

T. C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YAKINLIK GAMMA YAKIN HALKALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAKİ ÇOKAKOĞLU

DANIŞMAN
DOÇ. DR. MUSTAFA UÇKUN

ADİYAMAN, 2024

ÖZET

YAKINLIK GAMMA YAKIN HALKALAR

Baki ÇOKAKOĞLU

Yüksek Lisans Programı

Matematik Anabilim Dalı / Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

Adıyaman Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Eylül/2024, Sayfa: 53

Danışman: Doç. Dr. Mustafa UÇKUN

Bu tezin birinci bölümünde, araştırmanın amacı vurgulanmış ve öneminden bahsedilmiştir. Ayrıca, bu çalışmanın amacına uygun olarak literatür özeti sunulmuş ve bu çalışmada kullanılan materyal ile yöntem açıklanmıştır.

İkinci bölümde, yakın kümeler, yakın yaklaşım uzayları ve bazı genelleştirilmiş halkalar ile ilgili bazı temel bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, yakınlık cebirsel yapılar ile alakalı bazı sonuçlar incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, yakınlık gamma yakın halka kavramı ile yakın zayıf kalan sınıflarının yakınlık gamma yakın halkası kavramı tanımlanmış ve bazı özgün sonuçlar sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Yakın yaklaşım uzayı; Yakınlık grup; Yakınlık halka; Yakın halka; Gamma halka.

ABSTRACT

NEARNESS GAMMA NEAR RINGS

Baki ÇOKAKOĞLU

Master's Program

**Department of Mathematics / Department of Algebra and Number Theory
Adıyaman University, Graduate Education Institute, September/2024, Page: 53
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa UÇKUN**

In the first chapter of this thesis, the aim of the research is emphasized and its importance is mentioned. In addition, a summary of the literature is presented by the purpose of this thesis, and the material and method used in this thesis are explained.

In the second chapter, some basic information about near sets, near approximation spaces, and some generalized rings are given.

In the third chapter, some results related to nearness algebraic structures are examined.

In the fourth chapter, the concept of nearness gamma near ring with the concept of nearness gamma near ring of the near weak classes are defined, and some original results are presented.

Keywords: Nearness approximation space; Nearness group; Nearness ring; Near ring; Gamma ring.

TEŞEKKÜR

Tez konumu belirleyen ve bu tezi hazırlarken bilgisini ve tecrübesini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Mustafa UÇKUN'a minnet ve şükranlarımı sunarım. Bu tezde verilen orijinal sonuçların kontrol edilmesinde desteğini ve teknik yardımlarını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Ebubekir İNAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Baki ÇOKAKOĞLU



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Adıyaman Üniversitesi tarafından kullanılan *Bilimsel İntihal Tespit Programı*'yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Baki ÇOKAKOĞLU

İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI.....	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1. Yakın Kümeler.....	4
2.2. Yakın Yaklaşım Uzayı.....	6
2.3. Bazı Genelleştirilmiş Halkalar.....	9
3. YAKINLIK CEBİRSEL YAPILAR	14
3.1. Yakınlık Gruplar	14
3.2. Yakınlık Halkalar	16
3.3. Yakınlık Yakın-Halkalar	19
3.4. Yakınlık Gamma Halkalar	24
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ YAKINLIK HALKALAR.....	31
4.1. Yakınlık Gamma Yakın Halkalar	31
4.2. Yakın Zayıf Kalan Sınıflarının Yakınlık Gamma Yakın Halkası.....	39
5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER.....	49
KAYNAKÇA.....	50
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathcal{O}$	: Algılanabilen nesnelerin kümesi
$\wp(\mathcal{O})$	: $\mathcal{O}$ nun kuvvet kümesi
X	: Örnek nesnelerin kümesi
$\mathcal{F}$	: Çıkarım fonksiyonlarının kümesi
φ	: Çıkarım fonksiyonu
Φ	: Nesne tanımlaması
$\sim_B$	: Ayırt edilemezlik bağıntısı
$[x]_B$	: Yakınlık sınıfı
ξ_B	: Ayırışım kümesi
$N_r(B)$	: Ayırışımın kümesi
$N_r(B)^* X$	: X kümesinin $N_r(B)$ -üst yaklaşımı
$Q(X)$	: X in küme tanımlaması
$X \underset{\Phi}{\cap} Y$	: X ile Y nin tanımsal arakesiti
G	: Yakınlık grup
S	: Yakınlık halka
Γ	: Toplamsal (yakınlık) grup
M	: Yakınlık yakın-halka
W	: Yakınlık Γ -halka
N	: Yakınlık Γ -yakın halka
$\approx_\ell$	: Sol zayıf denklik bağıntısı
$\approx_r$	: Sağ zayıf denklik bağıntısı
$N /_w S$	: Yakınlık bölüm Γ -yakın halkası

1. GİRİŞ

Bu tezde, yakınlık gruplar ve yakınlık halkalar gibi yakın yaklaşım uzayında cebirsel yapılar incelenmiş, mevcut literatür göz önünde bulundurularak yeni yakınlık cebirsel yapılar geliştirilmiştir. İlk aşamada, yakın-halka kavramı ele alınmış ve bu yapının bir genelleştirmesi olarak yakın yaklaşım uzayında yakın-halkalar araştırılmıştır. İkinci aşamada da, Barnes anlamında gamma halka kavramı temel alınarak, yakın yaklaşım uzayında gamma halkanın genelleştirilmesi amaçlanmıştır.

Tezin birinci bölümünde, çalışmanın amacı vurgulanmış ve önemine değinilmiştir. Ayrıca, araştırmaya uygun olarak literatür özeti sunulmuş ve kullanılan materyal ile yöntem açıklanmıştır. İkinci bölümde, yakın kümeler, yakın yaklaşım uzayı ve genelleştirilmiş halkalar hakkında temel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde, yakınlık cebirsel yapılarıyla alakalı esas kavramlar incelenmiş ve elde edilen önemli sonuçlar ifade edilmiştir. Dördüncü bölümde, yakınlık gamma yakın halka kavramının ve yakın zayıf kalan sınıflarının yakınlık gamma yakın halkası kavramının tanımları verilmiş, elde edilen özgün sonuçlar paylaşılmıştır.

Küme kavramı, 1874 yılında Cantor tarafından ele alınmış olup, belirsizliklerin algılanması için önemli bir araçtır.

Zadeh [1] belirsizlikleri modellemek amacıyla fuzzy alt küme kavramını geliştirmiş, Rosenfeld [2] ise bu kavramı kullanarak fuzzy cebirsel yapıların öncüsü olan fuzzy alt grubu tanımlamıştır. Bu gibi çalışmalar, fuzzy cebirin gelişmesinde önemli bir rol oynamıştır. Bu konuda daha fazla bilgi için [3,4] deki kitaplar incelenebilir.

Pawlak [5] yaklaşımlı küme teorisini belirsizlik problemini çözmek için geliştirmiştir. Bu kuram hem teorik alanlarda hem de çeşitli mühendislik alanlarında oldukça fazla ilgi çekmiştir [6-8].

Peters [9] yaklaşımlı kümenin bir genellemesi olarak yakın küme kavramını literatüre kazandırmıştır. Bu teori hakkında daha çok bilgi için [10-13] numaralı kaynaklar dikkate alınabilir.

Bu bağlamda, klasik küme teorisinin belirsizlik durumlarını modellemede yetersiz kaldığı alanları tamamlayan matematiksel nesneler fuzzy küme, yaklaşımlı küme ve yakın

küme kavramlarıdır. Matematik ve mühendislik dünyasında bu teorilerin önemli bir yeri vardır.

Yakın küme teorisinde yakınlık grup ve yakınlık halka gibi önemli cebirsel yapılar İnan ve diğer matematikçiler tarafından çalışılmıştır [14-19].

Dickson sadece bir yönlü dağılma özelliğine sahip cisimlerin varlığını göstermiş ve bu tür cisimleri yakın-cisim olarak adlandırmıştır [20,21]. Daha sonra ilk defa Zassenhaus [22] yakın-halka kavramını ilk defa kullanmış ve tüm sonlu yakın-cisimleri incelemiştir.

Nobusawa [23] klasik halka kavramını genelleştirerek gamma halkasını geliştirmiştir. Barnes [24] bu tanımı daha kullanışlı hale getirmek için yeniden tanımlamıştır. Luh ve Kyuno gibi birçok matematikçi gamma halkasının yapısını araştırmaya devam etmiştir [25,26].

Uçkun ve Genç, yakınlık halka kavramının bir genellemesi olarak yakınlık yakın-halka kavramını geliştirmiştir. Bundan başka alt yakınlık yakın-halkasının, yakın zayıf kalan sınıflarının yakınlık yakın-halkasının ve yakınlık yakın-halka homomorfizmasının bazı temel özelliklerini araştırmıştır [27,28].

Uçkun ve Erol, yakınlık halka kavramının bir genellemesi olarak yakınlık gamma halka kavramını geliştirmiş ve alt yakınlık gamma halkasının, yakınlık gamma idealinin bazı temel özelliklerini incelemiştir [29,30]. Ayrıca İnan ve Uçkun, yakınlık gamma halkası üzerinde zayıf denklik bağıntısını ve bu bağıntının yakınlık gamma halkasında belirttiği yakın zayıf kalan sınıfını tanımlamış olup, yakın zayıf kalan sınıflarının yakınlık gamma halkasının ve yakınlık gamma homomorfizmasının bazı temel sonuçlarını araştırmıştır [31].

Çokakoğlu ve Uçkun, yakınlık gamma halka kavramının bir genellemesi olarak yakınlık gamma yakın halka kavramını geliştirmiştir. Bundan başka alt yakınlık gamma yakın halkasının ve yakınlık gamma idealinin bazı temel özelliklerini incelemiştir [32].

Yukarıda bahsedilen cebirsel yapılar ele alındığında, yeni sonuçlar elde etmek amacıyla; yakın küme teorisinde yakınlık grup, yakınlık halka, yakınlık yakın-halka ve yakınlık gamma halka gibi cebirsel yapılar ile ilgili olarak temin ettiğimiz, özellikle [14-19] numaralı kaynaklar öncelikli olmak üzere, bilindik bilimsel yöntemler çerçevesinde akademik kitaplar, tezler ve makaleler incelenmiştir. Tez konumuzun içeriğine uygun

olarak veriler derlenmiş ve ortaya çıkan bilgiler doğrultusunda arzulanan özgün sonuçlar elde edilmiştir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde yakın kümeler, yakın yaklaşım uzayı ve bazı genelleştirilmiş halkalar (yakın-halkalar ve gamma halkalar) incelenmiştir.

2.1. Yakın Kümeler

Bu kısımda çıkarım fonksiyonu, algılanabilir sistem, iki kümenin yakınlığı ve temel yaklaşım uzayı kavramları verilmiştir [9-13].

Tanım 2.1.1. Algılanabilen nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden reel değerli fonksiyona bir çıkarım fonksiyonu denir.

Tanım 2.1.2. $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin bir sonlu kümesi ve $\mathcal{F}$ de çıkarım fonksiyonlarının bir kümesi olmak üzere, $(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ ye bir algılanabilir sistem denir.

Tablo 2.1. Tanımlama sembolleri

Sembol	Anlamı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathcal{O}$	Algılanabilen nesnelerin kümesi
$\wp(\mathcal{O})$	$\mathcal{O}$ nun kuvvet kümesi
X	Örnek nesnelerin kümesi
$\mathcal{F}$	Çıkarım fonksiyonlarının kümesi
B	$B \subseteq \mathcal{F}$
L	Tanım uzunluğu
i	$i \leq L, L \in \mathbb{Z}^+$
φ_i	$\varphi_i : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ çıkarım fonksiyonu
Φ	$\Phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^L$ nesne tanımlaması
$\Phi(a)$	$\Phi(a) = (\varphi_1(a), \varphi_2(a), \varphi_3(a), \dots, \varphi_i(a), \dots, \varphi_L(a))$

Matematiksel birtakım tanımlamalar yardımıyla bilgisayar sistemleri tarafından nesneler algılanabilir. Çıkarım fonksiyonları dikkate alınarak teşkil edilen Φ fonksiyonu yardımı ile bir $a \in X$ nesnesinin tanımı belirlenebilir. $B \subseteq \mathcal{F}$, örnek nesnelerin

tanımlanması ile ilgili çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $\varphi_i : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $\varphi_i \in B$ olsun. φ_i çıkarım fonksiyonları için $\varphi_i(a)$ değerleri göz önüne alınırsa $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^L$ fonksiyonu, tanım uzunluğu $|\Phi| = L$ olan

$$\Phi(a) = (\varphi_1(a), \varphi_2(a), \varphi_3(a), \dots, \varphi_i(a), \dots, \varphi_L(a))$$

bir nesne tanımlamasıdır (Tablo 2.1).

Tanım 2.1.3. $B \subseteq \mathcal{F}$ ve $a, a' \in \mathcal{O}$ olsun. $i \leq |\Phi|$ ve $\Delta_{\varphi_i} = |\varphi_i(a') - \varphi_i(a)|$ olmak üzere,

$$\{(a, a') \mid \forall \varphi_i \in B, \Delta_{\varphi_i} = 0\}$$

ile tanımlanan bağıntıya $\mathcal{O}$ da bir ayırt edilemezlik bağıntısı denir ve " $\sim_B$ " ile temsil edilir.

Tanım 2.1.4. $B \subseteq \mathcal{F}$ ve $a, a' \in \mathcal{O}$ olmak üzere,

$$a \sim_{\{\varphi_i\}} a' \left(\Delta_{\varphi_i} = 0 \right)$$

olacak şekilde en az bir $\varphi_i \in B$ var ise a ve a' nesneleri birbirine minimal yakındır denir.

Tanım 2.1.5. $B \subseteq \mathcal{F}$ ve $X, X' \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Bu durumda $a \in X$, $a' \in X'$ için $a \sim_{\{\varphi_i\}} a'$ olacak şekilde $\varphi_i \in B$ var ise X ve X' kümeleri birbirine yakındır denir.

Tanım 2.1.6. $X \subseteq \mathcal{O}$ ve $a, a' \in X$ olsun. a, a' nesneleri yakın ise X kümesine kendisi ile yakın küme (X kümesinin yansımali yakınlığı) denir.

Tanım 2.1.7. $X \subseteq \mathcal{O}$ ve $a \in X$ olsun. O zaman

$$[a]_B = \{a' \in \mathcal{O} \mid a \sim_B a'\}$$

kümesine $a \in X$ nesnesinin yakınlık sınıfı denir.

Teorem 2.1.8. $\xi_B = \mathcal{O} / \sim_B = \{[a]_B \mid a \in \mathcal{O}\}$ ayrışımındaki her yakınlık sınıfı bir yakın kümedir.

Teorem 2.1.9. ξ_B ayrışım kümesi bir yakın kümedir.

Tanım 2.1.10. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_B)$ yapısına bir temel yaklaşım uzayı denir.

2.2. Yakın Yaklaşım Uzayı

Bu kısımda yakın yaklaşım uzayı, bir kümenin üst yaklaşımı kavramları ile ilgili örnekler ve bazı temel özellikler ifade edilmiştir. Ayrıca, tanımsal tabanlı küme işlemleri ele alınmıştır [9-13].

$\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin bir sonlu kümesi ve $\mathcal{F}$ de çıkarım fonksiyonlarının bir kümesi olsun.

Tablo 2.2. Bağıntı ve ayrışım sembolleri

Sembol	Anlamı
B_r	$r \leq B $
$\sim_{B_r}$	B_r ye göre tanımlanan ayırt edilemezlik bağıntısı
$[a]_{B_r}$	$\{a' \in \mathcal{O} \mid a \sim_{B_r} a'\}$ yakınlık sınıfı
$\mathcal{O} \sim_{B_r}$	$\{[a]_{B_r} \mid a \in \mathcal{O}\}$ ayrışım (bölüm) kümesi
$\xi_{\mathcal{O}, B_r}$	$\xi_{\mathcal{O}, B_r} = \mathcal{O} \sim_{B_r}$
$N_r(B)$	$N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O}, B_r} \mid B_r \subseteq B\}$ ayrışım kümesi
ν_{N_r}	$\nu_{N_r} : \wp(\mathcal{O}) \times \wp(\mathcal{O}) \rightarrow [0,1]$ yakınlık fonksiyonu

$B_r \subseteq B$ kümesinin kardinalitesi r olmak üzere, " $\sim_{B_r}$ ", B_r kümesine göre kısıtlanmış olan bir ayırt edilemezlik bağıntısıdır. B_r nin her seçimi, " $\sim_{B_r}$ " bağıntısının $\mathcal{O}$ nun farklı bir ayrışımının tanımlanmasına neden olur. Bu seçim $\binom{|B|}{r}$ olarak farklı biçimde yapılabilir.

$\mathcal{O}$, " $\sim_{B_r}$ " bağıntısı ile ikişer ikişer ayrık olan $[a]_{B_r}$ yakınlık sınıflarına ayrılabilir.

Bu yakınlık sınıflarının kümesi $\mathcal{O}/\sim_{B_r}$ bölüm kümesi olup, $\xi_{\mathcal{O},B_r} = \mathcal{O}/\sim_{B_r}$ dir. $r \leq |B|$ olmak üzere, $N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O},B_r} \mid B_r \subseteq B\}$ de ayrışımaların bir ailesidir.

$\nu_{N_r} : \wp(\mathcal{O}) \times \wp(\mathcal{O}) \rightarrow [0,1]$ yakınlık fonksiyonu, B_r deki çıkarım fonksiyonları yardımıyla özellikleri belirlenen nesnelerin kümeleri arasındaki yakınlık derecesini temsil eder (Tablo 2.2).

Tanım 2.2.1. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ yapısına bir yakın yaklaşım uzayı denir.

Teorem 2.2.2. $N_r(B)$ ailesi bir yakın kümedir.

Tanım 2.2.3. $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin $N_r(B)$ -üst yaklaşımı

$$N_r(B)^* X = \bigcup_{[a]_{B_r} \cap X \neq \emptyset} [a]_{B_r}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.2.4. $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin $N_r(B)$ -üst yaklaşımı bir yakın kümedir.

Tanım 2.2.5. " $\sim_{B_r}$ ", $\mathcal{O}$ da bir ayırt edilemezlik bağıntısı olmak üzere, her $a, b \in X$ için

$$[a]_{B_r} [b]_{B_r} = [ab]_{B_r}$$

ise " $\sim_{B_r}$ " bağıntısına tamdır denir.

Teorem 2.2.6. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ bir yakın yaklaşım uzayı ve $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- (i) $X \subseteq N_r(B)^*(X)$,
- (ii) $N_r(B)^*(X \cup Y) = N_r(B)^*(X) \cup N_r(B)^*(Y)$,

- (iii) $X \subseteq Y$ ise $N_r(B)^*(X) \subseteq N_r(B)^*(Y)$,
- (iv) $N_r(B)^*(X \cap Y) \subseteq N_r(B)^*(X) \cap N_r(B)^*(Y)$.

Teorem 2.2.7. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ bir yakın yaklaşım uzayı ve $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere,

$$N_r(B)^*(X) N_r(B)^*(Y) \subseteq N_r(B)^*(XY)$$

dir.

Algılanabilir nesnelerin oluşturduğu kümelerde nesne tanımlamalarının ele alınması, tanımsal tabanlı küme işlemlerinin başlangıç noktasıdır. Genellikle V boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere, Φ nesne tanımlaması fonksiyonu $\Phi: \mathcal{O} \rightarrow V^L$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2.8. $X \subseteq \mathcal{O}$ ve $\Phi(a) \in V^L$ olmak üzere,

$$\mathcal{Q}(X) = \{\Phi(a) \mid a \in X\}$$

kümesine, X in küme tanımlaması denir.

Tanım 2.2.9. $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere,

$$X \cup_{\Phi} Y = \{c \in X \cup Y \mid \Phi(c) \in \mathcal{Q}(X) \text{ veya } \Phi(c) \in \mathcal{Q}(Y)\}$$

kümesine X ile Y nin tanımsal birleşimi denir.

Tanım 2.2.10. $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere,

$$X \cap_{\Phi} Y = \{c \in X \cup Y \mid \Phi(c) \in \mathcal{Q}(X) \text{ ve } \Phi(c) \in \mathcal{Q}(Y)\}$$

kümesine X ile Y nin tanımsal arakesiti denir.

Tanım 2.2.11. $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere,

$$X \setminus_{\Phi} Y = \{a \in X \mid \Phi(a) \notin \mathcal{Q}(Y)\}$$

kümesine X in Y den tanımsal farkı denir.

2.3. Bazı Genelleştirilmiş Halkalar

Bu kısımda yakın-halka teorisi ile alakalı tüm bilgiler Pilz'in [33] *Near-Rings* adlı kitabından alınmıştır.

Tanım 2.3.1. Bir $N \neq \emptyset$ kümesi üzerinde "+" ve "." ikili işlemleri tanımlansın. O zaman

(N_1) $(N, +)$ bir gruptur (abel olması gerekmez).

(N_2) $(N, \cdot)$ bir yarı-gruptur.

(N_3) Her $n, n', n'' \in N$ için $(n + n') \cdot n'' = n \cdot n'' + n' \cdot n''$ tür.

özellikleri geçerli ise N ye bir yakın-halka denir.

Not 2.3.2. Yukarıdaki tanım göz önüne alındığında, (N_3) ten dolayı yakın-halka kavramı yerine sağ yakın-halka kavramı kullanılabilir. Ayrıca, (N_3) ün yerine her $m, m', m'' \in N$ için $m \cdot (m' + m'') = m \cdot m' + m \cdot m''$ özelliği yazılırsa, o halde sol yakın-halka kavramı tanımlanır. Bu kısım boyunca sağ yakın-halka kavramı kullanılmıştır.

Not 2.3.3. Genel olarak $(N, +)$ grubunun birim elemanı, N yakın-halkasının sıfırı olarak ele alınır.

Örnek 2.3.4.

(1) $(\Sigma, +)$ bir grup olmak üzere, $M(\Sigma)$ da Σ dan Σ ya olan tüm fonksiyonların kümesi olsun. Bu halde $(M(\Sigma), +, \circ)$ bir yakın-halkadır.

(2) $(\Sigma, +)$ bir grup olmak üzere, $M_c(\Sigma) = \{g \in M(\Sigma) \mid g \text{ sabit}\}$ olsun. O zaman $(M_c(\Sigma), +, \circ)$ bir yakın-halkadır.

Lemma 2.3.5. N bir yakın-halka olmak üzere, aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- (i) Her $n \in N$ için $0_N \cdot n = 0_N$ dir.
- (ii) Her $n, n' \in N$ için $-(n \cdot n') = (-n) \cdot n'$ dür.

Not 2.3.6. N bir yakın-halka olsun. Bu durumda her $m, m' \in N$ için $m \cdot 0_N = 0_N$ ve $-(m \cdot m') = m \cdot (-m')$ eşitlikleri geçerli olmayabilir.

Tanım 2.3.7. N bir yakın-halka olsun. O halde

- (1) $S_0 = \{m \in N \mid m \cdot 0_N = 0_N\}$ kümesine N nin sıfır-simetrik kısmı denir.
- (2) $S_c = \{m \in N \mid m \cdot 0_N = m\}$ kümesine N nin sabit kısmı denir.

Not 2.3.8. S_0 ve S_c , N de tanımlanan ikili işlemlere göre birer yakın-halkadır.

Tanım 2.3.9. N bir yakın-halka olsun. Bu durumda

- (1) $N = S_0$ ise N ye sıfır-simetriktir denir.
- (2) $N = S_c$ ise N ye sabittir denir.

Not 2.3.10. Her $m, m' \in N$ için

$$w \cdot (m + m') = w \cdot m + w \cdot m'$$

özellği geçerli ise $w \in N$ elemanına dağılmalı eleman denir. Ayrıca, tüm dağılmalı elemanların kümesi de N_w ile temsil edilir.

Tanım 2.3.11. N bir yakın-halka olsun. O halde

- (1) $(N, +)$ abel ise N ye abeldir denir.
- (2) $(N, \cdot)$ değişmeli ise N ye değişmelidir denir.
- (3) $N = N_w$ ise N ye dağılmalıdır denir.
- (4) $N, 0_N$ nin sıfırdan farklı bölenlerine sahip değilse N ye tamdır denir.

Örnek 2.3.12.

- (1) $(\Lambda, +)$ bir abel grup ise $(M(\Lambda), +)$ bir abel gruptur. Böylece $M(\Lambda)$ bir abel yakın-halkadır.
- (2) $(\Lambda, +)$ grubu ve Λ da her $\lambda, \mu \in \Lambda$ için $\lambda * \mu = \lambda$ biçiminde tanımlanan " $*$ " işlemi dikkate alınırsa, $(\Lambda, +, *)$ bir tam yakın-halkadır.

Tanım 2.3.13. N bir yakın-halka ve $K \subseteq N$ olsun. O zaman

- (1) $K, (N, +)$ nın bir alt grubu,
- (2) $K \cdot K \subseteq K$

ise K ya N nin bir alt yakın-halkası denir.

Tanım 2.3.14. N bir yakın-halka ve $L \subseteq N$ olsun. Bu durumda

- (1) $L, (N, +)$ nın bir normal alt grubu,
- (2) $L \cdot N \subseteq L$,
- (3) Her $m, m' \in N$ ve her $\ell \in L$ için $m \cdot (m' + \ell) - m \cdot m' \in L$

özellikleri geçerli ise L ye N nin bir ideali denir ve $L \triangleleft N$ ile temsil edilir.

Sadece (1) ve (2) özelliklerini sağlayan L ye N nin bir sağ ideali denir ($L \triangleleft_r N$) ve sadece (1) ve (3) özelliklerini sağlayan L ye N nin bir sol ideali denir ($L \triangleleft_l N$).

Not 2.3.15. N bir yakın-halka olmak üzere, N nin triviyal idealleri $\{0_N\}$ ve N dir.

Not 2.3.16. N bir yakın-halka ve $L \triangleleft N$ olsun. O halde $m, m' \in N$ için

$$m \equiv m' \pmod{L} : \Leftrightarrow m - m' \in L$$

ile tanımlanan " $\equiv$ " bağıntısı bir kongrüans bağıntısıdır. O zaman " $\equiv$ " bağıntısı bir denklik bağıntısı olup, $m \in N$ için ilgili kalan sınıfı

$$\bar{m} = m + L = \{m' \mid m' \equiv m \pmod{L}\}$$

dir. Ayrıca, tüm kalan sınıflarının kümesi

$$N/L = \{\bar{m} \mid m \in N\}$$

ile temsil edilir.

Teorem 2.3.17. N bir yakın-halka ve $L \triangleleft N$ olsun. Bu durumda N/L üzerinde tanımlanan

$$(m+L) + (m'+L) = (m+m') + L,$$

$$(m+L) \cdot (m'+L) = (m \cdot m') + L$$

toplama ve çarpma işlemlerine göre N/L bir yakın-halkadır.

Tanım 2.3.18. $(N/L, +, \cdot)$ yakın-halkasına, N nin L idealine göre bölüm yakın-halkası denir.

Gamma halkalar ile ilgili ilk çalışma, 1964 yılında Nobusawa [23] tarafından yapılmıştır. 1966 yılında Barnes [24] te, Nobusawa anlamında gamma halka kavramını aşağıda verildiği gibi yeniden tanımlamıştır.

Tanım 2.3.19. $W = \{w, w', w'', \dots\}$ ve $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ toplamsal abel gruplar olsun. O halde

$$\begin{aligned} _ : W \times \Gamma \times W &\rightarrow W \\ (w, \beta, w') &\mapsto w\beta w' \end{aligned}$$

işlemi dikkate alındığında, her $w, w', w'' \in W$ ve her $\beta, \gamma \in \Gamma$ için

$$(\Gamma_1) \quad (w + w')\beta w'' = w\beta w'' + w'\beta w'',$$

$$(\Gamma_2) \quad w\beta(w' + w'') = w\beta w' + w\beta w'',$$

$$(\Gamma_3) \quad w(\beta + \gamma)w' = w\beta w' + w\gamma w',$$

$$(\Gamma_4) \quad (w\beta w')\gamma w'' = w\beta(w'\gamma w'')$$

özellikleri geçerli ise W ya (Barnes anlamında) bir Γ -halka denir.

Örnek 2.3.20. G ve G' toplamsal abel gruplar olmak üzere,

$$W = Hom(G, G') = \{f : G \rightarrow G' \mid f \text{ homomorfizma}\}$$

ve

$$\Gamma = Hom(G', G) = \{\beta : G' \rightarrow G \mid \beta \text{ homomorfizma}\}$$

olsun. Bu durumda $_ : W \times \Gamma \times W \rightarrow W$, $(f, \beta, g) \mapsto f\beta g$ işlemi göz önüne alındığında, W (Barnes anlamında) bir Γ -halkadır.

Tanım 2.3.21. W bir Γ -halka olsun. O halde

(1) $L, (W, +)$ nın bir alt grubu,

(2) $W\Gamma L \subseteq L (L\Gamma W \subseteq L)$,

ise L ye W nun bir sol (sağ) ideali denir. L, W nun hem bir sol hem de bir sağ ideali ise L ye W nun bir ideali denir.

Gamma-halka kavramından daha genel olan gamma-yakın-halka kavramı da, Satyanarayana [34] tarafından aşağıda belirtildiği gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.3.22. Aşağıdaki özellikler geçerli ise $(W, +, \Gamma)$ ya bir gamma yakın halka denir:

(ΓN_1) $(W, +)$ bir gruptur (abel olması gerekmez),

(ΓN_2) Γ , her $\beta \in \Gamma$ için $(W, +, \beta)$ bir (sağ) yakın-halka olacak biçimde W da tanımlı ikili işlemlerin boş olmayan bir kümesidir,

(ΓN_3) Her $u, v, w \in W$ ve her $\beta, \gamma \in \Gamma$ için $(u\beta v)\gamma w = u\beta(v\gamma w)$ dur.

3. YAKINLIK CEBİRSEL YAPILAR

Bu bölümde yakın yaklaşım uzayında tek işlemli cebirsel yapılardan yakınlık grubu ve yakın yaklaşım uzayında iki işlemli cebirsel yapılardan yakınlık halka, yakınlık yakınlık halka ve yakınlık gamma halka incelenmiştir.

3.1 Yakınlık Gruplar

Bu kısımda yakın yaklaşım uzayında tek işlemli cebirsel yapılardan yakınlık grubu dikkate alınmıştır. Burada yakınlık grubu ve alt yakınlık grubu kavramları ve ilgili sonuçlar verilmiştir. [14-18].

Tanım 3.1.1. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ bir yakın yaklaşım uzayı ve $G \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Her $g, g', g'' \in G$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa G ye yakın yaklaşım uzayında bir grup (kısaca yakınlık grup) denir:

$$(YG_1) \quad g \cdot g' \in N_r(B)^* G \text{ dir.}$$

$$(YG_2) \quad (g \cdot g') \cdot g'' = g \cdot (g' \cdot g'') \text{ özelliği } N_r(B)^* G \text{ de sağlanır.}$$

$$(YG_3) \quad g \cdot 1_G = 1_G \cdot g = g \text{ olacak şekilde bir } 1_G \in N_r(B)^* G \text{ (yakın birim elemanı) vardır.}$$

$$(YG_4) \quad g \cdot h = h \cdot g = 1_G \text{ olacak şekilde bir } h = g^{-1} \in G \text{ (} g \text{ nin yakın tersi) vardır.}$$

Not 3.1.2. Tanım 3.1.1 de (YG_1) ve (YG_2) şartları $N_r(B)^* G$ de geçerli olmak zorundadır. Bazı durumlarda bu şartlar $\mathcal{O} \setminus N_r(B)^* G$ kümesinde geçerli olabilir. O halde G bir yakınlık grup olamaz.

Tanım 3.1.3. G bir yakınlık grup olsun. Her $g, g' \in G$ için $g \cdot g' = g' \cdot g$ özelliği $N_r(B)^* G$ de sağlanıyorsa G ye değişmelidir denir.

Lemma 3.1.4. G bir yakınlık grup olsun. Bu durumda

$$(i) \quad G \text{ nin bir tek yakın birim elemanı vardır } (1_G \in N_r(B)^* G).$$

(ii) Her $g \in G$ için $g \cdot h = h \cdot g = 1_G$ olacak şekilde bir tek $h = g^{-1} \in G$ vardır.

(iii) Her $g \in G$ için $(g^{-1})^{-1} = g$ dir.

(iv) Her $g, g' \in G$ için $(g \cdot g')^{-1} = g'^{-1} \cdot g^{-1}$ dir.

Tanım 3.1.5. $G \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık grup ve $T \subseteq G$ olsun. T , G deki ikili işlem ile bir yakınlık grup ise T ye G nin bir alt yakınlık grubu denir.

Not 3.1.6. G yakınlık grubunun yalnızca bir tane triviyal alt yakınlık grubu vardır ki, o da G dir. Ayrıca, $\{1_G\}$ nin G nin alt yakınlık grubu olması için gerek ve yeter koşul, $1_G \in G$ olmasıdır.

Teorem 3.1.7. $G \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık grup, $T \subseteq G$ ve $N_r(B)^* T$ bir grupoid olsun. O zaman T nin G nin bir alt yakınlık grubu olması için gerek ve yeter koşul, her $t \in T$ için $t^{-1} \in T$ olmasıdır.

Teorem 3.1.8. $G \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık grup, $T_1, T_2 \subseteq G$ ve $N_r(B)^* T_1$, $N_r(B)^* T_2$ birer grupoid olsun. Bu durumda T_1, T_2 G nin iki alt yakınlık grubu ve

$$(N_r(B)^* T_1) \cap (N_r(B)^* T_2) = N_r(B)^* (T_1 \cap T_2)$$

ise $T_1 \cap T_2$ G nin bir alt yakınlık grubudur.

Tanım 3.1.9. $X \subseteq \mathcal{O}$ üzerinde tanımlı olan bir bağıntı, yansımalı ve simetrik ise o bağıntıya bir zayıf denklik bağıntısı denir.

Teorem 3.1.10. $G \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık grup ve T , G nin bir alt yakınlık grubu olsun. $G /_w T$, G nin T ile belirlenen tüm yakın zayıf kalan sınıflarının kümesi olmak üzere,

$$(N_r(B)^* G) /_w T \subseteq N_r(B)^* (G /_w T)$$

ise $G /_w T$, her $g, g' \in G$ için

$$gT \odot g'T = (g \cdot g')T$$

ile tanımlı işleme göre bir yakınlık gruptur.

3.2 Yakınlık Halkalar

Bu kısımda yakın yaklaşım uzayında iki işlemli cebirsel yapılardan yakınlık halkası ele alınmıştır. Burada yakınlık halkası, alt yakınlık halkası ve yakınlık ideali kavramları ve bazı sonuçlar verilmiştir [17,19].

Tanım 3.2.1. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ bir yakın yaklaşım uzayı ve $S \subseteq \mathcal{O}$ bir abel toplamsal yakınlık grubu olsun. Her $k, \ell, m \in S$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa S ye yakın yaklaşım uzayında bir halka (kısaca yakınlık halka) denir:

- (NH_1) $k \cdot \ell \in N_r(B)^* S$,
- (NH_2) $(k \cdot \ell) \cdot m = k \cdot (\ell \cdot m)$ özelliği $N_r(B)^* S$ de sağlanır,
- (NH_3) Aşağıdaki özellikler $N_r(B)^* S$ de sağlanır:
 - $(k + \ell) \cdot m = k \cdot m + \ell \cdot m$,
 - $k \cdot (\ell + m) = k \cdot \ell + k \cdot m$.

Bundan başka,

- (NH_4) Her $k, \ell \in S$ için $k \cdot \ell = \ell \cdot k$ ise S ye bir değişmeli yakınlık halka,
- (NH_5) Her $k \in S$ için $k \cdot 1_S = 1_S \cdot k = k$ olacak şekilde $1_S \in N_r(B)^* S$ elemanı mevcut ise S ye bir birimli yakınlık halka denir.

Bir S yakınlık halkasında $(NH_1)-(NH_3)$ şartları $N_r(B)^* S$ de sağlanmak zorundadır. S deki elemanlara sonlu tane işlem uygulandığında elde edilen eleman $N_r(B)^* S$ ye ait olmayabilir.

Lemma 3.2.2. Yakın yaklaşım uzayında her halka bir yakınlık halkadır.

Lemma 3.2.3. $S \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık halka ve $0_S \in S$ olsun. Her $k, \ell \in S$ için $k \cdot 0_S, 0_S \cdot k \in S$ ise

- (i) $k \cdot 0_S = 0_S \cdot k = 0_S$,
- (ii) $k \cdot (-\ell) = (-k) \cdot \ell = -(k \cdot \ell)$,
- (iii) $(-k) \cdot (-\ell) = k \cdot \ell$ dir.

Tanım 3.2.4. S bir yakınlık halka ve K , S nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. K , S deki işlemler ile bir yakınlık halka ise K ya S nin bir alt yakınlık halkası denir.

Teorem 3.2.5. $S \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık halka, $K \subseteq S$ ve $N_r(B)^* K$ hem bir toplamsal grupoid hem de bir çarpımsal grupoid olsun. O zaman K nın S nin bir alt yakınlık halkası olması için gerek ve yeter koşul, her $k \in K$ için $-k \in K$ olmasıdır.

Teorem 3.2.6. $S \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık halka, $K_1, K_2 \subseteq S$ ve $N_r(B)^* K_1, N_r(B)^* K_2$ birer toplamsal grupoid ve çarpımsal grupoid olsun. Bu durumda K_1, K_2 S nin iki alt yakınlık halkası ve

$$(N_r(B)^* K_1) \cap (N_r(B)^* K_2) = N_r(B)^* (K_1 \cap K_2)$$

ise $K_1 \cap K_2$ S nin bir alt yakınlık halkasıdır.

Sonuç 3.2.7. S bir yakınlık halka ve S nin alt yakınlık halkalarının boş olmayan bir ailesi $\{K_i \mid i \in \Delta\}$ olsun. O halde $N_r(B)^* K_i$ ler S deki işlemler ile birlikte birer grupoid olmak üzere,

$$\bigcap_{i \in \Delta} (N_r(B)^* K_i) = N_r(B)^* \left(\bigcap_{i \in \Delta} K_i \right)$$

ise $\bigcap_{i \in \Delta} K_i$, S nin bir alt yakınlık halkasıdır.

Tanım 3.2.8. $S \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık halka ve $L \subseteq S$ olsun. Her $k, \ell \in L$ ve her $s \in S$ için

- (1) $k + \ell \in N_r(B)^* L,$
- (2) $-\ell \in L,$
- (3) $s \cdot \ell \in N_r(B)^* L \left(\ell \cdot s \in N_r(B)^* L \right)$

ise L ye S nin bir sol (sağ) yakınlık ideali denir. L hem bir sol hem de bir sağ yakınlık ideali ise L ye S nin bir yakınlık ideali denir.

Not 3.2.9. S yakınlık halkasının yalnızca bir tane triviyal yakınlık ideali vardır ki, o da S nin kendisidir.

Teorem 3.2.10. $S \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık halka, $L_1, L_2 \subseteq S$ ve $N_r(B)^* L_1, N_r(B)^* L_2$ birer toplamsal grupoid ve çarpımsal grupoid olsun. Bu durumda L_1, L_2 S nin iki yakınlık ideali ve

$$\left(N_r(B)^* L_1 \right) \cap \left(N_r(B)^* L_2 \right) = N_r(B)^* (L_1 \cap L_2)$$

ise $L_1 \cap L_2$, S nin bir yakınlık idealidir.

Sonuç 3.2.11. S bir yakınlık halka ve S nin yakınlık ideallerinin boş olmayan bir ailesi $\{L_i \mid i \in \Delta\}$ olsun. O zaman $N_r(B)^* L_i$ ler S deki işlemler ile birlikte birer grupoid olmak üzere,

$$\bigcap_{i \in \Delta} \left(N_r(B)^* L_i \right) = N_r(B)^* \left(\bigcap_{i \in \Delta} L_i \right)$$

ise $\bigcap_{i \in \Delta} L_i$, S nin bir yakınlık idealidir.

Teorem 3.2.12. $S \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık halka ve K , S nin bir alt yakınlık halkası olsun. $S /_w K$, S nin K ile belirlenen tüm yakın zayıf kalan sınıflarının kümesi olmak üzere,

$$\left(N_r(B)^* S \right) /_{\approx} \subseteq N_r(B)^* (S /_{\approx})$$

ise $S /_w K$, her $s, t \in S$ için

$$(s+K) \oplus (t+K) = (s+t) + K,$$

$$(s+K) \odot (t+K) = (s \cdot t) + K$$

ile tanımlı işlemlerle birlikte bir yakınlık halkadır.

3.3 Yakınlık Yakın-Halkalar

Bu kısımda yakın yaklaşım uzayında iki işlemli cebirsel yapılardan yakınlık yakın-halkası ele alınmıştır. Burada yakınlık yakın-halkası, alt yakınlık yakın-halkası ve yakınlık ideali kavramları ile ilgili örnekler ve bazı sonuçlar verilmiştir [27,28].

Tanım 3.3.1. $M \subseteq \mathcal{O}$ bir toplamsal yakınlık grubu olsun. Her $k, \ell, m \in M$ için aşağıdaki şartlar geçerli ise M ye yakın yaklaşım uzayında bir yakın-halka (kısaca yakınlık yakın-halka) denir:

$$(YN_1) \quad k \cdot \ell \in N_r(B)^* M,$$

$$(YN_2) \quad (k \cdot \ell) \cdot m = k \cdot (\ell \cdot m) \text{ özelliği } N_r(B)^* M \text{ de sağlanır,}$$

$$(YN_3) \quad (k + \ell) \cdot m = k \cdot m + \ell \cdot m \text{ özelliği } N_r(B)^* M \text{ de sağlanır.}$$

Not 3.3.2. Yukarıdaki tanım göz önüne alındığında, (YN_3) gereğince yakınlık yakın-halka kavramı yerine yakınlık sağ yakın-halka kavramı kullanılabilir. Ayrıca, (YN_3) ün yerine her $k, \ell, m \in M$ için $k \cdot (\ell + m) = k \cdot \ell + k \cdot m$ özelliği yazılırsa, o zaman yakınlık sol yakın-halka kavramı tanımlanır. Bu kısım boyunca yakınlık sağ yakın-halka kavramı kullanılmıştır.

Not 3.3.3. Bir M yakınlık yakın-halkasında $(YN_1) - (YN_3)$ şartları $N_r(B)^* M$ de sağlanmak zorundadır. M deki elemanlara sonlu tane işlem uygulandığında elde edilen eleman $N_r(B)^* M$ ye ait olmayabilir. Genel olarak $(M, +)$ yakınlık grubunun birim elemanı, M yakınlık yakın-halkasının sıfırı olarak ele alınır.

Lemma 3.3.4. Her yakın-halka bir yakınlık yakın-halkadır.

Lemma 3.3.5. Her yakınlık halka bir yakınlık yakın-halkadır.

Örnek 3.3.6. $\mathcal{O} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve çıkarım fonksiyonlarının kümesi $B = \{\varphi_1, \varphi_2\} \subseteq \mathcal{F}$ olsun.

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \rightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\},$$

$$\varphi_2 : \mathcal{O} \rightarrow V_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

çıkartım fonksiyonları Tablo 3.1 deki gibi tanımlansın.

Tablo 3.1. $\mathcal{O}$ da tanımlanan çıkartım fonksiyonları

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
φ_1	α_1	α_1	α_1	α_2	α_2	α_2
φ_2	β_1	β_2	β_2	β_3	β_3	β_3

$\mathcal{O}$ üzerinde toplama ve çarpma işlemleri Tablo 3.2 ve Tablo 3.3 teki gibi olsun.

Tablo 3.2. $\mathcal{O}$ da toplama işlemi

+	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_2	a_2	a_3	a_1	a_6	a_4	a_5
a_3	a_3	a_1	a_2	a_5	a_6	a_4
a_4	a_4	a_5	a_6	a_1	a_2	a_3
a_5	a_5	a_6	a_4	a_3	a_1	a_2
a_6	a_6	a_4	a_5	a_2	a_3	a_1

Tablo 3.3. $\mathcal{O}$ da çarpma işlemi

$\cdot$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1
a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2
a_3	a_3	a_3	a_3	a_3	a_3	a_3
a_4	a_4	a_4	a_4	a_4	a_4	a_4
a_5	a_5	a_5	a_5	a_5	a_5	a_5
a_6	a_6	a_6	a_6	a_6	a_6	a_6

$M = \{a_1, a_4, a_5, a_6\} \subseteq \mathcal{O}$ üzerinde toplama ve çarpma işlemleri de Tablo 3.4 ve Tablo 3.5 teki gibi olur. Tablo 3.4 ten, $a_4, a_5 \in M$ için $a_4 + a_5 = a_2 \notin M$ olduğundan $(M, +)$ bir grup değildir. Bu nedenle $(M, +, \cdot)$ bir yakın-halka değildir.

Tablo 3.4. $M \subseteq \mathcal{O}$ de toplama işlemi

$+$	a_1	a_4	a_5	a_6
a_1	a_1	a_4	a_5	a_6
a_4	a_4	a_1	a_2	a_3
a_5	a_5	a_3	a_1	a_2
a_6	a_6	a_2	a_3	a_1

Tablo 3.5. $M \subseteq \mathcal{O}$ de çarpma işlemi

$\cdot$	a_1	a_4	a_5	a_6
a_1	a_1	a_1	a_1	a_1
a_4	a_4	a_4	a_4	a_4
a_5	a_5	a_5	a_5	a_5
a_6	a_6	a_6	a_6	a_6

Bu durumda

$$\begin{aligned}\xi_{\varphi_1} &= \{[a_1]_{\varphi_1}, [a_4]_{\varphi_1}\} \\ &= \{\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_4, a_5, a_6\}\}, \\ \xi_{\varphi_2} &= \{[a_1]_{\varphi_2}, [a_2]_{\varphi_2}, [a_4]_{\varphi_2}\} \\ &= \{\{a_1\}, \{a_2, a_3\}, \{a_4, a_5, a_6\}\}\end{aligned}$$

olur. O zaman $r = 1$ için $\mathcal{O}$ nun ayrışımının kümesi $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}\}$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}N_1(B)^* M &= \bigcup_{[a_i]_{\varphi_j} \cap M \neq \emptyset} [a_i]_{\varphi_j} \\ &= \{a_1, a_2, a_3\} \cup \{a_4, a_5, a_6\} \cup \{a_1\} \\ &= \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} = \mathcal{O}\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $(M, +)$ abel olmayan bir yakınlık grubu olup, her $k, \ell, m \in M$ için

$$(YN_1) \quad k \cdot \ell \in N_r(B)^* M,$$

$$(YN_2) \quad (k \cdot \ell) \cdot m = k \cdot (\ell \cdot m) \text{ özelliği } N_r(B)^* M \text{ de sağlanır,}$$

$$(YN_3) \quad (k + \ell) \cdot m = k \cdot m + \ell \cdot m \text{ özelliği } N_r(B)^* M \text{ de sağlanır.}$$

Sonuç olarak, M bir yakınlık yakın-halkadır.

Lemma 3.3.7. $M \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık yakın-halka ve $0_M \in M$ olsun. O zaman her $k, \ell \in M$ $0_M \cdot k, k \cdot 0_M \in M$ ise

$$(i) \quad 0_M \cdot k = 0_M,$$

$$(ii) \quad (-k) \cdot \ell = -(k \cdot \ell) \text{ dir.}$$

Not 3.3.8. M bir yakınlık yakın-halka olsun. Bu durumda her $k, \ell \in M$ için $k \cdot 0_M = 0_M$ ve $-(k \cdot \ell) = k \cdot (-\ell)$ eşitlikleri geçerli olmayabilir.

Tanım 3.3.9. M bir yakınlık yakın-halka olsun. O halde

- (1) $S_0 = \{k \in M \mid k \cdot 0_M = 0_M\}$ kümesine M nin sıfır-simetrik kısmı denir.
- (2) $S_c = \{k \in M \mid k \cdot 0_M = k\}$ kümesine M nin sabit kısmı denir.

Tanım 3.3.10. M bir yakınlık yakın-halka olsun. Bu durumda

- (1) $M = S_0$ ise M ye sıfır-simetriktir denir.
- (2) $M = S_c$ ise M ye sabittir denir.

Not 3.3.11. Her $k, \ell \in M$ için

$$w \cdot (k + \ell) = w \cdot k + w \cdot \ell$$

özellği $N_r(B)^* M$ de geçerli ise $w \in M$ elemanına dağılmalı eleman denir. Ayrıca, tüm dağılmalı elemanların kümesi de M_w ile temsil edilir ve $M = M_w$ ise M ye dağılmalı yakınlık yakın-halka denir.

Tanım 3.3.12. M bir yakınlık yakın-halka ve $K \subseteq M$ olsun. O zaman

- (1) $K, (M, +)$ nın bir alt yakınlık grubu,
- (2) $K \cdot K \subseteq N_r(B)^* K$

ise K ya M nin bir alt yakınlık yakın-halkası denir.

Örnek 3.3.13. M bir yakınlık yakın-halka olmak üzere, S_0 ve S_c , M de tanımlanan ikili işlemlere göre birer alt yakınlık yakın-halkadır.

Teorem 3.3.14. M bir yakınlık yakın-halka, $K \subseteq M$ ve $N_r(B)^* K$ hem bir toplamsal grupoid hem de bir çarpımsal grupoid olsun. O halde K nın M nin bir alt yakınlık yakın-halkası olması için gerek ve yeter koşul, her $k \in K$ için $-k \in K$ olmasıdır.

Örnek 3.3.15. Örnek 3.3.6 da verilen M yakınlık yakın-halkası ele alınır, $K = \{a_1, a_6\} \subseteq M$, M de tanımlanan ikili işlemlere göre bir alt yakınlık yakın-halkadır.

Tanım 3.3.16. M bir yakınlık yakın-halka ve $L \subseteq M$ olsun. Bu durumda

- (1) $L, (M, +)$ nin bir alt yakınlık grubu,
- (2) $L \cdot M \subseteq N_r(B)^* L$,
- (3) Her $m, n \in M$ ve her $\ell \in L$ için $m \cdot (n + \ell) - m \cdot n \in N_r(B)^* L$

özellikleri geçerli ise L ye M nin bir yakınlık ideali denir.

Bu arada (1) ile (2) özelliklerini sağlayan L ye M nin bir sağ yakınlık ideali denir ve (1) ile (3) özelliklerini sağlayan L ye de M nin bir sol yakınlık ideali denir.

Örnek 3.3.17. Örnek 3.3.15 te göz önüne alınan $K = \{a_1, a_6\} \subseteq M$ alt yakınlık yakınlık halkası, M nin bir yakınlık idealidir.

3.4. Yakınlık Gamma Halkalar

Bu kısımda yakın yaklaşım uzayında iki işlemli cebirsel yapılardan yakınlık gamma halkası ele alınmıştır. Burada yakınlık gamma halkası, alt yakınlık gamma halkası ve yakınlık gamma ideali kavramları ile ilgili örnekler ve bazı sonuçlar verilmiştir [29-31].

Tanım 3.4.1. $W, \Gamma \subseteq \mathcal{O}$ birer abel toplamsal yakınlık grubu olsun. Her $k, \ell, m \in W$ ve her $\beta, \gamma \in \Gamma$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa W ya yakın yaklaşım uzayında bir gamma halka (kısaca yakınlık gamma halka) denir:

- $(N\Gamma_1)$ $k\beta\ell \in N_r(B)^* W$,
- $(N\Gamma_2)$ $(k\beta\ell)\gamma m = k\beta(\ell\gamma m)$ özelliği $N_r(B)^* W$ de sağlanır,
- $(N\Gamma_3)$ Aşağıdaki özellikler $N_r(B)^* W$ da sağlanır:
 - $(k + \ell)\beta m = k\beta m + \ell\beta m$,
 - $k(\beta + \gamma)\ell = k\beta\ell + k\gamma\ell$,
 - $k\beta(\ell + m) = k\beta\ell + k\beta m$.

Bir W yakınlık gamma halkada $(N\Gamma_1)-(N\Gamma_3)$ şartları $N_r(B)^* W$ da sağlanmak zorundadır. W daki elemanlara sonlu tane işlem uygulandığında elde edilen eleman $N_r(B)^* W$ ya ait olmayabilir.

Lemma 3.4.2. Yakın yaklaşım uzayında her gamma halka bir yakınlık gamma halkadır.

Örnek 3.4.3. $\mathcal{O} = \{a_{ij} \mid 0 \leq i, j \leq 4\}$ algılanabilen nesneler kümesi ve çıkarım fonksiyonlarının kümesi $B = \{\varphi\} \subseteq \mathcal{F}$ olsun.

$$\varphi: \mathcal{O} \rightarrow V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$$

çıkartım fonksiyonu Tablo 3.6 daki gibi tanımlansın.

Tablo 3.6. $\mathcal{O}$ da tanımlanan çıkartım fonksiyonu

	a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}	a_{04}	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
φ	x_1	x_2	x_3	x_5	x_5	x_4	x_4	x_5	x_6	x_7
	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
φ	x_7	x_6	x_6	x_8	x_7	x_8	x_6	x_7	x_8	x_8
				a_{40}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}		
			φ	x_8	x_5	x_7	x_8	x_3		

Bu durumda

$$\begin{aligned} [a_{00}]_{\varphi} &= \{a \in \mathcal{O} \mid \varphi(a) = \varphi(a_{00}) = x_1\} \\ &= \{a_{00}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a_{01}]_{\varphi} &= \{a \in \mathcal{O} \mid \varphi(a) = \varphi(a_{01}) = x_2\} \\ &= \{a_{01}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a_{02}]_{\varphi} &= \{a \in \mathcal{O} \mid \varphi(a) = \varphi(a_{02}) = x_3\} \\ &= \{a_{02}, a_{44}\} = [a_{44}]_{\varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a_{03}]_{\varphi} &= \{a \in \mathcal{O} \mid \varphi(a) = \varphi(a_{03}) = x_5\} \\ &= \{a_{03}, a_{04}, a_{12}, a_{41}\} \\ &= [a_{04}]_{\varphi} = [a_{12}]_{\varphi} = [a_{41}]_{\varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a_{10}]_{\varphi} &= \{a \in \mathcal{O} \mid \varphi(a) = \varphi(a_{10}) = x_4\} \\ &= \{a_{10}, a_{11}\} = [a_{11}]_{\varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a_{13}]_{\varphi} &= \{a \in \mathcal{O} \mid \varphi(a) = \varphi(a_{13}) = x_6\} \\ &= \{a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{31}\} \\ &= [a_{21}]_{\varphi} = [a_{22}]_{\varphi} = [a_{31}]_{\varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a_{14}]_{\varphi} &= \{a \in \mathcal{O} \mid \varphi(a) = \varphi(a_{14}) = x_7\} \\ &= \{a_{14}, a_{20}, a_{24}, a_{32}, a_{42}\} \\ &= [a_{20}]_{\varphi} = [a_{24}]_{\varphi} = [a_{32}]_{\varphi} = [a_{42}]_{\varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a_{23}]_{\varphi} &= \{a \in \mathcal{O} \mid \varphi(a) = \varphi(a_{23}) = x_8\} \\ &= \{a_{23}, a_{30}, a_{33}, a_{34}, a_{40}, a_{43}\} \\ &= [a_{30}]_{\varphi} = [a_{33}]_{\varphi} = [a_{34}]_{\varphi} = [a_{40}]_{\varphi} = [a_{43}]_{\varphi} \end{aligned}$$

dir. O zaman

$$\xi_{\varphi} = \{[a_{00}]_{\varphi}, [a_{01}]_{\varphi}, [a_{02}]_{\varphi}, [a_{03}]_{\varphi}, [a_{10}]_{\varphi}, [a_{13}]_{\varphi}, [a_{14}]_{\varphi}, [a_{23}]_{\varphi}\}$$

olur. Bu durumda $r=1$ için $\mathcal{O}$ nun ayrışımalarının kümesi $N_1(B) = \{\xi_{\varphi}\}$ dir. Böylece

$W = \{a_{00}, a_{01}, a_{10}\}$, $\Gamma = \{a_{00}, a_{02}\} \subseteq \mathcal{O}$ alt kümeleri için

$$\begin{aligned} N_1(B)^* W &= \bigcup_{[a_{ij}]_{\varphi} \cap W \neq \emptyset} [a_{ij}]_{\varphi} \\ &= \{a_{00}\} \cup \{a_{01}\} \cup \{a_{10}, a_{11}\} \\ &= \{a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N_1(B)^* \Gamma &= \bigcup_{[a_{ij}]_{\varphi} \cap \Gamma \neq \emptyset} [a_{ij}]_{\varphi} \\ &= \{a_{00}, a_{02}, a_{44}\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$W \subseteq \mathcal{O}$ kümesi üzerinde toplama işlemi

$$a_{ij} +_1 a_{mn} = a_{pr}, \quad i + m \equiv p(2) \text{ ve } j + n \equiv r(2)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} +_1: \mathcal{O} \times \mathcal{O} &\rightarrow \mathcal{O} \\ (a_{ij}, a_{mn}) &\mapsto a_{ij} +_1 a_{mn} = a_{pr} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $(W, +_1)$ bir abel yakınlık gruptur.

$\Gamma \subseteq \mathcal{O}$ kümesi üzerinde toplama işlemi de

$$a_{ij} +_2 a_{mn} = a_{st}, \quad i + m \equiv s(4) \text{ ve } j + n \equiv t(4)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} +_2: \mathcal{O} \times \mathcal{O} &\rightarrow \mathcal{O} \\ (a_{ij}, a_{mn}) &\mapsto a_{ij} +_2 a_{mn} = a_{st} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\Gamma, +_2)$ bir abel yakınlık gruptur.

Ayrıca $\mathcal{O}$ üzerinde bir işlem

$$a_{ij} a_{kl} a_{mn} = a_{uv}, \quad u = \min\{i, k, m\} \text{ ve } v = \min\{j, l, n\}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \times \Gamma \times \mathcal{O} &\rightarrow \mathcal{O} \\ (a_{ij}, a_{kl}, a_{mn}) &\mapsto a_{ij} a_{kl} a_{mn} = a_{uv} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

Böylece Tanım 3.4.1 deki şartlar kolaylıkla sağlatılabilir ve dolayısıyla W bir yakınlık gamma halkadır.

Lemma 3.4.4. $W \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık gamma halka ve $0_W \in W$ olsun. Her $k, \ell \in W$ ve her $\beta \in \Gamma$ için $0_W \beta k, k \beta 0_W \in W$ ise

- (i) $k \beta 0_W = 0_W \beta k = 0_W$,
- (ii) $k \beta (-\ell) = (-k) \beta \ell = -(k \beta \ell)$,
- (iii) $(-k) \beta (-\ell) = k \beta \ell$ dir.

Tanım 3.4.5. W bir yakınlık gamma halka ve S , W nun boş olmayan bir alt kümesi olsun. S , W daki işlemler ile bir yakınlık gamma halka ise S ye W nun bir alt yakınlık gamma halkası denir.

Teorem 3.4.6. $W, \Gamma \subseteq \mathcal{O}$, W bir yakınlık gamma halka, $S \subseteq W$ ve $N_r(B)^* S$ bir toplamsal grupoid ve bir Γ -grupoid olsun. O zaman S nin W nun bir alt yakınlık gamma halkası olması için gerek ve yeter koşul, her $s \in S$ için $-s \in S$ olmasıdır.

Örnek 3.4.7. Örnek 3.4.3 ten, $W = \{a_{00}, a_{01}, a_{10}\}$ yakınlık gamma halkası dikkate alınsın.

$S = \{a_{00}, a_{01}\}$, W nun bir alt kümesi olmak üzere,

$$\begin{aligned} N_1(B)^* S &= \bigcup_{[a_{ij}]_{\vartheta_i} \cap S \neq \emptyset} [a_{ij}]_{\vartheta_i} \\ &= \{a_{00}, a_{01}\} = S \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $N_r(B)^* S$ bir toplamsal grupoid ve bir Γ -grupoiddir. Ayrıca $-a_{00} = a_{00} \in S$ ve $-a_{01} = a_{01} \in S$ olduğundan Teorem 3.4.6 dan S , W nun bir alt yakınlık gamma halkasıdır.

Teorem 3.4.8. $W \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık gamma halka, $S_1, S_2 \subseteq W$ ve $N_r(B)^* S_1$, $N_r(B)^* S_2$ birer toplamsal grupoid ve Γ -grupoid olsun. Bu durumda S_1, S_2 W nun iki alt yakınlık gamma halkası ve

$$(N_r(B)^* S_1) \cap (N_r(B)^* S_2) = N_r(B)^* (S_1 \cap S_2)$$

ise $S_1 \cap S_2$ W nun bir alt yakınlık gamma halkasıdır.

Sonuç 3.4.9. W bir yakınlık gamma halka ve W nun alt yakınlık gamma halkalarının boş olmayan bir ailesi $\{S_i \mid i \in \Delta\}$ olsun. O zaman $N_r(B)^* S_i$ ler birer toplamsal grupoid ve Γ -grupoid olmak üzere,

$$\bigcap_{i \in \Delta} (N_r(B)^* S_i) = N_r(B)^* \left(\bigcap_{i \in \Delta} S_i \right)$$

ise $\bigcap_{i \in \Delta} S_i$, W nun bir alt yakınlık gamma halkasıdır.

Tanım 3.4.10. $W \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık gamma halka ve $L \subseteq W$ olsun. Her $k, \ell \in L$, her $\beta \in \Gamma$ ve her $w \in W$ için

- (1) $k + \ell \in N_r(B)^* L$,
- (2) $-\ell \in L$,
- (3) $w\beta\ell \in N_r(B)^* L \left(\ell\beta w \in N_r(B)^* L \right)$

ise L ye W nun bir sol (sağ) yakınlık gamma ideali denir. L hem bir sol hem de bir sağ yakınlık gamma ideali ise L ye W nun bir yakınlık gamma ideali denir.

Not 3.4.11. W yakınlık gamma halkasının yalnızca bir tane triviyal yakınlık gamma ideali vardır ki, o da W nun kendisidir.

Örnek 3.4.12. Örnek 3.4.3 ve Örnek 3.4.7 den $W = \{a_{00}, a_{01}, a_{10}\}$ yakınlık gamma halkası ve W nun $S = \{a_{00}, a_{01}\}$ alt yakınlık gamma halkası göz önüne alınsın. Her $k, \ell \in S$, her $w \in W$ ve her $\beta \in \Gamma$ için $k + \ell \in N_r(B)^* S$, $-\ell \in S$, $w\beta\ell \in N_r(B)^* S \left(\ell\beta w \in N_r(B)^* S \right)$ olduğu görülür. Böylece Tanım 3.4.10 dan S , W nun bir yakınlık gamma idealidir.

Teorem 3.4.13. $W \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık gamma halka, $J_1, J_2 \subseteq W$ ve $N_r(B)^* J_1$, $N_r(B)^* J_2$ birer toplamsal grupoid ve Γ -grupoid olsun. Bu durumda J_1, J_2 W nun iki yakınlık gamma ideali ve

$$(N_r(B)^* J_1) \cap (N_r(B)^* J_2) = N_r(B)^* (J_1 \cap J_2)$$

ise $J_1 \cap J_2$, W nun bir yakınlık gamma idealidir.

Sonuç 3.4.14. W bir yakınlık gamma halka ve W nun yakınlık gamma ideallerinin boş olmayan bir ailesi $\{J_i \mid i \in \Delta\}$ olsun. O zaman $N_r(B)^* J_i$ ler birer toplamsal grupoid ve Γ -grupoid olmak üzere,

$$\bigcap_{i \in \Delta} (N_r(B)^* J_i) = N_r(B)^* \left(\bigcap_{i \in \Delta} J_i \right)$$

ise $\bigcap_{i \in \Delta} J_i$, W nun bir yakınlık gamma idealidir.



4. GENELLEŞTİRİLMİŞ YAKINLIK HALKALAR

Bu bölümde yakın yaklaşım uzayında iki işlemli cebirsel yapıların bir genelleştirmesi olarak yakınlık gamma yakın halka kavramı tanımlanmıştır. Birinci kısımda alt yakınlık gamma yakın halka, yakınlık gamma ideal kavramları ve ilgili sonuçlar verilmiştir. İkinci kısımda da zayıf denklik bağıntısı ile belirlenen yakın zayıf kalan sınıfları ve yakın zayıf kalan sınıflarının yakınlık gamma yakın halkası inşa edilmiştir.

4.1. Yakınlık Gamma Yakın Halkalar

Tanım 4.1.1. $N, \Gamma \subseteq \mathcal{O}$ birer toplamsal yakınlık grubu olsun. Her $k, \ell, m \in N$ ve her $\beta, \gamma \in \Gamma$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa N ye yakın yaklaşım uzayında bir Γ -yakın halka (kısaca yakınlık Γ -yakın halka) denir:

$$(N \Gamma N_1) \quad k\beta\ell \in N_r(B)^* N,$$

$$(N \Gamma N_2) \quad (k + \ell)\beta m = k\beta m + \ell\beta m \text{ özelliği } N_r(B)^* N \text{ de sağlanır,}$$

$$(N \Gamma N_3) \quad (k\beta\ell)\gamma m = k\beta(\ell\gamma m) \text{ özelliği } N_r(B)^* N \text{ de sağlanır.}$$

Örnek 4.1.2. $\mathcal{O} = \{k_{ij} \mid 0 \leq i, j \leq 4\}$ algılanabilen nesneler kümesi ve

$$\varphi: \mathcal{O} \rightarrow V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

çıkarım fonksiyonu Tablo 4.1 deki gibi tanımlanmak üzere, $B = \{\varphi\} \subseteq \mathcal{F}$ olsun.

Tablo 4.1. $\mathcal{O}$ da tanımlanan çıkarım fonksiyonu

	k_{00}	k_{01}	k_{02}	k_{03}	k_{04}	k_{10}	k_{11}	k_{12}	k_{13}
φ	v_1	v_2	v_3	v_5	v_5	v_4	v_4	v_5	v_6
	k_{14}	k_{20}	k_{21}	k_{22}	k_{23}	k_{24}	k_{30}	k_{31}	k_{32}
φ	v_7	v_7	v_6	v_6	v_8	v_7	v_8	v_6	v_7
	k_{33}	k_{34}	k_{40}	k_{41}	k_{42}	k_{43}	k_{44}		
φ	v_8	v_8	v_8	v_5	v_7	v_8	v_3		

Böylece

$$\begin{aligned} [k_{00}]_{\varphi} &= \{k \in \mathcal{O} \mid \varphi(k) = \varphi(k_{00}) = v_1\} \\ &= \{k_{00}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [k_{01}]_{\varphi} &= \{k \in \mathcal{O} \mid \varphi(k) = \varphi(k_{01}) = v_2\} \\ &= \{k_{01}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [k_{02}]_{\varphi} &= \{k \in \mathcal{O} \mid \varphi(k) = \varphi(k_{02}) = v_3\} \\ &= \{k_{02}, k_{44}\} \\ &= [k_{44}]_{\varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [k_{03}]_{\varphi} &= \{k \in \mathcal{O} \mid \varphi(k) = \varphi(k_{03}) = v_5\} \\ &= \{k_{03}, k_{04}, k_{12}, k_{41}\} \\ &= [k_{04}]_{\varphi} = [k_{12}]_{\varphi} = [k_{41}]_{\varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [k_{10}]_{\varphi} &= \{k \in \mathcal{O} \mid \varphi(k) = \varphi(k_{10}) = v_4\} \\ &= \{k_{10}, k_{11}\} \\ &= [k_{11}]_{\varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [k_{13}]_{\varphi} &= \{k \in \mathcal{O} \mid \varphi(k) = \varphi(k_{13}) = v_6\} \\ &= \{k_{13}, k_{21}, k_{22}, k_{31}\} \\ &= [k_{21}]_{\varphi} = [k_{22}]_{\varphi} = [k_{31}]_{\varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [k_{14}]_{\varphi} &= \{k \in \mathcal{O} \mid \varphi(k) = \varphi(k_{14}) = v_7\} \\ &= \{k_{14}, k_{20}, k_{24}, k_{32}, k_{42}\} \\ &= [k_{20}]_{\varphi} = [k_{24}]_{\varphi} = [k_{32}]_{\varphi} = [k_{42}]_{\varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [k_{23}]_{\varphi} &= \{k \in \mathcal{O} \mid \varphi(k) = \varphi(k_{23}) = v_8\} \\ &= \{k_{23}, k_{30}, k_{33}, k_{34}, k_{40}, k_{43}\} \\ &= [k_{30}]_{\varphi} = [k_{33}]_{\varphi} = [k_{34}]_{\varphi} = [k_{40}]_{\varphi} = [k_{43}]_{\varphi} \end{aligned}$$

bulunur.

Bu durumda $\xi_\varphi = \{[k_{00}]_\varphi, [k_{01}]_\varphi, [k_{02}]_\varphi, [k_{03}]_\varphi, [k_{10}]_\varphi, [k_{13}]_\varphi, [k_{14}]_\varphi, [k_{23}]_\varphi\}$ dir. O zaman $r=1$ için $\mathcal{O}$ nun ayrışımalarının kümesi $N_1(B) = \{\xi_\varphi\}$ olur. O halde $N = \{k_{00}, k_{01}, k_{10}\}$ ve $\Gamma = \{k_{00}, k_{02}\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} N_1(B)^* N &= \bigcup_{[k_{ij}]_\varphi \cap N \neq \emptyset} [k_{ij}]_\varphi \\ &= \{k_{00}\} \cup \{k_{01}\} \cup \{k_{10}, k_{11}\} \\ &= \{k_{00}, k_{01}, k_{10}, k_{11}\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N_1(B)^* \Gamma &= \bigcup_{[k_{ij}]_\varphi \cap \Gamma \neq \emptyset} [k_{ij}]_\varphi \\ &= \{k_{00}\} \cup \{k_{02}, k_{44}\} \\ &= \{k_{00}, k_{02}, k_{44}\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\mathcal{O}$ üzerinde " $+_1$ " ikili işlemi (*birinci toplama*)

$$k_{ij} +_1 k_{mn} = k_{pr}, \quad i + m \equiv p(2) \text{ ve } j + n \equiv r(2)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} +_1 : \mathcal{O} \times \mathcal{O} &\rightarrow \mathcal{O} \\ (k_{ij}, k_{mn}) &\mapsto k_{ij} +_1 k_{mn} = k_{pr} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda $(N, +_1)$ bir yakınlık gruptur. Gerçekten,

- Her $k, \ell \in N$ için $k +_1 \ell \in N_r(B)^* N$ dir.
- Her $k, \ell, m \in N$ için $(k +_1 \ell) +_1 m = k +_1 (\ell +_1 m)$ özelliği $N_r(B)^* N$ de sağlanır.
- Her $k \in N$ için $k +_1 e_N = e_N +_1 k = k$ olacak biçimde bir $e_N \in N_r(B)^* N$ vardır.
- Her $k \in N$ için $k +_1 \ell = \ell +_1 k = e_N$ olacak biçimde bir $\ell \in N$ vardır.

Ayrıca $\mathcal{O}$ üzerinde " $+_2$ " ikili işlemi (*ikinci toplama*)

$$k_{ij} +_2 k_{mn} = k_{st} , i + m \equiv s(4) \text{ ve } j + n \equiv t(4)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} +_2 : \mathcal{O} \times \mathcal{O} &\rightarrow \mathcal{O} \\ (k_{ij}, k_{mn}) &\mapsto k_{ij} +_2 k_{mn} = k_{st} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

O zaman $(\Gamma, +_2)$ bir yakınlık gruptur. Gerçekten,

- Her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $\alpha +_2 \beta \in N_r(B)^* \Gamma$ dır.
- Her $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ için $(\alpha +_2 \beta) +_2 \gamma = \alpha +_2 (\beta +_2 \gamma)$ özelliği $N_r(B)^* \Gamma$ da sağlanır.
- Her $\alpha \in \Gamma$ için $\alpha +_2 e_\Gamma = e_\Gamma +_2 \alpha$ olacak biçimde bir $e_\Gamma \in N_r(B)^* \Gamma$ vardır.
- Her $\alpha \in \Gamma$ için $\alpha +_2 \beta = \beta +_2 \alpha = e_\Gamma$ olacak biçimde bir $\beta \in \Gamma$ vardır.

$k_{01} +_1 k_{10} = k_{11} \notin N$ olduğundan N , " $+_1$ " ikili işlemine göre bir grup değildir ve böylece N bir Γ -yakın halka değildir.

$\mathcal{O}$ üzerinde bir işlem

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \times \Gamma \times \mathcal{O} &\rightarrow \mathcal{O} \\ (k_{ij}, k_{uv}, k_{mn}) &\mapsto k_{ij} \cdot k_{uv} \cdot k_{mn} = k_{ij} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

Tanım 4.1.1 den N bir yakınlık Γ -yakın halkadır. Gerçekten, her $k, \ell, m \in N$ ve her $\beta, \gamma \in \Gamma$ için

$$(N\Gamma N_1) \quad k\beta\ell \in N_r(B)^* N,$$

$$(N\Gamma N_2) \quad (k +_1 \ell)\beta m = k\beta m +_1 \ell\beta m \text{ özelliği } N_r(B)^* N \text{ de sağlanır,}$$

$$(N\Gamma N_3) \quad (k\beta\ell)\gamma m = k\beta(\ell\gamma m) \text{ özelliği } N_r(B)^* N \text{ de sağlanır.}$$

Lemma 4.1.3. Bütün Γ -yakın halkalar bir yakınlık Γ -yakın halkadır.

İspat. $N \subseteq N_r(B)^* N$ olduğundan istenilen sonuç kolaylıkla elde edilir.

Lemma 4.1.4. Bütün yakınlık Γ -halkalar bir yakınlık Γ -yakın halkadır.

İspat. Yakınlık Γ -halka tanımından istenilen sonuç ortaya çıkar.

Bir yakınlık Γ -yakın halka her zaman bir Γ -yakın halka değildir. Aynı şekilde bir yakınlık Γ -yakın halka her zaman bir yakınlık Γ -halka değildir.

Örnek 4.1.5 ve Örnek 4.1.6 da, Lemma 4.1.3 ve Lemma 4.1.4 ün karşıtlarının doğru olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 4.1.5 Örnek 4.1.2 den N bir yakınlık Γ -yakın halkadır. Ancak $k_{01}, k_{10} \in N$ için $k_{01} +_1 k_{10} = k_{11} \notin N$ olduğundan N bir Γ -yakın halka değildir.

Örnek 4.1.6. Örnek 4.1.2 den N bir yakınlık Γ -yakın halkadır. Fakat $k_{10}, k_{01} \in N$ ve $k_{02} \in \Gamma$ için $k_{10} k_{02} (k_{01} +_1 k_{10}) \neq (k_{10} k_{02} k_{01}) +_1 (k_{10} k_{02} k_{10})$ olduğundan N bir yakınlık Γ -halka değildir.

Lemma 4.1.7. $N \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık Γ -yakın halka ve $0_N \in N$ olsun. Her $k, \ell \in N$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için $0_N \gamma k \in N$ ise

- (i) $0_N \gamma k = 0_N$,
- (ii) $(-k) \gamma \ell = -(k \gamma \ell)$ dir.

İspat. (i) Her $k \in N$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$0_N \gamma k = (0_N + 0_N) \gamma k = 0_N \gamma k + 0_N \gamma k$$

dır. Böylece yakın birim elemanın tekliğinden $0_N \gamma k = 0_N$ dir.

(ii) (i) den $0_N \gamma \ell = ((-k) + k) \gamma \ell = (-k) \gamma \ell + k \gamma \ell$ elde edilir. O zaman ters elemanın tekliğinden $(-k) \gamma \ell = -(k \gamma \ell)$ dir.

Her $k, \ell \in N$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için $k \gamma 0_N = 0_N$ ve $k \gamma (-\ell) = -(k \gamma \ell)$ eşitlikleri her zaman sağlanmayabilir.

Tanım 4.1.8. N bir yakınlık Γ -yakın halka olsun.

$$S_0 = \{k \in N \mid k \gamma 0_N = 0_N, \gamma \in \Gamma\}$$

kümesine N nin sıfır simetrik kısmı,

$$S_c = \{k \in N \mid k \gamma 0_N = k, \gamma \in \Gamma\}$$

kümesine de N nin sabit kısmı denir.

$N = S_0$ ise N ye sıfır simetriktir denir. $N = S_c$ ise N ye sabittir denir.

Her $k, \ell \in N$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için $d \gamma (k + \ell) = d \gamma k + d \gamma \ell$ özelliği $N_r(B)^* N$ de sağlanıyorsa d ye bir dağılmalı eleman denir. N deki tüm dağılmalı elemanların kümesi de N_d ile temsil edilir. $N = N_d$ ise N ye dağılmalıdır denir.

Tanım 4.1.9. $N, \Gamma \subseteq \mathcal{O}$, N bir yakınlık Γ -yakın halka ve $(S, +)$, $(N, +)$ nin bir alt yakınlık grubu olsun. Bu durumda $S \Gamma S \subseteq N_r(B)^* S$ ise S ye N nin bir alt yakınlık Γ -yakın halkası denir.

Örnek 4.1.10. N bir yakınlık Γ -yakın halka olsun. S_0 ve S_c , N nin birer alt yakınlık Γ -yakın halkasıdır.

Teorem 4.1.11. $N, \Gamma \subseteq \mathcal{O}$, N bir yakınlık Γ -yakın halka, $S \subseteq N$ ve $N_r(B)^* S$ bir toplamsal grupoid ve bir Γ -grupoid olsun. O zaman S nin N nin bir alt yakınlık Γ -yakın halkası olması için gerek ve yeter koşul, her $s \in S$ için $-s \in S$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: S , N nin bir alt yakınlık Γ -yakın halkası olsun. Bu durumda $(S, +)$ bir yakınlık gruptur. Böylece her $s \in S$ için $-s \in S$ dir.

$(\Leftarrow)$: Her $s \in S$ için $-s \in S$ olsun. $N_r(B)^* S$ bir toplamsal grupoid olduğundan ve Teorem 3.1.7 den $(S, +)$ bir yakınlık gruptur. Her $p, r, s \in S$ ve her $\beta, \gamma \in \Gamma$ için $S \subseteq N$ ve $N_r(B)^* S$ bir Γ -grupoid olduğundan $p\beta r, r\gamma s \in N_r(B)^* S$ ve $(p\beta r)\gamma s = p\beta(r\gamma s)$ özelliği $N_r(B)^* S$ de sağlanır.

Bundan başka $N_r(B)^* S$ bir toplamsal grupoid ve bir Γ -grupoid, N de bir yakınlık Γ -yakın halka olduğundan $(p+r)\beta s = (p\beta s) + (r\beta s)$ özelliği $N_r(B)^* S$ de sağlanır.

Böylece S , N nin bir alt yakınlık Γ -yakın halkasıdır.

Tanım 4.1.12. $N, \Gamma \subseteq \mathcal{O}$, N bir yakınlık Γ -yakın halka ve J , $(N, +)$ nın bir alt yakınlık grubu olsun. $N_r(B)^* J$ bir toplamsal grupoid ve bir Γ -grupoid olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa J ye N nin bir yakınlık Γ -ideali denir:

$$(N\Gamma I_1) \quad J\Gamma N = \{x\gamma k \mid x \in J, \gamma \in \Gamma, k \in N\} \subseteq N_r(B)^* J,$$

$$(N\Gamma I_2) \quad \text{Her } k, \ell \in N, \text{ her } x \in J \text{ ve her } \gamma \in \Gamma \text{ için } k\gamma(\ell + x) - k\gamma\ell \in N_r(B)^* J \text{ dir.}$$

Yalnızca $(N\Gamma I_1)$ sağlanıyorsa J ye N nin bir sağ yakınlık Γ -ideali, yalnızca $(N\Gamma I_2)$ sağlanıyorsa J ye N nin bir sol yakınlık Γ -ideali denir.

Örnek 4.1.13. Örnek 4.1.2 deki $N = \{k_{00}, k_{01}, k_{10}\}$ yakınlık Γ -yakın halkası ele alınsın. $J = N$ kabul edelim. J , N nin bir toplamsal alt yakınlık grubu, Örnek 4.1.2 deki $\mathcal{O} \times \Gamma \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ işleminin tanımından $J\Gamma N = J$ ve $J \subseteq N_r(B)^* J$ olduğundan J , N nin bir sağ yakınlık Γ -idealidir.

Ayrıca her $k, \ell \in N$, her $x \in J$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için $k\gamma(\ell + x) - k\gamma\ell \in N_r(B)^* J$ olduğundan J , N nin bir sol yakınlık Γ -idealidir. Böylece J , N nin bir yakınlık Γ -idealidir.

Not 4.1.14. N nin bütün yakınlık Γ -idealleri N nin bir alt yakınlık Γ -yakın halkasıdır.

Teorem 4.1.15. $N, \Gamma \subseteq \mathcal{O}$, N bir yakınlık Γ -yakın halka, $I, J \subseteq N$ ve $N_r(B)^* I$, $N_r(B)^* J$ birer toplamsal grupoid ve Γ -grupoid olsun. O zaman I, J N nin iki sağ (sol) yakınlık Γ -ideali ve

$$(N_r(B)^* I) \cap (N_r(B)^* J) = N_r(B)^* (I \cap J)$$

ise $I \cap J$, N nin bir sağ (sol) yakınlık Γ -idealidir.

İspat. I ile J , N nin birer sağ yakınlık Γ -ideali olduğundan $I\Gamma N \subseteq N_r(B)^* I$ ve $J\Gamma N \subseteq N_r(B)^* J$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} (I \cap J)\Gamma N &= \{x\gamma k \mid k \in N, \gamma \in \Gamma, x \in I \cap J\} \\ &= \{x\gamma k \mid k \in N, \gamma \in \Gamma, x \in I \text{ ve } x \in J\} \\ &= \{x\gamma k \mid k \in N, \gamma \in \Gamma, x \in I\} \cap \{x\gamma k \mid k \in N, \gamma \in \Gamma, x \in J\} \\ &= I\Gamma N \cap J\Gamma N \\ &\subseteq (N_r(B)^* I) \cap (N_r(B)^* J) \\ &= N_r(B)^* (I \cap J) \end{aligned}$$

olur. Böylece $(I \cap J)\Gamma N \subseteq N_r(B)^*(I \cap J)$ olduğundan $I \cap J$, N nin bir sağ yakınlık Γ -idealidir.

$x \in I \cap J$ olsun. I ile J , N nin birer sol yakınlık Γ -ideali olarak alınırsa, her $k, \ell \in N$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$k\gamma(\ell+x)-k\gamma\ell \in N_r(B)^*I \text{ ve } k\gamma(\ell+x)-k\gamma\ell \in N_r(B)^*J$$

dir. Buradan

$$k\gamma(\ell+x)-k\gamma\ell \in (N_r(B)^*I) \cap (N_r(B)^*J)$$

ve hipotezden

$$k\gamma(\ell+x)-k\gamma\ell \in N_r(B)^*(I \cap J)$$

elde edilir.

Böylece $I \cap J$, N nin bir sol yakınlık Γ -idealidir.

Sonuç 4.1.16. $N, \Gamma \subseteq \mathcal{O}$ ve N bir yakınlık Γ -yakın halka olsun. $J_i \subseteq N$ ($1 \leq i \leq n, n \geq 2$)

ve $N_r(B)^*J_i$ birer toplamsal grupoid ve Γ -grupoid olsun. O zaman J_i ler N nin birer sağ

(sol) yakınlık Γ -ideali ve $\bigcap_{1 \leq i \leq n} N_r(B)^*J_i = N_r(B)^*\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} J_i\right)$ ise $\bigcap_{1 \leq i \leq n} J_i$ de N nin bir sağ

(sol) yakınlık Γ -idealidir.

4.2. Yakın Zayıf Kalan Sınıflarının Yakınlık Gamma Yakın Halkası

$N, \Gamma \subseteq \mathcal{O}$, N bir yakınlık Γ -yakın halka ve S , N nin bir alt yakınlık Γ -yakın halkası olsun. O halde $k, \ell \in N$ olmak üzere, N nin elemanları arasında

$$k \approx_r \ell : \Leftrightarrow k + (-\ell) \in S \cup \{0_N\}$$

şeklinde bir " $\approx_r$ " bağıntısı tanımlanabilir.

Teorem 4.2.1. N bir yakınlık Γ -yakın halka olmak üzere, " $\approx_r$ " bağıntısı N üzerinde bir sağ zayıf denklik bağıntısıdır.

İspat. $(N, +)$ bir yakınlık grup olduğuna göre, her $k \in N$ için $-k \in N$ dir. $k + (-k) = 0_N$ den $k \approx_r k$ olur. Her $k, \ell \in N$ için $k \approx_r \ell$ ise $k + (-\ell) \in S \cup \{0_N\}$, yani $k + (-\ell) \in S$ veya $k + (-\ell) \in \{0_N\}$ dir.

$k + (-\ell) \in S$ ise S , N nin bir alt yakınlık Γ -yakın halkası olduğuna göre $-(k + (-\ell)) \in S$ olur, yani $\ell + (-k) \in S$ dir. Bu durumda $\ell \approx_r k$ elde edilir. $k + (-\ell) \in \{0_N\}$ ise $k + (-\ell) = 0_N$ dir. O zaman $\ell + (-k) = -(k + (-\ell)) = -0_N = 0_N$ ve buradan $\ell \approx_r k$ olur.

Böylece " $\approx_r$ " bağıntısı N üzerinde bir sağ zayıf denklik bağıntısıdır.

Herhangi bir $k \in N$ için " $\approx_r$ " bağıntısının N de belirttiği sınıf:

$$\begin{aligned}\tilde{k}_r &= \{\ell \in N \mid \ell \approx_r k\} \\ &= \{\ell \in N \mid \ell + (-k) \in S \cup \{0_N\}\} \\ &= \{\ell \in N \mid \ell + (-k) \in S \text{ veya } \ell + (-k) \in \{0_N\}\} \\ &= \{\ell \in N \mid \ell \in S + k \text{ veya } \ell + (-k) = 0_N\} \\ &= \{\ell \in N \mid \ell \in S + k \text{ veya } \ell = k\} \\ &= \{s + k \mid s \in S, k \in N, s + k \in N\} \cup \{k\}\end{aligned}$$

dir.

Tanım 4.2.2. N bir yakınlık Γ -yakın halka olmak üzere, " $\approx_r$ " bağıntısının N de belirttiği sınıfa bir yakın sağ zayıf kalan sınıfı denir.

Herhangi bir $k \in N$ için yakın sağ zayıf kalan sınıfı $S+k$ ile temsil edilir. O zaman

$$S+k = \{s+k \mid s \in S, k \in N, s+k \in N\} \cup \{k\}$$

olur.

N bir yakınlık Γ -yakın halka ve S, N nin bir alt yakınlık Γ -yakın halkası olsun. O halde $k, \ell \in N$ olmak üzere, N nin elemanları arasında

$$k \approx_{\ell} \ell : \Leftrightarrow (-k) + \ell \in S \cup \{0_N\}$$

şeklinde bir " $\approx_{\ell}$ " bağıntısı tanımlanabilir.

Teorem 4.2.3. N bir yakınlık Γ -yakın halka olmak üzere, " $\approx_{\ell}$ " bağıntısı N üzerinde bir sol zayıf denklik bağıntısıdır.

İspat. $(N, +)$ bir yakınlık grup olduğuna göre, her $k \in N$ için $-k \in N$ dir. $(-k) + k = 0_N$ den $k \approx_{\ell} k$ olur. Her $k, \ell \in N$ için $k \approx_{\ell} \ell$ ise $(-k) + \ell \in S \cup \{0_N\}$, yani $(-k) + \ell \in S$ veya $(-k) + \ell \in \{0_N\}$ dir.

$(-k) + \ell \in S$ ise S, N nin bir alt yakınlık Γ -yakın halkası olduğuna göre $-((-k) + \ell) = (-\ell) + k \in S$ dir. Bu durumda $\ell \approx_{\ell} k$ elde edilir. $(-k) + \ell \in \{0_N\}$ ise $(-k) + \ell = 0_N$ olur. O zaman $(-\ell) + k = -((-k) + \ell) = -0_N = 0_N$ ve buradan $\ell \approx_{\ell} k$ bulunur.

Böylece " $\approx_{\ell}$ " bağıntısı N üzerinde bir sol zayıf denklik bağıntısıdır.

Herhangi bir $k \in N$ için " $\approx_{\ell}$ " bağıntısının N de belirttiği sınıf:

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_\ell &= \{\ell \in N \mid \ell \approx_\ell k\} \\
&= \{\ell \in N \mid k \approx_\ell \ell\} \\
&= \{\ell \in N \mid (-k) + \ell \in S \cup \{0_N\}\} \\
&= \{\ell \in N \mid (-k) + \ell \in S \text{ veya } (-k) + \ell \in \{0_N\}\} \\
&= \{\ell \in N \mid \ell \in k + S \text{ veya } (-k) + \ell = 0_N\} \\
&= \{\ell \in N \mid \ell \in k + S \text{ veya } \ell = k\} \\
&= \{k + s \mid s \in S, k \in N, k + s \in N\} \cup \{k\}
\end{aligned}$$

dır.

Tanım 4.2.4. N bir yakınlık Γ -yakın halka olmak üzere, " $\approx_\ell$ " bağıntısının N de belirttiği sınıfa bir yakın sol zayıf kalan sınıfı denir.

Herhangi bir $k \in N$ için yakın sol zayıf kalan sınıfı $k + S$ ile temsil edilir. O zaman

$$k + S = \{k + s \mid s \in S, k \in N, k + s \in N\} \cup \{k\}$$

dır.

$\tilde{k}_r = S + k$ ve $\tilde{k}_\ell = k + S$ olmak üzere, $(N, +)$ yakınlık grubu abel ise $\tilde{k}_r = \tilde{k}_\ell$ olur. Bu durumda $\tilde{k}_r$ ve $\tilde{k}_\ell$ notasyonları yerine sadece $\tilde{k}$ kullanılır.

N bir yakınlık Γ -yakın halka ve S , N nin bir alt yakınlık Γ -yakın halkası olmak üzere,

$$N / \approx = \{k + S \mid k \in N\}$$

N nin S ile belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıflarının kümesidir.

Burada N nin yerine $N_r(B)^* N$ alınırsa

$$(N_r(B)^* N) / \approx = \{k + S \mid k \in N_r(B)^* N\}$$

elde edilir. O zaman

$$k + S = \left\{ k + s \mid s \in S, k \in N_r(B)^* N, k + s \in N \right\} \cup \{k\}$$

dır.

Tanım 4.2.5. N bir yakınlık Γ -yakın halka ve S , N nin bir alt yakınlık Γ -yakın halkası olsun. $k, \ell \in N$ için $k + S$ ve $\ell + S$ sırasıyla k ve ℓ elemanları tarafından belirlenen yakın sol zayıf kalan sınıflar olsun. O halde $k + \ell \in N_r(B)^* N$ elemanının belirlediği yakın sol zayıf kalan sınıfı

$$\left\{ (k + \ell) + s \mid s \in S, k + \ell \in N_r(B)^* N, (k + \ell) + s \in N \right\} \cup \{k + \ell\}$$

şeklinde tanımlıdır. Buna yakın sol zayıf kalan sınıflarının toplamı denir ve

$$(k + S) \oplus (\ell + S) = (k + \ell) + S$$

ile temsil edilir.

Tanım 4.2.6. N bir yakınlık Γ -yakın halka ve S , N nin bir alt yakınlık Γ -yakın halkası olsun. $k, \ell \in N$ için $k + S$ ve $\ell + S$ sırasıyla k ve ℓ elemanları tarafından belirlenen yakın sol zayıf kalan sınıflar olsun. O zaman $\beta \in \Gamma$ için $k\beta\ell \in N_r(B)^* N$ elemanının belirlediği yakın sol zayıf kalan sınıfı

$$\left\{ (k\beta\ell) + s \mid s \in S, k\beta\ell \in N_r(B)^* N, (k\beta\ell) + s \in N \right\} \cup \{k\beta\ell\}$$

şeklinde tanımlıdır ve

$$(k + S)\beta(\ell + S) = (k\beta\ell) + S$$

ile temsil edilir.

Tanım 4.2.7. $N, \Gamma \subseteq \mathcal{O}$, N bir yakınlık Γ -yakın halka ve S , N nin bir alt yakınlık Γ -yakın halkası olsun. $N /_{\approx}$, N nin S ile belirlenen tüm yakın zayıf kalan sınıflarının kümesi ve $\xi_{\Phi}(X)$, $X \in \wp(\mathcal{O})$ kümesinin tanımsal yakınlık küme ailesi olmak üzere,

$$N_r(B)^*(N /_{\approx}) = \bigcup_{\xi_{\Phi}(X) \cap N /_{\approx} \neq \emptyset} \xi_{\Phi}(X)$$

kümesine $N/\approx$ nın üst yaklaşımı denir.

Teorem 4.2.8. $N, \Gamma \subseteq \mathcal{O}$, N bir yakınlık Γ -yakın halka ve S , N nin bir alt yakınlık Γ -yakın halkası olsun. O halde $N/\approx$, N nin S ile belirlenen tüm yakın zayıf kalan sınıflarının kümesi olmak üzere,

$$(N_r(B)^* N)/\approx \subseteq N_r(B)^* (N/\approx)$$

ise $N/\approx$, her $k, \ell \in N$ ve her $\beta \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} (k+S) \oplus (\ell+S) &= (k+\ell)+S, \\ (k+S) \beta (\ell+S) &= (k\beta\ell)+S \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan işlemlere göre bir yakınlık Γ -yakın halkadır.

İspat. $(N_r(B)^* N)/\approx \subseteq N_r(B)^* (N/\approx)$ olsun. N bir yakınlık Γ -yakın halka olduğuna göre, Teorem 3.1.10 dan $(N/\approx, \oplus)$ bir yakınlık grubudur.

$(N \Gamma N_1)$ N bir yakınlık Γ -yakın halka olduğuna göre, her $k, \ell \in N$ ve her $\beta \in \Gamma$ için $k\beta\ell \in N_r(B)^* N$ dir. O zaman her $k+S, \ell+S \in N/\approx$ ve her $\beta \in \Gamma$ için

$$(k+S) \beta (\ell+S) = (k\beta\ell) + S \in (N_r(B)^* N)/\approx$$

dir. Hipotezden $(k+S) \beta (\ell+S) \in N_r(B)^* (N/\approx)$ olur.

$(N \Gamma N_2)$ N bir yakınlık Γ -yakın halka olduğundan dağılma özellikleri $N_r(B)^* N$ de sağlanır. Tanım 4.2.5 ve Tanım 4.2.6 dan her $k+S, \ell+S, m+S \in N/\approx$ ve her $\beta \in \Gamma$ için $((k+\ell)\beta m) + S \in (N_r(B)^* N)/\approx$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
((k+S) \oplus (\ell+S)) \beta(m+S) &= ((k+\ell)+S) \beta(m+S) \\
&= ((k+\ell) \beta m) + S \\
&= ((k \beta m) + (\ell \beta m)) + S \\
&= ((k \beta m) + S) \oplus ((\ell \beta m) + S) \\
&= ((k+S) \beta(m+S)) \oplus ((\ell+S) \beta(m+S))
\end{aligned}$$

dir. O halde hipotezden sağdan dağılma özelliği $N_r(B)^*(N/\approx)$ da sağlanır.

$(N \Gamma N_3)$ N bir yakınlık Γ -yakın halka olduğundan birleşme özelliği $N_r(B)^* N$ de sağlanır. Bu durumda her $k+S, \ell+S, m+S \in N/\approx$ ve her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $((k\alpha\ell) \beta m) + S \in (N_r(B)^* N)/\approx$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
((k+S) \alpha (\ell+S)) \beta(m+S) &= ((k\alpha\ell) + S) \beta(m+S) \\
&= ((k\alpha\ell) \beta m) + S \\
&= (k\alpha(\ell \beta m)) + S \\
&= (k+S) \alpha ((\ell \beta m) + S) \\
&= (k+S) \alpha ((\ell+S) \beta(m+S))
\end{aligned}$$

olur. O zaman hipotezden $N_r(B)^*(N/\approx)$ da birleşme özelliği gerçekleşir.

Böylece $N/\approx$ bir yakınlık Γ -yakın halkadır.

Tanım 4.2.9. N bir yakınlık Γ -yakın halka ve S, N nin bir alt yakınlık Γ -yakın halkası olsun. $N/\approx$ yakınlık Γ -yakın halkasına N nin S ile belirlenen tüm yakın zayıf kalan sınıflarının yakınlık Γ yakın halkası veya yakınlık bölüm Γ -yakın halkası denir ve $N/\approx_S$ ile temsil edilir.

Örnek 4.2.10. Örnek 4.1.2 den $N = \{k_{00}, k_{01}, k_{10}\}$ ve $\Gamma = \{k_{00}, k_{02}\}$ olmak üzere, N bir yakınlık Γ -yakın halkadır.

$S = \{k_{00}, k_{01}\} \subseteq N$ dikkate alınsın. Bu durumda $r=1$ için

$$\begin{aligned} N_1(B)^* S &= \bigcup_{[k_{ij}]_\varphi \cap S \neq \emptyset} [k_{ij}]_\varphi \\ &= \{k_{00}\} \cup \{k_{01}\} \\ &= \{k_{00}, k_{01}\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N_1(B)^* \Gamma &= \bigcup_{[k_{ij}]_\varphi \cap \Gamma \neq \emptyset} [k_{ij}]_\varphi \\ &= \{k_{00}\} \cup \{k_{02}, k_{44}\} \\ &= \{k_{00}, k_{02}, k_{44}\} \end{aligned}$$

olur.

S , N nin bir alt yakınlık Γ -yakın halkasıdır. Gerçekten,

$$k_{ij} +_1 k_{mn} = k_{pr} \text{ , } i + m \equiv p(2) \text{ ve } j + n \equiv r(2)$$

olmak üzere, Örnek 4.1.2 de tanımlanan

$$\begin{aligned} +_1 : \mathcal{O} \times \mathcal{O} &\rightarrow \mathcal{O} \\ (k_{ij}, k_{mn}) &\mapsto k_{ij} +_1 k_{mn} = k_{pr} \end{aligned}$$

işlemine göre $N_r(B)^* S$ bir toplamsal grupoiddir.

Ayrıca Örnek 4.1.2 de tanımlanan

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \times \Gamma \times \mathcal{O} &\rightarrow \mathcal{O} \\ (k_{ij}, k_{uv}, k_{mn}) &\mapsto k_{ij} k_{uv} k_{mn} = k_{ij} \end{aligned}$$

işlemi dikkate alınırsa $N_r(B)^* S$ bir Γ -grupoiddir.

Bu durumda $-k_{00} = k_{00} \in S$ ve $-k_{01} = k_{01} \in S$ olduğundan ve Teorem 4.1.11 den S , N nin bir alt yakınlık Γ -yakın halkasıdır.

O zaman N nin S ye göre belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıfları bulunabilir. O halde yakın sol zayıf kalan sınıfının tanımından

$$\begin{aligned} k_{00} + S &= \{k_{00}, k_{01}\} \cup \{k_{00}\} = \{k_{00}, k_{01}\}, \\ k_{01} + S &= \{k_{01}, k_{00}\} \cup \{k_{01}\} = \{k_{00}, k_{01}\}, \\ k_{10} + S &= \{k_{10}\} \cup \{k_{10}\} = \{k_{10}\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $N /_{\approx} = \{k_{00} + S, k_{10} + S\}$ olur.

$N_1(B)^* N = \{k_{00}, k_{01}, k_{10}, k_{11}\}$ olduğundan $N_1(B)^* N$ nin S ye göre belirlenen tüm yakın sol zayıf kalan sınıfları, yukarıda elde edilen yakın sol zayıf kalan sınıflarına

$$k_{11} + S = \{k_{11}, k_{10}\} \cup \{k_{11}\} = \{k_{10}, k_{11}\}$$

yakın sol zayıf kalan sınıfı da ilave edildiği takdirde tespit edilmiş olur. Böylece $(N_1(B)^* N) /_{\approx} = \{k_{00} + S, k_{10} + S, k_{11} + S\}$ olarak bulunur.

Tanım 4.2.5 ve Tanım 4.2.6 da belirtilen işlemler uygulanırsa Tablo 4.2 ve Tablo 4.3 aşağıdaki gibi elde edilir.

Tablo 4.2. $N /_{\approx}$ da tanımlanan toplama işlemi

$\oplus$	$k_{00} + S$	$k_{10} + S$
$k_{00} + S$	$k_{00} + S$	$k_{10} + S$
$k_{10} + S$	$k_{10} + S$	$k_{00} + S$

Tablo 4.3. $N /_{\approx}$ da tanımlanan çarpma işlemi

α	$k_{00} + S$	$k_{10} + S$
$k_{00} + S$	$k_{00} + S$	$k_{00} + S$
$k_{10} + S$	$k_{10} + S$	$k_{10} + S$

$(N_r(B)^* N) /_{\approx} \subseteq N_r(B)^* (N /_{\approx})$ olduğunu görmek için $(N_1(B)^* N) /_{\approx}$ dan alınan her elemanın $N_1(B)^* (N /_{\approx})$ da yer aldığını göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}
 Q(N /_{\approx}) &= \{ \Phi(A) \mid A \in N /_{\approx} \} \\
 &= \{ \Phi(k_{00} + S), \Phi(k_{10} + S) \} \\
 &= \{ \varphi(k_{00}), \varphi(k_{01}), \varphi(k_{10}) \} \\
 &= \{ v_1, v_2, v_4 \}
 \end{aligned}$$

olduğundan $N_1(B)^* (N /_{\approx}) = \{ k_{00} + S, k_{01} + S, k_{10} + S, k_{11} + S \}$ bulunur.

Böylece $(N_r(B)^* N) /_{\approx} \subseteq N_r(B)^* (N /_{\approx})$ olduğuna göre, Teorem 4.2.8 den $N /_{\approx}$ bir yakınlık Γ -yakın halkadır.

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Fuzzy kümeler, yaklaşımlı kümeler ve yakın kümeler, son yıllarda matematik ve mühendislik gibi teorik ve uygulamalı alanlarda dikkat çekici bir yere sahip olmuştur.

Bu yüksek lisans tezinde, yakınlık cebirsel yapılar ile alakalı incelemeler sonucunda tezi şekillendirmek ve yeni genelleştirilebilecek sonuçları ortaya çıkarmak için tez hedefleri belirlenmiştir. Bu hedefler doğrultusunda yakınlık gamma yakın halka kavramı tanımlanmıştır. Bundan başka alt yakınlık gamma yakın halka, yakınlık gamma ideal ve zayıf denklik bağıntısı gibi yeni kavramlar geliştirilmiş ve bu kavramlara bağlı olarak özgün bulgular elde edilmiştir.

Bu yüksek lisans tezi literatüre yeni bir bilimsel değer katmakta olup, bu tez ile genç matematikçilerin yakınlık cebirsel yapılar teorisine olan ilgisini artırarak bu teorinin gelişimine katkı sağlanması amaçlanmıştır.

KAYNAKÇA

- [1] Zadeh, L. A. (1965). "Fuzzy sets". *Information and Control*, 8 (3), 338-353.
- [2] Rosenfeld, A. (1971). "Fuzzy groups". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35, 512-517.
- [3] Mordeson, J. N. and Malik, D. S. (1998). *Fuzzy Commutative Algebra*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd..
- [4] Mordeson, J. N., Bhutani, K. R. and Rosenfeld, A. (2005). *Fuzzy Group Theory*. Berlin: Springer.
- [5] Pawlak, Z. (1982). "Rough sets". *International Journal of Computer and Information Science*, 11 (5), 341-356.
- [6] Iwinski, T. B. (1987). "Algebraic approach to rough sets". *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Mathematics*, 35, 673-683.
- [7] Biswas, R. and Nanda, S. (1994). "Rough groups and rough subgroups". *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Mathematics*, 42, 251-254.
- [8] Polkowski, L. (2002). *Rough Sets, Mathematical Foundations*. Heidelberg: Physica-Verlag.
- [9] Peters, J. F. (2007). "Near sets: General theory about nearness of objects". *Applied Mathematical Sciences*, 1 (53-56), 2609-2629.
- [10] Peters, J. and Naimpally, S. (2012). "Applications of near sets". *Notices of the American Mathematical Society*, 59 (4), 536-542.
- [11] Naimpally, S. A. and Peters, J. F. (2013). *Topology with Applications: Topological Spaces via Near and Far*. Singapore: World Scientific.

- [12] Peters, J. F. (2013). "Near sets: An introduction". *Mathematics in Computer Science*, 7 (1), 3-9.
- [13] Peters, J. F. (2014). *Topology of Digital Images: Visual Pattern Discovery in Proximity Spaces*. Berlin: Springer-Verlag.
- [14] İnan, E. and Öztürk, M. A. (2012). "Near groups on nearness approximation spaces". *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 41 (4), 545-558.
- [15] İnan, E. and Öztürk, M. A. (2014). "Erratum and notes for near groups on nearness approximation spaces". *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43 (2), 279-281.
- [16] Öztürk, M. A., Uçkun, M. and İnan, E. (2014). "Near groups of weak cosets on nearness approximation spaces". *Fundamenta Informaticae*, 133, 433-448.
- [17] İnan, E. (2015). *Yakın Yaklaşım Uzaylarında Cebirsel Yapılar*. Doktora Tezi. Malatya: İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı.
- [18] İnan, E. and Öztürk, M. A. (2015). "Near semigroups on nearness approximation spaces". *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 10 (2), 287-297.
- [19] Öztürk, M. A. and İnan, E. (2019). "Nearness rings". *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 17 (2), 115-131.
- [20] Dickson, L. E. (1905). "Definitions of a group and a field by independent postulates". *Transactions of the American Mathematical Society*, 6, 198-204.
- [21] Dickson, L. E. (1905). "On finite algebras". *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 358-393.
- [22] Zassenhaus, H. (1935). "Über endliche fastkörper". *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 11, 187-220.

- [23] Nobusawa, N. (1964). "On a generalization of the ring theory". Osaka Journal of Mathematics, 1, 81-89.
- [24] Barnes, W. E. (1966). "On the Γ -rings of Nobusawa". Pacific Journal of Mathematics, 18, 411-422.
- [25] Luh, J. (1969). "On the theory of simple Γ -rings". Michigan Mathematical Journal, 16, 65-75.
- [26] Kyuno, S. (1978). "On prime gamma rings". Pacific Journal of Mathematics, 75 (1), 185-190.
- [27] Genç, A. (2019). Yakınlık Yakın Halkalar. Yüksek Lisans Tezi. Adıyaman: Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı.
- [28] Uçkun, M. and Genç, A. (2021). "Near-rings on nearness approximation spaces". Turkish Journal of Mathematics, 45 (1), 549-565.
- [29] Erol, R. (2019). Yakınlık Gamma Halkalar. Yüksek Lisans Tezi. Adıyaman: Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı.
- [30] Uçkun, M., İnan, E. and Erol, R. (2020). "Nearness gamma rings". Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences, 1 (1), 37-48.
- [31] İnan, E. and Uçkun, M. (2021). " Γ -rings of weak cosets in nearness approximation spaces". Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, 47 (2), 327-339.
- [32] Çokakoğlu, B. and Uçkun, M. (2022). "Nearness gamma-near rings". Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences, 3 (1), 46-56.

- [33] Pilz, G. (1983). Near-rings: The Theory and Its Applications. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- [34] Satyanarayana, Bh. (1984). Contributions to Near-ring Theory. Ph.D. Thesis. India: Nagarjuna University.

