



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YARI-KAPALI KÜMELER VE GENELLEŞTİRMELERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Havva TAŞKIRAN

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Ayhan ERCİYES**

AKSARAY, 2024

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 212342002 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Havva TAŞKIRAN tarafından hazırlanan “**YARI-KAPALI KÜMELER VE GENELLEŞTİRMELERİ**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Halis BİLGİL

Kayseri Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 08/05/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Havva TAŞKIRAN

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında zamanını ayırarak her türlü desteğini ve tecrübesini esirgemeyen, beni yönlendiren değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ayhan ERCİYES'e ve Aksaray Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma sonsuz teşekkür ederim.

Tüm eğitim hayatım boyunca bana verdikleri manevi destek dolayı başta canım annem Fatma ERCAN ile canım babam İlhami ERCAN'a, yoğun çalışmalarım sırasında sabrını ve desteğini esirgemeyen her koşulda yanımda olan değerli eşim Burak TAŞKIRAN'a teşekkür ederim.

Havva TAŞKIRAN
AKSARAY, 2024

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. YARI-KAPALI KÜMELER.....	3
2.1 Kapalı Kümeler Ve Özellikleri.....	2
2.2 Yarı-Kapalı Kümeler Ve Özellikleri	5
2.3 Genelleştirilmiş Kapalı Kümeler Ve Özellikleri	5
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI-KAPALI KÜMELER	12
3.1 Genelleştirilmiş Yarı-Kapalı Kümeler Ve Özellikleri.....	12
3.2 Genelleştirilmiş Yarı-Kapalı Fonksiyonlar	15
3.3 Genelleştirilmiş Yarı Ayırma Aksiyomları	18
4. YARI-GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜMELER	20
4.1 Yarı-Genelleştirilmiş Kapalı Kümeler Ve Özellikleri.....	20
4.2 Yarı-Genelleştirilmiş Kapalı Fonksiyonlar	23
4.3 Yarı-Genelleştirilmiş Ayırma Aksiyomları.....	28
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	32
KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ.....	35

YÜKSEK LİSANS TEZİ
YARI-KAPALI KÜMELER VE GENELLEŞTİRMELERİ

Havva TAŞKIRAN

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

ÖZET

X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. (i) $A \subseteq U$ olacak şekilde her U açığı için $\bar{A} \subseteq U$ ise A ya genelleştirilmiş-kapalı küme (g -kapalı küme) denir. (ii) $A \subseteq U$ olacak şekilde her U açığı için $\tilde{A} \subseteq U$ ise A ya genelleştirilmiş yarı-kapalı küme (gs -kapalı küme) denir. (iii) $A \subseteq U$ olacak şekilde her U yarı-açığı için $\tilde{A} \subseteq U$ ise A ya yarı genelleştirilmiş-kapalı küme (sg -kapalı küme) denir. Dahası X deki g -kapalı kümenin (sırasıyla sg -kapalı küme, gs -kapalı küme) tümleyenine g -açık küme (sırasıyla sg -açık küme, gs -açık küme) denir.

Bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş-yarı kapalı fonksiyonlar, yarı-genelleştirilmiş kapalı fonksiyonlar, gs -açık (gs -kapalı), sg -açık (sg -kapalı), gs -sürekli ve sg -sürekli fonksiyonların özellikleri birbirleriyle olan ilişkileri araştırılmıştır. Ayrıca genelleştirilmiş-yarı kapanış, yarı-genelleştirilmiş kapanış, genelleştirilmiş-yarı iç operatörleri, gs -regüler, gs -normal, sg -regüler ve sg -normal uzaylar gibi yeni kavramların özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yarı-açık küme, Yarı-kapanış, gs -kapalı küme, sg -kapalı küme, gs -süreklilik, sg -süreklilik.

Mayıs, 2024; 35 sayfa

M. Sc. THESIS

SEMI-CLOSED SETS AND THEIR GENERALIZATIONS

Havva TAŞKIRAN

Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

ABSTRACT

Let X be a topological space and $A \subseteq X$ is called: (i) generalized closed set (g -closed set), if $\bar{A} \subseteq U$ whenever $A \subseteq U$ and U is open. (ii) semi-generalized closed set (sg -closed set), if $\tilde{A} \subseteq U$ whenever $A \subseteq U$ and U is semi-open. (iii) generalized semi-closed set (gs -closed set), if $\tilde{A} \subseteq U$ whenever $A \subseteq U$ and U is open. Moreover, the complement of a g -closed set (resp. sg -closed set, gs -closed set) in X is called g -open set (resp. sg -open set, gs -open set).

In this thesis study, the properties of generalized-semi-closed functions, semi-generalized closed functions, gs -open (gs -closed), sg -open (sg -closed), gs -continuous and sg -continuous functions and their relationships with each other were investigated. Additionally, the properties of new notions like semi-generalized closure, generalized-semi-closure, generalized-semi-interior operators, gs -regular, gs -normal, sg -regular and sg -normal spaces were examined.

Keywords: Semi-open set, Semi-closure, gs -closed set, sg -closed set, gs -continuity, sg -continuity.

May, 2024; 35 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Kapalı kümeler arasındaki ilişki.	1
---	---



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Bir uzaydaki iç ve kapanış özellikleri.....	3
Çizelge 2.2. Bir X uzayındaki yarı-açık kümeler.....	5
Çizelge 2.3. Bir X uzayındaki g -kapalı kümeler.	15
Çizelge 3.1. Bir X uzayındaki gs -kapalı kümeler	24
Çizelge 3.2. Bir X uzayındaki gs -kapalı kümeler.	26
Çizelge 4.1. Bir X uzayındaki sg -kapalı kümeler.	28
Çizelge 4.2. Bir X uzayındaki sg -kapalı kümeler	29



SİMGELER VE KISALTMALAR

$\sim g$	
$\bar{A}$	Bir A kümesinin sg -kapanışı
$g\sim$	
$\bar{A}$	Bir A kümesinin gs -kapanışı
$\tilde{A}$	Bir A kümesinin yarı-kapanışı
A^s	Bir A kümesinin yarı-içi
A^{sg}	Bir A kümesinin sg -içi
A^{gs}	Bir A kümesinin gs -içi
$\bar{A}$	Bir A kümesinin kapanışı
A^o	Bir A kümesinin içi
$A^\perp$	Bir A kümesinin gs -limit noktalarının kümesi
A^{-1}	Bir A kümesinin sg -limit noktalarının kümesi
$SO(X)$	Bir X uzayındaki yarı-açık kümelerin sınıfı
$SCL(X)$	Bir X uzayındaki yarı-kapalı kümelerin sınıfı
$GO(X)$	Bir X uzayındaki g -açık kümelerin sınıfı
$GCI(X)$	Bir X uzayındaki g -kapalı kümelerin sınıfı
$GSCL(X)$	Bir X uzayındaki gs -kapalı kümelerin sınıfı
$SGCI(X)$	Bir X uzayındaki sg -kapalı kümelerin sınıfı

1. GİRİŞ

Yarı-açık kümeler ve yarı sürekli fonksiyonlar 1963 yılında Levine [1] tarafından ortaya atıldı. 1987 yılında Bhattacharyya ve Lahiri [2] yarı genelleştirilmiş kapalı küme kavramını tanımlamak için yarı-açık küme kavramını kullandılar. Daha sonra 1990 yılında Arya [3] v.d. yarı-normallik aksiyomunu karakterize etmek için yarı-kapanış kavramını kullanarak genelleştirilmiş yarı kapalı kavramını tanımladılar. Ardından 1993 yılında Devi [4] v.d. genelleştirilmiş yarı kapalı dönüşümler ve yarı genelleştirilmiş kapalı dönüşümler kavramlarını detaylı bir şekilde ele aldılar.

Genelleştirilmiş kapalı ve genelleştirilmiş açık küme kavramları ile alakalı bu gelişmelerin kökeni literatürde 1970 yılında Levine [5] tarafından “Generalized Closed Set In Topological Spaces” isimli çalışmasına dayanır. 1975-1978 yılları arasında Maheshwari ve Prasad, [6-8], $semi-T_i$ uzaylar, s -regüler uzaylar, s -normal uzaylar ve özelliklerini araştırdılar. 1982 yılında Malghan, [9], genelleştirilmiş kapalı fonksiyonlar konusuna giriş yaptı. 2002 yılında Ganster [10] v.d. önceki tanımlardan farklı olarak yarı genelleştirilmiş kapalı kümelerden yararlanarak sg -regülerlik ve sg -normallik kavramlarını tanımladılar ve özelliklerini incelediler.

2011 yılında Navalagi [11], yarı genelleştirilmiş açık kümeleri kullanarak yarı genelleştirilmiş ayırma aksiyomlarını tanımladı. Yine 2013 yılında Navalagi [12] genelleştirilmiş yarı kapalı kümeler ve yarı-genelleştirilmiş kapalı kümeler kavramlarını incelemiş genelleştirilmiş yarı kapanış (yarı-iç) ve yarı-genelleştirilmiş kapanış (iç) operatörleri, genelleştirilmiş yarı regüler ve genelleştirilmiş-yarı normal uzaylar gibi kavramları ortaya atmıştır. Bunun yanında genelleştirilmiş-yarı kapalı fonksiyonlar ve yarı genelleştirilmiş kapalı fonksiyonların özelliklerini incelemiştir. Bir fonksiyonun sürekliliği, g -sürekliliği, s -sürekliliği, gs -sürekliliği, sg -sürekliliği, irresolute olması gibi kavramlar ile ilgili literatürde çalışmalar bulunmaktadır [13-15].

Bu tez çalışmasında genelleştirilmiş yarı kapalı fonksiyonlar, yarı genelleştirilmiş kapalı fonksiyonlar, gs -açık (kapalı), sg -açık (kapalı), gs -sürekli ve sg -sürekli fonksiyonların özellikleri birbirleriyle ilişkileri araştırılmıştır. Ayrıca bir kümenin genelleştirilmiş yarı kapanışı, yarı genelleştirilmiş kapanışı, genelleştirilmiş yarı içi gibi operatörler, gs -regüler, gs -normal, gs -regüler ve gs -normal uzaylar gibi yeni kavramlar, özellikleri ve birbirleriyle olan ilişkileri araştırılmıştır.

Ayrıca bu tez çalışması boyunca aksi belirtilmedikçe X uzayı (X, τ) topolojik uzayını, Y uzayı ise (Y, σ) topolojik uzayını göstermektedir.



2. YARI-KAPALI KÜMELER VE ÖZELLİKLERİ

2.1 Kapalı Kümeler ve Özellikleri

Tanım 2.1.1 ([16,17]) X bir topoloji uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

- (1) $A \in \tau$ ise A ya **açık küme** denir.
- (2) A^c açık ise A ya **kapalı küme** denir.
- (3) A nın kapsadığı en geniş açık kümeye A nın **içi** denir ve A^o ile gösterilir.
- (4) A yı kapsayan en dar kapalı kümeye A nın **kapanışı** denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.2 ([16,17]) X bir topoloji uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun.

Çizelge 2.1. Bir uzaydaki iç ve kapanış özellikleri.

$A^o \subseteq A$	$A \subseteq \bar{A}$
A^o açıktır	$\bar{A}$ kapalıdır
A açıktır $\Leftrightarrow A^o = A$ dır	A kapalıdır $\Leftrightarrow A = \bar{A}$ dır
$(A^o)^o = A^o$	$\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$
$A \subseteq B$ ise $A^o \subseteq B^o$	$A \subseteq B$ ise $\bar{A} \subseteq \bar{B}$
$(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$	$\overline{(A \cap B)} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$
$A^o \cup B^o \subseteq (A \cup B)^o$	$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$
$(A^o)^c = \overline{(A^c)}$	$(\bar{A})^c = (A^c)^o$

Tanım 2.1.3 ([16,17]) X ve Y topolojik uzaylar, $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun.

- (1) $f(x_0)$ ın her G açık komşuluğu için $f(U) \subset G$ olacak şekilde $x_0 \in U$ açığı varsa f ye x_0 da süreklidir denir. f , her x_0 için sürekli ise f ye **süreklidir** denir.
- (2) f örten, bire-bir, sürekli ve tersi de sürekli ise f ye **homeomorfizm** denir.
- (3) U açık (kapalı) kümesi için $f(U)$, Y de açık (kapalı) ise f ye **açık fonksiyon** (**kapalı fonksiyon**) denir.

2.2 Yarı-Kapalı Kümeler Ve Özellikleri

Tanım 2.2.1 ([1,17,19]) Bir X uzayı için

- (1) $U \subset G \subset \bar{U}$ şeklinde $U \in \tau$ varsa $G \subseteq X$ e yarı-açık (semi-open) küme denir.
- (2) $F^\circ \subseteq H \subseteq F$ şeklinde en az bir $F \subseteq X$ kapalı kümesi varsa H ye yarı-kapalı (semi-closed) küme denir. Yarı-açık bir kümenin tümleyeni yarı-kapalıdır.
- (3) $SO(X)$ tüm yarı-açık kümelerin sınıfı ve $SCL(X)$ ise tüm yarı-kapalı kümelerin sınıfıdır.
- (4) Bir A kümesinin yarı-kapanışı $\tilde{A}$ biçiminde gösterilir ve A yı kapsayan tüm yarı-kapalı kümelerin kesişimidir.
- (5) Bir A kümesinin yarı-içi A^s ile gösterilir ve A nın kapsadığı tüm yarı-açık kümelerin birleşimidir.

Örnek 2.2.2 $X = \{p, r, s\}$ deki $\tau = \{\emptyset, X, \{p\}\}$ topolojisi için X deki yarı-kapalı ve yarı-açık kümeleri bulalım.

Çizelge 2.2. Bir X uzayındaki yarı-açık kümeler.

Açık Kümeler	Kapalı kümeler	Açık kümelerin kapanışı	Kapalı kümelerin içi	Yarı-açık kümeler	Yarı-kapalı kümeler
$\emptyset$	X	$\bar{\emptyset} = \emptyset$	X	$\emptyset$	X
$\{p\}$	$\{r, s\}$	$\overline{\{p\}} = X$	$\emptyset$	$\{p\}, \{p, r\}, \{p, s\}, X$	$\{r, s\}, \{s\}, \{r\}, \emptyset$
X	$\emptyset$	$\bar{X} = X$	$\emptyset$	X	$\emptyset$

$SO(X) = \{\emptyset, \{p\}, \{p, r\}, \{p, s\}, X\}$ ve $SCL(X) = \{X, \{r, s\}, \{s\}, \{r\}, \emptyset\}$ dir.

Teorem 2.2.3 ([1,19]) X bir uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

- (1) A yarı-açık ise A^c yarı-kapalıdır.
- (2) A yarı-açık ve U açık ise $A \cap U$ yarı-açıktır.
- (3) A yarı-kapalı ve F kapalı ise $A \cup F$ yarı-kapalıdır.
- (4) $\{A_i \subseteq X : i \in I\}$ yarı-açıkların bir sınıfı olsun. $\bigcup_{i \in I} A_i$ yarı-açıktır.
- (5) $\{A_i \subseteq X : i \in I\}$ yarı-kapalıların bir sınıfı olsun. $\bigcap_{i \in I} A_i$ yarı-kapalıdır

(6) Tek nokta kümeleri açık olmadıkça yarı-açık olamaz

(7) $A^\circ = \emptyset$ olsun, A yarı-açık olamaz.

(8) A yarı-açıktır ancak ve ancak $A \subseteq \overline{A^\circ}$ dir.

(9) A yarı-kapalıdır ancak ve ancak $(\bar{A})^\circ \subseteq A$ dir.

(10) $A \cup (\bar{A})^\circ$ kümesi yarı-kapalıdır.

(11) A için $A \cup (\bar{A})^\circ = \tilde{A}$ dir.

(12) $(A^s)^c = \widetilde{(\bar{A}^c)}$ dir.

(13) $(A^c)^s = (\tilde{A})^c$ dir.

Dikkat edelim ki yarı-açık olmayan kümelerin birleşimi yarı-açık olabilir. $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzayında $A = (0,4) \cup \{5\}$, $B = (3,6) \cup \{1\}$ yarı-açık değildir fakat $A \cup B$ yarı-açıktır.

Örnek 2.2.4 (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzayında (m, n) , $[m, n)$, $(m, n]$ ve $[m, n]$ aralıkları yarı-açıktır.

(2) $(X, \{X, \emptyset\})$ olsun. $SO(X) = \{X, \emptyset\}$ dir,

(3) $(X, P(X))$ olsun. $SO(X) = P(X)$ dir,

Tanım 2.2.5 ([1, 18-20]) X, Y topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun.

(1) Y deki her açık kümenin ters görüntüsü yarı-açık ise f ye **yarı-süreklidir** denir. Her sürekli fonksiyon yarı-süreklidir.

(2) Y deki her yarı-açık kümenin ters görüntüsü yarı-açık ise f ye **irresolute** denir. Dolayısıyla her irresolute fonksiyon yarı-süreklidir.

2.3 Genelleştirilmiş Kapalı Kümeler Ve Özellikleri

Tanım 2.3.1 ([5]) Bir X uzayında $A \subseteq X$ olsun. $A \subseteq U$ olacak şekildeki her U açığı için $\bar{A} \subseteq U$ ise A ya **genelleştirilmiş kapalı (g -kapalı) küme** denir. X deki g -kapalılarının sınıfı $GCl(X)$ şeklinde gösterilir. A^c g -kapalı ise A ya **genelleştirilmiş açık (g -açık) küme** denir. Tüm g -açıkların sınıfı $GO(X)$ ile şeklinde gösterilir.

Örnek 2.3.2 $X = \{m, n, r\}$ deki $\tau = \{\emptyset, X, \{m, n\}, \{m\}\}$ için g -kapalı kümeler,

Çizelge 2.3. Bir X uzayındaki g -kapalı kümeler.

A	$\bar{A}$	$A \subset U$ olacak şekildeki $U \in \tau$ kümeleri	Kapalı küme	g -kapalı küme
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset, X, \{m\}, \{m, n\}$	✓	✓
$\{m\}$	X	$\{m\}, \{m, n\}, X$	×	×
$\{n\}$	$\{n, r\}$	$\{m, n\}, X$	×	×
$\{r\}$	$\{r\}$	X	✓	✓
$\{m, n\}$	X	$\{m, n\}, X$	×	×
$\{m, r\}$	X	X	×	✓
$\{n, r\}$	$\{n, r\}$	X	✓	✓
X	X	X	✓	✓

g -kapalı kümelerin sınıfı $GCl(X) = \{\emptyset, X, \{m, r\}, \{r\}, \{n, r\}\}$ dir. $\{m, r\}$ kümesi g -kapalı olmasına rağmen kapalı değildir.

Örnek 2.3.3 $X = \{m, n, r\}$ deki $\tau = \{\emptyset, X, \{m\}\}$ için g -kapalı kümeleri bulalım.

Çizelge 2.4. Bir X uzayındaki g -kapalı kümeler.

A	$\bar{A}$	$A \subset U$ olacak şekildeki $U \in \tau$ kümeleri	Kapalı küme	g -kapalı küme
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset, X, \{m\}$	✓	✓
$\{m\}$	X	$X, \{m\}$	×	×
$\{n\}$	$\{n, r\}$	X	×	✓
$\{r\}$	$\{n, r\}$	X	×	✓
$\{m, n\}$	X	X	×	✓
$\{m, r\}$	X	X	×	✓
$\{n, r\}$	$\{n, r\}$	X	✓	✓
X	X	X	✓	✓

g -kapalıların sınıfı $GCl(X) = \{X, \emptyset, \{r\}, \{n\}, \{m, r\}, \{m, n\}, \{n, r\}\}$ dir.

Örnek 2.3.4 (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ da (m, n) , $[m, n)$, $(m, n]$ ve $[m, n]$ aralıkları g -açıktır.

(2) $(X, \{X, \emptyset\})$ olsun. $GO(X) = \{X, \emptyset\}$ dir,

(3) $(X, P(X))$ olsun. $GO(X) = P(X)$ dir,

Teorem 2.3.5 Bir X uzayında $A \subseteq X$ nın g -kapalı olması için gerek ve yeter şart $\bar{A} - A$ nın tek kapalı alt kümesinin $\emptyset$ olmasıdır.

İspat: $F, \bar{A} - A$ nın kapalı bir alt kümesi olduğunu kabul edelim. $A \subseteq F^c$ ve A kümesinin g -kapalılığından $\bar{A} \subseteq F^c$ veya $F \subseteq (\bar{A})^c$ olur. Böylece $F \subseteq \bar{A} \cap (\bar{A})^c = \emptyset$ olur, böylece $F = \emptyset$ dur. Tersine olarak $A \subseteq U$ ve U açık olsun. $\bar{A} \not\subseteq U$ ise $(\bar{A} \cap U^c)^c = (\bar{A})^c \cup U$ olur. Bu da $\bar{A} \cap U^c$ kümesinin $\bar{A} - A$ nın boştan farklı kapalı bir alt kümesi olması demektir. Bu ise kabul ile çelişir ki böylece A, g -kapalıdır.

Sonuç 2.3.6 Bir X uzayında bir A kümesi g -kapalı olsun. A nın kapalı olması için gerek ve yeter şart $\bar{A} - A$ nın kapalı olmasıdır.

Teorem 2.3.7 Bir X uzayında $A, B \subseteq X$ kümeleri g -kapalı ise $A \cup B$ de g -kapalıdır.

İspat: $A \cup B \subseteq U$ ve U açık ise $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} \subseteq U$ olur ki bu da $A \cup B$ nin g -kapalı olduğunu gösterir. Fakat g -kapalı iki kümenin kesişimi g -kapalı olmayabilir. Örneğin $X = \{m, n, r\}$ kümesi üzerindeki $\tau = \{\emptyset, X, \{m\}\}$ için $A = \{m, n\}$ ve $B = \{m, r\}$ kümeleri g -kapalı olmasına rağmen $A \cap B = \{m\}$ kümesi g -kapalı değildir.

Teorem 2.3.8 Bir X uzayında $B \subseteq A \subseteq X$ için B, A ye ve A da X e göre g -kapalı olsun. Böylece B de X de g -kapalıdır.

İspat: $B \subseteq G$ ve $G \in \tau$ olsun. $B \subseteq A \cap G \in \tau_A$ ve B, A ya göre g -kapalı olduğundan $\overline{B_A} \subseteq A \cap G$ olur. Dolayısıyla $A \cap \bar{B} \subseteq A \cap G$ ve $A \subseteq G \cup (\bar{B})^c$ dir. A nın X e göre g -kapalılığından $\bar{A} \subseteq G \cup (\bar{B})^c$ yazılır. O halde $\bar{B} \subseteq \bar{A} \subseteq G \cup (\bar{B})^c$ olur ki $\bar{B} \subseteq G$ olur. Sonuç olarak B de X göre g -kapalıdır.

Sonuç 2.3.9 X uzayında $A, F \subseteq X$ olsun. A, g -kapalı ve F kapalı ise $A \cap F$ kümesi de g -kapalıdır.

Teorem 2.3.10 Bir X uzayında A , g -kapalı ve $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ ise B de g -kapalıdır.

İspat: A kümesi g -kapalı ve $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ olsun. $\bar{B} - B \subseteq \bar{A} - A$ den ve $\bar{A} - A$ nin boştan farklı hiçbir kapalı alt kümesi olmadığından $\bar{B} - B$ nin de boştan farklı hiçbir kapalı alt kümesi yoktur. Teorem 2.3.5 den B kümesi g -kapalıdır.

Teorem 2.3.11 Bir X uzayında $A \subseteq B \subseteq X$ ve A, X e göre g -kapalı olsun. Bu durumda A, B ye göre g -kapalıdır.

İspat: $G \in \tau$ için $A \subseteq B \cap G$ olsun. Dolayısıyla $A \subseteq G$ olur ve kabulden $\bar{A} \subseteq G$ olur. Buradan $B \cap \bar{A} \subseteq B \cap G$ yazılır. $\bar{A} \subseteq B \cap \bar{A} \subseteq B \cap G$ olur ki Tanım 2.3.1 den A kümesi B deki alt topolojiye göre g -kapalıdır.

Yukarıdaki teorem g -açık kümeler için yanlıştır. Örneğin $X = \{m, n, r\}$ uzayındaki $\tau = \{\emptyset, X, \{m\}\}$ düşünelim. $A = \{n\}, B = \{m, n\}$ olsun. $\tau_A = \{\emptyset, A\}, \tau_B = \{\emptyset, B, \{m\}\}$ olur ki A, X de g -açık olmasına rağmen τ_B ye göre g -açık değildir.

Teorem 2.3.12 Bir X uzayında τ nun her elemanı kapalıdır ancak ve ancak X in her alt kümesi g -kapalıdır.

İspat: τ nun her elemanını kapalı ve $A \subseteq G \in \tau$ olduğunu kabul edelim. Buradan $\bar{A} \subseteq \bar{G} = G$ ve A kümesi g -kapalıdır. Tersine her A kümesi g -kapalı ve $G \in \tau$ olsun. $G \subseteq G$ ve G kümesi g -kapalı olduğundan $\bar{G} \subseteq G$ olur ki bu ise G nin kapalı olduğunu gösterir.

Teorem 2.3.13 Bir X uzayında $A \subseteq X$ g -açıktır ancak ve ancak F kapalı ve $F \subseteq A$ olduğunda $F \subseteq A^o$ dir.

İspat: $F \subseteq A$ kapalı ve A kümesi g -açık olsun. $F \subseteq A$ olduğundan $A^c \subseteq F^c$ olur. F^c açık ve A^c , g -kapalı olduğundan $\overline{A^c} \subseteq F^c$ olur. Önerme 2.1.2 den $(A^o)^c \subseteq F^c$ dir. Burada $F \subseteq A^o$ elde edilir.

Teorem 2.3.14 Bir X uzayında $A, B \subseteq X$ ayrık g -açık kümeler ise $A \cup B$ de g -açıktır.

İspat: $F, A \cup B$ nin kapalı alt kümesi olsun. $F \cap \bar{A} \subseteq A$ olur ve böylece Teorem 2.3.13 den $F \cap \bar{A} \subseteq A^o$ dir. Benzer şekilde $F \cap \bar{B} \subseteq B^o$ yazılır.

$$F = F \cap (A \cup B) = (F \cap A) \cup (F \cap B) \subseteq (F \cap \bar{A}) \cup (F \cap \bar{B}) \subseteq A^o \cup B^o$$

Böylece $F \subseteq A^o \cup B^o$ elde edilir. Önerme 2.1.2 den $F \subseteq A^o \cup B^o \subseteq (A \cup B)^o$ olur ki $F \subseteq (A \cup B)^o$ elde edilir. Teorem 2.3.13 den $A \cup B$, g -açık olur.

İki g -açık kümenin birleşimi genelde g -açık değildir. $X = \{m, n, r\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{m\}\}$ için $A = \{n\}$ ve $B = \{r\}$ kümeleri g -açık olmasına rağmen $A \cup B = \{n, r\}$, g -açık değildir.

Teorem 2.3.15 Bir X uzayında $A \subseteq X$ kümesi g -açıktır ancak ve ancak $G \in \tau$ ve $A^o \cup A^c \subseteq G$ olduğunda $G = X$ dir.

İspat: G açık ve $A^o \cup A^c \subseteq G$ olsun. $G^c \subseteq (A^o \cup A^c)^c = (A^o)^c \cap (A^c)^c = \overline{(A^c)} - A^c$ yazılır. G^c kapalı ve A^c , g -kapalı olduğundan Teorem 2.3.5 den $G^c = \emptyset$ olur ki burada $G = X$ elde edilir.

Tersine olarak F kapalı ve $F \subseteq A$ olmak üzere $F \subseteq A^o$ olduğunu göstereceğiz. $A^o \cup A^c \subseteq A^o \cup F^c$ den ve $A^o \cup F^c$ açık olduğunda kabul gereği $A^o \cup F^c = X$ olur ki $F \subseteq A^o$ dir. Teorem 2.3.13 den A kümesi g -açıktır.

Teorem 2.3.16 Bir X uzayında $A \subseteq B \subseteq X$ olsun. A , B ye göre g -açık ve B , X e göre g -açık ise A , X e göre g -açıktır.

İspat: F kapalı ve $F \subseteq A$ olduğunu kabul edelim. F , B deki alt topolojiye göre g -açık olduğundan $F \subseteq (A^o)_B$. Burada $F \subseteq U \cap B \subseteq A$ olacak şekilde U açığı vardır. B kümesi X deki topolojiye göre g -açık olduğundan bazı V açıkları için $F \subseteq V \subseteq B$ olur. Böylece $F \subseteq U \cap V \subseteq A$ olur. Bu ise $F \subseteq A^o$ olmasıdır. Teorem 2.3.13 den A , X de g -açık olur.

Teorem 2.3.17 X uzayında $A^o \subseteq B \subseteq A$ ve A , g -açık küme ise B de g -açık kümedir.

İspat: $A^c \subseteq B^c \subseteq (A^o)^c$ olur ki Önerme 2.1.2 den $A^c \subseteq B^c \subseteq \overline{(A^c)}$ yazılır. Teorem 2.3.10 dan B^c kümesi g -kapalıdır böylece B , g -açık kümedir.

Teorem 2.3.18 X uzayında $A \subseteq X$ kümesi g -kapalıdır ancak ve ancak $\bar{A} - A$ kümesi g -açıktır.

İspat: A kümesinin g -kapalı ve F kapalı olmak üzere $F \subseteq \bar{A} - A$ olduğunu kabul edelim. Teorem 2.3.5 den $F = \emptyset$ olur. Böylece $F \subseteq (\bar{A} - A)^o$ yazılır. Teorem 2.3.13 den $\bar{A} - A$ kümesi g -açıktır.

Tersine $U \in \tau$ olmak üzere $A \subseteq U$ olsun. $\bar{A} \cap U^c \subseteq \bar{A} \cap A^c = \bar{A} - A$ olur. $\bar{A} \cap U^c \subseteq (\bar{A} - A)^o$ olur. $(\bar{A} - A)^o = \emptyset$ dan $\bar{A} \cap U^c = \emptyset$ olur. Böylece $\bar{A} \subset U$ olur. Tanım 2.3.1 den A kümesi g -kapalıdır.

Teorem 2.3.19 X, Y topolojik uzaylar $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ve kapalı olsun. $A \subseteq X$ kümesi g -kapalı ise $f(A)$, Y de g -kapalıdır.

İspat: $f(A) \subset G$ ve G , Y de açık bir küme ise $A \subset f^{-1}f(A) \subset f^{-1}(G)$ den $A \subset f^{-1}(G)$ ve böylece A kümesi g -kapalı olduğundan $\bar{A} \subset f^{-1}(G)$ olur. Her tarafa f uygulanırsa $f(\bar{A}) \subset f(f^{-1}(G)) \subset G$ olur ki $f(\bar{A}) \subset G$ elde edilir. f fonksiyonu kapalı olduğundan $f(\bar{A})$ kapalı olur. f nin sürekli ve kapallılığından $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ dır, böylece $\overline{f(A)} \subset G$ olur. Bu ise $f(A)$ nın Y de g -kapalı olduğunu gösterir.

g -açık kümelerin sürekli, kapalı dönüşümler altında görüntüsü genellikle g -açık değildir. $X = \{m\}$, $Y = \{n, t\}$, $\tau = \{\emptyset, X\}$, $\sigma = \{\emptyset, Y, \{n\}\}$ ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$, $f(m) = t$ şeklinde tanımlı fonksiyon olsun. $\{m\}$, X de g -açıktır ama $f(\{m\}) = \{t\}$, Y de g -açık değildir.

Teorem 2.3.20 X, Y topolojik uzaylar, $f: X \rightarrow Y$ sürekli, kapalı fonksiyon, B g -kapalı (veya g -açık) Y nin bir alt kümesi ise $f^{-1}(B)$, X de g -kapalıdır (veya g -açıktır).

İspat: B nin Y de g -kapalı olduğunu kabul edelim ve $f^{-1}(B) \subset G$ olacak şekilde $G \in \tau$ olsun. $\overline{f^{-1}(B)} \subset G$ olduğunu göstereceğiz.

$$f(\overline{f^{-1}(B)} \cap G^c) \subseteq f(\overline{f^{-1}(B)}) \cap f(G^c) \subseteq \bar{B} \cap f(G^c) \subset \bar{B} \cap B^c = \bar{B} - B$$

olur. Teorem 2.3.5 den $f(\overline{f^{-1}(B)} \cap G^c) = \emptyset$ olmalıdır. Böylece $\overline{f^{-1}(B)} \cap G^c = \emptyset$ olur. Bu ise $\overline{f^{-1}(B)} \subset G$ olması anlamına gelir. Sonuç olarak Tanım 2.3.1 den $f^{-1}(B)$, X de g -kapalıdır. Benzer şekilde tümleyen alırsak B , Y de g -açık olduğundan $f^{-1}(B)$ nin X de g -açık olduğu gösterilir.

Dikkat edelim ki g -kapalı (veya g -açık) kümelerin sürekli dönüşümler altında görüntüsü ve ters görüntüleri g -kapalı (veya g -açık) değildir.

Teorem 2.3.21 X, Y topolojik uzaylar, $A \subset X$ de ve $B \subset Y$ de g -açık kümeler ise $A \times B \subset X \times Y$ de g -açıktır.

İspat: $F \subseteq X \times Y$ de kapalı ve $F \subset A \times B$ olduğunu kabul edelim. Teorem 2.3.13 den $F \subseteq (A \times B)^o$ olduğunu göstereceğiz. $(m, n) \in F$ olsun. $\overline{\{m, n\}} = \overline{\{m\}} \times \overline{\{n\}}$ olduğunda $\overline{\{m, n\}} = \overline{\{m\}} \times \overline{\{n\}} \subseteq F \subseteq A \times B$ dir ve $\overline{\{m\}} \subseteq A$ ve $\overline{\{n\}} \subseteq B$ dir. Kabulden A ve B sırasıyla X ve Y de g -açık kümeler olduğundan Teorem 2.3.13 den $\overline{\{m\}} \subset A^o$ ve $\overline{\{n\}} \subseteq B^o$ olur. Böylece $(m, n) \in \overline{\{m\}} \times \overline{\{n\}} \subseteq A^o \times B^o \subseteq (A \times B)^o$ olur ki $(m, n) \in (A \times B)^o$ elde edilir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI-KAPALI KÜMELER

3.1 Genelleştirilmiş Yarı-Kapalı Kümeler Ve Özellikleri

Tanım 3.1.1 ([11,12]) Bir X uzayında $A \subseteq X$ olsun.

(1) $A \subseteq U$ olacak şekilde her U açığı için $\tilde{A} \subseteq U$ ise A ya **genelleştirilmiş yarı-kapalı (gs -kapalı) küme** denir. Tüm gs -kapalıların sınıfı $GSCI(X)$ ile gösterilir.

(2) A nın kapsayan gs -kapalıların kesişimine A nın **gs -kapanışı** denir ve $\tilde{A}^{g\sim}$ ile gösterilir. X de bulunan gs -kapalı kümelerin tümleyenlerine **gs -açık kümeler** denir. Tüm genelleştirilmiş yarı-açık kümelerin sınıfı $GSO(X)$ ile gösterilir.

(3) A nın kapsadığı gs -açıklarının birleşimine A nın **gs -içi** denir ve A^{gs} ile gösterilir.

(4) $x \in X$ noktasını içeren her gs -açık U kümesi için $A \cap (U - \{x\}) \neq \emptyset$ ise x e A nın **genelleştirilmiş yarı-yığılma (gs -yığılma) noktası** denir. A nın gs -yığılma noktalarının kümesi A^+ ile gösterilir.

(5) $a \in A$ olsun. Eğer $a \in G \subseteq A$ olacak şekilde bir G gs -açığı varsa A ya a nın **genelleştirilmiş yarı-komşuluğu** denir. Tüm gs -açık kümelerin birleşimi gs -açık olduğundan A^{gs} kümesi gs -açıktır.

Not 3.1.2 (1) $x \in \tilde{A}^{g\sim}$ dir ancak ve ancak x i içeren her gs -açık küme A nın bir noktasını içerir.

(2) Her g -kapalı küme, yarı-kapalı küme olduğu gibi gs -kapalı küme olduğundan

$$A \subset \tilde{A}^{g\sim} \subset \tilde{A} \subset \bar{A}$$

(3) Her yarı-açık küme, gs -açık küme ve her g -açık küme de gs -açık küme olduğundan

$$A^o \subset A^s \subset A^{gs} \subset A$$

(4) X topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesi gs -açıktır ancak ve ancak A kümesi her noktasının gs -komşuluğudur.

(5) Dikkat edelim ki A kümesi gs -kapalı ise $\tilde{A}^{g\sim} = A$ dır. Tersini genelde doğru değildir.

Örnek 3.1.3 den $\tilde{A}^{g\sim}$ kümesinin gs -kapalı olması gerekmez.

Örnek 3.1.3 $X = \{p, q, r\}$ üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{p\}\}$ gs -kapalı kümeleri bulalım. $SO(X) = \{\emptyset, \{p, r\}, \{p\}, \{p, q\}, X\}$ ve $SCL(X) = \{X, \{r\}, \{q, r\}, \{q\}, \emptyset\}$ olduğundan

Çizelge 3.1. Bir X uzayındaki gs -kapalı kümeler.

A	$\tilde{A}$	$A \subset G$ olacak şekildeki $G \in \tau$ kümeleri	gs -kapalı küme	Yarı-kapalı küme
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset, X, \{p\}$	✓	✓
$\{p\}$	X	$X, \{p\}$	×	×
$\{q\}$	$\{q\}$	X	✓	✓
$\{r\}$	$\{r\}$	X	✓	✓
$\{p, q\}$	X	X	✓	×
$\{p, r\}$	X	X	✓	×
$\{q, r\}$	$\{q, r\}$	X	✓	✓
X	X	X	✓	✓

$GSCL(X) = \{X, \emptyset, \{q\}, \{r\}, \{p, q\}, \{p, r\}, \{q, r\}\}$, $A = \{p, q\}$ için $\overset{g\sim}{A} = \{p, q\}$ olur ki $\overset{g\sim}{A}$ kümesi gs -kapalıdır. $B = \{p\}$ için $\overset{g\sim}{B} = \{p\}$ olur ki $\overset{g\sim}{B}$ kümesi gs -kapalı değildir. Bir kümenin gs -kapanışının gs -kapalı olması gerekmez.

Örnek 3.1.4 $X = \{p, q, r\}$ deki $\tau = \{X, \emptyset, \{p\}, \{p, q\}\}$ için gs -kapalı kümeleri bulalım. $SO(X) = \{\emptyset, X, \{p, q\}, \{p\}, \{p, r\}\}$ ve $SCL(X) = \{X, \emptyset, \{r\}, \{q\}, \{q, r\}\}$ olduğundan

Çizelge 3.2. Bir X uzayındaki gs -kapalı kümeler.

A	$\tilde{A}$	$A \subset G$ olacak şekildeki $G \in \tau$ kümeleri	gs -kapalı küme	Yarı-kapalı küme
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset, X, \{p\}, \{p, q\}$	✓	✓
$\{p\}$	X	$\{p\}, \{p, q\}, X$	×	×
$\{q\}$	$\{q\}$	$\{p, q\}, X$	✓	✓
$\{r\}$	$\{r\}$	X	✓	✓
$\{p, q\}$	X	$\{p, q\}, X$	×	×
$\{p, r\}$	X	X	✓	×
$\{q, r\}$	$\{q, r\}$	X	✓	✓
X	X	X	✓	✓

$GSCL(X) = \{X, \emptyset, \{p, r\}, \{q, r\}, \{r\}, \{q\}\}$ sınıfı genelleştirilmiş yarı kapalı kümelerden oluşur.

Örnek 3.1.5 (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ da (m, n) , $[m, n)$, $(m, n]$ ve $[m, n]$ aralıkları genelleştirilmiş gs -açık kümelerdir.

(2) $(X, P(X))$ için $GSCL(X) = P(X)$ dir.

(3) $(X, \{X, \emptyset\})$ için $GSCL(X) = P(X)$ dir.

Teorem 3.1.6 Bir X uzayında $A, B \subseteq X$ olsun.

(1) A kümesi gs -kapalı ise $\overset{g\sim}{A} = A$ dır

(2) $A \subseteq B$ ise $\overset{g\sim}{A} \subseteq \overset{g\sim}{B}$

(3) $\left(\overset{g\sim}{A}\right) = \overset{g\sim}{A}$

(4) $\left(\overset{g\sim}{A \cap B}\right) \subseteq \overset{g\sim}{A} \cap \overset{g\sim}{B}$

(5) $\left(\overset{g\sim}{A \cup B}\right) = \overset{g\sim}{A} \cup \overset{g\sim}{B}$

(6) $\left(\overset{g\sim}{A^c}\right) = (A^{gs})^c$

(7) $(A^c)^{gs} = \left(\overset{g\sim}{A}\right)^c$

(8) $(A \cup B)^+ = A^+ \cup B^+$

(9) $\overset{g\sim}{A} = A \cup A^+$

İspat: **(4)** $A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$ olduğundan (2) den dolayı $\left(\overset{g\sim}{A \cap B}\right) \subseteq \overset{g\sim}{A}$ ve $\left(\overset{g\sim}{A \cap B}\right) \subseteq \overset{g\sim}{B}$ olur. Buradan $\left(\overset{g\sim}{A \cap B}\right) \subseteq \overset{g\sim}{A} \cap \overset{g\sim}{B}$ olur.

(5) $A \subseteq A \cup B$ ve $B \subseteq A \cup B$ olduğundan (3) den dolayı $\overset{g\sim}{A} \subseteq \left(\overset{g\sim}{A \cup B}\right)$ ve $\overset{g\sim}{B} \subseteq \left(\overset{g\sim}{A \cup B}\right)$ olur. Böylece $\overset{g\sim}{A} \cup \overset{g\sim}{B} \subseteq \left(\overset{g\sim}{A \cup B}\right)$ olur. $x \in \left(\overset{g\sim}{A \cup B}\right)$ olduğunu kabul edelim. Tanımdan x i içeren her U açığı için $(A \cup B) \cap U = (A \cap U) \cup (B \cap U) \neq \emptyset$

olur. Bu da $A \cap G \neq \emptyset$ veya $B \cap G \neq \emptyset$ olduğunu gösterir. Böylece $x \in \overset{g\sim}{A}$ veya $x \in \overset{g\sim}{B}$ yazabiliriz. $x \in \overset{g\sim}{A} \cup \overset{g\sim}{B}$ olur ki $\left(\overset{g\sim}{A} \cup \overset{g\sim}{B}\right) \subseteq \overset{g\sim}{A} \cup \overset{g\sim}{B}$ dir.

3.2 Genelleştirilmiş Yarı-Kapalı ve Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 3.2.1 ([7,8,13]) X, Y topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun.

(1) X deki her F kapalı (açık) kümesi için $f(F)$, Y de gS -kapalı (gS -açık) ise f ye **gS -kapalı (gS -açık) fonksiyon** denir.

(2) Y deki her kapalı (açık) kümenin ters görüntüsü gS -kapalı (gS -açık) ise f ye **gS -sürekli** denir. Dolayısıyla her sürekli fonksiyon g -sürekli, her g -sürekli gS -sürekli ve her yarı sürekli fonksiyon da gS -sürekli

(3) Her gS -kapalı kümenin ters görüntüsü gS -kapalı küme ise $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu **gS -irresolute** olarak adlandırılır.

Her yarı-kapalı küme g -kapalı ve her g -kapalı küme gS -kapalı olduğundan her kapalı fonksiyon g -kapalı [9] olduğu gibi aynı zamanda gS -kapalıdır.

Teorem 3.2.2 X, Y topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun.

(1) f , gS -açıktır,

(2) Her $A \subset X$ için $f(A^\circ) \subset (f(A))^{gS}$,

(3) Her $x \in X$ ve her $x \in U \in \tau$ için $V \subset f(U)$ olacak şekilde en az bir $f(x) \in V$ gS -açık kümesi vardır.

(4) Her $B \subset Y$ açığı için $f^{-1}\left(\overset{g\sim}{B}\right) \subset \overline{(f^{-1}(B))}$,

olmak üzere $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ dir.

İspat : $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ aşikârdır. $(3) \Rightarrow (4)$ ispatlayalım. $x \in f^{-1}\left(\overset{g\sim}{B}\right)$ olsun. Ayrıca $x \notin \overline{(f^{-1}(B))} = U$ ise $x \in \left(\overline{(f^{-1}(B))}\right)^c$ olur. (3) den $f(x) \in V \subset f(U)$ olacak şekilde

gs -açık V kümesi vardır. Burada $V \subset f(U) \subset f((f^{-1}(B))^c) \subset B^c$ olur ki bu da $B \subset V^c$ olması demektir. V^c kümesi gs -kapalı olduğundan $\overset{g\sim}{B} \subset V^c$ olur. Böylece $f(x) \in \overset{g\sim}{B}$ elde edilir. Bu ise $f(x) \notin V$ olur bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $(3) \Rightarrow (4)$ elde edilir.

Teorem 3.2.3 X, Y topolojik uzaylar olsun. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu gs -kapalı ise $\left(f(A)\right)^{\overset{g\sim}{}} \subset f(\bar{A})$ dır.

İspat: $A \subset X$ olmak üzere f , gs -kapalı olduğundan, $f(\bar{A}), f(A)$ yı içeren gs -kapalı bir kümedir. Böylece $\left(f(A)\right)^{\overset{g\sim}{}} \subset f(A) \subset f(\bar{A})$ olur ki ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.4 X, Y topolojik uzaylar olsun. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu f , gs -açık, $B \subset Y$ ve $f^{-1}(B) \subset F$ kapalı küme ise $B \subset V$ olacak şekilde en az bir gs -kapalı V kümesi vardır ve $f^{-1}(V) \subset F$ dir.

İspat: f , gs -açık fonksiyon $B \subset Y$ ve $f^{-1}(B) \subset F$ olsun. Buradan F kapalıdır. Bu durumda $V = Y - f(X - F)$ kümesi Y de gs -kapalıdır.

$V = f(f(F^c))^c = f(F)$ olur ki kabulden $f^{-1}(B) \subset F$ de her tarafa f uygularsak $B \subset ff^{-1}(B) \subset f(F)$ den $B \subset f(F)$ ve dolayısıyla $B \subset V$ olur. Ayrıca $V = f(f(F^c))^c$ den $V = f(F)$ den ve $f^{-1}(V) = f^{-1}f(F) \subset F$ olur ki $f^{-1}(V) \subset F$ elde edilir.

Teorem 3.2.5 X, Y uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun.

- (1) f , gs -sürekli,dir,
- (2) Her $x \in X$ ve her $f(x) \in V \in \sigma$ için $f(U) \subset V$ olacak şekilde $x \in U$, gs -açığı vardır,
- (3) Her $A \subset X$ için $f\left(\overset{g\sim}{A}\right) \subset \overline{f(A)}$,
- (4) Her $B \subset Y$ için $\left(f^{-1}(B)\right)^{\overset{g\sim}{}} \subset f^{-1}(\bar{B})$

olmak üzere $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ dir.

Teorem 3.2.6 X, Y uzaylar olsun. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu kapalı, gs -sürekli ve $B \subset Y$ de gs -kapalı ise $f^{-1}(B)$ kümesi gs -kapalıdır.

İspat: $B \subset Y$ kümesi gs -kapalı olsun. Tanım 2.3.5 den $U \subset X$ açığı için $f^{-1}(B) \subset U$ olsun. f kapalı olduğundan $B \subset V$ ve $f^{-1}(V) \subset U$ olacak şekilde bir V açığı vardır. B , gs -kapalı olduğundan $\tilde{B} \subset U$ dur. Böylece $f^{-1}(\tilde{B}) \subset U$ olur. $\tilde{B} \subset \bar{B}$ ve f nin gs -sürekliliğinden $f^{-1}(\bar{B})$ kümesi gs -kapalıdır. Dolayısıyla $(f^{-1}(\bar{B})) \subset U$ olur ki bu ise $(f^{-1}(B)) \subset U$ olması demektir. Sonuç olarak Tanım 3.2.1 den $f^{-1}(B)$ kümesi gs -kapalıdır.

İki kapalı gs -sürekli fonksiyonun bileşkesinin gs -sürekli olması gerekmez. Fakat şu şekilde bir kısıtlama ile bileşke fonksiyonu gs -sürekli yaparız.

Teorem 3.2.7 X, Y ve Z uzayları için

- (1) $f: X \rightarrow Y$ gs -sürekli ve $h: Y \rightarrow Z$ sürekli ise $hof: X \rightarrow Z$ gs -süreklidir.
- (2) $f: X \rightarrow Y$ gs -sürekli ve kapalı, $h: Y \rightarrow Z$ gs -sürekli ise $hof: X \rightarrow Z$ gs -süreklidir.
- (3) $f: X \rightarrow Y$ g -kapalı, $h: Y \rightarrow Z$ sürekli ve gs -kapalı ise $hof: X \rightarrow Z$ gs -kapalıdır.
- (4) $f: X \rightarrow Y$ kapalı ve $h: Y \rightarrow Z$ da gs -kapalı ise $hof: X \rightarrow Z$ gs -kapalıdır.

Teorem 3.2.8 X, Y uzaylar olsun. $f: X \rightarrow Y$ gs -kapalıdır ancak ve ancak her $B \subset Y$ ve $f^{-1}(B)$ içeren her U açığı için $B \subset V$ ve $f^{-1}(V) \subset U$ olacak şekilde Y de en az bir gs -açık V kümesi vardır.

İspat: Kabul edelim ki f , gs -kapalı fonksiyon olsun. Ayrıca $B \subset Y$ ve U da $f^{-1}(B)$ yi içeren açık olsun. Bu durumda B yi içeren Y nin $(f(U^c))^c = V$ kümesi gs -açıktır ve $f^{-1}(V) \subset U$ dur.

Tersine olarak $B \subset Y$, U da $f^{-1}(B)$ yi içeren açık olmak üzere $B \subset V$ ve $f^{-1}(V) \subset U$ olacak şekilde bir gs -açık V kümesi olsun. Ayrıca F, X de kapalı G, Y de açık bir küme olsun ve $f(F) \subset G$ olsun. Böylece $f^{-1}((f(F))^c) \subset F^c$ ve F^c açıktır. Kabulden

$(f(F))^c \subset V$ ve $f^{-1}(V) \subset F^c$ olacak şekilde bir V gs -açığı vardır. Dolayısıyla $F \subset (f^{-1}(V))^c$ ve böylece $f(F) \subset V^c$ olur. $G^c \subset (f(F))^c$ olduğundan $f^{-1}(G^c) \subset f^{-1}((f(F))^c) \subset f^{-1}(V) \subset F^c$ elde edilir. Her tarafa tümleyen uygulanırsa $F \subset (f^{-1}(V))^c \subset (f^{-1}((f(F))^c))^c \subset (f^{-1}(G^c))^c$ olur. Buradan $f(F) \subset V^c \subset G$ olur. V^c gs -kapalı ve $(\widetilde{f(F)}) \subset (\widetilde{V^c}) \subset G$ olduğundan $(\widetilde{f(F)}) \subset G$ olur. Sonuç olarak $f(F)$ kümesi gs -kapalıdır. Böylece f fonksiyonu gs -kapalıdır.

Teorem 3.2.9 X, Y uzaylar, $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ve gs -kapalı olsun. A, X de g -kapalı ise $f(A)$ da gs -kapalıdır.

İspat: Y deki U açığı için $f(A) \subset U$ olsun. Böylece $A \subset f^{-1}(U)$ olur. f sürekli olduğundan, $f^{-1}(U)$ X de açık olur. Böylece A nın g -kapalılığından $\bar{A} \subset f^{-1}(U)$ dir. Bundan dolayı $f(\bar{A}) \subset U$ dur. f gs -kapalı küme olduğundan $f(\bar{A})$, gs -kapalıdır. Böylece, $\widetilde{f(\bar{A})} \subset U$ dir. $f(A) \subset f(\bar{A})$ olduğundan $\widetilde{f(A)} \subset \widetilde{f(\bar{A})} \subset \widetilde{f(\bar{A})} \subset U$ ifade eder. Sonuç olarak $f(A)$ kümesi gs -kapalı olur.

3.3 Genelleştirilmiş Yarı Ayırma Aksiyomları

Bu kısımda, yarı-regüler ve yarı-normal kavramlarından daha zayıf olan genelleştirilmiş yarı-regüler ve genelleştirilmiş yarı-normal uzayları ile alakalı tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 3.3.1 ([7,8,11,12]) **(1)** Her kapalı (yarı-kapalı) F kümesi ve $x \notin F$ noktası için $x \in U$ ve $F \subset V$ olacak şekilde ayırık yarı-açık U ve V varsa X e **s-regüler (yarı-regüler) uzay** denir.

(2) Her ayırık kapalı (yarı-kapalı) F_1 ve F_2 kümeleri için $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $F_1 \subset U$ ve $F_2 \subset V$ yarı-açık kümeleri varsa, X uzayına **s-normal (yarı-normal) uzay** denir.

(3) Her gs -kapalı F kümesi ve $x \notin F$ noktası için $x \in U$ ve $F \subset V$ olacak şekilde ayırık yarı-açık U ve V kümeleri varsa X e **genelleştirilmiş yarı-regüler uzay** denir. Kısaca gs -regüler şeklinde yazılır. Her s -regüler uzay gs -regüler uzaydır.

(4) Her ayrık gs -kapalı F_1 ve F_2 kümeleri için $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $F_1 \subset U$ ve $F_2 \subset V$ yarı-açık kümeleri varsa, X uzayına **genelleştirilmiş yarı-normal uzay** denir. Kısaca gs -normal şeklinde yazılır. Her s -normal uzay gs -normal uzaydır.

Teorem 3.3.2 Bir X uzayı için aşağıdakiler denktir:

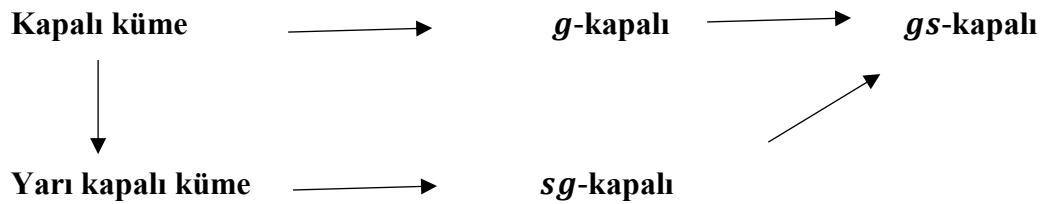
- (1) X , gs -regülerdir.
- (2) Her bir $x \in X$ ve x in her U gs -açık komşuluğu için $\tilde{V} \subset U$ olacak şekilde x in V yarı-açık komşuluğu vardır.
- (3) Her bir $x \in X$ ve X in x içermeyen bir gs -kapalı alt kümesi için $\tilde{U} \cap A = \emptyset$ olacak şekilde $x \in U$ yarı-açık kümesi bulunur.

Teorem 3.3.3 Bir X uzayı için aşağıdakiler denktir:

- (1) X , gs -normal uzaydır.
- (2) Her gs -kapalı F kümesi ve $F \subset U$ gs -açığı için, $F \subset V \subset \tilde{V} \subset U$ olacak şekilde V yarı-açığı vardır.

Teorem 3.3.4 X normal bir uzay, $f: X \rightarrow Y$ sürekli ve gs -kapalı bir fonksiyon ise Y uzayı da s -normaldir.

İspat: A ve B kümeleri Y de ayrık kapalılar olsun. f nin sürekliliğinden $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ de X in ayrık kapalı alt kümeleridir. X normal olduğundan, X de $f^{-1}(A) \subset U$ ve $f^{-1}(B) \subset V$ olacak şekilde ayrık açık U ve V alt kümeleri vardır. f, gs -kapalı olduğundan Teorem 3.2.11 den Y de $A \subset G, B \subset H, f^{-1}(G) \subset U$ ve $f^{-1}(H) \subset V$ olacak şekilde G, H gs -açık kümeleri vardır. U ve V ayrık olduğundan $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde ayrık G, H yarı-açık kümeleri vardır. Böylece Y uzayı da s -normaldir.



Şekil 3.1. Kapalı kümeler arasındaki ilişki.

4. YARI-GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜMELER

Bu kısımda bilinen kapalı küme kavramından daha genel bir hali olan yarı-genelleştirilmiş kapalı küme kavramı üzerinde durulmuştur. Ayrıca bir X uzayının A alt kümesinin yarı-genelleştirilmiş kapanışı (içi) ile ilgili özelliklere yer verilmiştir.

Tanım 4.1.1 ([11,12]) X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

(1) $A \subseteq U$ ve U yarı-açık olmak üzere $\tilde{A} \subseteq U$ ise A ya **yarı genelleştirilmiş-kapalı küme (sg-kapalı küme)** denir. X deki sg-kapalı kümelerin sınıfı $SGCl(X)$ ile gösterilir.

(2) A yı içeren tüm sg-kapalı kümelerin kesişimine A nın **yarı genelleştirilmiş kapanışı (sg-kapanışı)** denir ve kısaca $\overset{\sim g}{A}$ ile gösterilir. Her yarı-kapalı (kapalı) küme, sg-kapalı küme ve her sg-kapalı küme, gs-kapalı olduğundan,

$$A \subset \overset{g\sim}{A} \subset \overset{\sim g}{A} \subset \tilde{A} \subset \bar{A}$$

(3) X deki sg-kapalı bir kümenin tümleyenine **yarı genelleştirilmiş-açık küme (sg-açık küme)** denir. X deki sg-açık kümelerin sınıfı $SGO(X)$ ile gösterilir.

(4) A nın kapsadığı sg-açık kümelerin birleşimine A nın **yarı genelleştirilmiş içi (sg-içi)** denir ve kısaca A^{sg} ile gösterilir. Her yarı-açık küme, sg-açık küme ve her sg-açık küme de gs-açık olduğundan,

$$A^o \subset A^s \subset A^{sg} \subset A^{gs} \subset A$$

(5) $x \in X$ noktasını içeren her sg-açık U kümesi için $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ ise x e A nın **yarı genelleştirilmiş-yığılma noktası (sg-yığılma noktası)** denir. A nın sg-yığılma noktalarının kümesi $A^\dagger$ ile gösterilir.

$$\overset{\sim g}{A} = A \cup A^\dagger$$

(6) $a \in A$ olsun. Eğer $a \in G \subseteq A$ olacak şekilde bir G sg-açık kümesi varsa A kümesine a noktasının **yarı-genelleştirilmiş komşuluğu** denir. Tüm sg-açık kümelerin birleşimi sg-açık olduğundan A^{sg} kümesi sg-açıktır.

Not 4.1.2 ([12]) Bir X uzayında $A \subseteq X$ kümesi sg -açıktır ancak ve ancak A kümesi her noktasının sg -komşuluğudur.

Örnek 4.1.3 $X = \{a, b, c, d\}$ deki $\tau = \{X, \emptyset, \{c, d\}\}$ için sg -kapalı kümeleri bulalım.

$$SO(X) = \{\emptyset, X, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$$

$$SCL(X) = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b\}, \{a\}\}$$

Çizelge 4.1. Bir (X, τ) uzayındaki sg -kapalı kümeler.

A	$\tilde{A}$	$A \subset U$ ve $U \in SO(X)$ olacak şekilde kümeler	sg -kapalı küme	Yarı-kapalı küme
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset, X, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$	✓	✓
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a, c, d\}, X$	✓	✓
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b, c, d\}, X$	✓	✓
$\{c\}$	X	$\{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X$	×	×
$\{d\}$	X	$\{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X$	×	×
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	X	✓	✓
$\{a, c\}$	X	$\{a, c, d\}, X$	×	×
$\{a, d\}$	X	$\{a, c, d\}, X$	×	×
$\{b, c\}$	X	$\{b, c, d\}, X$	×	×
$\{b, d\}$	X	$\{b, c, d\}, X$	×	×
$\{c, d\}$	X	$\{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X$	×	×
$\{a, b, c\}$	X	X	✓	×
$\{a, b, d\}$	X	X	✓	×
$\{a, c, d\}$	X	$\{a, c, d\}, X$	×	×
$\{b, c, d\}$	X	$\{b, c, d\}, X$	×	×
X	X	X	✓	✓

Yarı genelleştirilmiş-kapalı kümelerin sınıfı aşağıdaki gibidir.

$$SGCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$$

Örnek 4.1.4 $X = \{a, b, c\}$ deki $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ için sg -kapalı kümeleri bulalım.

$$SO(X) = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a\}\}, SCl(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{c, b\}\}$$

Çizelge 4.2. Bir X uzayındaki sg -kapalı kümeler.

A	$\tilde{A}$	$A \subset U$ ve $U \in SO(X)$ olacak şekilde kümeler	sg -kapalı küme	Yarı-kapalı küme
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}$	✓	✓
$\{a\}$	X	$X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}$	×	×
$\{b\}$	$\{b\}$	$X, \{a, b\}$	✓	✓
$\{c\}$	$\{c\}$	$X, \{a, c\}$	✓	✓
$\{a, b\}$	X	$X, \{a, b\}$	×	×
$\{a, c\}$	X	$X, \{a, c\}$	×	×
$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	X	✓	✓
X	X	X	✓	✓

$SGCl(X) = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b\}, \{c, b\}\}$ yarı genelleştirilmiş-kapalı kümelerden oluşur.

Not 4.1.5 (1) Her yarı-kapalı küme, sg -kapalı küme ve her sg -kapalı küme, gs -kapalı kümedir. Fakat bu ifadelerin tersleri doğru değildir. Örnek 4.1.4 de $A = \{a, b, d\}$ için

$\tilde{A} = X$ dan A yarı-kapalı değildir fakat $\tilde{\tilde{A}} = A$ olduğundan A sg -kapalıdır.

(2) g -kapalı ve sg -kapalı kümeler genellikle birbirinden bağımsızdır. Örneğin $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış uzayında $A = (a, b)$ için A kümesi gs -kapalıdır fakat g -kapalı değildir. Diğer taraftan Örnek 2.3.3 de $X = \{m, n, r\}$ üzerindeki $\tau = \{X, \emptyset, \{m\}\}$ için $A = \{m, n\}$ kümesi g -kapalıdır fakat sg -kapalı değildir.

(3) sg -kapalı iki kümenin kesişimi veya birleşimi genellikle sg -kapalı değildir.

Örnek 4.1.6 (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ ve $[a, b]$ aralıkları sg -açıktır.

(2) $(X, P(X))$ olsun. $SGCl(X) = P(X)$ dir.

(3) $(X, \{X, \emptyset\})$ olsun. $SGCl(X) = \{X, \emptyset\}$ dir.

Teorem 4.1.7 Bir X uzayındaki $A, B \subset X$ olsun.

(1) $\tilde{A}^g$, A yı kapsayan en dar kapalı kümedir.

(2) $A \subseteq \tilde{A}^g$

(3) A kümesi sg -kapalı ise $\tilde{A}^g = A$

(4) $A \subseteq B$ ise $\tilde{A}^g \subseteq \tilde{B}^g$

(5) $\tilde{(\tilde{A}^g)}^g = \tilde{A}^g$

(6) $\tilde{(A^c)}^g = (A^{sg})^c$

(7) $(A^c)^{sg} = (\tilde{A}^g)^c$

4.2 Yarı Genelleştirilmiş-Kapalı ve Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 4.2.1 ([21]) X ve Y topolojik uzaylar, $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun.

(1) Y deki her kapalı kümenin ters görüntüsü sg -kapalı ise f ye **sg -sürekli fonksiyon** denir. Denk olarak f sg -sürekli ancak ve ancak her açık U için $f^{-1}(U)$ sg -açıktır.

(2) X deki her kapalı (açık) F için $f(F)$, Y de sg -kapalı (sg -açık) ise f ye **sg -kapalı fonksiyon (sg -açık fonksiyon)** denir.

(3) Y deki her sg -kapalı (sg -açık) kümenin ters görüntüsü sg -kapalı (sg -açık) ise f ye **sg -irresolute fonksiyon** denir.

Teorem 4.2.2 (1) Her yarı-sürekli fonksiyon sg -sürekli.

(2) Her sg -sürekli fonksiyon gs -sürekli.

İspat: Aşîkârdır. Fakat tersleri genelde doğru değildir.

Örnek 4.2.3 $X = Y = [0,1]$ ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. f yarı-sürekli dir dolayısıyla sg -sürekli dir fakat sürekli değildir.

Örnek 4.2.4 $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{c, d\}\}$ ve $Y = \{x, y\}$, $\sigma = \{\emptyset, Y, \{y\}\}$ olsun. Ayrıca $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$, $f(a) = f(b) = f(d) = x$, $f(c) = y$ şeklinde tanımlansın. $A = \{a, b, d\}$ ise $\tilde{A} = X$ olduğundan A yarı-kapalı değildir. Örnek 4.1.3 den X, A kümesini içeren tek yarı-açık küme olduğundan A , sg -kapalıdır. Bu yüzden f fonksiyonu sg -sürekli olmasına rağmen yarı-sürekli değildir.

Teorem 4.2.5 X ve Y topolojik uzaylar, $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun.

A) Aşağıdakiler denktir:

(i) f , sg -sürekli dir.

(ii) Y deki her açığın ters görüntüsü X de sg -açıktır.

B) $f: X \rightarrow Y$, sg -sürekli ise her $A \subseteq X$ için $f\left(\tilde{A}^g\right) \subset \overline{f(A)}$ dır.

C) Aşağıdakiler denktir:

(i) Her $x \in X$ ve $f(x) \in V$ olacak şekilde her V açığı için $x \in U$ olmak üzere $f(U) \subset V$ olacak şekilde X de bir sg -açığı vardır.

(ii) Her $A \subseteq X$ için $f\left(\tilde{A}^g\right) \subset \overline{f(A)}$ dır.

(iii) Her $B \subseteq Y$ için $f^{-1}\left(\tilde{B}^g\right) \subset f^{-1}(\overline{B})$ dır.

İspat: A) Tanım 4.2.1 den (i) $\Leftrightarrow$ (ii) dır.

B) $A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ dır. $\overline{f(A)}$ kümesi Y de kapalı ve böylece $f^{-1}(\overline{f(A)})$, A kümesini içeren sg -kapalı küme olmuş olur. Sonuç olarak $\tilde{A}^g \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ dır. Böylece

$$f\left(\tilde{A}^g\right) \subset f f^{-1}(\overline{f(A)}) \subset \overline{f(A)}.$$

C) Kabul edelim ki (i) sağlansın, $y \in f\left(\overset{\sim g}{A}\right)$ ve $y \in V$ herhangi bir açık olsun. Bu durumda $x \in X$ olacak şekilde en az bir x noktası ve $f(x) = y$ dir, $x \in U$, $x \in \overset{\sim g}{A}$ ve $f(U) \subset V$ dir. $x \in \overset{\sim g}{A}$, $U \cap A \neq \emptyset$ sağlandığından $f(A) \cap V \neq \emptyset$ dır. Bu yüzden $y = f(x) \in \overline{f(A)}$ elde edilir. Böylece (i) $\Rightarrow$ (ii) sağlanmış olur.

Tersine (ii) sağlansın. $x \in X$ olmak üzere $f(x)$ içeren herhangi bir V açığı bulunsun. $A = f^{-1}(V^c)$ olsun. Bu durumda $x \notin A$ dır. $f\left(\overset{\sim g}{A}\right) \subset \overline{f(A)} \subset V^c$ olduğundan $\overset{\sim g}{A} = A$ olur. Böylece $x \notin \overset{\sim g}{A}$ olur ki $U \cap A = \emptyset$ olacak şekilde x i içeren en az bir U sg -açığı vardır. Sonuç olarak $f(U) \subset f(A^c) \subset V$ dir. O halde (ii) $\Rightarrow$ (i) sağlanmış olur.

Kabul edelim ki (ii) sağlansın ve $B \subseteq Y$ olsun. A ile $f^{-1}(B)$ yi yer değiştirelim. (ii) den $f\left(\left(\overset{\sim g}{f^{-1}(B)}\right)\right) \subset \overline{ff^{-1}(B)} \subset \overline{B}$ olur. Böylece $\left(\overset{\sim g}{f^{-1}(B)}\right) \subset f^{-1}(\overline{B})$ elde edilir. Böylece (ii) $\Rightarrow$ (iii) sağlanmış olur.

Tersine olarak (iii) sağlansın. $A \subseteq X$ olmak üzere $B = f(A)$ olsun. Bu durumda $\overset{\sim g}{A} \subset (\overset{\sim g}{f^{-1}(B)}) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ olur. Dolayısıyla $f\left(\overset{\sim g}{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ yazabiliriz. Böylece (iii) $\Rightarrow$ (ii) dir.

Teorem 4.2.6 X ve Y topolojik uzaylar, $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu için

(1) f , sg -açıktır.

(2) Her $A \subset X$ için $f(A^\circ) \subset (f(A))^{\sim g}$ dir.

(3) Her $x \in X$ ve her $x \in U \in \tau$ için $V \subset f(U)$ olacak şekilde en az bir $f(x) \in V$ sg -açığı vardır.

(4) Her $B \subset Y$ için $f^{-1}\left(\overset{\sim g}{B}\right) \subset \overline{(f^{-1}(B))}$ olur.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4).

Teorem 4.2.7 X ve Y uzayları için $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sg -kapalı ise her $A \subset X$ için

$$\left(f^{\sim g}(A) \right) \subset f(\bar{A})$$

İspat: Aşıkârdır.

Teorem 4.2.8 X ve Y uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(1) f , sg -süreklidir,

(2) Her $x \in X$ ve her $f(x) \in V \in \tau$ için $x \in U$ olmak üzere $f(U) \subset V$ olacak şekilde sg -açık bir U kümesi vardır,

(3) Her $A \subset X$ için $f\left(\overset{\sim g}{A}\right) \subset \overline{f(A)}$,

(4) Her $B \subset Y$ için $\left(f^{-1}\left(\overset{\sim g}{B}\right)\right) \subset f^{-1}(\bar{B})$ dir.

İspat: Aşıkârdır.

Teorem 4.2.9 X ve Y uzayları için $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sg -irresolutedir ancak ve ancak Y deki her sg -açık A kümesi için $f^{-1}(A)$, X de sg -açıktır.

İspat: $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun sg -irresolute olduğunu kabul edelim. Bu durumda Y deki her sg -kapalı B için $f^{-1}(B)$, X de sg -kapalıdır. A , Y deki sg -açık küme ise A^c , sg -kapalıdır. Böylece $f^{-1}(A^c)$ sg -kapalıdır. Fakat $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ olduğundan $f^{-1}(A)$, sg -açıktır.

Tersine, Y deki her sg -açık A kümesi için $f^{-1}(A)$, sg -açık olsun. B , Y de sg -kapalı ise B^c sg -açıktır. $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ sg -açıktır. Böylece $f^{-1}(B)$, sg -kapalı olur bu ise Tanım 4.2.1 den f nin sg -irresolute olması demektir.

Teorem 4.2.10 X ve Y uzayları için $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sg -irresolute ise her

$A \subset X$ için $f\left(\overset{\sim g}{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ dir.

İspat: $A \subseteq X$ olduğunu kabul edelim. $\widetilde{f(A)}$ kümesi Y de sg -kapalıdır. Böylece Tanım 4.2.1 den $f^{-1}(\widetilde{f(A)})$, X de sg -kapalıdır. Dahası $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\widetilde{f(A)})$ dır. sg -kapanış tanımından $\widetilde{A}^g \subset f^{-1}(\widetilde{f(A)})$ olur. Sonuç olarak

$$f(\widetilde{A}^g) \subset f(f^{-1}(\widetilde{f(A)})) \subset \widetilde{f(A)}$$

Teorem 4.2.11 $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sg -irresolute ise sg -sürekli dir.

İspat: Her kapalı küme sg -kapalı olduğundan f , sg -sürekli dir. Fakat tersi doğru değildir. $X = Y = \{a, b, c\}$ $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ ve $\sigma = \{\emptyset, Y, \{a\}\}$ olsun. $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(a) = f(c) = b$ ve $f(b) = c$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\{b\}$, Y de sg -kapalı olmasına rağmen $f^{-1}(\{b\})$ X de sg -kapalı değildir. Dolayısıyla f , sg -irresolute değildir.

Teorem 4.2.12 X, Y ve Z uzayları için

- (1) $f: X \rightarrow Y$ ve $h: Y \rightarrow Z$ sg -irresolute ise $hof: X \rightarrow Z$ de sg -irresolutedir.
- (2) $f: X \rightarrow Y$ sg -irresolute ve $h: Y \rightarrow Z$ de sg -sürekli ise $hof: X \rightarrow Z$ sg -sürekli dir.
- (3) $f: X \rightarrow Y$ sg -sürekli ve $h: Y \rightarrow Z$ de sürekli ise $hof: X \rightarrow Z$ sg -sürekli dir.

İspat: (1) $A \subseteq Z$ nin sg -açık küme olduğunu kabul edelim. Bu durumda f, h nin sg -irresolute olmasından $h^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(h^{-1}(A))$ kümesi sg -açıktır. Böylece $(hof)^{-1}(A) = f^{-1}(h^{-1}(A))$ kümesi sg -açıktır. Dolayısıyla hof fonksiyonu sg -irresolute olur. (2) ve (3) aşikârdır.

İki sg -sürekli fonksiyonun bileşkesinin sg -sürekli olması gerekmez fakat aşağıdaki kısıtlamalar altında bileşke fonksiyonun sg -sürekli olması mümkündür. sg -irresolute ile irresolute kavramları genel birbirinden farklı olduğuna dikkat edelim.

Örnek 4.2.13 $X = Y = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, X\}$ ve $\sigma = \{\emptyset, Y, \{a\}\}$ verilsin. $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ birim dönüşüm olsun. Bu durumda f irresolutedir. Fakat $\{a, b\}$ kümesi Y de sg -kapalı olmasına rağmen X de sg -kapalı değildir. Dolayısıyla f sg -irresolute değildir.

Örnek 4.2.14 $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{x, y\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{c, d\}\}$, $\sigma = \{\emptyset, Y, \{y\}\}$ verilsin. $f: X \rightarrow Y$, $f(a) = f(b) = f(d) = x$, $f(c) = y$ şeklinde verilsin. $\{x\}$, Y de yarı-kapalıdır ve $A = \{a, b, d\}$ kümesi sg -kapalıdır fakat yarı-kapalı değildir. Bu yüzden f fonksiyonu sg -irresolute olmasına rağmen irresolute değildir.

4.3 Yarı Genelleştirilmiş Ayırma Aksiyomları

Bu kısımda yarı-ayırma aksiyomlarından daha zayıf olan ve sg -kapalılar (sg -kapalılar) kullanılarak elde edilen yarı genelleştirilmiş-regüler (sg -regüler) ve yarı genelleştirilmiş-normal (sg -normal) olarak adlandıracağımız ayırma aksiyomları ve özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.3.1 ([7,8,10]) X bir uzay olsun.

(1) Her yarı-kapalı $F \subset X$ kümesi ve her $x \notin F$ noktası için $x \in U$ ve $F \subset V$ olacak şekilde ayrık yarı-açık U ve V kümeleri varsa X e **yarı -regüler uzay (s-regüler uzay)** denir.

(2) Ayrık yarı-kapalı F ve G kümeleri için $F \subset V$ ve $G \subset U$ olacak şekilde ayrık yarı-açık U ve V kümeleri varsa X e **yarı-normal uzay (s-normal uzay)** denir

(3) Her sg -kapalı F kümesi ve her $x \notin F$ noktası için $x \in U$ ve $F \subset V$ olacak şekilde ayrık yarı-açık U ve V kümeleri varsa X e **yarı genelleştirilmiş-regüler uzay (sg-regüler uzay)** denir.

(4) Ayrık sg -kapalı F ve G kümeleri için $F \subset V$ ve $G \subset U$ olacak şekilde ayrık yarı-açık U ve V kümeleri varsa X e **yarı genelleştirilmiş-normal uzay (sg-normal uzay)** denir.

Lemma 4.3.2 X uzayı sg -regülerdir ancak ve ancak X uzayı yarı-regüler ve yarı- $T_{\frac{1}{2}}$ (her sg -kapalı küme yarı-kapalı ise uzaya yarı- $T_{\frac{1}{2}}$ denir) dir.

İspat: X uzayının sg -regüler olduğunu kabul edelim. Yarı-regüler olduğu açıktır. Dolayısıyla yarı- $T_{\frac{1}{2}}$ olduğunu gösterelim. $F \subseteq X$ kümesi sg -kapalı olsun. Her $x \notin F$ için $U_x \cap F = \emptyset$ olacak şekilde en az bir x in U_x yarı-açık komşuluğu vardır.

$U = \cup\{U_x: x \notin F\}$ olarak alırsak U kümesi yarı-açık ve $U = F^c$ olur ki böylece F yarı-kapalı olur. O halde uzay yarı- $T_{\frac{1}{2}}$ olur. Teoremin tersi ise aşikârdır.

Şimdi ise yarı-regüler uzaylar ile sg -regüler uzaylar arasındaki farkı gösteren bir örnek verelim.

Örnek 4.3.3 Y ve Z ayrık sonsuz kümeler ve $X = Y \cup Z$ olsun. Bu durumda $\tau = \{\emptyset, X, Y, Z\}$ sınıfı X de bir topolojidir. Bu topolojide her yarı-kapalı küme hem açık hem de kapalıdır. Böylece X uzayı yarı-regüler olur. Diğer taraftan $\emptyset \neq A \subseteq Y$ ve $x \in Y - A$ ise A kümesi sg -kapalıdır. Fakat A kümesi ile x noktası ayrık yarı-açıklar ile ayrılamaz. Sonuç olarak X topolojik uzayı sg -regüler değildir.

Şimdi de yarı-regüler uzaylar karakterize edilecektir. $A \subseteq X$ kümesi hem yarı-açık hem de yarı-kapalı ise **yarı-clopen** olarak adlandırılır. Her yarı-açık kümenin yarı-kapanışı yarı-clopendir.

Teorem 4.3.4 Bir X uzayında aşağıdakiler denktir:

- (1) X , sg -regülerdir.
- (2) Her sg -açık G kümesi yarı-clopen kümelerin birleşimidir.
- (3) Her sg -kapalı F kümesi yarı-clopen kümelerin kesişimidir.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2): G kümesi sg -açık ve $x \in G$ olsun. $F = G^c$ ise F , sg -kapalıdır. Kabulden $F \subseteq W_2$ ve $x \in W_1$ olacak şekilde W_1 ve W_2 ayrık yarı-açıkları vardır. $V = \widetilde{W_1}$ ise V yarı-clopen ve $V \cap F \subseteq V \cap W_2 = \emptyset$ olur buradan $x \in V \subseteq G = F^c$ dir. Böylece G , yarı-clopen kümelerin birleşimi olur.

(2) $\Rightarrow$ (3): Aşikârdır.

(3) $\Rightarrow$ (1): F kümesi sg -kapalı ve $x \notin F$ olsun. Kabulden $F \subseteq V$ ve $x \notin V$ olacak şekilde en az bir V yarı-clopen kümesi vardır. $G = V^c$ ise G , x noktasını içeren yarı-açık bir küme ve $G \cap V = \emptyset$ olur. Böylece X uzayı sg -regüler olur.

Teorem 4.3.5 Her sg -regüler uzay $\text{yarı-}T_2$ dir.

İspat: X uzayının sg -regüler olduğunu ve $x \neq y$ için $x, y \in X$ olduğunu kabul edelim. Teorem 4.3.2 den $\{x\}$ ya yarı-açık ya da yarı-kapalı dır. $\{x\}$ yarı açık ise sg -açık ve böylece Teorem 4.3.3 den yarı-clopen olur. $\{x\}$ ve $\{x\}^c$ ayrık yarı-açık kümelerdir. $\{x\}$ yarı kapalı ise $\{x\}^c$ yarı-açık ve böylece Teorem 4.3.3 den yarı-kapalı kümelerin birleşimidir. O halde $y \in V \subseteq \{x\}^c$ olacak şekilde bir V yarı-clopen kümesi vardır. Bu da X uzayının $\text{yarı-}T_2$ olması demektir.

Teorem 4.3.6 Her sg -normal uzay yarı-normal dir. Fakat tersi genelde doğru değildir.

İspat: Tanım 4.3.1 ve Örnek 4.3.3 den ispat aşikârdır. Örnek 4.3.3 teoremin tersinin doğru olmadığını gösteren bir örnektir.

Teorem 4.3.7 X uzayı sg -normaldir ancak ve ancak her sg -kapalı F kümesi ve F yi içeren her sg -açık G kümesi için $A \subseteq V \subseteq G$ olacak şekilde yarı-clopen V kümesi vardır.

İspat: F kümesi sg -kapalı ve G de F yi içeren sg -açık küme olsun. $F \cap G^c = \emptyset$ dur. Bu durumda $F \subseteq W_1$ ve $G^c \subseteq W_2$ olacak şekilde ayrık yarı-açık W_1 ve W_2 kümeleri vardır. Eğer $V = \widetilde{W_1}$ alırsak V yarı-clopendir ve $F \subseteq V \subseteq G$ olur. İspatın diğer tarafı aşikârdır.

Tanım 4.3.8 ([22]) (1) X uzayında her $x, y \in X$ nokta çifti için $x \in \widetilde{\{y\}}$ olduğunda $y \in \widetilde{\{x\}}$ ise uzaya **yarı-simetrik** denir. X uzayı yarı-simetrik dir ancak ve ancak her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi sg -kapalıdır.

(2) X s -normal ve F yarı-kapalı , A sg -kapalı olmak üzere $F \cap A = \emptyset$ ise $F \cap \widetilde{A} = \emptyset$ olur. Böylece $F \subseteq G$ ve $A \subseteq H$ olacak şekilde ayrık yarı-açık G ve H kümeleri vardır.

Teorem 4.3.9 Bir X uzay için

(1) X uzayı s -normal ve yarı-simetrik ise s -regülerdir.

(2) X uzayı sg -normal ve yarı-simetrik ise sg -regülerdir.

İspat: (1) Kabul edelim ki $F \subseteq X$ yarı kapalı ve $x \notin F$ olsun. Bu durumda $\{x\}$ kümesi sg -kapalıdır. Tanım 4.3.8 den F ve $\{x\}$ ayrık yarı-açık kümeler ile ayrılabilir. O halde uzay sg -regülerdir.

(2) Aşıkârdır.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında verilen bir kümenin gs -açıklığı, gs -kapalılığı, gs -kapanışı, gs -içi, sg -açıklığı, sg -kapalılığı, sg -kapanışı, sg -içi şeklindeki farklı operatörlerin temel özellikleri incelenmiştir. Bu özelliklerin kapalılık (yarı-kapalılık), kapanış (yarı-kapanış) gibi kavramlar ile olan ilişkileri araştırılmıştır. Ardından, bilinen ayırma aksiyomlarından daha zayıf olan ve bir kümenin gs -kapalılığı veya sg -kapalılığı kullanılarak elde edilen farklı tipleri (özellikle gs -regüler, gs -normal, sg -regüler, sg -normal) üzerine çalışılmıştır. Son olarak verilen bir f fonksiyonunu gs -sürekliliği (gs -kapalılığı), sg -sürekliliği (sg -kapalılığı), gs -irresolute (sg -irresolute) tanımlanmış, aralarındaki ilişkiler belirlenmiştir. Devamda ise bu şekilde sürekliliğe sahip olan fonksiyonların bileşkesi olan fonksiyonun durumu araştırılmıştır.

Tez çalışmasında kullanılan kapalılık yerine pre-kapalı küme, genelleştirilmiş pre-kapalı küme, pre-genelleştirilmiş kapalı küme, v.b. kavramlar alınırsa yeni ayırma aksiyomları, yeni sürekli fonksiyonlar, yeni operatörler elde edilebilir. Homeomorfizm kavramının gs -homeomorfizm veya sg -homeomorfizm şeklinde farklı uyarlamaları tanımlanabilir. Bunun dışında, bilinen anlamda tanımlanan kompaktlık, bağlantılılık, sober uzay olma, v.b. gibi kavramların daha genel formları elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Levine, N., 1963. Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, American Mathematical Monthly, 70, 36-41.
2. Bhattacharyya, P. ve Lahiri, B. K., 1987. Semi-generalized closed sets in topology, Indian Journal of Mathematics, 29, 375-382.
3. Arya, S. P. ve Nour, T., 1990. Characterizations of s -normal spaces, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 21, 717-719.
4. Devi, R., Maki, H. ve Balachandran, K., 1993. Semi-generalized closed maps and generalized semi-closed maps, Memoirs of the Faculty of Science, Kochi University Series A (Mathematics), 14, 41-54.
5. Levine, N., 1970. Generalized closed sets in topology, Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo Series 2, 19, 2, 89- 96.
6. Maheshwari, S. N. ve Prasad, R., 1975. Some new separation axioms, Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 89, 395-402.
7. Maheshwari, S. N. ve Prasad, R., 1975. On s -regular spaces, Glasnik Matematicki., 10, 30, 347-350.
8. Maheshwari, S. N. ve Prasad, R., 1978. On s -normal spaces, Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, 22, 70, 27-29.
9. Malghan, S. R., 1982. Generalized closed maps, The Journal. of the Karnatak University Science, XXVII, 82-88.
10. Ganster, M., Jafari, S., Navalagi, G. B., 2002. On semi- g -regular and semi- g -normal spaces, Demonstratio Mathematica, 35, 2, 415-422
11. Navalagi, G., 2011. Semi-generalized separation axioms in topology, International Journal of Mathematics and Computing Applications, 3, 23-31.
12. Navalagi, G., 2013. Properties of gs -closed sets and sg -closed sets in topology, International Journal of Communication in Topology, 1, 1, 31-40.
13. Sunduram, P., 1991. Generalization of continuous maps in topological spaces, Ph. D. Thesis, Bharatiyar University of Coimbatore.
14. Devi, R., Maki, H. ve Balachandran, K., 1995. Semi-generalized homeomorphisms and generalized semi homeomorphisms in topological spaces, Indian Journal Pure Applied Mathematics, 26, 3, 271-284.
15. Biswas, N., 1970. On characterizations of semi-continuous functions, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, 8, 399-402.

16. Koçak, M., Genel Topolojiye Giriş Ve Problem Çözümleri. Nisan Kitapevi Yayınları, Eskişehir.
17. Munkreas, J. R., 1975. A First Course, Prentice Hall Inc., New Jersey.
18. Şahan, N., 2019. Yarı ayırma aksiyomları üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aksaray.
19. Erciyes, A., Aytekin, A. ve Şahan, T., 2016. Semi-homotopy and semi-fundamental groups, Konuralp Journal of Mathematics, 4, 1, 155-163.
20. Crossley, S. G. ve Hildebrand, H. K., 1972. Semitopological properties, Fundamenta Mathematica, 74, 233-254.
21. Caldas, M., 1995. Semi-generalized continuous maps in topological spaces, Portugaliae Mathematica, 52, 4, 399-407.
22. Caldas, M., 1994. Espacios semi- $T_{1/2}$, Pro Mathematica, 8, 116-121.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Havva TAŞKIRAN

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Çanakkale On Sekiz Mart Üniversitesi, Matematik
Bölümü, 2010-2015

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı,
2021-2024

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Gaziosmanpaşa Nazmi Arıkan Fen Bilimleri Dershane, İstanbul, 2016-2017.
2. Avcılar Uğur Dershane, İstanbul, 2018-2019.
3. Türev Özel Öğretim Kursu, İstanbul, 2019-2020.
4. Saratlı Çok Programlı Anadolu Lisesi, Aksaray, 2020-2023.
5. Sabancı 50. Yıl Anadolu Lisesi, İstanbul, 2023-

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Makaleler

1. Taşkiran, H. ve Erciyes, A., 2023. Properties of generalized semi closed sets in the topology, 9th International IFS and Contemporary Mathematics Conference, Bildiriler Kitabı, 83-84.