v^2) = 4k$$

denkleminde

$$4 \binom{u}{k} v - u^2 + v^2 = 4$$

yazılabilir. Bu denklem

$$(v + 2 \frac{u^2}{k}) - (k^2 + 4) \binom{u}{k}^2 = 4$$

olarak yeniden düzenlenebilir. Böylece, $n \geq 1$ olmak üzere Teorem 2.2.1'e göre $v + 2 \frac{u}{k} = V_{2n}(k, 1)$ ve $\frac{u}{k} = U_{2n}(k, 1)$ yazılabilir. Buradan u ve v değerleri sırasıyla

$$u = kU_{2n},$$

$$v = V_{2n} - 2 \frac{u}{k} = V_{2n} - 2U_{2n} = U_{2n+1} + U_{2n-1} - 2U_{2n}$$

olarak bulunur. Bu durumda x ve y sırasıyla

$$\begin{aligned} x &= \frac{u+v}{2} = \frac{kU_{2n} + U_{2n+1} + U_{2n-1} - 2U_{2n}}{2} \\ &= \frac{2U_{2n+1} - 2U_{2n}}{2} \\ &= U_{2n+1} - U_{2n}, \\ y &= \frac{u-v}{2} = \frac{kU_{2n} - U_{2n+1} - U_{2n-1} + 2U_{2n}}{2} \\ &= \frac{kU_{2n} - (U_{2n+1} + U_{2n-1} - 2U_{2n})}{2} \\ &= \frac{kU_{2n} - (kU_{2n} + U_{2n-1} - 2U_{2n})}{2} \\ &= \frac{2U_{2n} - 2U_{2n-1}}{2} \\ &= U_{2n} - U_{2n-1} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla

$$(x, y) = (U_{2n+1} - U_{2n}, U_{2n} - U_{2n-1})$$

dir. Şimdi de yukarıdaki bu ikilinin

$$x^2 - kxy - y^2 = k$$

denkleminin çözümü olduğunu gösterelim. x ve y değerleri denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x^2 - kxy - y^2 &= (U_{2n+1} - U_{2n})^2 - k(U_{2n+1} - U_{2n})(U_{2n} - U_{2n-1}) \\ &\quad - (U_{2n} - U_{2n-1})^2 \\ &= U_{2n+1}^2 - 2U_{2n+1}U_{2n} + U_{2n}^2 - kU_{2n+1}U_{2n} + kU_{2n+1}U_{2n-1} + kU_{2n}^2 - kU_{2n}U_{2n-1} \\ &\quad - U_{2n}^2 + 2U_{2n}U_{2n-1} - U_{2n-1}^2 \\ &= U_{2n+1}^2 - 2U_{2n}(U_{2n+1} - U_{2n-1}) - kU_{2n+1}U_{2n} + kU_{2n+1}U_{2n-1} + kU_{2n}^2 \\ &\quad - kU_{2n}U_{2n-1} - U_{2n-1}^2 \end{aligned}$$

olup burada $U_{2n+1} = kU_{2n} + U_{2n-1}$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} x^2 - kxy - y^2 &= U_{2n+1}^2 - 2kU_{2n}U_{2n} + kU_{2n}^2 - kU_{2n+1}U_{2n} + kU_{2n+1}U_{2n-1} \\ &\quad - kU_{2n}U_{2n-1} - U_{2n-1}^2 \\ &= U_{2n+1}(U_{2n+1} - kU_{2n}) - kU_{2n}^2 + kU_{2n+1}U_{2n-1} - kU_{2n}U_{2n-1} - U_{2n-1}^2 \\ &= U_{2n+1}U_{2n-1} + kU_{2n+1}U_{2n-1} - kU_{2n}^2 - U_{2n-1}(kU_{2n} + U_{2n-1}) \\ &= U_{2n+1}U_{2n-1} + kU_{2n+1}U_{2n-1} - kU_{2n}^2 - U_{2n+1}U_{2n-1} \\ &= kU_{2n+1}U_{2n-1} - kU_{2n}^2 \\ &= k(U_{2n+1}U_{2n-1} - U_{2n}^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de U_{2n+1} yerine $kU_{2n} + U_{2n-1}$ değeri yazılırsa

$$\begin{aligned} x^2 - kxy - y^2 &= k(kU_{2n}U_{2n-1} + U_{2n-1}^2 - U_{2n}^2) \\ &= -k(U_{2n}^2 - kU_{2n}U_{2n-1} - U_{2n-1}^2) \end{aligned}$$

olur. Teorem 1.1.9 kullanılarak

$$x^2 - kxy - y^2 = -k(-1)^{2n+1} = -k(-1) = k$$

olduğu görülür.

Teorem 3.1.2. k asal sayı olsun. O zaman

$$x^2 - kxy - y^2 = -k$$

denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri $U_n = U_n(k, 1)$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (U_{2n-1} + U_{2n-2}, U_{2n-2} + U_{2n-3})$$

veya

$$(x, y) = (U_{2n} - U_{2n-1}, U_{2n-1} - U_{2n-2})$$

ile verilir.

İspat: (x, y) , $x^2 - kxy - y^2 = -k$ denkleminin pozitif bir tam sayı çözümü olsun. $u = kx + y$ ve $v = x$ olsun. Bu denklem u ve v ' nin bu değerlerine göre yeniden düzenlenirse

$$u^2 - kuv - v^2 = k$$

olur. Bu denklemin pozitif tam sayı çözümleri $n \geq 1$ ve $U_n = U_n(k, 1)$ olmak üzere Teorem 3.1.1' e göre

$$(u, v) = (U_{2n} + U_{2n-1}, U_{2n-1} + U_{2n-2})$$

veya

$$(u, v) = (U_{2n+1} - U_{2n}, U_{2n} - U_{2n-1})$$

şeklindedir. Birinci ikiliden yararlanarak x ve y değerleri sırasıyla

$$x = v = U_{2n-1} + U_{2n-2},$$

$$y = u - kv = U_{2n} + U_{2n-1} - kU_{2n-1} - kU_{2n-2} = U_{2n-2} + U_{2n-3}$$

olarak bulunur. Yani

$$(x, y) = (U_{2n-1} + U_{2n-2}, U_{2n-2} + U_{2n-3})$$

şeklindedir. Şimdi de diğer (u, v) ikilisini kullanarak x ve y değerlerini sırasıyla

$$x = v = U_{2n} - U_{2n-1},$$

$$y = u - kv = U_{2n+1} - U_{2n} - kU_{2n} + kU_{2n-1} = U_{2n-1} - U_{2n-2}$$

olarak buluruz. Yani

$$(x, y) = (U_{2n} - U_{2n-1}, U_{2n-1} - U_{2n-2})$$

şeklinde elde edilir. Şimdi

$$(x, y) = (U_{2n-1} + U_{2n-2}, U_{2n-2} + U_{2n-3})$$

ikilisinin

$$x^2 - kxy - y^2 = -k$$

denklemini için bir çözüm olduğunu gösterelim. x ve y değerleri denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x^2 - kxy - y^2 &= (U_{2n-1} + U_{2n-2})^2 - k(U_{2n-1} + U_{2n-2})(U_{2n-2} + U_{2n-3}) - \\ &= U_{2n-1}^2 + 2U_{2n-1}U_{2n-2} + U_{2n-2}^2 - kU_{2n-1}U_{2n-2} - kU_{2n-1}U_{2n-3} - kU_{2n-2}^2 \\ &\quad - kU_{2n-2}U_{2n-3} - U_{2n-2}^2 - 2U_{2n-2}U_{2n-3} - U_{2n-3}^2 \\ &= U_{2n-1}(U_{2n-1} - kU_{2n-2}) + 2U_{2n-2}(U_{2n-1} - U_{2n-3}) - kU_{2n-1}U_{2n-3} - kU_{2n-2}^2 \\ &\quad - kU_{2n-2}U_{2n-3} - U_{2n-3}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= U_{2n-1}U_{2n-3} + 2U_{2n-2}kU_{2n-2} - kU_{2n-1}U_{2n-3} - kU_{2n-2}^2 - kU_{2n-2}U_{2n-3} \\
&\quad - U_{2n-3}^2 \\
&= U_{2n-3}(U_{2n-1} - kU_{2n-2}) + kU_{2n-2}^2 - kU_{2n-1}U_{2n-3} - U_{2n-3}^2 \\
&= U_{2n-3}^2 + k(U_{2n-2}^2 - U_{2n-3}(kU_{2n-2} + U_{2n-3})) - U_{2n-3}^2 \\
&= k(U_{2n-2}^2 - kU_{2n-2}U_{2n-3} - U_{2n-3}^2)
\end{aligned}$$

olup Teorem 1.1.9 kullanılırsa

$$x^2 - kxy - y^2 = k(-1)^{2n-3} = -k$$

olduğu görülür. Şimdi de

$$(x, y) = (U_{2n-1} + U_{2n-2}, U_{2n-2} + U_{2n-3})$$

ikilisinin

$$x^2 - kxy - y^2 = -k$$

denkleminin bir çözümü olduğunu gösterelim. Burada da x ve y değerleri denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&x^2 - kxy - y^2 = (U_{2n-1} + U_{2n-2})^2 - k(U_{2n-1} + U_{2n-2})(U_{2n-2} + U_{2n-3}) \\
&\quad - (U_{2n-2} + U_{2n-3})^2 \\
&= U_{2n-1}^2 + 2U_{2n-1}U_{2n-2} + U_{2n-2}^2 - kU_{2n-1}U_{2n-2} - kU_{2n-1}U_{2n-3} - kU_{2n-2}^2 \\
&\quad - kU_{2n-2}U_{2n-3} - U_{2n-2}^2 - 2U_{2n-2}U_{2n-3} - U_{2n-3}^2 \\
&= U_{2n-1}(U_{2n-1} - kU_{2n-2}) + 2U_{2n-2}(U_{2n-1} - U_{2n-3}) - kU_{2n-1}U_{2n-3} - kU_{2n-2}^2 \\
&\quad - kU_{2n-2}U_{2n-3} - U_{2n-3}^2 \\
&= U_{2n-1}U_{2n-3} + 2U_{2n-2}kU_{2n-2} - kU_{2n-1}U_{2n-3} - kU_{2n-2}^2 - kU_{2n-2}U_{2n-3} \\
&\quad - U_{2n-3}^2 \\
&= U_{2n-3}(U_{2n-1} - kU_{2n-2}) + kU_{2n-2}^2 - kU_{2n-1}U_{2n-3} - U_{2n-3}^2 \\
&= U_{2n-3}^2 + k(U_{2n-2}^2 - (kU_{2n-2} + U_{2n-3})U_{2n-3}) - U_{2n-3}^2 \\
&= k(U_{2n-2}^2 - kU_{2n-2}U_{2n-3} - U_{2n-3}^2)
\end{aligned}$$

olup Teorem 1.1.9'a göre

$$x^2 - kxy - y^2 = k(-1)^{2n-3} = -k$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.2. $x^2 - (k^2 + 4)y^2 = \pm 4k$ Diyofant Denklemlerinin Çözümleri

Teorem 3.2.1. k asal olsun. O zaman

$$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = 4k$$

denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri $U_n = U_n(k, 1)$, $V_n = V_n(k, 1)$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (V_{2n-1} + V_{2n-2}, U_{2n-1} + U_{2n-2})$$

veya

$$(x, y) = (V_{2n} + V_{2n-1}, U_{2n} + U_{2n-1})$$

ile verilir.

İspat: $x^2 - (k^2 + 4)y^2 = 4k$ olacak biçimde x, y pozitif tam sayıları mevcut olsun.

Bu durumda

$$x^2 - k^2y^2 = 4k + 4y^2$$

çift olacağından x ve ky aynı anda çift veya aynı anda tektir. O halde $u = \frac{x+ky}{2}$, $v = \frac{x-ky}{2}$ alınırsa

$$u^2 - kuv - v^2 = k$$

elde edilir. Teorem 3.1.1'e göre bu denklemin pozitif tam sayı çözümleri

$$(u, v) = (U_{2n} + U_{2n-1}, U_{2n-1} + U_{2n-2})$$

veya

$$(u, v) = (U_{2n+1} - U_{2n}, U_{2n} - U_{2n-1})$$

biçimindedir. Bu ikililerden yararlanarak x ve y değerlerini bulalım. Öncelikle

$$\frac{x+ky}{2} = U_{2n} + U_{2n-1}$$

olsun. Buradan x değeri

$$\begin{aligned} x &= 2U_{2n} + 2U_{2n-1} - kU_{2n-1} - k \\ &= U_{2n} + U_{2n-1} - kU_{2n-1} + 2U_{2n-1} - kU_{2n-2} \\ &= U_{2n} + U_{2n-1} + U_{2n-2} + U_{2n-3} = V_{2n-1} + V_{2n-2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca $y = v = U_{2n-1} + U_{2n-2}$ olduğundan

$$(x, y) = (V_{2n-1} + V_{2n-2}, U_{2n-1} + U_{2n-2})$$

elde edilir. Şimdi de $\frac{x+ky}{2} = U_{2n+1} - U_{2n}$ olsun. Buradan x değerini

$$\begin{aligned} x &= 2U_{2n+1} - 2U_{2n} - kU_{2n} + kU_{2n-1} \\ &= U_{2n+1} + U_{2n+1} - kU_{2n} - U_{2n} - U_{2n} + kU_{2n-1} \\ &= U_{2n+1} + U_{2n-1} - U_{2n} - U_{2n-2} = V_{2n} - V_{2n-1} \end{aligned}$$

olarak buluruz. Ayrıca $y = v = U_{2n} - U_{2n-1}$ olduğundan

$$(x, y) = (V_{2n} - V_{2n-1}, U_{2n} - U_{2n-1})$$

elde edilir. Şimdi de

$$(x, y) = (V_{2n-1} + V_{2n-2}, U_{2n-1} + U_{2n-2})$$

ikilisinin

$$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = 4k$$

denklemini sağladığını gösterelim. Bu ikili denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x^2 - (k^2 + 4)y^2 &= (V_{2n-1} + V_{2n-2})^2 - (k^2 + 4)(U_{2n-1} + U_{2n-2})^2 \\ &= V_{2n-1}^2 + 2V_{2n-1}V_{2n-2} + V_{2n-2}^2 - (k^2 + 4)(U_{2n-1}^2 + 2U_{2n-1}U_{2n-2} + U_{2n-2}^2) \\ &= V_{2n-1}^2 + 2V_{2n-1}V_{2n-2} + V_{2n-2}^2 - (k^2 + 4)U_{2n-1}^2 - (k^2 + 4)2U_{2n-1}U_{2n-2} \\ &\quad - (k^2 + 4)U_{2n-2}^2 \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan, Teorem 1.1.11' e göre

$$V_{2n-1}^2 - (k^2 + 4)U_{2n-1}^2 = 4(-1)^{2n-1} \text{ ve } V_{2n-2}^2 - (k^2 + 4)U_{2n-2}^2 = 4(-1)^{2n-2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} x^2 - (k^2 + 4)y^2 &= 4(-1)^{2n-1} + 4(-1)^{2n-2} + 2V_{2n-1}V_{2n-2} \\ &\quad - (k^2 + 4)2U_{2n-1}U_{2n-2} \\ &= 2k^2U_{2n-1}U_{2n-2} + 4kU_{2n-1}U_{2n-3} + 4kU_{2n-2}^2 + 8U_{2n-2}U_{2n-3} - 2k^2U_{2n-1}U_{2n-2} \\ &\quad - 8U_{2n-1}U_{2n-2} \\ &= 2(2kU_{2n-1}U_{2n-3} + 2kU_{2n-2}^2 + 4U_{2n-2}(U_{2n-3} - U_{2n-1})) \\ &= 2(2kU_{2n-1}U_{2n-3} + 2kU_{2n-2}^2 + 4U_{2n-2}(-kU_{2n-2})) \\ &= 2(2kU_{2n-1}U_{2n-3} + 2kU_{2n-2}^2 - 4kU_{2n-2}^2) \\ &= 2(2kU_{2n-1}U_{2n-3} - 2kU_{2n-2}^2) \\ &= 4k(U_{2n-1}U_{2n-3} - U_{2n-2}^2) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Şimdi U_{2n-3} yerine $U_{2n-1} - kU_{2n-2}$ yazılırsa

$$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = 4k(U_{2n-1}^2 - kU_{2n-1}U_{2n-2} - U_{2n-2}^2)$$

olur. Teorem 1.1.9'a göre

$$U_{2n-1}^2 - kU_{2n-1}U_{2n-2} - U_{2n-2}^2 = (-1)^{2n-2}$$

olduğundan

$$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = 4k(-1)^{2n-2} = 4k$$

elde edilir. Şimdi de

$$(x, y) = (V_{2n} + V_{2n-1}, U_{2n} + U_{2n-1})$$

ikilisinin

$$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = 4k$$

denklemini sağladığını gösterelim. İkili denkleme yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x^2 - (k^2 + 4)y^2 &= (V_{2n} - V_{2n-1})^2 - (k^2 + 4)(U_{2n} - U_{2n-1})^2 \\ &= V_{2n}^2 - (k^2 + 4)U_{2n}^2 + V_{2n-1}^2 - (k^2 + 4)U_{2n-1}^2 - 2V_{2n}V_{2n-1} \\ &\quad + 2(k^2 + 4)U_{2n}U_{2n-1} \\ &= (-1)^{2n} + (-1)^{2n-1} - 2V_{2n}V_{2n-1} + 2(k^2 + 4)U_{2n}U_{2n-1} \\ &= -2(V_{2n}V_{2n-1} - (k^2 + 4)U_{2n}U_{2n-1}) \\ &= -2((U_{2n+1} + U_{2n-1})(U_{2n} + U_{2n-2}) - (k^2 + 4)U_{2n}U_{2n-1}) \\ &= -2(U_{2n+1}U_{2n} + U_{2n+1}U_{2n-2} + U_{2n-1}U_{2n} + U_{2n-1}U_{2n-2} - (k^2 + 4)U_{2n}U_{2n-1}) \\ &= -2(U_{2n+1}U_{2n} + U_{2n+1}U_{2n-2} + U_{2n-1}U_{2n} + U_{2n-1}U_{2n-2}) \\ &\quad + 2(U_{2n+1} - U_{2n-1})(U_{2n} - U_{2n-2}) + 8U_{2n}U_{2n-1} \\ &= -2(U_{2n+1}U_{2n} + U_{2n+1}U_{2n-2} + U_{2n-1}U_{2n} + U_{2n-1}U_{2n-2}) \\ &\quad + 2(U_{2n+1}U_{2n} - U_{2n+1}U_{2n-2} - U_{2n}U_{2n-1} + U_{2n-1}U_{2n-2}) + 8U_{2n}U_{2n-1} \\ &= -2(U_{2n+1}U_{2n} + U_{2n+1}U_{2n-2} + U_{2n-1}U_{2n} + U_{2n-1}U_{2n-2} - U_{2n+1}U_{2n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(U_{2n+1}U_{2n-2} + U_{2n}U_{2n-1} - U_{2n-1}U_{2n-2} - 4U_{2n}U_{2n-1}) \\
& = -4(U_{2n+1}U_{2n-2} - U_{2n}U_{2n-1}) \\
& = -4((kU_{2n} + U_{2n-1})(U_{2n} - kU_{2n-1}) - U_{2n}U_{2n-1}) \\
& = -4(kU_{2n}^2 - k^2U_{2n}U_{2n-1} + U_{2n-1}U_{2n} - kU_{2n-1}^2 - U_{2n}U_{2n-1}) \\
& = -4k(U_{2n}^2 - kU_{2n}U_{2n-1} - U_{2n-1}^2)
\end{aligned}$$

olur. Teorem 1.1.9'a göre

$$U_{2n}^2 - kU_{2n}U_{2n-1} - U_{2n-1}^2 = (-1)^{2n-1}$$

olduğundan

$$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = -4k(-1)^{2n-1} = 4k$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2. k asal olsun. O zaman

$$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = -4k$$

denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri $U_n = U_n(k, 1)$, $V_n = V_n(k, 1)$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (V_{2n-2} + V_{2n-3}, U_{2n-2} + U_{2n-3})$$

veya

$$(x, y) = (V_{2n-1} - V_{2n-2}, U_{2n-1} - U_{2n-2})$$

ile verilir.

İspat: $x^2 - (k^2 + 4)y^2 = -4k$ olan x, y pozitif tam sayıları mevcut olsun. Bu durumda

$$x^2 - k^2y^2 = -4k + 4y^2$$

çift olacağından x ve ky aynı anda çift ya da aynı anda tektir. O halde $u = \frac{x+ky}{2}$ ve

$v = y$ alınırsa

$$u^2 - kuv - v^2 = -k$$

elde edilir. Bu denklemin tüm pozitif tam sayı çözümleri Teorem 3.1.2' ye göre

$$(u, v) = (U_{2n-1} + U_{2n-2}, U_{2n-2} + U_{2n-3})$$

veya

$$(u, v) = (U_{2n} - U_{2n-1}, U_{2n-1} - U_{2n-2})$$

biçimindedir. Öncelikle

$$(u, v) = (U_{2n-1} + U_{2n-2}, U_{2n-2} + U_{2n-3})$$

için

$$y = v = U_{2n-2} + U_{2n-3},$$

$$\frac{x+ky}{2} = U_{2n-1} + U_{2n-2}$$

olduğundan x değeri

$$x = 2u - kv = 2U_{2n-1} + 2U_{2n-2} - kU_{2n-2} - kU_{2n-3}$$

$$= U_{2n-1} + U_{2n-1} - kU_{2n-2} + U_{2n-2} + U_{2n-2} - kU_{2n-3}$$

$$\begin{aligned}
&= U_{2n-1} + U_{2n-3} + U_{2n-2} + U_{2n-4} \\
&= V_{2n-2} + V_{2n-3}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Yani

$$(x, y) = (V_{2n-2} + V_{2n-3}, U_{2n-2} + U_{2n-3})$$

dir. Şimdi de

$$(u, v) = (U_{2n} - U_{2n-1}, U_{2n-1} - U_{2n-2})$$

için

$$\begin{aligned}
y = v &= U_{2n-1} - U_{2n-2}, \\
\frac{x+ky}{2} &= U_{2n} - U_{2n-1}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
x &= 2u - kv = 2U_{2n} - 2U_{2n-1} - kU_{2n-1} + kU_{2n-2} \\
&= U_{2n} + U_{2n} - kU_{2n-1} - 2U_{2n-1} + kU_{2n-2} \\
&= U_{2n} + U_{2n-2} - U_{2n-1} - U_{2n-3} \\
&= V_{2n-1} - V_{2n-2}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yani

$$(x, y) = (V_{2n-1} - V_{2n-2}, U_{2n-1} - U_{2n-2})$$

dir. Şimdi

$$(x, y) = (V_{2n-2} + V_{2n-3}, U_{2n-2} + U_{2n-3})$$

ikilisini

$$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = -4k$$

denkleminde yerine yazarak çözüm olduğunu gösterelim. x ve y değerleri denkleme yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x^2 - (k^2 + 4)y^2 &= (V_{2n-2} + V_{2n-3})^2 - (k^2 + 4)(U_{2n-2} + U_{2n-3})^2 \\ &= V_{2n-2}^2 + 2V_{2n-2}V_{2n-3} + V_{2n-3}^2 - (k^2 + 4)(U_{2n-2}^2 + 2U_{2n-2}U_{2n-3} + U_{2n-3}^2) \\ &= V_{2n-2}^2 + 2V_{2n-2}V_{2n-3} + V_{2n-3}^2 - (k^2 + 4)U_{2n-2}^2 - 2(k^2 + 4)U_{2n-2}U_{2n-3} \\ &\quad - (k^2 + 4)U_{2n-3}^2 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Teorem 1.1.11' e göre

$$\begin{aligned} x^2 - (k^2 + 4)y^2 &= 4(-1)^{2n-2} + 4(-1)^{2n-3} + 2(V_{2n-2}V_{2n-3} - k^2U_{2n-2}U_{2n-3}) \\ &\quad - 8U_{2n-2}U_{2n-3} \\ &= 2k^2U_{2n-2}U_{2n-3} + 4kU_{2n-2}U_{2n-4} + 4kU_{2n-3}^2 + 8U_{2n-3}U_{2n-4} - 2k^2U_{2n-2}U_{2n-3} \\ &\quad - 8U_{2n-2}U_{2n-3} \\ &= 2(2kU_{2n-2}U_{2n-4} + 2kU_{2n-3}^2 + 4U_{2n-3}(U_{2n-4} - U_{2n-2})) \\ &= 4(kU_{2n-2}U_{2n-4} + kU_{2n-3}^2 - 2kU_{2n-3}^2) \\ &= 4(kU_{2n-2}(U_{2n-2} - kU_{2n-3}) - kU_{2n-3}^2) \\ &= 4k(U_{2n-2}^2 - kU_{2n-2}U_{2n-3} - U_{2n-3}^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 1.1.9'a göre

$$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = 4k(-1)^{2n-3} = -4k$$

bulunur. Benzer yolla

$$(x, y) = (V_{2n-1} - V_{2n-2}, U_{2n-1} - U_{2n-2})$$

ikilisinin

$$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = -4k$$

denkleminin çözümü olduğu gösterilebilir.

3.3. $x^2 - 2pxy - y^2 = \pm 2p$ Diyofant Denklemlerinin Çözümleri

Teorem 3.3.1. p tek asal sayı olsun.

$$x^2 - 2pxy - y^2 = 2p$$

denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri $k = 2p$, $U_n = U_n(k, 1)$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (U_{2n} + U_{2n-1}, U_{2n-1} + U_{2n-2})$$

veya

$$(x, y) = (U_{2n+1} - U_{2n}, U_{2n} - U_{2n-1})$$

ile verilir.

İspat: $x^2 - 2pxy - y^2 = 2p$ olacak biçimde x, y pozitif tam sayıları mevcut olsun. Bu durumda $x^2 - y^2$ çift olur. O zaman x ve y aynı anda çift ya da aynı anda tek tam sayılardır. $u = x + y$ ve $v = x - y$ olsun. Bu durumda u, v çifttir.

$$x^2 - y^2 - 2pxy = 2p$$

olduğundan

$$uv - 2p \left(\frac{u^2 - v^2}{4} \right) = 2p$$

olur. Denklem düzenlenirse

$$4uv - 2p(u^2 - v^2) = 8p$$

elde edilir. $u = 2a$, $v = 2b$ (a, b pozitif tamsayılar) olsun. O zaman

$$4uv - 2p(u^2 - v^2) = 8p$$

olup buradan

$$2ab - p(a^2 - b^2) = p$$

yazılabilir. Dolayısıyla $p|2ab$ ve p tek olduğundan $p|ab$ dir. $p|a$ olsun. O zaman

$$2 \left(\frac{a}{p}\right) b - a^2 + b^2 = 1$$

denklemi tam kareye tamamlanırsa

$$\left(b + \frac{a}{p}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{p} + a^2\right) = 1$$

elde edilir. Son denklem

$$\left(b + \frac{a}{p}\right)^2 - (p^2 + 1) \left(\frac{a}{p}\right)^2 = 1$$

olarak düzenlenirse, Teorem 2.4.1'e göre

$$b + \frac{a}{p} = \frac{V_{2n}(2p, 1)}{2},$$

$$\frac{a}{p} = U_{2n}(2p, 1)$$

olacak biçimde $n \geq 1$ tamsayısı mevcuttur. $k = 2p$ olsun. Bu durumda $U_n = U_n(k, 1)$, $V_n = V_n(k, 1)$ olmak üzere

$$u = 2a = 2pU_{2n} = kU_{2n},$$

$$v = 2b = V_{2n} - 2U_{2n}$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{u+v}{2} = \frac{kU_{2n}+V_{2n}-2U_{2n}}{2} = \frac{kU_{2n}+U_{2n+1}+U_{2n-1}-2U_{2n}}{2} = \frac{U_{2n+1}+U_{2n-1}-2U_{2n}}{2} \\
 &= U_{2n+1} - U_{2n}, \\
 y &= \frac{u-v}{2} = \frac{kU_{2n}-U_{2n+1}+2U_{2n}}{2} = \frac{kU_{2n}-(kU_{2n}+U_{2n-1})-U_{2n-1}+2U_{2n}}{2} = \frac{2U_{2n}-2U_{2n-1}}{2} \\
 &= U_{2n} - U_{2n-1}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Şu halde

$$(x, y) = (U_{2n+1} - U_{2n}, U_{2n} - U_{2n-1})$$

dir. Şimdi $p|b$ olsun. O zaman

$$2a\left(\frac{b}{p}\right) - a^2 + b^2 = 1$$

ve denklem tam kareye tamamlanırsa

$$\left(a - \frac{b}{p}\right)^2 - (p^2 + 1)\left(\frac{b}{p}\right)^2 = -1$$

elde edilir. Burada $pa - b > 0$ olduğu gösterilebilir. $k = 2p$ olmak üzere Teorem 2.4.2'ye göre $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
 a - \frac{b}{p} &= \frac{V_{2n-1}(k, 1)}{2}, \\
 \frac{b}{p} &= U_{2n-1}(k, 1)
 \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
 b &= pU_{2n-1}, \\
 a &= \frac{V_{2n-1}}{2} + U_{2n-1} = \frac{V_{2n-1} + 2U_{2n-1}}{2}
 \end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde

$$\begin{aligned} u &= 2a = V_{2n-1} + 2U_{2n-1}, \\ v &= 2b = 2pU_{2n-1} = kU_{2n-1} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} x &= \frac{u+v}{2} = \frac{V_{2n-1} + 2U_{2n-1} + kU_{2n-1}}{2} \\ &= \frac{U_{2n} + U_{2n-2} + 2U_{2n-1} + kU_{2n-1}}{2} \\ &= \frac{2U_{2n} + 2U_{2n-1}}{2} \\ &= U_{2n} + U_{2n-1}, \\ y &= \frac{u-v}{2} = \frac{V_{2n-1} + 2U_{2n-1} - kU_{2n-1}}{2} \\ &= \frac{U_{2n} + U_{2n-2} + 2U_{2n-1} - kU_{2n-1}}{2} \\ &= \frac{2U_{2n-2} + 2U_{2n-1}}{2} \\ &= U_{2n-1} + U_{2n-2} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$(x, y) = (U_{2n} + U_{2n-1}, U_{2n-1} + U_{2n-2})$$

veya

$$(x, y) = (U_{2n+1} - U_{2n}, U_{2n} - U_{2n-1})$$

ise

$$x^2 - 2pxy - y^2 = 2p$$

olduğu önceki teoremlerin ispatlarına benzer yolla gösterilebilir.

Teorem 3.3.2. p tek asal sayı olsun.

$$x^2 - 2pxy - y^2 = -2p$$

denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri $k = 2p$, $U_n = U_n(k, 1)$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (U_{2n} - U_{2n-1}, U_{2n-1} - U_{2n-2})$$

veya

$$(x, y) = (U_{2n+1} + U_{2n}, U_{2n} + U_{2n-1})$$

ile verilir.

İspat: $x^2 - 2pxy - y^2 = -2p$ olacak biçimde x, y pozitif tam sayıları mevcut olsun. Bu durumda $x^2 - y^2$ pozitifdir ve çift tamsayıdır. Yani x ve y aynı anda çift veya aynı anda tek tam sayılardır. $u = x + y$ ve $v = x - y$ olsun. O zaman u ve v çifttir.

$$x^2 - y^2 - 2pxy = -2p$$

olduğundan

$$4uv - 2p(u^2 - v^2) = -8p$$

olur. Burada $u = 2a$ ve $v = 2b$ olarak alınırsa

$$4uv - 2p(u^2 - v^2) = 16ab - 2p(4a^2 - 4b^2) = -8p$$

olur. Sadeleştirildiğinde

$$2ab - p(a^2 - b^2) = -p$$

elde edilir. Buradan $p|2ab$ ve p tek olduğundan $p|ab$ olduğu görülür. Önce $p|a$ olsun. Bu durumda

$$2\left(\frac{a}{p}\right)b - (a^2 - b^2) = -1$$

olur ve bu denklem tam kareye tamamlanırsa

$$\left(b + \frac{a}{p}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{p} + a^2\right) = -1$$

ve tekrar düzenleme yapılırsa

$$\left(b + \frac{a}{p}\right)^2 - (p^2 + 1)\left(\frac{a}{p}\right)^2 = -1$$

elde edilir. Teorem 2.4.2'ye göre

$$b + \frac{a}{p} = \frac{V_{2n-1}(2p, 1)}{2},$$

$$\frac{a}{p} = U_{2n-1}(2p, 1)$$

olacak biçimde $n \geq 1$ mevcuttur. Buradan u ve v sırasıyla

$$u = 2a = 2pU_{2n-1} = kU_{2n-1},$$

$$v = 2b = V_{2n-1} - 2U_{2n-1}$$

olarak bulunur. Böylece x ve y değerleri sırasıyla

$$x = \frac{u+v}{2} = \frac{kU_{2n-1} + V_{2n-1} - 2U_{2n-1}}{2} = \frac{kU_{2n-1} + U_{2n} + U_{2n-2} - 2U_{2n-1}}{2}$$

$$= \frac{U_{2n} + U_{2n-2} - 2U_{2n-1}}{2} = U_{2n} - U_{2n-1},$$

$$\begin{aligned}
y &= \frac{u-v}{2} = \frac{kU_{2n-1}-V_{2n-1}+2U_{2n-1}}{2} \\
&= \frac{kU_{2n-1}-(U_{2n}+U_{2n-2})+2U_{2n-1}}{2} \\
&= \frac{kU_{2n-1}-kU_{2n}-U_{2n-2}+2U_{2n-1}}{2} \\
&= \frac{kU_{2n-1}-(kU_{2n-1}+U_{2n-2})-U_{2n-2}+2U_{2n-1}}{2} \\
&= \frac{2U_{2n-1}-2U_{2n-2}}{2} = U_{2n-1} - U_{2n-2}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla

$$(x, y) = (U_{2n} - U_{2n-1}, U_{2n-1} - U_{2n-2})$$

dir. Şimdi de $p|b$ olsun. O zaman

$$a^2 - 2a\left(\frac{b}{p}\right) - b^2 = 1$$

olup denklem tam kareye tamamlanırsa

$$\left(a - \frac{b}{p}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{p^2} + b^2\right) = 1$$

ve tekrar düzenlendiğinde

$$\left(a - \frac{b}{p}\right)^2 - (1 + p^2) \left(\frac{b}{p}\right)^2 = 1$$

elde edilir. $pa - b > 0$ olduğunu görmek kolaydır. $k = 2p$ ve $U_n = U_n(k, 1)$ olmak üzere Teorem 2.4.1'e göre

$$\begin{aligned}
a - \frac{b}{p} &= \frac{V_{2n}(k,1)}{2}, \\
\frac{b}{p} &= U_{2n}(k, 1)
\end{aligned}$$

olacak biçimde $n \geq 1$ vardır. Dolayısıyla

$$u = 2a = V_{2n} + 2U_{2n}$$

alınırsa

$$v = 2b = 2pU_{2n} = kU_{2n}$$

bulunur. Buradan x ve y değerleri

$$\begin{aligned} x &= \frac{u+v}{2} = \frac{V_{2n}+2U_{2n}+kU_{2n}}{2} = \frac{U_{2n+1}+U_{2n-1}+2U_{2n}+kU_{2n}}{2} = U_{2n+1} + U_{2n}, \\ y &= \frac{u-v}{2} = \frac{V_{2n}+2U_{2n}-kU_{2n}}{2} = \frac{U_{2n+1}+U_{2n-1}+2U_{2n}-kU_{2n}}{2} = U_{2n} + U_{2n-1} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde

$$(x, y) = (U_{2n+1} + U_{2n}, U_{2n} + U_{2n-1})$$

dir. Ayrıca

$$(x, y) = (U_{2n} - U_{2n-1}, U_{2n-1} - U_{2n-2})$$

veya

$$(x, y) = (U_{2n+1} + U_{2n}, U_{2n} + U_{2n-1})$$

ise

$$x^2 - 2pxy - y^2 = -2p$$

olduğu önceki teoremlerin ispatlarına benzer yolla gösterilebilir.

3.4. $x^2 - kxy - y^2 = \pm k(k^2 + 4)$ Diyofant Denklemlerinin Çözümleri

Teorem 3.4.1. k asal sayı ve $k^2 + 4$ karesiz tamsayı olsun. Bu durumda

$$x^2 - kxy - y^2 = k(k^2 + 4)$$

denkleminin tüm x, y pozitif tam sayı çözümleri $U_n = U_n(k, 1)$, $V_n = V_n(k, 1)$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (V_{2n+1} + V_{2n}, V_{2n} + V_{2n-1})$$

veya

$$(x, y) = (V_{2n} - V_{2n-1}, V_{2n-1} - V_{2n-2})$$

ile verilir.

İspat: $x^2 - kxy - y^2 = k(k^2 + 4)$ olacak biçimde x, y pozitif tam sayıları mevcut olsun. Bu durumda $x - y$ pozitifdir. $u = x + y$ ve $v = x - y$ olsun. Buradan $x = \frac{u+v}{2}$ ve $y = \frac{u-v}{2}$ elde edilir. Bu değerler yerine yazılırsa

$$uv - k \left(\frac{u^2 - v^2}{4} \right) = k(k^2 + 4)$$

denklemini elde edilir. Dolayısıyla $k|uv$ dir. k asal olduğundan $k|u$ veya $k|v$ dir. İlk olarak $k|u$ olsun. O halde

$$v^2 + 4v \left(\frac{u}{k} \right) - u^2 = 4(k^2 + 4)$$

ve denklem düzenlendiğinde

$$\left(v + \frac{2u}{k}\right)^2 - (k^2 + 4) \left(\frac{u}{k}\right)^2 = 4(k^2 + 4)$$

olur. Buradan $k^2 + 4 \mid \left(v + \frac{2u}{k}\right)^2$ ve $k^2 + 4$ karesiz olduğundan $k + 4 \mid v + \frac{2u}{k}$ elde edilir. O halde

$$v + \frac{2u}{k} = (k^2 + 4)a$$

olacak biçimde a pozitif tam sayısı vardır. Bu değerler denklemde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{u}{k}\right)^2 - (k^2 + 4)a^2 = -4$$

elde edilir. Teorem 2.2.2'ye göre $u = V_{2n-1}$ ve $a = U_{2n-1}$ olacak biçimde $n \geq 1$ mevcuttur. Dolayısıyla

$$u = kV_{2n-1},$$

$$v = (k^2 + 4)a - 2\frac{u}{k} = (k^2 + 4)U_{2n-1} - 2V_{2n-1}$$

dir. Böylece basit bir işlemle x ve y değerleri sırasıyla

$$x = \frac{u+v}{2} = \frac{kV_{2n-1} + V_{2n-1} + V_{2n-2} - 2V_{2n-1}}{2} = \frac{2V_{2n-1} - 2V_{2n-1}}{2} = V_{2n} - V_{2n-1},$$

$$y = \frac{u-v}{2} = \frac{kU_{2n-1} - V_{2n-1} - V_{2n-2} + 2V_{2n-1}}{2} = \frac{2V_{2n-1} - 2V_{2n-2}}{2} = V_{2n-1} - V_{2n-2}$$

elde edilir. Şimdi de $k \mid v$ olsun. Bu durumda

$$4u \left(\frac{v}{k}\right) - u^2 + v^2 = 4(k^2 + 4)$$

olup buradan

$$\left(u - \frac{2v}{k}\right)^2 - (k^2 + 4) \left(\frac{v}{k}\right)^2 = -4(k^2 + 4)$$

denklemini elde edilir. Böylece $k^2 + 4 \mid \left(u - \frac{2v}{k}\right)^2$ ve $k^2 + 4$ karesiz olduğundan $k^2 + 4 \mid u - \frac{2v}{k}$ dir. Dolayısıyla

$$u - \frac{2v}{k} = (k^2 + 4)a$$

olacak biçimde a pozitif tam sayısı vardır. Bu değerler denklemde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{v}{k}\right)^2 - (k^2 + 4)a^2 = 4$$

elde edilir. Teorem 2.2.1'e göre $v = V_{2n}$ ve $a = U_{2n}$ olacak biçimde $n \geq 1$ mevcuttur. Buradan

$$\begin{aligned} x &= \frac{u+v}{2} = \frac{(k^2+4)U_{2n}+2V_{2n}+kU_{2n}}{2} = \frac{2V_{2n}+V_{2n+1}+V_{2n-1}+kV_{2n}}{2} = V_{2n} + V_{2n+1}, \\ y &= \frac{u-v}{2} = \frac{(k^2+4)U_{2n}+2V_{2n}-kV_{2n}}{2} = \frac{V_{2n+1}+V_{2n-1}+2V_{2n}-kV_{2n}}{2} = V_{2n} + V_{2n-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$(x, y) = (V_{2n+1} + V_{2n}, V_{2n} + V_{2n-1})$$

dir. Şimdi

$$(x, y) = (V_{2n} - V_{2n-1}, V_{2n-1} - V_{2n-2})$$

ikilisinin

$$x^2 - kxy - y^2 = k(k^2 + 4)$$

denkleminin bir çözümü olduğu gösterelim. Değerler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
x^2 - kxy - y^2 &= (V_{2n} - V_{2n-1})^2 - k(V_{2n} - V_{2n-1})(V_{2n-1} - V_{2n-2}) \\
&= \underbrace{V_{2n}^2}_{2n} - \underbrace{2V_{2n}V_{2n-1}}_{2n-1} + \underbrace{V_{2n-1}^2}_{2n-1} - k(\underbrace{V_{2n}V_{2n-1}}_{2n-1} - \underbrace{V_{2n}V_{2n-2}}_{2n-2} - \underbrace{V_{2n-1}^2}_{2n-1} + \underbrace{V_{2n-1}V_{2n-2}}_{2n-2}) \\
&= \underbrace{V_{2n}^2}_{2n} - \underbrace{2V_{2n}V_{2n-1}}_{2n-1} + \underbrace{V_{2n-1}^2}_{2n-1} - \underbrace{kV_{2n}V_{2n-1}}_{2n-1} + \underbrace{kV_{2n}V_{2n-2}}_{2n-2} + \underbrace{kV_{2n-1}^2}_{2n-1} - \underbrace{kV_{2n-1}V_{2n-2}}_{2n-2} \\
&= V_{2n}(V_{2n} - kV_{2n-1}) - 2V_{2n-1}(V_{2n} - V_{2n-2}) + V_{2n-2}(kV_{2n} - V_{2n-2}) + kV_{2n-1}^2 \\
&\quad - kV_{2n-1}V_{2n-2} \\
&= \underbrace{V_{2n}V_{2n-2}}_{2n-2} - \underbrace{2kV_{2n}^2}_{2n-1} + \underbrace{V_{2n+1}V_{2n-2}}_{2n-2} - \underbrace{V_{2n-1}V_{2n-2}}_{2n-2} - \underbrace{V_{2n-2}^2}_{2n-2} + \underbrace{kV_{2n-1}^2}_{2n-1} \\
&\quad - kV_{2n-1}V_{2n-2} \\
&= V_{2n-2}(V_{2n} - kV_{2n-1}) - V_{2n-1}(kV_{2n-1} + V_{2n-2}) + V_{2n+1}V_{2n-2} - V_{2n-2}^2 \\
&= V_{2n-2}V_{2n-2} - V_{2n-1}V_{2n} + (kV_{2n} + V_{2n-1})V_{2n-2} - V_{2n-2}^2 \\
&= \underbrace{V_{2n}^2}_{2n-2} - \underbrace{V_{2n}V_{2n-1}}_{2n-2} + \underbrace{kV_{2n}V_{2n-2}}_{2n-2} + \underbrace{V_{2n-1}V_{2n-2}}_{2n-2} - \underbrace{V_{2n-2}^2}_{2n-2} \\
&= kV_{2n}V_{2n-2} - V_{2n-1}(V_{2n} - V_{2n-2}) \\
&= k(kV_{2n-1} + V_{2n-2})V_{2n-2} - V_{2n-1}(kV_{2n-1} + V_{2n-2} - V_{2n-2}) \\
&= \underbrace{k^2V_{2n-1}V_{2n-2}}_{2n-2} + \underbrace{kV_{2n-2}^2}_{2n-2} - \underbrace{kV_{2n-1}^2}_{2n-1} \\
&= -k(\underbrace{V_{2n-1}^2}_{2n-1} - \underbrace{kV_{2n-1}V_{2n-2}}_{2n-2} - \underbrace{V_{2n-2}^2}_{2n-2})
\end{aligned}$$

olup Teorem 1.1.10 kullanılırsa

$$x^2 - kxy - y^2 = -k((-1)^{2n-1}(k^2 + 4)) = k(k^2 + 4)$$

elde edilir. Şimdi de

$$(x, y) = (V_{2n+1} + V_{2n}, V_{2n} + V_{2n-1})$$

ikilisinin

$$x^2 - kxy - y^2 = k(k^2 + 4)$$

denkleminin bir çözümü olduğunu gösterelim. Aynı biçimde değerler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
x^2 - kxy - y^2 &= (V_{2n+1} + V_{2n})^2 - k(V_{2n+1} + V_{2n})(V_{2n} + V_{2n-1}) \\
&= V_{2n+1}^2 + 2V_{2n+1}V_{2n} + V_{2n}^2 - k(V_{2n+1}V_{2n} + V_{2n+1}V_{2n-1} + V_{2n}^2 + V_{2n}V_{2n-1}) \\
&= V_{2n+1}^2 + 2V_{2n+1}V_{2n} + V_{2n}^2 - kV_{2n+1}V_{2n} - kV_{2n+1}V_{2n-1} - kV_{2n}^2 - kV_{2n}V_{2n-1} \\
&= V_{2n+1}^2 - kV_{2n+1}V_{2n-1} - kV_{2n}^2 - kV_{2n}V_{2n-1} \\
&= V_{2n+1}(V_{2n+1} - kV_{2n-1}) - kV_{2n}(V_{2n} + V_{2n-1}) \\
&= V_{2n+1}V_{2n-1} + 2V_{2n}kV_{2n} - kV_{2n+1}V_{2n-1} - kV_{2n}^2 - kV_{2n}V_{2n-1} - V_{2n}^2 \\
&= V_{2n+1}V_{2n-1} + kV_{2n}^2 - kV_{2n+1}V_{2n-1} - kV_{2n}V_{2n-1} - V_{2n}^2 \\
&= V_{2n-1}V_{2n-1} + kV_{2n}^2 - k^2V_{2n}V_{2n-1} - kV_{2n-1}^2 - V_{2n-1}^2 \\
&= k(V_{2n}^2 - kV_{2n}V_{2n-1} - V_{2n-1}^2)
\end{aligned}$$

olup Teorem 1.1.10' a göre

$$x^2 - kxy - y^2 = k((-1)^{2n}(k^2 + 4)) = k(k^2 + 4)$$

olduğu görülür.

Teorem 3.4.2. k asal sayı ve $k^2 + 4$ karesiz olsun. Bu durumda

$$x^2 - kxy - y^2 = -k(k^2 + 4)$$

denkleminin tüm x, y pozitif tam sayı çözümleri $U_n = U_n(k, 1)$, $V_n = V_n(k, 1)$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (V_{2n+1} - V_{2n}, V_{2n} - V_{2n-1})$$

veya

$$(x, y) = (V_{2n} + V_{2n-1}, V_{2n-1} + V_{2n-2})$$

ile verilir.

İspat: $x^2 - kxy - y^2 = -k(k^2 + 4)$ olacak biçimde x, y pozitif tam sayıları mevcut olsun. Bu durumda $x - y$ pozitifdir. $u = x + y$ ve $v = x - y$ olarak alınırsa $x = \frac{u+v}{2}$ ve $y = \frac{u-v}{2}$ olduğu görülür. Bu değerler denklemde yerine yazılırsa

$$uv - k \left(\frac{u^2 - v^2}{4} \right) = -k(k^2 + 4)$$

denklemini elde edilir. O zaman $k|uv$ olduğu görülür. $k|u$ olsun. Bu durumda

$$4v \left(\frac{u}{k} \right) - u^2 + v^2 = -4(k^2 + 4)$$

olduğundan

$$v^2 + 4v \left(\frac{u}{k} \right) - u^2 = -4(k^2 + 4)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\left(v + \frac{2u}{k} \right)^2 - (k^2 + 4) \left(\frac{u}{k} \right)^2 = -4(k^2 + 4)$$

dir. Bu durumda $k^2 + 4 | \left(v + \frac{2u}{k} \right)^2$ ve $k^2 + 4$ karesiz olduğundan $k + 4 | v + \frac{2u}{k}$ olduğu görülür. Dolayısıyla

$$v + \frac{2u}{k} = (k^2 + 4)a$$

olacak biçimde a pozitif tam sayısı vardır. Bu değerler

$$\left(v + \frac{2u}{k}\right)^2 - (k^2 + 4) \left(\frac{u}{k}\right)^2 = -4(k^2 + 4)$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$(k^2 + 4)^2 a^2 - (k^2 + 4) \left(\frac{u}{k}\right)^2 = -4(k^2 + 4)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$(k^2 + 4)a^2 - \left(\frac{u}{k}\right)^2 = -4$$

olduğu görülür. Bu ise

$$\left(\frac{u}{k}\right)^2 - (k^2 + 4)a^2 = 4$$

olduğunu gösterir. Teorem 2.2.1'e göre $u = kV_{2n}$ ve $a = U_{2n}$ olacak biçimde $n \geq 1$ vardır. O halde $u = kV_{2n}$ ve $v = (k^2 + 4)U_{2n} - 2V_{2n}$ olup buradan

$$\begin{aligned} x &= \frac{u+v}{2} = \frac{kV_{2n} + V_{2n+1} + V_{2n-1} - 2V_{2n}}{2} = \frac{2V_{2n+1} - 2V_{2n}}{2} = V_{2n+1} - V_{2n}, \\ y &= \frac{u-v}{2} = \frac{kV_{2n} - (V_{2n+1} + V_{2n-1} - 2V_{2n})}{2} = \frac{kV_{2n} - V_{2n+1} - V_{2n-1} + 2V_{2n}}{2} = \frac{2V_{2n} - 2V_{2n-1}}{2} \\ &= V_{2n} - V_{2n-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$(x, y) = (V_{2n+1} - V_{2n}, V_{2n} - V_{2n-1})$$

dir. Şimdi de $k|v$ olsun. Bu durumda

$$4u \left(\frac{v}{k}\right) - u^2 + v^2 = -4(k^2 + 4)$$

yani

$$u^2 - 4u \left(\frac{v}{k}\right) - v^2 = 4(k^2 + 4)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\left(u - 2\frac{v}{k}\right)^2 - \left(\frac{4u^2}{k^2} + v^2\right) = 4(k^2 + 4)$$

olur. Burada $ku - 2v > 0$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Düzenleme yapılırsa

$$\left(u - \frac{2v}{k}\right)^2 - (k^2 + 4) \left(\frac{v}{k}\right)^2 = 4(k^2 + 4)$$

elde edilir. Buradan $k^2 + 4 \mid \left(u - \frac{2v}{k}\right)^2$ ve böylece $k \nmid 4u \nmid \frac{2v}{k}$ olduğu görülür.

Dolayısıyla

$$u - \frac{2v}{k} = (k^2 + 4)a$$

olacak biçimde a pozitif tam sayısı vardır. Buradan

$$\left(u - \frac{2v}{k}\right)^2 - (k^2 + 4) \left(\frac{v}{k}\right)^2 = 4(k^2 + 4)$$

bulunur. Yani

$$\left(\frac{v}{k}\right)^2 - (k^2 + 4)a^2 = -4$$

elde edilir. Teorem 2.2.2'ye göre $v \equiv V_{2n-1}$ ve $a \equiv U_{2n-1}$ olacak biçimde $n \geq 1$

mevcuttur. Bu durumda $v = kV_{2n-1}$ ve

$$u - \frac{2v}{k} = (k^2 + 4)a$$

olduğu kullanılırsa

$$u = V_{2n} + V_{2n-2} + 2V_{2n-1}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} x &= \frac{u+v}{2} = \frac{V_{2n}+V_{2n-2}+2V_{2n-1}+kV_{2n-1}}{2} = \frac{2V_{2n}+2V_{2n-1}}{2} = V_{2n} + V_{2n-1}, \\ y &= \frac{u-v}{2} = \frac{V_{2n}+V_{2n-2}+2V_{2n-1}-kV_{2n-1}}{2} = \frac{2V_{2n-2}+2V_{2n-1}}{2} = V_{2n-1} + V_{2n-2} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani diğer bir çözüm de

$$(x, y) = (V_{2n} + V_{2n-1}, V_{2n-1} + V_{2n-2})$$

dir. Şimdi de

$$(x, y) = (V_{2n+1} - V_{2n}, V_{2n} - V_{2n-1})$$

ikilisinin

$$x^2 - kxy - y^2 = -k(k^2 + 4)$$

denkleminin bir çözümü olduğunu gösterelim. x ve y değerleri denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x^2 - kxy - y^2 &= (V_{2n+1} - V_{2n})^2 - k(V_{2n+1} - V_{2n})(V_{2n} - V_{2n-1}) \\ &= V_{2n+1}^2 - 2V_{2n+1}V_{2n} + V_{2n}^2 - k(V_{2n+1}V_{2n} - V_{2n+1}V_{2n-1} - V_{2n}^2 + V_{2n}V_{2n-1}) \\ &= V_{2n+1}^2 - 2V_{2n+1}V_{2n} + V_{2n}^2 - kV_{2n+1}V_{2n} + kV_{2n+1}V_{2n-1} + kV_{2n}^2 - kV_{2n}V_{2n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -V_{2n}^2 + 2V_{2n}V_{2n-1} - V_{2n-1}^2 \\
& = V_{2n+1}(V_{2n+1} - kV_{2n}) - 2V_{2n}(V_{2n+1} - V_{2n-1}) + kV_{2n+1}V_{2n-1} + kV_{2n}^2 \\
& \quad - kV_{2n}V_{2n-1} - V_{2n-1}^2 \\
& = V_{2n+1}(V_{2n+1} - kV_{2n}) - kV_{2n}^2 + kV_{2n+1}V_{2n-1} - V_{2n-1}^2 \\
& = V_{2n+1}^2 - kV_{2n}^2 + kV_{2n+1}V_{2n-1} - V_{2n-1}^2 \\
& = k((kV_{2n} + V_{2n-1})V_{2n-1} - V_{2n}^2) \\
& = -k(V_{2n}^2 - kV_{2n}V_{2n-1} - V_{2n-1}^2)
\end{aligned}$$

olup Teorem 1.1.10' dan

$$x^2 - kxy - y^2 = -k((-1)^{2n}(k^2 + 4)) = -k(k^2 + 4)$$

olduğu görülür. Şimdi de

$$(x, y) = (V_{2n} + V_{2n-1}, V_{2n-1} + V_{2n-2})$$

ikilisinin bir çözümü olduğunu gösterelim. Burada da x ve y değerleri denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
x^2 - kxy - y^2 &= (V_{2n} + V_{2n-1})^2 - k(V_{2n} + V_{2n-1})(V_{2n-1} + V_{2n-2}) \\
&= V_{2n}^2 + 2V_{2n}V_{2n-1} + V_{2n-1}^2 - k(V_{2n}V_{2n-1} + V_{2n}V_{2n-2} + V_{2n-1}^2 + V_{2n-1}V_{2n-2}) \\
&= V_{2n}^2 + 2V_{2n-1}V_{2n-2} + V_{2n-1}^2 - kV_{2n}V_{2n-1} - kV_{2n}V_{2n-2} - kV_{2n-1}^2 - kV_{2n-1}V_{2n-2} \\
&= V_{2n}(V_{2n} - kV_{2n-1}) + 2V_{2n-1}(V_{2n} - V_{2n-2}) - kV_{2n}V_{2n-2} - kV_{2n-1}^2 \\
& \quad - kV_{2n-1}V_{2n-2} - V_{2n-2}^2 \\
&= V_{2n}V_{2n-2} + 2V_{2n-1}kV_{2n-1} - kV_{2n}V_{2n-2} - kV_{2n-1}^2 - kV_{2n-1}V_{2n-2} - V_{2n-2}^2 \\
&= V_{2n-2}V_{2n-2} + kV_{2n-1}^2 - k(kV_{2n-1} + V_{2n-2})V_{2n-2} - V_{2n-2}^2 \\
&= V_{2n-2}^2 + kV_{2n-1}^2 - k^2V_{2n-1}V_{2n-2} - kV_{2n-2}^2 - V_{2n-2}^2 \\
&= k(V_{2n-1}^2 - kV_{2n-1}V_{2n-2} - V_{2n-2}^2)
\end{aligned}$$

olup Teorem 1.1.10' dan

$$x^2 - kxy - y^2 = k((-1)^{2n-1}(k^2 + 4)) = -k(k^2 + 4)$$

elde edilir.



BÖLÜM 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde k asal sayısı için $x^2 - kxy - y^2 = k$ denkleminin pozitif tam sayı çözümlerinin

$$(x, y) = (U_{2n}(k, 1) + U_{2n-1}(k, 1), U_{2n-1}(k, 1) + U_{2n-2}(k, 1))$$

veya

$$(x, y) = (U_{2n+1}(k, 1) - U_{2n}(k, 1), U_{2n}(k, 1) - U_{2n-1}(k, 1))$$

ve $x^2 - kxy - y^2 = -k$ denkleminin pozitif tam sayı çözümlerinin

$$(x, y) = (U_{2n-1}(k, 1) + U_{2n-2}(k, 1), U_{2n-2}(k, 1) + U_{2n-3}(k, 1))$$

veya

$$(x, y) = (U_{2n}(k, 1) - U_{2n-1}(k, 1), U_{2n-1}(k, 1) - U_{2n-2}(k, 1))$$

biçiminde olduğu ispatlandı.

k asal sayısı için $x^2 - (k^2 + 4)y^2 = 4k$ denkleminin pozitif tam sayı çözümleri

$$(x, y) = (V_{2n-1}(k, 1) + V_{2n-2}(k, 1), U_{2n-1}(k, 1) + U_{2n-2}(k, 1))$$

veya

$$(x, y) = (V_{2n}(k, 1) + V_{2n-1}(k, 1), U_{2n}(k, 1) + U_{2n-1}(k, 1))$$

ve $x^2 - (k^2 + 4)y^2 = -4k$ denkleminin pozitif tam sayı çözümleri

$$(x, y) = (V_{2n-2}(k, 1) + V_{2n-3}(k, 1), U_{2n-2}(k, 1) + U_{2n-3}(k, 1))$$

veya

$$(x, y) = (V_{2n-1}(k, 1) - V_{2n-2}(k, 1), U_{2n-1}(k, 1) - U_{2n-2}(k, 1))$$

biçiminde olduğu bulundu.

p tek asal ve $k = 2p$ olmak üzere $x^2 - 2pxy - y^2 = 2p$ denkleminin pozitif tam sayı çözümlerinin

$$(x, y) = (U_{2n}(k, 1) + U_{2n-1}(k, 1), U_{2n-1}(k, 1) + U_{2n-2}(k, 1))$$

veya

$$(x, y) = (U_{2n+1}(k, 1) - U_{2n}(k, 1), U_{2n}(k, 1) - U_{2n-1}(k, 1))$$

ve $x^2 - 2pxy - y^2 = -2p$ denkleminin pozitif tam sayı çözümlerinin

$$(x, y) = (U_{2n}(k, 1) - U_{2n-1}(k, 1), U_{2n-1}(k, 1) - U_{2n-2}(k, 1))$$

veya

$$(x, y) = (U_{2n+1}(k, 1) + U_{2n}(k, 1), U_{2n}(k, 1) + U_{2n-1}(k, 1))$$

biçiminde olduğu ispatlandı.

k asal sayı ve $k^2 + 4$ karesiz olmak üzere $x^2 - kxy - y^2 = k(k^2 + 4)$ denkleminin pozitif tam sayı çözümlerinin

$$(x, y) = (V_{2n+1}(k, 1) + V_{2n}(k, 1), V_{2n}(k, 1) + V_{2n-1}(k, 1))$$

veya

$$(x, y) = (V_{2n}(k, 1) - V_{2n-1}(k, 1), V_{2n-1}(k, 1) - V_{2n-2}(k, 1))$$

ve $x^2 - kxy - y^2 = -k(k^2 + 4)$ denkleminin pozitif tam sayı çözümlerinin

$$(x, y) = (V_{2n+1}(k, 1) - V_{2n}(k, 1), V_{2n}(k, 1) - V_{2n-1}(k, 1))$$

veya

$$(x, y) = (V_{2n}(k, 1) + V_{2n-1}(k, 1), V_{2n-1}(k, 1) + V_{2n-2}(k, 1))$$

biçiminde olduğu gösterildi.

Bu denklemlerde k 'nın asal sayı olmaması durumu yeni bir çalışma olarak ayrıca incelenebilir. Bunun için ilk olarak k 'nın iki tek asalın çarpımı biçiminde olması hali ele alınabilir. Burada k 'ya özel değerler verilerek ilgili denklemler çözülebilir. Fakat genel bir çözüm bulunmasının zor olacağı kanaatindeyiz.

KAYNAKLAR

- [1] Lucas, E., Théorie des Fonctions Numériques Simplement Périodiques. American Journal of Mathematics, 1(2): 184-196, 1878.
- [2] Vajda, S., Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section. John Wiley, 51-149, 1989.
- [3] Koshy T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. John Wiley, 1-552, 2001.
- [4] Ribenboim, P., My Numbers, My Friends: Popular Lectures on Number Theory. Springer Verlag, 1-50, 2000.
- [5] Demirtürk, B., Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Dizileri ve Bazı Uygulamaları. Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Doktora Tezi, 2010.
- [6] Şiar, Z., Keskin, R., Some new identities concerning generalized Fibonacci and Lucas numbers. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 42: 211–222, 2013.
- [7] Keskin, R., Solutions of some quadratic Diophantine equations. Computer and Mathematics with Applications, 60(8): 2225-2230, 2010.
- [8] Keskin, R., Güney Duman, M., Positive Integer Solutions of Some Pell Equations. Palestine Journal of Mathematics, 8, 213–226, 2019.
- [9] Keskin, R., Güney Duman, M., Positive integer solutions of some second-order Diophantine equations, Annale Ştiinţifice ale Universităţii. “Alexandru Ioan Cuza” din Iaşi. Matematica, (New Series), 3: 649-664, 2017.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Kübra Ged

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik Bölümü	Devam ediyor
Lisans	Sakarya Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi / Matematik Bölümü	2016
Lise	Gülizar Zeki Obdan Lisesi	2009

YABANCI DİL

İngilizce