



T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

FİZİK YÜKSEK LİSANSI

**X(5) KRİTİK NOKTA SİMETRİSİNİN DAVIDSON
POTANSİYELİ İLE ÇÖZÜMÜ**

Bahattin DÜZGÜN

Danışman: Prof. Dr. İbrahim YİĞİTOĞLU

TOKAT-2025

ETİK SÖZLEŞME

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. İbrahim YİĞİTOĞLU danışmanlığında hazırlamış olduğum **“X(5) Kritik Nokta Simetrisinin Davidson Potansiyeli İle Çözümü”** adlı Yüksek Lisans tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

13/01/2025

Bahattin DÜZGÜN

ÖZET

X(5) KRİTİK NOKTA SİMETRİSİNİN DAVIDSON POTANSİYELİ İLE ÇÖZÜMÜ

Düzgün, Bahattin
Yüksek Lisans, Fizik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. İbrahim Yiğitoğlu
Ocak 2025, vii + 45 sayfa

Bu çalışmada atom çekirdeğinin yapısı Etkileşen Bozon Modeli (IBM) yaklaşımıyla ele alındı. Küresel çekirdekler $U(5)$ ile prolate çekirdekler $SU(3)$ arasındaki geçiş bölgesinin kritik nokta simetrisi olan $X(5)$ noktasının özel bir çözümü elde edildi. Bohr Hamiltonyeninin $\gamma \approx 0$ çözümü için Davidson potansiyeli seçilerek, enerji öz değerleri ve dalga fonksiyonları Nikiforov-Uvarov analitik yöntemiyle elde edilmiştir. Bu çözüm $X(5)$ -D modeli olarak adlandırılmıştır. $X(5)$ -D modelinin enerji spektrumları β_0 değişkenine bağlı olarak gsb, β_1 ve β_2 bantları için hesaplanmıştır. Elde edilen veriler ^{156}Dy , ^{154}Gd , ^{152}Sm , ^{150}Nd çekirdeklerinin uyarılma enerjileri ile karşılaştırılmıştır. ^{156}Dy çekirdeğinin gsb verilerinin $X(5)$ model ile, β seviyelerinde ise $X(5)$ -D modeliyle daha uyumlu olduğu görülmüştür. ^{154}Gd çekirdeğinin verileri gsb bandında $X(5)$ -D modelle oldukça uyumludur, çalışmadaki en yüksek uyum bu seviyededir. Aynı çekirdeğin β bantlarında $X(5)$ -D modeli $X(5)$ modeli tahminlerine göre daha tutarlıdır. ^{152}Sm çekirdeğindeki incelemede gerek gsb bandında gerekse β bantlarında $X(5)$ -D modeli tahminlerinin tutarlı olduğu görülmüştür. ^{150}Nd çekirdeğinde gsb bandında $X(5)$ -D modeli $X(5)$ 'e göre daha uyumlu olduğu görülmüş, β bantlarında ise deneysel verinin az olması yorum yapmayı zorlaştırmıştır.

Anahtar Kelimeler: $X(5)$ -D Model, Kritik Nokta Simetrileri, Davidson Potansiyeli, Nikiforov-Uvarov, Dinamik Simetriler, Bohr Hamiltonyeni.

ABSTRACT

X(5) CRITICAL POINT SYMMETRY SOLUTION WITH DAVIDSON POTENTIAL

Düzgün, Bahattin

Master's Thesis, Physics

Supervisor: Prof. Dr. İbrahim Yiğitoğlu

January 2025, viii + 45 pages

In this study, the structure of the atomic nucleus was discussed with the Interacting Boson Model (IBM) approach. A specific solution of point X(5), which is the critical point symmetry of the transition region between spherical nuclei U(5) and prolate nuclei SU(3), was obtained. By choosing the Davidson potential for the $\gamma \approx 0$ solution of the Bohr Hamiltonian, energy eigenvalues and wave functions were obtained by the Nikiforov-Uvarov analytical method. This solution is called the X(5)-D model. Energy spectra of the X(5)-D model were calculated for gsb, β_1 and β_2 bands depending on the β_0 variable. The obtained data were compared with the excitation energies of ^{156}Dy , ^{154}Gd , ^{152}Sm , ^{150}Nd nuclei. It was observed that the gsb data of the ^{156}Dy core was more compatible with the X(5) model and at the β level it was more compatible with the X(5)-D model. The data of the ^{154}Gd core is very compatible with the X(5)-D model in the gsb band, the highest agreement in the study is in this band. In the β bands, the X(5)-D model is more consistent than the X(5) model predictions. In the examination of the ^{152}Sm core, it was seen that the X(5)-D model predictions were consistent in both the gsb band and the β bands. In the comparison of the ^{150}Nd core, it was seen that the X(5)-D model was more successful than X(5) in the gsb band. The lack of experimental data on β bands made it difficult to make an interpretation between the two models.

Keywords: X(5)-D Model, Critical Point Symmetries, Davidson Potential, Dynamic Symmetries, Nikiforov and Uvarov, Bohr Hamiltonian.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkma sürecinde, bilgisini, emeğini ve ilgisi üzerimden hiç esirgemeyen, sabırlı ve titiz çalışma prensipleriyle akademik çalışmanın nasıl olması gerektiğini bana öğreten, bir hocadan çok arkadaşça yaklaşımıyla benimle iletişim kuran ve tüm süreç boyunca motive eden sayın danışman hocam Prof. Dr. İbrahim YİĞİTOĞLU' na sonsuz teşekkür ederim.

Yüksek lisans derslerinde hocalarım olan Prof. Dr. Bahtiyar MEHMETOĞLU, Prof. Dr. Salih SAYGI ve Doç. Dr. M. Numan BAKIRCI hocalarıma da teşekkür ederim.

Yüksek lisans yapma konusunda beni her zaman destekleyen sevgili eşim Sinem DÜZGÜN'e, bu süreç zarfında bana destek olan oğlum Toprak DÜZGÜN ve kızım Nazlı DÜZGÜN'e çok teşekkür ederim.

Bahattin DÜZGÜN

13 OCAK 2025

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	v
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	viii
1.GİRİŞ.....	1
2.GENEL BİLGİLER.....	4
2.1 Çekirdeğin yapısı.....	4
2.2 Nükleer kabuk modeli.....	5
2.3 Etkileşen bozon modeli.....	7
2.4 Kritik Nokta Simetrileri.....	8
2.5 E(5) Kritik Nokta Simetrisi.....	9
2.6 X(5) Kritik Nokta Simetrisi.....	13
2.7 Davidson potansiyeli.....	17
3.MATERYAL VE YÖNTEM.....	20
4.BULGULAR.....	31
5.TARTIŞMA VE SONUÇ.....	39
6. KAYNAKLAR.....	43
7. ÖZGEÇMİŞ.....	45

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

Açıklamalar

B_m	Kütle parametresi
β	Küresel şekilden sapmanın bir ölçütü
γ	Eksenel simetriden sapmanın bir ölçütü
θ_i	Euler açıları($i=1,2,3$)
L	Açısal momentum kuantum sayısı
$D_{M,K}^L(\theta_i)$	Euler açılarının Wigner fonksiyonları
$u(\beta)$	β değişkenine bağlı potansiyel ifadesi
$u(\gamma)$	γ değişkenine bağlı potansiyel ifadesi
ε	İndirgenmiş enerji
J_v	Bessel fonksiyonu
L_n^K	Laguerre polinomu
$\hbar$	Planck sabiti

Kısaltmalar

Açıklamalar

CBS	β yumuşak model
gsb	Temel seviye bandı
IBM	Etkileşen Bozon Modeli
min	Minimum

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Şekil</u>		<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1	Casten üçgeni	1
Şekil 1.2	Genişletilmiş Casten üçgeni	2
Şekil 2.1	Atom numaralarına bağlı olarak atom yarıçapları. Atom yarıçaplarının belli kabuk değerlerinde ani değişimleri.	5
Şekil 2.2	Atom numaralarına bağlı olarak iyonlaşma enerjileri. Kabuk değişimlerinde ani enerji değişimleri.	6
Şekil 2.3	Nükleer kabuk modeline göre yörüngeler. Bu yörüngelerin denk geldiği kabuklar.	6
Şekil 2.4	E(5) modeli enerji spektrumu ve β geçiş oranları	13
Şekil 2.5	X(5) kritik nokta simetrisi için enerji değişkenleri.	14
Şekil 2.6	Sequence potansiyeli, Davidson potansiyeli ve Casten üçgeni üzerinde faz geçişlerinin tasvir edilmesi.	15
Şekil 4.1	X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin gsb bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ¹⁵⁶ Dy deneysel verilerle karşılaştırılması	33
Şekil 4.2	X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin β_1 bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ¹⁵⁶ Dy deneysel verilerle karşılaştırılması.	33
Şekil 4.3	X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin gsb bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ¹⁵⁴ Gd deneysel verilerle karşılaştırılması.	34
Şekil 4.4	X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin β_1 bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ¹⁵⁴ Gd deneysel verilerle karşılaştırılması.	34
Şekil 4.5	X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin β_2 bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ¹⁵⁴ Gd deneysel verilerle karşılaştırılması.	35

Sayfa

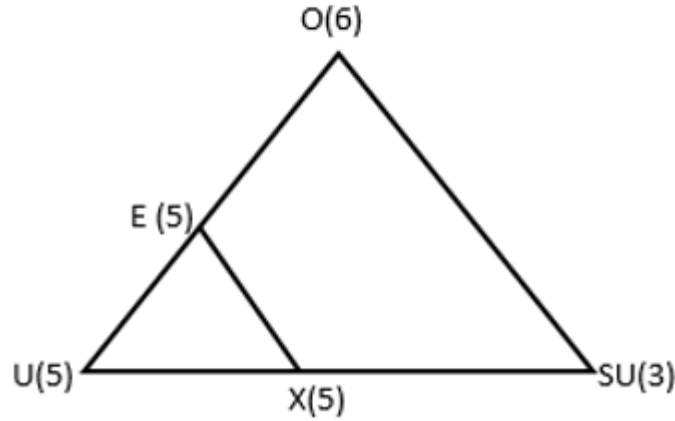
Şekil 4.6	X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin Gsb bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ¹⁵² Sm deneysel verilerle karşılaştırılması.	35
Şekil 4.7	X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin β_1 bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ¹⁵² Sm deneysel verilerle karşılaştırılması.	36
Şekil 4.8	X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin β_2 bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ¹⁵² Sm deneysel verilerle karşılaştırılması.	36
Şekil 4.9	X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin gsb bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ¹⁵⁰ Nd deneysel verilerle karşılaştırılması.	37
Şekil 4.10	X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin β_1 bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ¹⁵⁰ Nd deneysel verilerle karşılaştırılması.	37
Şekil 4.11	X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin β_2 bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ¹⁵⁰ Nd deneysel verilerle karşılaştırılması.	38

ÇİZELGE LİSTESİ

<u>Çizelge</u>		<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1	Farklı modellerin kritik nokta tahminleri	9
Çizelge 2.2	E(5) kritik nokta simetrisi spektrum değerleri.	12
Çizelge 4.1.	Gsb bandı için farklı β_0 değerleri için X(5)-D model ve X(5) model enerji oranları tahmin sonuçları.	31
Çizelge 4.2.	β_1 bandı için farklı β_0 değerleri için X(5)-D model ve X(5) model enerji oranları tahmin sonuçları.	31
Çizelge 4.3.	β_2 bandı için farklı β_0 değerleri için X(5)-D model ve X(5) model enerji oranları tahmin sonuçları.	32

1.GİRİŞ

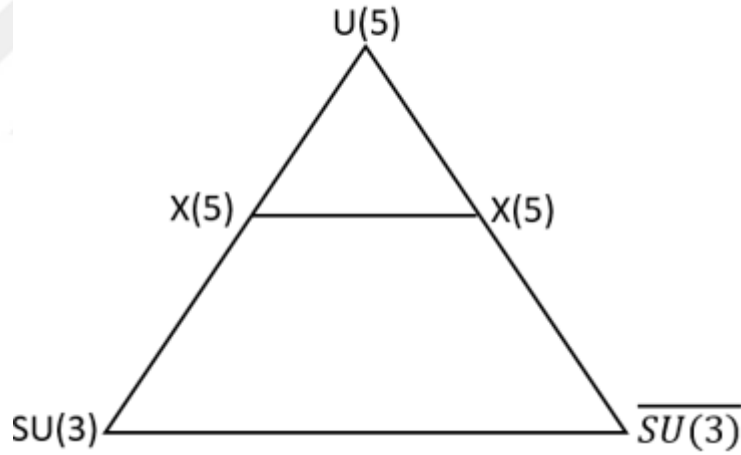
Atom çekirdeği kısa menzilli çekici kuvvet etkisi altında bir arada bulunan nötron ve protonlardan oluşmaktadır. Atom çekirdeğinin yapısı hakkında yapılan çalışmalara bakıldığında pek çok yaklaşımla karşılaşılmaktadır. Bu yaklaşımlardan bir tanesi de dinamik yapı yaklaşımıdır. Nükleonların birbiri ile etkileşimlerinde yalnız iki cisim kuvvetleri ile değil, aynı zamanda üç cisim kuvvetleri ile de etkileştiğini kanıtlayan deliller vardır. Örneğin, 1 numaralı nükleon üzerine etki eden kuvvet 2 ve 3 numaralı nükleonların tek tek konumlarına değil, aynı zamanda 2 ve 3 numaralı nükleonlar arasındaki ilişkiye bağlı ek bir katkı içerir.(Krane, 1987) Bu durum matematiksel olarak işlem yapma imkânını ortadan kaldırdığı için, dinamik yapı yaklaşımı ön plana çıkmaktadır. Bu yaklaşımda çekirdek içerisindeki nükleonların hareketleri bir bütün olarak ele alınır ayrıca çekirdeğin yapısının katı(sabit) bir yapı olmadığını kendi iç etkileşimleriyle birlikte hareketli bir yapıda olduğu kabul edilir. Tek tek nükleonların hareketlerini tanımlamak yerine yapının bütününe ele alarak, bu yapıya eklenecek her bir nükleonun oluşturduğu değişimi incelemek üzere tasarlanmıştır. Ayrıca proton-proton, nötron-nötron ayrımı yapılmaksızın etkileşimler aynı çerçevede incelenir.



Şekil 1.1 Casten Üçgeni.

Çekirdekler şekilsel olarak küresel ve küresel yapıdan sapmayı ifade eden deforme çekirdek yapısında bulunurlar. Bu çekirdekler aldığı şekillere göre oblate deforme, prolate deforme şeklinde olabilmektedirler. Küresel çekirdekler $U(5)$, prolate çekirdekler ise $SU(3)$ olarak isimlendirilmişlerdir.

Ayrıca çekirdeklerde deformasyonlar arası faz geçişleri vardır. Bunlar $X(5)$ ve $E(5)$ faz geçişleridir. Çekirdeklerin karakteristik özellikleri bu faz geçişlerinde ani değişimler göstermektedir. Bu açıdan bu geçişlerin incelenmesi yapıların anlaşılması açısından önemli rol oynamaktadır. $U(5)$ ve $SU(3)$ arasındaki faz geçişi $X(5)$ olarak isimlendirilmiş, $U(5)$ ile $O(6)$ arasındaki faz geçişi $E(5)$ olarak isimlendirilmiştir. Etkileşen Bozon Modeli çerçevesinde bu çekirdekleri Casten üçgeninin köşelerine yerleştirmiş ve kategorize etmiştir.(Casten, 1986)



Şekil 1.2 Genişletilmiş Casten üçgeni.

Çekirdeklerin davranışlarının çözümlenmesinde Etkileşen Bozon Modeli kullanılmıştır. Kısa adı IBM olan modelde, faz geçiş bölgesinde bulunan çekirdeklerin cebirsel modellerle araştırılmasıdır. Etkileşen Bozon Modelinde düşük enerjili kolektif durumları ve çift-çift çekirdeğin çok sayıda elektromanyetik geçişleri açıklama da başarılı olmuştur.

Faz geçişlerinin çözümlenmesinde Bohr Hamiltonyeninin iki temel analitik çözümü vardır. $E(5)$ modeli için γ 'dan bağımsız tam  z m, $X(5)$ modeli için $\gamma \approx 0$ yaklaşık bir çözüm elde edilir. Denklemin beş serbestlik derecesi bulunmaktadır bunlar β , γ ve üç Euler açısıdır. $X(5)$ geçiş bölgesinde Davidson potansiyeli kullanarak çözüm aranmaktadır ve bu çözüme $X(5) - D$ ismi verilmiştir.

Bu tez çalışmasında. Küresel ekirdek yapısına karşılık gelen $U(5)$ dinamik simetrisi ile deforme çekirdek yapısına karşılık gelen $SU(3)$ dinamik simetrisi arasındaki kritik noktada bulunan çekirdekler için bir analitik çözüm olan $X(5)$ modelinin Davidson potansiyeli kullanılarak çözülmesi ile yeni bir analitik çözüm elde edildi. Bu  z m $X(5) - D$ olarak adlandırılmıştır. Bohr Hamiltonyeni  zel bir potansiyel olan Davidson potansiyeli seçilerek oluşturulmuştur. Enerji  z değerleri ve dalga fonksiyonlar Nikiforov-Uvarov tarafından geliştirilen analitik bir yöntem kullanılarak çözümlenmiştir. $X(5) - D$ model için enerji spektrumları elde edilerek ^{156}Dy , ^{154}Gd , ^{152}Sm , ^{150}Nd çekirdeklerin deneysel verileriyle karşılaştırılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Çekirdeğin Yapısı

Çekirdek hakkındaki ilk bilgiler Rutherford saçılma deneyiyle ortaya çıkmaktadır. Rutherford atomun yapısında çekirdek kavramını ilk defa ortaya atan bilim adamıdır. Çekirdeğin yapısında proton ve nötron olmak üzere iki yapı bulunmaktadır. Bu yapılara nükleon denmektedir.

Çekirdekteki protonlar Z, nötronlar N, toplam nükleon sayısı ise A ile gösterilmektedir. Bir X çekirdeği aşağıdaki gibi gösterilir.



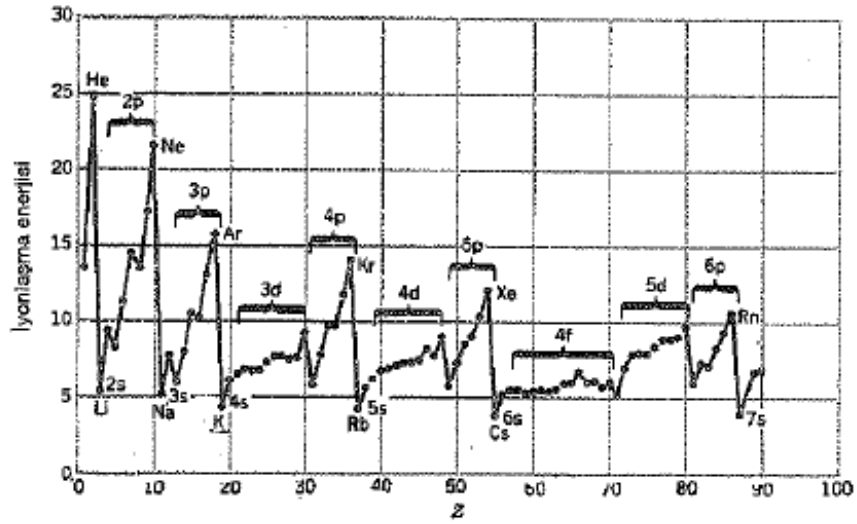
Rutherford deneyleri çekirdek boyutlarını atoma göre oldukça küçük olduğunu birkaç femtometre veya fermi(fm) olduğunu kanıtladı. Çekirdeklerin büyük çoğunluğu küresel şekildedir. Hafif çekirdeklerde çekirdek yarıçapı 2 fm den başlayıp 7 fm ye kadar büyür. Tüm çekirdek yarıçaplarını aşağıdaki bağıntıyla;

$$R = R_0 A^{1/3} \quad (1)$$

hesaplanır.

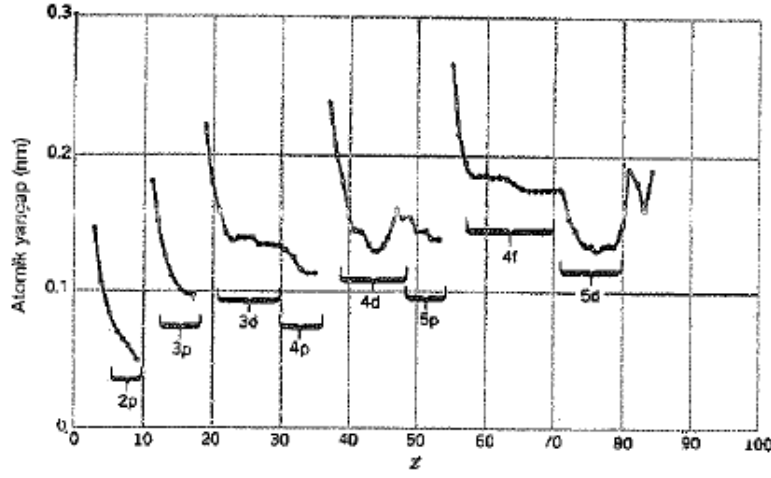
2.2 Nükleer Kabuk Modeli

Kabuk modeli ilk olarak atomun yapısını açıklamak için kullanılmıştır, atom yapısının karmaşık ayrıntılarını açıklamada oldukça başarı sağlamıştır. Bu nedenle nükleer fizikçilerde çekirdeğin özelliklerini açıklamada bu teorinin kullanılmasının yararlı olacağını düşündüler(Krane, 1987)

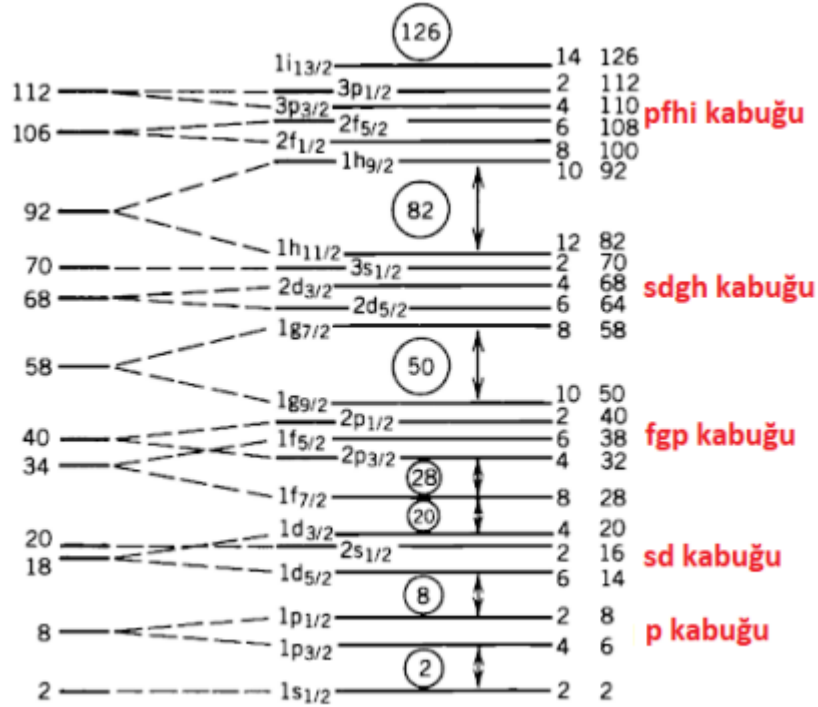


Şekil 2.1 Atom numaralarına bağlı olarak atom yarıçapları. Atom yarıçaplarının belli kabuk değerlerinde ani değişimleri. (Krane, 1987)

Şekil 2.1 ve Şekil 2.2 ye bakıldığında kabuk modelinin atomun yapısı hakkında uyumlu bir model olduğu görülmektedir. Benzer şekilde çekirdekler içinde nükleon sayılarına bağlı olacak biçimde kararlı kabuklardan söz edilebilir. Bu yaklaşımda çekirdekte bulunan nükleonlar, çekirdek çevresindeki yörüngelere Pauli dışarlama ilkesine göre yerleşirler. Atom modelindeki soy gazlara benzer şekilde belirli sayıdaki nükleonlara sahip çekirdeklerin diğerlerine göre oldukça kararlı olduğu görülmektedir. Nükleer fizikte sihirli sayılar olarak isimlendirilen bu çekirdekler 2, 8, 20, 28, 50, 82 ve 128'dir.



Şekil 2.2 Atom numaralarına bağlı olarak iyonlaşma enerjileri. Kabuk değişimlerinde ani enerji değişimleri verilmiştir. (Krane, 1987)



Şekil 2.3 Nükleer kabuk modeline göre yörüngeler. (Krane, 1987)

Proton ve nötron sayıları sihirli sayıda olan çekirdeklere çift sihirli çekirdekler denmekte ve küresel yapıda olup diğer çekirdeklere göre daha kararlı olduğu görülmektedir. Sihirli sayıya sahip tek parçacık yörüngelerinin, ardından gelen yörüngeler arasında fazla mesafe olması, yörüngelerin gruplanmış olarak bulunmalarına yol açar. Bu gruplara kabuk adı verilmekte olup, nükleer kabuk modeli ismi buradan gelmektedir.(Krane, 1987)

2.3 Etkileşen Bozon Modeli

Nükleer fizik üzerine çalışma yapan Iachello ve Arima tarafından 1987 yılında “Etkileşen Bozon Modeli” orta ve ağır kütleli çift proton ve çift nötron içeren çekirdekleri tanımlamak için ortaya atılmıştır. Hem geometrik yaklaşım hem de mikroskobik yaklaşıma sahip olmasından ötürü yarı mikroskobik bir model olarak ele alınabilir. Kısa adı IBM olan model geometrik yaklaşım ile mikroskobik yaklaşımın arasında bulunur. Etkileşen Bozon Modeli zamanla 4 farklı varyasyona ayrılmıştır. Bunlardan IBM-1 model ilk sürüm olup bu modelde proton-proton ve nötron-nötron ayrımı yapılmaksızın çekirdekler ele alınmıştır. IBM-2 modelde proton ve nötron ayrımı yapılmıştır. IBM-3 ve IBM-4 sürümleri ise proton ve nötron sayılarının yaklaşık eşit olduğu çekirdekler için kullanılmıştır.(Cejnor ve Jolie, 2009)

Etkileşen Bozon Modelinde temel olarak her bir nükleon çifti için toplam açısal momentum bileşeni iki değer alabilir. Bunlardan $L=0$ olan s ve $L=2$ olan d olmaktadır. Çekirdeklerin kolektif durumları en yakın kapalı kabuklara tamamlanan valans proton ve nötron sayılarının yarısı olarak elde edilen N_B bozon sayısına göre oluşturulur. Bu modelde s bozonu yalnız bir manyetik alt durumu, d bozonu ise beş manyetik alt duruma sahiptir. Doğal olarak s-d bozon sistemi matematiksel olarak altı boyutlu bir uzayda bulunacaktır.(Gökbulut, 2018)

2.4 Kritik Nokta Simetrileri

Nükleer yapının özellikleri incelenirken belli başlı kıstaslar ele alınmaktadır. Bunu gazlar konusundaki basınç, sıcaklık, tanecik sayısı gibi düşünebiliriz. Nükleer yapının karakterini belirleyen en önemli özelliklerden birisi nükleon sayısıdır. Çekirdekdeki nükleon sayıları arttıkça çekirdeğin yapısı da buna göre şekil ve hareket türlerine ayrılmaktadır. Bu yapılardaki ani değişimlere denk gelen noktalara kritik nokta simetrileri denmektedir. Kolektif çift çekirdeklerin üç tane bilinen ve yaygın olarak kullanılan durumları mevcuttur. Bunlar küresel vibratör şekil U(5), deforme rotor SU(3) ve γ -kararsız deforme O(6) dinamik simetrileridir.

Bohr Hamiltoniyeni tarafından elde edilen spektrum da $R_{4/2}$ enerji oranları nükleer yapılar için ayırt edici bir özellik taşımaktadır. Açısal momentum sayısı 4 olan seviyenin açısal momentum 2 olan seviyesine olan oranı $R_{4/2}$ olarak elde edilir ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$R_{4/2} = \frac{E_4 - E_0}{E_2 - E_0} \quad (2)$$

Bu oranın değerleri küresel yapıdaki çekirdekler için 2.0, deforme rotor çekirdekler için 2.5 ve γ -kararsız deforme çekirdekler için 3.33 olarak bulunmuştur. (Casten, 2006)

Üç temel yapının dışında birde bu yapılar arasında bulunan ani değişim ve geçişlerin yaşandığı noktalar bulunur. Bu noktalara ise kritik nokta simetrileri denmektedir. U(5) ile O(6) arasında yer alan simetriye E(5), U(5) ile SU(3) arasında yer alan simetriye X(5) denmektedir. Bu geçiş bölgelerindeki $R_{4/2}$ oranları Çizelge 2.1 de verilmiştir.

Çizelge 2.1. Farklı modellerin kritik nokta tahminleri

Model	Potansiyel β	Potansiyel γ	Geçişler	Tahmin	Kaynak
E(5)	$B^{2n} \rightarrow \infty$	Bağımsız	Kritik nokta	2.19	Iachello 2000
X(5)	$B^{2n} \rightarrow \infty$	Harmonik osilatör	Kritik nokta	2.91	Iachello 2001

2.5 E(5) Kritik Nokta Simetrisi

Çekirdek yapılarını kategorize eden Casten üçgeninin köşelerinde yer alan yapılardan U(5) titreşimsel ve O(6) γ -bağımsız arasındaki geçişe E(5) kritik nokta simetrisi denmektedir. Bu geçiş için dalga denklemi ve enerji denklemi Bohr Hamiltonyeniyle elde edilir.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_k \frac{\theta_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)} \right] + V(\beta, \gamma) \quad (3)$$

Bohr hamiltonyeninde beş farklı değişken vardır. Bunlar β, γ ve Euler açıları θ_i ($i=1,2,3$) olmaktadır.

E(5) kritik nokta simetrisinin potansiyel denklemi β' ya bağlı olup γ' dan bağımsızdır. $V(\beta, \gamma) = U(\beta)$ olacaktır.

Sistem incelenirken dalga fonksiyonu $\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = f(\beta)\Theta(\gamma, \theta_i)$ olacak şekilde bileşenlerine ayrılarak kullanılacaktır.

E(5) kritik nokta simetrisinin denklemleri çözümlendiğinde,

$\Lambda = \tau(\tau + 1)$ ve $\tau = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere;

$$\left[-\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4} \sum_k \frac{Q_k^L}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] \Phi(\gamma, \theta_i) = \Lambda \Phi(\gamma, \theta_i) \quad (4)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2B} \left(\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\Lambda}{\beta^2} \right) + U(\beta) \right] f(\beta) = E f(\beta) \quad (5)$$

Burada $\varepsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E$, $u = \frac{2B}{\hbar^2} U$ indirgenmiş potansiyel ve indirgenmiş enerji olmak üzere, denklem;

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\Lambda}{\beta^2} + u(\beta) \right] f(\beta) = \varepsilon f(\beta) \quad (6)$$

olacaktır.

$$\phi(\beta) = \beta^{\frac{3}{2}} f(\beta) \quad (7)$$

dönüşümü yapılırsa;

$$\varphi'' + \varphi' + \left[\varepsilon - u(\beta) - \frac{(\tau+3/2)^2}{\beta^2} \right] \varphi = 0 \quad (8)$$

Denklem 5' den istifade ederek E(5) dinamik simetri de sonsuz kuyu potansiyeli alınırsa;

$$u(\beta) = 0 \quad \beta \leq \beta_w \quad (9)$$

$$u(\beta) = \infty \quad \beta > \beta_w \quad (10)$$

Bu durumda $z = \beta_k$ ve $k = \varepsilon^{1/2}$ ile $v = \tau + 3/2$ kökünden Bessel denklemi elde edilir.

$$\varphi'' + \varphi' + \left[\varepsilon - u(\beta) - \frac{(\tau+3/2)^2}{\beta^2} \right] \varphi = 0 \quad (11)$$

$\varphi(\beta_w) = 0$ sınır koşulundaki öz değerleri;

$$E_{\xi,\tau} = \frac{\hbar^2}{2B} k_{\xi,\tau}^2, \quad k_{\xi,\tau} = \frac{\mathcal{X}_{\xi,\tau}}{\beta_w} \quad (12)$$

$\mathcal{X}_{\xi,\tau}$ ve $J_{\tau+\frac{3}{2}}(z)$ Bessel fonksiyonunun ξ' inci sıfır değeridir. Enerji öz fonksiyonları ise;

$$\varphi_{\xi,\tau}(\beta) = C_{\xi,\tau} J_{\tau+3/2}(k_{\xi,\tau}\beta) \quad (13)$$

Normalizasyon katsayısı $C_{\xi,\tau}$ ise;

$$\int_0^\infty \beta^4 d\beta f^2(\beta) = 1 \quad (14)$$

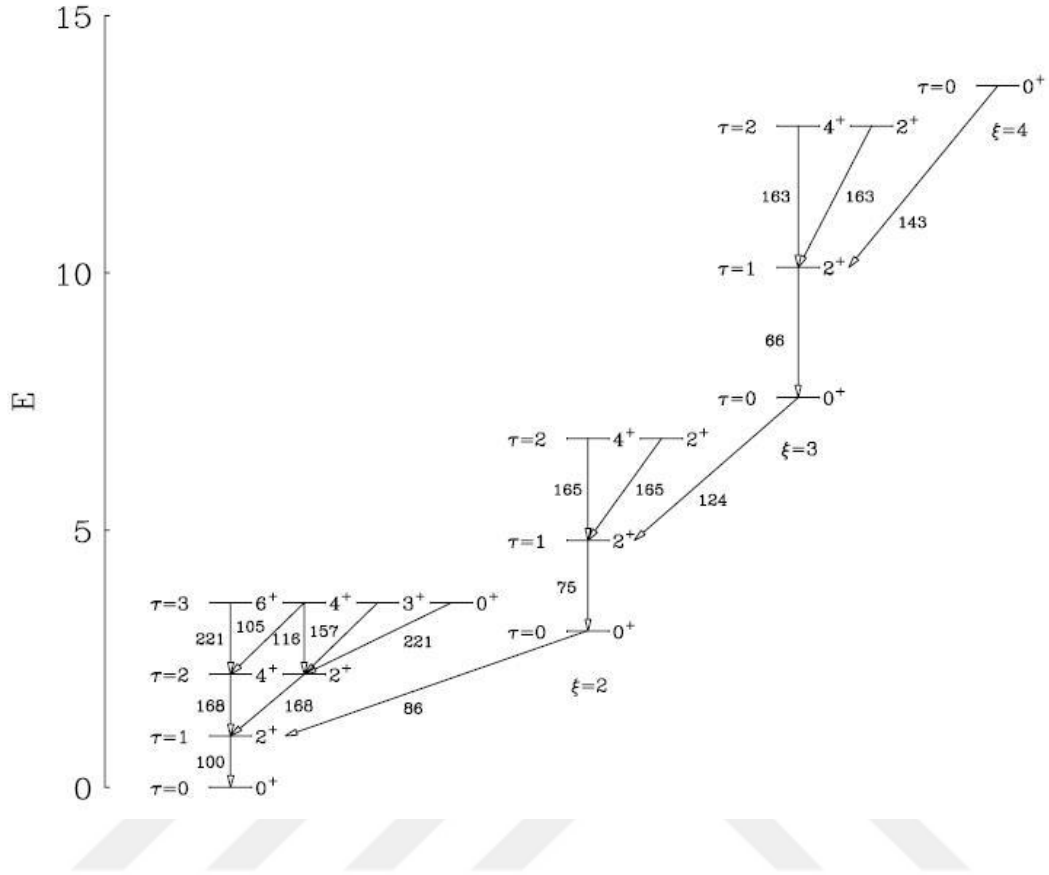
Bu geçiş simetrisi Bessel fonksiyonları çerçevesinde özömlenmiř olup 5 farklı değişkene sahip olmasından ötürü E(5) ismini almıştır. Enerji spektrumuna ait sonuçlar hesaplandığında izelge 2.2 deki değerler elde edilmiş olur.

Çizelge 2.2 deki deėerlerden yola çıkarak;

$$\frac{E_{4,2}}{E_{2,1}} = 2.20, \frac{E_{2,2}}{E_{2,1}} = 2.20, \frac{E_{0,2}}{E_{2,1}} = 3.03 \text{ olduğu hesaplanır.}$$

Çizelge 2.2 E(5) kritik nokta simetrisi spektrum değerleri.

	$\xi = 1$	$\xi = 2$	$\xi = 3$	$\xi = 4$
$\tau = 0$	0	3.03	7.58	13.64
$\tau = 1$	1.00	4.80	10.11	16.93
$\tau = 2$	2.20	6.78	12.86	20.44
$\tau = 3$	3.59	8.97	15.81	24.16
$\tau = 4$	5.17	11.36	18.99	28.10



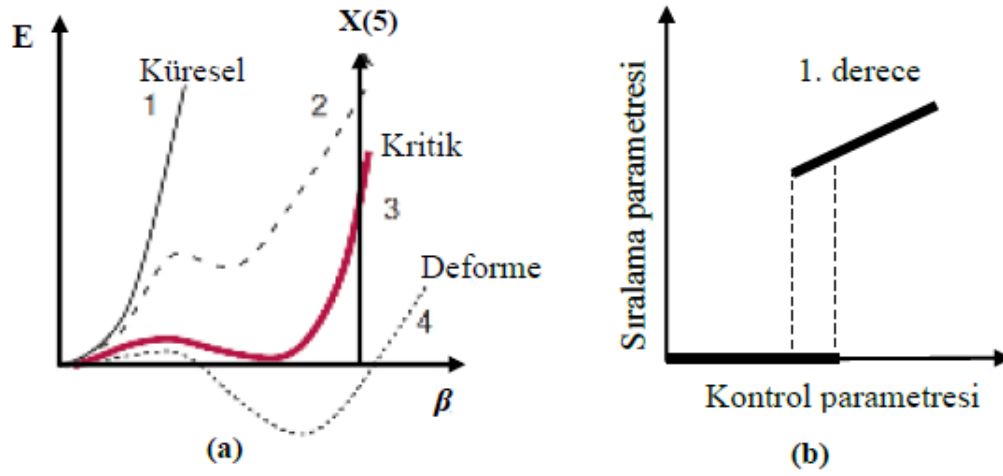
Şekil 2.4 E(5) modeli enerji spektrumu ve B enerji geçiş oranları.(Iachello, 2000)

Bu sonuçların deneysel verilerle uyumlu olduğu da görülmektedir. Çizelge 2.2'deki enerji spektrumlarının ilk dört bandı için normalizasyon enerji spektrumu Şekil 2.4'de verilmiştir.

2.6 X(5) Kritik Nokta Simetrisi

X(5) kritik nokta simetrisi Casten üçgeninde belirlenen küresel vibratör U(5) ile prolate deforme SU(3) arasında yer almaktadır. Bu geçişte minimum değer için $\gamma = 0$ için elde edilir. Faz geçişleri incelendiğinde birinci faz geçişi hem küresel hem de deforme geçişleri bir arada görülmektedir.

Şekil 2.5 a' da birinci derece faz geçişi için, birlikte var olma deforme olmuş bir minimum uyarılmış durum olarak eğri 2 oluşur. Çekirdekteki nükleon sayıları arttıkça enerji değeri düşmeye başlıyor ve kritik nokta eğri 3 ortaya çıkıyor. Enerji değerinin şekli sonsuz kare kuyusuna benziyor, daha sonraki değerlerde deforme yapı eğri 4 karşımıza çıkıyor. (Casten, 2006)



Şekil 2.5. X(5) kritik nokta simetrisi için enerji değişkenleri. (a) enerji- β ilişkisi (b) kontrol parametresi-sıralama parametresi ilişkisi.(Casten, 2006)

Ehrenfast koşuluna göre, kritik noktada faz geçişi gözlenmektedir, zira kontrol ve sıralama parametresinin birinci türevi süresizdir. Burada faz geçişinin olduğu nokta aniden belirir. Şekil 2.5b'de görüldüğü üzere X(5) kritik noktasının çözümü Bohr Hamiltonyeninde aranır, enerji ve dalga denklemleri elde edilir.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_k \frac{\theta_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)} \right] + V(\beta, \gamma) \quad (15)$$

$\gamma = 0^\circ$ için potansiyel minimum değerdedir ve dalga fonksiyonu,

$\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \varphi_{MK}^L(\beta, \gamma) D_{MK}^L(\theta_i)$ şeklinde olur. $\theta_i (i = 1, 2, 3)$ Euler açıları, $\theta_{MK}^L(\theta_i)$ Euler açılarının Wigner fonksiyonudur.

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\Theta_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right)} \cong \frac{4}{3}(\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2) + \Theta_3^2 \left(\frac{1}{\sin^2\gamma} - \frac{4}{3} \right) \quad (16)$$

Şeklinde yazılabilir. M ve K sırasıyla L açısal momentum operatörünün laboratuvar sabiti. Denklemden $\varepsilon = \frac{2B}{\hbar^2}E$ ve $u = \frac{2B}{\hbar^2}V$ indirgenmiş enerji ve indirgenmiş potansiyel dönüşümleri yapıp tekrardan düzenleme yapılırsa;

$$\left\{ -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4\beta^2} \left[\frac{4}{3} L(L+1) + K^2 \left(\frac{1}{\sin^2\gamma} - \frac{4}{3} \right) \right] + u(\beta, \gamma) \right\} = \varepsilon \Theta_K^L(\beta, \gamma) \quad (17)$$

Bu denklemden $u(\beta, \gamma) = u(\beta) + u(\gamma)$ ve $\varepsilon = \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma$ dönüşümleri yapıp düzenlenirse;

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{4\beta^2} \frac{4}{3} L(L+1) + u(\beta) \right] \xi(\beta) = \varepsilon_\beta \xi(\beta) \quad (18)$$

$$\left[-\frac{1}{\langle \beta^2 \rangle \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4\langle \beta^2 \rangle} K^2 \left(\frac{1}{\sin^2\gamma} - \frac{4}{3} \right) + v(\gamma) \right] n_K(\gamma) = \varepsilon_\gamma n_K(\gamma) \quad (19)$$

Burada $\langle \beta^2 \rangle$, β^2 'nin $\xi(\beta)$ üzerinden ortalaması olup, potansiyelin β için kare kuyu, γ değişkeni için harmonik osilatör seçilip kare kuyu potansiyeli için;

$$u(\beta) = 0 \quad \beta \leq \beta_w \quad (20)$$

$$u(\beta) = \infty \quad \beta > \beta_w \quad (21)$$

alınır.

$\xi(\beta) = \beta^{\frac{3}{2}} \tilde{\xi}(\beta)$, $\varepsilon_\beta = k_\beta^2$ ve $z = \beta k_\beta$ denklem denkleştirilmeleri yapıp, aşağıdaki yapı elde edilir.

$\tilde{\xi}'' + \frac{\tilde{\xi}'}{2} + \left[1 - \frac{v^2}{z^2}\right] \tilde{\xi} = 0$; $\tilde{\xi}(\beta_w) = 0$ denklem Bessel denklemi olup çözümü de buna göre yapılırsa;

$$v = \left(\frac{L(L+1)}{3} + \frac{9}{2} \right)^{1/2} \quad (22)$$

Sınır koşullarına göre öz değer ve öz fonksiyonlar belirlenir. Bu durumda;

$$\varepsilon_{\beta,K,L} = (k_{S,L})^2 \text{ ve } \xi_{S,L}(\beta) = C_{S,L} \beta^{-\frac{3}{2}} J_v(k_{S,L} \beta) \quad (23)$$

$k_{S,L} = \frac{X_{S,L}}{\beta_w}$ burada $X_{S,L}$ $J_v(z)$ 'nin s sıfır noktasıdır ve L açısal momentumdur.

$$\left[-\frac{1}{\langle \beta^2 \rangle} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\left(\frac{K}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\langle \beta^2 \rangle} \frac{1}{\gamma^2} + (3a)^2 \frac{\gamma^2}{2} \right] n_k(\gamma) = \tilde{\varepsilon}_\gamma n_k(\gamma) \quad (24)$$

$$\tilde{\varepsilon}_\gamma = \varepsilon_\gamma + \frac{\left(\frac{K}{2}\right)^2}{\langle \beta \rangle} \frac{4}{3} \quad (25)$$

$$n_{n\gamma} K(\gamma) = C_n K \gamma^{|K/2|} e^{-3a\gamma^2/2} L_n^k(3a\gamma^2) \quad (26)$$

$$n = \left(\frac{n_\gamma - K}{2} \right) \quad (27)$$

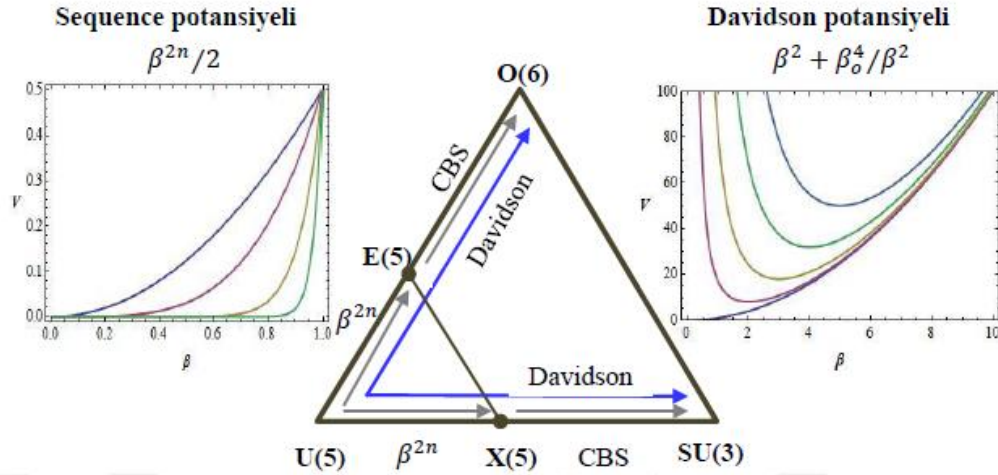
$n_\gamma = 0, 1, 2, \dots$ olup L_n^K Laguerre polinomudur a ise harmonik osilatör potansiyelinin kuvveti ve genliğidir. (Iachello, 2001; Fortunato, 2005)

2.7 Davidson Potansiyeli

İki nükleonlu çekirdekler ve iki atomlu moleküllerin elektromanyetik geçişleri ile rotasyonel ve titreşimsel enerji dağılımlarının incelenmesinde Davidson (Davidson, 1932) tarafından geliştirilen potansiyeller kullanılarak çözümler aranmıştır. Bohr-Mottelson kolektif modeli Hamiltoniyeni ile γ -kararsız yapının enerji spektrumu cebirsel verileri Davidson potansiyeli ile elde edilmiştir. (Rowe ve Bahri, 1998)

Davidson tipi potansiyeller Casten üçgeninin köşelerinde belirtilen U(5) , SU(3) ve O(6) çekirdekler arasında bir köprü oluşturmak amacıyla önerilmiştir.(Bonatsos ve ark., 2004c). Bu alandaki ilk denemeler U(5) küresel vibratör yapıdan, E(5) kritik nokta simetrisine ve X(5) kritik nokta simetrisine ulaşmak için, $U_{2n}(\beta) = \beta^{2n}/2$ şeklinde tanımlanan Sequence potansiyeli seçilmiştir. E(5) ve X(5) kritik nokta simetrileri için, Sequence potansiyeli seçilerek oluşturulmuş Bohr Hamiltonyenin analitik çözümleri n'nin farklı değerleri için E(5)- β^{2n} (Bonatos ve ark., 2004) ve X(5)- β^{2n} (Bonatos ve ark.,2004) elde edilmiş ve literatüre girmiştir.

Şekil 2.6 da n=1, 2, 6 ve 16 değerleri için elde edilen Sequence potansiyel grafiği görülmektedir. Sequence potansiyelinde n'nin artan değerlerinde potansiyel sonsuz kuyu potansiyeline doğru kaymaktadır. n=1 için U(5) limit yapısı, $n \rightarrow \infty$ limiti için E(5) ve X(5) kritik nokta simetrileri elde edilir.



Şekil 2.6 Sequence potansiyeli, Davidson potansiyeli ve Casten üçgeni üzerinde faz geçişlerinin tasvir edilmesi. (Bonatsos ve ark., 2006b)

Şekil 2.6 da verilen şekil faz geçiş noktaları ile deforme limit yapılar arasında kalan bölge β yumuşak (CBS) modeli (Bonatsos ve ark., 2006b) ile incelenir. CBS model X(5) ve

E(5) kritik nokta simetrisi için sonsuz kare kuyu potansiyelini sınırlandırmış $\beta_M > \beta_m \geq 0$ formatında sonsuz kare kuyu potansiyelini geliştirmişlerdir.

$$u(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta_m \leq \beta \leq \beta_M \\ \infty, & 0 \leq \beta < \beta_m, \quad \beta > \beta_M \end{cases} \quad (28)$$

Daha sonraları U(5) küresel vibratörden, üçgenin diğer köşelerinde yer alan O(6) ve SU(3) deforme limit yapıları arasındaki bölgeyi incelemek için, $\beta \neq 0$ da bir minimuma sahip olan ve β_0 serbest parametresini içeren Davidson tipi potansiyeller geliştirilmiştir.

$$U_D^{2n}(\beta) = \beta^{2n} + \frac{\beta_0^{4n}}{\beta^{2n}} \quad (29)$$

$n=1$ değerinde potansiyelin tam çözümünün elde edildiği durumda Davidson potansiyeline dönüşür. Ve denklem;

$$U_D^2(\beta) = \beta^2 + \frac{\beta_0^4}{\beta^2} \quad (30)$$

olur. β_0 potansiyelin minimum noktasıdır. Şekil 2.3 de Davidson potansiyeli grafiği $\beta_0=0,2,3,4$ değerleri alınarak oluşturulmuştur. Bohr Hamiltoniyeni içinde Davidson potansiyeli kullanarak analitik çözümler kritik noktalar için tanımlanmış E(5)-D ve X(5)-D olarak isimlendirilmiştir(Bonatsos ve ark.,2004d).

3.MATERYAL ve YÖNTEM

X(5) kritik nokta simetrisi Davidson potansiyeli alınarak çözümü için Bohr Hamiltonyeni kullanıldı.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_k \frac{\Theta_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)} \right] \quad (31)$$

Denklem 31 ile verilir (Bohr, 1954) Burada;

B: kütle paramertresi

$\hbar$: plank sabiti

β : küresel simetriden sapma ölçütü

γ : küresel simetriden sapma ölçütü.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_k \frac{\Theta_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)} \right] + V(\beta, \gamma) \quad (32)$$

$V(\beta, \gamma)$: potansiyel denklemini iki ayrı değişkene dönüştürüp almak çözüm açısından bize kolaylıklar sunmaktadır.

$\gamma=0$ için; denklem

$$\sum_k \frac{\theta_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)} \frac{4}{3} (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) + \theta_3^2 \left(\frac{1}{\sin^2(\gamma)} - \frac{4}{3} \right) \quad (33)$$

$$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin(-2\pi) = 0 \quad (34)$$

Dalga fonksiyonu; $\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \phi_K(\beta, \gamma) D_{MK}^L(\theta_i)$ olarak alınır.

$$\begin{aligned} H = & -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \left(\frac{4}{3} (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) \right. \right. \\ & \left. \left. + \theta_3^2 \left(\frac{1}{\sin^2(\gamma)} - \frac{4}{3} \right) \right] \phi_K(\beta, \gamma) + V(\beta, \gamma) \phi_K(\beta, \gamma) D_{MK}^L(\theta_i) \\ & = E \phi_K(\beta, \gamma) D_{MK}^L(\theta_i) \end{aligned} \quad (35)$$

$$* [\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2] D_{MK}^L(\theta_i) = L(L+1) D_{MK}^L(\theta_i) \quad (36)$$

$$* \theta_3^2 D_{MK}^L(\theta_i) = K^2 D_{MK}^L(\theta_i) \quad (37)$$

$* D_{MK}^L(\theta_i) \Rightarrow$ Wigner fonksiyonu, $L \Rightarrow$ Açısal momentum özdeğeri

M, laboratuvar sabiti $-z$ eksenini üzerindeki açısal momentum izdüşümü.

K, cisim sabitli z^{-1} eksenini üzerindeki açısal momentum izdüşümü.

Denklem (35) i $\frac{2B}{\hbar^2}$ ile çarpıp $D_{MK}^L(\theta_i)$ ye bölersek;

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{3\beta^2} L(L+1) + \frac{K^2}{4B^2} \left(\frac{1}{\sin^2(\gamma)} - \frac{4}{3} \right) \right] \Theta_K^L(\beta, \gamma) + U(\beta, \gamma) \Theta_K^L(\beta, \gamma) = \varepsilon \Theta_K^L(\beta, \gamma) \quad (38)$$

$U = \frac{2B}{\hbar^2} V$, $\varepsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E$ indirgenmiş potansiyel ve enerji değerleri.

$$U(\beta, \gamma) = U(\beta) + \frac{U(\gamma)}{\beta^2} \quad (39)$$

İfadesi yerine yazılıp, dalga fonksiyonu $\Theta_K^L = \xi_L(\beta) n_K(\gamma)$ şeklinde anılırsa;

$$\begin{aligned} & * -\frac{n_K(\gamma)}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \frac{n_K(\gamma)}{3\beta^2} L(L+1) \xi_L(\beta) - \frac{\xi(\beta)}{3\beta^2} \frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial n_K(\gamma)}{\partial \gamma} + \\ & \frac{K^2}{4\beta^2} \left(\frac{1}{\sin 3\gamma} - \frac{4}{3} \right) \varepsilon_L n_K + U(\beta) \xi(\beta) n_K(\gamma) + \frac{U(\gamma)}{\beta^2} \xi_L(\beta) n_K(\gamma) = \\ & \varepsilon \xi(\beta) n_K(\gamma) \end{aligned} \quad (40)$$

Denklem (40) $\xi(\beta) n_K(\gamma)$ ile bölünüp β^2 ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\xi_L(\beta)} \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \frac{L(L+1)}{3} + U(\beta) \beta^2 - \varepsilon \beta^2 - \frac{1}{n_K(\gamma)} \frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial n_K}{\partial \gamma} \\ & + \frac{K^2}{4} \left(\frac{1}{\sin 3\gamma} - \frac{4}{3} \right) + U(\gamma) = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

$$-\frac{1}{\xi_L(\beta)} \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \frac{L(L+1)}{3} + U(\beta) \beta^2 - \varepsilon \beta^2 = -\lambda \quad (42)$$

$$-\frac{1}{n_K(\gamma)} \frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial n_K}{\partial \gamma} + \frac{K^2}{4} \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) + U(\gamma) = \lambda \quad (43)$$

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{L(L+1)}{3\beta^2} + U(\beta) + \frac{\lambda}{\beta^2} \right] \xi(\beta) = \varepsilon \xi(\beta) \quad (44)$$

$$\left[-\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{K^2}{4} \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) + U(\gamma) \right] n_K(\gamma) = \lambda \quad (45)$$

Denklem (44) deki $U(\beta) = \beta^2 + \frac{\beta_0^4}{\beta^2}$ Davidson potansiyeli alınıp denklem yeniden düzenlenirse

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{L(L+1)}{3\beta^2} + \beta^2 + \frac{\beta_0^4}{\beta^2} + \frac{\lambda}{\beta^2} \right] \xi(\beta) = \varepsilon \xi(\beta) \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \text{ denklemin türevi alınır} & \text{sa sırasıyla } \frac{1}{\beta^4} \left[4\beta^3 \frac{\partial}{\partial \beta} + \beta^4 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \\ & = \frac{4}{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Denklem (46) yeniden düzenlenirse;

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \xi(\beta) + \frac{4}{\beta} \frac{\partial \xi(\beta)}{\partial \beta} + \left[\varepsilon - \frac{L(L+1)}{\beta^2} - \beta^2 - \frac{\beta_0^4}{\beta^4} - \frac{\lambda}{\beta^2} \right] \xi(\beta) = 0 \quad (47)$$

$\beta^2 = s$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d}{d\beta} = \frac{d}{ds} \cdot \frac{ds}{d\beta} = 2\beta \frac{d}{ds} = 2\sqrt{s} \frac{d}{ds} \quad (48)$$

$$\frac{d}{d\beta^2} = \frac{d}{d\beta} \left(\frac{d}{d\beta} \right) = 2\sqrt{s} \frac{d}{ds} \left(2\sqrt{s} \frac{d}{ds} \right) = 2\sqrt{s} \left[2 \cdot \frac{1}{2} s^{-1/2} \frac{d}{ds} + 2\sqrt{s} \frac{d^2}{ds^2} \right] \quad (49)$$

$$\frac{d^2}{d\beta^2} = 2 \frac{d}{ds} + 4s \frac{d^2}{ds^2} \text{ dönüşümler yapılırsa ve denklem düzenlenirse;}$$

$$4s \frac{d^2 \xi(s)}{d\beta^2} + 2 \frac{d\xi_L(s)}{ds} + \frac{4}{\sqrt{s}} 2\sqrt{s} \frac{d\xi(s)}{ds} + \left[\varepsilon - \frac{L(L+1)}{3s} - s - \frac{\beta_0^4}{s} - \frac{\lambda}{s} \right] \xi(s) = 0 \quad (50)$$

$$4s \frac{d^2 \xi(s)}{d\beta^2} + 10 \frac{d\xi_L(s)}{ds} + \left[\varepsilon - \frac{L(L+1)}{3s} - s - \frac{\beta_0^4}{s} - \frac{\lambda}{s} \right] \xi(s) = 0 \quad (51)$$

Denklem(51) 4s ile bölünerek yeniden yazılırsa;

$$\frac{d^2 \xi(s)}{d\beta^2} + \frac{5}{2s} \frac{d\xi_L(s)}{ds} + \frac{1}{4s^2} \left[\varepsilon s - \frac{L(L+1)}{3} - s^2 - \beta_0^4 - \lambda \right] \xi(s) = 0 \quad (52)$$

$$\frac{d^2 \xi(s)}{d\beta^2} + \frac{5}{2s} \frac{d\xi_L(s)}{ds} + \frac{1}{4s^2} \left[-s^2 + \varepsilon s - \frac{L(L+1)}{3} - \beta_0^4 - \lambda \right] \xi(s) = 0 \quad (53)$$

$\alpha = \frac{L(L+1)}{3} + \beta_0^4 + \lambda$ alınıp denklem yeniden yazılırsa;

$$\frac{d^2 \xi(s)}{ds^2} + \frac{5}{2s} \frac{d\xi_L(s)}{ds} + \frac{1}{4s^2} [-s^2 + \varepsilon s - \alpha] \xi(s) = 0 \quad (54)$$

Elde edilen denklem yapısı Nikiforov-Uvarov denklem yapısıyla uygun olmasından yararlanılarak çözüm bu metot üzerinden aranılacaktır.

Nikiforov-Uvarov Metodu;

$$\psi''(s) + \frac{\hat{T}(s)}{\sigma(s)} \psi'(s) + \frac{\hat{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \psi(s) = 0 \quad (55)$$

$$\psi(s) = \xi(s), \quad \hat{T}(s) = 5, \quad \sigma(s) = 2s, \quad \hat{\sigma}(s) = -s^2 + \varepsilon s - \alpha \quad (56)$$

$\sigma(s)$ ve $\hat{\sigma}(s)$ en fazla ikinci dereceden bir polinom

$\hat{T}(s)$ en fazla birinci dereceden bir polinom

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \hat{T}(s)}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \hat{T}(s)}{2}\right)^2 - \hat{\sigma}(s) + k\sigma(s)} \quad (57)$$

$$\pi(s) = \frac{2-5}{2} \pm \sqrt{\frac{2-5}{2} + s^2 - \varepsilon s + \alpha + k2s} \quad (58)$$

$$\pi(s) = \frac{-3}{2} \pm \sqrt{s^2 + s(2k - \varepsilon) + \frac{9}{4} + \alpha} \quad (59)$$

$\pi(s)$ 'nin bir polinom olması gerektiği için karekök içindeki ifadenin tam kare olması ve $\Delta = 0$ olmalıdır.

$$\Delta = (2k - \varepsilon)^2 - 4\left(\frac{9}{4} + \alpha\right) = 0 \quad (60)$$

$$4k^2 - 4\varepsilon k + \varepsilon^2 - 9 - 4\alpha = 0 \quad (61)$$

$$k^2 - \varepsilon k + \left[\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{9}{4} - \alpha\right] = 0 \quad (62)$$

$$k_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (63)$$

$$k_{\pm} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4\left(\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{9}{4} - \alpha\right)}}{2} \quad (64)$$

$$k_{\pm} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon^2 + 9 + 4\alpha}}{2} \quad (65)$$

$$k_{\pm} = \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{9 + 4\alpha}{2}} \quad (66)$$

k_+ için $\pi(s)$ bulunursa;

$$\pi(s) = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{s^2 + s \left(\varepsilon + 2 \sqrt{\frac{9}{4} + \alpha} - \varepsilon \right) + \frac{9}{4} + \alpha} \quad (67)$$

$$\pi(s) = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{s^2 + 2s \sqrt{\frac{9}{4} + \alpha} + \frac{9}{4} + \alpha} \quad (68)$$

$$\pi(s) = -\frac{3}{2} \pm \left[s + \sqrt{\frac{9}{4} + \alpha} \right] \quad (69)$$

k_- için $\pi(s)$ denklemi bulunursa;

$$\pi(s) = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{s^2 + s \left(\varepsilon - 2 \sqrt{\frac{9}{4} + \alpha} - \varepsilon \right) + \frac{9}{4} + \alpha} \quad (70)$$

$$\pi(s) = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{s^2 - 2s \sqrt{\frac{9}{4} + \alpha} + \frac{9}{4} + \alpha} \quad (71)$$

$$\pi(s) = -\frac{3}{2} \pm \left[s - \sqrt{\frac{9}{4} + \alpha} \right] \quad (72)$$

Denklemlerde negatif köklerin anlamı vardır, bundan dolayı negatif kökler alınır;

$$k_- = \frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\frac{9 + 4\alpha}{2}}, \quad \pi(s) = -\frac{3}{2} - \left[s - \sqrt{\frac{9}{4} + \alpha} \right] \quad (73)$$

$$\lambda = k + \pi'(s) \quad (74)$$

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\frac{9 + 4\alpha}{2}} - 1 \quad (75)$$

$$T(s) = \hat{T}(s) + 2\pi(s) \quad (76)$$

$$T(s) = 5 - 3 - 2 \left[s - \sqrt{\frac{9}{4} + \alpha} \right] \quad (77)$$

$$T(s) = -2 - 2 \left[s - \sqrt{\frac{9}{4} + \alpha} \right] \quad (78)$$

$$\lambda_n = -nT'(s) - \frac{n(n-1)}{2} \sigma''(s) \quad \sigma(s) = 2s \text{ ve } \sigma''(s) = 0 \quad (79)$$

$$\lambda_n = 2n \quad (80)$$

$$\lambda = \lambda_n \quad (81)$$

$$\frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} + \alpha} - 1 = 2n \quad (82)$$

$$\frac{\varepsilon}{2} = 2n + 1 + \sqrt{\frac{9}{4} + \alpha} , \quad \alpha = \frac{L(L+1)}{3} + \beta_0^4 + \lambda \text{ olduğu belirlenmiştir.}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} = 2n + 1 + \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{L(L+1)}{3} + \beta_0^4 + \lambda} \quad (83)$$

$$\varepsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E \text{ eşitliğinden } E = \frac{\hbar^2}{2B} \varepsilon \text{ olacaktır. Denklemden yerine yazılırsa,}$$

$$\frac{2B}{\hbar^2} E = 2n + 1 + \sqrt{\beta_0^4 + \frac{L(L+1)}{3} + \lambda + \frac{9}{4}} \quad (84)$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2B} \left[2n + 1 + \sqrt{\beta_0^4 + \frac{L(L+1)}{3} + \lambda + \frac{9}{4}} \right] \quad (85)$$

X(5) –D modeli için dalga fonksiyonu yazılırsa;

$\xi(s) = \phi(s)Y_n(s)$ önce ϕ bulunur, bunun için $\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)}$ bağıntısı kullanılır

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{-\frac{3}{2} - s + \sqrt{\frac{9}{4} + \alpha}}{2s} \quad (86)$$

$$\frac{1}{\phi(s)} \cdot \frac{d\phi(s)}{ds} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\frac{9}{4} + \alpha}}{2s}, \quad \int \frac{du}{u} = \ln u \quad (87)$$

$$\frac{d\phi(s)}{\phi(s)} = \left[-\frac{3}{4s} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\frac{9}{4} + \alpha}}{2s} \right] ds \quad (88)$$

$$\ln \phi(s) = -\frac{3}{4} \ln s - \frac{s}{2} + \frac{\sqrt{\frac{9}{4} + \alpha}}{2} \ln s \quad (89)$$

$$\phi(s) = s^{-3/4} \cdot e^{-s/2} \cdot s^{\sqrt{\frac{9}{4} + \alpha}/2} \quad (90)$$

$$Y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s) \rho(s)] \quad (91)$$

$$[\sigma(s) \rho(s)]' = \tau(s) \rho(s) \quad \rho(s); \text{Ağırlık fonksiyonu} \quad (92)$$

$$\sigma'(s) \cdot \rho(s) + \sigma(s) \cdot \rho'(s) = \tau(s) \rho(s) \quad (93)$$

$$\sigma'(s) + \sigma(s) \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} = \tau(s) \quad (94)$$

$$\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} = \frac{\tau(s) - \sigma'(s)}{\sigma(s)} \quad (95)$$

$$\tau(s) = 2 - 2 \left[s - \sqrt{\frac{9}{4} + \alpha} \right] \quad (96)$$

$$\sigma(s) = 2s, \quad \sigma'(s) = 2 \quad (97)$$

$$\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} = \frac{2 - 2 \left[s - \sqrt{\frac{9}{4} + \alpha} \right] - 2}{2s} \quad (98)$$

$$\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} = -1 + \frac{\sqrt{9/4 + \alpha}}{s} \quad (99)$$

$$\frac{d\rho(s)}{\rho(s)} = \left[-1 + \frac{\sqrt{9/4 + \alpha}}{s} \right] . ds \quad (100)$$

$$\ln \rho(s) = -s + \sqrt{9/4 + \alpha} \ln s \quad (101)$$

$$\rho(s) = e^{-s} s^{\sqrt{9/4 + \alpha}} \quad (102)$$

$$Y_n(s) = B_n e^s s^{-\sqrt{9/4 + \alpha}} \frac{d^n}{ds^n} \left[(2s)^n e^{-s} s^{\sqrt{9/4 + \alpha}} \right] \quad (103)$$

$$Y_n(s) = B_n 2^n e^s s^{-\sqrt{9/4 + \alpha}} \frac{d^n}{ds^n} \left[e^{-s} s^{\sqrt{9/4 + \alpha}} \right] \quad (104)$$

Laquerre Polinomu;

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k}) \quad (105)$$

$$s \rightarrow x \quad K \rightarrow \sqrt{\frac{9}{4} + \alpha} \quad \frac{1}{n!} = B_n 2^n \quad (106)$$

$$Y_n(s) = L_n^{\sqrt{\frac{9}{4}+\alpha}}(s) \quad (107)$$

$$\xi(s) = \phi(s) Y_n(s) \quad (108)$$

$$\xi(\beta) = s^{-\frac{3}{4}} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{2}} \cdot \beta^{\frac{\sqrt{\alpha+9/4}}{2}} L_n^{\sqrt{\alpha+9/4}}(s) \quad (109)$$

$\beta^2 = s$ olduğundan denklem yeniden düzenlenirse;

$$\xi(\beta) = \beta^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{2}} \cdot \beta^{\frac{\sqrt{\alpha+9/4}}{2}} L_n^{\sqrt{\alpha+9/4}}(\beta^2) \quad (110)$$

Dalga fonksiyonunun tüm durumları gerçekleştirilmesi için normalizasyon katsayısıyla çarpılması gerekir. Bu durumda denklem;

$$\xi(\beta) = C_N \beta^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{2}} \cdot \beta^{\frac{\sqrt{\alpha+9/4}}{2}} L_n^{\sqrt{\alpha+9/4}}(\beta^2) \quad (111)$$

Dalga fonksiyonunun normalizasyon katsayısını bulmak için;

$$\int_0^\infty \beta^4 \xi^2(\beta) d\beta = 1 \quad (112)$$

$$|C_N|^2 \int_0^\infty \beta^4 \beta^{-3} e^{-\beta^2} \beta^{2\sqrt{\alpha+9/4}} L_n^{\sqrt{\alpha+9/4}}(\beta^2) L_n^{\sqrt{\alpha+9/4}}(\beta^2) d\beta = 1 \quad (113)$$

$$|C_N|^2 \int_0^\infty \beta e^{-\beta^2} \beta^{2\sqrt{\alpha+9/4}} L_n^{\sqrt{\alpha+9/4}}(\beta^2) L_n^{\sqrt{\alpha+9/4}}(\beta^2) d\beta = 1 \quad (114)$$

$$\beta^2 = s \quad 2\beta d\beta = ds \quad \sqrt{\alpha + 9/4} = a \quad (115)$$

$$|C_N|^2 \int_0^\infty \sqrt{s} \cdot e^{-s} \cdot s^a L_n^a(s) L_n^a(s) \cdot \frac{ds}{2\sqrt{s}} = 1 \quad (116)$$

$$\frac{|C_N|^2}{2} \int_0^\infty e^{-s} \cdot s^a L_n^a(s) L_n^a(s) \cdot ds = 1 \quad (117)$$

$$\int_0^\infty e^{-x} s^\alpha L_m^\alpha(s) L_n^\alpha(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ r(1+\alpha) \binom{n+\alpha}{n}, & m = n \end{cases} \quad (118)$$

$$\frac{|C_N|^2}{2} r(1+\alpha) \binom{n+\alpha}{n} = 1 \quad (119)$$

$$C_N = \left[\frac{2}{r(1+\alpha) \binom{n+\alpha}{n}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (120)$$

$$\xi(\beta) = \left[\frac{2}{r(1+\alpha) \binom{n+\alpha}{n}} \right]^{\frac{1}{2}} \beta^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{2}} \cdot \beta^a \cdot L_n^a(\beta^2) \quad (121)$$

$$a = \sqrt{\alpha + 9/4}, \quad \alpha = \frac{L(L+1)}{3} + \beta_0^4 + \lambda \quad (122)$$

denklem değişken değişimlerine göre düşünülecektir.



4.BULGULAR

Çizelge 4.1. Gsb bandı için, farklı β_0 değerleri için X(5)-D model ve X(5) model enerji oranları tahmin sonuçları.

β_0	1	1.5	2	X(5)
L				
0	0	0	0	0
2	1.00	1.00	1.00	1.00
4	2.75	2.97	3.13	2.91
6	4.79	5.49	6.13	5.45
8	6.98	8.28	9.69	8.51
10	9.22	11.22	13.65	12.07
12	11.49	14.29	17.87	16.04
14	13.80	17.40	22.26	20.51
16	16.10	20.57	26.82	25.44
18	18.43	23.74	31.43	30.38
20	20.75	26.97	36.13	

Çizelge 4.2. β_1 bandı için, farklı β_0 değerleri için X(5)-D model ve X(5) model enerji oranları tahmin sonuçları.

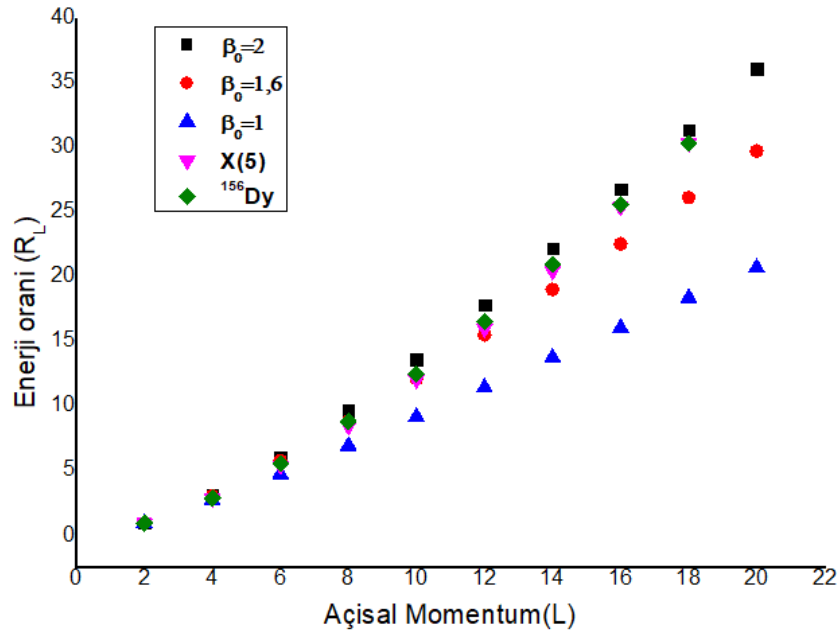
β_0	1	1.5	2	X(5)
L				
0	4.76	5.71	8.70	5.67
2	5.04	6.71	9.71	7.48
4	6.83	8.69	11.83	10.72
6	8.88	11.20	14.82	14.80
8	11.06	14.00	18.39	19.44
10	13.31	16.94	22.35	26.69
12	15.57	20.00	26.56	
14	17.88	23.11	30.96	
16	20.19	26.28	35.52	

18	22.51	29.45	40.13
20	24.83	32.69	44.83

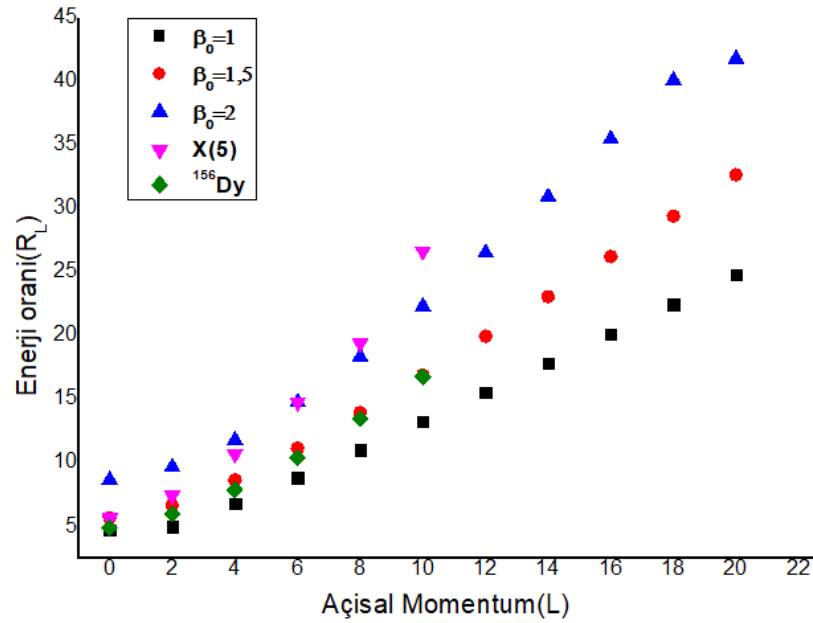
Çizelge 4.3. β_2 bandı için, farklı β_0 değerleri için X(5)-D model ve X(5) model enerji oranları tahmin sonuçları.

β_0	1	1.5	2	X(5)
L				
0	8.16	11.43	17.38	14.17
2	9.17	12.43	18.39	16.78
4	10.92	14.40	20.52	21.34
6	12.96	16.91	23.52	26.83
8	15.14	19.71	27.08	33.10
10	17.39	22.66	31.04	
12	19.65	25.71	35.26	
14	21.96	28.82	39.65	
16	24.26	32.00	44.22	
18	26.59	35.17	48.83	
20	28.92	38.40	53.52	

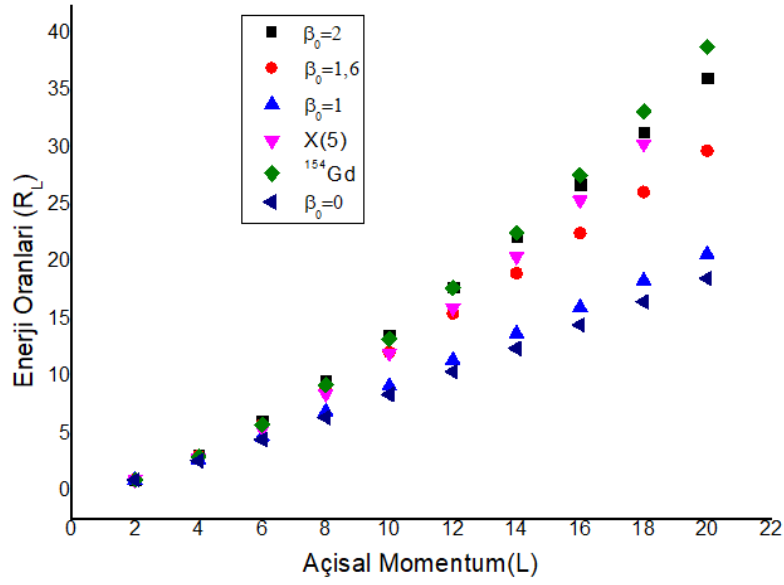
Enerji denklemi(Denklem 85) kullanılarak farklı bant aralıklarındaki enerji oranları hesaplandığında; Çizelge 4.1, Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3 ortaya çıkar. Bu çizelgedeki değerler özel bir grafik programı yardımıyla çizilir.



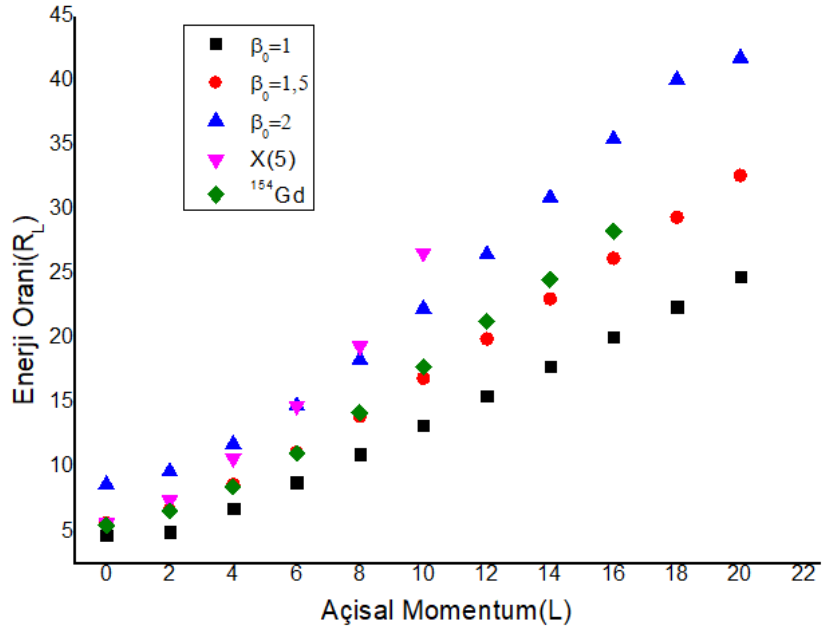
Şekil 4.1. X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin gsb bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ^{156}Dy deneysel verilerle karşılaştırılması



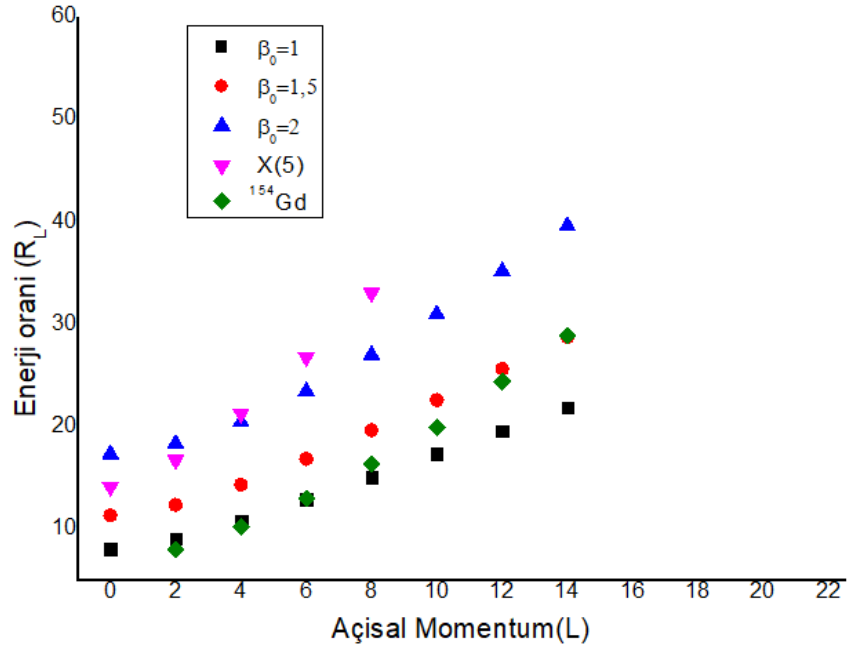
Şekil 4.2. X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin β_1 bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ^{156}Dy deneysel verilerle karşılaştırılması.



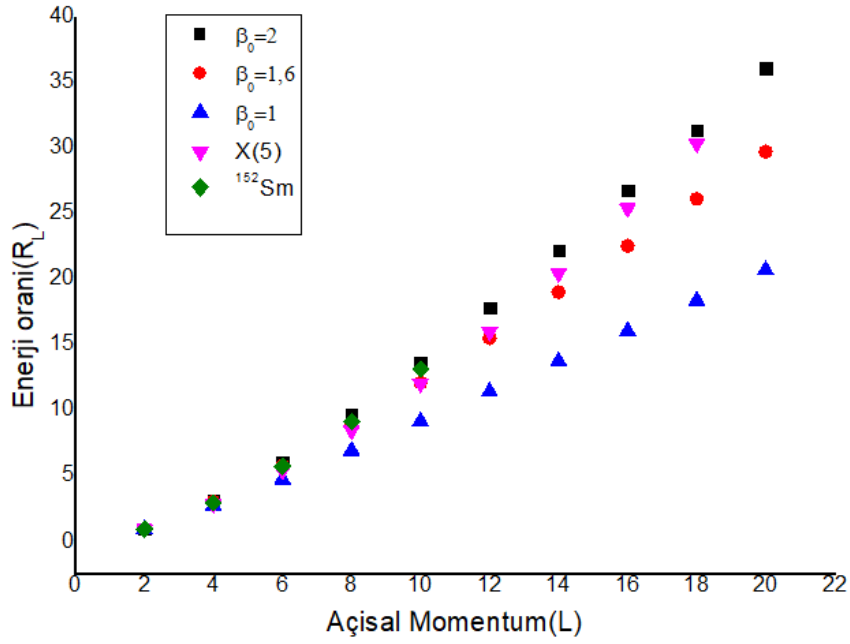
Şekil 4.3. X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin gsb bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ^{154}Gd deneysel verilerle karşılaştırılması.



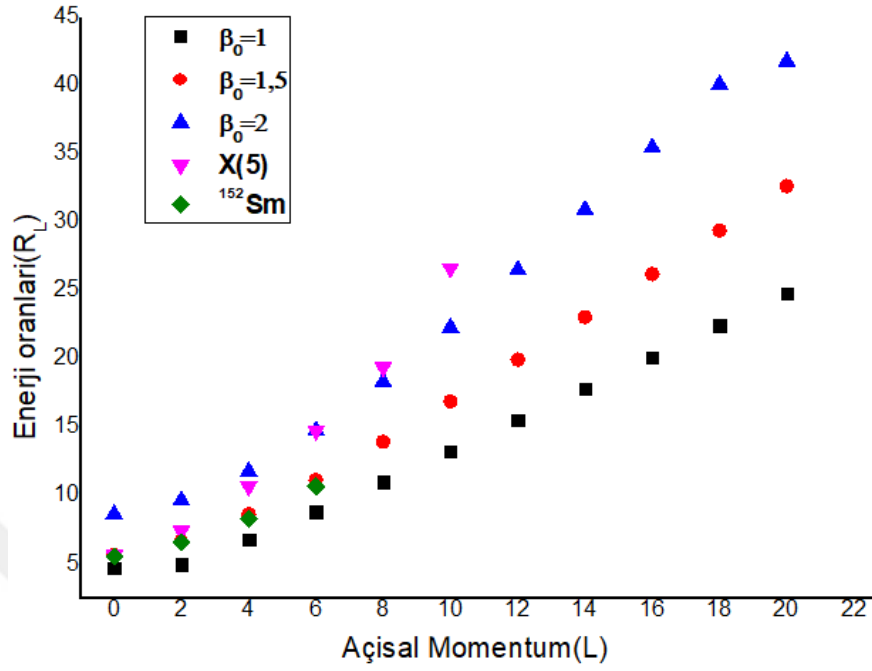
Şekil 4.4. X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin β_1 bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ^{154}Gd deneysel verilerle karşılaştırılması.



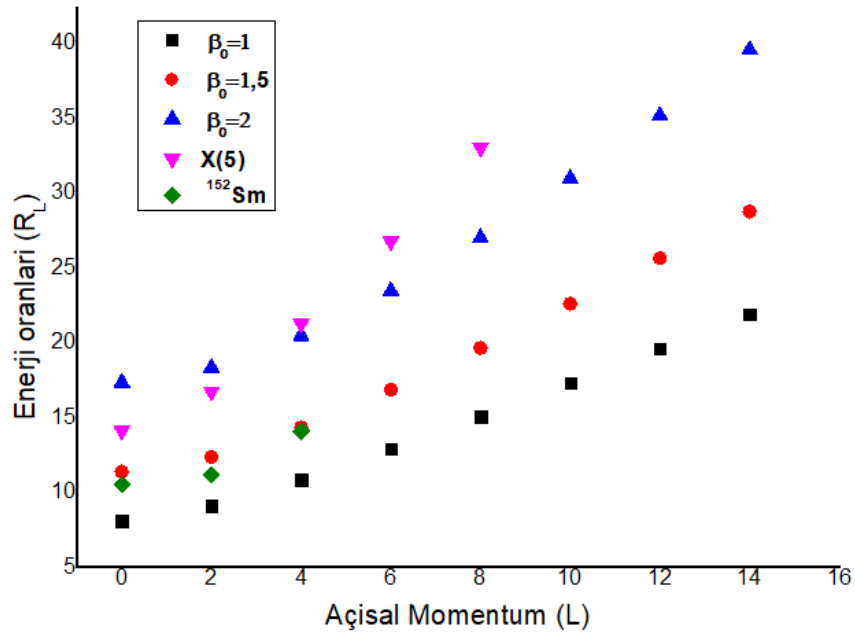
Şekil 4.5. X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin β_2 bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ^{154}Gd deneysel verilerle karşılaştırılması.



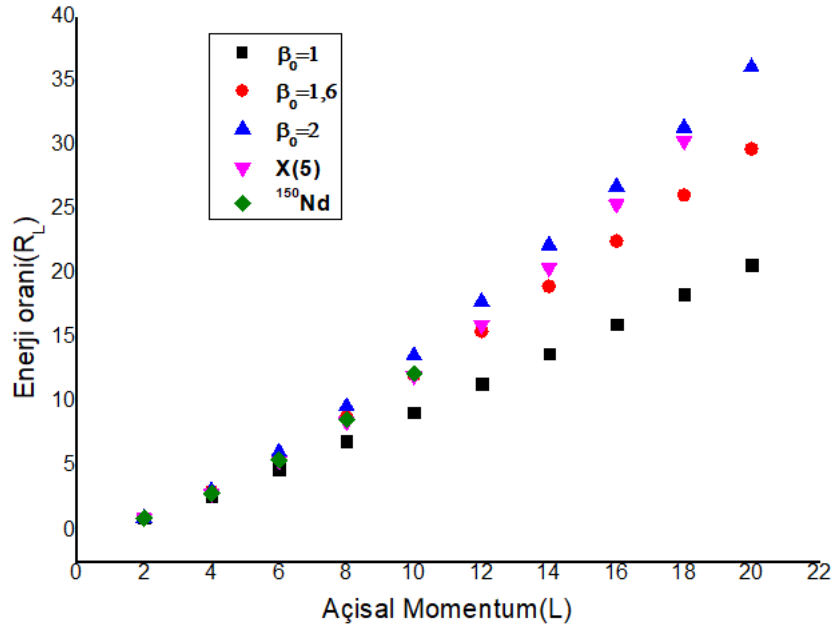
Şekil 4.6. X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin gsb bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ^{152}Sm deneysel verilerle karşılaştırılması.



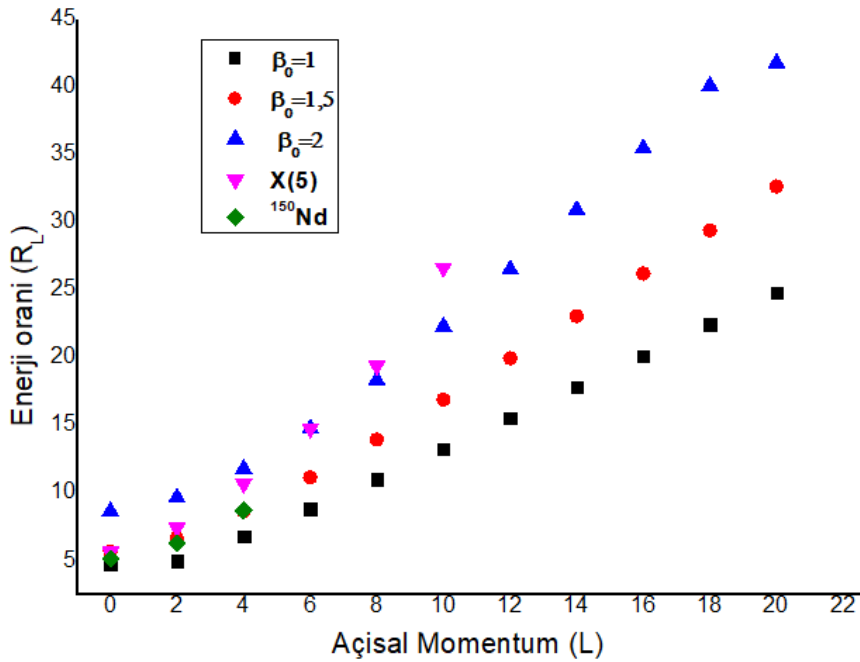
Şekil 4.7. X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin β_1 bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ^{152}Sm deneysel verileriyle karşılaştırılması.



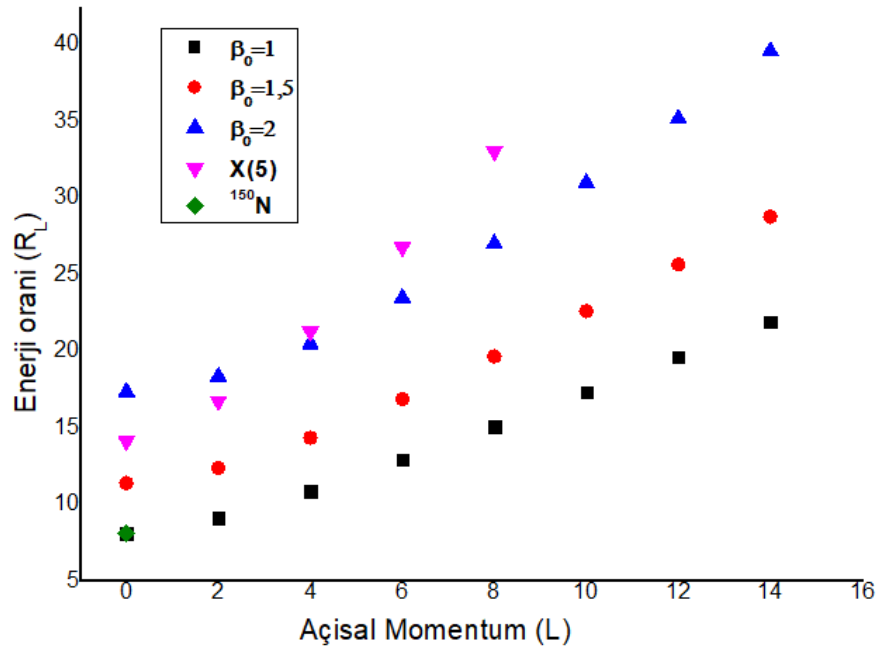
Şekil 4.8. X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin β_2 bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ^{152}Sm deneysel verileriyle karşılaştırılması.



Şekil 4.9. X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin gsb bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ^{150}Nd deneysel verilerle karşılaştırılması.



Şekil 4.10. X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin β_1 bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ^{150}Nd deneysel verilerle karşılaştırılması.



Şekil 4. 11. X(5)-D model ve X(5) model tahminlerinin β_2 bandı için farklı β_0 değerleri ile elde edilen enerji oranlarının ^{150}Nd deneysel verilerle karşılaştırılması.

5.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada $U(5)$ ve $SU(3)$ dinamik simetrileri arasındaki geçiş bölgesinde yer alan çekirdekleri açıklayan ve Bohr hamiltonyeninde $\gamma \approx 0^\circ$ seçilerek elde edilen $X(5)$ kritik nokta simetrisinin Davidson potansiyeli seçilerek özel bir çözümü, Nikiforov-Uvarov yöntemi kullanılarak elde edildi. Enerji öz değer ve dalga fonksiyonu denklemleri bulundu. Bu çözüm $X(5)$ -D modeli olarak adlandırılmıştır.

Açısal momentum sayısı 4 olan enerji seviyenin, açısal momentumu 2 olan enerji seviyesine olan oranı $R_{4/2}$ olarak ifade edilir ve Denklem 2' deki gibi hesaplanır. Bu oranın değerleri küresel yapıdaki çekirdekler için 2.0, γ -kararsız deforme çekirdekler için 2.5, deforme rotor çekirdekler için 3.33, olarak bulunmuştur. $X(5)$ -D modeli için elde edilen temel seviye bandı(gsb), β_1 ve β_2 bantlarına ait enerji seviyeleri $\beta_0 = 0, 1, 1.5$ ve 2 değerleri için hesaplanmış olup, Çizelge 4.1, Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3 'de $X(5)$ model tahminleri ile birlikte verilmektedir. $X(5)$ modeli ile $X(5)$ -D modeli tahminlerinin temel enerji seviyesinde(gsb) $\beta_0 = 1.5$ değerinde uyumlu olduğu görülürken, β_1 ve β_2 enerji seviyelerinde $\beta_0=2$ değerinde daha uyumlu olduğu görülmektedir. $X(5)$ model tahmininde $R_{4/2}$ oranı 2.91 iken $X(5)$ -D model tahminlerinde ise $\beta_0 = 1$ için 2.75, $\beta_0 = 1.5$ iken 2.97, $\beta_0 = 2$ iken 3.13 değerine sahip olduğu görülmüştür.

Şekil 4.1 de ^{156}Dy 'nin $n=0$ için, gsb bandı deneysel verileri $X(5)$ -D çözümü ve $X(5)$ çözümüyle kıyaslanmıştır. Grafiğe bakıldığında deneysel verilerle $X(5)$ model tahminlerinin daha uyumlu olduğu görülmektedir. $X(5)$ -D modelde ise, $L=2,4,6,8$ değerlerinde $\beta_0=1.6$ değeriyle uyumlu iken, daha büyük L değerlerinde $\beta_0=2$ değerinde uyumlu olduğu görülmektedir.

Şekil 4.2 de ^{156}Dy 'nin $n=1$ için, β_1 bandı için deneysel veriler alınmış $X(5)$ ve $X(5)$ -D model tahminleri çözümleriyle kıyaslanmıştır. Bu bantta $X(5)$ -D model tahminlerinin daha uyumlu olduğu görülmektedir. 5 adet deneysel veri bulunmuş olup $L=10$ değerinde en uyumlu değer yakalanmıştır. Bu seviyede deneysel verilerinin $X(5)$ model tahmini ile daha az uyum içerdiği görülmektedir. ^{156}Dy çekirdeğinin β_2 bandı için deneysel veri bulunamadığı için herhangi bir kıyaslama yapılamamıştır.

Şekil 4.3 de ^{154}Gd çekirdeğinin $n=0$ gsb bandı deneysel verileri $X(5)$ ve $X(5)$ -D model tahminleri çözümleriyle kıyaslanmıştır. Bu bantta $X(5)$ -D model tahminlerini $\beta_0 = 2$ alındığında $L=2,4,6,8,10,12,14$ açıl momentum değeri için oldukça uyumlu olduğu görülmüştür. Çalışmadaki en uyumlu çekirdek ve seviye bu bantta yakalanmıştır.

Şekil 4.4 de ^{154}Gd çekirdeğinin $n=1$ yani β_1 bandı için deneysel veriler alınmış $X(5)$ ve $X(5)$ -D model tahminleri çözümleriyle kıyaslanmıştır. Bu çekirdekte $X(5)$ -D model tahminleri $X(5)$ e göre daha tutarlı olduğu görülmüştür. $\beta_0 = 1.5$ değeri alındığında $L=0,2,4,6,8$ seviyelerinin oldukça uyumlu olduğu görülmüştür.

Şekil 4.5 de ^{154}Gd çekirdeğinin $n=2$ β_2 bandı için deneysel veriler alınmış $X(5)$ ve $X(5)$ -D model tahminleri kıyaslanmıştır. Bu enerji seviyesinde $\beta_0 = 1$ değeri ile uyum yakalanmıştır. Bu seviyede $L= 6$ değerinde $X(5)$ -D model tahminiyle uyumlu olduğu görülmüştür. Bu seviyede $X(5)$ model tahminleri deneysel verilerden uzaklaşmaktadır.

Şekil 4.6 da ^{152}Sm çekirdeğinin $n=0$, gsb değerleri incelenmiştir. Deneysel verilerle $X(5)$ ve $X(5)$ -D model tahmin verileri kıyaslanmıştır. $X(5)$ -D model tahmininde $\beta_0 = 2$ değerinde $L=2,4,6,8$ enerji düzeylerinde uyum sağlandığı görülmüştür. Deneysel verilerin 5 adet olmasından ötürü $X(5)$ ve $X(5)$ -D model arasında çok fazla kıyaslama yapılamamıştır.

Şekil 4.7 de ^{152}Sm çekirdeğinin $n=1$, β_1 bandı değerleri incelenmiştir. Deneysel verilerle X(5) ve X(5)-D model tahmin verileri kıyaslanmıştır. 4 adet deneysel veri bulunmuş olup bu değerler X(5)-D model tahmininde $\beta_0=1.5$ değerinde çözümle uyumlu olduğu görülmüştür. X(5) model tahmin verileri deneysel verilerle daha az uyushmaktadır.

Şekil 4.8 de ^{152}Sm çekirdeğinin $n=2$, β_2 bandı değerleri incelenmiştir. Deneysel verilerle X(5) ve X(5)-D model tahmin verileri ile kıyaslanmıştır. 3 adet deneysel veri bulunmuş olup bu değerler X(5)-D model tahmini verileri için $\beta_0=1.5$ değerinde çözümle uyumlu olduğu görülmüştür. $L=4$ değerinde en yakın sonuç elde edilmiştir. X(5) model tahmini verileri deneysel verilerden uzaklaşmaktadır.

Şekil 4.9 da ^{150}Nd çekirdeğinin $n=0$, gsb değerleri incelenmiştir. Deneysel verilerle X(5) ve X(5)-D model tahmin verileri kıyaslanmıştır. 5 adet deneysel veri bulunmuş olup bu değerler X(5)-D model tahmini verileri için $\beta_0=1.6$ değerinde çözümle uyumlu olduğu görülmüştür. Deneysel verilerin az olması X(5) ve X(5)-D modelleri arasında mukayese yapmaya yeterli değildir.

Şekil 4.10 da ^{150}Nd çekirdeğinin $n=1$, β_1 bandı değerleri incelenmiştir. Deneysel verilerle X(5) ve X(5)-D model tahmin verileri ile kıyaslanmıştır. 3 adet deneysel veri bulunmuş olup bu değerler X(5)-D model tahmini için $\beta_0=1.5$ değerinde çözümle uyumlu olduğu görülmüştür. $L=0,2,4$ değerlerinde oldukça yüksek bir uyum yakalanmıştır. Bu çekirdek için X(5)-D model X(5) modele göre daha iyi sonuçlar elde etmiştir.

Şekil 4.11 de ^{150}Nd çekirdeğinin $n=2$, β_2 değerleri incelenmiştir. Deneysel verilerle X(5) ve X(5)-D model tahmin verileri ile kıyaslanmıştır. Bu bantta 1 adet deneysel veri bulunmuş olup X(5)-D model tahmini için $\beta_0=1$ değerindeki çözümle uyumlu olduğu görülmüştür ancak verinin az olması bu seviyede yorum yapmamızı kısıtlamaktadır.

X(5)-D model tahminleri incelediğimiz çekirdeklerin çoğunda X(5) model tahminlerine göre deneysel verilerle daha uyumlu olduğu görülmektedir. Özellikle gsb bandındaki uyum diğerlerine göre daha fazladır. β_1 ve β_2 bandında elde edilen veriler ise X(5) model denkleminde elde edilenlere göre daha çok uyumludur.

X(5)-D model tahminleri farklı β_0 değerleri ele alınarak incelenbildiği için pek çok çekirdekte ve enerji seviyesinde uyumlu sonuçlar elde etme imkânı sunmaktadır. Başka bir ifade ile X(5)-D model tahminleri X(5) model tahminlerine göre daha çok çekirdeği açıklayabilmektedir.

X(5)-D model tahminlerinin geneline bakıldığında üst enerji seviyelerine çıkıldığında $\beta_0=1$ için daha tutarlı sonuçlar verdiğini, alt seviyelerde $\beta_0=1.5$ ve $\beta_0=2$ için tutarlı olduğu görülmüştür. Ayrıca çekirdek ağırlıkları arttıkça, X(5)-D model tahminlerinin $\beta_0=2$ değerinde, hafif çekirdeklerde ise $\beta_0=1$ değerinde daha tutarlı sonuçlar elde edilmiştir.

Nükleer kuvvetlerinin doğası gereği yani karmaşık yapıda olmaları bizleri bu yapıların incelenmesinde farklı yaklaşımlara itmektedir. Çekirdeklerin içerdikleri nükleon sayılarına göre farklı potansiyeller seçilerek incelenmeleri daha uygun olacaktır.

6. KAYNAKLAR

- Berkdemir, C., 2009. Application Of The Nikiforov-Uvarov Method In Quantum Mechanics. The Pennsylvania State University, 6 p. USA. .
- Bohr, A., 1952. The Coupling of Nuclear Surface Oscillations to the Motion on Individual Nucleons. Danske Videnskabernes Selskab Matematisk-fysiske Meddelelser, 26, 1-40.
- Bohr, A. ve Mottelson B. R., 1953. Collective And Individual Particle Aspects of Nuclear Structure. Second Edition, Dan. Mat. Fys. Medd. 27, No:16, 174 p, Denmark.
- Bonatsos, D., Georgoudis, P. E. ve Minkov, N., 2013. Physical Review. C 88, .2-8
- Bonatsos, D., Lenis, D., Mccutchan, EA., Petrellis, D. ve Yigitoglu I., 2007. Exactly separable version of X(5) and related models. Physical Letters Sect B Nucl Elem Part High-Energy Phys. 5–6.
- Bonatsos, D., Lenis, D., Petrellis, D., Terziev, PA. ve Yigitoglu I. 2006. X(3) An exactly separable γ -rigid version of the X(5) critical point symmetry. AIP Conf Proc. 899:123–4.
- Casten, R. F., 1990. Nuclear structure from a simple perspective. NewYork Oxford, Oxford University Press, 391p.
- Casten, RF., 2006. Shape phase transitions and critical-point phenomena in atomic nuclei. Nature Physics. 2(12):811–20.
- Casten, R. F. ve Zamfir N. V., 1993. Valence Correlation Schemes and New Signatures of Nuclear Structure: A Simple Global Phenomenology for B(E2) values. Physical Review Letters, 70 (4)
- Cejnar, P. ve Jolie J., 2009. Quantum Phase Transitions in the Interacting Boson Model. Progress in Particle and Nuclear Physics, 62, 210-256.
- Davidson, P. M. 1932. Eigenfunctions for Calculating Electronic Vibrational Intensities. Proceedings of the Royal Societia, 135(827), 459-473.
- F. Iachello Center for Theoretical Physics, Sloane Physics Laboratory, Yale University, New Haven, Connecticut 06520-8120 (Received 12 December 2000; published 12 July 2001)
- Fortunato, L., 2005. Solutions of the Bohr Hamiltonian a compendium. Eur Physical J. 26(SUPPL. 1):1–30.
- Fortunato, L., De Baerdemacker, S. ve Heyde, K., 2006. Solution of the Bohr Hamiltonian for soft triaxial nuclei. Physical Review, C74, 014310.
- Fortunato, L. ve Vitturi, A., 2003. J.Phys.G:Nucl.Part.Phys. 29 1341-1349.
- Fortunato, L. ve Vitturi, A., 2004. New Analytic solutions of the collective Bohr Hamiltonian for a β -Soft, γ -Soft axial rotor. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, Volume 30, Number 5.

- Iachello, F. ve Levine, R.D., 1995. Algebraic theory of molecules. Oxford University Press., Oxford, England s.149-152
- Iachello, F. ve Arima, A., 1987. The interacting Boson Model, Cambridge University Press, Cambridge, England
- Krane, Kenneth S. Introductory nuclear physics II. Title 1987 USA çeviri Şarer Başar Palme Yayıncılık 2006. Ankara s.128-142
- Nikiforov, A.V. ve Uvarov, V.B., 1988. Special functions of mathematical physics, Birkhauser, Basel.
- Rowe, D. J. ve Bahri C., 1998. Rotation–Vibrational Spectra of Diatomic Molecules and Nuclei with Davidson interactions. Journal Physics A, 31, 4947-4961.
- Yigitoglu, I. ve Bonatsos D. 2011. Bohr Hamiltonian with Davidson potential for Triaxial Nuclei. Physical Review C, 83(014303),
- Yigitoglu, I. ve Gokbulut, M., 2018. Atom Çekirdeğinde Kritik Nokta Simetrilerini Bohr Hamiltonyeninin γ -Katı Çözümleri İle Araştırılması(Doktora Tezi), Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tokat.
- Yigitoglu, I ve Uçar, B., 2018. Bohr Hamiltonyeninin $\gamma = 30^\circ$ için Kratzer Potansiyeli İle Çözümü(Y.Lisans Tezi), Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tokat.
- Yigitoglu, I. ve Turan, T., 2018. Nikiforov-Uvarov Yöntemi Kullanılarak X(3) Ve X(5) Modeli İçin Bohr Hamiltonyeninin Kratzer Potansiyeli İle Analitik Çözümü(Y.Lisans Tezi), Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tokat.