



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**YANSIMA BAĞINTILI UZAYLAR KATEGORİSİNDE KAPANIŞ
OPERATÖRLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gökberk Batuhan KAÇAR

DANIŞMAN

Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

AKSARAY, 2025

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 222342435 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Gökberk Batuhan KAÇAR tarafından hazırlanan “**YANSIMA BAĞINTILI UZAYLAR KATEGORİSİNDE KAPANIŞ OPERATÖRLERİ**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Halis BİLGİL

Kayseri Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 12.06.2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Fazliye KARABÖRK

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Gökberk Batuhan KAÇAR

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince sabır, rehberlik ve desteğini esirgemeyen,engin bilgi birikimi ve tecrübeleriyle çalışmamın kalitesini üst seviyelere taşımamızı sağlayan, sadece akademik alanda değil, kişisel gelişimimde de büyük katkılar sunan Sayın Prof. Dr. Ayhan ERCİYES'e en içten şükranlarımı sunarım.

Ayrıca, Tez çalışmalarım sırasında bana destek olan Aksaray Üniversitesi öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Son olarak, bu süreçte bana sabırla destek olan ve inancını hiç kaybetmeyen anneme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Gökberk Batuhan KAÇAR
AKSARAY, 2025

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KATEGORİK KAVRAMLAR.....	4
2.1 Kategori.....	4
2.2 Özel Morfizmler.....	5
2.3 Fanktor ve Doğal Dönüşüm.....	5
2.4 Topolojik Fanktor.....	7
2.5 Wedge Çarpımı ve Eksen Dönüşümleri.....	10
3. BAĞINTI UZAYLAR.....	14
3.1 Topoloji ve Sıralama Uzayları Arasındaki İlişki.....	14
3.2 Yansıma Bağintılı Uzaylar.....	15
3.3 Yansıma Bağintılı Uzaylar Kategorisi.....	16
4. KAPALI ALT OBJELER.....	22
4.1 Topolojik Uzaylarda Kapalılık.....	22
4.2 Yansıma Bağintılı Uzaylar (Kuvvetli) Kapalılık.....	26
4.3 Bazı Topolojik Kategorilerde Kapalılık Kavramı.....	32
5. KAPANIŞ OPERATÖRLERİ.....	34
5.1 Kapanış Operatörü.....	34
5.2 Bazı Topolojik Kategorilerde Kapanış Operatörleri Sonuçları.....	40
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	42
KAYNAKLAR.....	44
ÖZGEÇMİŞ.....	46

YÜKSEK LİSANS TEZİ
YANSIMA BAĞINTILI UZAYLAR KATEGORİSİNDE KAPANIŞ
OPERATÖRLERİ

Gökberk Batuhan KAÇAR

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

ÖZET

Bu çalışmada, objeleri yansıma bağıntılı uzaylar ve morfizmleri bağıntı koruyan dönüşümler olan ***RRel*** kategorisi incelenmiştir. Öncelikle, bu kategorinin normalleştirilmiş bir topolojik kategori olduğu gösterilmiştir. Ardından, bilinen anlamda kapalılık kavramının topolojik kategoriye genelleştirilmesi ***RRel*** kategorisine uyarlanmıştır. (B, R) yansıma bağıntılı uzayında $x \in B$ olsun. “ $\{x\}$ kümesi kapalıdır, ancak ve ancak R bağıntısı x noktasında ters simetriktir” şeklindeki teorem ispat edilmiştir. Bu teorem $M \subseteq B$ alt kümesinin kapalılığı ve kuvvetli kapalılığı ile ilişkilendirilmiş, ifade ve ispat edilmiştir. Daha sonra bazı bilinen topolojik kategorilerdeki kapalılık ile ilgili sonuçlar elde ettiğimiz sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen kapalılık kavramının, Dikranjan ve Giuli anlamında kapanış operatörü olduğu gösterilmiştir. Ardından cl_X , scl_X , q_X ve sq_X şeklindeki kapanış operatörleri araştırılmış, aralarındaki ilişkiler belirlenmiş, zayıf kalıtsal, kalıtsal, çarpımsal ve idempotent olma gibi bazı özellikleri sağlayıp sağlamadıkları araştırılmıştır. Daha sonra c bir kapanış operatörü olmak üzere ***RRel*** in alt kategorisi olan ***RRel*_{0c}**, ***RRel*_{1c}** ve ***RRel*_{2c}** kategorileri üzerine çalışılmıştır. Hem bu kategoriler hem de ***T₀RRel***, ***T₀'RRel*** ve ***T₁RRel*** kategorileri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Son olarak bilinen topolojik kategorilerdeki kapanış operatörleri ile ilgili sonuçlar elde ettiğimiz sonuçlar ile kıyaslanmıştır. Tezin son bölümünde ise hem kapalılık, hem de kapanış operatörleriyle ilgili öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Topolojik Fanktor, Yansıma Bağıntılı Uzaylar, Wedge Çarpımı, Kapalı Alt Objeler, Kapanış Operatörleri.

Haziran, 2025; 46 sayfa

M. Sc. THESIS

CLOSURE OPERATORS IN CATEGORY OF THE REFLEXIVE
RELATION SPACES

Gökberk Batuhan KAÇAR

Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ayhan ERÇİYES

ABSTRACT

This paper investigates the category $\mathbf{RRel}$, whose morphisms are relation-preserving functions and objects are reflexive relation spaces. First of all, it has been shown that this category is a normalized topological. Moreover, the concept of closure in its classical sense was generalized to the topological category and has been adapted to the category $\mathbf{RRel}$. Let (B, R) be the reflexive relational space, and let $x \in B$. The theorem stating that ' $\{x\}$ is closed if and only if the relation R is antisymmetric at the point x ' has been proven. This theorem is associated with the closedness and strong closedness of the subset $M \subseteq B$, and has been expressed and proven. Furthermore, our results on closure were compared with those in some well-known topological categories. Moreover, it has been shown that the resulting closure concepts are closure operators in the sense of Dikranjan and Giuli. Then, closure operators such as cl_X , scl_X , q_X and sq_X were investigated, the relationships between them were determined, and it was investigated whether they provided some properties such as weak hereditary, hereditary, productive and idempotent. Subsequently, categories $\mathbf{RRel}_{0c}$, $\mathbf{RRel}_{1c}$ and $\mathbf{RRel}_{2c}$, which are subcategories of $\mathbf{RRel}$, were studied, with c being a closure operator. The relationships between these categories and the categories $\bar{T}_0\mathbf{RRel}$, $T_0'\mathbf{RRel}$ and $T_1\mathbf{RRel}$ were examined. Lastly, our findings were contrasted with those pertaining to closure operators in established topological categories.

Keywords: Topological Functor, Reflexive Relation Spaces, Wedge Product, Closed Subobjects, Closure Operators.

June, 2025; 46 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Top da doğal dönüşüm diyagramı.....	7
Şekil 2.2. F -kaynağına göre topolojik kategori diyagramı	8
Şekil 2.3. F -kavşağına göre topolojik kategori diyagramı	9
Şekil 2.4. Wedge çarpımı diyagramı	10
Şekil 2.5. Set de pushout karesi.....	10
Şekil 2.6. Set de pushout diyagramı	11
Şekil 3.1. p de $\bar{T}_0$ diyagramı.....	18
Şekil 3.2. p de T_0' diyagramı	18
Şekil 3.3. (B, R) uzayında noktada $\bar{T}_0, T_0, T_0'$ ve T_1 olma durumu	19
Şekil 3.4. $\bar{T}_0$ diyagramı	19
Şekil 3.5. T_0' diyagramı	20
Şekil 3.6. (B, R) uzayında genelde $\bar{T}_0, T_0, T_0'$ ve T_1 olma durumu	21
Şekil 4.1. Tek nokta kümesinin kapalılığı	23
Şekil 4.2. M nin kuvvetli kapalılığı	24
Şekil 4.3. Bir kümenin kuvvetli kapalılığı	25
Şekil 4.4. $\{p\}$ kümesinin kapalılık diyagramı	26
Şekil 5.1. Kapanış operatörleri diyagramı	35

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathcal{C}$	Kategori
$cl(A)$	A Kümesinin Kapanışı
$Field$	Cisimlerin Kategorisi
Grp	Gruplar Kategorisi
Met	Metrik Uzaylar Kategorisi
Mon	Monoidlerin Kategorisi
$Mor(\mathcal{C})$	$\mathcal{C}$ Kategorisinin Morfizmleri Kümesi
$Ob(\mathcal{C})$	$\mathcal{C}$ Kategorisinin Objeleri Kümesi
Rel	Bağıntı Uzaylar Kategorisi
$Ring$	Halkaların Kategorisi
$RRel$	Yansıma Bağıntı Uzaylar Kategorisi
$scl(A)$	A Kümesinin Kuvvetli Kapanışı
Set	Kümeler Kategorisi
Top	Topolojik Uzaylar Kategorisi
$Vect$	Tüm Vektör Uzayların Kategorisi
$V_p^\infty X$	X in p de Sayılabilir Sonsuz Ayırık Kopyası
$X \coprod X$	X in X ile Ayırık Birleşimi
$X \vee_p X$	X in p de Wedge Çarpımı

1. GİRİŞ

Order teorisi (Sıralama teorisi), matematiksel yapılar arasında düzen ilişkilerini inceleyen bir dal olup özellikle kısmi sıralamalar ve tam sıralamalar üzerine odaklanır [1]. Order teori, kümeler üzerindeki ikili ilişkilerin düzenlenmesiyle ilgilenir ve hem soyut matematikte hem de uygulamalı alanlarda geniş bir kullanım alanına sahiptir. Sıralama teorisi, özellikle latis teorisi, graf teorisi, mantık, bilgisayar bilimi, veri analizi, yapay zekâ, ekonomi ve karar verme sistemleri gibi disiplinlerde temel bir rol oynar [2]. Order teorisi, teorik matematikte ve uygulamalı bilimlerde kritik bir rol oynar. Özellikle veri sıralama, karar verme ve bilgi temsili gibi alanlarda sağladığı yapı sayesinde birçok disiplinde temel bir araç haline gelmiştir. Order teorisi, bilgisayar biliminde özellikle topolojik sıralama, tip sistemleri ve veri tabanı sıralamaları gibi alanlarda kullanılır. Örneğin, yönlendirilmiş döngüsüz grafiklerde topolojik sıralama algoritmaları, kısmi sıralama ilişkilerine dayanır [3]. Yapay zekâda, tercih öğrenme ve bilgi temsili gibi alanlarda sıralama ilişkileri kullanılır. Ontolojilerde kavramlar arasındaki hiyerarşik ilişkiler, kısmi sıralama ile modellenir [4]. Ekonomide, tüketici tercihleri ve fayda fonksiyonları sıralama teorisi ile modellenebilir. Özellikle çok kriterli karar verme yöntemlerinde alternatiflerin sıralanması, kısmi sıralama yapıları ile ifade edilir [5]. Model teorisi ve kümeler teorisinde, sıralı yapılar mantıksal çıkarımların temelini oluşturur. Özellikle domain theory, bilgisayar biliminde semantik analiz için kullanılır [2]. Ayrıca, filo genetik ağaçlar ve genetik veri analizi gibi biyo informatik uygulamalarda, türler veya gen dizilimleri arasındaki sıralama ilişkileri Order teorisi ile modellenebilir.

Order teorisinin kategori ile olan ilişkisine gelince verilen uzaylar arasındaki bağıntı koruyan dönüşümler ile birlikte kısmi sıralı kümelerden oluşan **Poset**, ön sıralama bağıntılı uzaylardan oluşan **Preord**, denk bağıntılardan oluşan **Denk**, bağıntı uzaylardan oluşan **Rel**, yansıma bağıntılı uzaylardan oluşan **RRel** kategorileri Order teorisi ile ilişkilidir.

Topolojik kategoriler, kategori teorisinin soyut yapısını topolojik kavramlarla birleştiren özel matematiksel yapılardır. Bu tür kategorilerde objeler ve morfizm kümeleri topolojik uzaylarla donatılmıştır ve kategori aksiyomları bu topolojik yapılarla uyumlu olacak şekilde tanımlanır [6]. Bu yapı, klasik kategori teorisinin soyut morfizm anlayışını, topolojinin süreklilik ve yakınlık kavramlarıyla

zenginleştirir. En temel örneklerden biri olan **Top** kategorisinde, objeler topolojik uzaylar, dönüşümler ise sürekli fonksiyonlardır. Bu kategori, cebirsel topoloji, diferansiyel geometri ve fonksiyonel analiz gibi alanlarda temel bir rol oynar. Topolojik kategoriler, topolojinin kavramlarını genelleştirerek daha geniş bir teorik çerçeve sunar [7]. Ayrıca **TopGrp** gibi daha özel kategorilerde, nesneler topolojik gruplar olup morfizm hem grup homomorfizması hem de sürekli fonksiyon olma koşulunu taşır [8]. Topolojik kategorilerde limit ve co-limit kavramları, hem kategorik hem de topolojik anlamda tanımlanabilir; bu da soyut yapılarla geometrik sezgiler arasında güçlü bir bağ kurulmasını sağlar. Özellikle homotopi teorisi, temel grup yapıları ve sürekli dönüşümler gibi kavramlar, topolojik kategoriler aracılığıyla daha sistematik biçimde modellenabilir [9]. Bu bağlamda, topolojik kategoriler yalnızca matematiksel soyutlamayı değil, aynı zamanda fiziksel sistemlerin ve bilgi yapılarının modellenmesini de mümkün kılar.

Topolojik kategorinin ve topolojinin benzer yönleri şu şekildedir:

1. Süreklilik Kavramı

- Topolojide sürekli fonksiyonlar uzaylar arasındaki temel dönüşümlerdir.
- Topolojik kategorilerde de morfizm bileşimi ve hom-set yapıları süreklilik şartını sağlar [6].

2. Morfizm Olarak Sürekli Fonksiyonlar

- Topolojide uzaylar arasındaki ilişkiler sürekli fonksiyonlarla elde edilir.
- Topolojik kategorilerde morfizmler genellikle sürekli fonksiyonlardır.

3. Limit ve Colimit Kavramları

- Topolojide üretilen uzaylar limit kavramıyla ilişkilidir.
- Topolojik kategorilerde limit ve co-limitler hem kategorik hem de topolojik anlamda yapısal uygunluğu koruyan dönüşümlerle tanımlanır [9].

4. Homeomorfizm ve İzomorfizmler ile Elde Edilen Denklik Kavramları

- Topolojide homeomorfizmler uzayların topolojik olarak denkliğini belirtir.
- Topolojik kategorilerde ise izomorfizmler, homeomorfizmlerin kategorik karşılığıdır.

5. Topolojik Yapılar

- Topoloji, geometrik sezgileri soyut açık küme ve süreklilik yapılarıyla ifade eder.
- Topolojik kategoriler, bu sezgileri daha üst düzeyde morfizm ve yapı ilişkileriyle genelleştirir.

Topolojik kategorilerde, bir objenin kapanışı, onu belirli bir alt kategoride temsil eden en yakın objeye dönüştüren bir yapı olarak yorumlanır. Bu yaklaşım, klasik topolojideki Kuratowski kapanış operatörünün genelleştirilmiş bir şeklidir. Bir kategoride kapanış operatörü genellikle bir epirefleksif alt kategori ile ilişkilendirilir. Bir kategorideki epirefleksif alt kategori, her objenin bu alt kategorideki bir objeye epimorfizma yoluyla yansıtılmasını sağlar. Bu yansıma, kapanış operatörü tarafından gerçekleştirilir. Örneğin, **Top** kategorisinde (topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonlar), Kuratowski kapanış operatörü bir kümenin en küçük kapalı süper kümesini verirken, kategorik bağlamda bu işlem bir objeyi kapalı alt kategoriye yansıtan bir morfizma ile temsil edilir [10].

Bu tez çalışmasında yansıma bağıntılı uzaylarda (kuvvetli) kapalı alt kümeler 1993 yılında Baran tarafından yayınlanan “The notion of closedness in topological categories” ve 2000 yılında yayınlanan “Closure operators in convergence spaces” isimli makaleleri temel alınmıştır [11,12]. Çalışmada, kuvvetli kapalı (kuvvetli açık) ve kapalı (açık) alt kümeler karakterize edilmiş, bu kategorideki cl_X , scl_X , $q_X(M)$, $sq_X(M)$, Q_X ve SQ_X şeklindeki kapanış operatörler incelenmiş ve bu operatörlerin zayıf kalıtsal, kalıtsal, çarpımsal ve idempotent gibi bazı özellikleri sağlayıp sağlamadıkları araştırılmıştır. Daha sonra bu kapanış operatörlerine göre elde edilen **RRel** in alt kategorisi olan **RRel**_{0c}, **RRel**_{1c} ve **RRel**_{2c} kategorileri ile $\bar{T}_0$, T_0' , T_0 ve T_1 yansıma bağıntılı uzayların her biri karakterize edilmiştir. Ardından bu alt kategoriler arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Son olarak da diğer bazı kategoriler ile bizim elde ettiğimiz sonuçlar karşılaştırılmıştır.

2. TEMEL KATEGORİK KAVRAMLAR

2.1 Kategori

Kategori teorisi, matematiğin farklı alanlarını birleştiren soyut bir çerçeve sunan güçlü bir teoridir. 1940'larda Samuel Eilenberg ve Saunders Mac Lane tarafından geliştirilmiş olup, matematiksel yapıları ve bunlar arasındaki ilişkileri inceleyen bir teoridir [13]. Kategori teorisi, matematiksel yapıları ve dönüşümleri soyut bir çerçevede inceleyen bir disiplindir. Kategoriler, objeler ve bu objeler arasındaki dönüşümler olan morfizmlerden oluşur. Bu yapı sayesinde cebir, topoloji ve mantık gibi birçok matematiksel alan ortak bir dilde ifade edilebilir.

Tanım 2.1.1 $\mathcal{C}$ bir sınıf olsun. $\mathcal{C}$ de ki tüm objelerin sınıfı $Ob(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}$ de ki tüm morfizmlerin sınıfı $Hom(\mathcal{C})$, $\forall A \in Ob(\mathcal{C})$ için $id_A: A \rightarrow A$ morfizmi ve $\mathcal{C}(A, B) = \{f | f: A \rightarrow B \text{ morfizm}\}$ olsun. İki obje arasındaki morfizmlerin bileşke işlemi $\circ: Hom(A, B) \times Hom(B, C) \rightarrow Hom(A, C)$, $(f, g) \rightarrow g \circ f$ şartları sağlarsa $\mathcal{C} = (Ob(\mathcal{C}), Hom(\mathcal{C}), id, \circ)$ dörtlüsüne **kategori** denir [14,15].

- (1) $f: A \rightarrow B$ için $f \circ id_A = f$ ve $id_B \circ f = f$ dir.
- (2) $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ ve $h: C \rightarrow D$, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ dir.

Örnek 2.1.2 Topolojik uzayları objeler, sürekli fonksiyonları ise morfizmler olarak tanımlanan sınıf kategoridir ve **Top** ile gösterilir. Objeleri gruplar ve morfizmleri grup homomorfizmleri olan sınıf kategoridir ve **Grp** ile gösterilir. Vektör uzayları objeler ve lineer dönüşümleri ise morfizmler olarak alırsak oluşan sınıf kategoridir ve **Vect** ile gösterilir. Bağlantı uzaylarını objeler ve bağlantı koruyan dönüşümleri ise morfizmler olarak alırsak oluşan sınıf bir kategoridir ve **Rel** ile gösterilir.

Tanım 2.1.3 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$ kategoriler olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise $\mathcal{C}$ ye $\mathcal{C}'$ nün **alt kategorisi** (subcategory) denir [14].

- (1) $Ob(\mathcal{C}) \subseteq Ob(\mathcal{C}')$
- (2) $\forall M, N \in Ob(\mathcal{C})$ için $Hom_{\mathcal{C}}(M, N) \subseteq Hom_{\mathcal{C}'}(M, N)$
- (3) $\mathcal{C}$ deki dönüşümlerin bileşke işlemi, $\mathcal{C}'$ deki ile aynıdır.
- (4) Her $\mathcal{C}$ -birim aynı zamanda $\mathcal{C}'$ -birim

Eğer $\forall M, N \in Ob(\mathcal{C})$ için $Hom_{\mathcal{C}}(M, N) = Hom_{\mathcal{C}'}(M, N)$ ise $\mathcal{C}$ ye $\mathcal{C}'$ nün dolu alt kategorisi denir.

Örnek 2.1.4 Grp, Mon nin full altkategorisidir. $Mon, SGrp$ nin alt kategorisidir fakat full değildir

Tanım 2.1.5 $\mathcal{C}$ kategori, $A \in Ob(\mathcal{C})$ olsun. $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ için $\mathcal{C}(A, X)$ tek bir morfizme sahipse A ya $\mathcal{C}$ nin **ilk objesi** denir. $\forall Y \in Ob(\mathcal{C})$ için $\mathcal{C}(Y, A)$ sınıfı tek bir morfizme sahipse A ya $\mathcal{C}$ nin **son objesi** denir [14,15].

Set de ilk obje boş kümedir ve son objesi tek nokta kümesidir. **Top** da ilk obje boş küme üzerindeki $(\emptyset, \{\emptyset\})$ ve son obje $(\{x\}, \{\{x\}, \emptyset\})$ topolojik uzayıdır. **Grp** da ilk ve son obje birim elemandan oluşan gruptur. **Ring** de ilk obje $\mathbb{Z}$ halkasıdır. **Field** de son obje yoktur.

2.2 Özel Morfizmler

Tanım 2.2.1 ([14]) K kategori ve $f: A \rightarrow B$ de morfizmi için

(1) $g \circ f = id_A, f \circ g = id_B$ olacak şekilde $g: B \rightarrow A$ varsa f ye **izomorfizm** ve A ile B arasında izomorfizm varsa A, B ye **izomorftur** denir, $A \cong B$ şeklide gösterilir.

(2) $h, g: C \rightarrow A$ için $f \circ h = f \circ g$ olduğunda $h = g$ ise f morfizmi soldan sadeleşmeliyse f ye **monomorfizm** denir.

(3) $g, h: B \rightarrow C$ için $h \circ f = g \circ f$ olduğunda $h = g$ ise f morfizmi sağdan sadeleşmeliyse f ye **epimorfizm** denir.

(4) f monomorfizm ve epimorfizm ise f **bimorfizm** dir.

2.3 Fanktor ve Doğal Dönüşüm

Bir fonktör, bir kategorinin objelerini ve morfizmlerini başka bir kategoriye sistematik bir şekilde eşleyen bir dönüşüm olarak düşünülebilir. Bu kavram, matematiksel yapıları karşılaştırmak ve ortak özellikleri belirlemek açısından büyük önem taşır. Örneğin, cebirsel topoloji ve homolojik cebir gibi alanlarda fanktörler, matematiksel nesnelerin daha soyut bir çerçevede anlaşılmasını sağlar.

Doğal dönüşüm ise fanktörler arasındaki ilişkileri tanımlayan önemli bir kavramdır. İki fanktör arasındaki yapısal benzerlikleri koruyan bir bağlantı olarak düşünülebilir. Doğal dönüşümler, matematiksel yapıların farklı görünümelerini birleştirerek daha derin anlayışlar geliştirmemizi sağlar. Özellikle cebirsel topoloji, homolojik cebir ve diferansiyel geometri gibi alanlarda önemli bir rol oynar. Doğal dönüşümlerin ne kadar öncemli olduğunu vurgulamak adına Saunders MacLane'in şöyle dediği söylenir: “Ben kategorileri fanktörleri incelemek için değil onları doğal dönüşümleri incelemek ve araştırmak ortaya attım.”

Tanım 2.3.1 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$ kategoriler olsun. $\mathcal{C}$ deki A objesini $\mathcal{C}'$ deki $F(A)$ objesine, $\mathcal{C}$ deki $f: A \rightarrow B$ ni $\mathcal{C}'$ deki $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ e götüren, aşağıdaki şartları sağlayan $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ **fanktor** denir [14,15].

- (1) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$
- (2) $F(id_A) = id_{F(A)}$

Örnek 2.3.2 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategoriler olsun. Böylece

- (1) $id_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, id_{\mathcal{C}}(X \xrightarrow{f} Y) = X \xrightarrow{f} Y$ birim fanktordur.
 - (2) Herhangi bir $A \in Ob(\mathcal{D})$ için $F_A: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $F_A(X \xrightarrow{f} Y) = A \xrightarrow{id_A} A$ **sabit fanktordur.**
 - (3) $U: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}, U(f) = f$ fanktoru **unutkan fanktordur.**
 - (4) $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ nin bir alt kategorisi ve $E: Mor(\mathcal{C}) \hookrightarrow Mor(\mathcal{D})$ kapsama fonksiyonu ise $E: \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ ye **kapsama fanktoru** denir.
 - (5) $\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{C}$ nin bölüm kategorisi, $\forall f$ morfizmini $\tilde{f}$ denklik sınıfına götüren kanonik fonksiyon $Q: Mor(\mathcal{C}) \rightarrow Mor(\tilde{\mathcal{C}})$ ise $Q: \mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ **kanonik** veya **doğal fanktor** denir.
 - (6) $\mathcal{U}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}, \mathcal{U}(X, \tau) = X$ ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ için $\mathcal{U}(f) = f$ şeklinde tanımlı dönüşüm fanktordur.
- $\mathcal{D}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}, \mathcal{D}(A) = (A, P(A))$ ve $f: A \rightarrow B$ için $\mathcal{U}(f) = f$ dönüşüm diskre fanktordur. $I: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$, $I(X) = (X, \{\emptyset, X\})$ tanımlı dönüşüm ise indiskre fanktordur.

Tanım 2.3.3 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ kategoriler ve $G, F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ fanktorlar olsun. $\forall A \in Ob(\mathcal{C})$ yi $\mathcal{D}$ de $\eta_A: F(A) \rightarrow G(A)$ morfizmine götüren $\eta: Ob(\mathcal{C}) \rightarrow Mor(\mathcal{D})$ için

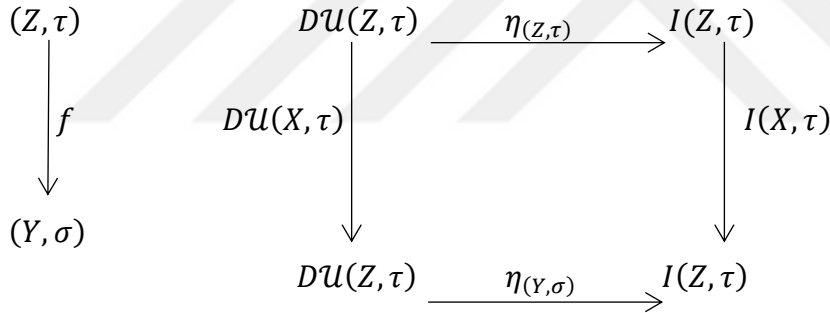
$\forall f: A \rightarrow B \in Mor(\mathcal{C})$ dönüşümü için $G(f) \circ \eta_A = \eta_B \circ F(f)$ ise η ye **doğal dönüşüm** denir, $\eta: F \rightarrow G$ şeklinde gösterilir [14,15].

Örnek 2.3.4 (1) $\mathcal{C}$ kategori ve $I: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $A \rightarrow I(A) = A$ birim fanktor olsun. $\eta: I \rightarrow I$ doğal dönüşümdür.

(2) $I: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ birim fanktor, $D: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$, $D(Z) = (Z, P(Z))$ diskre fanktor, $\mathcal{U}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$, $\mathcal{U}(Z, \tau) = Z$ unutkan fanktor olsun. $\eta: D\mathcal{U} \rightarrow I$ bir doğal dönüşümdür. Şekil 2.1’de verilen diyagrama göre $\eta_{(X, \tau)} = id_X$, $\eta_{(Y, \sigma)} = 1_Y$, $D\mathcal{U}(f) = f$, $I(f) = f$ olduğundan

$$I(f) \circ \eta_{(X, \tau)} = \eta_{(Y, \sigma)} \circ D\mathcal{U}(f)$$

eşitliği sağlanır.



Şekil 2.1. $\mathbf{Top}$ da doğal dönüşüm diyagramı.

2.4 Topolojik Fanktor

Topolojik kategoriler, hem kategori teorisinin morfizmlere dayalı soyut yapısal özelliklerini korurken hem de topolojik yapıların kesintisizliğini ve yakınsama özelliklerini incelemeye olanak tanır. Fanktörler aracılığıyla, farklı topolojik kategoriler arasındaki ilişkiler incelenebilir ve bu sayede matematiğin çeşitli dalları arasında yeni ilişkiler kurulabilir. Topolojik kategoriler, homotopi teorisi, spektral teori ve topolojik dönüşüm grupları gibi konuların araştırılmasında önemli bir rol oynar.

Tanım 2.4.1 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$ kategorileri için $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ aşağıdaki şartları sağlarsa F ye **topolojik fanktor** ya da $\mathcal{C}$ ye $\mathcal{C}'$ de **topolojik kategori** denir [14,15].

(1) F hem amnestik hem de düzenli olmalıdır,

(2) $\mathcal{C}'$ nin $\forall B$ nesnesi için

$$F^{-1}(B) = \{A \in Ob(\mathcal{C}): F(A) = B\}$$

küme olmalıdır, bu durum F nin küçük demetlere sahip olması olarak bilinir.

(3) $\forall F$ -kaynağı bir başlangıç kaldırmaya sahip olmalıdır, yani $\{A_i: i \in I\}$, $\mathcal{C}$ nin objeleri $B_i \in Ob(\mathcal{C}')$ ve $f_i: B \rightarrow B_i = \mathcal{U}(A_i)$, $\mathcal{C}'$ de F kaynağı olsun. $\{f_i: B \rightarrow B_i = F(A_i)\}$ nin **başlangıç kaldırmasıdır**.

D deki her $f_i: B \rightarrow B_i = F(A_i)$, $\mathcal{C}$ de başlangıç kaldırmasına sahiptir. Yani

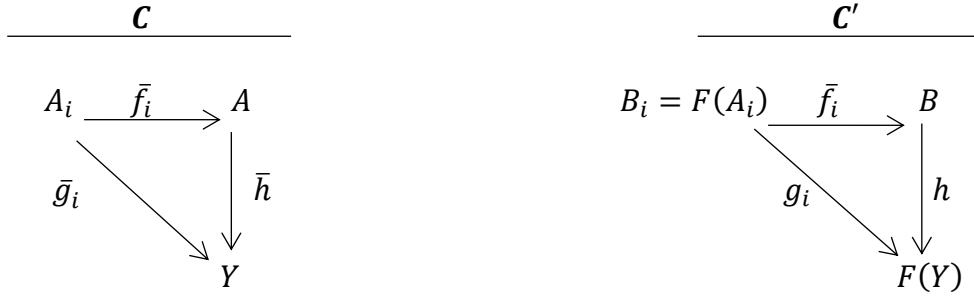
$\{A_i: i \in I\}$, $\mathcal{C}$ deki objelerin ve $f_i: B \rightarrow B_i = F(A_i)$ B deki morfizimlerin bir ailesi olsun. $f_i: B \rightarrow B_i = F(A_i)$ nin başlangıç kaldırması bir $A \in Ob(\mathcal{C})$ olmak üzere $F(\bar{f}_i) = f_i$ şekilde $f_i: A \rightarrow A_i$ morfizimler ailesidir. Öyle ki $\bar{g}_i: Y \rightarrow A_i$, $\mathcal{C}$ deki morfizimlerin ailesi ve $\forall i \in I$ için $f_i \circ h = g_i$ şekilde $\exists h: F(Y) \rightarrow B$ varsa $\forall i \in I$ için $\bar{f}_i \circ \bar{h} = \bar{g}_i$ şekilde $\exists \bar{h}: Y \rightarrow A$ morfizmi vardır (bkznz. Şekil 2.2).



Şekil 2.2. F -kaynağına göre topolojik kategori diyagramı.

Bu son şartın yerine “ $\mathcal{C}'$ deki her Her $\mathcal{U}$ -kavşağı olan $f_i: F(A_i) = B_i \rightarrow B$ ailesi $\mathcal{C}$ de bir bitiş kaldırmasına sahiptir” şeklinde de kullanılabilir. $\mathcal{C}$ de ki $f_i: A_i \rightarrow A$ morfizimler ailesini $F(\bar{f}_i) = f_i$ şekilde $f_i: F(A_i) = B_i \rightarrow B$ nin bitiş kaldırmasıdır. Yani $\mathcal{C}$ deki $\bar{g}_i: A_i \rightarrow Y$ ailesi ve $\forall i \in I$ için $h \circ f_i = g_i = F(\bar{g}_i)$ olacak şekilde

$\exists h: B \rightarrow F(Y)$ morfizimleri varsa $\forall i \in I$ için $\bar{h} \circ \bar{f}_i = \bar{g}_i$ şekilde $\exists \bar{h}: A \rightarrow Y$ morfizmi vardır (bkz. Şekil 2.3).



Şekil 2.3. F -kavşağına göre topolojik kategori diyagramı.

Tanım 2.4.2 $\mathcal{U}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ topolojik fanktoru için $\mathcal{C}'$ nin her X sabit objesi için $\mathcal{U}^{-1}(B)$ bir tek yapıya sahipse $\mathcal{U}$ ya **normalleştirilmiş** tir denir. Sabit obje D nin son objesinin tüm alt objeleri demektir [15].

Tanım 2.4.3 ([14,15]) $\mathcal{C}$ kategori ve $\mathcal{U}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor olsun.

(1) $\mathcal{U}, \mathcal{V}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{C}$ şeklinde bir sol adjointine sahipse $\mathcal{V}$ ye **diskre fanktor** ve dahası $A = \mathcal{V}(\mathcal{U}(A))$ ise $A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Set})$ ya **diskre obje** denir.

(2) $\mathcal{U}$ fanktoru $\mathcal{W}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{C}$ şeklinde bir sağ adjointine sahipse olup, $\mathcal{W}$ ye indiskre fanktor ve $A = \mathcal{W}(\mathcal{U}(A))$ ise $A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Set})$ ya **indiskre obje** denir.

Teorem 2.4.4 $\mathcal{U}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ fanktoru küçük demetlere sahip ve belirli, D de keyfi çarpımlara sahip olsun. $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ de topolojik kategoridir $\Leftrightarrow \mathcal{C}$ kategorisi indiskre nesne, alt uzay ve keyfi çarpımlara sahiptir [14].

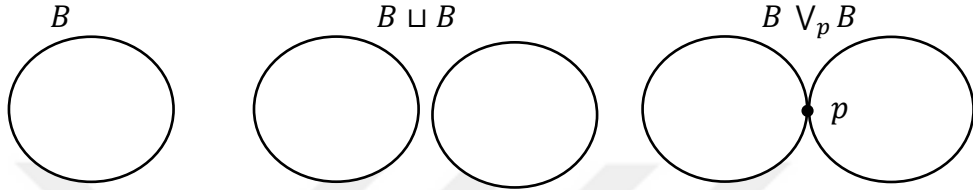
Örnek 2.4.5 $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiş topolojik fanktordur. **Grp** da grubun her alt kümesi grup ve **Ring** verilen halkanın tanımlı olduğu kümenin her alt kümesinde halka tanımlı olmadığından $U: \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Set}$ ve $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor değildir. Bu durum her U nun başlangıç kaldırmasına sahip olmadığını belirtir. Bundan başka **TopGrp** deki final ve başlangıç kaldırmalarının aynen **Grp** daki final ve başlangıç kaldırmaları gibi oluşturulabileceğinden $U: \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ topolojik fanktordur. Lakin $U: \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Top}$ topolojik fanktor değildir.

2.5 Wedge Çarpımı Ve Eksen Dönüşümleri

Tanım 2.5.1 ([15,16]) Bir X kümesinin ayrı iki kopyasının $p \in X$ de çakışması $X \vee_p X$ ile temsil edilir. $X \vee_p X$ de $p \in X$ noktası birinci kısımda ise x_1 ile ikinci kısımda ise x_2 ile belirtilir (bknz. Şekil 2.4). Örneğin $X = \{m, n, p\}$ olsun.

X in ayrık birleşimi $X \sqcup X = \{m_1, n_1, p_1, m_2, n_2, p_2\}$

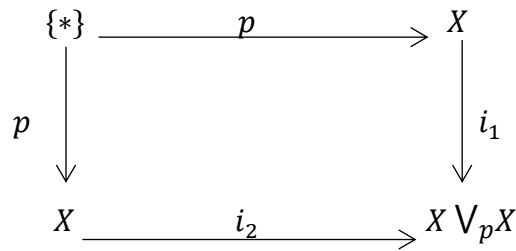
X in p de wedge çarpımı $X \vee_p X = \{m_1, n_1, p, m_2, n_2\}$ şeklindedir.



Şekil 2.4. Wedge çarpımı diyagramı.

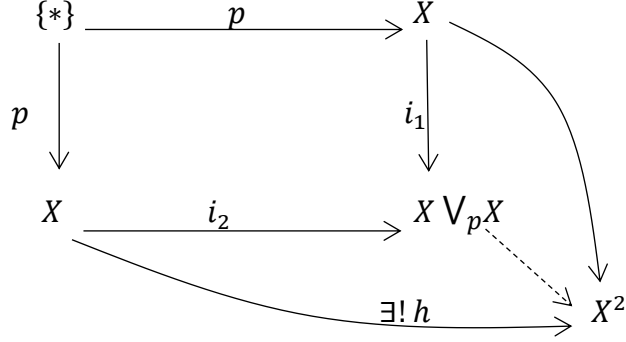
Tanım 2.5.2 Verilen bir X kümesi için $p \in X$ olsun. X kümesinin p noktasında Wedge çarpımı $X \sqcup X$ ayrık birleşiminin p de çakışması demektir. Bu durum $X \vee_p X$ ile gösterilir [15,16].

Tanım 2.5.3 ([15,16]) $\{*\}$ kümesi **Set** için son obje ve $p : \{*\} \rightarrow X$, $i_1, i_2 : X \rightarrow X \vee_p X$ dönüşümleri sırasıyla X deki birinci, ikinci içirme dönüşümleridir (bknz. Şekil 2.5). Pushoutdan $i_1 p = i_2 p$ dir.



Şekil 2.5. **Set** de pushout karesi.

Tanım 2.5.2'deki pushout diyagramına uygulandığında (bkz. Şekil 2.6) $A_p i_1 = (id, p): X \rightarrow X^2$, $A_p i_2 = S_p i_2 = (p, id): X \rightarrow X^2$, $S_p i_1 = (id, id): X \rightarrow X^2$ ve $j = 1, 2$ için $\nabla_p i_k = id$ olmak üzere aşağıdaki yerel dönüşümler elde edilir.



Şekil 2.6. **Set** de pushout diyagramı.

(i) $A_p: X \vee_p X \rightarrow X^2$ aşağıdaki şekilde tanımlı dönüşüme p de temel eksen dönüşümü denir.

$$A_p(x_j) = \begin{cases} (x, p), & j = 1 \text{ ise} \\ (p, x), & j = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

(ii) $S_p: X \vee_p X \rightarrow X^2$ dönüşümüne p de Skewed eksen dönüşümü denir.

$$S_p(x_j) = \begin{cases} (x, x), & j = 1 \text{ ise} \\ (p, x), & j = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

(iii) $\nabla_p: X \vee_p X \rightarrow X$, $\nabla_p(x_1) = x = \nabla_p(x_2)$ şeklindeki dönüşüme p de katlama dönüşümü denir.

Tanım 2.5.4 ([15,16]) $\mathcal{U}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktoru ve D diskre fanktor için $B \in Ob(\mathcal{E})$ ve $p \in \mathcal{U}(B) = X$ olsun.

(1) B, p de $\bar{T}_0$ dır ancak ve ancak

$$\{A_p: X \vee_p X \rightarrow U(B^2) = X^2 \text{ ve } \nabla_p: X \vee_p X \rightarrow \mathcal{U}D(X) = X\}$$

$\mathcal{U}$ nun başlangıç kaldırması diskredir

(2) B, p de T_1 dir ancak ve ancak

$$\{S_p : X \vee_p X \rightarrow U(B^2) = X^2 \text{ ve } \nabla_p : X \vee_p X \rightarrow \mathcal{UD}(X) = X\}$$

$\mathcal{U}$ nun başlangıç kaldırması diskredir

(3) B nin p de T_0' dir ancak ve ancak

$$\{id : X \vee_p X \rightarrow U(X \vee_p X)' = X \vee_p X \text{ ve } \nabla_p : X \vee_p X \rightarrow \mathcal{UD}(X) = X\}$$

$\mathcal{U}$ nun başlangıç kaldırmasının diskredir. $(X \vee_p X)'$, i_1, i_2 den elde edilen bitiş kaldırmasıdır.

Teorem 2.5.5 $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktoru için

(1) (X, τ) topolojik uzayı $p \in X$ de T_0 dir $\Leftrightarrow A_p : X \vee_p X \rightarrow (X^2, \tau_*)$ ve $\nabla_p : X \vee_p X \rightarrow (X, P(X))$ ile doğrulan $X \vee_p X$ üzerindeki topoloji diskredir [16].

(2) (X, τ) topolojik uzayı $p \in X$ de T_1 dir $\Leftrightarrow S_p : X \vee_p X \rightarrow (X^2, \tau_*)$ ve $\nabla_p : X \vee_p X \rightarrow (X, P(X))$ fonksiyonları ile doğrulan $X \vee_p X$ üzerindeki topoloji diskredir [16].

Tanım 2.5.6 ([15,16]) Bir X kümesinde X^2 nin ayrık iki kopyasının Δ diyagonalinde çakışması $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ ile gösterilsin. $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ de (x, y) noktası birinci kısımda ise $(x, y)_1$ ile ikinci kısımda ise $(x, y)_2$ ile gösterilir.

(i) $A : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^3$ için aşağıdaki şekilde tanımlı dönüşüme temel eksen dönüşümü denir.

$$A((x, y)_j) = \begin{cases} (x, y, x), & j = 1 \text{ ise} \\ (x, x, y), & j = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

(ii) $S : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^3$ ne Skewed eksen dönüşümü denir.

$$S((x, y)_j) = \begin{cases} (x, y, y), & j = 1 \text{ ise} \\ (x, x, y), & j = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

(iii) $\nabla: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^2$, $j = 1, 2$ için $\nabla((x, y)_1) = (x, y) = \nabla((x, y)_2)$ şekilde tanımlı dönüşüme katlama dönüşümü denir.

Tanım 2.5.7 ([15,16]) $\mathcal{U}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor, $B \in Ob(\mathcal{E})$, $p \in \mathcal{U}(B) = X$ olsun.

(1) $B, \bar{T}_0$ dır ancak ve ancak

$$\{A: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow \mathcal{U}(B^3) = X^3 \text{ ve } \nabla: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow \mathcal{U}D(X^2) = X^2\}$$

$\mathcal{U}$ nun başlangıç kaldırması diskredir. Burada D diskre fanktordur.

(2) B, T_0' dır ancak ve ancak

$$\{id: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow \mathcal{U}(X^2 \vee_{\Delta} X^2)' = X^2 \vee_{\Delta} X^2 \text{ ve } \nabla_p: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow \mathcal{U}D(X^2) = X^2\}$$

$\mathcal{U}$ nun başlangıç kaldırması diskredir.

$(X^2 \vee_{\Delta} X^2)', \{i_1, i_2: \mathcal{U}(B^2) = X^2 \rightarrow X^2 \vee_{\Delta} X^2\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının bitiş kaldırmasıdır.

(3) B nin en az iki elemanlı alt uzayı indiskre değilse uzaya T_0 dır denir.

(4) B, T_1 dir ancak ve ancak

$$\{S: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow \mathcal{U}(B^3) = X^3 \text{ ve } \nabla: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow \mathcal{U}D(X^2) = X^2\}$$

$\mathcal{U}$ nun başlangıç kaldırması diskredir.

Teorem 2.5.8 (X, τ) uzayı T_0 dır $\Leftrightarrow X^3$ deki τ_* çarpım topolojisi için $A: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^3, \tau_*)$ ve $\nabla: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2, P(X^2))$ tarafından elde edilen başlangıç topolojisinin diskredir. Burada A ile S değiştirilirse bilinen T_1 olması hali oluşur. Topolojik uzaylarda yukarıdaki teoremden adı geçen tüm T_0 lar bilinen anlamdaki T_0 topolojik uzaya denktir [16].

3. BAĞINTI UZAYLARI

İlk kez 1960 da Dana Scott tarafından ortaya atılan Sıralama Teorisi (Order Theory), nesneleri belirli bir düzene göre sıralamak ve bu sıralama içinde nasıl etkileşime girdiklerini anlamak için kullanılan matematiksel bir alandır. Bir ögenin diğerine göre nasıl konumlandığını belirlemek için kısmi sıralama, tam sıralama ve iyi sıralama gibi farklı yöntemler kullanılır. Örneğin, doğal sayılar bir tam sıralama oluşturur çünkü her iki sayıdan biri diğerinden büyüktür. Bu teori, matematiksel mantık, kombinatorik ve bilgisayar bilimlerinde önemli bir rol oynar. Bilgisayar bilimlerinde sıralama algoritmalarının analizinde, veri yapılarının düzenlenmesinde ve karar ağaçlarının oluşturulmasında sıkça kullanılır. Latis (kafes) yapıları ve sıralı kümeler gibi kavramlar, Sıralama Teorisinin daha ileri seviyelerini oluşturur. Bu alan, veri işlemenin yanı sıra hiyerarşik ilişkileri incelemek ve sistemleri daha iyi organize etmek için kullanılır. Bunun dışında Alan Teorisi (Domain Theory), matematik ve bilgisayar arasında ilişkiyi kuran, özellikle bilgisayar bilimlerinde önemli uygulamalara sahip hızla gelişen bir bilim dalıdır. Bu teori, özellikle Lambda Kalkülüsü ve Type Teorisi gibi konularla yakından ilişkilidir. Alan teorisi sıralama teorisinin bir dalı olarak düşünülebilir.

3.1 Topoloji ve Sıralama Uzayları Arasındaki İlişki

Sıralama ve topoloji arasında çok derin bir ilişki vardır. Bu bölümde bu ilişkileri veren sonuçları verilecektir.

Tanım 3.1.1 ([15]) X bir kümesi için $R \subset X \times X$ bağıntısı olsun.

- (1) Her $x \in X, xRx$ (yansıma özelliği),
- (2) Her $x, y, z \in X, xRy$ ve yRz ise xRz (geçişme özelliği),
- (3) Her $x, y \in X$ için xRy ve yRx (simetri özelliği),
- (4) Her $x, y \in X$ için yRx ve xRy ise $x = y$ (anti-simetri özelliği).

R sadece (1) şartını sağlarsa (X, R) ikilisine yansıma uzayı denir. R bağıntısı (1) ve (2) şartlarını sağlarsa (X, R) ön sıralama uzayı denir. R bağıntısı (1), (2) ve (3) şartlarını sağlarsa (X, R) uzayına denk uzayı ve R ye denklik bağıntısı denir. R bağıntısı (1), (2) ve (4) şartlarını sağlarsa (X, R) uzayına kısmi sıralama uzayı ve R ye kısmi sıralama bağıntısı denir.

Tanım 3.1.2 (X, τ) uzayı için $\forall x, y \in X$, “ $x \leq_\tau y \Leftrightarrow x$ i ihtiva eden her U açığı için y yi ihtiva eder” şeklinde tanımlanan bağıntıya **özelleşme bağıntısı** denir [15].

Örnek 3.1.3 Bazı topolojik uzaylara karşılık gelen özelleşme bağıntıları şu şekildedir.

- (1) $(X, P(X))$ diskre uzayı için özelleşme bağıntısı $\leq_{P(X)}$ eşitlik bağıntısıdır.
- (2) $(X, \{\emptyset, X\})$ indiskre uzayı için özelleşme bağıntısı $X \times X$ bağıntısıdır.
- (3) (X, d) metrik uzayı için özelleşme bağıntısı, $\leq$ eşitlik bağıntısıdır.
- (4) (R, τ) ve $\tau =$ alışılmış, tümleyeni sayılabilir (sonlu), üst limit veya alt limit topolojileri için özelleşme bağıntısı, $\leq$ eşitlik bağıntısıdır.
- (5) $X = \{a, b\}$ kümesi verilsin.
 - (i) $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ den elde edilen özelleşme bağıntısı $\leq_\tau = \{(a, a), (b, b), (b, a)\}$ kısmi sıralama bağıntısıdır.
 - (ii) $\sigma = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ den elde edilen özelleşme bağıntısı $\leq_\tau = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}$ kısmi sıralama bağıntısıdır.
- (6) $X = \{a, b, c\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ den elde edilen özelleşme bağıntısı $\leq_\tau = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, a), (b, c)\}$ ön ve kısmi sıralama bağıntısıdır.

Teorem 3.1.4 ([15]) (1) (X, τ) uzayı T_0 dir $\Leftrightarrow$ Özelleşme bağıntısı kısmi sıralama bağıntısıdır.

(2) (X, τ) uzayı T_1 dir. $\Leftrightarrow$ Özelleşme bağıntısı eşitlik bağıntısıdır.

3.2 Yansıma Bağıntılı Uzaylar

Tanım 3.2.1 B bir küme ve $R \subseteq B^2$ yansıma özelliğini sağlasın (B, R) ye **yansıma bağıntılı uzayı** denir. (B, R) ve (B_1, R_1) yansıma bağıntılı uzaylar ve $f: B \rightarrow B_1$ fonksiyonu için aRb için $f(a)R_1f(b)$ ise f ye **bağıntı koruyan fonksiyon** denir [15].

Örnek 3.2.2 Bir X kümesi üzerindeki yansıma bağıntıları yazalım.

- (1) $X = \emptyset$ ise $R = \emptyset =$ boş bağıntı
- (2) $X = \{a\}$ için $R = \{(a, a)\} = X \times X =$ diskre bağıntı = indiskre bağıntı
- (3) $X = \{a, b\}$ de de yansıma özelliğini sağlayan $2^{4-2} = 2^2 = 4$ tane bağıntı vardır.

$R_1 = \{(a, a), (b, b)\} = \text{diskre bağıntı}$

$R_2 = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}$

$R_3 = \{(a, a), (b, b), (b, a)\}$

$R_4 = X \times X = \text{indiskre bağıntı}$

(4) $X = \{a, b, c\}$ de yansıma özelliğini sağlayan $2^{9-3} = 2^6 = 64$ tane bağıntı vardır.

3.3 Yansıma Bağıntılı Uzaylar Kategorisi

Tanım 3.3.1 Nesneleri yansıma bağıntılı uzaylar, dönüşümleri bağıntı koruyan fonksiyonlardan oluşan sınıfa **yansıma bağıntılı uzaylar kategorisi** denir ve ***RRel*** şeklinde gösterilir [15].

Tanım 3.3.2 ([17]) ***RRel*** de

(1) $\{f_i: (B, R) \rightarrow (B_i, R_i), i \in I\}$ kaynağı başlangıç kaldırmasıdır $\Leftrightarrow \forall a, b \in B$ için aRb dir $\Leftrightarrow \forall i \in I$ için $f_i(a)R_i f_i(b)$ dir.

(2) $(B_i, R_i) \rightarrow (B, R)$ epimorfizmi bir final kaldırmasıdır $\Leftrightarrow \forall a, b \in B$ için aRb dir öyle ki $f(c) = a$ ve $f(d) = b$ olacak şekilde $cR_i d$ şartını sağlayan $\exists c, d \in B_i$ vardır.

(3) B kümesi üzerindeki diskre yansıma bağıntılı uzay $R = \{(a, a) | a \in B\}$ şeklindedir. Ayrıca $\forall x \in B$ için xRp veya pRx ise $p = x$ olması (B, R) nin p de diskre olması demektir.

(4) B kümesi üzerindeki indiskre yansıma bağıntılı uzay $R = B \times B = B^2$ dir.

(5) B kümesi üzerindeki $R = \emptyset$ bağıntı için $(B, \emptyset)$ ilk obje, $B = \{b\}$ için $R = \{(b, b)\}$ olmak üzere (B, R) son objedir.

Teorem 3.3.3 $\mathcal{U}: \mathbf{RRel} \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiştir.

İspat: Teorem 2.4.2 nin şartlarını sağlayalım:

(i) $f, g: (B, R) \rightarrow (B, S)$ morfizmleri, $\mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(g)$ olduğunu kabul edelim. $\mathcal{U}$ nun unutkanlığından $f = g$ dir. Şimdi de $\mathcal{U}$ nun amnestik olduğunu gösterelim. $f: (B, R) \rightarrow (B, S)$ için f izomorfizm ve $\mathcal{U}(f) = f = id_B$ ise $f = id_{(B, R)}$ yani $R = S$ olduğunu göstereceğiz. $\forall a, b \in B$ için aRb ise f nin sürekliliğinden

$f(a)Sf(b)$ olur. $id_B = f$ olduğundan $id_B(a)Sid_B(b) = aSb$ olur ki bu durumda $R \subset S$ dir. Tersine $f^{-1}: (B, S) \rightarrow (B, R)$ için $\mathcal{U}(f^{-1}) = f^{-1} = id_B$ olmak üzere $\forall a, b \in B$ için aSb ise f^{-1} nin sürekliliğinden $f^{-1}(a)Rf^{-1}(b) = aRb$ olur ki böylece $R \subset S$ dir, sonuç olarak $R = S$ olur yani $f = id_{(B,R)}$ dir.

(ii) $\mathcal{U}$ fanktoru küçük demetlere sahip mi?

$$\mathcal{U}^{-1}(B) = \{(B, R) | \mathcal{U}((B, R)) = B \text{ ve } R \subseteq B^2\}.$$

$\Phi = \{R | R \subseteq B^2, R \text{ yansıma özelliğini sağlayan bağıntı}\}$ olsun. $f: \mathcal{U}^{-1}(B) \rightarrow \Phi$, $(B, R) \rightarrow f((B, R)) = R$ şekilde fonksiyon tanımlayalım. f bire bir olduğundan Φ ile $\mathcal{U}^{-1}(B)$ denktir. Dolayısıyla $\mathcal{U}^{-1}(B)$ bir kümedir.

(iii) Her $i \in I$ için (B_i, R_i) yansıma bağıntılı uzaylar ve her $i \in I$ için $\{f_i | f_i: B \rightarrow \mathcal{U}((B_i, R_i)) = B_i\}$ fonksiyonların sınıfı olsun. $\forall i \in I$ için B üzerindeki $R = \{(a, b) | f_i(a)R_i f_i(b), \text{ her } i \in I\}$ şeklinde tanımlansın. (B, R) yansıma bağıntılı bir uzaydır. (A, S) yansıma bağıntılı uzay, $h: A \rightarrow B$ fonksiyon olsun. Böylece, her $i \in I$ için $f_i(h_i(a))R_i f_i(h_i(b))$ olur. Sonuç olarak $\mathcal{U}: \mathbf{RRel} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik kategoridir.

Boş ve tek nokta kümeleri üzerinde tek bir yansıma özelliğine sahip bağıntı olduğundan yani $\mathbf{RRel}$ normalleştirilmiştir.

Şimdi ise lokal anlamda yansıma bağıntılı uzayların tanımlanmasını sağlayan aşağıdaki teoremi ve ispatını verelim.

Teorem 3.3.4 ([17]) (B, R) yansıma bağıntılı uzayında $p \in B$ için

- (1) (B, R) , p de $\bar{T}_0$ dır $\Leftrightarrow R$, p de ters simetrik bir bağıntıdır, yani $\forall x \in B$ için xRp ve pRx ise $x = p$ dir.
- (2) (B, R) , p de T_1 dir $\Leftrightarrow R$ bağıntısı p de diskre yapıdır, yani $\forall x \in B$ için xRp veya pRx ise $p = x$ dir.
- (3) (B, R) , p de T_0' dır.

İspat: (1) (B, R) yansımali bağıntı uzayı $p \in B$ ve $B \bigvee_p B$ üzerindeki A_p ve ∇_p tarafından üretilen başlangıç yapısı R_w , B^2 deki çarpım yapısı L_* ve B deki diskre yansıma bağıntısı R_d olsun (bkz. Şekil 3.1).

$$\begin{array}{ccc}
(BV_p B, R_w) & \xrightarrow{A_p} & (B^2, R_*) \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} (B, R) \\
\downarrow \nabla_p & & \\
(B, R_d) & &
\end{array}$$

Şekil 3.1. p de $\bar{T}_0$ diyagramı.

[17] deki Teorem 2.2 den (B, R) yansıma bağıntılı uzayı p de $\bar{T}_0$ dır $\Leftrightarrow R, p$ de ters simetrik bir bağıntıdır.

(2) Yukarıdaki diyagramda A_p yerine S_p alınsın. [17] deki Teorem 2.3 den (B, R) yansıma bağıntılı uzayı p de T_1 dir $\Leftrightarrow R$ deki bağıntı p de diskredir.

(3) (X, R) yansıma bağıntılı uzay, $BV_p B$ üzerindeki id ve ∇_p tarafından üretilen başlangıç yapısı R_w olsun. Burada R_f bağıntısı i_1 ve i_2 kanonik dönüşümleri ile elde edilen $BV_p B$ üzerindeki bitiş yapısıdır (bknz. Şekil 3.2).

$$\begin{array}{ccc}
(BV_p B, R_w) & \xrightarrow{id} & (BV_p B, R_f) \\
\downarrow \nabla_p & & \uparrow i_1 \quad \uparrow i_2 \\
(B, R_d) & & (B, R)
\end{array}$$

Şekil 3.2. p de T_0' diyagramı.

[17] deki Teorem 2.4 den her (B, R) yansıma bağıntılı uzayı p de T_0' dır.

Örnek 3.3.5 $B = \{a, b, c\}$ için aşağıdaki bağıntıları inceleyelim.

$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$ ve $R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$ olmak üzere bu bağıntılara karşı gelen noktada ayırma aksiyomları Şekil 3.3'te verilmiştir.

(B, R_1) uzayı a, b noktalarında $\bar{T}_0$ dir.	(B, R_2) uzayı a, b noktalarında $\bar{T}_0$ değildir.
(B, R_1) uzayı a, b noktalarında T_0' dir.	(B, R_2) uzayı a, b noktalarında T_0' dir.
(B, R_1) uzayı a, b noktalarında T_1 değildir.	(B, R_2) uzayı a, b noktalarında T_1 dir.
(B, R_1) uzayı c noktasında $\bar{T}_0$ dir.	(B, R_2) uzayı c noktasında $\bar{T}_0$ dir.
(B, R_1) uzayı c noktasında T_0' dir.	(B, R_2) uzayı c noktasında T_0' dir.
(B, R_1) uzayı c noktasında T_1 dir.	(B, R_2) uzayı c noktasında T_1 dir.

Şekil 3.3. (B, R) uzayının noktada $\bar{T}_0, T_0, T_0'$ ve T_1 olma durumu.

Şimdi de genel anlamda yansıma bağıntılı uzayların tanımlanmasını sağlayan aşağıdaki teorem ve ispatını verelim.

Teorem 3.3.6 (B, R) yansıma bağıntılı uzay olsun.

(1) $(B, R), \bar{T}_0$ dir $\Leftrightarrow R$ ters simetriktir,

(2) $(B, R), T_1$ dir $\Leftrightarrow R$ diskredir,

(3) $(B, R), T_0'$ dir,

(4) $(B, R), T_0$ dir $\Leftrightarrow R$ ters simetriktir.

İspat: (1) (B, R) yansımali bağıntı uzayı $B^2V_\Delta B^2$ üzerindeki A ve ∇ tarafından üretilen başlangıç yapısı R_w , B^3 deki çarpım yapısı R_* ve B^2 deki diskre bağıntı yapısı R_d olsun (bknz. Şekil 3.4).

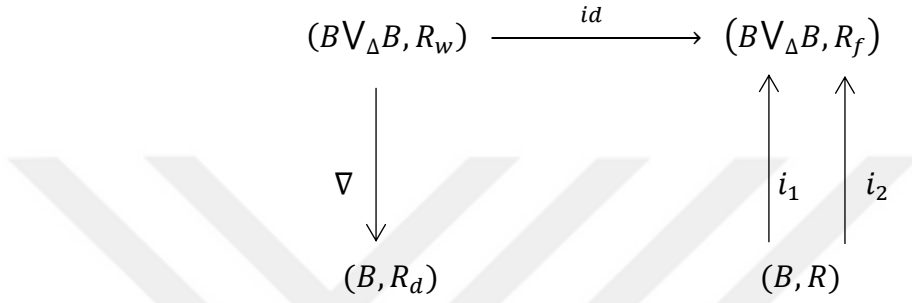
$$\begin{array}{ccccc}
 (B^2V_\Delta B^2, R_w) & \xrightarrow{A} & (B^3, R_*) & \xrightarrow{\pi_i} & (B, R) \\
 \nabla \downarrow & & & & \\
 & & & & (B^2, R_d)
 \end{array}$$

Şekil 3.4. $\bar{T}_0$ diyagramı.

(B, R) yansıma bağıntılı uzayı $\bar{T}_0$ dır $\Leftrightarrow R$ ters simetriktir.

(2) Yukarıdaki diyagramda A yerine S alınsın. (B, R) yansıma bağıntılı uzayı T_1 dir. $\Leftrightarrow R$ diskredir.

(3) (X, R) yansıma bağıntılı uzay, $BV_\Delta B$ üzerindeki id tarafından üretilen başlangıç yapısı R_w olsun. Burada R_f bağıntısı i_1 ve i_2 kanonik dönüşümleri ile elde edilen $BV_p B$ üzerindeki bitiş yapısıdır (bkz. Şekil 3.5).



Şekil 3.5. T_0' diyagramı.

(4) Kabul edelim ki (B, R) uzayı T_0 olsun. R nin ters simetrik olduğunu göstereceğiz. $x, y \in B$, $x \neq y$ için yRx ve xRy olsun. $x = y$ yi göstereceğiz. $A = \{x, y\}$ ve R_A , A üzerindeki (B, R) den $i: A \hookrightarrow B$ dönüşümünden üretilen başlangıç (alt uzay) yapısı olsun.

R , yansıma bağıntılı olduğundan Tanım 2.5.7 den

$$xR_A x = xRx$$

$$yR_A y = yRy$$

$$xR_A y = xRy$$

$$yR_A x = yRx$$

olur ki $R_A = \{(x, x), (y, y), (x, y), (y, x)\}$ indiskre bağıntısıdır. Tanım 2.5.7 den (B, R) nin T_0 ile çelişir. Böylece $x = y$ olmalıdır. Yani R ters simetriktir.

Tersine olarak R , ters simetrik bağıntı olsun. (B, R) nin T_0 olduğunu göstereceğiz. $A \subseteq B$, en az iki elemanlı bir alt küme ve $y \in A$, $x \neq y$ için $R_A = A \times A$ olsun.

$$xR_Ax = xRx$$

$$yR_Ay = yRy$$

$$xR_Ay = xRy$$

$$yR_Ax = yRx$$

olur ki bu R nin ters simetrik olması ile çelişir. Böylece $R_A \neq A \times A$ dır. Tanım 2.5.7 den (B, R) uzayı T_0 dır.

Örnek 3.3.7 $B = \{a, b, c\}$ üzerindeki aşağıdaki bağıntıları inceleyelim. $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$, $R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$ ve $R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ olmak üzere bu bağıntılara karşı gelen ayırma aksiyomları Şekil 3.6’da verilmiştir.

(B, R_1) uzayı $\bar{T}_0$ dir.	(B, R_2) uzayı $\bar{T}_0$ değildir.	(B, R_3) uzayı $\bar{T}_0$ dır.
(B, R_1) uzayı T_0' dir.	(B, R_2) uzayı T_0' dir.	(B, R_2) uzayı T_0' dır.
(B, R_1) uzayı T_1 değildir.	(B, R_2) uzayı T_1 değildir.	(B, R_2) uzayı T_1 dır.
(B, R_1) uzayı T_0 dır.	(B, R_2) uzayı T_0 değildir.	(B, R_2) uzayı T_0 dır.

Şekil 3.6. (B, R) uzayında genelde $\bar{T}_0$, T_0 , T_0' ve T_1 olma durumu.

4. KAPALI ALT OBJELER

Bu bölümde yansıma bağıntılı uzaylarda (kuvvetli) kapalı alt kümeler karakterize edildi. Yansıma bağıntılı bir uzayın fonksiyon altındaki görüntü ve ters görüntü durumları incelendi. Kalıtsal, çarpımsal, idempotent, gibi özelliklerin araştırıldı.

4.1 Topolojik Uzaylarda Kapalılık

Tanım 4.1.1 ([11,12,18]) (X, τ) topolojik uzamda $M \subset X$ kapalı ve $\forall x \notin M$ için M nin x i ihtiva ermeyen açık komşuluğu varsa M ye **kuvvetli kapalıdır** denir. Uzayın T_1 olması durumunda kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramları denktir. Ama bir topolojik kategoride bu kavramların genelde birbiri ile ilişkisi yoktur.

Örnek 4.1.2 $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ için $M = \{a\}$ kapalı olmasına rağmen kuvvetli kapalı değildir.

Tanım 4.1.3 ([11,12,18]) X boş kümeden farklı, $p \in X$ ve $X^\infty = X \times X \times X \dots$ de X in sayılabilir kartezyen çarpımı olsun. X in sayılabilir adetteki kopyasının p de çakışması $V_p^\infty X$ ile gösterilir. $x_i \in V_p^\infty X$ olması x_i nin i . bileşende olmasıdır.

(1) $A_p^\infty: V_p^\infty X \rightarrow X^\infty$ ve $A_p^\infty(x_i) = (p, p, \dots, p, x, p, \dots)$ sonsuzda temel eksen dönüşümü adı verilir.

(2) $\nabla_p^\infty: V_p^\infty X \rightarrow X$ ve $\nabla_p^\infty(x_i) = x$ ye sonsuzda katlama dönüşümü adı verilir.

Tanım 4.1.4 ([11,12,18]) $\mathcal{U}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktoru için $B \in \mathcal{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathcal{U}(B) = X$ olsun.

(1) $A_p^\infty: V_p^\infty X \rightarrow \mathcal{U}(B^\infty) = X^\infty$ ve $\nabla_p^\infty: V_p^\infty X \rightarrow \mathcal{U}(D(X)) = X$ biçiminde verilen $\mathcal{U}$ nun başlangıç kaldırması diskreyse $\{p\}$ kapalıdır denir.

(2) $\{*\}$, X/M de kapalıysa $M \subset X$ de kapalıdır.

$q: \mathcal{U}(B) = X \rightarrow X/M = (X \setminus M) \cup \{*\}$ için aşağıdaki gibidir.

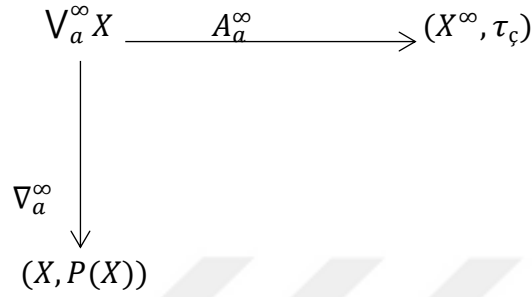
$$q(x) = \begin{cases} x, & x \notin M \text{ ise} \\ *, & x \in M \text{ ise} \end{cases}$$

(3) $X/M, *$ noktasında T_1 ise M kuvvetli kapalıdır.

(4) M^c, X de kapalı (kuvvetli kapalı) ise M açıktır (kuvvetli açık).

(5) $M = \emptyset = B$ ise M hem kapalı (açık) hem de kuvvetli kapalıdır (kuvvetli açıktır).

Örnek 4.1.5 $X = \{a, b, c\}$ ve $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{a\}\}$ için $M = \{a\}$ kümesinin kapalı olmadığını gösterelim. Şekil 4.1’de verilen diyagram dikkate alınırsa:



Şekil 4.1. Tek nokta kümesinin kapallığı.

$$\nabla_a^{\infty-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\nabla_a^{\infty-1}(X) = V_a^\infty X$$

$$\nabla_a^{\infty-1}(\{a\}) = \{a\}$$

$$\nabla_a^{\infty-1}(\{b\}) = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

$$\nabla_a^{\infty-1}(\{c\}) = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}$$

$$\nabla_a^{\infty-1}(\{a, b\}) = \{a, b_1, b_2, \dots\}$$

$$\nabla_a^{\infty-1}(\{a, c\}) = \{a, c_1, c_2, \dots\}$$

$$\nabla_a^{\infty-1}(\{b, c\}) = \{b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots\}$$

$$\begin{aligned}
A_a^{\infty-1}(\emptyset) &= \emptyset \\
A_a^{\infty-1}(X^\infty) &= V_a^\infty X \\
A_a^{\infty-1}(\{a\} \times X \times X \times \dots) &= \{a, b_2, b_3, \dots, c_2, c_3, \dots\} \\
A_a^{\infty-1}(X \times \{a\} \times X \times \dots) &= \{a, b_1, b_3, b_4, \dots, c_1, c_3, c_4, \dots\} \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
A_a^{\infty-1}(\{a, b\} \times X \times X \times \dots) &= \{a, b_1, b_2, \dots, c_2, c_3, \dots\} \\
A_a^{\infty-1}(X \times \{a, b\} \times X \times \dots) &= \{a, b_1, b_2, \dots, c_1, c_3, c_4, \dots\} \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
A_a^{\infty-1}(\{a\} \times \{a, b\} \times X \times \dots) &= \{a, b_2, b_3, \dots, c_3, c_4, \dots\} \\
A_a^{\infty-1}(\{a, b\} \times \{a\} \times X \times \dots) &= \{a, b_1, b_3, \dots, c_3, c_4, \dots\} \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

$$S = \{\emptyset, V_a^\infty X, \{a\}, \{b_1, b_2, \dots\}, \{c_1, c_2, \dots\}, \{a, b_1, b_2, \dots\}, \{a, c_1, c_2, \dots\},$$

$$\{b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots\}, \{a, b_2, b_3, \dots, c_2, c_3, \dots\}, \{a, b_1, b_3, b_4, \dots, c_1, c_3, c_4, \dots\},$$

$$\{a, b_1, b_2, \dots, c_2, c_3, \dots\}, \{a, b_1, b_2, \dots, c_1, c_3, c_4, \dots\}, \{a, b_2, b_3, \dots, c_3, c_4, \dots\},$$

$$\{a, b_1, b_3, \dots, c_3, c_4, \dots\}, \dots\}$$

alt bazındaki elemanların sonlu kesişimlerinin keyfi birleşimleri alınarak elde edilecek olan τ_w çarpım topolojisinde $\{b_1\}$ gibi tek nokta kümeleri bulunmayacağından $\tau_w \neq P(V_a^\infty X)$ dır, Tanım 4.1.4 den $M = \{a\}$ kapalı değildir.

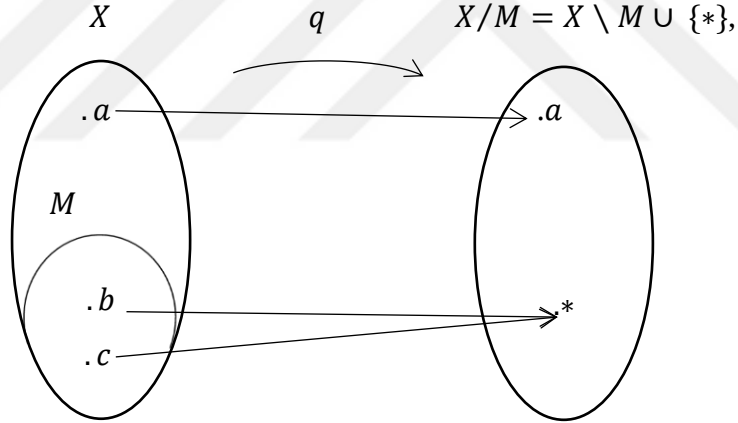
$M = \{b, c\}$ nin kuvvetli kapalı olmadığını Tanım 4.1.4 ü kullanarak gösterelim. $\{*\}$ ın X/M de kapalı olmadığını yani X/M kümesi $*$ da T_1 olmadığını gösterelim. Şekil 4.2’de verilen diyagram dikkate alınırsa:

$$\begin{array}{ccc}
(X/M) \vee_* (X/M) & \xrightarrow{S_*} & ((X/M)^2, \tau_\zeta) \\
\downarrow \nabla_* & & \\
(X, P(X)) & &
\end{array}$$

Şekil 4.2. M nin kuvvetli kapalılığı.

X/M deki $q = (X, \tau) \rightarrow (X/M, \sigma)$ bölüm fonksiyonu ile üretilen final topolojisini elde edelim (bknz. Şekil 4.3).

$$\left. \begin{array}{l}
q^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau \text{ dan } \emptyset \in \sigma \text{ dır.} \\
q^{-1}(\{a\}) = \{a\} \in \tau \text{ dan } \{a\} \in \sigma \text{ dır.} \\
q^{-1}(\{*\}) = \{b, c\} \notin \tau \text{ dan } \{*\} \notin \sigma \text{ dır.} \\
q^{-1}(X \setminus M) = X \in \tau \text{ dan } X \setminus M \in \sigma \text{ dır.}
\end{array} \right\} \text{ dan } \sigma = \{\emptyset, X \setminus M, \{a\}\} \text{ dir.}$$



Şekil 4.3. Bir kümenin kuvvetli kapalılığı.

$$\begin{aligned}
\nabla_*^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \\
\nabla_*^{-1}(X) &= (X/M) \vee_* (X/M) \\
\nabla_*^{-1}(\{a\}) &= \{a_1, a_2\} \\
\nabla_*^{-1}(\{*\}) &= \{*\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_*^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \\
S_*^{-1}((X/M)^2) &= (X/M)V_*(X/M) \\
S_*^{-1}(\{(a, a), (*, a)\}) &= \{a_1, a_2\} \\
S_*^{-1}(\{(a, a), (a, *)\}) &= \{a_1\} \\
S_*^{-1}(\{(a, a)\}) &= \{a_1\} \\
&\cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\
&\cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\
&\cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot
\end{aligned}$$

$S = \{\emptyset, (X/M)V_*(X/M), \{*\}, \{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$ alt bazındaki elemanların sonlu kesişimlerin keyfi birleşimleri alınarak aşağıdaki topolojiyi elde ederiz.

$\tau_w = \{\emptyset, (X/M)V_*(X/M), \{*\}, \{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, *\}\} \neq P(V_*^\infty(X/M))$ olur. Bu ise Tanım 4.1.4 den X/M nin $*$ noktasında T_1 olmadığını gösterir yani Tanım 4.1.4 de M kümesi X/M de kuvvetli kapalı değildir.

4.2 Yansıma Bağıntılı Uzaylar (Kuvvetli) Kapalılık

Teorem 4.2.1 (B, R) yansıma bağıntılı uzayında $p \in B$ için $\{p\}$ kapalıdır ancak ve ancak R bağıntısı p de ters simetriktir, yani pRx ve xRp ise $p = x$ dir.

İspat: $\{p\}$ nin kapalı olduğunu kabul edelim. Ayrıca R_w, R_ζ ve R_d sırasıyla $V_p^\infty B$ sonsuz wedge çarpımı kümesi, sonsuz çarpım kümesi ve B kümesi üzerindeki diskre yansıma bağıntılı yapılar olsun (bkz. Şekil 4.4).

$$\begin{array}{ccccc}
(V_p^\infty B, R_w) & \xrightarrow{A_p^\infty} & (B^\infty, R_\zeta) & \xrightarrow{\pi_i} & (B, R) \\
\downarrow \nabla_p^\infty & & & & \\
(B, R_d) & & & &
\end{array}$$

Şekil 4.4. $\{p\}$ kümesinin kapalılık diyagramı.

$u, v \in \nabla_p^\infty B$ olmak üzere $uR_w v$ ise her $i = 1, 2$ için $\pi_i A_p^\infty u R \pi_i A_p^\infty v$

de $\nabla_p^\infty u R_d \nabla_p^\infty v = uR_d v$ olur ki bu ise $u = v$ olması demektir.

Şimdi R nin p de ters simetrik olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $x \neq p$ olmak üzere xRp ve pRx olsun.

$u = x_1$ ve $v = x_2$ olsun.

$$\pi_1 A_p^\infty u R \pi_1 A_p^\infty v = \pi_1 A_p^\infty x_1 R \pi_1 A_p^\infty x_2 = \pi_1(x, p, p, \dots) R \pi_1(p, x, p, \dots) = xRp$$

$$\pi_2 A_p^\infty u R \pi_2 A_p^\infty v = \pi_2 A_p^\infty x_1 R \pi_2 A_p^\infty x_2 = \pi_2(x, p, p, \dots) R \pi_2(p, x, p, \dots) = pRx$$

ve $\nabla_p^\infty u = \nabla_p^\infty x_1 = x = \nabla_p^\infty x_2 = \nabla_p^\infty v$ dir, yani $x_1 R_W x_2$ demektir. R_W diskre olduğundan $x_1 = x_2$ olur ki böylece $p = x$ elde edilir. Böylece R bağıntısı p de ters simetriktir.

Tersine olarak (B, R) yansıma bağıntılı uzayında R, p de ters simetrik olsun. $\{p\}$ nin kapalı yani Tanım 4.1.4 den R_W nin diskre olduğunu göstereceğiz. $u, v \in \bigvee_p^\infty B$ için $u = x_k, v = x_t$ ve $uR_W v$ olsun.

$$\pi_k A_p^\infty u R \pi_k A_p^\infty v = \pi_k(p, p, \dots, x_k, p, p, \dots) R \pi_k(p, p, \dots, x_t, p, p, \dots) = xRp$$

$$\pi_t A_p^\infty u R \pi_t A_p^\infty v = \pi_t(p, p, \dots, x_k, p, p, \dots) R \pi_t(p, p, \dots, x_t, p, p, \dots) = pRx$$

R ters simetrik olduğundan $p = x$ dir. Böylece $u = x_k = x_t = v$ olur. Tanım 4.1.4 den R_W diskredir, böylece $\{p\}$ kümesi (B, R) de kapalıdır.

Teorem 4.2.2 (B, R) yansıma bağıntılı uzayında $\emptyset \neq M \subseteq B$ kümesi kapalıdır $\Leftrightarrow$ Her $x \in B$ için xRa ve bRx olacak şekilde $a, b \in M$ varsa $x \in M$ dir.

İspat: Kabul edelim ki (B, R) uzayında $\emptyset \neq M \subseteq B$ kapalı olsun. Tanım 4.1.4 den $\{*\}$ kümesi B/M de kapalıdır. Teorem 4.2.1 den, $R', B/M$ deki bitiş kaldırması olmak üzere $R', *$ noktasında ters simetrik özelliğini sağlayan bağıntıdır. O halde R' bağıntısı $*$ dnoktasında ters simetrik ve her $x \in B$ ve $a, b \in M$ için xRa ve bRx ise

$$q: (B, R) \rightarrow (B/M, R')$$

olmak üzere $qxR'qa = qxR' * ve qbR'qx = * R'qx$ olur. R' bağıntısı $*$ noktasında ters simetrik olduğundan $qx = *$ olur yani $x \in M$ dir.

Tersine olarak şartlar sağlansın ve bazı $c \in B/M$ için $cR'*$ ve $*R'c$ ise Tanım 3.3.2 den $a, b \in M$ ve $x \in B$ vardır öyle ki xRa ve bRx , $qx = c$ ve $qa = qb = *$ dir. Böylece $x \in M$ dan $c = *$ elde edilir, yani R' ters simetriktir.

Teorem 4.2.3 (B, R) yansıma bağıntılı uzay ve $\emptyset \neq M \subseteq B$ açıktır $\Leftrightarrow$ Her $x \in B$ için xRa ve bRx olacak şekilde $a, b \in M^c$ varsa $x \in M^c$ dir.

İspat: Teorem 4.2.2 deki ispatın benzeridir.

Teorem 4.2.4 (B, R) yansıma bağıntılı uzay ve $\emptyset \neq M \subseteq B$ kümesi kuvvetli kapalıdır $\Leftrightarrow$ Her $x \in B$ için xRa veya aRx olacak şekilde en az bir $a \in M$ varsa $x \in M$ olmasıdır.

İspat: $\emptyset \neq M \subseteq B$ kuvvetli kapalı için Tanım 4.1.4 den $\{*\}$ kümesi B/M de T_1 olur. Teorem 3.3.6 dan R' , B/M deki bitiş yapısı olmak üzere R' , $*$ de diskredir yani $bR'*$ ve $*R'b$ ise $b = *$ dır. Böylece R' , $*$ noktasında diskredir $\Leftrightarrow \forall x \in B$ ve $a \in M$ için xRa veya aRx ise $x \in M$ ispatlayacağız. $q: (B, R) \rightarrow (B/M, R')$ dönüşümü dikkate alındığında

$$q(x)R'q(a) = q(x)R' * \text{ veya } q(a)R'q(x) = *R'q(x)$$

elde edilir. R' diskre olduğundan $q(x) = *$, yani $x \in M$ olur.

Tersine olarak şartlar sağlansın ve bazı $c \in B/M$ için $cR'*$ veya $*R'c$ olsun. Tanım 3.3.2 den $(x) = c$, $q(a) = *$, xRa veya aRx şekilde $x \in B$ ve $a \in M$ vardır. Kabulden $x \in M$ elde edilir. Sonuçta $q(x) = *$ olur ki bu ise $c = *$ olması yani R' nün $*$ noktasında diskre olmasıdır.

Teorem 4.2.5 (B, R) yansıma bağıntılı uzayında $M \subseteq B$ kuvvetli açıktır ancak ve ancak her $x \in B$ için xRa veya aRx olacak şekilde $a \in M^c$ varsa $x \in M^c$ dir.

İspat: Teorem 4.2.4 deki ispatın benzeridir.

Teorem 4.2.6 (B, R) yansıma bağıntılı uzayında kuvvetli kapallık ile kuvvetli açıklık denktir.

İspat: M kuvvetli kapalı olsun. Ayrıca $\forall x \in B$ için xRy veya yRx olacak şekilde $y \in M^c$ varsa $x \in M^c$ olduğunu göstereceğiz.

$x \notin M^c$ olsun. Böylece, $x \in M$ olur. M kuvvetli kapalı ve xRy veya yRx olduğundan $y \in M$ olur. Bu da $y \in M^c$ ile çelişki oluşturur. Böylece $x \in M^c$ dir. Sonuç olarak M kuvvetli açık olur.

M açık ise kapalı olmak zorunda değildir. Örneğin $B = \{a, b, c\}$ için $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, b), (a, c)\}$ olsun. $M = \{a, b\}$ kümesi açık olmasına rağmen kapalı değildir.

Teorem 4.2.7 (B, R) yansıma bağıntılı uzayında her kuvvetli kapalı küme kapalıdır. Tersi genelde doğru değildir.

İspat: M kuvvetli kapalı olsun. Teorem 4.2.4 den $\forall x \in B$ için xRa veya aRx olacak şekilde $a \in M$ varsa $x \in M$ dir. Ayrıca her $x \in B$ için xRa ve bRx olacak şekilde $a, b \in M$ olsun. Böylece $x \in M$ olduğundan M nin kapallığı elde edilir.

Bu teoremin tersi genelde doğru değildir. $B = \{a, b\}$ için $R = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}$ için $\{a\}$ kapalı olmasına rağmen kuvvetli kapalı değildir.

Örnek 4.2.8 $B = \{a, b, c\}$ için $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, a), (a, b)\}$ olsun.

$M = \emptyset$ ise M kapalı ve kuvvetli kapalıdır.

R bağıntısı a ve b de ters simetrik olmadığından, c de ters simetrik olduğundan Teorem 4.2.1, 4.2.5 den $\{a\}$ ve $\{b\}$ kümeleri kapalı ve açık değildir fakat $\{c\}$ kümesi hem açık hem de kapalıdır. Teorem 4.2.4 den $\{a\}$ ve $\{b\}$ kümeleri kuvvetli kapalı değil fakat $\{c\}$ kümesi kuvvetli kapalıdır. Ayrıca Tanım 4.1.4 den $\emptyset$ ve B kümeleri hem kapalı (açık) hem de kuvvetli kapalıdır.

$M_1 = \{a, b\}$ kümesi Teorem 4.2.2 den kapalıdır, Teorem 4.2.4 den de kuvvetli kapalıdır ve Teorem 4.2.3 den açıktır,

$M_2 = \{a, c\}$ kümesi Teorem 4.2.2 den kapalıdır, Teorem 4.2.4 den bRa olmasına rağmen $b \notin M_2$ olduğundan kuvvetli kapalı değildir ve Teorem 4.2.3 den açık değildir,

$M_3 = \{b, c\}$ kümesi Teorem 4.2.2 den kapalıdır. Teorem 4.2.4 den bRa olmasına rağmen $a \notin M_3$ olduğundan kuvvetli kapalı değildir ve Teorem 4.2.3 den açık değildir.

Sonuç 4.2.9 (B, R) yansıma bağıntılı uzayında,

A) R bağıntısı $p \in B$ de diskre olsun. Aşağıdakiler denktir:

- (1) $\{p\}$ kuvvetli kapalıdır,
- (2) $\{p\}$ kuvvetli açıktır,
- (3) $\{p\}$ kapalıdır.

B) (B, R) uzayı T_1 ve $M \subseteq B$ olsun. Aşağıdakiler denktir:

- (1) M kuvvetli kapalıdır,
- (2) M kuvvetli açıktır,
- (3) M kapalıdır,
- (4) M açıktır.

C) (B, R) uzayı T_1 olsun. $M \subseteq B$ kapalıdır ancak ve ancak kuvvetli kapalıdır.

Teorem 4.2.10 (B, R) yansıma bağıntılı uzayı için

- (1) $\forall i \in I, M_i \subset B$ kapalı ise $\bigcap_{i \in I} M_i$ kapalıdır.
- (2) $\forall i \in I, M_i \subset B$ kuvvetli kapalı ise $\bigcap_{i \in I} M_i$ kuvvetli kapalıdır.
- (3) $M_1, M_2 \subset B$ kapalı ise $M_1 \cup M_2$ kapalı olmayabilir.
- (4) $M_1, M_2 \subset B$ açık ise $M_1 \cap M_2$ açık olmayabilir.
- (5) $M_1, M_2 \subset B$ kapalı değil ise $M_1 \cap M_2$ kapalı olabilir.
- (6) $\forall i \in I, M_i \subset B$ kuvvetli kapalı ise $\bigcup_{i \in I} M_i$ kuvvetli kapalıdır.
- (7) $\forall i \in I, M_i \subset B_i$ kapalı ise $M = \prod_{i \in I} M_i$ kümesi $B = \prod_{i \in I} B_i$ kapalıdır.
- (8) $\forall i \in I, M_i \subset B_i$ açık ise $M = \prod_{i \in I} M_i$ kümesi $B = \prod_{i \in I} B_i$ de açıktır.
- (9) $\forall i \in I, M_i \subset B_i$ kuvvetli kapalıysa $M = \prod_{i \in I} M_i$ da $B = \prod_{i \in I} B_i$ de kuvvetli kapalıdır.

İspat: (1) $\forall i \in I$ için M_i ler kapalı olsun. Her $x \in B$ için xRa ve bRx olacak şekilde $a, b \in \bigcap_{i \in I} M_i$ olsun. $\forall i \in I$ için $b, a \in M_i$ ve M_i ler kapalı olduğundan Teorem 4.2.2 den $x \in M_i$ olur. Böylece $x \in \bigcap_{i \in I} M_i$ olur ki $\bigcap_{i \in I} M_i$ kümesi kapalıdır.

(2) Her $i \in I$ için $M_i \subset B$ ler kuvvetli kapalı olsun. Her $x \in B$ için aRx veya xRa olacak şekilde $a \in \bigcap_{i \in I} M_i = M$ olduğunda $x \in M$ olduğunu göstereceğiz. $\forall i \in I$ için $a \in M_i$ olur. Her $i \in I$ için M_i ler kuvvetli kapalı olduğundan aRx veya xRa olacak

şekilde $a \in M_i$ olduğundan $x \in M_i$ olur. Böylece $x \in M$ olur. Teorem 4.2.4 den M kümesi kuvvetli kapalıdır.

(3) $B = \{a, b, c\}$ için $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, b), (a, c)\}$ olsun. R bağıntısının a ve b de ters simetrik olmasından $M_1 = \{a\}$ ve $M_2 = \{b\}$ kümeleri kapalıdır. Fakat $M_1 \cup M_2 = \{a, b\}$ kümesi kapalı değildir. cRb ve aRc olmasına rağmen $c \notin M_1 \cup M_2$ dir.

(4) $B = \{a, b, c\}$ için $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, b), (a, c)\}$ olsun. Teorem 4.2.3 den $M_1 = \{c, b\}$ ve $M_2 = \{c, a\}$ kümeleri açıktır. Fakat $M_1 \cap M_2 = \{c\}$ kümesi açık değildir. Çünkü cRb ve aRc olmasına rağmen $c \notin (M_1 \cap M_2)^c$ dir.

(5) $B = \{a, b, c\}$ için $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, a), (a, b)\}$ olsun. $M_1 = \{a\}$ ve $M_2 = \{b\}$ kümeleri kapalı değildir. Fakat $M_1 \cap M_2 = \{\emptyset\}$ kümesi kapalıdır.

(6) Her $i \in I$ için $M_i \subset B$ ler kuvvetli kapalı olsun. Her $x \in B$ için aRx veya xRa olacak şekilde $a \in \bigcup_{i \in I} M_i = M$ olduğunda $x \in M$ olduğunu göstereceğiz. En az bir $k \in I$ için $a \in M_k$ olur. M_k kuvvetli kapalı olduğundan $x \in M_k$ olur. Böylece $x \in M$ olur. Teorem 4.2.4 den M kuvvetli kapalıdır.

(7) $x \in B$ olmak üzere xRa ve bRx olacak şekilde $a, b \in M$ olsun. Burada $R, \prod_{i \in I} M_i$ üzerindeki çarpım yapısıdır. Tanım. 3.2.2 den her $i \in I$ için $\pi_i(x)R\pi_i(a) = x_iR_ia_i$ ve $\pi_i(b)R_i\pi_i(x) = b_iR_ix_i$ dir. $\forall i \in I$ için $M_i \subset B_i$ kapalı olmasından Teorem 4.2.2 den $x_i \in M_i$ olur. Dolayısıyla $x = (x_1, x_2, \dots) \in \prod_{i \in I} M_i$ olur ki sonuç olarak Teorem 4.2.2 den M, B de kapalıdır.

(8) $x \in B$ olmak üzere xRa ve bRx olacak şekilde $a, b \in M$ olsun. Tanım 3.2.2 den $i \in I$ için $\pi_i(x)R\pi_i(a) = x_iR_ia_i$ ve $\pi_i(b)R_i\pi_i(x) = b_iR_ix_i$ dir. $\forall i \in I$ için $M_i \subset B_i$ açıklığından Teorem 4.2.3 den $x_i \in M_i^c$ dir. Böylece $x = (x_1, x_2, \dots) \in (\prod_{i \in I} M_i)^c$ olur ki sonuç olarak Teorem 4.2.3 den M, B de açıktır.

(9) Her $i \in I$ için $M_i \subset B_i$ de kuvvetli kapalı olduğunu kabul edelim. Her $x = (x_1, x_2, \dots) \in B = \prod_{i \in I} B_i, xRa$ veya aRx dan $a = (a_1, a_2, \dots) \in M = \prod_{i \in I} M_i$ olsun. $x \in M$ olduğunu göstereceğiz. Burada R, B üzerindeki çarpım yapısıdır. Her

$i \in I$ için $x_i \in B_i$ olur ki M_i lerin kuvvetli kapalılığından $x_i R_i a_i$ veya $a_i R_i x_i$ olacak şekilde $x_i \in M_i$ dir. Böylece $x \in M$ olur. M kuvvetli kapalıdır.

Teorem 4.2.11 (B, R) yansıma bağıntılı uzayı için

- (1) $M \subset B$ kuvvetli kapalı ve $N \subset M$ kuvvetli kapalı ise $N \subset B$ de kuvvetli kapalıdır.
- (2) $f: (A, S) \rightarrow (B, R)$ bağıntı koruyan fonksiyonu için $M \subset B$ (kuvvetli) kapalıysa $f^{-1}(M) \subset A$ da (kuvvetli) kapalıdır.

İspat : (1) $M \subset B$ ve $N \subset M$ kuvvetli kapalı kümeler olsun. R_M ve R_N sırasıyla M ve N kümeleri üzerinde ki $i: M \rightarrow (B, R)$ ve $i: N \rightarrow (M, R_M)$ içine fonksiyonları elde edilen başlangıç yapıları olsun.

$\forall x \in B$ için $a R_N x$ ya da $x R_N a$ olacak şekilde $a \in N$ olsun. $x \in N$ olduğunu göstereceğiz. $x R_N a = x R_M a = x R a$ ve $a R_N x = a R_M x = a R x$ olduğunu biliyoruz. $a \in M$, $x R a$ veya $a R x$ olduğundan Teorem 4.2.4 den $x \in M$ elde edilir ki $M \subset B$ de kuvvetli kapalı olduğundan $x \in M$ olur. $a \in N$, $x R_N a$ veya $a R_N x$ ve $N \subset M$ de kuvvetli kapalı olduğundan Teorem 4.2.4 den $x \in N$ olur.

(2) Kabul edelim ki $\forall x \in X$ için $a R x$ veya $x R a$ olacak şekilde $a \in f^{-1}(M)$ olsun. $x \in f^{-1}(M)$ olduğunu göstereceğiz. f , bağıntı koruyan dönüşüm olduğundan $f(x) R f(a)$ olacak şekilde $f(a) \in M$ olur. Her iki tarafa f^{-1} uygulanırsa $f^{-1} f(x) = x \in f^{-1}(x)$ elde edilir. Bu ise Teorem 4.2.4 den $f^{-1}(M)$ nin A da kuvvetli kapalı olması demektir.

4.3 Bazı Topolojik Kategorilerde Kapalılık Kavramı

(1) **RRel** de, Teorem 4.2.2, 4.2.4, 4.2.6 ve 4.2.7 dan,

(i) (B, R) yansıma bağıntılı uzayında $\emptyset \neq M \subseteq B$ kümesi kapalıdır $\Leftrightarrow \forall x \in B$ için $x R a$ ve $b R x$ şeklinde $a, b \in M$ varsa $x \in M$ dir.

(ii) (B, R) yansıma bağıntılı uzay ve $\emptyset \neq M \subseteq B$ kümesi kuvvetli kapalıdır $\Leftrightarrow$ Her $x \in B$ için $x R a$ veya $a R x$ şeklinde $\exists a \in M$ varsa $x \in M$ dir.

(iii) (B, R) yansıma bağıntılı uzayında her kuvvetli kapalı küme kapalıdır.

(iv) Her kuvvetli kapalı küme kapalıdır.

(2) **ConFCO** (Nesneleri sabit süzgeç yakınsak uzaylar, dönüşümleri uzaylar arasındaki dönüşümlerden oluşan kategori) de [11] deki Teorem 3.4-3.7 den,

(i) (B, K) uzayında $M \subseteq B$ kuvvetli kapalıdır (kapalıdır) $\Leftrightarrow$ Her $a \in K$ ve $a \notin M$ olacak şekildeki $\forall a \in K$ $a \notin [a]$ veya $a \in [M]$ öz olmayan süzgeçtir.

(ii) (B, K) uzayında $M \subseteq B$ kapalıdır (kuvvetli kapalıdır) $\Leftrightarrow$ Her $a \in K$ ve $a \in M$ olacak şekildeki $\forall a \in B$ için $a \notin [a]$ veya $a \in [M^c]$ öz olmayan süzgeçtir.

(3) **ConLim** (Objeleri sabit yakınsak süzgeç uzaylar, morfizmleri bu uzaylar arasındaki dönüşümler kategorisi) de [20] deki Teorem 5.1.8 ve 5.1.7 den

(i) (B, K) sabit limit uzayında $M \subseteq B$ açıktır (kapalıdır) $\Leftrightarrow M = B$ dir.

(ii) (B, K) sabit limit uzayının alt kümesi kuvvetli açık ve kuvvetli kapalıdır.

(4) **CP** (Objeleri çiftler uzayı ve morfizmleri ise bu uzaylar arasındaki alt küme koruyan dönüşümler olan kategori) de [11] deki Teorem 3.8 den, her (A, B) çiftler uzayında $\emptyset \neq M \subseteq A$ kümesi kapalı ve kuvvetli kapalıdır.

(5) **PBorn** (Objeleri prebornolojik uzaylar ve morfizmleri ise bu uzaylar arasındaki dönüşümler olan kategori) de [11] deki Teorem 2.13, 3.10 ve 3.9 dan

(i) (B, F) uzayında $\emptyset \neq M \subseteq B$ kümesi kapalıdır $\Leftrightarrow B = F$ dir.

(ii) Her (B, F) uzayında $\emptyset \neq M \subseteq B$ kümesi kuvvetli kapalıdır.

(6) **Prox** (Objeleri proximity uzaylar ve morfizmleri ise p -dönüşümler olan kategori) de [21] deki Teorem 4.5-4.7 den,

(i) (X, δ) uzayında her $E \subseteq X$ için $(\{p\}, E) \in \delta$ olduğunda $p \in E$ ise $\{p\}$ kapalıdır.

(ii) $K \subseteq X$ kapalıdır $\Leftrightarrow$ Kuvvetli kapalıdır. $\Leftrightarrow \forall x \in X$ için $(\{x\}, K) \in \delta$ olduğunda $x \in K$.

(iii) $K \subseteq X$ açıktır $\Leftrightarrow$ Kuvvetli açıktır. $\Leftrightarrow \forall x \in X$ için $(\{x\}, K^c) \in \delta$ olduğunda $x \in K^c$.

(8) **psqMet** kategorisinde [22] deki ve Teorem 4.2 ve 4.3 den, (X, d) extended pseudo semi metrik uzay ve $\emptyset \neq M \subseteq B$ olsun.

(i) M kapalıdır $\Leftrightarrow \forall x \in X$ ve $x \notin M$ için $d(M, x) = \infty$ veya $d(x, M) = \infty$.

(ii) M kuvvetli kapalıdır. $\Leftrightarrow \forall x \in X$ ve $x \notin M$ için $d(M, x) = \infty = d(x, M)$.

5. KAPANIŞ OPERATÖRLERİ

5.1 Kapanış Operatörü

Teorem 5.1.1 $\mathcal{C}$ bir kategori ve $X \in Ob(\mathcal{C})$ ve $M \subset X$ için

- (1) X in M alt kümesini $c_X(M)$ ye götüren c_X kapanış operatörü aşağıdakileri sağlar.
 - (i) $M \subset c_X(M)$,
 - (ii) $M \subset N$ ise $c_X(M) \subset c_X(N)$ dir,
 - (iii) $\forall f: X \rightarrow Y$ için $f(c_X(M)) \subset c_Y(f(M))$ dir.
- (2) $c_X(M) = X$ ise c_X e alışılmış kapanış operatörü denir.
- (3) $i_X(M) = X$ ve $i_X(\emptyset) = \emptyset$ ise i_X e indiske kapanış operatörüdür.
- (4) $\delta_X(M) = M$ ise δ_X e diskre kapanış operatörü denir.
- (5) $c_X(M) = M$ ise M ne c_X kapalıdır denir.
- (6) $c_X(c_X(M)) = c_X(M)$ ise c_X ne idempotent denir.
- (7) $A \subset X$ ve $M \subset A$ olmak üzere $c_A(M) = A \cap c_X(M)$ ise c_X ne kalıtsal (hereditary) idempotent denir.
- (8) $M, N \subset X$ için $c_X(M \cup N) = c_X(M) \cup c_X(N)$ ise c_X operatörüne toplamsal (additive) denir.

Örnek 5.1.2 (B, R) yansıma bağıntılı uzay ve $M \subseteq B$ olsun.

- (i) R diskre ise $cl(\{M\}) = M = scl(\{M\}) = sq(\{M\})$
- (ii) R indiske ise $cl(\{M\}) = B = scl(\{M\}) = q(\{M\})$

Tanım 5.1.3 ([23]) (X, L) yansıma bağıntılı uzay ve $M \subset X$ için

- (1) $cl_X(M) = \bigcap \{F \subset X \mid M \subset F \text{ ve } F \text{ kapalı}\}$ ne M nin X e göre kapanışıdır. Kapalı ile kuvvetli kapalı yer değişirse M nin X e göre kuvvetli kapanışı olan $scl_X(M)$ oluşur.
- (2) $q_X(M) = \bigcap \{F \subset X \mid M \subset F, F \text{ açık ve kapalı}\}$ ne M nin X e göre quasi-component kapanışı denir. Kapalı ve açık yerine kuvvetli kapalı ve kuvvetli açık alınırsa M nin X e göre kuvvetli quasi-component kapanışı $sq_X(M)$ oluşur.
- (3) $\theta_X(M) = \{x \in X \mid X \text{ in } x \text{ noktasını içeren her } G \text{ açık kümesi için } cl_X(G) \cap M \neq \emptyset\}$ ne M nin X e göre θ_X -kapanışı denir. cl_X yerine scl_X ve G yerine kuvvetli açık alınırsa M nin X e göre $S\theta$ -kapanışı $S\theta_X(M)$ oluşur..

Teorem 5.1.6 (X, R) yansıma bağıntılı uzayında $M \subset X$ için

$$(1) scl_X(M) = sq_X(M)$$

(2) cl_X , scl_X ve sq_X operatörleri idempotent, zayıf kalıtsal, çarpımsal ve kalıtsaldır. cl_X toplamsal değildir.

İspat: (1) Tanım 5.1.3 den açıktır.

(2) [24] deki Alıştırma 2.D, Önerme 2.5 ve [25] deki Önerme 3.6 dan ispat açıktır. $B = \{a, b, c\}$ için $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, b), (a, c)\}$ olsun. Teorem 4.2.1 den $M_1 = \{a\}$ ve $M_2 = \{b\}$ kümeleri için $cl_B(M_1) = cl_B(\{a\}) = \{a\}$ ve $cl_B(M_2) = cl_B(\{b\}) = \{b\}$ olur. $cl_B(M_1 \cup M_2) = cl_B(\{a, b\}) = B$ elde edilir ki $cl_B(M_1 \cup M_2) \neq cl_B(M_1) \cup cl_B(M_2)$ olur. Böylece cl_B operatörü toplamsal değildir.

Teorem 5.1.7 (B, R) diskre yansıma bağıntılı uzay ise $M \subset B$ için $q_B(M) = sq_B(M) = cl_B(M) = scl_B(M) = \delta_B(M) = M$

Teorem 5.1.8 (B, R) indiskre yansıma bağıntılı uzay ise $M \subset B$ için $q_B(M) = sq_B(M) = cl_B(M) = scl_B(M) = B$

Örnek 5.1.9 $B = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (c, b), (a, c)\}$ bağıntısı $\{a\}, \{c\}, \{b\}, \{d\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, d, c\}, \{a, d, c\}, B, \emptyset$ kapalıdır.

$\emptyset, \{d\}, \{a, b, c\}, B$ kuvvetli kapalıdır. Ayrıca $\{a, b, d\}, \{a, b\}$ kümeleri kapalı değil.

$M = \{c, b\}$ olsun. Bu durumda

$$cl_B(M) = \{c, b\}, scl_B(M) = \{a, b, c\}, q_B(M) = \{c, b\} \text{ ve } sq_B(M) = \{a, b, c\}$$

$\mathcal{E}$ kategorisinin c kapanış operatörü için

$$(1) \mathcal{E}_{0c} = \{X \in \mathcal{E} \mid a, b \in X \text{ için } a \in c_X(\{b\}) \text{ ve } b \in c_X(\{a\}) \text{ ise } a = b\}$$

$$(2) \mathcal{E}_{1c} = \{X \in \mathcal{E} \mid \text{her } a \in X \text{ için } c_X(\{a\}) = \{a\}\}$$

$$(3) \mathcal{E}_{2c} = \{X \in \mathcal{E} \mid c_{X^2}(\Delta) = \Delta, \text{ diyagonal}\}$$

$$(4) \mathcal{E}_{3c} = \{X \in \mathcal{E} \mid c_{X^2}(\Delta) = X^2\}$$

$\mathcal{E} = \mathbf{Top}$ daki c bilinen kapanış ve q ise quasi-kapanış operatörü için $\mathcal{E}_{0c}$, $\mathcal{E}_{1c}$, $\mathcal{E}_{2c}$, $\mathcal{E}_{3c}$ ve $\mathcal{E}_{1q}$ ler T_0 , T_1 , T_2 bağlantılı ve tam bağlantısız uzayların karşılığıdır.

Örnek 5.1.10 $B = \{a, b\}$, $R = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}$

$B^2 = \{(a, a), (b, b), (b, a), (a, b)\}$ olmak üzere R_* çarpım bağıntısını bulalım.

$$R_* = \left\{ \begin{array}{l} ((a, a), (a, a)), ((b, b), (b, b)), ((a, b), (a, b)), \\ ((b, a), (b, a)), ((a, a), (a, b)), ((a, a), (b, a)), \\ ((a, b), (b, b)), ((b, a), (b, b)), ((a, a), (b, b)) \end{array} \right\}$$

$\Delta = \{(a, a), (b, b)\}$ kapalı değil. Çünkü Teorem 4.2.2 den $(a, b)R_*(b, b)$ ve $(a, a)R_*(a, b)$ olmasına rağmen $(a, b) \notin \Delta$ dır.

Teorem 5.1.11 A) Aşağıdakiler denktir:

- (1) $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{1cl}$,
- (2) $(B, R) \in \mathbf{T}_0\mathbf{RRel}$,
- (3) $(B, R) \in \overline{\mathbf{T}}_0\mathbf{RRel}$,
- (4) R ters simetriktir.

B) Aşağıdakiler denktir:

- (1) $(B, R) \in \mathbf{RRel}$,
- (2) $(B, R) \in \mathbf{T}_0'\mathbf{RRel}$.

İspat: A) $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{1cl}$ dir $\Leftrightarrow \forall x \in B$ için $cl(\{x\}) = \{x\}$ dir $\Leftrightarrow \forall x \in B$ için $\{x\}$ kapalıdır ancak ve ancak Teorem 4.2.1 den R ters simetriktir. Yani (B, R) uzayı T_0 dır. (2), (3) ve (4) ün denkliği Teorem 3.3.6 dan açıktır.

B) Teorem 3.3.6 dan ispat aşıkardır.

Teorem 5.1.12 (B, R) yansıma bağıntılı uzayı için aşağıdakiler denktir:

- (1) $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{1scl}$,
- (2) $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{2scl}$,
- (3) $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{2cl}$,
- (4) R diskredir.

İspat: (1) $\Leftrightarrow$ (4) Kabul edelim ki $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{1scl}$ ve her $a, b \in B$ için aRb için $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{1scl}$ olduğundan $\forall a \in B, scl(\{a\}) = \{a\}$ olur. Yani $\forall a \in B$ için $\{a\}$ kuvvetli kapalıdır. aRb den Teorem 4.2.4 den $a = b$ dir. Böylece (B, R) diskredir. Bu durumda Teorem 4.2.4 den $\forall a \in B$ için $\{a\}$ kuvvetli kapalıdır. $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{1scl}$ dir.

(2) $\Leftrightarrow$ (4) Kabul edelim ki $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{2scl}$ ve $\forall a, b \in B$ için aRb olsun. $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{2scl}$ olduğundan $(a, b)R^2(b, b)$ veya $(b, b)R^2(a, b)$ olur. $\Delta \subset B^2$ diyagonalin kuvvetli kapalı olmasından Teorem 4.2.4 den $(a, b) \in \mathbf{RRel}_{2scl} = \Delta$ dir. Böylece (B, R) diskre uzay olur. Tersine olarak (B, R) diskre ise Teorem 4.2.4 den ve den $\Delta \subset B^2$ kuvvetli kapalıdır. Böylece $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{2scl}$ olur.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) Kabul edelim ki $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{2cl}$ ve $\forall a, b \in B$ için aRb olsun. $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{2cl}$ olduğundan $(a, b)R^2(b, b)$ ve $(a, a)R^2(a, b)$ olur. Teorem 4.2.4 den $(a, b) \in \Delta$ olduğu için (B, R) diskre olur. Tersine olarak (B, R) diskre ise $\Delta \subset B^2$ kapalı olur. Böylece $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{2cl}$ elde edilir.

Sonuç 5.1.13 Teorem 4.2.6 dan $scl = sq$ olur

Teorem 5.1.14 (B, R) yansıma bağıntılı uzayı için aşağıdakiler denktir:

- (1) $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{1scl},$
- (2) $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{2scl},$
- (3) $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{2q},$
- (4) $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{1sq},$
- (5) $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{2sq},$
- (6) R diskredir.

İspat: Teorem 5.1.11 ve 5.1.12 den aşikârdır.

Örnek 5.1.15 $B = \{k, l\}$, $R = \{(k, k), (l, l), (k, l)\}$ şeklinde tanımlanan yansıma özelliğine sahip bağıntısı için $\emptyset, \{l\}, \{k\}$ ve B kapalıdır ve açıktır, B ve $\emptyset$ kuvvetli kapalıdır ve kuvvetli açıklardır. O halde $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{1cl}$ fakat $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{1cl}$ dir. Benzer şekilde $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{1q}$ fakat $(B, R)R \notin \mathbf{RRel}_{1sq}$ dir.

Teorem 5.1.16

- (1) $RRel_{1cl} = T_0 RRel = \bar{T}_0 RRel$,
- (2) $RRel_{2cl} = RRel_{2q} = RRel_{1scl} = RRel_{2scl} = T_1 RRel$,
- (3) $RRel_{1sq} \subset RRel_{1q}$,
- (4) $RRel_{1scl} \subset RRel_{1cl} \subset RRel_{0cl}$,
- (5) $RRel_{0scl} = RRel_{0sq}$,
- (6) $RRel_{1scl} = RRel_{1sq}$,
- (7) $RRel_{2scl} = RRel_{2sq}$.

İspat: Teorem 5.1.11, 5.1.12 ve 5.1.14 den aşikârdır.

Teorem 5.1.17 (B, R) yansıma bağıntılı uzayında $M \subset B$ için M açık ve kapalıdır $\Leftrightarrow \forall x, y \in M^c$ için xRa ve aRy olacak şekilde $a \in M^c$ dir veya $\forall z, w \in M$ için zRb ve bRw olacak şekilde $b \in M$.

İspat: Teorem 4.2.1 - 4.2.3 den aşikârdır.

Teorem 5.1.18 Her $i \in I$ için $(B_i, R_i) \in RRel_{1cl}$ ise $(B = \prod_{i \in I} B_i, R) \in RRel_{1cl}$

İspat: $\forall i \in I$ için $(B_i, R_i) \in RRel_{1cl}$ olsun, $cl_{B_i}(\{x_i\}) = \{x_i\}$ olur. $x = (x_1, x_2, \dots) \in B$ için $cl_B(\{x\}) = \{x\}$ göstereceğiz. $cl_B(\{x\}) \neq \{x\}$ olsun. Böylece, $\exists y = (y_1, y_2, \dots) \in B$ vardır, $y \in cl_B(\{x\})$ dir ve $x \neq y$ dir. $y \in cl_B(\{x\})$ ise $y \in \prod_{i \in I} M_i = M$ olacak şekilde $x \in M$ kapalıdır vardır. Böylece, xRz ve zRy olacak şekilde $z = (z_1, z_2, \dots) \in B$ varsa $z \in M$ olur. π_i izdüşüm fonksiyonların sürekli olmasından

$$xRz \Leftrightarrow \pi_i(x)R_i\pi_i(z) = x_iR_iz_i,$$

$$zRy \Leftrightarrow \pi_i(z)R_i\pi_i(y) = z_iR_iy_i,$$

elde edilir. $\forall i \in I$ için M_i ler kapalı olduğundan $z_i \in B_i$ ise $z_i \in M_i$ olur. $cl_{B_i}(\{x_i\}) = \{x_i\}$ olduğunda $y_i \in cl_{B_i}(\{x_i\})$ olur ki bu $x_i = y_i$ olması demektir. $x \neq y$ seçtiğimizden bu bir çelişkidir. O halde $cl_B(\{x\}) = \{x\}$ olmalıdır. Sonuç olarak $(B_i, R_i) \in RRel_{1cl}$ olur.

5.2 Bazı Topolojik Kategorilerde Kapanış Operatörleri Sonuçları

(1) Top da

$$Top_{2scl} = Top_{2cl} \subset Top_{1scl} = Top_{1cl} \subset Top_{0scl} = Top_{0cl}$$

(2) $RRel$ kategorisinde Teorem 5.1.14 den,

$$RRel_{1cl} = T_0 RRel = \bar{T}_0 RRel,$$

$$RRel_{1scl} \subset RRel_{1cl} \subset RRel_{0cl},$$

$$RRel_{1sq} \subset RRel_{1q},$$

$$RRel_{2cl} = RRel_{2q} = RRel_{1scl} = RRel_{1sq} = RRel_{2sq} = RRel_{2scl} = T_1 RRel$$

(3) $ConFCO$ de [16], [19] ve [26] dan

$$\begin{aligned} ConFCO_{2cl} &= ConFCO_{2scl} \subset ConFCO_{1cl} = ConFCO_{1scl} = \bar{T}_0 ConFCO \\ &= T_0 ConFCO = T_1 ConFCO \subset ConFCO_{0cl} = ConFCO_{0scl} \\ &\subset T'_0 ConFCO \end{aligned}$$

(4) $ConLim$ de [20] deki Teorem 4.2.8, 4.2.5, 6.1.6 ve 6.1.4 den,

$$\begin{aligned} ConLim_{2cl} &= ConLim_{2scl} \subset ConLim_{0cl} = ConLim_{1cl} \\ &\subset ConLim_{2scl} = ConLim_{0scl} = ConLim_{1scl} \\ &= ConLim \end{aligned}$$

(5) CP kategorisinde [11] ve [27, 28] den,

$$CP_{1cl} = CP_{2cl} = CP_{1q} = CP_{2q} = CP_{1sq} = CP_{2sq} = CP_{1scl} = CP_{2scl}$$

$$CP_{1q} = CP_{2q} = \bar{T}_0 CP = T'_0 CP = T_1 CP = CP$$

(6) $PBorn$ kategorisinde [28] deki Teorem 3.7, 3.6 ve 4.2 den,

$$\begin{aligned} PBorn_{2cl} &= PBorn_{1cl} = PBorn_{2q} = PBorn_{1q} \subset PBorn_{2scl} = PBorn_{1scl} \\ &= PBorn_{2sq} = PBorn_{1sq} \end{aligned}$$

(7) **Prox** kategorisinde [29] daki Teorem 3.8-3.14 ve Uyarı 3.19 dan

$$\mathbf{Prox}_{2cl} = \mathbf{Prox}_{2scl} = \mathbf{Prox}_{1cl} = \mathbf{Prox}_{1scl} \subset \mathbf{Prox}_{0cl} = \mathbf{Prox}_{0scl}$$

(8) **psqMet** kategorisinde [30] daki Teorem 3.12 den,

$$\begin{aligned} T_1 \mathbf{psqMet} &= \mathbf{psqMet}_{1sq} = \mathbf{psqMet}_{1scl} = \mathbf{psqMet}_{2scl} \subset \mathbf{psqMet}_{1cl} \\ &= \mathbf{psqMet}_{2cl} = \mathbf{psqMet}_{1q} = \bar{T}_0 \mathbf{psqMet} \end{aligned}$$



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında öncelikle **RRel** kategorisinde kapalılık (açıklık) ve kuvvetli kapalılık (kuvvetli açıklık) kavramları araştırılmıştır. Bunların birbirleriyle olan ilişkileri belirlenmiştir. Daha sonra kapalı, açık, kuvvetli kapalı, kuvvetli açık yansıma bağıntılı uzayların keyfi kesişimlerinin (birleşimleri, çarpımları) durumları araştırılmıştır. Bu durumu desteklemeyen özellikler ise tersine örnekler ile desteklemiştir. Devamında sayısal örnekler ile açıklanmaya çalışılmıştır. Ardından bilinen bazı topolojik kategorilerdeki kapalılık kavramı ile **RRel** kategorisinde kapalılık kavramı karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar ise şu şekildedir.

1. (B, R) yansıma bağıntılı uzayında $p \in B$ için $\{p\}$ kapalıdır $\Leftrightarrow R$ bağıntısı p de ters simetriktr.
2. (B, R) yansıma bağıntılı uzayında $\emptyset \neq M \subseteq B$ kümesi kapalıdır ancak ve ancak her $x \in B$ için xRa ve bRx şeklinde $a, b \in M$ varsa $x \in M$ dir.
3. (B, R) yansıma bağıntılı uzay ve $\emptyset \neq M \subseteq B$ kümesi kuvvetli kapalıdır ancak ve ancak $\forall x \in B$ için xRa veya aRx olacak şekilde $\exists a \in M$ varsa $x \in M$ dir.
4. (B, R) yansıma bağıntılı uzayında kuvvetli kapalılık ile kuvvetli açıklık denktir. Fakat bu durum kapalı ve açıklık için sağlanmamaktadır.
5. (B, R) yansıma bağıntılı uzayında her kuvvetli kapalı küme kapalıdır. Fakat tersi genelde doğru değildir.
6. R bağıntısı $p \in B$ de diskre olsun. Aşağıdakiler denktir:

$$\{p\} \text{ kuvvetli açıktır} \Leftrightarrow \{p\} \text{ kuvvetli kapalıdır} \Leftrightarrow \{p\} \text{ kapalıdır}$$

7. (B, R) uzayı T_1 ve $M \subseteq B$ olsun.

$$M \text{ kuvvetli açıktır} \Leftrightarrow M \text{ kuvvetli kapalıdır} \Leftrightarrow M \text{ açıktır} \Leftrightarrow M \text{ kapalıdır}$$

Sonrasında **RRel** kategorisinde bazı kapanış operatörleri incelenmiştir. Bu operatörlerden özellikle **scl, cl, sq, q** üzerinde durulmuştur. Bu operatörler ile elde edilen **RRel_c** alt kategorileri ve birbirleriyle olan ilişkileri araştırılmıştır. Sonuçlar ise şu şekildedir.

Elde edilen sonuçlar ise şu şekildedir:

1. (X, R) yansıma bağıntılı uzay ve $M \subset X$ olsun.

$$(i) \quad scl_X(M) = sq_X(M)$$

(ii) cl_X , scl_X ve sq_X operatörleri idempotent, zayıf kalıtsal, çarpımsal ve kalıtsaldır. cl_X toplamsal değildir.

2. (B, R) diskre yansıma bağıntılı uzay ise $M \subset B$ için
 $q_B(M) = sq_B(M) = cl_B(M) = scl_B(M) = \delta_B(M) = M$

3. (B, R) indiskre yansıma bağıntılı uzay ise $M \subset B$ için
 $q_B(M) = sq_B(M) = cl_B(M) = scl_B(M) = B$

4. (B, R) yansıma bağıntılı uzay olsun.

$$(B, R) \in \mathbf{RRel}_{1cl} \Leftrightarrow (B, R) \in \mathbf{T}_0\mathbf{RRel} \Leftrightarrow (B, R) \in \bar{\mathbf{T}}_0\mathbf{RRel} \Leftrightarrow R \text{ ters simetrik}$$

$$(B, R) \in \mathbf{RRel} \Leftrightarrow (B, R) \in \mathbf{T}_0'\mathbf{RRel}$$

$$(B, R) \in \mathbf{RRel}_{1scl} \Leftrightarrow (B, R) \in \mathbf{RRel}_{2scl} \Leftrightarrow (B, R) \in \mathbf{RRel}_{2cl} \Leftrightarrow R \text{ diskredir}$$

$$(B, R) \in \mathbf{RRel}_{1scl} \Leftrightarrow (B, R) \in \mathbf{RRel}_{2scl} \Leftrightarrow (B, R) \in \mathbf{RRel}_{2q} \Leftrightarrow$$

$$(B, R) \in \mathbf{RRel}_{1sq} \Leftrightarrow (B, R) \in \mathbf{RRel}_{2sq} \Leftrightarrow R \text{ diskredir}$$

Bu tez çalışmasından yola çıkarak özellikle kapalılık kavramını barındıran kompaktlık, bağlantılık, tam bağlantısızlık, Stone uzay vb. gibi topolojik kavramların **RRel** kategorisindeki karşılıkları araştırılabilir. Ayrıca bu çalışmada tanım olarak verilen fakat teorem ile ifade edilmeyen diğer kapanış operatörleri ve özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Davey B. A. ve Priestley H. A, 1990. Introduction to lattices and order, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
2. Gierz, G., Hofmann, K. H., Keimel, K., Lawson, J. D., Mislove, M. ve Scott D. S., 2003. Continuous lattices and domains, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 93, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
3. Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L. ve Stein, C., 2009. Introduction to algorithms, MIT Press, Massachusetts, USA.
4. Russell, S. ve Norvig, P., 2020. Artificial intelligence: A Modern Approach, Pearson, New Jersey, USA.
5. Fishburn, P. C., 1970. Utility theory for decision-making, Wiley, New York, USA.
6. Mac Lane, S., 1998. Categories for the working mathematician, Springer, New York, USA.
7. Awodey, S., 2010. Category theory, Oxford University Press, Oxford , UK.
8. Borceux, F., 1994. Handbook of categorical algebra, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
9. May, J. P., 1999. A Concise course in algebraic topology, University of Chicago Press, Chicago, USA.
10. Maraşlı, T., 2005. Topolojik uzaylar kategorisinde kapanış operatörlerinin sınıflandırılması, Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.
11. Baran, M., 1993. The notion of closedness in topological categories, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 34, 1, 383-395.
12. Baran, M., 2000. Closure operators in convergence spaces, Acta Mathematica Hungarica, 87, 33-45.
13. Eilenberg, S. ve Mac Lane, S., 1945. General theory of natural equivalences, Transactions of the American Mathematical Society.
14. Adamek, J., Herrlich, H. ve Strecker, G.E., 1990. Abstract and concrete categories, John Wiley and Sons, New York.
15. Baran, M., 2025, Topoloji, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
16. Baran, M., 1991. Separation properties, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 23, 333-341.

17. Baran, M., 1992. Separation properties at p for the topological categories of reflexive relation spaces and preordered spaces, *Mathematica Balkanica*, 6, 193-198.
18. Baran, M., 2002. Compactness, perfectness, separation, minimality and closedness with respect to closure operators, *Applied Categorical Structures*, 10, 403-415.
19. Erciyes, A., Baran, T. M. ve Qasim, M., 2020. Closure operators in constant filter convergence spaces, *Konuralp Journal of Mathematics*, 8, 1, 185-191.
20. Çevik, K., 2023. Sabit limit uzaylar kategorisinde ayırma aksiyomları, kapalılık, bağlantılılık, soberlik ve kompaktlık, Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aksaray.
21. Kula, M., Maraşlı, T. ve Özkan, S., 2014. A Note on closedness and connectedness in the category of proximity spaces, *Filomat*, 28, 7, 1483-1492.
22. Baran, T. M., 2020. Closedness, separation and connectedness in pseudo-quasi-semi metric spaces, *Filomat*, 34, 4757-4766.
23. Dikranjan, D. ve Giuli, E., 1987. Closure operators I, *Topology and its Applications*, 27, 2, 129-143.
24. Dikranjan, D. ve Tholen, W., 1995. *Categorical structure of closure operators*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
25. Erciyes, A., Qasim, M. ve Güvey, İ. A., 2024. Separation, compactness, and sobriety in the category of constant limit spaces, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 73, 2, 319-335.
26. Baran, M., 1994. Separation properties in categories of constant convergence spaces, *Turkish Journal of Mathematics*, 18, 238-248.
27. Baran, M., 2022. Sober spaces, *Turkish Journal of Mathematics*, 46, 299-310.
28. Baran, M., 2023. Separation, connectedness, and disconnectedness, *Turkish Journal of Mathematics*, 47, 279-295.
29. Özkan, S., Kula, M. ve Baran, T. M., 2023. Closure operators, irreducibility, Urysohn's lemma, and Tietze extension theorem for proximity spaces, *Turkish Journal of Mathematics*, 47, 870-882.
30. Baran, T. M. ve Kula, M., 2022. Separation axioms, Urysohn's lemma and Tietze extension theorem for extended pseudo-quasi semi metric spaces, *Filomat*, 36, 2, 703-713.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Gökberk Batuhan KAÇAR

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2018-2022.

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2023-2025.

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Akdeniz Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Pedagojik Formasyon Eğitimi, Sertifika Programı, 2022-2023.
2. Özel Antalya Altınçağ Anadolu Lisesi, 2024-2025.

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Makaleler

1. Erciyes, A., Kaçar, G. B. ve Mercan, B., 2024. Closed subobjects with separation axioms T_0 ve T_1 in ***RRel***, 5. BİLSEL Uluslararası Truva Bilimsel Araştırmalar ve İnovasyon Kongresi, Çanakkale, Bildiri Kitabı, 378-379.