

T.C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YAKINLIK HALKALARIN ASAL İDEALLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESMA KARAMAN

DANIŞMAN

DOÇ. DR. MEHMET ALİ ÖZTÜRK

ADİYAMAN, 2023

T.C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YAKINLIK HALKALARIN ASAL İDEALLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESMA KARAMAN

DANIŞMAN

DOÇ. DR. MEHMET ALİ ÖZTÜRK

ADİYAMAN, 2023

ÖZET

YAKINLIK HALKALARIN ASAL İDEALLERİ

Esmâ KARAMAN

Matematik Anabilim Dalı

Adıyaman Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, 22 Aralık/2022

Danışman: Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK

Bu yazıda cebirsel yapılar için farklı bir yaklaşım sunuyoruz. Çünkü sıradan cebirsel yapılar kavramında bir cebirsel yapı, bir veya daha fazla ikili işlem içeren boş olmayan soyut noktalar kümesinden oluşur ve belirli aksiyomları karşılaması gerekir. Ancak zayıf yakınlık yaklaşım uzayında algısal nesneleri (soyut olmayan noktalar) kullanabiliriz. Bu bir gerçek yaşam gibidir. Bu tezde, zayıf yakınlık yaklaşım uzayında ideallerin bazı özellikleri ele alınmaktadır. Zayıf yakınlık yaklaşım uzaylarında halkanın bir alt kümesi tarafından üretilen üst yakınlık idealini tanımladık ve bu ideallerin bazı özelliklerini tanıttık. Ayrıca, yakınlık halkalarında yakınlık asal ve yakınlık maksimal ideallerini tanımladık ve bu ideallerin bazı özelliklerini inceledik.

Anahtar Kelimeler: Yakın kümeler; Yakınlık yaklaşım uzayları; Zayıf yakınlık yaklaşım uzayları; Gruplar; Halkalar; Asal idealler; Yakınlık yarı-gruplar; Yakınlık grupları; Yakınlık halkaları; Yakınlık asal idealleri; Yakınlık maksimal idealleri.

ABSTRACT

PRIME IDEALS OF THE NEARNESS RINGS

Esma KARAMAN

Department of Mathematics

Adiyaman University, Graduate Education School, 22 December/2022

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK

In this paper, we introduce a different approach for algebraic structures. Because, in the concept of ordinary algebraic structures, an algebraic structure consists of a nonempty set of abstract points with one or more binary operations, and it is required to satisfy certain axioms. But, we can use perceptual objects (non-abstract points) on weak nearness approximation space. This is like as a real life. The problem considered in this paper is to determine such features of ideals on weak nearness approximation space. We defined that upper nearness ideal generated by a subset of the ring on weak nearness approximation spaces and introduce some properties of these ideals. In addition to this, it is defined that nearness prime and nearness maximal ideals of the nearness rings and introduce some properties of these ideals.

Keywords: Near sets; Nearness approximation spaces; Weak nearness approximation spaces; Groups; Rings; Prime ideals; Nearness semigroups; Nearness groups; Nearness rings; Prime nearness ideals; Maximal nearness ideals.

TEŞEKKÜR

Tez aşamasında konumu belirleyen, bilgi ve birikimini aktaran, çalışmalarımı yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK'e teşekkürlerimi sunarım.

Esmâ KARAMAN

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Adıyaman Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit Programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Esma KARAMAN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
BAŞLIK SAYFASI	ii
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vii
İÇİNDEKİLER	viii
TABLolar DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1.GİRİŞ	1
2.ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	2
3.TEMEL KAVRAMLAR	5
3.1.Yakın Kümeler ve Yakınlık Yaklaşım Uzayı	5
3.2.Zayıf Yakınlık Yaklaşım Uzayı ve Özellikleri	10
3.3.Yakınlık Grubu, Yakınlık Halkası ve Yakınlık İdeali Özellikleri.....	12
4.BULGULAR VE TARTIŞMA	14
4.1.Yakınlık Halkalarının Bir Alt Kümesi Tarafından Üretilen Yakınlık İdeali.....	14
4.2.Asal Yakınlık İdealleri	27
5.SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER	33
KAYNAKÇA.....	34
ÖZGEÇMİŞ	

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 3.1.	Temel Yakınlık Yaklaşım Uzayı	6
Tablo 3.2.	Yakınlık Yaklaşım Uzayı	9
Tablo 3.3.	Zayıf Yakınlık Yaklaşım Uzayı	10
Tablo 4.1.	Nesnelerin Özellikleri	29
Tablo 4.2.	Toplama İşlemi	31
Tablo 4.3.	Çarpma İşlemi	31



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$\mathcal{F}$	: Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonları kümesi
L	: Tanım uzunluğu
$\mathcal{O}$	: Algılanabilen nesneler kümesi
φ_i	: Çıkarım fonksiyonu
Φ	: Nesne tanımlaması
X	: Örnek nesnelerin kümesi

1.GİRİŞ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezin giriş kısmı bulunmakta ve tezin basitçe tanıtımı yapılmaktadır. İkinci bölümde, önceki çalışmalar başlığı altında tezde kullanılan ve faydalanan kaynaklar özetlenmiştir. Üçüncü bölümde, temel kavramlar adı altında, yakın kümeler ve temel yaklaşım uzayı, zayıf yakınlık yaklaşım uzayı, yakınlık grubu, yakınlık halkası ve yakınlık ideallerin temel özellikleri içeren üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, temel yaklaşım uzayı genişletilerek; yakınlık yaklaşım uzayı tanımlandı. Yakınlık yaklaşım uzayı üzerinde alt yaklaşım, üst yaklaşım ve sınır bölgesi tanımı yapıldı. Bu kümelerinde yakın küme olduğu teoremlerle ispat edildi [1], [2]. İkinci kısımda zayıf yakınlık yaklaşım uzayı tanımı ve temel özellikleri verildi [3]. Üçüncü kısımda ise yakınlık yaklaşım uzayında grup, halka ve idealin tanımı yapıldı. Dördüncü bölümde, bulgular ve tartışma başlığı altında yakınlık halkalarının bir alt kümesi tarafından üretilen yakınlık ideali tanımı yapıp, asal yakınlık ve maksimal yakınlık ideallerinin tanımı ile birlikte teorem ve örneklerle yer verildi. Beşinci bölüm olan sonuç bölümünde ise bu çalışmanın daha sonra yapılacak çalışmalara hangi konularda öncülük yapılacağı belirtilmiştir.

Bu tezin amacı, yakınlık halkalarının bir alt kümesi tarafından üretilen yakınlık ideali konusuna girmek ve bu cebirsel yapıların temel yaklaşım özelliklerinden bazılarını incelemektir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Küme teorisi özellikle mühendisler ve matematikçiler için çok önemli bir araçtır. Çalışmalarında küme teorisini temel alırlar. Araştırmacılar, sıradan küme teorisi yetersiz olduğunda yeni yaklaşımlar tanımladı. Çünkü gerçek dünya doğası gereği belirsiz, kesin olmayan ve anlaşılmazdır. Sistem tanımlamasındaki çeşitli problemler, doğası gereği esasen olasılık dışı olan özellikleri içerir [4]. Bu duruma yanıt olarak Zadeh [5] olasılık teorisine alternatif olarak bulanık küme teorisini ortaya attı. Daha sonra 1982’de Pawlak tarafından önerilen kaba küme teorisi, karar niteliklerinde farklı değerlere sahip ayırt edilemez unsurların neden olduğu belirsizliğe odaklandı [6]. Dünya çapında kaba küme teorisine ve son yıllarda uygulamalarına olan ilgide hızlı bir artış olmuştur. 1999 yılında Molodtsov [7] bu zorlukların teorisinin parametreleştirme aracının yetersizliğinden kaynaklanabileceğini öne sürmüştür. Ayrıca bu zorlukların üstesinden gelmek için Molodtsov [7] olağan teorik yaklaşımlardan rahatsız eden zorluklardan bağımsız belirsizliklerle başa çıkmak için yeni bir matematiksel araç olarak yumuşak küme kavramını tanıttı.

2002 yılında J. F. Peters, kaba küme teorisinin bir genellemesi olarak yakın küme teorisini ortaya attı. Bu teoride Peters, nesnelerin yakınlığını ve dolayısıyla evrensel kümemizin nesnelerin mevcut bilgilerine göre sınıflandırılmasını tanımlamak için nesnelerin özelliklerini kullanır. Yakın küme teorisi kavramı, görüntü analizi ile motive edildi ve tanıdık fiziksel nesnelerin yakınlığının algılanması üzerine bir çalışmadan ilham aldı. Yakın küme teorisi farklı algısal granüllerdeki nesneler arasındaki yakınlıkları tanımlamak ve ayırt etmek için bir temel oluşturan araştırma işlevlerinin seçimi ile başlar. Bir araştırma işlevi, bireysel biyolojik organizmaların görüntüleri veya davranışları gibi fiziksel nesnelerin bir özelliğini temsil eden gerçek değerli bir işlevdir. [8] te nesnelerin yakınlığını tanımlamak için nesnelerin özelliklerine bağlı bir ayırt edilemezlik ilişkisi içinde verilmiştir. Daha yakın tarihli çalışmalarda benzer boş olmayan kümelerin yakınlığını araştırmak için geliştirilmiş bir yaklaşım teorisi olarak kabul edilmiştir (Bkz. [1], [9], [10], [2] ve [11]).

Cebirsel yapılardaki elemanları somut elemanlara dönüştürmek için yakın küme teorisini kullanabiliriz. Çünkü sıradan cebirsel yapılar kavramında, böyle bir yapı boş olmayan soyut noktalardan oluşur. Ancak bu, gerçek yaşam sorunları için kullanışlı değildir. Cebirsel yapıları inceleyen tüm araştırmacılar soyut öğeleri dikkate alır. Ancak bunları çalışmamızda bir süre kullanmak yetersiz kalmaktadır. Yakın küme teorisinde algısal nesneleri (soyut olmayan noktalar) kullanılır. Algısal nesneler, bir elma için renk olgunlaşma

derecesi gibi bazı özelliklere sahiptir. Temel araç, yakınlık yaklaşım uzayları veya zayıf yakınlık yaklaşım uzayları üzerine kurulmuş cebirsel yapılarda algısal nesnelerin alt kümelerinin üst yaklaşımlarının ele alınmasıdır. Sıradan cebirsel yapılar ile yakınlık cebirsel yapıları arasında iki önemli fark vardır. Birincisi soyut olmayan noktalarla çalışırken, ikincisi ikili işlemlerin yakınlığı için algısal nesnelerin alt kümelerinin üst yaklaşımlarını dikkate alınır.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ sayı kümeleri mühendislik alanında çok kullanışlıdır. Fakat $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümelerinin elemanlarının bir ve sadece bir özelliği vardır. Sadece bir özelliğe sahip olan nesneleri araştırmak yeterli değildir. Çünkü birçok nesnenin (canlı veya cansız) gerçek hayatta birden fazla özelliği vardır. Bu nedenle birden fazla özelliği olan algılanabilir nesneleri dikkate alınmalıdır. Üstelik; $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümelerinin elemanları tek bir özelliğe sahip olduğundan bu kümelerin alt-üst yaklaşımları ve kendisi $r = n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) için birbirine eşittir. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümeleri cebirsel yapılar, yakınlık cebirsel yapılardır.

Birçok araştırmacı cebirsel yapıları bulanık küme, kaba küme ve esnek küme gibi farklı kümelerde tanımlamıştır. Örneğin, bir grup üzerinde, bulanık grup tanımladılar. Ancak yakınlık cebirsel yapıları onlardan farklı olarak, elemanların birden fazla özellikleri olan boş olmayan bir küme üzerinde tanımlanır. Bu nedenle, G bir yakınlık cebirsel yapı olmak üzere; $G \subset N_r(B)^*G$ özelliğine sahip yakınlık cebirsel yapının özellikleri incelenmesi gerekir (Bkz. [12]).

2012 yılında, İnan ve Öztürk yakınlık grupları kavramını incelemiş ve temel özelliklerini araştırmıştır [13, 14]. [15] den sonra yakınlık yarı grupları ve yakınlık halkaları oluşturuldu ve temel özellikleri ([16], [3], [13], [17] ve [18] da yakın kümelerin diğer cebirsel yaklaşımları) araştırıldı.

Son zamanlarda Öztürk [19] yarı-halka teorisinin bir genellemesi olan yakınlık yarı-halka teorisini kurmuş (Bkz. [20]) ve yakınlık yarı halkaların ve ideallerinin bazı özelliklerini analiz etmiştir. Daha sonra araştırmacılar, yakınlık yarı halkaların çeşitli ideallerinin özelliklerini araştıran çalışmalara devam ettiler. (Bkz. [21], [22], [23], [24], [25], [26] ve [27]).

Bu tezde ele alınan problem, zayıf yakınlık yaklaşım uzayındaki halkaların ideallerinin özelliklerini belirlemektir. Halkanın bir alt kümesi tarafından zayıf yakınlık yaklaşım uzaylarında üretilen üst yakınlık idealini tanımlandı ve bu ideallerin bazı özellikleri

araştırıldı. Ayrıca, yakınlık halkaların asal ve maksimal yakınlık idealleri tanımlandı ve bu ideallerin bazı özellikleri araştırıldı.



3.TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda; yakın kümeler ve temel yaklaşım uzayı, zayıf yakınlık yaklaşım uzayı, yakınlık yaklaşım uzayında grup, halka ve ideal ile ilgili tanım, teorem ve örneklere yer verildi.

3.1.Yakın Kümeler ve Yakınlık Yaklaşım Uzayı

Bu kısımda yakın küme kavramının temelleri, çıkarım fonksiyonları, yakın kümeler ve bu kavramlarla ilgili bazı özellikler verilecektir.

Yakın küme teorisi, ayrık kümelerdeki nesnelerden oluşan benzer bilgilerin metot olarak kullanılabilmesini sağlar. Yani nesnelerin gözlemlenmesi, karşılaştırılması ve sınıflandırılması için yakın küme teorisi kullanılır. Yakın kümelerin keşfi, gözlemlenen nesnelerin özelliklerini temsil eden fonksiyonların seçimi ile mümkün olmaktadır. Yakın küme teorisinde nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonları bir nesneden, gözlemlenebilen özelliklerin değerine karşılık gelen bir reel sayıya tanımlıdır ([2]).

Tanım 3.1.1. ([2]) (*Çıkarım Fonksiyonu*) Algılanabilen nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden reel değerli fonksiyonlara çıkarım fonksiyonu denir.

Reel değerli çıkarım fonksiyonları kullanarak; her ne kadar cebirsel yapılar çalışılabilse de genel olarak; cebirsel yapılar çalışıldığında V , algılanabilen nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden boş kümeden farklı herhangi bir küme, $X \subseteq \mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi olmak üzere; çıkarım fonksiyonu $\varphi: X \rightarrow V$ şeklinde tanımlamak daha uygundur. Bu tanım, yakın kümeler teorisinde mantık ve cebirsel yapıların teorik olarak da çalışılabilmesine imkân sağlar.

Çıkarım fonksiyonları nesneler arasında olduğu gibi benzer nesnelerden oluşan kümeler arasında da benzerlik kurar. Nesnelerin aralarındaki benzerlikler dikkate alınırsa birbirine yakın oldukları gözlemlenir. Benzer şekilde nesnelerin oluşturduğu kümelerde benzerlik yönüyle birbirlerine belli derecelerde yakın olurlar.

Aksiyom 3.1.2. ([2]) Bir nesne algılanabilirdir ancak ve ancak bu nesne tanımlanabilirdir.

Tanım 3.1.3. ([2]) (*Görsel Çıkarım Fonksiyonu*) Algılanabilen nesneler yansıyan ışığın kaynağındaki görsel cisimlerin ayırt edici özellikleri olmak üzere, $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi olsun. $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere bir φ görsel çıkarım fonksiyonu, $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlıdır. $x \in X$ nesnesi için $\varphi(x)$, x nesnesinin görsel algıdaki zenginliği temsil eder.

Aksiom 3.1.4. ([2]) Nesne tanımlamalarını formülleştirmek nesnelerin matematiksel olarak algılanmasını sağlar.

Tanım 3.1.5. ([2]) (*Algılanabilir Sistem*) $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin boştan farklı sonlu bir kümesi ve $\mathcal{F}$ nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının boş olmayan bir kümesi olmak üzere, $(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ ye bir algılanabilir sistem denir.

Tablo 3.1. Temel Yakınlık Yaklaşım Uzayı

Sembol	Anlamı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi,
$\mathcal{O}$	Algılanabilen nesnelerin kümesi,
X	$X \subseteq \mathcal{O}$, örnek nesnelerin kümesi,
x	$x \in \mathcal{O}$, örnek nesne,
$\mathcal{F}$	Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi,
B	$B \subseteq \mathcal{F}$,
L	Tanım uzunluğu,
i	$i \leq L, L \in \mathbb{Z}^+$,
φ_i	$\varphi_i: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, çıkarım fonksiyonu,
Φ	$\Phi: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^L$ nesne tanımlaması,
$\Phi(x)$	$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x), \dots, \varphi_i(x), \dots, \varphi_L(x))$

Nesneler ancak matematiksel birtakım tanımlamalar yardımıyla bilgisayar sistemleri tarafından algılanabilirler. Bir $x \in X$ nesnesinin tanımı, çıkarım fonksiyonları yardımıyla belirlenen $\Phi(x)$ fonksiyonu ile belirlenir. Burada önemli konulardan biri de φ_i çıkarım

fonksiyonların, nesnelerin hangi yönüyle tanımlandığı dikkate alınarak belirlenmesidir. $B \subseteq \mathcal{F}, X \subseteq \mathcal{O}$ Örnek nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $\varphi_i: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere; $\varphi_i \in B$ olsun. Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden φ_i fonksiyonların φ_i değerlerinin bileşimi dikkate alınır;

$$\Phi: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^L, \Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x), \dots, \varphi_i(x), \dots, \varphi_L(x))$$

tanım uzunluğu $|\Phi| = L$ olan nesne tanımlamasıdır.

$X \subseteq \mathcal{O}$ kümelerindeki nesneler benzer tanımlamalara sahip ise o zaman nesneler birbirine yakındırlar. Her bir φ_i , bir nesnenin ayırt edici bir özelliğini belirtir. Bu durumda $x, x' \in \mathcal{O}$ olmak üzere Δ_{φ_i} farkı;

$$\Delta_{\varphi_i} = |\varphi_i(x') - \varphi_i(x)|$$

şeklinde tanımlıdır. [1] de Peters tarafından tanıtılan $\sim_B$ ayırt edilemezlik bağıntısının tanımına yol açar.

Tanım 3.1.6. ([1]) $x, x' \in \mathcal{O}$ ve $B \subseteq \mathcal{F}$ olsun. $i < |\Phi|$ tanım uzunluğu olmak üzere;

$$\{(x, x') \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} \mid \forall \varphi_i \in B, \Delta_{\varphi_i}\}$$

şeklinde tanımlanan bağıntıya $\mathcal{O}$ üzerinde ayırt edilemezlik bağıntısı denir ve " $\sim_B$ " ile gösterilir.

Tanım 3.1.7. ([1]) $X, X' \subseteq \mathcal{O}$ ve $B \subseteq \mathcal{F}$ olsun. Yakın küme yaklaşımında nesnelerin tanınması için temel fikir nesne tanımlamalarının karşılaştırılmasıdır. X ve X' kümeleri, kısmi olarak aynı tanımlamalara sahip nesneler içeriyorlarsa birbirlerine yakındır. Bu durumda $x \in X$ ve $x' \in X'$ için $x \sim_{\{\varphi_i\}} x'$ olacak şekilde $\varphi_i \in B$ varsa X kümesi X' kümesine yakındır, denir.

Tanım 3.1.8. ([2]) $X \subseteq \mathcal{O}$ ve $x, x' \in X$ olsun. x, x' nesnesine yakın ise X kümesine kendisi ile ilgili yakın küme veya bu duruma X kümesinin yansımali yakınlığı denir.

Teorem 3.1.9. ([2]) $\xi_B = \mathcal{O} / \sim_B$ ayrışımındaki her bir sınıf yakın kümedir.

Teorem 3.1.10. ([2]) ξ_B ayrışımı bir yakın kümedir.

Teorem 3.1.11. ([2]) Yakın küme içeren bir kümenin kendisi de yakın kümedir.

Tanım 3.1.12. ([2]) (*Temel Yakınlık Yaklaşım Uzağı*) $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi, $\mathcal{F}$ nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve " $\sim_B$ ", $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $\xi_B = \mathcal{O} / \sim_B$ ayrışımını belirleyen bir ayırt edilemezlik bağıntısı olmak üzere, $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_B)$ yapısına temel yakınlık yaklaşım uzağı denir.

Lemma 3.1.13. ([2]) $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; X kümesinin B – alt yaklaşımı B_*X bir yakın kümedir.

Teorem 3.1.14. ([2]) $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; X boştan farklı bir B_*X alt yaklaşımına sahip ise X bir yakın kümedir.

Tanım 3.1.15. ([2]) (*Bir Kümenin Üst Yaklaşımı*) $X \subseteq \mathcal{O}$, algılanabilen nesnelerin kümesi ve B kümesi de $\mathcal{O}$ daki nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonların kümesi olsun. $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin başka bir yaklaşımı, X kümesi ile ara kesiti boştan farklı olan $[x]_B \in \mathcal{O} / \sim_B$ sınıflarının birleşiminden oluşur. Bu yaklaşıma X in B – üst yaklaşımı denir ve

$$B^*X = \bigcup_{[x]_B \cap X \neq \emptyset} [x]_B$$

ile gösterilir. Diğer bir ifade ile B^*X üst yaklaşımın X deki bir nesneye tanımı ile eşleşen en az bir nesne tanımı içeren sınıfının birleşiminden oluşur.

B_*X alt yaklaşımı, B^*X üst yaklaşımının alt kümesidir. B^*X üst yaklaşımının alt kümesi olmayan bir veya birden fazla $[x]_B \in \mathcal{O} / \sim_B$ sınıfları olabilir ya da olmayabilir.

Teorem 3.1.16. ([2]) $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; B^*X üst yaklaşımı ve X kümesi yakın kümelerdir.

Boştan Farklı Sınır Bölgesi Olan Yakın Küme: Bir yakın kümenin sınırı boştan farklı olduğunda X kümesi alt ve üst yaklaşıma sahip olan küme olarak dikkate alınabilir. $Bnd_B X \neq \emptyset$ ise X , yaklaşıma sahip olan ya da yaklaşık olarak B deki fonksiyonlarla ilişkili

olan yakın kümedir. $Bnd_B X \neq \emptyset$ ise $|Bnd_B X| > 0$ dır. Bu durumda, X kümesi yaklaşıma sahip olan bir yakın kümedir.

Tablo 3.2. Yakınlık Yaklaşım Uzayı

Sembol	Anlamı
$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_B)$	Temel yaklaşım uzayı, $B \subseteq \mathcal{F}$
B^*X	$\bigcup_{[x]_B \cap X \neq \emptyset} [x]_B, X \text{ in } B$ – üst yaklaşımı
B_*X	$\bigcup_{[x]_B \subseteq X} [x]_B, X \text{ in } B$ – alt yaklaşımı
$Bnd_B X$	$Bnd_B X = B^*X \setminus B_*X = \{x x \in B^*X \text{ ve } x \notin B_*X\}$.

Teorem 3.1.17. ([2]) (Temel Yakınlık Küme Teoremi) $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; $|Bnd_B X| \geq 0$ ise X kümesi yakın kümedir.

3.2.Zayıf Yakınlık Yaklaşım Uzayı ve Özellikleri

Bu kısımda, zayıf yakınlık yaklaşım uzayı kavramı yapısal olarak tüm bileşenleri ile dikkate alınacaktır. Cebirsel yapılarla çalışıldığında yakınlık fonksiyonu olan $v_{N_r}: \wp(\mathcal{O}) \times \wp(\mathcal{O}) \rightarrow [0,1]$ e ihtiyaç yoktur ([3]). Bundan dolayı zayıf yakınlık yaklaşım uzayı tanımlaması gerekmiştir. Zayıf yakınlık yaklaşım uzayı tanımlaması aşağıdaki (Tablo 3.3.) kavramlar yardımıyla tanımlanır.

Tablo 3.3. Zayıf Yakınlık Yaklaşım Uzayı

Sembol	Anlamı
B	$B \subseteq \mathcal{F}$
r	$\binom{ B }{r}$, yani $\varphi_i \in B$ fonksiyonlarının sayısının r li kombinasyonu,
B_r	$r \leq B $,
$\sim_{B_r}$	B_r yardımıyla tanımlanan ayırt edilemezlik bağıntısı,
$[x]_{B_r}$	$r \leq B $, $[x]_{B_r} = \{x' \in \mathcal{O} \mid x \sim_{B_r} x'\}$ yakınlık sınıfı,
$\mathcal{O} / \sim_{B_r}$	$\mathcal{O} / \sim_{B_r} = \{[x]_{B_r} \mid x \in \mathcal{O}\}$ bölüm kümesi,
$\xi_{\mathcal{O}, B_r}$	$\xi_{\mathcal{O}, B_r} = \mathcal{O} / \sim_{B_r}$,
$N_r(B)$	$N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O}, B_r} \mid B_r \subseteq B\}$ ayrışımaların kümesi,
$N_r(B)^* X$	$N_r(B)^* X = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap X \neq \emptyset} [x]_{B_r}$, X in üst yaklaşımı

$\mathcal{O}$ algılanabilir nesnelerin kümesi ve $\mathcal{F}$ kümesi de nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ olmak üzere; r , B_r kümesinin kardinalitesi ve " $\sim_{B_r}$ ", B_r yardımıyla tanımlanan ayırt edilemezlik bağıntısıdır. B_r kümesinin her seçimi, " $\sim_{B_r}$ " ayırt edilemezlik bağıntısının $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin farklı bir ayrışımının tanımlanmasına yol açar. Bu seçim; $r < |B|$, B deki çıkarım fonksiyonlarının sayısı olmak üzere, $\binom{|B|}{r}$ farklı şekilde yapılabilir. Böylece " $\sim_{B_r}$ ", $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $\xi_{\mathcal{O}, B_r} = \mathcal{O} / \sim_{B_r}$ ayrışımını belirleyen bir ayırt edilemezlik bağıntısı, $N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O}, B_r} \mid B_r \subseteq B\}$ ayrışımaların bir ailesidir. $X \subseteq \mathcal{O}$ ise X in üst yaklaşımı;

$$N_r(B)^*X = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap X \neq \emptyset} [x]_{B_r}$$

ve X in alt yaklaşımı;

$$N_r(B)_*X = \bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq X} [x]_{B_r}$$

şeklindedir (Bkz. [1], [3]).

Tanım 3.2.1. ([3]) $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi, $\mathcal{F}$ nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $r < |B|$ olmak üzere; " $\sim_{B_r}$ ", $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $\xi_{\mathcal{O}, B_r} = \mathcal{O} / \sim_{B_r}$ ayrışımını belirleyen bir ayırt edilemezlik bağıntısı, $N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O}, B_r} | B_r \subseteq B\}$ ayrışımının kümesi olsun. Bu durumda $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ yapısına zayıf yakınlık yaklaşım uzayı denir.

Teorem 3.2.2. ([6]) $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ bir zayıf yakınlık yaklaşım uzayı ve $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- i)* $N_r(B)_*X \subseteq X \subseteq N_r(B)^*X$.
- ii)* $N_r(B)^*(X \cup Y) = (N_r(B)^*X) \cup (N_r(B)^*Y)$.
- iii)* $N_r(B)_*(X \cap Y) = (N_r(B)_*X) \cap (N_r(B)_*Y)$.
- iv)* $X \subseteq Y$ ise $N_r(B)_*X \subseteq N_r(B)_*Y$.
- v)* $X \subseteq Y$ ise $N_r(B)^*X \subseteq N_r(B)^*Y$.
- vi)* $N_r(B)_*(X \cup Y) \supseteq (N_r(B)_*X) \cup (N_r(B)_*Y)$.
- vii)* $N_r(B)^*(X \cap Y) \subseteq (N_r(B)^*X) \cap (N_r(B)^*Y)$.

3.3.Yakınlık Grubu, Yakınlık Halkası ve Yakınlık İdeali Özellikleri

Tanım 3.3.1. ([30]) $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ bir zayıf yakınlık yaklaşım uzayı, $G \subseteq \mathcal{O}$ ve $\cdot : G \times G \rightarrow N_r(B)^*G$ bir işlemi olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa G ye $\mathcal{O}$ üzerinde bir grup veya kısaca yakınlık grubu denir.

(NG₁) $x \cdot y \in N_r(B)^*G, \forall x, y \in G$.

(NG₂) $N_r(B)^*G$ de $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x, y \in G$ sağlar.

(NG₃) $\forall x \in G$ için $x \cdot e = x = e \cdot x$ olacak şekilde $e \in N_r(B)^*G$ vardır.

(NG₄) $\forall x \in G$ için $x \cdot y = e = y \cdot x$ olacak şekilde $y \in G$ vardır.

Tanım 3.3.2. ([30]) $G, N_r(B)^*(N_r(B)^*G) = N_r(B)^*G$ olacak şekilde bir yakınlık grubu ve $H, N_r(B)^*G$ nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa H ye G nin üst yakınlık alt grubu denir ve $H \preceq G$ ile gösterilir.

i) $x \cdot y \in N_r(B)^*H, \forall x, y \in H$.

ii) $x^{-1} \in H, \forall x \in H$.

Tanım 3.3.3. ([10]) $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ bir yakınlık yaklaşım uzayı ve $\mathcal{O}$ üzerinde tanımlanan $'' + ''$ ve $'' \cdot ''$ ikili işlemler olsun. Aşağıdaki özellikler karşılanıyorsa, $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin bir R alt kümesine yakınlık halkası denir.

(YR₁) $(R, +), \mathcal{O}$ üzerinde değişmeli grup,

(YR₂) $(R, \cdot), \mathcal{O}$ üzerinde bir yarı grup,

(YR₃) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ ve $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ özellikleri $\forall x, y, z \in R$ için $N_r(B)^*R$ de sağlanır.

Ayrıca,

(YR₄) $\forall x, y \in R \quad x \cdot y = y \cdot x$ ise R ye değişmeli yakınlık halkası denir.

(YR₅) Her $x \in R$ için $1_R \cdot x = x = x \cdot 1_R$ olacak şekilde bir $1_R \in N_r(B)^*R$ varsa o zaman R ye birimli yakınlık halkası denir.

Tanım 3.3.4. ([10]) $R, \mathcal{O}$ yakınlık yaklaşım uzayında bir halka ve S, R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. S, R yakınlık halkasında $'' + ''$ ve $'' \cdot ''$ ikili işlemlerine sahip bir yakınlık halkası ise o zaman S ye R nin yakınlık alt halkası denir.

Lemma 3.3.5. ([10]) $R, \mathcal{O}$ yakınlık yaklaşım uzayında bir halka, R nin yakınlık alt halkaların boştan farklı bir ailesi $\{S_i | i \in \Delta\}$ ve $N_r(B)^*S_i$ -ler grupoid olsun. Eğer

$$\bigcap_{i \in \Delta} (N_r(B)^*S_i) = N_r(B)^* \left(\bigcap_{i \in \Delta} S_i \right)$$

ise $\bigcap_{i \in \Delta} S_i, R$ nin bir alt yakınlık halkasıdır.

Tanım 3.3.6. ([10]) $R, \mathcal{O}$ yakınlık yaklaşım uzayında bir halka ve I, R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Her $x, y \in I$ ve $r \in R$ için $x - y \in N_r(B)^*I$ ve $r \cdot x \in N_r(B)^*I$ ($x - y \in N_r(B)^*I$ ve $x \cdot r \in N_r(B)^*I$) ise I ya R nin sol (sağ) yakınlık ideali denir. $I; R$ nin hem sol hem de sağ yakınlık ideali ise o zaman I ya R nin yakınlık ideali denir.

Lemma 3.3.7. ([10]) $R, \mathcal{O}$ yakınlık yaklaşım uzayında bir halka, $\{I_i | i \in \Delta\}; R$ nin yakınlık alt halkaların boştan farklı bir ailesi ve $N_r(B)^*I_i$ ler grupoid olsun. Eğer

$$\bigcap_{i \in \Delta} (N_r(B)^*I_i) = N_r(B)^* \left(\bigcap_{i \in \Delta} I_i \right)$$

ise $\bigcap_{i \in \Delta} I_i, R$ nin bir yakınlık idealidir.

Tanım 3.3.8. ([14]) S bir yakınlık yarı-halkası, A, B ve $P; S$ nin yakınlık idealleri olsun. $AB \subseteq N_r(B)^*P$ ($AA \subseteq N_r(B)^*P$) olduğunda $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ ($A \subseteq P$) oluyorsa P ye R nin asal (yarı asal) yakınlık ideali denir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Yakınlık Halkalarının Bir Alt Kümesi Tarafından Üretilen Yakınlık İdeali

Tanım 3.2.1 dikkate alındığında, Tanım 3.3.3, Tanım 3.3.4, Lemma 3.3.5, Tanım 3.3.6, Lemma 3.3.7 zayıf yakınlık yaklaşım uzayı için aşağıdaki gibi yeniden ifade edilir.

Tanım 4.1.1. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ bir zayıf yakınlık yaklaşım uzayı, $R \subseteq \mathcal{O}$, $+: R \times R \rightarrow N_r(B)^*R$ ve $\cdot: R \times R \rightarrow N_r(B)^*R$ işlemleri verilsin. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa R ye $\mathcal{O}$ üzerinde bir halka veya kısaca yakınlık halkası denir.

(YR₁) R , " + " yakınlık ikili işlem ile $\mathcal{O}$ üzerinde bir değişmeli grup,

(YR₂) R , " · " yakınlık ikili işlem ile $\mathcal{O}$ üzerinde bir yarı grup,

(YR₃) $\forall x, y, z \in R, x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ ve $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

özellikleri $N_r(B)^*R$ de sağlar.

Ek olarak;

(YR₄) Her $x, y \in R$ için $x \cdot y = y \cdot x$ ise R ye değişmeli yakınlık halkası denir.

(YR₅) Her $x \in R$ için $1_R \cdot x = x = x \cdot 1_R$ olacak şekilde bir $1_R \in N_r(B)^*R$ varsa R ye birimli bir yakınlık halkası denir.

Tanım 4.1.2. $R, (\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B))$ (veya $\mathcal{O}$) zayıf yakınlık yaklaşım uzayında bir halka ve S, R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. $S; R$ yakınlık halkasındaki " + " ve " · " yakınlık ikili işlemleriyle bir yakınlık halkasıysa, S ye R nin yakınlık alt halkası denir. Lemma 3.3.5 in ispatı ile aynı ispat olan aşağıdaki Lemma yı verelim.

Lemma 4.1.3. $R, \mathcal{O}$ zayıf yakınlık yaklaşım uzayında bir halka, $\{S_i | i \in I\}$, R nin boş olmayan yakınlık alt halkaların bir ailesi olsun. Eğer

$$\bigcap_{i \in \Delta} (N_r(B)^*S_i) = N_r(B)^* \left(\bigcap_{i \in \Delta} S_i \right)$$

ise $\bigcap_{i \in \Delta} S_i$, R nin bir yakınlık alt halkasıdır.

Tanım 4.1.4. R , $\mathcal{O}$ zayıf yakınlık yaklaşım uzayında bir halka ve I, R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. $\forall x, y \in I$ ve $\forall r \in R$, $x - y \in N_r(B)^*I$ ve $r \cdot x \in N_r(B)^*I$ ($x - y \in N_r(B)^*I$ ve $x \cdot r \in N_r(B)^*I$) sağlanırsa o zaman I ya R nin bir sol (sağ) yakınlık ideali denir.

Bir yakınlık halkası R nin boş olmayan bir I kümesi, R nin hem sol hem de sağ yakınlık idealiyse I ya R nin yakınlık ideali denir.

Lemma 3.3.7 nin ispatı ile aynı ispat olan aşağıdaki Lemma yı verelim.

Lemma 4.1.5. R , $\mathcal{O}$ zayıf yakınlık yaklaşım uzayında bir halka ve $\{I_i | i \in \Delta\}$, R nin boş olmayan yakınlık ideallerin bir kümesi olsun. Eğer

$$\bigcap_{i \in \Delta} (N_r(B)^*I_i) = N_r(B)^* \left(\bigcap_{i \in \Delta} I_i \right)$$

ise $\bigcap_{i \in \Delta} I_i$, R nin bir yakınlık idealidir.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümelerini dikkate alalım. Bu kümelerin her elemanın, bir ve yalnızca bir özelliği olduğundan, bu kümelerin üst ve alt yaklaşımları $r = 1$ için birbirine eşittir. Diğer bir ifadeyle;

$$N_1(B)_* \mathbb{N} = \mathbb{N} = N_r(B)^* \mathbb{N}$$

$$N_1(B)_* \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = N_r(B)^* \mathbb{Z}$$

$$N_1(B)_* \mathbb{Q} = \mathbb{Q} = N_r(B)^* \mathbb{Q}$$

$$N_1(B)_* \mathbb{R} = \mathbb{R} = N_r(B)^* \mathbb{R}$$

$$N_1(B)_* \mathbb{C} = \mathbb{C} = N_r(B)^* \mathbb{C}$$

dir. Bu durumda, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümeleri cebirsel yapılardır, yani yakınlık cebirsel yapılardır. Örneğin, $\mathbb{Z}$ bir yakınlık halkasıdır. Bu tezde, $R \subset N_r(B)^*R$ olan yakınlık halkasının yakınlık ideallerinin özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.1.6. R bir yakınlık halkası, $B \subseteq \mathcal{F}$ ve $r \leq |B|$ olmak üzere; $B_r \subseteq \mathcal{F}$ ve $\sim_{B_r}, \mathcal{O}$ üzerinde bir ayırt edilemezlik bağıntısı olsun. Eğer $x, y \in R$ için $x \sim_{B_r} y$ olduğunda her $a \in$

R için $x + a \sim_{B_r} y + a$, $a + x \sim_{B_r} a + y$, $xa \sim_{B_r} ya$ ve $ax \sim_{B_r} ay$ oluyorsa $\sim_{B_r}$ ye R üzerinde bir kongrüent ayırt edilemezlik bağıntısı denir.

Lemma 4.1.7. R bir yakınlık halkası olsun. Eğer $\sim_{B_r}$, R üzerinde bir kongrüent ayırt edilemezlik bağıntısı ise o zaman her $a \in R$ için $[x]_{B_r} + [y]_{B_r} \subseteq [x + y]_{B_r}$ ve $[x]_{B_r}[y]_{B_r} \subseteq [xy]_{B_r}$ dir.

İspat. $z \in [x]_{B_r} + [y]_{B_r}$ olsun. Bu durumda, $z = a + b$; $a \in [x]_{B_r}$, $b \in [y]_{B_r}$ dir. Buradan $x \sim_{B_r} a$ ve $y \sim_{B_r} b$ dir. Hipotezden $x + y \sim_{B_r} a + y$ ve $a + y \sim_{B_r} a + b$ olduğundan $x + y \sim_{B_r} a + b$ olur ve dolayısıyla $z = a + b \in [x + y]_{B_r}$ elde edilir. Benzer şekilde $[x]_{B_r}[y]_{B_r} \subseteq [xy]_{B_r}$ dir.

R bir yakınlık halkası olsun. X ve Y , R nin alt kümeleri ise o zaman;

$$X + Y = \{x + y | x \in X \text{ ve } y \in Y\} \text{ ve } XY = \{\sum_{\text{sonlu}} x_i y_i | x_i \in X \text{ ve } y_i \in Y\} \text{ dir.}$$

Lemma 4.1.8. R bir yakınlık halkası, $\sim_{B_r}$ kongrüent ayırt edilmezlik bağıntısı olsun. Aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i) $X, Y \subseteq R$ ise $(N_r(B)^*X) + (N_r(B)^*Y) \subseteq N_r(B)^*(X + Y)$ dir.

ii) $X, Y \subseteq R$ ise $(N_r(B)^*X)(N_r(B)^*Y) \subseteq N_r(B)^*(XY)$ dir.

İspat. i) $x \in N_r(B)^*X + N_r(B)^*Y$ olsun. Bu durumda, $x = a + b$; $a \in N_r(B)^*X$, $b \in N_r(B)^*Y$ dir. $a \in N_r(B)^*X \Rightarrow [a]_{B_r} \cap X \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in [a]_{B_r} \cap X \Rightarrow y \in [a]_{B_r}$ ve $y \in X$. Aynı şekilde, $b \in N_r(B)^*Y \Rightarrow [b]_{B_r} \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in [b]_{B_r} \cap Y \Rightarrow z \in [b]_{B_r}$ ve $z \in Y$. **Lemma 4.1.7** den $w = y + z \in [a]_{B_r} + [b]_{B_r} \subseteq [a + b]_{B_r}$ olduğundan $w \in [a + b]_{B_r}$ ve $w \in X + Y$ elde edilir. Böylece, $w \in [a + b]_{B_r} \cap (X + Y) \Rightarrow [a + b]_{B_r} \cap (X + Y) \neq \emptyset$ ve dolayısıyla $x = a + b \in N_r(B)^*(X + Y)$ dir.

ii) $x \in (N_r(B)^*X)(N_r(B)^*Y)$ olsun. $a_i \in N_r(B)^*X$ ve $b_i \in N_r(B)^*Y$, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere; $x = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ dir. Eğer $a_i \in N_r(B)^*X$ ise $[a_i]_{B_r} \cap X \neq \emptyset$ ve $b_i \in N_r(B)^*Y$ ise $[b_i]_{B_r} \cap Y \neq \emptyset$ dir. Yani, $1 \leq i \leq n$ için $x_i \in [a_i]_{B_r}$ ve $y_i \in [b_i]_{B_r}$ olacak biçimde $x_i \in X$ ve $y_i \in Y$ elemanları vardır. O halde, **Lemma 4.1.7** den $x_i y_i \in [a_i]_{B_r}[b_i]_{B_r} \subseteq [a_i b_i]_{B_r}$, $1 \leq$

$i \leq n$ dir. Dolayısıyla $\sum_{i=1} x_i y_i \in [\sum_{i=1} a_i b_i]_{B_r} = [x]_{B_r}$ ve $\sum_{i=1} x_i y_i \in XY$ dir. Bu durumda $[x]_{B_r} \cap (XY) \neq \emptyset$ olur ve dolayısıyla $x \in N_r(B)^*(XY)$ elde edilir.

Tanım 4.1.9. R bir yakınlık halkası, $B \subseteq \mathcal{F}$ ve $r \leq |B|$ olmak üzere; $B_r \subseteq \mathcal{F}$ ve $\sim_{B_r}, \mathcal{O}$ üzerinde bir ayırt edilemezlik bağıntısı olsun. Bu durumda, her $x, y \in R$ için $[x]_{B_r} + [y]_{B_r} = [x + y]_{B_r}$ ve $[x]_{B_r}[y]_{B_r} = [xy]_{B_r}$ ise $\sim_{B_r}$ ye R üzerinde tam bir kongrüent ayırt edilemezlik bağıntısı denir.

Şimdi, Lemma 4.1.8 in ispatıyla aynı olan aşağıdaki Teoremi verelim.

Teorem 4.1.10. R bir yakınlık halkası ve $\sim_{B_r}, R$ üzerinde bir tam kongrüent ayırt edilemezlik bağıntısı ve $X, Y; R$ nin boş olmayan iki alt kümesi olsun. Aşağıdaki özellikler geçerlidir.

$$i) N_r(B)^*X + N_r(B)^*Y = N_r(B)^*(X + Y).$$

$$ii) (N_r(B)^*X)(N_r(B)^*Y) = N_r(B)^*(XY).$$

Tanım 4.1.11. $R, N_r(B)^*(N_r(B)^*R) = N_r(B)^*R$ olacak şekilde bir yakınlık halkası ve $S, N_r(B)^*R$ nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa S ye R nin üst yakınlık alt halkası denir.

$$i) x - y \in N_r(B)^*S, \forall x, y \in S,$$

$$ii) x \cdot y \in N_r(B)^*S, \forall x, y \in S.$$

Tanım 4.1.12. $R, N_r(B)^*(N_r(B)^*R) = N_r(B)^*R$ olacak şekilde bir yakınlık halkası ve $A, N_r(B)^*R$ nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa A ya R nin sol (sağ) üst yakınlık ideali denir.

$$i) x - y \in N_r(B)^*A, \forall x, y \in A,$$

$$ii) r \cdot x \in N_r(B)^*A (x \cdot r \in N_r(B)^*A), \forall x \in A \text{ ve } \forall r \in N_r(B)^*R.$$

Eğer A, R nin hem sol üst hem de sağ üst yakınlık ideali ise A ya R nin üst yakınlık ideali denir.

Lemma 3.3.7 nin ispatıyla aynı olan aşağıdaki Teoremi verelim.

Teorem 4.1.13. $R, N_r(B)^*(N_r(B)^*R) = N_r(B)^*R$ olacak şekilde bir yakınlık halkası ve $\{A_i | i \in I\}, R$ nin üst yakınlık ideallerin bir ailesi olsun. Eğer

$$\bigcap_{i \in I} (N_r(B)^*A_i) = N_r(B)^* \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$$

ise $\bigcap_{i \in I} A_i, R$ nin bir üst yakınlık idealidir.

Tanım 4.1.14. $R, N_r(B)^*(N_r(B)^*R) = N_r(B)^*R$ olacak şekilde bir yakınlık halkası ve $\{A_i | i \in I\}, X$ i kapsayan R nin bütün üst yakınlık ideallerin bir ailesi olsun. Eğer

$$\bigcap_{i \in I} (N_r(B)^*A_i) = N_r(B)^* \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$$

ise $\bigcap_{i \in I} A_i, X$ kümesi tarafından üretilen üst yakınlık ideali denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. X in elemanlarına $\langle X \rangle$ üst yakınlık idealin üreteçleri denir.

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise $\langle X \rangle = \langle \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rangle$ ye sonlu üretilmiştir, denir. Eğer $X = \{a\}$ ise o zaman $\langle X \rangle = \langle a \rangle$ ya a tarafından üretilen esas yakınlık ideali denir.

Teorem 4.1.15. $R, N_r(B)^*(N_r(B)^*R) = N_r(B)^*R$ olacak şekilde bir yakınlık halkası ve $a \in N_r(B)^*R$ olsun. Bu durumda,

i) $N_r(B)^*(N_r(B)^*\langle a \rangle) = N_r(B)^*\langle a \rangle$ ise o zaman,

$$\langle a \rangle = \left\{ na + ra + as + \sum_{i=1}^m r_i as_i | r, s, r_i, s_i \in N_r(B)^*R, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

dir.

ii) R birimli bir yakınlık halkası, $N_r(B)^*(N_r(B)^*\langle a \rangle) = N_r(B)^*\langle a \rangle$ ise o zaman,

$$\langle a \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m r_i as_i | r_i, s_i \in N_r(B)^*R, m \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

dir.

İspat. i) $T = \{na + ra + as + \sum_{i=1}^m r_i as_i \mid r, s, r_i, s_i \in N_r(B)^*R, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+\}$ olsun. İlk olarak, T nin R nin üst yakınlık ideali olduğunu ispatlayalım.

$$0_R = 0_{\mathbb{Z}}a + 0_Ra + a0_R + \sum_{i=1}^m r_i a0_R$$

olduğundan $0_R \in T$ olur ve dolayısıyla $T \neq \emptyset$ dir. $x, y \in T$ olsun. Bu durumda

$$x = na + ra + as + \sum_{i=1}^m r_i as_i; r, s, r_i, s_i \in N_r(B)^*R, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+,$$

$$y = n'a + r'a + as' + \sum_{i=1}^p r'_i as'_i; r', s', r'_i, s'_i \in N_r(B)^*R, n' \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^+$$

dir. Şimdi $x - y \in N_r(B)^*T$ olduğunu gösterelim.

$$x - y = na + ra + as + \sum_{i=1}^m r_i as_i - (n'a + r'a + as' + \sum_{i=1}^p r'_i as'_i)$$

$$= na + ra + as + \sum_{i=1}^m r_i as_i - n'a - r'a - as' - \sum_{i=1}^p r'_i as'_i$$

$$= na + ra + as - n'a - r'a - as' + \sum_{i=1}^m r_i as_i - \sum_{i=1}^p r'_i as'_i$$

$$= na - n'a + ra - r'a + as - as' + \sum_{i=1}^m r_i as_i - \sum_{i=1}^p r'_i as'_i$$

$$= (n - n')a + (r - r')a + a(s - s') + \sum_{i=1}^{m+p} r''_i as''_i$$

$$= n''a + r''a + as'' + \sum_{i=1}^{m+p} r''_i as''_i$$

olur. Bu durumda $x - y \in T$ dir. *Teorem 3.2.2. (i)* den $x - y \in N_r(B)^*T$. Son olarak; $\forall x \in T, \forall k \in N_r(B)^*R$.

$$\begin{aligned}
kx &= k \left(na + ra + as + \sum_{i=1}^m r_i as_i \right) \\
&= k(na) + k(ra) + k(as) + k \left(\sum_{i=1}^m r_i as_i \right) \\
&= k(a + a + \cdots + a) + kr(a) + kas + \sum_{i=1}^m k(r_i as_i) \\
&= ka + ka + \cdots + ka + kr(a) + kas + \sum_{i=1}^m (k r_i) as_i \\
&= (k + k + \cdots + k + kr)a + kas + \sum_{i=1}^m (k r_i) as_i \\
&= (k + k + \cdots + kr)a + \sum_{i=1}^{m+1} r_i'' as_i'' \\
&= r''a + \sum_{i=1}^{m+1} r_i'' as_i'' \\
&= 0_{\mathbb{Z}}a + r''a + a0_R + \sum_{i=1}^{m+1} r_i'' as_i''
\end{aligned}$$

dır. O halde; $kx \in T$ dir. *Teorem 3.2.2. (i)* den $kx \in N_r(B)^*T$ dir. Benzer şekilde $xk \in N_r(B)^*T$ elde edilir.

Şimdi, $T = \langle a \rangle$ olduğunu gösterilirse ispat biter. *Tanım 4.1.14* ten A_i -ler R nin üst yakınlık idealleri olmak üzere;

$$\langle a \rangle = \bigcap_{i \in I} A_i ; a \in A_i, \forall i \in I. \quad (4.15)$$

dir. $x \in \langle a \rangle$ olsun. Buradan $x \in \bigcap_{i \in I} A_i ; x \in A_i, \forall i \in I$. Öte yandan

$$a = 1_{\mathbb{Z}}a + 0_Ra + a0_R + \sum_{i=1}^m r_i a 0_R; 0_R, r_i \in N_r(B)^*R, 1_{\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+$$

olur ve dolayısıyla $a \in T$ elde edilir. T, a yı içeren A_i -lerden biri olduğundan (4.15) ten $x \in T$ dir. Böylece

$$\langle a \rangle \subseteq T \quad (4.16)$$

elde edilir. $x \in T$ olsun. Bu durumda,

$$x = na + ra + as + \sum_{i=1}^m r_i as_i; r, s, r_i, s_i \in N_r(B)^*R, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+$$

dir. Böylece (4.15) ten $a \in \langle a \rangle$ olur ve hipotezden $x \in \langle a \rangle$ elde edilir. O halde

$$T \subseteq \langle a \rangle \quad (4.17)$$

dir. Bu durumda (4.16) ve (4.17) den $\langle a \rangle = T$ elde edilir.

ii) Şimdi

$$D = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i as_i \mid r_i, s_i \in N_r(B)^*R, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

olarak alınsın. (i) den

$$\langle a \rangle = \left\{ na + ra + as + \sum_{i=1}^m r_i as_i \mid r, s, r_i, s_i \in N_r(B)^*R, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

dır. Bu durumda, R birimli ve $x \in \langle a \rangle$ olduğundan

$$\begin{aligned} x &= na + ra + as + \sum_{i=1}^m r_i as_i \\ &= a + a + \cdots + a + ra + as \sum_{i=1}^m r_i as_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1_R a 1_R + 1_R a 1_R + \cdots + 1_R a 1_R + r a 1_R + 1_R a s + \sum_{i=1}^m r_i a s_i \\
&= 1_R a 1_R + 1_R a 1_R + \cdots + 1_R a 1_R + r a 1_R + 1_R a s + r_1 a s_1 + \cdots + r_m a s_m \\
&= r_1 a s_1 + r_2 a s_2 + \cdots + r_n a s_n + r_{n+1} a s_{n+1} + \cdots + r_{n+m+2} a s_{n+m+2} \\
&= \sum_{i=1}^{n+m+2} r_i a s_i
\end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla $x \in D$ dir. Buradan $\langle a \rangle \subseteq D$ elde edilir. $D \subseteq \langle a \rangle$ olduğu açıktır. Böylece, $\langle a \rangle = D$ elde edilir.

Tanım 4.1.16. R bir yakınlık halkası olsun. $C(R) = \{c \in R \mid cr = rc, \forall r \in R\}$ kümesine R nin yakınlık merkezi denir.

Tanım 4.1.17. $R, N_r(B)^*(N_r(B)^*R) = N_r(B)^*R$ olacak şekilde bir yakınlık halkası olsun. $C(N_r(B)^*R) = \{c \in N_r(B)^*R \mid cr = rc, \forall r \in N_r(B)^*R\}$ kümesine R nin üst yakınlık merkezi denir.

$C(R)$ (veya $C(N_r(B)^*R)$), R nin bir alt yakınlık halkası (veya üst alt yakınlık halkası) olduğu kolayca gösterilir. Ancak, $C(R)$ (veya $C(N_r(B)^*R)$), R nin yakınlık ideali (veya üst yakınlık ideali) olmayabilir.

Teorem 4.1.18. $R, N_r(B)^*(N_r(B)^*R) = N_r(B)^*R$ olacak şekilde bir yakınlık halkası, $C(N_r(B)^*R), R$ nin üst yakınlık merkezi, $X; N_r(B)^*R$ nin boş olmayan bir alt kümesi, $a \in N_r(B)^*R$ ve $N_r(B)^*R$ birleşme ve dağılma özellikleri sağlansın. Bu durumda,

i) Eğer $N_r(B)^*(N_r(B)^*\langle a \rangle) = N_r(B)^*\langle a \rangle$ ve $a \in C(N_r(B)^*R)$ ise o zaman

$$\langle a \rangle = \{na + ra \mid r \in N_r(B)^*R, n \in \mathbb{Z}\}$$

dır.

ii) $(N_r(B)^*R)a = \{ra \mid r \in N_r(B)^*R\}$ ($a(N_r(B)^*R) = \{ar \mid r \in N_r(B)^*R\}$) kümesi R nin bir sol (sağ) üst yakınlık idealidir. Eğer R birimli bir yakınlık halkası, $N_r(B)^*(N_r(B)^*\langle$

$a >) = N_r(B)^* < a >$ ve $a \in C(N_r(B)^*R)$ ise o zaman, $(N_r(B)^*R)a = < a > = a(N_r(B)^*R)$ dir.

iii) Eğer R birimli bir yakınlık halkası, $N_r(B)^*(N_r(B)^* < X >) = N_r(B)^* < X >$ ve $X \subset C(N_r(B)^*R)$ ise o zaman

$$< X > = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i a_i \mid r_i \in N_r(B)^*R, a_i \in X, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

dır.

İspat. i) $I = \{na + ra \mid r \in N_r(B)^*R, n \in \mathbb{Z}^+\}$ olarak alınsın. Teorem 4.1.15. (i) den

$$< a > = \left\{ na + ra + as + \sum_{i=1}^m r_i a s_i \mid r, s, r_i, s_i \in N_r(B)^*R, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

dır. $a \in C(N_r(B)^*R)$ ise o zaman her $r \in N_r(B)^*R$ için $ar = ra$ dir. Böylece $x \in < a >$ için

$$x = na + ra + as + \sum_{i=1}^m r_i a s_i$$

$$= na + ra + as + \sum_{i=1}^m r_i s_i a$$

$$= na + \left(r + s + \sum_{i=1}^m r_i s_i \right) a$$

$$= na + r'a$$

elde edilir. Buradan $x \in I$ olur ve dolayısıyla $< a > \subseteq I$ dir. $I \subseteq < a >$ olduğu açıktır. O halde, $< a > = I$ dir.

ii) $(N_r(B)^*R)a = \{ra \in N_r(B)^*R \mid r \in N_r(B)^*R\}$ kümesi R nin bir sol üst yakınlık ideali olduğunu gösterelim.

Şimdi $x, y \in (N_r(B)^*R)a$ olsun. Bu durumda $x = r_1a$ ve $y = r_2a$ olacak biçimde $r_1, r_2 \in N_r(B)^*R$ vardır. Bu durumda, $N_r(B)^*R$ de çarpma işlemin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği olduğundan $x - y = r_1a - r_2a = (r_1 - r_2)a \in (N_r(B)^*R)a$ dir. Böylece, *Teorem 3.2.2. (i)* den $x - y \in N_r(B)^*(N_r(B)^*R)a$ elde edilir.

$x \in (N_r(B)^*R)a$ ve $r \in N_r(B)^*R$ olsun. O halde, $x = r_1a$ olacak şekilde bir $r_1 \in N_r(B)^*R$ vardır. $N_r(B)^*R$ de çarpma işlemi birleşme özelliği sağladığından $rx = r(r_1a) = (rr_1)a$ olur ve dolayısıyla $rr_1 \in N_r(B)^*R$ olduğundan $rx \in (N_r(B)^*R)a$ dir. *Teorem 3.2.2. (i)* den $rx \in N_r(B)^*(N_r(B)^*R)a$. Böylece $(N_r(B)^*R)a, R$ nin üst yakınlık idealidir.

Şimdi, $N_r(B)^*(N_r(B)^* <a>) = N_r(B)^* <a>$ ve $a \in C(N_r(B)^*R)$ olduğundan (i) den $<a> = \{na + ra | n \in \mathbb{Z}, r \in N_r(B)^*R\}$ dir. Bu durumda $x \in (N_r(B)^*R)a$ için $x = ra$, $r \in N_r(B)^*R$ olur. Buradan $x = 0_{\mathbb{Z}}a + ra \in <a>$ dir. Böylece;

$$(N_r(B)^*R)a \subseteq <a> \quad (4.18)$$

elde edilir. $x \in <a>$ olsun. O halde, $x = na + ra; n \in \mathbb{Z}, r \in N_r(B)^*R$ dir. Böylece R birimli ve $N_r(B)^*(N_r(B)^*R) = N_r(B)^*R$ olduğundan

$$\begin{aligned} x &= a + a + \cdots + a + ra \\ &= 1_Ra + 1_Ra + \cdots + 1_Ra + ra \\ &= (1_R + 1_R + \cdots + 1_R + r)a \\ &= r'a \end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Burada $r' = 1_R + 1_R + \cdots + 1_R + r \in (N_r(B)^*R)$ olduğundan $x = r'a \in (N_r(B)^*R)a$ olur ve dolayısıyla,

$$<a> \subseteq (N_r(B)^*R)a \quad (4.19)$$

dir. Böylece (4.18) ve (4.19) den $<a> = (N_r(B)^*R)a$ elde edilir Benzer şekilde $a(N_r(B)^*R) = <a>$ olduğu gösterilir. Böylece $(N_r(B)^*R)a = <a> = a(N_r(B)^*R)$ dir.

iii) R birimli ve $X \subseteq C(N_r(B)^*R)$ olsun. Bu durumda;

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i a_i \mid r_i \in N_r(B)^*R, a_i \in X, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

olarak alınsın. İlk olarak, T ; R nin üst yakınlık ideali olduğunu gösterelim. Her $x, y \in T$ için

$$x = \sum_{i=1}^n r_i a_i \text{ ve } y = \sum_{i=1}^{n'} r'_i a'_i; r_i, r'_i \in N_r(B)^*R; a_i, a'_i \in X; n, n' \in \mathbb{Z}^+.$$

Böylece

$$\begin{aligned} x - y &= \sum_{i=1}^n r_i a_i - \sum_{i=1}^{n'} r'_i a'_i \\ &= (r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n) - (r'_1 a'_1 + r'_2 a'_2 + \cdots + r'_{n'} a'_{n'}) \\ &= r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n - r'_1 a'_1 - r'_2 a'_2 - \cdots - r'_{n'} a'_{n'} \\ &= r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n + r_{n+1} a_{n+1} + r_{n+2} a_{n+2} + \cdots + r_{n+n'} a_{n+n'} \\ &= \sum_{i=1}^{n+n'} r_i a_i \end{aligned}$$

$x - y \in T$. Teorem 3.2.2. (i) den $x - y \in N_r(B)^*T$ elde edilir. Böylece $(T, +) \leq (R, +)$ dır. $x \in T$ ve $s \in N_r(B)^*R$ olsun. Bu durumda $x = \sum_{i=1}^n r_i a_i; r_i \in N_r(B)^*R, a_i \in X, n \in \mathbb{Z}^+$ dır.

$$xs = \left(\sum_{i=1}^n r_i a_i \right) s = \sum_{i=1}^n r_i a_i s = \sum_{i=1}^n (r_i s) a_i; r_i, s \in N_r(B)^*R, a_i \in X; n \in \mathbb{Z}^+$$

$$sx = s \left(\sum_{i=1}^n r_i a_i \right) = \sum_{i=1}^n (s r_i) a_i; s, r_i \in N_r(B)^*R, a_i \in X; n \in \mathbb{Z}^+$$

olur ve dolayısıyla Teorem 3.2.2. (i) den $xs, sx \in N_r(B)^*T$ dir. Böylece T, R nin üst yakınlık idealidir.

Şimdi $T = \langle X \rangle$ i gösterelim. $\langle X \rangle = \bigcap_{i \in I} A_i$; $X \subseteq A_i$, A_i -ler R nin üst yakınlık idealleridir. $\forall i \in I$, $x \in T$ olsun. Bu durumda, $x = \sum_{i=1}^n r_i a_i$; $r_i \in N_r(B)^* R$, $a_i \in X \subseteq A_i$, $n \in \mathbb{Z}^+$ dır. A_i -ler R nin üst yakınlık ideali olduğundan $x \in \bigcap_{i \in I} A_i = \langle X \rangle$ ve dolayısıyla

$$T \subseteq \langle X \rangle \quad (4.20)$$

elde edilir. Eğer $y \in X$ ise $y = 1_R y \Rightarrow y \in T \Rightarrow X \subseteq T$.

$\langle X \rangle = \bigcap_{i \in I} A_i$; $X \subseteq A_i$ ve A_i -ler, R nin üst yakınlık idealleri olduğundan T , X i içeren R nin üst yakınlık ideallerinden biridir. $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_i$ olduğundan $\langle X \rangle = \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq T$ olur. Böylece

$$\langle X \rangle \subseteq T \quad (4.21)$$

dir. Bu durumda (4.20) ve (4.21) den $\langle X \rangle = T$ elde edilir.

4.2. Asal Yakınlık İdealleri

Tanım 4.2.1. R bir yakınlık halkası, A, B ve $P; R$ nin üst yakınlık idealleri olsun. $AB \subseteq N_r(B)^*P$ olduğunda $A \subseteq N_r(B)^*P$ veya $B \subseteq N_r(B)^*P$ oluyorsa P ye R nin asal üst yakınlık ideali denir.

Başka bir deyişle, R yakınlık halkası ve P, R nin üst yakınlık ideali olsun. Her $a, b \in N_r(B)^*R$ için $ab \in N_r(B)^*P$ olduğunda $a \in N_r(B)^*P$ veya $b \in N_r(B)^*P$ olursa P ye R nin asal üst yakınlık ideali denir.

Teorem 4.2.2. $R; N_r(B)^*(N_r(B)^*R) = N_r(B)^*R$ olacak şekilde bir yakınlık halkası, $\sim_{B_r}$, $N_r(B)^*R$ üzerinde bir kongrüent ayırt edilemezlik bağıntısı ve $P; N_r(B)^*(N_r(B)^*P) = N_r(B)^*P$ olacak şekilde R nin üst yakınlık ideali olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

i) P bir asal üst yakınlık idealidir.

ii) Eğer $a, b \in N_r(B)^*R$ için $a(N_r(B)^*R)b \subseteq N_r(B)^*P$ ise o zaman $a \in N_r(B)^*P$ veya $b \in N_r(B)^*P$ dir.

iii) Eğer $\langle a \rangle$ ve $\langle b \rangle$ sırasıyla $N_r(B)^*(N_r(B)^*\langle a \rangle) = N_r(B)^*\langle a \rangle$ ve $N_r(B)^*(N_r(B)^*\langle b \rangle) = N_r(B)^*\langle b \rangle$ olacak şekilde R nin esas üst yakınlık idealleri $\langle a \rangle \langle b \rangle \subseteq N_r(B)^*P$ ise o zaman $a \in N_r(B)^*P$ veya $b \in N_r(B)^*P$ dir.

iv) Eğer U ve $V, UV \subseteq N_r(B)^*P$ olacak şekilde R nin üst yakınlık idealleri ise o zaman $U \subseteq N_r(B)^*P$ veya $V \subseteq N_r(B)^*P$ dir.

İspat. *i) $\Rightarrow$ ii):* P asal üst yakınlık ideali ve $a, b \in N_r(B)^*R$ için $a(N_r(B)^*R)b \subseteq N_r(B)^*P$ olsun. O halde, $N_r(B)^*(N_r(B)^*P) = N_r(B)^*P$ den

$$(N_r(B)^*R)a(N_r(B)^*R)b(N_r(B)^*R) \subseteq N_r(B)^*P$$

elde edilir. Diğer taraftan Lemma 4.1.8. (ii) den $(N_r(B)^*R)(N_r(B)^*R) \subseteq N_r(B)^*(RR)$ dir. $R, N_r(B)^*(N_r(B)^*R) = N_r(B)^*R$ ve $RR \subseteq N_r(B)^*R$ olacak şekilde bir yakınlık halkası olduğundan Teorem 3.2.2. (v) den $N_r(B)^*(RR) \subseteq N_r(B)^*(N_r(B)^*R) = N_r(B)^*R$ dir. Böylece $(N_r(B)^*R)(N_r(B)^*R) \subseteq N_r(B)^*R$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& ((N_r(B)^*R)a(N_r(B)^*R))((N_r(B)^*R)b(N_r(B)^*R)) \\
& \subseteq (N_r(B)^*R)a(N_r(B)^*R)b(N_r(B)^*R) \\
& \subseteq N_r(B)^*P
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $(N_r(B)^*R)a(N_r(B)^*R)$ ve $(N_r(B)^*R)b(N_r(B)^*R)$, R nin üst yakınlık idealleri olduğundan hipotezden $(N_r(B)^*R)a(N_r(B)^*R) \subseteq N_r(B)^*P$ veya $(N_r(B)^*R)b(N_r(B)^*R) \subseteq N_r(B)^*P$ dir.

Eğer $(N_r(B)^*R)a(N_r(B)^*R) \subseteq N_r(B)^*P$ ise $A = \langle a \rangle$, $N_r(B)^*(N_r(B)^* \langle a \rangle) = N_r(B)^* \langle a \rangle$ olacak şekilde alınırsa $A^3 \subseteq (N_r(B)^*R)a(N_r(B)^*R) \subseteq N_r(B)^*P$ olur ve dolayısıyla hipotezden $A^2 \subseteq N_r(B)^*P$ veya $A \subseteq N_r(B)^*P$ dir. Eğer $A^2 \subseteq N_r(B)^*P$ ise $AA \subseteq N_r(B)^*P$ olur. Burada tekrar hipotez kullanılırsa $A \subseteq N_r(B)^*P$ elde edilir. Böylece $a \in \langle a \rangle = A \subseteq N_r(B)^*P$ olduğundan $a \in N_r(B)^*P$ elde edilir.

Eğer $(N_r(B)^*R)b(N_r(B)^*R) \subseteq P$ ise benzer şekilde $b \in N_r(B)^*P$ elde edilir.

ii) $\Rightarrow$ iii): Her $a, b \in N_r(B)^*R$ için $a(N_r(B)^*R)b \subseteq N_r(B)^*P$ olduğunda $a \in N_r(B)^*P$ veya $b \in N_r(B)^*P$ ve $N_r(B)^*(N_r(B)^* \langle a \rangle) = N_r(B)^* \langle a \rangle$ ve $N_r(B)^*(N_r(B)^* \langle b \rangle) = N_r(B)^* \langle b \rangle$ olacak şekilde R nin esas üst yakınlık idealleri için $\langle a \rangle \langle b \rangle \subseteq N_r(B)^*P$ olsun. Bu durumda $\langle a \rangle \langle b \rangle \subseteq N_r(B)^*P$ ve $a(N_r(B)^*R)b \subseteq \langle a \rangle \langle b \rangle$ olduğundan $a(N_r(B)^*R)b \subseteq N_r(B)^*P$ elde edilir. Böylece hipotezden $a \in N_r(B)^*P$ veya $b \in N_r(B)^*P$ dir.

iii) $\Rightarrow$ iv): U ve V , R nin üst yakınlık idealleri ve $UV \subseteq N_r(B)^*P$ olsun. Varsayalım ki $U \not\subseteq N_r(B)^*P$ ve $UV \subseteq N_r(B)^*P$ olsun. O halde, $u \in U$ ve $u \notin N_r(B)^*P$ olacak şekilde bir u elemanı vardır. Eğer $v \in V$ alınırsa o zaman $\langle u \rangle \langle v \rangle \subseteq UV + (N_r(B)^*R)UV \subseteq N_r(B)^*P$ olur ve dolayısıyla $u \notin N_r(B)^*P$ ve hipotezden $v \in N_r(B)^*P$ elde edilir. O halde $V \subseteq N_r(B)^*P$ dir.

iv) $\Rightarrow$ i): U, V ; R nin üst yakınlık idealleri ve $UV \subseteq N_r(B)^*P$ olsun. Böylece (iv) den $U \subseteq N_r(B)^*P$ veya $V \subseteq N_r(B)^*P$ elde edilir. Bu durumda Tanım 4.2.1 den P asal üst yakınlık idealdir.

Bazı teoremlerde ek hipoteze gerek duymadan ispatların yapılması için Tanım 3.3.8 den farklı, aşağıdaki gibi tanımı yakınlık halkaları için verilecektir.

Tanım 4.2.3. R bir yakınlık halkası A, B ve P ; R nin yakınlık idealleri olsun. $AB \subseteq N_r(B)^*P$ olduğunda $A \subseteq N_r(B)^*P$ veya $B \subseteq N_r(B)^*P$ oluyorsa P ye R nin asal yakınlık ideali denir.

Tanım 4.2.4. R bir yakınlık halkası ve A, R nin bir yakınlık ideali olsun. Bu durumda $A \neq R$ ve $A \subset B \subset R$ olacak şekilde R nin bir yakınlık B ideali yoksa o zaman A ya R nin bir maksimal yakınlık ideali denir.

Örnek 4.2.5 $\mathcal{O} = \{x, y, z, p, r, s, t\}$ bir algılanabilir nesneler kümesi, $r = 1$, $\mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının bir kümesi olmak üzere; $B = \{\varphi_1, \varphi_2\} \subseteq \mathcal{F}$ ve $R = \{z, p, t\} \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Çıkarım fonksiyonları aşağıda verilen tablodaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned}\varphi_1: \mathcal{O} &\rightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} \\ \varphi_2: \mathcal{O} &\rightarrow V_2 = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7\}\end{aligned}$$

Tablo 4.1. Nesnelerin Özellikleri

	x	y	z	p	r	s	t
φ_1	α_1	α_2	α_3	α_3	α_2	α_4	α_5
φ_2	α_2	α_3	α_5	α_5	α_7	α_2	α_3

Şimdi, $\mathcal{O}$ daki elemanların $\sim_B$ ayırt edilemezlik bağıntısına göre yakın denklik sınıflarını bulalım.

$$[x]\varphi_1 = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(x) = \alpha_1\} = \{x\},$$

$$\begin{aligned}[y]\varphi_1 &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(y) = \alpha_2\} \\ &= \{y, r\} = [r]\varphi_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[z]\varphi_1 &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(z) = \alpha_3\} \\ &= \{z, p\} = [p]\varphi_1,\end{aligned}$$

$$[s]\varphi_1 = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(s) = \alpha_4\} = \{s\}$$

$$[t]\varphi_1 = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(t) = \alpha_5\} = \{t\}$$

Bu durumda $\xi\varphi_1 = \{[x]\varphi_1, [y]\varphi_1, [z]\varphi_1, [s]\varphi_1, [t]\varphi_1\}$ elde edilir.

$$\begin{aligned} [x]\varphi_2 &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(x) = \alpha_2\} \\ &= \{x, s\} = [s]\varphi_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [y]\varphi_2 &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(y) = \alpha_3\} \\ &= \{y, t\} = [t]\varphi_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [z]\varphi_2 &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(z) = \alpha_5\} \\ &= \{z, p\} = [p]\varphi_2, \end{aligned}$$

$$[r]\varphi_2 = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(r) = \alpha_7\} = \{r\}$$

Böylece, $\xi\varphi_2 = \{[x]\varphi_2, [y]\varphi_2, [z]\varphi_2, [r]\varphi_2\}$ olur. Sonuç olarak $\mathcal{O}$ nun bir bölümü $r = 1$ için $N_r(B) = \{\xi\varphi_1, \xi\varphi_2\}$ olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} N_r(B)^*R &= \bigcup_{[x]\varphi_i \cap R \neq \emptyset} [x]\varphi_i \\ &= [z]\varphi_1 \cup [t]\varphi_1 \cup [y]\varphi_2 \cup [z]\varphi_2 \\ &= \{y, z, p, t\} \end{aligned}$$

elde edilir. R kümesi için Tablo 4.2 ve Tablo 4.3 deki işlem tabloları dikkate alınsın.

Tablo 4.2. *Toplama İşlemi*

+	<i>z</i>	<i>p</i>	<i>t</i>
<i>z</i>	<i>y</i>	<i>t</i>	<i>p</i>
<i>p</i>	<i>t</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
<i>t</i>	<i>p</i>	<i>z</i>	<i>y</i>

Tablo 4.3. *Çarpma İşlemi*

·	<i>z</i>	<i>p</i>	<i>t</i>
<i>z</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>z</i>
<i>p</i>	<i>y</i>	<i>p</i>	<i>p</i>
<i>t</i>	<i>y</i>	<i>t</i>	<i>t</i>

Bu durumda $(R, +, \cdot)$ bir yakınlık halkasıdır. $A = \{p, t\}$; R nin alt kümesi alalım. A, R nin yakınlık ideali ve $A \subset B \subset R$ olacak şekilde herhangi bir B ideali yoktur. Böylece A, R nin bir maksimal idealidir.

Örnek 4.2.6. $\langle 3 \rangle$ maksimal yakınlık idealidir. Ancak, $\langle 4 \rangle \subset \langle 2 \rangle \subset \mathbb{Z}$ olduğundan $\langle 4 \rangle, \mathbb{Z}$ nin bir maksimal yakınlık ideal değildir.

Teorem 4.2.7. R birimli ve değişmeli bir yakınlık halkası ve $A, N_r(B)^*(N_r(B)^*A) = N_r(B)^*A$ olacak şekilde R nin bir yakınlık ideali olsun. Eğer A maksimal yakınlık ideali ise o zaman A bir asal yakınlık idealdir.

İspat. $a, b \in R$ ve her $r \in R$ için $arb \in N_r(B)^*A$ olduğunda $a \in N_r(B)^*A$ veya $b \in N_r(B)^*$ olduğu gösterilirse ispat biter. R değişmeli olduğundan $aR = \{ax|x \in R\}$, R nin bir yakınlık idealidir. Eğer $a \notin A$ ise o zaman $A + aR = \{m + ax|m \in A, x \in R\}$, R nin yakınlık ideali ve $A \subsetneq A + aR$ dir. Böylece A maksimal ideal olduğundan $R = A + aR$ olur. O halde, R birimli bir yakınlık halkası olduğundan $1 = m + ax$ olacak şekilde $m \in A$

ve $x \in R$ vardır. $1 = m + ax \Rightarrow b = mb + axb \in N_r(B)^*A$. Böylece, *Tanım 4.2.3* den A bir asal yakınlık idealdir.



5.SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Yakınlık halkalarının daha ileri bir çalışması olarak, bu makale zayıf yakınlık yaklaşım uzayları üzerine bazı ideal kavramlarını tanıtmaktadır. Olağan idealler tarafından sağlanan bazı özelliklerin yakınlık halkalarında sağlanmadığı gösterilmiştir. Yakınlık ideali teorisinin cebirsel yapıları için elde edilen sonuçların, yakınlık halkası teorisi için teorik geliştirme açısından daha faydalı olacağına inanıyoruz. Bu makalenin devamında, Γ – yakınlık halkaları, yakınlık yarı halkaları, yakınlık halkaları vb. bazı teoremler ve özellikler kanıtlanabilir.



KAYNAKÇA

- [1] Peters, J. F. (2007) “Near sets: General theory about nearness of objects”. *Applied Mathematical Sciences*, 1 (53-56), 2609-2629.
- [2] Pawlak, Z. (1982) “Rough sets”. *International journal of computing and information sciences*, 11 (5), 341-356.
- [3] Molodtsov, D. (1999) “Soft set theory-first results”. *Computers & Mathematics with Applications*, 37, 19–31.
- [4] Zadeh, L. A. (1962) “From circuit theory to system theory”. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 50, 856–865.
- [5] Zadeh, L. A. (1965) “Fuzzy sets”. *Information and Contro*, 8, 338-353.
- [6] Öztürk, M. A. and Tekin, Ö. (2021) Gamma nearness hemirings, *Afr. Math.* 32 (7), 1491-1502.
- [7] Peters, J. F. (2008) “Classification of perceptual objects by means of features”. *International Journal of Information Technology and Intelligent Computing*, 3 (2), 1-35.
- [8] Öztürk, M. A., Çelik Siner, İ. and Jun, Y. B. (2015) “Nearness BCK-algebras”. *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics*, 8 (4), 37-57.
- [9] Peters, J. F. (2007) “Near sets: Special theory about nearness of objects”. *Fundamenta Informaticae*, 75 (1-4), 407-433.
- [10] Peters, J. F. and Wasilewski, P. (2009) “Foundations of near sets”. *Information Sciences*, 179 (18), 3091–3109.
- [11] Peters, J. F. (2013) “Near sets: An introduction”. *Mathematics in Computer Science*, 7 (1), 3-9.
- [12] Öztürk, M. A., Jun, Y. B. and İz, A. (2019) “Gamma semigroups on weak nearness approximation spaces”. *Journal of International Mathematical Virtual Institute*, 9, 53-72.

- [13] Öztürk, M. A. (2019) “Prime ideals of gamma semigroups on weak nearness approximation spaces”. *Asian-European Journal of Mathematics*, 12 (5), 1950080 (10 Pages).
- [14] İnan, E. and Öztürk, M. A. (2014) “Erratum and notes for near groups on nearness approximation spaces”. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43 (2), 279-281.
- [15] İnan, E. and Öztürk, M. A. (2015) “Near semigroups on nearness approximation spaces”. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 10 (2), 287-297.
- [16] İnan, E. and Öztürk, M. A. (2019) “Nearness rings”. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 17 (2), 115-132.
- [17] Öztürk, M. A. and Jun, Y. B. (2019) “Nobusawa gamma nearness rings”. *New Mathematics and Natural Computation*, 15 (2), 373-394.
- [18] Tekin, Ö. and Öztürk, M. A. (2022) “Nearness subgroups”. *New Mathematics and Natural Computation*, (In press), <https://doi.org/10.1142/S1793005723500242>.
- [19] Öztürk, M. A. (2018) “Semirings on weak nearness approximation spaces”. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 15 (3), 227-241.
- [20] Golan, J. S. (1999) *Semirings and Their Applications*, Kluwer Academic Publishers.
- [21] Öztürk, M. A. and Temur, İ. (2019) “Prime ideals of nearness semirings”. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics*, 68 (2), 1867-1878.
- [22] Öztürk, M. A. and İnan, E. (2013) “Soft nearness approximation spaces”. *Fundamenta Informaticae*, 124 (1), 231-250.
- [23] Öztürk, M. A., Uçkun, M. and İnan, E. (2014) “Near groups of weak cosets on nearness approximation spaces”. *Fundamenta Informaticae*, 133, 433-448.
- [24] Öztürk, M. A. and Tekin, Ö. (2021) “Gamma nearness hemirings”. *Afrika Matematika*, 32 (7), 1491-1502.
- [25] Tekin, Ö. (2021) “Quasi ideals of nearness semirings”. *Cumhuriyet Science Journal*, 42 (2), 333-338.

- [26] Tekin, Ö. (2021) “Bi-ideals of nearness semirings”. *European Journal of Science and Technology*, Special Issue 28, 11-15.
- [27] Tekin, Ö. and Öztürk, M. A. (2022) “Nobusawa gamma nearness hemirings”. *Asian-European Journal of Mathematics*, 15 (6), 2250112 (22 Pages).
- [28] Öztürk, M. A. and Bekmezci, İ. H. (2020) “Gamma nearness semirings”. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 44 (4), 567–586.
- [29] Öztürk, M. A. (2020) A note on ideals of the nearness hemirings. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 20 (3), 235–242.
- [30] Öztürk, M. A. (2021) “Nearness d -algebras”. *Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras*, 2 (3), 73-84.
- [31] Öztürk, M. A. and Yazarlı, H. (2021) “Nobusawa gamma nearness semirings”. *New Mathematics and Natural Computation*, 17 (3), 571–588.
- [32] Peters, J. F. and Naimpally, S. A. (2012) “Applications of near sets”. *Notices of the American Mathematical Society*, 59 (4), 536-542.