

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YARI ÖKLİD UZAYLARINDA BİKONSERVATİF HİPERYÜZEYLER



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ece POLAT HAYIRLI

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erol KILIÇ

OCAK 2025

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YARI ÖKLİD UZAYLARINDA BİKONSERVATİF HİPERYÜZEYLER



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Ece POLAT HAYIRLI
(36203614047)**

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erol KILIÇ

OCAK 2025

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

YARI ÖKLİD UZAYLARINDA BİKONSERVATİF HİPERYÜZEYLER

Tezi Hazırlayan: Ece POLAT HAYIRLI
Yüksek Lisans Tezi

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgemedi beni her konuda yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erol KILIÇ 'a, ayrıca tüm hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışmalarım süresince de benden her türlü desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.



ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “ Yarı Öklid Uzaylarında Bikonservatif Hiperyüzeyler ” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ece POLAT HAYIRLI



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	iv
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1 Yarı (Semi)-Riemann Manifoldları.....	4
2.1.1 Yarı-Riemann Altmanifoldları.....	10
2.1.2 Yarı-Öklid Uzayının Altmanifoldları, Yüzeyleri ve Hiperyüzeyleri	12
2.1.3 Riemann Manifoldları Arasında Harmonik ve Biharmonik Dönüşümler	17
3. ÖKLİD UZAYLARINDA BİKONSERVATİF HİPERYÜZEYLER.....	21
3.1 Öklid Uzayında Biharmonik Altmanifoldlar.....	21
3.2 Öklid Uzayında Bikonservatif Hiperyüzeyler	24
3.3 $\mathbb{R}^3$ de Bikonservatif Yüzeyler.....	30
3.4 $\mathbb{R}^4$ de Bikonservatif Hiperyüzeyler	34
3.5 Öklid Uzaylarında Üç Farklı Asli Eğriliğe Sahip Bikonservatif Hiperyüzeyler	49
3.5.1 Öklid uzayında bikonservatif hiperyüzeylerin bazı özellikleri.....	49
3.5.2 Bikonservatif hiperyüzeyleri ile ilgili bazı lemmalar	52
3.6 Üç Farklı Asli Eğrilikli Bikonservatif Hiperyüzeyleri	54
4. MINKOWSKİ 3-UZAYDA BİKONSERVATİF YÜZEYLER	64
4.1 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bikonservatif Yüzeylerin Sınıflandırılması	65
4.2 Lorentz 3-Uzay Formlarda Bikonservatif Yüzeylerin Sınıflandırılması	77
KAYNAKLAR.....	94
ÖZGEÇMİŞ	97

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$M, \overline{M}$	:	Manifold, Altmanifold,
$M_0, \widehat{M}$	:	İntegral Altmanifold,
$\langle, \rangle, \overline{\mathbf{g}}, \mathbf{g}$	:	Metrik Tensör, İndirgenmiş Metrik,
$\Gamma(\mathbf{TM})$	:	Vektör Alanlarının Kümesi,
$T_p M, T_p \overline{M}$	:	p Noktasındaki Tanjant Uzaylar,
$\nabla, \overline{\nabla}, \widehat{\nabla}$	:	Lineer Konneksiyonlar,
$D, D_0, D^\perp$	:	Distribüsyon,
L^3	:	Üç Boyutlu Minkowski Uzayı,
R^n	:	n -boyutlu Öklid Uzayı
$M_1^3(c)$	:	Üç Boyutlu Lorentz Uzay Form
S_1^3, H_1^3	:	Sitter Uzayı, Anti-de Sitter Uzayı,
$\text{div} X$	:	X Vektör Alanının Divergensi,
$\Delta \mathbf{H}$	:	$\mathbf{H}$ nın Laplasyanı,
$\nabla f, \text{grad} f$	:	f Fonksiyonunun Gradienti,
$\nabla^\perp, \widehat{\nabla}^\perp$	:	Normal Konneksiyon,
ω_{ij}	:	Konneksiyon 1-form,
$[,]$	:	Lie Parentez (Lie Braketi) Operatörü,
k_i	:	Asli Eğrilik
$h, \overline{h}, \widehat{h}$	:	İkinci Temel Form,
A	:	Şekil Operatörü, Weingarten Dönüşümü,
Ric	:	Ricci Eğrilik Tensörü,
$\mathbf{H}$	:	Ortalama Eğrilik
K	:	Gauss Eğriliği
R	:	Riemann Eğrilik Tensörü,
$K(\Pi)$	:	Kesit Eğriliği,
x, φ	:	İmmersiyon
df	:	f Fonksiyonun Diferensiyeli,
d	:	Dış Türev,
h_f	:	f nin Hessian Tensörü,
H_f	:	f nin Hessian Formu

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YARI ÖKLİD UZAYLARINDA BİKONSERVATİF HİPERYÜZEYLER

ECE POLAT HAYIRLI

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

97+vi sayfa

2025

Danışman: Prof. Dr. Erol KILIÇ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada Öklid ve yarı-Öklid uzaylarında bikonservatif hiperyüzeylerin geometrik özellikleri [1–4] nolu referanslar esas alınarak incelendi. Bu yüksek lisans tezi dört bölüm halinde hazırlandı. Birinci bölüm, Giriş bölümü olup bikonservatif yüzeylerin ve hiperyüzeylerin gelişimi ve literatürdeki yeri hakkında bilgiler verildi. İkinci bölüm ise konunun daha iyi anlaşılması için gerekli olan temel kavramlara ayrıldı. Bu bölümde, yarı-Riemann manifoldları, bu manifoldlar üzerinde tanımlanan diferensiyel operatörler, altmanifoldlar ve altmanifoldların temel özellikleri ile ilgili kavramlar verildi. Üçüncü bölümde ise ilk önce birinci alt bölümde 3 ve 4 boyutlu Öklid uzaylarında bikonservatif hiperyüzeyler incelendi ve bunlarla ilgili karakterizasyon teoremleri verildi. Üçüncü bölümün ikinci alt bölümünde, keyfi boyuttaki bir Öklid uzayında üç farklı asli eğriliğe sahip bikonservatif hiperyüzeyler incelendi ve bunlar hakkında teoremler ve sonuçlar verildi. Tezin son bölümü olan dördüncü bölüm ise iki alt bölümden oluşmaktadır. Burada ilk önce Minkowski 3-uzayında bikonservatif yüzeylerin bir sınıflandırılması verildi. İkinci olarak da, yarı-Öklid uzayları $\mathbb{R}_1^4$ ve $\mathbb{R}_2^4$ nin uzay formlarının bikonservatif yüzeyleri için bir sınıflandırma yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Biharmonik altmanifoldlar, Biharmonik yüzeyler, Biharmonik hiperyüzeyler, H-hiperyüzeyler, Bikonservatif altmanifoldlar, Bikonservatif hiperyüzeyler, Bikonservatif yüzeyler

ABSTRACT

Master Thesis

BICONSERVATIVE HYPERSURFACES IN SEMI-EUCLEADEAN SPACES

Ece POLAT HAYIRLI

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

97+vi pages

2025

Supervisor: Prof. Dr. Erol KILIÇ

In this study, prepared as a master's thesis, the geometric properties of biconservative hypersurfaces in Euclidean and semi-Euclidean spaces were investigated based on references [1–4]. This master's thesis was prepared in four chapters. The first chapter is the introduction section and information is given about the development of biconservative surfaces and hypersurfaces and their place in the literature. The second chapter is devoted to the basic concepts necessary for a better understanding of the subject. In this chapter, concepts related to semi-Riemannian manifolds, differential operators defined on these manifolds, submanifolds and basic properties of submanifolds are given. In the third chapter, firstly, biconservative hypersurfaces in 3 and 4 dimensional Euclidean spaces are investigated and the related characterization theorems are given in the first subsection. In the second subsection of the third chapter, biconservative hypersurfaces with three distinct principal curvatures in an arbitrary dimensional Euclidean space are studied and theorems and results are given about them. The fourth chapter, which is the last section of the thesis, consists of two subsections. Here, first, a classification of biconservative surfaces in Minkowski 3-space is given. Second, a classification is made for biconservative surfaces of the space forms of the semi-Euclidean spaces $\mathbb{R}_1^4$ and $\mathbb{R}_2^4$.

Keywords: Biharmonic submanifolds, Biharmonic surfaces, Biharmonic hypersurfaces, H-hypersurfaces, Biconservative submanifolds, Biconservative hypersurfaces, Biconservative surfaces

1. GİRİŞ

Harmonik ve biharmonik fonksiyonlar teorisi yüz elli yılı aşkın süredir matematik ve fiziğin bir çok dallarında çalışılan önemli bir konudur. Son elli yılı aşkındır da diferensiyel geometrinin önemli çalışma alanlarından birisi haline gelmiştir. $(\bar{M}, \bar{g})$ ve (M, g) iki Riemann manifoldu olmak üzere bir $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ Riemann dönüşümü

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |d\varphi|^2 V_g \quad (1.0.1)$$

ile verilen enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise φ harmonik dönüşüm olarak adlandırılır. 1964 yılında J. Eells ve J. H. Sampson, Riemann manifoldlar arasındaki harmonik dönüşümleri incelediler [5]. 1980 li yılların başlarında J. Eells ve L. Lemaire, harmonik dönüşüm kavramını genelleştirerek k -harmonik kavramını tanımladılar [6]. Genelleştirilen bu k -harmonik dönüşümlerde, $k = 2$ için biharmonik dönüşüm olarak adlandırılır ve biharmonik dönüşüm, bienerji fonksiyoneli

$$E_2(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\varphi)|^2 V_g \quad (1.0.2)$$

nin bir kritik noktasıdır, burada $\tau(\varphi) = \text{iz grad } d\varphi$ ile tanımlı tensiyon alanıdır [7]. Eğer $(\bar{M}, \bar{g})$ bir yarı-Riemann manifold ise bu durumda $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ dönüşümünün bienerji fonksiyoneli

$$E_2(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M \bar{g}(\tau(\varphi), \tau(\varphi)) V_g \quad (1.0.3)$$

olarak tanımlanır. Riemann manifoldlar arasındaki bir diferensiyellenebilir $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ dönüşümünün bienerji fonksiyoneli için Euler-Lagrange denklemi G. Y. Jiang tarafından

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta\tau(\varphi) - \bar{R}(d\varphi, \tau(\varphi))d\varphi = 0 \quad (1.0.4)$$

olarak tanımlandı, burada Δ laplasyan operatörü ve $\bar{R}$ de $\bar{M}$ nin Riemann eğriliğidir [7].

Bir $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ biharmonik dönüşümü bir izometrik immersiyon ise M ye biharmonik altmanifold denir. B. Y. Chen, Öklid uzayının sonlu tipli altmanifoldlarının biharmonikliği için alternatif bir tanım verdi [8, 9]. n -boyutlu Öklid uzay $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$ de bir m -boyutlu altmanifold M olmak üzere M nin yer vektörü x ve ortalama eğrilik vektör alanında H olsun. Böylece Öklid uzayında bir altmanifoldun biharmoniklik şartı $\Delta^2 x = 0$ denkleminde indirgenir. İyi bilinen Laplace-Beltrami formülünden $\Delta x = mH$ olduğundan M nin biharmoniklik şartı $\Delta H = 0$ haline dönüşür. Bir Riemann manifoldun altmanifoldunun biharmonikliğini incelemek için bu tanımın ilk kullanıldığı çalışma, R. Caddeo, S. Montaldo ve C. Oniciuc'in birlikte yaptıkları [10]

makalesi olarak bilinmektedir. Kolayca görülebilirki, bir minimal immersiyon biharmoniktir. Bu durumun tersinin yarı-Öklid uzayı $\mathbb{R}_V^n$ nin altmanifoldları için doğru olmadığını B.Y. Chen ve S. Ishikawa [11] [12] deki makalelerinde ispatladılar, yani yarı-Öklid uzayı $\mathbb{R}_V^n$ nin her biharmonik altmanifoldunun minimal olmak zorunda kalmadığını gösterdiler ve bunlarla ilgili örnekler verdiler.

$x : M \rightarrow \mathbb{R}_V^n$ bir m -boyutlu izometrik immersiyon olmak üzere $\tau_2(x) = \Delta H = -\frac{1}{m}\Delta^2 x$ in teğet ve normal bileşenlerini göz önüne alalım. Kolayca hesaplanabilir ki M nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta^\perp H + \text{izh}(A_H(\cdot), \cdot) = 0 \quad (1.0.5)$$

ve

$$m \text{grad} \|H\|^2 + 4 \text{iz} A_{\nabla^\perp H}(\cdot) = 0 \quad (1.0.6)$$

kısmi diferensiyel denklemlerinin sağlanmasıdır. Biharmonik altmanifoldlar için (1.0.4) denkleminin teğet ve normal bileşenlerine ayrılmasıyla, biharmonik altmanifoldların incelenmesi daha da zengin hale gelmiştir. Öklid uzaylarının altmanifoldları için ise biharmoniklik şartı (1.0.5) ve (1.0.6) şartlarına indirgemıştır. Bu durum yeni bir altmanifold sınıfının ortaya çıkmasına neden olmuştur.

1995 yılında T. Hasanis ve T. Vlachos, 3-boyutlu ve 4-boyutlu Öklid uzaylarında, biharmoniklik kavramından daha genel, (1.0.6) şartına denk olan ve **H**-hiperyüzey olarak adlandırdığı bikonservatif hiperyüzeyleri incelediler [1]. 1998 yılında F. Defever 4-boyutlu Öklid uzayında harmonik ortalama eğriliğe sahip hiperyüzeyleri çalıştı, yani bir anlamda biharmonik hiperyüzeyleri inceledi [13]. Bu çalışmalardan sonra bikonservatif yüzeyler, hiperyüzeyler ve altmanifoldlar olarak, farklı uzaylarda bir ivme kazandı [2, 3, 14–17]. Özellikle farklı boyutlardaki Öklid ve yarı-Öklid uzaylarında, farklı asli eğrilikli hiperyüzeylerin bikonservatifliği ile ilgili bir çok çalışma yapıldı [18–21]. Bir biharmonik altmanifold aşıkarak bir bikonservatif altmanifolddur fakat bunun tersi her zaman doğru değildir, yani bir bikonservatif altmanifold biharmonik olmak zorunda değildir.

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada Öklid ve yarı-Öklid uzaylarında bikonservatif hiperyüzeylerin geometrik özellikleri bir derleme olarak ortaya konulmuştur. Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, Giriş bölümü olup bikonservatif yüzeylerin ve hiperyüzeylerin gelişimi ile ilgili ve literatürdeki yeri hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci

bölüm ise konunun daha iyi anlaşılması için gerekli olan temel kavramlara ayrılmıştır. Bu bölümde, yarı-Riemann manifoldları, bu manifoldlar üzerinde tanımlanan diferensiyel operatörler, altmanifoldlar ve altmanifoldların temel özellikleri ile ilgili kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde ise ilk önce birinci alt bölümde 3 ve 4 boyutlu Öklid uzaylarında bikonservatif hiperyüzeyler incelenmiş ve bunlarla ilgili karakterizasyon teoremleri verilmiştir. Üçüncü bölümün ikinci alt bölümünde, keyfi boyuttaki bir Öklid uzayında üç farklı asli eğriliğe sahip bikonservatif hiperyüzeyler incelenmiş ve bunlar hakkında teoremler ve sonuçlar verilmiştir. Tezin son bölümü olan dördüncü bölüm ise iki alt bölümden oluşmaktadır. Burada ilk önce Minkowski 3-uzayında bikonservatif yüzeylerin bir sınıflandırılması verilmiştir. İkinci olarak da, yarı-Öklid uzayları $\mathbb{R}_1^4$ ve $\mathbb{R}_2^4$ nin uzay formlarının bikonservatif yüzeyleri için bir sınıflandırma yapılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm tezin iyi bir şekilde anlaşılabilmesi için yarı-Riemann manifoldlar, altmanifoldlar ve hiperyüzeylerle ilgili temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır.

2.1 Yarı (Semi)-Riemann Manifoldları

Tanım 2.1.1. M bir m boyutlu C^∞ manifold olsun. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_p M$ olmak üzere

$$g|_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X_p, Y_p) \rightarrow g|_p(X_p, Y_p) = g(X_p, Y_p) \quad (2.1.1)$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer, non-degenere $(0,2)$ tipindeki tensör alanına M üzerinde bir metrik tensör denir ve (M, g) ikilisine de bir yarı-(semi, pseudo) Riemann manifold denir [22].

Her $p \in M$ için g_p nin indeksi ν olmak üzere $0 \leq \nu \leq m = \text{boy} M$ ifadesinde ν ye M nin indeksi denir. Eğer $\nu = 0$ ise (M, g) bir Riemann manifold olur ve her $p \in M$ için g_p pozitif tanımlıdır, yani g_p , $T_p M$ üzerinde bir iç çarpımdır. Eğer $\nu = 1$ ise (M, g) bir Lorentz manifold denir [22], [23].

Tanım 2.1.2. $x_1, x_2, \dots, x_m$, M nin bir U komşuluğu üzerinde lokal koordinat sistemi olmak üzere M üzerindeki X, Y vektör alanları

$$X = \sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^m Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

olarak yazılır ve buradan

$$g(X, Y) = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} X_i Y_j$$

olarak ifade edilir, burada $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ dir. Buna göre g metrik tensörü

$$g = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} dx_i \otimes dx_j \quad (2.1.2)$$

olarak ifade edilir.

Her $p \in M$ de $T_p M$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_m\}$, $g(e_i, e_j) = \epsilon_i \delta_{ij}$, $\epsilon_1 = -1, \epsilon_\nu = -1, \epsilon_{\nu+1} = 1, \dots, \epsilon_m = 1$ olmak üzere $\{e_1, \dots, e_m\}$ e (M, g) üzerinde bir ortonormal çatı denir ve burada δ_{ij} Kronecker deltasıdır.

Buna göre bir X vektör alanı

$$X = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i g(X, e_i) e_i \quad (2.1.3)$$

olarak yazılır ve M üzerindeki bir f fonksiyonunun gradienti

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i (df(e_i)) e_i = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i e_i(f) e_i, \quad (2.1.4)$$

X vektör alanının divergensi

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i g(\nabla_{e_i} X, e_i), \quad (2.1.5)$$

f fonksiyonunun Laplasyanı

$$\Delta f = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i [e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)] \quad (2.1.6)$$

olarak tanımlanır [24].

Tanım 2.1.3. (M, g) Riemann manifoldu ve $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. M üzerindeki Laplas operatörü $\Delta : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\Delta f = -\text{div}(\text{grad } f) = -\text{div} \nabla f$$

olarak tanımlanır [25]. Buna göre $\mathbb{R}^{n+1}$ in bir M hiperyüzeyi üzerindeki lokal koordinatlar $(x_1, \dots, x_n)$ olmak üzere f nin Laplace operatörü

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{\mathbf{g}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (2.1.7)$$

olarak ifade edilir, burada $\mathbf{g}$ ve $[g^{ij}]$, sırasıyla, $[g_{ij}]$ matrisinin determinanı ve tersidir. Böylece M üzerinde tanımlı $\mathbb{R}^{n+1}$ değerli bir φ dönüşümünün Laplasyanı

$$\Delta \varphi = \sum_{i=1}^n \left(\bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} \varphi - \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \varphi \right) \quad (2.1.8)$$

olarak tanımlanır, burada $\{e_1, \dots, e_n\}$, M üzerinde ortonormal çatıdır.

Tanım 2.1.4. (M, g) bir yarı-Riemann manifold ve v de M nun bir tanjant vektörü olsun. Eğer $g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v ye spacelike, $g(v, v) < 0$ ise v ye timelike ve $g(v, v) = 0$, $v \neq 0$ ise v ye null tanjant vektörü denir [22].

Bundan sonraki kısımlarda bütün metrikler için $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sembolü kullanılacaktır.

Tanım 2.1.5. M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

dönüşümü

$$(1) \nabla_{X+Y}Z = \nabla_XZ + \nabla_YZ$$

$$(2) \nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$$

$$(3) \nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$$

$$(4) \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_XY$$

şartlarını sağlıyor ise ∇ dönüşümüne afın veya lineer konneksiyon ve ∇_XY vektör alanına da Y vektör alanının X vektör alanı boyunca kovaryant türevi denir [25].

Tanım 2.1.6. M bir diferensiyellenebilir manifold ve ∇ da M de bir lineer konneksiyon olsun. Bu durumda

$$T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$(X, Y) \rightarrow T(X, Y) = \nabla_XY - \nabla_YX - [X, Y] \quad (2.1.9)$$

olarak tanımlanan tensör alanı T ye ∇ lineer konneksiyonunun torsiyon tensörü ve $T = 0$ olması durumunda ∇ ya torsiyonsuz denir [26].

Tanım 2.1.7. g metriği M yarı-Riemann manifoldu üzerindeki ∇ lineer konneksiyonuna göre paralel, yani g metriği her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_Xg)(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(\nabla_XY, Z) - g(Y, \nabla_XZ) = 0$$

ise ∇ konneksiyonuna metrik konneksiyon denir. Torsiyonsuz ve metrik olan bir lineer konneksiyona Levi-Civita konneksiyonu denir [26].

Teorem 2.1.1. (M, g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerinde torsiyonsuz ve g metriği ile uyumlu ($\nabla g = 0$), yani her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$1) [X, Y] = \nabla_XY - \nabla_YX,$$

$$2) Xg(Y, Z) = g(\nabla_XY, Z) + g(Y, \nabla_XZ)$$

koşullarını sağlayan bir tek ∇ Levi-Civita konneksiyonu vardır. Bu konneksiyon Koszul formülü olarak bilinen

$$2g(\nabla_XY, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \quad (2.1.10)$$

eşitliği ile karakterize edilir [25].

Tanım 2.1.8. (M, g) Riemann manifoldu ve $f: (M, g) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$h_f : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM) \quad (2.1.11)$$

$$X \rightarrow h_f(X) = \nabla_X \nabla f$$

lineer dönüşümüne (M, g) üzerinde f fonksiyonunun Hessiyen tensörü denir. Hessiyen tensörü h_f self-adjointtir, yani $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $g(h_f(X), Y) = g(h_f(Y), X)$ dir [25].

Tanım 2.1.9. (M, g) Riemann manifoldu ve $f: (M, g) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$H_f : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \rightarrow H_f(X, Y) = g(h_f(X), Y) \quad (2.1.12)$$

tensörüne (M, g) üzerinde f fonksiyonunun Hessiyen formu denir. f fonksiyonunun Hessiyen tensörü self-adjoint olduğundan, Hessiyen formu simetriktir [25].

Teorem 2.1.2. (M, g) bir Riemann manifold, $f, k : (M, g) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonlar olsun. $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\Delta(fk) = f\Delta k + k\Delta f - 2g(\nabla f, \nabla k) \quad (2.1.13)$$

dır [25].

Tanım 2.1.10. M , bir diferensiyellenebilir manifold, ∇ da M üzerinde lineer konneksiyon, M manifoldunun bir U açık komşuluğundaki çatı $\{e_1, \dots, e_n\}$ ve $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$ olacak şekildeki dual çatı $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ olsun. Bu durumda

$$\omega_{ij} : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$X \rightarrow \omega_{ij}(X)$$

ve

$$\nabla_X e_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(X) e_j$$

ile tanımlı ω_{ij} 1-formlarına ∇ konneksiyonunun konneksiyon formları denir [25].

Tanım 2.1.11. M bir n boyutlu Riemann manifoldu ve M üzerinde bir U bölgesinde tanımlı bir C^∞ fonksiyon f olsun. Bu durumda f fonksiyonuna bir 0-form ve

$$df(X) = X[f] = \langle \text{grad } f, X \rangle \quad (2.1.14)$$

olarak tanımlanan df 1-formuna f nin U daki dış türevi denir. U üzerinde bir ω 1-formunun $d\omega$ ile gösterilen dış türevi U üzerinde bir 2-formdur ve

$$d\omega(X, Y) = \frac{1}{2} \{X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X, Y])\}$$

biçiminde tanımlanır [27].

Teorem 2.1.3. (M, g) , n -boyutlu bir Riemannian manifold, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, M üzerinde bir ortonormal çatı ve $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ de bu çatıya karşılık gelen dual çatı olsun. Diferensiyel 1-formları cinsinden torsiyon tensörü ve eğrilik tensörünü ifade edebiliriz. Buna göre torsiyon tensörü ve eğrilik tensörü her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$T(X, Y) = \sum_{i=1}^n T_i(X, Y) e_i, \quad T_i(X, Y) = g(T(X, Y), e_i),$$

$$R(X, Y) e_j = \sum_{i=1}^n R_{ij}(X, Y) e_i, \quad R_{ij}(X, Y) = g(R(X, Y) e_j, e_i)$$

olarak ifade edilir. Ayrıca

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^n \omega_i \wedge \omega_{ij} + T_i,$$

ve

$$d\omega_{ij} = - \sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + R_{ij}$$

dir. Bu denklemlere Cartan Yapı Denklemleri denir [25]. $\mathbb{R}^{n+1}$ deki bir M hiperyüzeyi için yapı denklemleri

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^n \omega_i \wedge \omega_{ij} \quad (2.1.15)$$

ve

$$d\omega_{ij} = - \sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \quad (2.1.16)$$

olur.

Tanım 2.1.12. $(\bar{M}, \bar{g})$ bir yarı-Riemannmanifold ve $\bar{\nabla}$ manifold üzerindeki konneksiyon olsun. Bu durumda

$$\bar{R} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$(X, Y, Z) \rightarrow \bar{R}(X, Y)Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z$$

şeklinde tanımlı $\bar{R}$, $(3, 1)$ –tensör alanına $\bar{\nabla}$ lineer konneksiyonun eğrilik tensörü denir. Eğer $\bar{R} = 0$ ise, M manifolduna flattır (düzdür) denir [22].

Önerme 2.1.1. $X, Y, Z, W \in \Gamma(T\bar{M})$ için Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar [22];

- 1) $\bar{R}(X, Y) = -R(X, Y)$,
- 2) $\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = -\langle \bar{R}(X, Y)W, Z \rangle$,
- 3) $\bar{R}(X, Y)Z + \bar{R}(Y, Z)X + \bar{R}(Z, X)Y = 0$,
- 4) $\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = -\langle \bar{R}(Z, W)X, Y \rangle$.

Burada 3. özelliğe birinci Bianchi özdeşliği denir.

Tanım 2.1.13. $(\bar{M}, \bar{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $p \in \bar{M}$ noktasında bir Π tanjant düzlemi $X, Y \in T_p\bar{M}$ vektörleri tarafından gerilsin, yani $\Pi = Sp\{X, Y\}$ olsun. Buna göre

$$K(\Pi) = K(X, Y) = \frac{\langle \bar{R}(X, Y)X, Y \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \quad (2.1.17)$$

reel sayısına Π nin kesit eğriliği denir [22].

$K(\Pi)$ kesit eğriliği Π düzleminin bazının seçilişinden bağımsızdır. $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$ için $K(X, Y)$ ye $\bar{M}$ nin kesit eğriliği denir.

Eğer $K = 0$ ise $\bar{R} = 0$ dır [22]. Eğer $\bar{M}$ nin kesit eğriliği $K = c$ şeklinde bir sabit ise $\bar{M}$ ye sabit eğrilikli uzay veya uzay form denir. Eğer $\bar{M}$ bir uzay form ise $X, Y, Z \in \Gamma(T\bar{M})$ için

$$\bar{R}(X, Y)Z = c\{\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X\} \quad (2.1.18)$$

olarak yazılır [22].

Tanım 2.1.14. $(\bar{M}, \bar{g})$, n –boyutlu yarı-Riemann manifoldu ve $\bar{M}$ üzerinde bir ortonormal çatı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} Ric : \Gamma(T\bar{M}) \times \Gamma(T\bar{M}) &\rightarrow C^\infty(\bar{M}, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\rightarrow Ric(X, Y) = \text{iz}(\bar{R}(\cdot, X, Y, \cdot)) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(\bar{R}(e_i, X)Y, e_i) \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

şeklinde tanımlanan $(0, 2)$ tipindeki tensöre Ricci tensörü denir ve Ric ile gösterilir. Eğer Ricci tensörü $Ric = 0$ ise $\bar{M}$ manifolduna Ricci flattır denir [28].

2.1.1 Yarı-Riemann Altmanifoldları

Tanım 2.1.15. $(\bar{M}, \bar{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve M de bir diferensiyellenebilir manifold olsun. $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ diferensiyellenebilir dönüşümünün türev dönüşümü bire-bir ise φ ye bir immersiyon denir. $n = \text{boy}M < \text{boy}\bar{M} = m$ olmak üzere φ bir immersiyon ise M ye $\bar{M}$ nin yarı-Riemann altmanifoldu denir [22].

Bu tanıma göre $g = \varphi^* \bar{g}$ olmak üzere (M, g) bir yarı-Riemann manifolddur. Her $p \in M$ için $T_{\varphi(p)} \bar{M}$

$$T_{\varphi(p)} \bar{M} = d\varphi(T_p M) \oplus d\varphi(T_p M)^\perp$$

olarak yazılır. Ayrıca $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(X, Y) = \bar{g}(d\varphi X, d\varphi Y)$$

dır ve φ bir izometrik immersiyondur.

Tanım 2.1.16. $M, \bar{M}$ yarı-Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun ve $\bar{M}$ üzerindeki $\bar{g}$ metrik tensörünün, M altmanifolduna indirgenmesiyle elde edilen $g = \bar{g}|_M$ tensörü göz önüne alınsın. M altmanifoldunun bir p noktasındaki sıfırdan farklı her $w \in T_p(M)$ teğet vektörü için $g_p(w, v) \neq 0$ olacak şekilde bir $v \in T_p(M)$ teğet vektörü varsa, g indirgenmiş metrik tensörüne, p noktasında non-dejenere denir. Eğer g , M üzerindeki her noktada non-dejenere metrik tensörse ve indeksi M manifoldunun her noktasında aynıysa, M altmanifolduna $\bar{M}$ yarı-Riemann manifoldunun bir yarı-Riemann altmanifoldu denir [22].

Tanım 2.1.17. $(\bar{M}, \bar{g})$ bir n -boyutlu yarı-Riemann manifoldu $\bar{M}$ nin bir $(n-1)$ -boyutlu altmanifoldu M ye, $\bar{M}$ nin hiperyüzeyi denir. Eğer M , 2-boyutlu ise M ye $\bar{M}$ de yüzey denir [22]. $M, \bar{M}$ de bir hiperyüzey ise M nin normal uzayı 1-boyutludur ve M nin normal uzayını geren birim vektör alanına M nin birim normal vektör alanı denir.

$M, \bar{M}$ de bir hiperyüzey ve N de M nin birim normal vektör alanı ise

$$f = \frac{1}{n} \text{iz} A_N$$

olmak üzere

$$H = fN \tag{2.1.20}$$

olarak ifade edilir. $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ immersiyonunda $H = 0$ ise φ ye minimal immersiyon denir [25]. Eğer H normal demette paralel ise, yani $\nabla^\perp H = 0$ ise M ye paralel ortalama eğrilikli (Parallel

Mean Curvature, (PMC)) altmanifold denir. Eğer H nin normu sabit ise M ye sabit ortalama eğrilikli (Constant Mean Curvature, (CMC)) altmanifold denir. Eğer

$$A_H = |H|^2 I \quad (2.1.21)$$

ise M ye pseudo-umbulic altmanifold denir.

Tanım 2.1.18. $(\bar{M}, \bar{g})$ bir yarı-Riemann manifoldu $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu M olsun. Her $p \in M$ için

$$T_p M^\perp = \{V_p \in T_p(\bar{M}) : g(X_p, V_p) = 0, X_p \in T_p M\}$$

tanımlanan altuzayına M nin normal uzayı denir. V_p vektörüne M nin normal vektörü ve V_p nin birim vektör olması halinde V_p vektörüne M nin birim normal vektörü denir. p noktasında $T_p M$ uzayına dik olan tamamlayan uzayı $T_p M^\perp$ uzayına normal uzay, M nin tüm normal vektörlerini içeren $TM^\perp$ uzayına da M nin normal demeti adı verilir. Normal vektör alanlarının kümesi $\Gamma(TM^\perp)$ veya $\chi(M^\perp)$ ile gösterilir [25].

$(\bar{M}, \bar{g})$ bir Riemann manifoldu ve (M, g) de $\bar{M}$ de bir altmanifold olsun. $\bar{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonunu $\bar{\nabla}$ ve M üzerindeki indirgenmiş konneksiyon da ∇ olmak üzere Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla, $X, Y \in \Gamma(TM)$, $V \in \Gamma(TM^\perp)$ için,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad (2.1.22)$$

ve

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^\perp V, \quad (2.1.23)$$

olarak tanımlanır. Burada $\nabla_X Y$, $A_V X \in \Gamma(TM)$ ve $h(X, Y)$, $\nabla_X^\perp V \in \Gamma(TM^\perp)$ dir. Ayrıca burada h ya M nin ikinci temel formu, A_V ye de M nin V ye göre Weingarten dönüşümü veya şekil operatörü ve $\nabla^\perp$ e de M nin normal konneksiyonu denir [25]. İkinci temel form $h = 0$ ise M ye total geodezik altmanifold denir. $A_V = \lambda I$ ise M ye V ye göre umbuliktir ve eğer her $V \in \Gamma(TM^\perp)$ için M umbulik ise M ye total umbulik denir. (2.1.2) ve (4.1.2) denklemlerinden kolayca görülürki $\langle A_V X, Y \rangle = \langle h(X, Y), V \rangle$ dir. $(\bar{M}, \bar{g})$ nin eğrilik tensörü $\bar{R}$, (M, g) altmanifoldunun eğrilik tensörü de R olmak üzere, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$\bar{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z - A_{h(Y, Z)}X + A_{h(X, Z)}Y + (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) \quad (2.1.24)$$

dir ve bu denkleme Gauss denklemi denir, burada $(\nabla_X h)(Y, Z) = \nabla_X^\perp h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$ dir [25]. (2.1.24) denklemin normal kısmı olan

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) \quad (2.1.25)$$

denkleline Codazzi denklemi denir.

Tanım 2.1.19. M ve $\overline{M}$ sırasıyla n ve m -boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere $M, \overline{M}$ nin altmanifoldu olsun. M üzerindeki bir $p \in M$ için $T_p M$ nin lokal ortonormal çatısı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. Bu durumda

$$H = \frac{1}{n} \text{tr} h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i) \quad (2.1.26)$$

biçiminde tanımlı H vektör alanına M nin ortalama eğrilik vektör alanı denir. Eğer $H = 0$ ise M ye minimal altmanifold denir [25].

2.1.2 Yarı-Öklid Uzayının Altmanifoldları, Yüzeyleri ve Hiperyüzeyleri

Bu alt bölümde $\mathbb{R}_v^m$ yarı-Öklid uzayında altmanifoldlar, $v = 1, m = n + 1$ alınarak $\mathbb{R}_1^{n+1}$ Minkowski uzayındaki M hiperyüzeyleri ve $v = 0, m = 4$ alınarak, $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayındaki M yüzeyleri için temel geometrik kavramları vereceğiz.

Tanım 2.1.20. $\mathbb{R}_v^m$ uzayı, üzerindeki metrik tensör

$$g = \langle, \rangle = - \sum_{i=1}^v dx_i^2 + \sum_{j=v+1}^m dx_j^2 \quad (2.1.27)$$

şeklinde tanımlı olan m -boyutlu, v indisli yarı-Öklid uzayı olarak adlandırılır. Burada, $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\mathbb{R}_v^m$ uzayındaki bir Kartezyen koordinat sistemidir. Ayrıca eğer $v = 0$ ise, $\mathbb{R}_0^m = \mathbb{R}^m$ uzayı Öklid uzayı olarak, eğer $v = 1$ ise, $\mathbb{R}_1^m$ uzayı Minkowski uzayı olarak adlandırılır [22].

Özel olarak, $c_0 \in \mathbb{R}_v^m$ ve $r > 0$ olmak üzere, eğrilikleri, sırasıyla, r^2 ve $-r^2$ olan $\mathbb{S}_v^{m-1}(c_0, r^2)$ ve $\mathbb{H}_{v-1}^{m-1}(c_0, -r^2)$ tam uzayları, sırasıyla,

$$\mathbb{S}_v^{m-1}(c_0, r^2) = \{x \in \mathbb{R}_v^m : \langle x - c_0, x - c_0 \rangle = r^2\}, \quad (2.1.28)$$

$$\mathbb{H}_{v-1}^{m-1}(c_0, -r^2) = \{x \in \mathbb{R}_v^m : \langle x - c_0, x - c_0 \rangle = -r^2\} \quad (2.1.29)$$

şeklinde tanımlanır. Genel görelilik kuramında, $\mathbb{R}_1^4, \mathbb{S}_1^4(c_0, r^2)$ ve $\mathbb{H}_1^4(c_0, r^2)$ uzaylarına, sırasıyla, Minkowski, de Sitter ve anti-de Sitter space-time olarak isimlendirilir. $c_0 = 0$ olması durumunda bu uzaylar $\mathbb{S}_v^{m-1}(r^2)$ ve $\mathbb{H}_{v-1}^{m-1}(-r^2)$ ile gösterilir. Ayrıca, $v = 1$ olması durumunda

$$\mathbb{H}^{m-1}(-r^2) = \{x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}_1^m : \langle x, x \rangle = -r^2 \text{ ve } x^0 > 0\}$$

ile verilen $\mathbb{H}^{m-1}(-r^2)$ uzayına hiperbolik uzay denir [29].

Tanım 2.1.21. $\mathbb{R}_v^m$ yarı-Öklid uzay ve üzerindeki metrik $g = \langle, \rangle$, olmak üzere,

i) $\Gamma_N = \{v \in (\mathbb{R}_V^m - \{0\}) : \langle v, v \rangle = 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_N kümesine $\mathbb{R}_V^m$ nün lightlike (null) konisi,

ii) $\Gamma_S = \{v \in \mathbb{R}_V^m : \langle v, v \rangle \geq 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_N kümesine $\mathbb{R}_V^m$ nün spacelike konisi,

iii) $\Gamma_T = \{v \in (\mathbb{R}_V^m - \{0\}) : \langle v, v \rangle < 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_N kümesine $\mathbb{R}_V^m$ nün timelike konisi denir [22], [30].

Tanım 2.1.22. $\mathbb{R}_V^m$ yarı-Öklid uzayındaki bir yüzey için, eğer üzerindeki metrik tensör

*pozitif tanımlı ise, spacelike yüzey,

*indisi bir ise timelike yüzey,

*dejenere ise lightlike yüzey

olarak adlandırılır. Başka bir deyişle, eğer yüzeyin her bir p noktasındaki normal vektörü timelike, spacelike veya lightlike ise sırasıyla, spacelike, timelike veya lightlike yüzey olarak adlandırılır [22], [30]. Ayrıca, yüzey üzerindeki teğet vektörlerin tamamı spacelike ise yani yüzeyin indisi 0 ise, bu takdirde yüzeye spacelike yüzey denir.

M , $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında yönlendirilmiş, regüler bir yüzey olsun. $\{e_1, e_2; e_3, e_4\}$, M yüzeyi üzerinde tanımlı ortonormal çatı alanı ve $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ise, bu çatı alanına karşılık gelen dual çatı alanı olsun. Ayrıca $\bar{\nabla}, \nabla, \nabla^\perp$ ile sırasıyla, $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayının Levi-Civita konneksiyonu, M yüzeyi üzerindeki indirgenmiş konneksiyon ve M yüzeyinin normal konneksiyonu gösterilsin. Gauss ve Weingarten formülleri sırasıyla

$$\bar{\nabla}_{e_j} e_i = \sum_{k=1}^2 \omega_{ik}(e_j) e_k + h_{ij}^3 e_3 + h_{ij}^4 e_4, \quad (2.1.30)$$

$$\bar{\nabla}_{e_i} e_\beta = -h_{1i}^\beta e_1 - h_{i2}^\beta e_2 + \sum_{\gamma=3}^4 \omega_{\beta\gamma}(e_i) e_\gamma, \quad i, j = 1, 2, \quad \beta = 3, 4 \quad (2.1.31)$$

şeklinde. Burada $\{\omega_{BC}\}$, $B, C = 1, 2, 3, 4; \{e_1, e_2; e_3, e_4\}$ çatı alanına karşı gelen konneksiyon formları, $\omega_{BC}(X) = \langle \bar{\nabla}_X e_B, e_C \rangle$ şeklinde tanımlanır ve $\omega_{BC} + \omega_{CB} = 0$ eşitliklerini sağlar. $h_{ik}^\beta = \langle h(e_i, e_k), e_\beta \rangle$ ise, M yüzeyinin ikinci temel formunun bileşenleridir.

M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü,

$$H = \frac{1}{2} i z A_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\beta, i} h_{ii}^\beta e_i,$$

şeklinde tanımlanır. Ortalama eğriliği ise,

$$\mathbf{H} = \|H\|$$

şeklindedir.

M yüzeyinin Gauss eğriliği,

$$K = \det A_\beta = \sum_{\beta=3}^4 \left(h_{11}^\beta h_{22}^\beta - (h_{12}^\beta)^2 \right),$$

şeklinde tanımlanır [31].

Diğer taraftan $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayındaki M yüzeyleri için üstteki denklemlerde $\bar{R} = 0$ olacağından, (2.1.24) den Gauss ve Codazzi denklemleri, sırasıyla,

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle h(Y, Z), h(X, W) \rangle - \langle h(X, Z), h(Y, W) \rangle, \quad (2.1.32)$$

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z). \quad (2.1.33)$$

Burada R , yüzeyin ∇ konneksiyonu ile ilişkili eğrilik tensörüdür ve ∇h ,

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = \nabla_X^\perp h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \quad (2.1.34)$$

şeklindedir [25]. Ayrıca,

$$R^\perp(e_j, e_k; e_\beta, e_\gamma) = \langle [A_\beta, A_\gamma](e_j), e_k \rangle = \sum_{i=1}^2 \left(h_{ik}^\beta h_{ij}^\gamma - h_{ij}^\beta h_{ik}^\gamma \right), \quad i, j, k = 1, 2, \beta, \gamma = 3, 4$$

şeklindedir. Burada $R^\perp$, yüzeyin $\nabla^\perp$ konneksiyonu ile ilişkili normal eğrilik tensörü, A_β ise e_β vektörü doğrultusundaki Weingarten dönüşümüdür.

Eğer $R^\perp = 0$ ise, M yüzeyinin normal konneksiyonu flattır denir. Son denklem ile verilen Ricci denkleminden dolayı, bu koşul bu yüzeyin tüm şekil operatörlerinin aynı anda köşegenleştirilebilir olmasına denktir [31].

Tanım 2.1.23. M , $\mathbb{R}_1^{n+1}$ Minkowski uzayında yönlendirilmiş bir hiperyüzey, $x : M \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ bir izometrik immersiyon ve N de bu hiperyüzeyin birim normal vektör alanı olsun. Eğer, M üzerindeki indirgenmiş metrik $g = \tilde{g}|_M$, pozitif tanımlı (indisi bir) ise x immersiyonu spacelike (timelike) immersiyon olarak adlandırılır. Diğer taraftan, M hiperyüzeyinin her bir noktasındaki birim normal vektör alanı N nin timelike (spacelike) bir vektör alanı olması, yine x immersiyonunun spacelike (timelike) olmasına denktir. Ayrıca, eğer g indirgenmiş metriğinin indisi bir ise, x immersiyonuna spacelike immersiyon denir [22].

$\mathbb{R}_1^{n+1}$ Minkowski uzayının n -boyutlu bir M^n hiperyüzeyini göz önüne alalım ve bu hiperyüzey üzerinde bir ortonormal çatı $\{e_1, e_2, \dots, e_n; N\}$ olsun öyle ki $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektör alanları, M hiperyüzeyine teğet; N ise bu hiperyüzeyin birim normal vektör alanı olsun.

Tez boyunca ε_i ile o anda söz konusu olan ortonormal bazdaki e_i vektörünün normu gösterilecektir, yani $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$ dir. Özel olarak, e_i vektör alanı spacelike ise $\varepsilon_i = 1$, timelike ise $\varepsilon_i = -1$ dir.

Ayrıca $\langle N, N \rangle = \varepsilon$ olmak üzere, $\varepsilon = 1$ ise M timelike, $\varepsilon = -1$ ise M spacelikedir.

∇ ve $\bar{\nabla}$ sırasıyla M^n in ve $\mathbb{R}_1^{n+1}$ in Levi-Civita konneksiyonu olsun $X, Y \in \Gamma(TM)$ teğet vektörler ve $N \in \Gamma(TM)^\perp$ normal vektörler olmak üzere, Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (2.1.35)$$

$$\bar{\nabla}_X N = -AX \quad (2.1.36)$$

şeklinde, burada h ve A sırasıyla, hiperyüzeyin ikinci temel formu ve şekil operatörüdür. Ayrıca A şekil operatörü ve h ikinci temel formu arasındaki ilişki

$$\langle AX, Y \rangle = \langle h(X, Y), N \rangle \quad (2.1.37)$$

şeklinde.

Ayrıca, $\mathbb{R}^3$ de bir M yüzeyi $x = x(u, v)$ şeklinde parametrelendirilmiş olsun. Bu durumda M nin tanjant demeti $\{X_u, X_v\}$ ile gerilir ve M nin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

şeklinde tanımlanır [27].

Diğer yandan, $\mathbb{R}_1^{n+1}$ Minkowski uzayındaki M hiperyüzeyleri için Gauss ve Codazzi denklemleri sırasıyla, (2.1.32) ve (2.1.33) dür.

M hiperyüzeyinin şekil operatörü A olsun M üzerinde bir ortonormal çatı alanı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olmak üzere A nın eigen değerleri M nin bir p noktasındaki asli eğrilikleri olarak adlandırılır ve k_i lerle gösterilir. Asli eğriliklere karşılık gelen ve eigen vektör denen vektörlerin belirttiği doğrultulara da M nin p noktasındaki asli eğrilik doğrultuları denir. Bu durumda $Ae_i = k_i e_i$ dir ve buna Rodrigues formülü denir.

Rodrigues formülünden görülür ki M hiperyüzeyi spacelike ise o zaman A şekil operatörü köşegenleştirilebilir. Eğer M hiperyüzeyi timelike ise o zaman şekil operatörü köşegenleştirilemeyebilir.

Ayrıca $\mathbb{R}^{n+1}$ in bir M hiperyüzeyinin şekil operatörü A , M nin bir asli çatısı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ve bu asli çatıya karşılık gelen asli eğrilikler $k_1, \dots, k_n$, yani $Ae_i = k_i e_i$ $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

Codazzi denklemleri

$$e_i(k_j) = \omega_{ij}(e_j)(k_i - k_j) \quad (2.1.38)$$

$$\omega_{ij}(e_l)(k_i - k_j) = \omega_{il}(e_j)(k_i - k_l) \quad (2.1.39)$$

dir, burada $\omega_{ij} = \langle \nabla_{e_l} e_i, e_j \rangle$ şeklinde tanımlı konneksiyon 1-formlardır [32].

Tanım 2.1.24. Bir $p \in M$ noktasında Gauss dönüşümünün diferensiyeli $dN_p : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ olsun. dN_p dönüşümünün determinantına M yüzeyinin p noktasındaki Gauss eğriliği denir ve K ile gösterilir. $H = \frac{1}{n} \text{Iz}(dN_p)$ ye M yüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriliği denir. Buna göre asli eğrilikler cinsinden

$$K = k_1 k_2 \cdots k_n, \quad H = \frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}{n}$$

olarak yazılabilir. $H = 0$ ise M yüzeyi minimaldir ve $K = 0$ ise M yüzeyine flattır denir [27].

Tanım 2.1.25. M , bir n -boyutlu manifold ve M nin bir p noktasındaki tanjant uzayı $T_p(M)$ olsun. M üzerinde bir r -boyutlu D distribüsyonu, M nin her bir p noktasını r -boyutlu altuzayına götüren dönüşümdür. Yani,

$$D : M \rightarrow T_p(M)$$

$$p \rightarrow D_p \subset T_p(M)$$

ile tanımlı D dönüşümüne M üzerinde bir distribüsyon denir. Her $X \in \Gamma(TM)$ için $p \in M$ olmak üzere $X_p \in D_p$ ise X vektör alanına D distribüsyonuna aittir denir. Eğer her p noktası için D ye ait r tane diferensiyellenbilir lineer bağımsız vektör var ise D ye diferensiyellenebilir distribüsyon denir [25].

Tanım 2.1.26. M bir C^∞ -manifold ve D , M üzerinde q -boyutlu bir C^∞ -distribüsyon olsun. $\overline{M}$, M manifoldunun bir altmanifoldu olmak üzere eğer $\overline{M}$ nin her p noktasında, $\overline{M}$ nin tanjant uzayı ile D_p aynı olacak şekilde M nin bir $\overline{M}$ altmanifoldu var ise bu altmanifolda D nin integral altmanifoldu denir. Bu durumda

$$f : \overline{M} \rightarrow M$$

bir imbedding olmak üzere her $p \in \overline{M}$ için

$$f_*(T_p(\overline{M})) = D_p$$

dir [25]. Her $X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonuna involutivedir denir.

Tanım 2.1.27. M , n boyutlu bir C^∞ —manifold ve $\bar{M}$, M manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer, her $p \in \bar{M}$ için D distribüsyonunun p noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa D distribüsyonuna integrallenebilirdir denir [25].

Bir integrallenebilir distribüsyonun, involutive olduğu açıktır. Bunun tersi de aşağıdaki teoremden verilmiştir:

Teorem 2.1.4. (Lokal Frobenius Teoremi) M , n boyutlu bir C^∞ —manifold ve D bu manifold üzerinde r -boyutlu bir distribüsyon olsun. Eğer D distribüsyonu involutive ise integrallenebilirdir [25].

Bu teoremin sonuçlarından ilki aşağıdadır:

Lemma 2.1.1. M , n boyutlu bir manifold olmak üzere, eğer D ve $D^\perp$, M manifoldunun her bir noktasında birbirini tamamlayan birer involutive distribüsyon iseler, o zaman M manifoldunun her bir noktasında, D ve $D^\perp$ distribüsyonlarının, sırasıyla, $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right)$ ve $\left(\frac{\partial}{\partial x_{p+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ birer lokal baz olacak şekilde bir $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lokal koordinat sistemi vardır [33].

Bu teoremden özel olarak $n = 2$ alınarak aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 2.1.2. M , 2 boyutlu bir manifold olsun. $X, Y \in \Gamma(TM)$ vektör alanları,

1) X ve Y vektör alanları lineer bağımsız,

2) $[X, Y] = 0$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda $X = \frac{\partial}{\partial s}$, $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ olacak şekilde bir lokal koordinat sistemi (s, t) vardır.

Lemma 2.1.3. M , $\mathbb{R}_V^m$ yarı Öklid uzayında bir spacelike n —manifold ve $x : M \rightarrow \mathbb{R}_V^m$ bir izometrik immersiyon olsun. Bu taktirde. x^T , x yer vektörünün teğet bileşeni olmak üzere, $U : \{p \in M : x^T \neq 0\}$ altkümesi üzerinde tanımlı, $D = \{X \in T_p M : \langle X, x^T \rangle = 0\}$ distribüsyonu integrallenebilirdir [34].

2.1.3 Riemann Manifoldları Arasında Harmonik ve Biharmonik Dönüşümler

Tanım 2.1.28. (M, g) ve $(N, \bar{g})$ diferensiyellenebilir Riemann manifoldlar olmak üzere

$$\varphi : M \rightarrow N$$

bir dönüşüm olsun. Bu durumda φ dönüşümünün ikinci temel formu

$$\begin{aligned} \nabla d\varphi : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(\varphi^{-1}TN) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla d\varphi(X, Y) = (\nabla_X d\varphi)(Y) = \nabla_X d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_X^M Y) \end{aligned} \quad (2.1.40)$$

şeklinde tanımlanır, burada ∇^φ pull-back konneksiyonu ve ∇^M de M üzerindeki konneksiyondur [35].

Tanım 2.1.29. (M, g) ve $(N, \bar{g})$ Riemann manifoldlar ve

$$\varphi : M \rightarrow N$$

bir C^∞ -dönüşüm olsun. $\{e_1, \dots, e_m\}$, M nin bir ortonormal çatısı olmak üzere

$$\tau(\varphi) = \operatorname{div} d\varphi = \sum_{i=1}^m \nabla d\varphi(e_i, e_i) \quad (2.1.41)$$

şeklinde tanımlı $\tau(\varphi)$ ye φ nin tensiyon alanı denir [35].

Tanım 2.1.30. (M, g) ve $(N, \bar{g})$ Riemann manifoldlar ve

$$\varphi : M \rightarrow N$$

bir C^∞ -dönüşüm olsun. Bu durumda her $p \in M$ için

$$e(\varphi) : M \rightarrow [0, \infty], \quad e(\varphi)_p = \frac{1}{2} |d\varphi_p|^2 \quad (2.1.42)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona φ nin enerji yoğunluğu denir [35]. $\{e_1, \dots, e_m\}$, $T_p M$ nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$|d\varphi_p|^2 = \sum_{i=1}^m \bar{g}(d\varphi_p(e_i), d\varphi_p(e_i))$$

ile tanımlı Hilbert-Schmidt normudur.

Tanım 2.1.31. (M, g) ve $(N, \bar{g})$ Riemann manifoldlar olmak üzere M nin her kompakt D bölgesi üzerinde tanımlı

$$E(\varphi; D) = \int_U e(\varphi) V_g = \frac{1}{2} \int_U |d\varphi_p|^2 dV_g \quad (2.1.43)$$

fonksiyonuna φ nin enerji integrali denir [35].

Tanım 2.1.32. (M, g) ve $(N, \bar{g})$ Riemann manifoldları ve $C^\infty(M, N) = \{\varphi \mid \varphi : M \rightarrow N, C^\infty\text{-dönüşüm}\}$ olmak üzere M nin bütün D kompakt bölgeleri üzerinde

$$E(\cdot; U) : C^\infty(M, N) \rightarrow \mathbb{R}$$

ile tanımlı enerji fonksiyonelinin bir kritik noktası $\varphi \in C^\infty(M, N)$ ise φ ye harmonik dönüşüm denir [35].

Teorem 2.1.5. *Riemann manifoldları arasında bir C^∞ , $\varphi : M \rightarrow N$ dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter şart $\tau(\varphi) = 0$ olmasıdır [35].*

Önerme 2.1.2. *Rieman manifoldları arasında*

$$\varphi : M \rightarrow N$$

bir izometrik immersiyon olmak üzere

$$\tau(\varphi) = \text{iz}B = (\text{boy}M)H$$

dır. O halde izometrik immersiyonun harmonik olması için gerek ve yeter şart izometrik immersiyonunun minimal olmasıdır, yani $H = 0$ olmasıdır [35].

Tanım 2.1.33. *Riemann manifoldları arasındaki bir C^∞ dönüşüm $\varphi : M \rightarrow N$ olmak üzere*

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^\varphi(\tau(\varphi)) - \text{iz}R^N(d\varphi(-), \tau(\varphi))d\varphi(-) \quad (2.1.44)$$

ile tanımlı fonksiyona φ nin bitensiyon alanı denir. Burada Δ^φ , φ nin Laplasyan dönüşümü ve R^N de N nin Riemann eğrilik tensörüdür [35].

Eğer $\tau_2(\varphi) = 0$ ise φ ye biharmonik dönüşüm denir ve ayrıca

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^\varphi(\tau(\varphi)) - \text{iz}R^N(d\varphi(-), \tau(\varphi))d\varphi(-) = 0$$

dönüşümüne de φ nin biharmonik denklemi denir.

Bu tanıma göre her harmonik dönüşüm biharmonik dönüşümdür; fakat tersi her zaman doğru değildir.

M bir kompakt diferensiyellenebilir manifold olmak üzere $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\text{boy}M = m \leq n$, dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda φ nin tensiyon alanı

$$\tau(\varphi) = \Delta^m(\varphi) \quad (2.1.45)$$

olur, burada Δ^m , M üzerindeki Laplasyandır. $\Delta^m(\varphi) = -mH$ olduğundan φ nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart $\Delta^2(\varphi) = 0$ veya $\Delta H = 0$ olmasıdır. O halde $\Delta H = 0$ ise M ye biharmonik altmanifold denir. Böylece $\mathbb{R}^n$ de minimal ve sabit ortalama eğrilikli altmanifoldlar biharmonik altmanifoldlardır. φ immersiyonu için $\Delta^2\varphi$ ifadesini teğet ve normal bileşenlerine ayırarak olursak

$$\Delta^2\varphi = (\Delta^2\varphi)^\top + (\Delta^2\varphi)^\perp \quad (2.1.46)$$

şekinde yazabiliriz.

Tanım 2.1.34. $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\dim M = m \leq n$, bir izometrik immersiyon olsun. Eğer $\langle \tau_2(\varphi), d\varphi \rangle = 0$ ise M ye **bikonservatif** altmanifold denir [36].

Bu tanıma göre M nin bikonservatif olması için gerek ve yeter şart (2.1.46) da $(\Delta^2 x)^\top = 0$ olmasıdır.



3. ÖKLİD UZAYLARINDA BİKONSERVATİF HİPERYÜZEYLER

Bu bölümde ilk önce 4–boyutlu Öklid uzayında hiperyüzeylerin ve 3– boyutlu Öklid uzayında da yüzeylerin bikonservatif olma durumları incelenecektir. Daha sonra genel olarak herhangi bir boyutta ($n \geq 4$) üç farklı asli eğriğe sahip olan hiperyüzeylerin bikonservatifliği incelenecektir. Bunun için de m –boyutlu Öklid uzayında herhangi bir altmanifoldun bazı geometrik özelliklerine ihtiyacımız olacaktır ve şimdi bunları verelim.

3.1 Öklid Uzayında Biharmonik Altmanifoldlar

M bir bağlantılı diferensiyellenebilir manifold olmak üzere $x : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir immersiyon olsun, yani M , $\mathbb{R}^m$ Öklid uzayının n –boyutlu altmanifoldu olsun. M üzerideki Laplasyan operatörü Δ , M nin $\mathbb{R}^m$ de yer vektörü x ve immersiyonun ortalama eğrilik vektörü H olmak üzere

$$\Delta x = -nH \quad (3.1.1)$$

dır. Gerçekten de M üzerinde $\nabla e_i e_j = 0$ olacak şekilde bir ortonormal çatı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olmak üzere bir $p \in M$ noktasında

$$(\Delta x)_p = \sum_{i=1}^n \left(\bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} x - \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} x \right)_p = \sum_{i=1}^n \left(\nabla_{e_i} e_i - \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right)_p$$

olur. Gauss formülü(2.1.22) den

$$(\Delta x)_p = - \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i)_p = -nH_p$$

olarak elde edilir. Buradan (3.1.1) eşitliği elde edilmiş olur [8].

Böylece $\mathbb{R}^m$ de bir altmanifoldun minimal olması için gerek ve yeter şart x in koordinat fonksiyonlarının harmonik olmasıdır. O halde (3.1.1) den görülür ki $\mathbb{R}^m$ in her minimal altmanifoldunda

$$\Delta x = 0 \quad (3.1.2)$$

dır [8].

Tanım 3.1.1. $x : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir izometrik immersiyon olsun. Eğer

$$\Delta^2 x = 0 \text{ yani } \Delta H = 0 \quad (3.1.3)$$

ise M ye **biharmonik altmanifold** denir [8].

Bu tanıma göre de açık olarak minimal immersiyonlar biharmoniktir. 3-boyutlu Öklid uzayında biharmonik yüzeyler sadece minimal yüzeylerdir [8]. Bu durumda şu önemli bir soru olur. Acaba $\mathbb{R}^4$ de biharmonik hiperyüzeyler nasıl olur? Yani onlar da minimal olmak zorunda mıdır?

Şimdi $M, \mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayında bir diferensiyellenebilir hiperyüzey ve birim normal vektör alanı da N olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin ortalama eğrilik vektör alanı

$$H = \mathbf{H}N \quad (3.1.4)$$

olarak yazılır, burada $\mathbf{H}$ hiperyüzeyin ortalama eğriliğidir.

Lemma 3.1.1. $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir M hiperyüzeyinin ortalama eğriliğinin Laplasyanı

$$\Delta H = 2A \operatorname{grad} \mathbf{H} + n\mathbf{H} \operatorname{grad} N + (\Delta \mathbf{H} + S\mathbf{H})N \quad (3.1.5)$$

dir, burada $\mathbf{H}$ ortalama eğrilik ve S de ikinci temel formun karesidir [1].

İspat: M hiperyüzeyi üzerinde bir ortonormal çatı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. Bu durumda Laplasyanın (2.1.6) ifadesini (3.1.4) denkemine uygularsak

$$\Delta H = \Delta(\mathbf{H}N) = (\Delta \mathbf{H})N + \mathbf{H}\Delta N - 2 \sum_{i=1}^n e_i(\mathbf{H}) \bar{\nabla}_{e_i} N \quad (3.1.6)$$

elde edilir. Weingarten formülü (2.1.36)dan

$$\begin{aligned} \Delta H &= (\Delta \mathbf{H})N + \mathbf{H}\Delta N + 2 \sum_{i=1}^n e_i(\mathbf{H}) A e_i \\ &= (\Delta \mathbf{H})N + \mathbf{H}\Delta N + 2A \sum_{i=1}^n e_i(\mathbf{H}) e_i \\ &= (\Delta \mathbf{H})N + \mathbf{H}\Delta N + 2A \operatorname{grad} \mathbf{H} \end{aligned}$$

olur. Şimdi burada ΔN i hesaplayalım. $\{e_1, \dots, e_n\}$ asli ortonormal çatısına göre A şekil operatörünün asli eğrilikleri k_i , $1 \leq i \leq n$, yani $A e_i = k_i e_i$ olsun. Bu durumda olduğundan (2.1.6) dan

$$\Delta N = \sum_{i=1}^n \left(\bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} N - \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \right)$$

olarak yazılır. Burada Weingarten formülü (2.1.36) kullanılırsa

$$\Delta N = \sum_{i=1}^n \left(-A(\nabla_{e_i} e_i) + \bar{\nabla}_{e_i} A e_i \right)$$

olur. Ayrıca

$$\nabla_{e_i} e_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(e_i) e_j$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\Delta N &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n -\omega_{ij}(e_i) A e_j + \bar{\nabla}_{e_i} A e_i, \quad A e_i = k_i e_i, \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n -\omega_{ij}(e_i) k_j e_j + e_i(k_i) e_i + k_i \bar{\nabla}_{e_i} e_i\end{aligned}$$

veya

$$\Delta N = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n -\omega_{ij}(e_i) k_j e_j + e_i(k_i) e_i + k_i \omega_{ij}(e_i) e_j + k_i h(e_i, e_i)$$

olur. Sağ taraf düzenlenirse

$$\Delta N = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(e_i) (k_i - k_j) e_j + e_i(k_i) e_i + k_i^2 N$$

elde edilir. Codazzi denkleminde $e_i(k_i) = \omega_{ij}(e_i) (k_i - k_j)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\Delta N &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n e_i(k_i) e_j + e_i(k_i) e_i + k_i^2 N \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(nH) e_i + k_i^2 N\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

sonucuna ulaşılır. Burada $S = \sum_{i=1}^n k_i^2$ denilirse bu ikinci temel formun normunun karesidir. O halde

$$\Delta H = 2A \operatorname{grad} \mathbf{H} + \mathbf{H} \Delta N + (\Delta \mathbf{H}) N$$

ifadesinde (3.1.7) kullanılır ve $\operatorname{grad} \mathbf{H} = \sum_{j=1}^n e_j(\mathbf{H}) e_j$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\Delta H = 2A \operatorname{grad} \mathbf{H} + n\mathbf{H} \operatorname{grad} \mathbf{H} + (\Delta \mathbf{H} + S\mathbf{H}) N$$

olarak elde edilir ve ispat tamamlanır.

$M, \mathbb{R}^{n+1}$ de biharmonik hiperyüzey olsun. Bu durumda M nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart $\Delta H = 0$ olmasıdır ve (3.1.5) denklemini teğet ve normal bileşenlerine ayrılırsa

$$A \operatorname{grad} \mathbf{H} = -\frac{n\mathbf{H}}{2} \operatorname{grad} \mathbf{H} \tag{3.1.8}$$

ve

$$\Delta \mathbf{H} + S\mathbf{H} = 0 \tag{3.1.9}$$

elde edilir. Böylece M hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart (3.1.8) ve (3.1.9) denklemlerinin sağlanmasıdır.

(3.1.8) denklemini sağlayan hiperyüzeyler Tanım 2.1.34 e göre bikonservatif hiperyüzeylerdir. Bikonservatif hiperyüzeylere **H -hiperyüzeyler** de denir. O halde sabit ortalama eğrilikli hiperyüzeyler aşikar olarak H -hiperyüzeylerdir.

3.2 Öklid Uzayında Bikonserve Hiperyüzeyler

Lemma 3.2.1. *M Öklid uzayı $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir bikonservatif hiperyüzey (H -hiperyüzey) olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$\langle AX, \nabla_Y \text{grad } \mathbf{H} \rangle = \langle AY, \nabla_X \text{grad } \mathbf{H} \rangle \quad (3.2.1)$$

dır [1].

İspat: M bir H -hiperyüzey olduğundan

$$A \text{grad } \mathbf{H} = -\frac{n\mathbf{H}}{2} \text{grad } \mathbf{H}$$

dır. Bu ifade

$$A \text{grad } \mathbf{H} = \text{grad} \left(-\frac{n\mathbf{H}^2}{4} \right)$$

olarak yazılır. Bu son ifadenin X ve Y vektör alanlarına göre kovaryant türevleri alınır ve $(\nabla_X A)Y = \nabla_X AY - A(\nabla_X Y)$ veya $\nabla_X AY = (\nabla_X A)Y + A(\nabla_X Y)$ olduğu dikkate alınır

$$(\nabla_X A) \text{grad } \mathbf{H} + A(\nabla_X \text{grad } \mathbf{H}) = \nabla_X \text{grad} \left(-\frac{n\mathbf{H}^2}{4} \right) \quad (3.2.2)$$

ve

$$(\nabla_Y A) \text{grad } \mathbf{H} + A(\nabla_Y \text{grad } \mathbf{H}) = \nabla_Y \text{grad} \left(-\frac{n\mathbf{H}^2}{4} \right) \quad (3.2.3)$$

olarak elde edilir. (3.2.2) denklemi Y ile (3.2.3) denklemi de X ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\langle (\nabla_X A) \text{grad } \mathbf{H}, Y \rangle + \langle A(\nabla_X \text{grad } \mathbf{H}), Y \rangle = \left\langle \nabla_X \text{grad} \left(-\frac{n\mathbf{H}^2}{4} \right), Y \right\rangle$$

ve

$$\langle (\nabla_Y A) \text{grad } \mathbf{H}, X \rangle + \langle A(\nabla_Y \text{grad } \mathbf{H}), X \rangle = \left\langle \nabla_Y \text{grad} \left(-\frac{n\mathbf{H}^2}{4} \right), X \right\rangle$$

olur. Burada ∇A nın simetrik, yani $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için $\langle (\nabla_X A)Y, Z \rangle = \langle Y, (\nabla_X A)Z \rangle$ olduğu ve $Hess \left(-\frac{n\mathbf{H}^2}{4} \right) (X, Y) = \left\langle \nabla_X \text{grad} \left(-\frac{n\mathbf{H}^2}{4} \right), Y \right\rangle = Hess \left(-\frac{n\mathbf{H}^2}{4} \right) (Y, X)$ olduğu göz önüne alınır

$$\langle (\nabla_X A)Y, \text{grad } \mathbf{H} \rangle + \langle A(\nabla_X \text{grad } \mathbf{H}), Y \rangle = Hess \left(-\frac{n\mathbf{H}^2}{4} \right) (X, Y)$$

ve

$$\langle (\nabla_Y A)X, \text{grad } \mathbf{H} \rangle + \langle A(\nabla_Y \text{grad } \mathbf{H}), X \rangle = Hess \left(-\frac{n\mathbf{H}^2}{4} \right) (X, Y)$$

olur. Codazzi denkleminde $(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X$ olduğu ve Hessiyan formun simetrikliği göz önüne alınır (3.2.1) elde edilmiş olur.

Şimdi kabul edelim ki M nin bir açık komşuluğu U üzerinde $\text{grad } \mathbf{H}$ sıfırdan farklı olsun ve $e_n = \frac{\text{grad } \mathbf{H}}{\|\text{grad } \mathbf{H}\|}$ diyelim. (3.1.8) den açık olarak görülür ki e_n , M üzerinde bir asli doğrultu olup buna karşılık gelen asli eğrilik de $-\frac{n\mathbf{H}}{2}$ dir.

Lemma 3.2.2. $M, \mathbb{R}^{n+1}$ de bir H -hiperyüzey olsun, Bu durumda $e_n = \frac{\text{grad } \mathbf{H}}{\|\text{grad } \mathbf{H}\|}$ vektör alanının integral eğrileri geodeziklerdir, eğrilik çizgileridir ve böylece düzlemsel eğrilerdir [1].

İspat: Kabul edelim ki $\nabla_{e_n} e_n$ bir $p_0 \in U$ noktasında sıfırdan farklı olsun. Bu durumda p_0 ın bir $W \subset U$ komşuluğu vardır ve W üzerinde sıfırdan farklıdır. W üzerinde $e_1 = \frac{\nabla_{e_n} e_n}{\|\nabla_{e_n} e_n\|}$ diyelim. $\langle \nabla_{e_n} e_n, e_n \rangle = 0$ olduğundan e_1 ile e_n dik vektörlerdir ve böylece $e_1(\mathbf{H}) = \langle e_1, \text{grad } \mathbf{H} \rangle = 0$ dır. Şimdi $Ae_1 = -\frac{n\mathbf{H}}{2}e_1$ olduğunu ispatlayalım. Gerçekten de,

$$\begin{aligned} \text{grad} \left(-\frac{n\mathbf{H}}{2} \right) &= \text{grad} \langle Ae_n, e_n \rangle = (\nabla_{e_n} A) e_n \\ &= \nabla_{e_n} (Ae_n) - A(\nabla_{e_n} e_n) \\ &= \nabla_{e_n} \left(-\frac{n\mathbf{H}}{2} e_n \right) - A(\nabla_{e_n} e_n) \\ &= -\frac{n}{2} e_n(\mathbf{H}) e_n - \frac{n\mathbf{H}}{2} \nabla_{e_n} e_n - A(\nabla_{e_n} e_n) \end{aligned}$$

elde edilir. $e_n(\mathbf{H}) e_n = \text{grad } \mathbf{H}$ olduğundan

$$A(\nabla_{e_n} e_n) = -\frac{n\mathbf{H}}{2} \nabla_{e_n} e_n$$

olur ve buradan $Ae_1 = -\frac{n\mathbf{H}}{2}e_1$ olduğu sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde

$$\text{grad} \left(-\frac{n\mathbf{H}}{2} \right) = -\frac{n\mathbf{H}}{2} \nabla_{e_1} e_1 - A(\nabla_{e_1} e_1)$$

elde edilir. Bu son denklemi e_n ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\left\langle \text{grad} \left(-\frac{n\mathbf{H}}{2} \right), e_n \right\rangle = 0$$

veya buna denk olan $e_n(\mathbf{H}) = 0$ elde edilir ki bu kabul ile çelişir. Yani $\nabla_{e_n} e_n$, U komşuluğunun her noktasında sıfırdır ve böylece e_n in integral eğrileri geodeziklerdir. Ayrıca açık olarak bu integral eğrileri eğrilik çizgileridir.

Gauss formülü (2.1.35) den

$$\bar{\nabla}_{e_n} e_n = -\frac{n\mathbf{H}}{2} N$$

olur ve Weingarten formülü (2.1.36) dan da

$$\bar{\nabla}_{e_n} N = \frac{n\mathbf{H}}{2} e_n$$

olur.

$p \in U$ noktasında $e_n(p)$ doğrultusunda M nin geodeziği C olsun. C nin yay parametresi s ve birim teğet vektör alanı T ise, son iki denklemden

$$\frac{dT}{ds} = -\frac{n\mathbf{H}}{2}N, \quad \frac{dN}{ds} = \frac{n\mathbf{H}}{2}T$$

olarak yazılır ki bunun anlamı, N nin C eğrisinin normali olması demektir, yani her s için T ve N ile gerilen düzlem sabittir ve C eğrisi bu düzlemde yatar. Ayrıca bu C eğrisinin eğriligi $-\frac{n\mathbf{H}}{2}$ dir.

Şimdi D , U komşuluğunda $\text{grad}\mathbf{H}$ ya dik olan $(n-1)$ -boyutlu distribüsyon, yani $D = (Sp\{e_n\})^\perp$ olsun. $\text{grad}\mathbf{H}$ diferensiyellenebilir ve sıfırdan farklı olduğundan D distribüsyonu da diferensiyellenebilirdir.

Lemma 3.2.3. *D distribüsyonu integrallenebilirdir ve D nin integral manifoldları $\mathbb{R}^{n+1}$ in altmanifoldu olarak bir flat normal konneksiyona sahiptir [1].*

İspat: X ve Y , D ye ait diferensiyellenebilir vektör alanları olsunlar. Bu durumda

$$\langle X, \text{grad}\mathbf{H} \rangle = 0, \quad \langle Y, \text{grad}\mathbf{H} \rangle = 0$$

dır. Birinci denklemin Y ye göre, ikinci denklemin X e göre kovaryant türevlerini alırsak

$$\langle \nabla_Y X, \text{grad}\mathbf{H} \rangle + \langle X, \nabla_Y \text{grad}\mathbf{H} \rangle = 0$$

ve

$$\langle \nabla_X Y, \text{grad}\mathbf{H} \rangle + \langle Y, \nabla_X \text{grad}\mathbf{H} \rangle = 0$$

veya bu iki denklemin farkını alırsak

$$\langle [X, Y], \text{grad}\mathbf{H} \rangle = 0$$

elde edilir ki bu da $[X, Y] \in \Gamma(D)$ olması demektir, yani D integrallenebilir distribüsyondur.

M_0 , D nin $p_0 \in U$ noktasından geçen integral altmanifoldu olsun. Böylece M_0 , $\mathbb{R}^{n+1}$ de ek boyutu 2 olan bir altmanifolddur ve M_0 in normal uzayı N ve e_n tarafından gerilir. Ayrıca M_0 a ait bir X vektör alanı için

$$\langle AX, e_n \rangle = \langle X, Ae_n \rangle = 0$$

olduğundan N , M_0 in normal demetinde paraleldir, yani Weingarten formülünden $\bar{\nabla}_x N = -AX$ olduğundan $\nabla_x^\perp N = 0$ olur ve burada $\nabla^\perp$, M_0 in normal konneksiyonudur. Böylece M_0 , $\mathbb{R}^{n+1}$ in altmanifoldu olarak flat normal konneksiyona sahiptir.

Uyarı 3.2.1. Açık olarak M nin ortalama eğriliği D nin integral manifoldu üzerinde sabittir. Burada $\|\text{grad}\mathbf{H}\|$ da D nin her integral manifoldu boyunca sabittir. Gerçekten de $\text{grad}\mathbf{H} = \|\text{grad}\mathbf{H}\|e_n$ olduğu ve $\nabla_{e_n}e_n = 0$ ve $\nabla_{\text{grad}\mathbf{H}}\text{grad}\mathbf{H} = \|\text{grad}\mathbf{H}\|^2\nabla_{e_n}e_n + \|\text{grad}\mathbf{H}\|e_n(\|\text{grad}\mathbf{H}\|)e_n$ oldukları göz önüne alınırsa, D deki bir X vektör alanı için

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}X\left(\|\text{grad}\mathbf{H}\|^2\right) &= \langle \nabla_X \text{grad}\mathbf{H}, \text{grad}\mathbf{H} \rangle \\ &= \langle \nabla_{\text{grad}\mathbf{H}} \text{grad}\mathbf{H}, X \rangle = 0\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $\|\text{grad}\mathbf{H}\|$ nin sabit olması demektir.

Ortalama eğrilik $\mathbf{H}$ sabit olacak şekilde D nin integral manifoldu M_1 ve M_1 üzerindeki ortonormal çatı $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ olsun. e_n vektör alanının bir integral eğrisi $\gamma(s)$ birim hızlı olsun, yani $\frac{d\gamma}{ds}(s) = e_n(\gamma(s))$ olsun. Buna göre ortalama eğrilik $\mathbf{H}$ nin gradienti

$$\text{grad}\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{n-1} e_i(\mathbf{H})e_i + \frac{d\mathbf{H}}{ds} \frac{\partial}{\partial s}$$

olarak yazılır. $\mathbf{H}$, M_1 üzerinde sabit olduğundan $e_i(\mathbf{H}) = 0$, $1 \leq i \leq n-1$ dir ve

$$\text{grad}\mathbf{H} = \frac{d\mathbf{H}}{ds}(\gamma(s)) \frac{\partial}{\partial s}$$

olur. Bu durumda açık olarak

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{H} \circ \gamma)(s) = \|\text{grad}\mathbf{H}\|(\gamma(s)) \quad (3.2.4)$$

olarak elde edilir. Ayrıca D nin her integral manifoldu, $\gamma(s)$ ile en fazla bir noktada kesişir. Gerçekten de, eğer integral manifoldu M_1 , $\gamma(s)$, $\gamma(s_1)$ ve $\gamma(s_2)$ gibi iki noktada kesiyor ise bu durumda $\mathbf{H}(\gamma(s_1)) = \mathbf{H}(\gamma(s_2))$ olur. Fakat bu durumda s_1, s_2 arasındaki uygun bir s_0 için

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{H} \circ \gamma)(s_0) = 0$$

olur. $\text{grad}\mathbf{H}$, U üzerindeki her noktada sıfır olamayacağından (3.2.4) den dolayı bu mümkün değildir ve böylece $\gamma(s)$, M_1 i en fazla bir noktada keser [1].

Şimdi $\gamma_1(s)$ ve $\gamma_2\left(\bar{s}\right)$, e_n vektör alanının sırasıyla $\gamma_1(0) = p_1$ ve $\gamma_2(0) = p_2$ noktalarından geçen iki integral eğrisi olsun. Bu durumda aşağıda ispatlayacağımız lemma hayati önem taşır.

Lemma 3.2.4. e_n in p_1 ve p_2 civarındaki integral eğrileri kongruenttir [1].

İspat: Eğrilerde parametre değişiminden dolayı kolayca gösterilebilir ki $\varepsilon > 0$ için, $h(0) = 0$, $\bar{s} = h(s)$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ olacak şekilde bir h diferensiyellenebilir fonksiyonu vardır. Böylece $\gamma_1(s)$ ve $\gamma_2(h(s))$ nın her ikisi de aynı integral manifolduna aittir. Lemma 3.2.2 den

$$\mathbf{H}(\gamma_1(s)) = \mathbf{H}(\gamma_2(h(s))) \quad (3.2.5)$$

dir. (3.2.5) in her iki tarafının s ye göre diferensiyelini alırsak (3.2.4) den dolayı

$$\|\text{grad} \mathbf{H}\|(\gamma_1(s)) = \|\text{grad} \mathbf{H}\|(\gamma_2(h(s))) \cdot h'(s)$$

elde ederiz. $\gamma_1(s)$ ve $\gamma_2(h(s))$ aynı integral manifolduna sahip olduğundan, $\|\text{grad} \mathbf{H}\|$ sabittir (Uyarı 3.2.1 den dolayı), dolayısıyla

$$\|\text{grad} \mathbf{H}\|(\gamma_1(s)) = \|\text{grad} \mathbf{H}\|(\gamma_2(h(s)))$$

dır ve buradan $h'(s) = 1$ elde edilir. Ayrıca $h(0) = 0$ olduğundan $\bar{s} = h(s) = s$ olduğu sonucuna varılır. Böylece p_1 civarındaki $\gamma_1(s)$ integral eğrisi ile p_2 civarındaki $\gamma_2(\bar{s})$ integral eğrisi aynı parametrizasyona sahiptir. Üstelik Lemma 3.2.2 den bu eğriler düzlemsel eğrilerdir ve karşılık gelen noktalarda aynı $-\frac{n}{2}\mathbf{H}(\gamma_1(s))$ eğriliğine sahiptirler. Böylece γ_1 ve γ_2 kongruent eğrilerdir.

$\text{grad} \mathbf{H} \neq 0$ olmak üzere bir H -hiperyüzeyinin bir U komşuluğunda kullanışlı bir parametrizasyonunu inşa edelim. D distribüsyonunun bir integral manifoldu M_0 ve e_n ve N vektör alanlarının M_0 a kısıtlanmışları sırasıyla, e ve w olsun. $p_0 \in M_0$ ve e_n in p_0 dan geçen integral eğrisi $\gamma(s)$ olsun. Lemma 3.2.2 den $\gamma(s)$ nin eğriliği $k(s)$

$$k(s) = -\frac{n}{2}\mathbf{H}(\gamma(s))$$

dir. Üstelik $\gamma(s)$ eğrisi $e(p_0)$, $w(p_0)$ tarafından gerilen düzlemde yatar. Buna göre

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \left(\int_0^s \cos \left(\int_0^t k(u) du \right) dt \right) e + \left(\int_0^s \sin \left(\int_0^t k(u) du \right) dt \right) w \quad (3.2.6)$$

olarak yazılır. $p_0 \in M_0$ in bir komşuluğunda lokal parametreler $(u_1, \dots, u_{n-1})$ olarak seçilsin ve $x(u_1, \dots, u_{n-1})$ de p_0 civarında M_0 in yer vektörü olsun. e_n in integral eğrileri M_0 in noktalarının civarında kongruent olduklarından p_0 civarında aşağıdaki lokal parametrizasyona sahip oluruz:

$$\begin{aligned} y(u_1, \dots, u_{n-1}, s) &= x(u_1, \dots, u_{n-1}) + \left(\int_0^s \cos \left(\int_0^t k(u) du \right) dt \right) e(u_1, \dots, u_{n-1}) \\ &\quad + \left(\int_0^s \sin \left(\int_0^t k(u) du \right) dt \right) w(u_1, \dots, u_{n-1}) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

burada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ve $k(s)$, e_n in integral eğrilerinin standart eğrileridir (çünkü bütün integral eğrilerinin kongruent olduğunu biliyoruz).

Eğer

$$A(s) = \int_0^s \cos \left(\int_0^t k(u) du \right) dt, \quad B(s) = \int_0^s \sin \left(\int_0^t k(u) du \right) dt$$

dersek (3.2.7) ifadesi

$$y(u_1, \dots, u_{n-1}, s) = x(u_1, \dots, u_{n-1}) + A(s)e(u_1, \dots, u_{n-1}) + B(s)w(u_1, \dots, u_{n-1}) \quad (3.2.8)$$

haline gelir. (3.2.8) ile verilen ifade $\mathbb{E}^{n+1}$ de bir hiperyüzeydir ve bunu U ile gösterelim. U nun birim normali N

$$N(u_1, \dots, u_{n-1}, s) = -B'(s)e(u_1, \dots, u_{n-1}) + A'(s)w(u_1, \dots, u_{n-1}) \quad (3.2.9)$$

dir.

Şimdi x in asli eğriliklerinden faydalanarak y nin asli eğriliklerini bulalım. M_0 flat normal konneksiyona sahip olduğundan $x(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0) = p_0 \in M_0$ noktası civarında $x_{u_i}(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0)$, $i = 1, \dots, n-1$ vektörleri, M_0 ın hem $A_{e(p_0)}$ hem de $A_{\omega(p_0)}$ Weingarten dönüşümlerinin ortak eigen bazlarıdır. Kabul edelim ki

$$e_{u_i}(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0) = -\alpha_i x_{u_i}(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0) \quad (3.2.10)$$

$$\omega_{u_i}(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0) = -\beta_i x_{u_i}(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0) \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (3.2.11)$$

olarak yazılsın. (3.2.8) de u_i lere göre türev alınırsa

$$y_{u_i}(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0, s) = x_{u_i}(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0) + A(s)e_{u_i}(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0) + B(s)\omega_{u_i}(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0) \quad (3.2.12)$$

elde edilir. (3.2.9) un, $(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0, s)$ de u_i lere göre türev alınır ve (3.2.10), (3.2.11), (3.2.12) kullanılırsa

$$N_{u_i}(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0, s) = \frac{B'\alpha_i - A'\beta_i}{1 - A\alpha_i - B\beta_i} y_{u_i}(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0, s) \quad (3.2.13)$$

olur. Ayrıca (3.2.9) un s ye göre türevi alınır ve (3.2.10), (3.2.11), (3.2.12) kullanılırsa

$$N_s(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0, s) = -k(s)y_s(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0, s) \quad (3.2.14)$$

elde edilir, burada $k(s)$, $\gamma(s)$ eğrisinin eğriliğidir. (3.2.13) denkleminde, $y_{u_i}(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0, s)$ vektörü bir asli vektördür ve buna karşılık gelen asli eğrilik de

$$k_i = \frac{A'\beta_i - B'\alpha_i}{1 - A\alpha_i - B\beta_i}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (3.2.15)$$

dir. Benzer şekilde (3.2.14) denkleminde, $y_s(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0, s)$ de bir asli doğrultudur ve buna karşılık gelen asli eğrilik ise

$$k_n = k(s) \quad (3.2.16)$$

dir [1].

3.3 $\mathbb{R}^3$ de Bikonserve Yüzeyler

M , $\mathbb{R}^3$ de bir bikonservatif yüzey (H -yüzey) olsun. $M_0 = \{p \in M \mid \|\mathbf{H} \text{grad} \mathbf{H}\|_p = 0\}$ kümesini göz önüne alalım. Bu kümenin M ye göre tümleyeni $M_1 = M - M_0$ dir. Eğer M_1 , boş kümeye eşit ise bu durumda M nin ortalama eğriliği sabittir. Kabul edelim ki M_1 boş kümeden farklı olsun ve ortalama eğriliğin sabit olmadığı M_1 in bağlantılı bileşeni U ile gösterilsin.

Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3$ deki H -yüzeylerinin sabit ortalama eğrilikli yüzeyler olduğunu ve bunların bazı dönel yüzeylerden ibaret olduğunu ispatlayacağız.

Önerme 3.3.1. *U bir H -yüzey olsun. Bu durumda U yüzeyi, birim hızlı $(f(s), g(s))$ düzlemsel eğrisinin döndürülmesiyle elde edilen bir dönel yüzeydir, burada $f(s)$ fonksiyonu $3ff'' = 1 - (f')^2$ şartını sağlar. Ayrıca U nun ortalama eğriliği $\mathbf{H}$*

$$(\mathbf{H}')^2 = c\mathbf{H}^7 - 16\mathbf{H}^4 \quad (3.3.1)$$

denklemini sağlar. Burada $\mathbf{H}' = \frac{d\mathbf{H}}{ds}$ ve c de bir pozitif reel sabittir [1].

İspat: $e_2 = \frac{\text{grad} \mathbf{H}}{\|\text{grad} \mathbf{H}\|}$ olmak üzere U üzerinde $\{e_1, e_2\}$ asli ortonormal çatısını göz önüne alalım. U bir H -yüzey olduğundan (3.1.8) den

$$Ae_2 = \frac{1}{\|\text{grad} \mathbf{H}\|} A \text{grad} \mathbf{H} = -\mathbf{H}e_2$$

elde edilir. Yani e_2 asli doğrultusuna karşılık gelen asli eğrilik $k_2 = -\mathbf{H}$ dir. $2\mathbf{H} = k_1 + k_2$ olduğundan e_1 e karşılık gelen asli eğrilik de $k_1 = 3\mathbf{H}$ olarak bulunur. Codazzi denkleminde $e_2(k_1) = \omega_{12}(e_1)(k_1 - k_2)$ olduğundan, k_1 ve k_2 değerleri yerine yazılırsa

$$e_2(3\mathbf{H}) = \omega_{12}(e_1)(3\mathbf{H} - (-\mathbf{H}))$$

veya buradan $\omega_{12}(e_1)$ yalnız bırakılırsa

$$\omega_{12}(e_1) = \frac{3e_2(\mathbf{H})}{4\mathbf{H}} \quad (3.3.2)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $e_1(k_2) = \omega_{12}(e_2)(k_1 - k_2)$ olduğundan ve $\mathbf{H}$, e_1 e göre sabit olduğundan

$$\omega_{12}(e_2) = 0 \quad (3.3.3)$$

olur. Gauss formülünü uygularsak

$$\bar{\nabla}_{e_2} e_1 = \nabla_{e_2} e_1 + \langle Ae_2, e_1 \rangle N = \nabla_{e_2} e_1 + \langle -\mathbf{H}e_2, e_1 \rangle N = \nabla_{e_2} e_1 = \omega_{12}(e_2) e_2 = 0$$

elde edilir. Bu ise e_2 nin integral eğrisi boyunca e_1 in paralel olması demektir.

Şimdi e_1 in integral eğrisi γ nın eğriliğini ve torsiyonunu hesaplayalım. Uyarı 3.2.1 den γ boyunca $\mathbf{H}$ ve $\omega_{21}(e_1)$ sabittir. Gauss formülü kullanılırsa

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_1 = \nabla_{e_1} e_1 + \langle Ae_1, e_1 \rangle N = \omega_{12}(e_1) e_2 + 3\mathbf{H}N$$

şeklinde bulunur. γ eğrisinin eğriliği

$$k = \|\gamma''\| = \|\bar{\nabla}_{e_1} e_1\| = \sqrt{\omega_{12}^2(e_1) + 9\mathbf{H}^2} \quad (3.3.4)$$

olur ve buradan γ nın birim normal vektör alanı Freneet formüllerinden

$$\bar{n} = \frac{1}{k} (\omega_{12}(e_1) e_2 + 3\mathbf{H}N) \quad (3.3.5)$$

olarak bulunur. Freneet formüllerinden $\bar{n}' = -k\bar{t} + \tau\bar{b}$ olduğundan $\bar{n}' = \bar{\nabla}_{e_1} \bar{n}$ olduğu dikkate alınırsa $\bar{\nabla}_{e_1} \bar{n} + ke_1 = \tau\bar{b}$ olur. (3.3.4) den

$$\bar{\nabla}_{e_1} \bar{n} + ke_1 = \frac{1}{k} (\omega_{12}(e_1) \bar{\nabla}_{e_1} e_2 + 3\mathbf{H} \bar{\nabla}_{e_1} N) + ke_1$$

veya

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_2 = \nabla_{e_1} e_2 + \langle Ae_1, e_2 \rangle N = \nabla_{e_1} e_2 = \omega_{21}(e_1) e_1$$

ve

$$\bar{\nabla}_{e_1} N = -Ae_1 = -3\mathbf{H}e_1$$

olduğundan

$$\bar{\nabla}_{e_1} \bar{n} + ke_1 = \frac{1}{k} (-\omega_{21}^2(e_1) - 9\mathbf{H}^2) e_1 + ke_1 = -ke_1 + ke_1 = 0$$

elde edilir. Böylece γ nın torsiyonu sıfırdır ve eğriliği k da sabit olduğundan e_1 in integral eğrileri çemberlerdir. (3.3.4) de e_2 doğrultusunda türev alınırsa

$$e_2(k) = \frac{2\omega_{12}(e_1) e_2(\omega_{12}(e_1)) + 18\mathbf{H}e_2(\mathbf{H})}{2k}$$

veya

$$e_2(k) = \frac{\omega_{12}(e_1)e_2(\omega_{12}(e_1)) + 9\mathbf{H}e_2(\mathbf{H})}{k} \quad (3.3.6)$$

bulunur. $\omega_{12}(e_1) = \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle$ olduğu göz önüne alınır ve e_2 ye göre kovaryant türevi alınıp, Gauss formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} e_2(\omega_{12}(e_1)) &= e_2 \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_2} \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle + \langle \nabla_{e_1} e_1, \bar{\nabla}_{e_2} e_2 \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_2} (\omega_{12}(e_1) e_2 + 3\mathbf{H}N), e_2 \rangle \end{aligned}$$

veya

$$e_2(\omega_{12}(e_1)) = \omega_{12}^2(e_1) - 3\mathbf{H}^2 \quad (3.3.7)$$

elde edilir. (3.3.6), (3.3.7) ve (3.3.2) birlikte gözönüne alınırsa

$$e_2(k) = k\omega_{12}(e_1) \quad (3.3.8)$$

elde ederiz. (3.3.5) den

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{e_2} \bar{n} &= e_2 \left(\frac{1}{k} \right) (\omega_{12}(e_1) e_2 + 3\mathbf{H}N) + \frac{1}{k} (e_2(\omega_{12}(e_1))) e_2 \\ &\quad + \omega_{12}(e_1) \bar{\nabla}_{e_2} e_2 + 3e_2(\mathbf{H})N + 3\mathbf{H}\bar{\nabla}_{e_2} N \\ &= -\frac{e_2(k)}{k^2} (\omega_{12}(e_1) e_2 + 3\mathbf{H}N) + \frac{1}{k} (e_2\omega_{12}(e_1)) e_2 \\ &\quad - \mathbf{H}\omega_{12}(e_1)N + 3e_2(\mathbf{H})N + 3\mathbf{H}^2 e_2 \end{aligned}$$

olur, burada $e_2(\mathbf{H})$ nın (3.3.2) deki değeri, $e_2(\omega_{12}(e_1))$ in (3.3.7) deki değeri ve $e_2(k)$ nın (3.3.6) daki değeri yerine yazılırsa

$$\bar{\nabla}_{e_2} \bar{n} = 0$$

elde edilir ki bu da $\bar{n}$ nın e_2 nin integral eğrisi boyunca $\mathbb{R}^3$ de paralel olması demektir. Ayrıca e_1 de paralel olduğundan bu çemberler paralel düzlemlerde yatar. Bu çemberlerin merkezleri $\beta(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)}\bar{n}$ eğrisini çizer. Burada γ , e_2 nin integral eğrisidir ve yay parametresi ile verilmiştir. Bu eğrinin s ye göre türevini alırsak

$$\beta' = e_2 + e_2 \left(\frac{1}{k} \right) \bar{n}$$

bulunur ve (3.3.8) den

$$\beta' = e_2 - \frac{\omega_{12}(e_1)}{k} \bar{n}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\beta'' = \bar{\nabla}_{e_2} e_2 - e_2 \left(\frac{\omega_{12}(e_1)}{k} \right) \bar{n}$$

veya

$$\beta'' = -\mathbf{H}N - \frac{1}{k^2} (ke_2(\omega_{12}(e_1)) - \omega_{12}(e_1)e_2(k))\bar{n}$$

olarak bulunur. Burada (3.3.7) ve (3.3.8) kullanılırsa

$$\beta'' = \mathbf{H} \left(\frac{3\mathbf{H}}{k}\bar{n} - N \right)$$

elde edilir. (3.3.5) denklemi yardımıyla

$$\beta' \times \beta'' = \mathbf{H} \left(\frac{9\mathbf{H}^2}{k^2} - 1 + \frac{\omega_{12}^2(e_1)}{k^2} \right) e_2 \times N = 0$$

elde edilir, burada $\times$, $\mathbb{R}^3$ ün vektörel çarpımıdır. Böylece β bir doğrudur, yani çemberlerin merkezleri bir doğru üzerinde bulunurlar ve çemberlerin yattığı düzlemlere diktir. Buradan U bir dönel yüzeydir.

Kabul edelim ki U yu inşa eden eğri birim hızlı düzlemsel eğri $(f(s), g(s))$ olsun. Bu durumda U nun parametrizasyonu

$$x(s, \theta) = (f(s) \cos \theta, f(s) \sin \theta, g(s))$$

dir, burada $f(s) > 0$ ve $f'^2 + g'^2 = 1$ dir. Bu dönel yüzeyin asli eğrilikleri $-\frac{f''}{g'}$ ve $\frac{g'}{f}$ dir. H -yüzeyinin asli eğrilikleri $-\mathbf{H}$ ve $3\mathbf{H}$ olduğundan ve $f'^2 + g'^2 = 1$ de türevi alınır $\frac{g''}{f'} = -\frac{f''}{g'}$ olduğundan

$$\frac{g''}{f'} = -\frac{f''}{g'} = -\mathbf{H} \quad (3.3.9)$$

ve

$$\frac{g'}{f} = 3\mathbf{H} \quad (3.3.10)$$

olur. (3.3.9) dan $\frac{f'}{g'} = \mathbf{H}$ ve $f' = \mathbf{H}g'$ olur, buradan $3ff' = 3f\mathbf{H}g'$ elde edilir. (3.3.10) dan $3f\mathbf{H} = g'$ olduğundan $3ff' = 3f\mathbf{H}g' = g'^2 = 1 - f'^2$ elde edilir. (3.3.10) un türevi alınır $g'' = 3\mathbf{H}'f + 3\mathbf{H}f'$ olur. Bu değer (3.3.9) da yerine yazılırsa

$$\frac{f'}{f} = -\frac{3\mathbf{H}'}{4\mathbf{H}} \quad (3.3.11)$$

olur. (3.3.11) in her iki tarafının integrali alınır

$$f = c_1 \mathbf{H}^{-\frac{3}{4}} \quad (3.3.12)$$

olarak bulunur, burada c_1 integral sabitidir. (3.3.12) den türev alınır

$$f' = -\frac{3c_1}{4} \mathbf{H}^{-\frac{7}{4}} \mathbf{H}'$$

ve (3.3.10) ve (3.3.12) kullanılırsa

$$g' = 3f\mathbf{H} = 3c_1\mathbf{H}^{-\frac{3}{4}}\mathbf{H} = 3c_1\mathbf{H}^{\frac{1}{4}}$$

elde edilir. Bu değerler $f'^2 + g'^2 = 1$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{H}'^2 + 16\mathbf{H}^4 = \frac{16}{9c_1^2}\mathbf{H}^{\frac{7}{2}}$$

olur. $c = \frac{16}{9c_1^2}$ denilirse

$$\mathbf{H}'^2 + 16\mathbf{H}^4 = c\mathbf{H}^{\frac{7}{2}}$$

veya

$$\mathbf{H}'^2 = c\mathbf{H}^{\frac{7}{2}} - 16\mathbf{H}^4$$

elde edilir ki bu da iddianın kendisidir, yani ispat tamamlanır.

3.4 $\mathbb{R}^4$ de Bikonserveatif Hiperyüzeyler

$M, \mathbb{R}^4$ de bir bikonserveatif hiperyüzey (H -hiperyüzey) olmak üzere

$$M_0 = \left\{ p \in M \mid \|\mathbf{H} \text{grad } \mathbf{H}\|_p = 0 \right\}$$

ve

$$M_1 = M - M_0$$

diyelim. Eğer M_1 boş küme ise bu durumda M sabit ortalama eğriliklidir. Kabul edelim ki M_1 boş kümeden farklı olsun. Bu durumda ya iki farklı asli eğrilik var veya üç farklı asli eğrilik vardır. Eğer bütün asli eğrilikler eşit ise bu durumda $\mathbf{H} = 0$ ya da $\mathbf{H}$ sabit olur ki bu da kabul ile çelişir.

İlk olarak kabul edelim ki M_1 in bir bağlantılı bileşeni U üzerinde iki farklı asli eğrilik var olsun. $A \text{grad } \mathbf{H} = -\frac{3\mathbf{H}}{2} \text{grad } \mathbf{H}$ olduğundan bu asli eğrilikler ya $-\frac{3\mathbf{H}}{2}, \frac{9\mathbf{H}}{4}, \frac{9\mathbf{H}}{4}$ veya $-\frac{3\mathbf{H}}{2}, -\frac{3\mathbf{H}}{2}, 6\mathbf{H}$ dir. İkinci durum asla gerçekleşmez, çünkü eigen değer $-\frac{3\mathbf{H}}{2}$ bunlara karşılık gelen eigen uzaylar üzerinde sabittir. Yani $e_3(\mathbf{H}) = 0$ olmak zorunda kalır ki bu bir çelişkidir. Şimdi böyle bir U için aşağıdaki önermeyi ispatlayalım.

Önerme 3.4.1. $\mathbb{R}^4$ de bir H -hiperyüzeyi $U, (f(s), g(s))$ birim hızlı düzlemsel eğrisi tarafından üretilen, sabit eğrilikli olmayan bir dönel yüzeydir, burada f

$$3ff'' = 2(1 - (f')^2)$$

bağıntısını sağlar. Ayrıca U nun ortalama eğriliği

$$(\mathbf{H}')^2 = c\mathbf{H}^{\frac{16}{5}} - \frac{225}{16}\mathbf{H}^4 \quad (3.4.1)$$

denklemini sağlar, burada c bir reel sabittir [1].

İspat: $e_3 = \frac{\text{grad}\mathbf{H}}{\|\text{grad}\mathbf{H}\|}$ ve $\{e_1, e_2, e_3\}$, U üzerinde bir asli çatı olmak üzere asli eğrilikleri

$$k_1 = k_2 = \frac{9\mathbf{H}}{4}, \quad k_3 = -\frac{3\mathbf{H}}{2} \quad (3.4.2)$$

dir. Bu durumda M. Do Carmo ve Dajozzer'in [37] de Teorem 4.2 ye göre U , $\mathbb{R}^4$ de bir döneel hiperyüzeydir.

Genelliği bozmaksızın U nun parametrizasyonunu

$$x(s, \vec{\theta}) = f(s) \vec{\theta} + g(s) \vec{\varepsilon}$$

olarak kabul edilebilir, burada $f(s) > 0$, $(f')^2 + (g')^2 = 1$, $\vec{\theta}$ 2-boyutlu birim kürenin yer vektörü ve $\vec{\varepsilon}$ dönme eksenindeki birim vektördür.

Böylece U nun asli eğrilikleri

$$\frac{g'}{f} = k_1 = k_2, \quad k_3 = \frac{g''}{f'} \quad (3.4.3)$$

dir. (3.4.2) ve (3.4.3) den

$$\frac{g''}{f'} = -\frac{3\mathbf{H}}{2} \quad (3.4.4)$$

ve

$$\frac{g'}{f} = \frac{9\mathbf{H}}{4} \quad (3.4.5)$$

olur. (3.4.4) ve (3.4.5) denklemlerinden

$$3ff'' = 2(1 - (f')^2) \quad (3.4.6)$$

elde edilir. (3.4.5) in türevi alınır ve (3.4.4) kullanılırsa

$$\frac{f'}{f} = -\frac{3\mathbf{H}'}{5\mathbf{H}} \quad (3.4.7)$$

olarak bulunur. (3.4.7) nin integrali alınır

$$f = c_1\mathbf{H}^{-\frac{3}{5}} \quad (3.4.8)$$

olur, burada c_1 integral sabitidir. Böylece

$$f' = -\frac{3c_1}{5}\mathbf{H}^{-\frac{8}{5}}\mathbf{H}' \text{ ve } g' = \frac{9c_1}{4}\mathbf{H}^{\frac{2}{5}}$$

olarak elde edilir. Bunlar $(f')^2 + (g')^2 = 1$ de yerine yazılırsa (3.4.1) elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi de M_1 in boş kümeden farklı bir bağlantılı bileşeni V üç farklı asli eğriliğe sahip olsun. V de $e_3 = \frac{\text{grad } \mathbf{H}}{\|\text{grad } \mathbf{H}\|}$ olmak üzere bir asli çatı $\{e_1, e_2, e_3\}$ olmak üzere bunlara karşılık gelen asli eğrilikler $k_1, k_2, k_3 = -\frac{3\mathbf{H}}{2}$ dir. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ dual çatı ve ω_{ij} de konneksiyon 1-formlar olsun. Cartan yapı denklemlerinden

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^3 \omega_{ij} \wedge \omega_j$$

ve

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \omega_{i4} \wedge \omega_{4j}$$

dir, burada $\omega_{i4} = \sum_{j=1}^3 h_{ij} \omega_j$ ve $h_{ij} = \langle Ae_i, e_j \rangle$ dir. Lemma 3.2.2 den e_3 ün integral eğrileri düzlemsel eğriler olduğundan $\omega_{13}(e_3) = \omega_{32}(e_3) = 0$ dır. Lemma 3.2.1 deki $\langle AX, \nabla_Y \text{grad } \mathbf{H} \rangle = \langle AY, \nabla_X \text{grad } \mathbf{H} \rangle$ ifadesinde $X = e_1, Y = e_2$ alınırsa

$$\langle Ae_1, \nabla_{e_2} \text{grad } \mathbf{H} \rangle = \langle Ae_2, \nabla_{e_1} \text{grad } \mathbf{H} \rangle$$

$$\langle k_1 e_1, \nabla_{e_2} \text{grad } \mathbf{H} \rangle = \langle k_2 e_2, \nabla_{e_1} \text{grad } \mathbf{H} \rangle$$

olur ve ayrıca $\langle e_2, \text{grad } \mathbf{H} \rangle = \langle e_1, \text{grad } \mathbf{H} \rangle = 0$ olduğundan

$$(k_1 - k_2) \langle \nabla_{e_1} \text{grad } \mathbf{H}, e_2 \rangle = 0$$

olur. Bu son denklemden ise

$$\omega_{13}(e_2) = 0 \text{ ve } \omega_{23}(e_1) = 0$$

elde edilir. Codazzi denkleminde

$$(k_1 - k_2) \omega_{12}(e_3) = (k_3 - k_2) \omega_{32}(e_1)$$

elde edilir ve $\omega_{23}(e_1) = -\omega_{32}(e_1) = 0$ olduğundan

$$\omega_{12}(e_3) = 0$$

sonucuna ulaşılır. Gauss denkleminde

$$\bar{\nabla}_{e_3} e_1 = \omega_{12}(e_3) e_2 + \omega_{13}(e_3) e_3 = 0$$

ve benzer şekilde

$$\bar{\nabla}_{e_3} e_2 = \omega_{21}(e_3) e_1 + \omega_{23}(e_3) e_3 = 0$$

elde edilir. Bu hesaplamalardan aşağıdaki lemmaya sahip oluruz.

Lemma 3.4.1. *Konneksiyon formlar*

$$\omega_{13} = \omega_{13}(e_1) \omega_1,$$

$$\omega_{23} = \omega_{23}(e_2) \omega_2,$$

$$\omega_{12} = \omega_{12}(e_1) \omega_1 + \omega_{12}(e_2) \omega_2$$

şeklinde verilir ve e_1, e_2, e_3 ün integral eğrisi boyunca paraleldir [1].

Şimdi V de $D = Sp\{e_1, e_2\}$ nin integral yüzeyi M_0 olsun. e_3 ve N vektör alanlarının M_0 a kısıtlanmışları, sırasıyla, e ve w olsun. Bu durumda M_0 boyunca $\mathbb{R}^4$ ün bir çatısı $\{e_1, e_2, e, w\}$ olur. Weingarten dönüşümleri A_w ve A_e nin eigen değerleri sırasıyla, α, β , ve γ, δ olsun. Bu durumda aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 3.4.2. *Weingarten dönüşümleri A_w ve A_e nin eigen değerleri V de D nin integral yüzeyi M_0 boyunca sabittir [1].*

İspat: V nin y parametrizasyonu (3.2.8) ile verilmişti. (3.2.15) den

$$k_1 = \frac{-\gamma B' + \alpha A'}{1 - \gamma A - \alpha B}$$

$$k_2 = \frac{-\delta B' + \beta A'}{1 - \delta A - \beta B}$$

ve (3.2.16) dan

$$k_3 = k(s)$$

olur. V bir H -hiperyüzey olduğundan

$$k_1 + k_2 = -3k_3$$

olduğundan

$$\frac{-\gamma B' + \alpha A'}{1 - \gamma A - \alpha B} + \frac{-\delta B' + \beta A'}{1 - \delta A - \beta B} = -3k(s) \quad (3.4.9)$$

olur. Bu $s = 0$ için $A'(0) = 1, B'(0) = 0, A(0) = B(0) = 0$ olduğundan

$$\alpha + \beta = -3k(0) \quad (3.4.10)$$

olur. (3.4.9) denkleminin $s = 0$ da birinci, ikinci ve üçüncü türevleri alınırsa

$$-\gamma k(0) + \alpha \gamma - \delta k(0) + \beta \delta = -3k'(0), \quad (3.4.11)$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma k'(0) - \alpha k^2(0) - 2\gamma^2 k(0) + \alpha^2 k(0) + 2\alpha\gamma^2 - \delta k'(0) \\
& -\beta k^2(0) - 2\delta^2 k(0) + \beta^2 k(0) + 2\beta\delta^2 = -3k''(0)
\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

ve

$$\begin{aligned}
& -\gamma(k''(0) - k^3(0)) - 3\alpha k(0)k'(0) - 3\gamma^2 k'(0) - 7\alpha\gamma k^2(0) - 6\gamma^3 k(0) \\
& + \alpha^2 k'(0) + 6\alpha^2 \gamma k(0) + 6\alpha\gamma^3 - \delta(k''(0) - k^3(0)) - 3\beta k(0)k'(0) \\
& - 3\delta^2 k'(0) - 7\beta\delta k^2(0) - 6\delta^3 k(0) + \beta^2 k'(0) + 6\beta^2 \delta k(0) + 6\beta\delta^3 = -3k'''(0)
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

elde edilir. (3.4.10) denklemini düzenleyecek olursak

$$\beta = -3k(0) - \alpha \text{ ve } \beta - k(0) = -(4k(0) + \alpha) \tag{3.4.14}$$

olarak yazabiliriz. (3.4.10) ve (3.4.11) den

$$\gamma(\alpha - k(0)) = -3k'(0) + \delta(-\beta + k(0)) \tag{3.4.15}$$

veya

$$\gamma(\alpha - k(0)) = -\delta(\beta - k(0)) - 3k'(0) \tag{3.4.16}$$

denklemlerine ulaşılır. (3.4.12) denklemini $\alpha - k(0)$ ile çarparsak ve (3.4.10) dan β nın değerini, (3.4.16) dan γ nın değerini yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned}
& 10k(0)(4k(0) + \alpha)\delta^2 - k'(0)(51k(0) + 14\alpha)\delta + 3k''(0)\alpha + 6k^3(0)\alpha \\
& + 4k^2(0)\alpha^2 + 2k(0)\alpha^3 - 3k(0)k''(0) - 12k^4(0) + 21(k'(0))^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

denklemini buluruz. Şimdi

$$\begin{aligned}
p &= 10k(0)(4k(0) + \alpha), \\
q &= \frac{k'(0)}{2}(51k(0) + 14\alpha), \\
r &= 3k''(0)\alpha + 6k^3(0)\alpha + 4k^2(0)\alpha^2 + 2k(0)\alpha^3 - 3k(0)k''(0) - 12k^4(0) + 21(k'(0))^2, \\
R &= \sqrt{q^2 - pr}
\end{aligned}$$

diyelim. Eğer M_0 ın bir açık kümesi üzerinde $\alpha = k_1(0)$ ise bu durumda β sabit olur. Ayrıca (3.4.17) ve (3.4.13) den δ ve γ nın da sabit olduğunu sonucuna ulaşılır. M_0 ın bir açık kümesi üzerinde $\alpha \neq k_1(0)$ olduğunu kabul edelim. (3.4.17) den

$$\delta = \frac{q}{p} \pm \frac{R}{p}$$

ifadesini elde ederiz. İlk önce

$$\delta = \frac{q}{p} + \frac{R}{p} \quad (3.4.18)$$

durumunu inceleyelim. Diğer durum ise benzer şekilde incelenir. Şimdi

$$\begin{aligned} A &= q(4k(0) + \alpha) - 3k'(0)p \\ \Gamma &= -k''(0) + k^3(0) - 7\alpha k^2(0) + 6k(0)\alpha^2 \\ \Delta &= -k''(0) + 76k^3(0) + 43k^2(0)\alpha + 6k(0)\alpha^2 \end{aligned}$$

dersek ve (3.4.15) ile (3.4.18) i birlikte göz önüne alırsak

$$\gamma = \frac{A}{p(\alpha - k(0))} + \frac{4k(0) + \alpha}{p(\alpha - k(0))}R \quad (3.4.19)$$

bağıntısını elde ederiz. (3.4.13) bağıntısını düzenlersek

$$\begin{aligned} &-3k(0)k'(0)(\alpha + \beta) + k'(0)(\alpha^2 + \beta^2) + \gamma(-k''(0) + k^3(0) - 7\alpha k^2(0) + 6\alpha^2 k(0)) \\ &-3\gamma^2 k'(0) + 6\gamma^3(\alpha - k(0)) + \delta(-k''(0) + k^3(0) - 7\beta k^2(0) + 6\beta^2 k(0)) - 3\delta^2 k'(0) \\ &+ 6\delta^3(\beta - k(0)) = -3k'''(0) \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. (3.4.14) deki β nın değerini üstteki denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} &\Gamma\gamma - 21k'(0)\gamma^2 + 6(4k(0) + \alpha)\gamma^2\delta + \delta\Delta - 3\delta^2 k'(0) - 6(4k(0) + \alpha)\delta^3 \\ &= -3k'''(0) - 18k^2(0)k'(0) - 2k'(0)\alpha^2 - 6k(0)k'(0)\alpha \end{aligned}$$

elde edilir ve bu son denklemde (3.4.19) deki γ nın değerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} &\frac{A + (4k(0) + \alpha)R}{p(\alpha - k(0))}\Gamma - 21k'(0)\frac{A^2 + (4k(0) + \alpha)^2 R^2 + 2(4k(0) + \alpha)AR}{p^2(\alpha - k(0))^2} + 6(4k(0) + \alpha) \\ &\left(\frac{qA^2 + q(4k(0) + \alpha)^2 R^2 + 2(4k(0) + \alpha)ARq}{p^3(\alpha - k(0))^2} + \frac{A^2 + 2(4k(0) + \alpha)RA + (4k(0) + \alpha)^2 R^2}{p^3(\alpha - k(0))^2} R \right) \\ &+ \Delta \frac{q+R}{p} - 3k'(0)\frac{q^2 + R^2 + 2qR}{p^2} - 6(4k(0) + \alpha)\left(\frac{q^3 + 3qR^2}{p^3} + \frac{3q^2 + R^2}{p^3} R \right) \\ &= -3k'''(0) - 18k^2(0)k'(0) - 2k'(0)\alpha^2 - 6k(0)k'(0)\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklem $A, \Gamma, \Delta, R, P, q$ ve r değişkenlerine göre bir polinom olarak yazılırsa 14. dereceden bir polinom olur ve α bu polinomun bir köküdür ve böylece α sabittir. (3.4.10), (3.4.17) ve (3.4.15) den β, δ, γ lar sabittir ve böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.4.3. *V de D nin integral yüzeyi M_0 ya iki çemberin Riemann çarpımı veya bir dik dairesel silindirdir [1].*

İspat: Codazzi denklemlerinden

$$e_1(k_2) = (k_1 - k_2) \omega_{12}(e_2),$$

$$e_2(k_1) = (k_2 - k_1) \omega_{21}(e_1)$$

dir. Lemma 3.4.2 den k_1, k_2 sadece s parametresine bağlı olduğundan

$$e_1(k_2) = 0 \text{ ve } e_2(k_1) = 0$$

dır. Buna göre

$$\omega_{12}(e_2) = \omega_{21}(e_1) = 0 \quad (3.4.20)$$

elde edilir. Yapı denklemlerinden

$$\omega_{13}(e_1) \omega_{23}(e_2) + k_1 k_2 = e_2(\omega_{12}(e_1)) - \omega_{12}^2(e_1) - e_1(\omega_{12}(e_2)) - \omega_{12}^2(e_2) \quad (3.4.21)$$

elde edilir. (3.4.20) ve (3.4.21) dan M_0 ın Gauss eğriliği sıfırdır. Ayrıca M_0 normal demetde paralel ortalama eğrilik vektörüne sahiptir. Böylece [38] deki **Corallary 2** ye göre M_0 ya iki çemberin Riemann çarpımı veya bir dik dairesel silindirdir.

Önerme 3.4.2. H -hiperyüzey V nin yer vektörü aşağıdakilerden birisidir [1]:

Durum i)

$$y(u, v, s) = (f(s) \cos u, f(s) \sin u, v, g(s)) \quad (3.4.22)$$

burada $(f(s), g(s))$ eğriliği sabit olmayan birim hızlı eğri ve

$$3ff'' = 1 - (f')^2$$

sağlanır. Ayrıca V nin ortalama eğriliği $\mathbf{H}$

$$(\mathbf{H}')^2 = c\mathbf{H}^7 - 36\mathbf{H}^4 \quad (3.4.23)$$

denklemini sağlar, burada c bir pozitif reel sabittir.

Durum ii)

$$\bar{y}(u, v, s) = (x(s) \cos u, x(s) \sin u, y(s) \cos v, y(s) \sin v) \quad (3.4.24)$$

burada $(x(s), y(s))$ sabit eğrilikli olmayan birim hızlı eğri ve

$$x'y'' - x''y' = \frac{1}{3} \left(\frac{x'}{y} - \frac{y'}{x} \right) \quad (3.4.25)$$

şartını sağlar [1].

İspat: V de D nin integral manifoldu M_0 olsun. Bu durumda Lemma 3.4.3 den M_0 ya dik dairesel silindir veya iki çemberin çarpımıdır. M_0 dik dairesel silindir ise **Durum i** yi içerir yani, M_0 ın yer vektörü

$$x(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v, 0) \quad (3.4.26)$$

dir. İki çemberin çarpımı ise M_0 ın yer vektörü

$$\bar{x}(u, v) = (x_0 \cos u, x_0 \sin u, y_0 \cos v, y_0 \sin v) \quad (3.4.27)$$

dir, burada R, x_0 ve y_0 sıfırdan farklı reel sabitlerdir.

Durum i (3.4.26) dan $x_u = (-R \sin u, R \cos u, 0, 0)$ ve $x_v = (0, 0, 1, 0)$ olduğundan, $\mathbb{R}^4$ de M_0 ın normal uzayı

$$\xi_1 = (\cos u, \sin u, 0, 0)$$

$$\xi_2 = (0, 0, 0, 1)$$

vektörleri tarafından gerilir. Üstelik, ξ_1, ξ_2 normal demette paralel vektörlerdir. (yani $\nabla_x^\perp \xi_1 = \nabla_x^\perp \xi_2 = 0, x \in \Gamma(TM)$ için) e ve w vektör alanları da $\mathbb{R}^4$ de M_0 ın paralel normal vektör alanları olduğundan

$$e(u, v) = \cos \theta \xi_1 + \sin \theta \xi_2$$

$$w(u, v) = -\sin \theta \xi_1 + \cos \theta \xi_2$$

olarak yazılır, burada θ bir sabit açıdır (yani $\{\xi_1, \xi_2\}$ yi $\{e, w\}$ dönüştüren dönmenin açısıdır). V nin yer vektörü (3.2.8) den

$$\begin{aligned} y(u, v, s) = & x(u, v) + \left(\int_0^s \left(\cos \left(\int_0^t k(u) du \right) \right) dt \right) (\cos \theta \xi_1 + \sin \theta \xi_2) \\ & + \left(\int_0^s \left(\sin \left(\int_0^t k(u) du \right) \right) dt \right) (-\sin \theta \xi_1 + \cos \theta \xi_2) \end{aligned}$$

olarak yazılır. Bu son denklem ve (3.4.26) dan

$$y(u, v, s) = (f(s) \cos u, f(s) \sin u, v, g(s))$$

veya

$$y(u, v, s) = (f(s) \cos u, f(s) \sin u, 0, g(s)) + v(0, 0, 1, 0) \quad (3.4.28)$$

olarak yazılır, burada

$$f(s) = R + A(s) \cos \theta - B(s) \sin \theta$$

$$g(s) = A(s) \sin \theta + B(s) \cos \theta$$

ve

$$A(s) = \int_0^s \cos \left(\int_0^t k(u) du \right) dt, \quad B(s) = \int_0^s \sin \left(\int_0^t k(u) du \right) dt$$

dır. Kolayca gösterilir ki $(f(s), g(s))$ eğriliği $k(s)$ olan birim hızlı eğridir. V nin birim normal vektör alanı

$$N(u, v, s) = (-g'(s) \cos u, -g'(s) \sin u, 0, f'(s)) \quad (3.4.29)$$

olarak bulunur. (3.4.28) den

$$y_u = (-f(s) \sin u, f(s) \cos u, 0, 0)$$

$$y_v = (0, 0, 1, 0)$$

$$y_s = (f'(s) \cos u, f'(s) \sin u, 0, g'(s))$$

oldukları göz önüne alınırsa, (3.4.29) dan

$$N_u = -\frac{g'}{f} y_u, \quad N_v = 0 \cdot y_v, \quad N_s = -\frac{g''}{f'} y_s$$

olarak bulunur. Buna göre V nin asli eğrilikleri $k_1 = \frac{g'}{f}$, $k_2 = 0$ ve $k_3 = \frac{g''}{f'}$ dir. Böylece $k_1 + k_2 = \frac{9\mathbf{H}}{2}$ olduğundan

$$\frac{g'}{f} = \frac{9\mathbf{H}}{2} \quad (3.4.30)$$

ve $k_3 = -\frac{3\mathbf{H}}{2}$ olduğundan

$$\frac{g''}{f'} = -\frac{3\mathbf{H}}{2} \quad (3.4.31)$$

olarak bulunur. (3.4.30) ve (3.4.31) den

$$3ff'' = 1 - (f')^2$$

elde edilir. (3.4.30) un türevini alıp bu türevde (3.4.31) denklemini kullanacak olursak

$$\frac{f'}{f} = -\frac{3\mathbf{H}'}{4\mathbf{H}} \quad (3.4.32)$$

bulunur. (3.4.32) de eşitliğin her iki tarafının integrali alınır

$$f = c\mathbf{H}^{-\frac{3}{4}}$$

olarak bulunur, burada c integral sabitidir. Buradan

$$f' = -\frac{3c}{4} \mathbf{H}^{-\frac{7}{4}} \mathbf{H}' \text{ ve } g' = \frac{9c}{2} \mathbf{H}^{\frac{1}{4}}$$

ifadelerine ulaşılır. Bu bulduğumuz değerleri $(f')^2 + (g')^2 = 1$ de yerine yazarsak (3.4.23) denklemini elde ederiz.

Durum ii) Şimdi kabul edelim ki M_0 in yer vektör alanı

$$\bar{x}(u, v) = (x_0 \cos u, x_0 \sin u, y_0 \cos v, y_0 \sin v)$$

ile verilsin. Bu durumda M_0 in $\mathbb{R}^4$ deki normal uzayı

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos u, \sin u, -\cos v, -\sin v) \\ \bar{\xi}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos u, -\sin u, -\cos v, -\sin v) \end{aligned}$$

vektör alanları tarafından gerilir ve $\{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2\}$, $\mathbb{R}^4$ de M_0 in normal uzayının bir paralel ortonormal çatısıdır. Birinci durumda olduğu gibi V nin yer vektörünü

$$\bar{y}(u, v, s) = (x(s) \cos u, x(s) \sin u, y(s) \cos v, y(s) \sin v) \quad (3.4.33)$$

olarak yazabiliriz, burada

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 + \frac{A(s)}{\sqrt{2}} (\cos \bar{\theta} - \sin \bar{\theta}) - \frac{B(s)}{\sqrt{2}} (\cos \bar{\theta} + \sin \bar{\theta}) \\ y(s) &= y_0 - \frac{A(s)}{\sqrt{2}} (\cos \bar{\theta} + \sin \bar{\theta}) + \frac{B(s)}{\sqrt{2}} (\sin \bar{\theta} - \cos \bar{\theta}) \end{aligned}$$

dir ve $\bar{\theta}$ açısı ise

$$\begin{aligned} e(u, v) &= \cos \bar{\theta} \bar{\xi}_1 + \sin \bar{\theta} \bar{\xi}_2 \\ \omega(u, v) &= -\sin \bar{\theta} \bar{\xi}_1 + \cos \bar{\theta} \bar{\xi}_2 \end{aligned}$$

ile belirlenen sabit açıdır. (3.4.33) den V nin normal vektör alanı

$$N(u, v, s) = (-y'(s) \cos u, -y'(s) \sin u, x'(s) \cos v, x'(s) \sin v)$$

olarak bulunur. V nin asli eğriliklerini hesaplayacak olursak $x'y'' - x''y'$, $\frac{y'}{x}$ ve $-\frac{x'}{y}$ olarak buluruz. V nin asli eğrilikleri birbirinden farklı olacağından $\frac{y'}{x} \neq -\frac{x'}{y}$ olur ki bunun anlamı ise $x^2(s) + y^2(s)$ nin sabit olmaması demektir. V sabit olmayan ortalama eğriliğe sahip olduğundan $(x(s), y(s))$ eğrisinin $x'y'' - x''y'$ eğriliği sabit değildir.

Şu ana kadar elde edilen sonuçlardan aşağıdaki teoreme sahip oluruz.

Teorem 3.4.1. $\mathbb{R}^4$ de bir bikonservatif hiperyüzey (H -hiperyüzey) aşağıdaki hiperyüzeylerden birisidir [1];

- i) Sabit ortalama eğrilikli hiperyüzeyler,
- ii) Önerme 3.4.1 de ifade edilen, sabit ortalama eğrilikli olmayan dönel hiperyüzeyler,
- iii) Önerme 3.4.2 **Durum i** de ifade edilen, sabit ortalama eğrilikli olmayan ve $\mathbb{R}^3$ de yatan bir dönel yüzey üzerine kurulan genelleştirilmiş silindirler,
- iv) Önerme 3.4.2 de **Durum ii** de ifade edilen, sabit ortalama eğrilikli olmayan bazı $O(2) \times O(2)$ invaryant hiperyüzeyler.

Bu çalışmanın başlangıcında amaç $\mathbb{R}^{n+1}$ de biharmonik hiperyüzeyleri incelemektir. Fakat biharmonik hiperyüzeyler yerine şartı biraz daha hafifleterek $\Delta^2 x = 0$ yerine $\Delta^2 x = (\Delta^2 x)^\top + (\Delta^2 x)^\perp$ ifadesinde $(\Delta^2 x)^\top = 0$ olanları inceledik ve bunları H -hiperyüzey olarak adlandırdık. Buna göre bir biharmonik hiperyüzey aynı zamanda bir H -hiperyüzeydir. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir.

O halde $\mathbb{R}^4$ de bikonservatif hiperyüzeyler

$$A \operatorname{grad} \mathbf{H} = -\frac{3\mathbf{H}}{2} \operatorname{grad} \mathbf{H}$$

şartını sağlayan hiperyüzeylerdir. $\mathbb{R}^4$ de biharmonik hiperyüzeyler ise

$$A \operatorname{grad} \mathbf{H} = -\frac{3\mathbf{H}}{2} \operatorname{grad} \mathbf{H} \quad (3.4.34)$$

ve

$$\Delta \mathbf{H} + S \mathbf{H} = 0 \quad (3.4.35)$$

denklemlerinin her ikisini de sağlayan hiperyüzeylerdir. Şimdi bikonservatif olup da biharmonik olmak zorunda kalmayan bu hiperyüzeyleri inceleyelim.

Önerme 3.4.3. Önerme 3.3.1 de ifade edilen hiperyüzeyler biharmonik olamaz [1].

İspat: Kabul edelim ki $\mathbb{R}^3$ de

$$x(s, \theta) = (f(s) \cos \theta, f(s) \sin \theta, g(s)) \quad (3.4.36)$$

yer vektörü ile verilen hiperyüzey biharmonik olsun, burada $f(s) > 0$ ve $(f')^2 + (g')^2 = 1$ dir. (3.4.35) deki $\Delta \mathbf{H} + S\mathbf{H} = 0$ ifadesini hesaplayalım. Yüzeyin parametrik denklemi (3.4.36) dan

$$\begin{aligned}x_s &= (f'(s) \cos \theta, f'(s) \sin \theta, g'(s)) \\x_\theta &= (-f(s) \sin \theta, f(s) \cos \theta, 0)\end{aligned}$$

olur. Buna göre yüzeyin normal vektör alanı

$$\begin{aligned}x_s \times x_\theta &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ f' \cos \theta & f' \sin \theta & g' \\ -f \sin \theta & f \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-fg' \cos \theta, -fg' \sin \theta, ff')\end{aligned}$$

olur ve buradan birim normal vektör alanı ise

$$N = (-g' \cos \theta, -g' \sin \theta, f')$$

olarak elde edilir. Bu son ifadeden

$$N_s = -\frac{g''}{f'}x_s, \quad N_\theta = -\frac{g'}{f}x_\theta$$

olarak elde edilir ve ayrıca bu yüzey bir H -yüzey olduğundan asli eğrilikleri $-H$ ve $3H$ dır. Bu yüzey üzerindeki Laplasyanı hesaplayalım:

Önce yüzey üzerine indirgenen metriğin matrisi olan $[g_{ij}]$ yi bulalım. Buna göre

$$g_{11} = \langle x_s, x_s \rangle = 1, \quad g_{12} = g_{21} = \langle x_s, x_\theta \rangle = 0, \quad g_{22} = f^2$$

olduğundan $[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2 \end{bmatrix}$ olarak bulunur. Bu matrisin tersi ise

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f^2} \end{bmatrix}$$

dir. Yüzey üzerindeki Laplasyan

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

olduğundan

$$\Delta = -\frac{1}{f} \left[f' \frac{\partial}{\partial s} + f \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{f} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right]$$

olarak bulunur. O halde $\mathbf{H}$ sadece s ye bağlı olduğundan

$$\Delta \mathbf{H} = -\frac{f'}{f} \mathbf{H}' - \mathbf{H}''$$

olur. $S = k_1^2 + k_2^2 = \mathbf{H}^2 + 9\mathbf{H}^2 = 10\mathbf{H}^2$ olduğundan

$$\Delta\mathbf{H} + S\mathbf{H} = -\mathbf{H}'' - \frac{f'}{f}\mathbf{H}' + 10\mathbf{H}^3 = 0$$

olarak elde edilir. (3.3.11) denkleminde $\frac{f'}{f} = -\frac{3\mathbf{H}'}{4\mathbf{H}}$ olduğundan bu üstte yerine yazılırsa

$$-4\mathbf{H}\mathbf{H}'' + 3(\mathbf{H}')^2 + 40\mathbf{H}^4 = 0$$

elde edilir. Bu son denklemin integrali alınır

$$(\mathbf{H}')^2 = \bar{c}\mathbf{H}^{\frac{3}{2}} + 8\mathbf{H}^4$$

elde edilir, burada $\bar{c}$ integral sabitidir. Bu denklem (3.3.1) denklemini ile karşılaştırılırsa $\mathbf{H}' = 0$ dolayısıyla $\mathbf{H}$ nın sabit olduğu sonucuna ulaşılır ki bu ise bir çelişkidir yani (3.4.36) ile verilen yüzey biharmonik olamaz.

Lemma 3.4.4. *Önerme 3.4.1 de ifade edilen, $\mathbb{R}^4$ de sabit ortalama eğrilikli olmayan dönel yüzeyler biharmonik değildir [1].*

İspat: Profil eğrisi $(f(s), g(s))$ birim hızlı eğrisi olan ve dönme eksenini üzerindeki birim vektör $\vec{\epsilon}$ olmak üzere sabit ortalama eğrilikli olmayan biharmonik dönel yüzeyin parametrizasyonu

$$x(s, \vec{\theta}) = f(s)\vec{\theta} + g(s)\vec{\epsilon}$$

olsun. Hiperyüzeyin asli eğrilikleri $\frac{9\mathbf{H}}{4}$, $\frac{9\mathbf{H}}{4}$ ve $-\frac{3\mathbf{H}}{2}$ olduğundan ikinci temel formun uzunluğunun karesi

$$S = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \left(\frac{9\mathbf{H}}{4}\right)^2 + \left(\frac{9\mathbf{H}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3\mathbf{H}}{2}\right)^2 = \frac{99}{8}\mathbf{H}^2 \quad (3.4.37)$$

olur. Ayrıca bu hiperyüzey üzerinde $\mathbf{H}$ nın Laplasyanı

$$\Delta\mathbf{H} = -2\frac{f'}{f}\mathbf{H}' - \mathbf{H}'' \quad (3.4.38)$$

olarak bulunur. (3.4.37) ve (3.4.38) deki değerler $\Delta\mathbf{H} + S\mathbf{H} = 0$ da yerine yazılırsa

$$-\mathbf{H}'' - 2\frac{f'}{f}\mathbf{H}' + \frac{99}{8}\mathbf{H}^3 = 0$$

elde edilir. (3.4.7) de $\frac{f'}{f} = -\frac{3\mathbf{H}'}{5\mathbf{H}}$ olduğundan

$$-\mathbf{H}\mathbf{H}'' + \frac{6}{5}(\mathbf{H}')^2 + \frac{99}{8}\mathbf{H}^4 = 0 \quad (3.4.39)$$

olur. Bu denklem (3.4.1) denklemini ile karşılaştırılırsa $\mathbf{H}$ nın sabit olduğu sonucuna ulaşılır ve bu bir çelişkidir yani bu hiperyüzey biharmonik olamaz.

Lemma 3.4.5. *Önerme 3.4.2, Durum i de ifade edilen sabit olmayan ortalama eğrilikli ve $\mathbb{R}^3$ de yatan bir dönel yüzeyin döndürülmesiyle elde edilen genelleştirilmiş silindirler biharmonik olamaz [1].*

İspat: Genelliği bozmaksızın böyle bir silindirin yer vektörü

$$\begin{aligned} x(u, v, s) &= (f(s) \cos u, f(s) \sin u, v, g(s)) \\ &= (f(s) \cos u, f(s) \sin u, 0, g(s)) + v(0, 0, 1, 0) \end{aligned} \quad (3.4.40)$$

ile verilsin, burada $(f(s), g(s))$ birim hızlı eğri ve $f(s) > 0$ dır. Bu silindirin asli eğrilikleri $\frac{9H}{2}, 0$ ve $-\frac{3H}{2}$ olduğundan

$$S = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{90}{4} H^2 \quad (3.4.41)$$

olur. Ayrıca (3.4.40) parametrizasyonuna göre hiperyüzey üzerindeki Laplasyan

$$\Delta = -\frac{1}{f^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2}{\partial v^2} - \frac{f'}{f} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\Delta H = -\frac{f'}{f} H' - H'' \quad (3.4.42)$$

veya (3.4.42) de $\frac{f'}{f} = -\frac{3H'}{4H}$ değeri yerine yazılırsa

$$\Delta H = \frac{3}{4} \frac{(H')^2}{H} - H'' \quad (3.4.43)$$

elde edilir. (3.4.41) ve (3.4.43) den $\Delta H + SH = 0$ ifadesi

$$-H'' + \frac{3}{4} \frac{(H')^2}{H} + \frac{90}{4} H^3 = 0 \quad (3.4.44)$$

olarak elde edilir. (3.4.44) denklemi (3.4.23) denklemi ile karşılaştırılırsa H nın sabit olduğu sonucuna ulaşılır ve bu bir çelişkidir, yani hiperyüzey biharmonik olamaz.

Lemma 3.4.6. *Önerme 3.4.2, Durum ii de ifade edilen sabit olmayan ortalama eğrilikli $\mathbb{R}^4$ ün $O(2) \times O(2)$ -invariant hiperyüzeyleri biharmonik değildir [1].*

İspat: Böyle bir hiperyüzeyin biharmonik olduğunu kabul edelim Genelliği bozmaksızın böyle bir hiperyüzeyin yer vektörünün

$$x(u, v, s) = (x(s) \cos u, x(s) \sin u, y(s) \cos v, y(s) \sin v) \quad (3.4.45)$$

olduğunu kabul edelim, burada $(x(s), y(s))$ birim hızlı eğridir. Ortalama eğrilik sabit olamayacağından $x(s)$, $y(s)$ fonksiyonları da sabit olmayan fonksiyonlardır. $x'^2 + y'^2 = 1$ olduğundan $x'x'' + y'y'' = 0$ ve (3.4.25) denkleminde

$$x'' = \frac{y'}{3} \left(\frac{y'}{x} - \frac{x'}{y} \right) \quad (3.4.46)$$

ve

$$y'' = -\frac{x'}{3} \left(\frac{y'}{x} - \frac{x'}{y} \right) \quad (3.4.47)$$

olarak buluruz. Bu hiperyüzeyin asli eğriliklerinin $x'y'' - x''y'$, $\frac{y'}{x}$ ve $-\frac{x'}{y}$ olduğunu hatırlayacak olursak

$$\mathbf{H} = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} = \frac{2}{9} \left(\frac{y'}{x} - \frac{x'}{y} \right) \quad (3.4.48)$$

olarak elde ederiz. Ayrıca

$$S = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{10}{9} \frac{(x')^2}{y^2} + \frac{10}{9} \frac{(y')^2}{x^2} - \frac{2}{9} \frac{x'y'}{xy}$$

olur. (3.4.45) parametrizasyonundan hiperyüzey üzerindeki Laplasyan

$$\Delta = -\frac{1}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} - \frac{(xy)'}{xy} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

olarak bulunur. Buna göre (3.4.46), (3.4.47) ve (3.4.48) denklemlerinin kullanılmasıyla $\Delta \mathbf{H} + S \mathbf{H} = 0$ denklemi

$$(x')^2 y' (12x^2 y - 30y^3) + x' (y')^2 (-12xy^2 + 30x^3) + x' (4xy^2 - 14x^3) + y' (-4x^2 y + 14y^3) = 0 \quad (3.4.49)$$

haline gelir. y yi x in fonksiyonu olarak göz önüne alacak olursak, yani $y = y(x)$ ise

$$y' = \frac{dy}{dx} x' \quad (3.4.50)$$

olur. Ayrıca

$$(x')^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (3.4.51)$$

ve

$$y'' = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^2} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (3.4.52)$$

olarak bulunur. (3.4.50), (3.4.51) ve (3.4.52) denklemlerini kullanarak (3.4.25) denklemini

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} \right) \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \quad (3.4.53)$$

olarak yazabiliriz. Bu durumda (3.4.49) denklemini

$$A_3(x, y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + A_2(x, y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + A_1(x, y) \frac{dy}{dx} + A_0(x, y) = 0 \quad (3.4.54)$$

olarak ifade edebiliriz, burada

$$\begin{aligned} A_3(x, y) &= -4x^2y + 14y^3, & A_2(x, y) &= -8xy^2 + 16x^3 \\ A_1(x, y) &= 8x^2y - 16y^3, & A_0(x, y) &= 4xy^2 - 14x^3 \end{aligned}$$

dir. (3.4.53) ve (3.4.54) denklemlerini sağlayan $y = f(x)$ fonksiyonları sadece $y(x) = \pm x$ fonksiyonlarıdır. Fakat bu durumda hiperyüzey minimal olur, kabulden ortalama eğrilik sabit olamayacağından bu bir çelişkidir. Yani **Durum ii** deki hiperyüzeyler minimal olamaz.

Şu ana kadar yapılanlar gözönüne alındığında $\mathbb{E}^4$ deki biharmonik hiperyüzeyler için aşağıdaki karakterizasyon teoremini ifade edebiliriz.

Teorem 3.4.2. $\mathbb{R}^4$ deki biharmonik hiperyüzeyler minimal hiperyüzeylerdir [1].

İspat: $M, \mathbb{R}^4$ de bir biharmonik hiperyüzey olsun. Bu durumda Teorem 3.4.1, Lemma 3.4.4, Lemma 3.4.5 ve Lemma 3.4.6 dan M sabit eğrilikli hiperyüzeydir. Bu durumda $\Delta \mathbf{H} = 0$ olacağından $\Delta \mathbf{H} + S\mathbf{H} = 0$ denkleminde $S\mathbf{H} = 0$ olur. Buradan ise ya $S = 0$ veya $\mathbf{H} = 0$ dır. $\mathbf{H} = 0$ ise M minimaldir. $S = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$ olur ki bu da $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ olması demektir ki yine $\mathbf{H} = 0$ olmasını gerektirir ve ispat tamamlanır.

3.5 Öklid Uzaylarında Üç Farklı Asli Eğrilığe Sahip Bikonservatif Hiperyüzeyler

Bu kısımda boyutu $n \geq 4$ olan $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzaylarında üç farklı asli eğrilikli hiperyüzeylerin bikonservatifliğini inceleyeceğiz. İlk önce Öklid uzayında genel anlamda bikonservatif hiperyüzeyin bazı özellikleri hatırlatılarak, daha sonra üç farklı asli eğrilığıne sahip bikonservatif hiperyüzeylerin sınıflandırılması ile ilgili karakterizasyonlar verilecektir.

3.5.1 Öklid uzayında bikonservatif hiperyüzeylerin bazı özellikleri

Tanım 3.5.1. $M, \mathbb{R}^m$ in n -boyutlu altmanifoldu ve $x : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ izometrik immersiyon olmak üzere, $\Delta x_0 = 0$ ve $\Delta x_1 = \lambda x_1$ ifadelerini sağlayan, x_0 ve x_1 sıfırdan farklı vektör değerli fonksiyonları için $x = x_0 + x_1$ oluyorsa M altmanifolduna null-2 tiplidir denir, burada λ sıfırdan farklı bir sabittir [8], [28].

Şimdi, $M, \mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayında bir hiperyüzey ve N de M nin birim normal vektör alanı olsun. Bu durumda M nin N den türetilen şekil operatörü A olmak üzere M üzerinde bir asli ortonormal çatı $\{e_1, \dots, e_n\}$ ve bu asli çatıya karşılık gelen asli eğrilikler de $k_1, k_2, \dots, k_n$ olsun. M üzerinde $S_j, 1 \leq j \leq n$, fonksiyonlarını

$$S_j = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_j}^n k_{i_1} k_{i_2} \dots k_{i_j}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\binom{n}{j} \mathbf{H}_j = S_j, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (3.5.1)$$

şeklinde tanımlı $\mathbf{H}_j$ ye M nin j -yinci ortalama eğriliği denir [39] [40]. (3.5.1) de dikkat edilecek olursa $\mathbf{H}_1$, M nin ortalama eğriliği $\mathbf{H}$ ya ve $\mathbf{H}_n$ de M nin Gauss eğriliği K ya eşittir. M nin yer vektörü x olmak üzere, M nin null 2-tipli veya biharmonik olması durumunda bir λ sabiti için Tanım (3.5.1) den

$$\Delta^2 x = \lambda \Delta x$$

elde edilir. Burada Beltrami'nin iyi bilinen $\Delta x = -\mathbf{H}_1 N$ formülünde, (2.1.13) ve (2.1.8) kullanılırsa

$$\Delta^2 x = -(\Delta \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_1 (\mathbf{H}_1^2 - 2\mathbf{H}_2)) N - \left(A(\text{grad } \mathbf{H}_1) + \frac{\mathbf{H}_1}{2} \text{grad } \mathbf{H}_1 \right) \quad (3.5.2)$$

bulunur, burada $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$ ve $\mathbf{H}_2$, sırasıyla, M nin birinci ve ikinci ortalama eğrilikleridir. Bu nedenle, $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir M hiperyüzeyi biharmonik ya da null 2-tipliyse, o zaman diferensiyel denklem sistemi, bir λ sabiti için

$$A(\text{grad } \mathbf{H}_1) = -\frac{\mathbf{H}_1}{2} \text{grad } \mathbf{H}_1, \quad (3.5.3)$$

$$\Delta \mathbf{H}_1 = -\mathbf{H}_1 (\mathbf{H}_1^2 - 2\mathbf{H}_2 - \lambda) \quad (3.5.4)$$

olur [2], [1]. Birinci ortalama eğriliği sabit olmayan bir hiperyüzey (3.5.3) ü sağlıyor ise bu hiperyüzey bir bikonservatif hiperyüzey (H -hiperyüzey) olur [41].

Şimdi bikonservatif hiperyüzey M nin birinci ortalama eğriliği (yani klasik ortalama eğriliği $\mathbf{H}$) $\mathbf{H}_1$ in sabit olmadığını kabul edelim ve $\mathbf{H}_1 = \frac{1}{n}(k_1 + k_2 + \dots + k_n)$ yerine $\mathbf{H}_1 = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ olarak almak karakterizasyonları etkilemez. M bikonservatif olduğundan (3.5.3) sağlanır, dolayısıyla $\text{grad } \mathbf{H}_1$, M de bir asli doğrultu ve buna karşılık gelen asli eğrilik de $-\frac{\mathbf{H}_1}{2}$ dir. $e_1 = \frac{\text{grad } \mathbf{H}_1}{|\text{grad } \mathbf{H}_1|}$, $k_1 = -\frac{\mathbf{H}_1}{2}$ olacak şekilde M üzerinde bir asli çatı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ve bu asli

çatıya karşılık gelen asli eğrilikler de $k_1, k_2, \dots, k_n$ olsun. Buna göre e_1 ile $\text{grad } k_1$ aynı doğrultuda olduklarından $\langle e_1, \text{grad } k_1 \rangle \neq 0$ ve $e_a, a = 2, 3, \dots, n$ ile e_1 dik olduğundan $\langle e_a, \text{grad } k_1 \rangle = 0$ dır. Böylece

$$e_1(k_1) \neq 0, \quad e_a(k_1) = 0, \quad a = 2, 3, \dots, n \quad (3.5.5)$$

ve

$$3k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n = 0 \quad (3.5.6)$$

elde edilir [2].

Uyarı 3.5.1. Herhangi $2 \leq a \leq n$ için $k_1 = k_a$ ise Codazzi denklemi (2.1.38) den $i = 1, j = a$ için $e_1(k_1) = e_1(k_a) = \omega_{1a}(e_a)(k_1 - k_a) = 0$ olur ki bu da (3.5.5) ile çelişir. Böylece

$$D_0(p) = \{X \in T_p M \mid AX = k_1 X\}$$

ile verilen D_0 distribüsyonunun boyutu 1 dir. D_0 in integral eğrileri düzlemseldir ve M nin geodezikleridir. Ayrıca α ve β sırasıyla p ve p' den geçen D_0 in integral eğrileriye α ve β kongruenttir.

$i = a, j = 1$ için Codazzi denklemi (2.1.38) den $e_a(k_1) = \omega_{1a}(e_1)(k_1 - k_a)$ olur ve (3.5.5) den

$$\omega_{1a}(e_1) = 0, \quad a = 2, 3, \dots, n \quad (3.5.7)$$

elde edilir. Diğer yandan, $X \in \Gamma(TM)$ için $\langle X, e_1 \rangle = 0$ dır ancak ve ancak $X[k_1] = \langle X, \text{grad } k_1 \rangle = 0$ dır. Böylece

$$\omega_{1a}(e_b) = \omega_{1b}(e_a), \quad a, b = 2, 3, \dots, n, \quad a \neq b \quad (3.5.8)$$

olduğundan $[e_a, e_b](k_1) = (\nabla_{e_a} e_b)(k_1) - (\nabla_{e_b} e_a)(k_1) = 0$ olması, $\langle [e_a, e_b], e_1 \rangle = 0$ olmasıdır. $i = 1, j = a, l = b$ için (3.5.8) denklemi ve Codazzi denklemi kullanılarak

$$\omega_{1a}(e_b) = 0, \quad a, b = 2, 3, \dots, n, \quad a \neq b$$

bulunur. Şimdi $i = a, j = b, l = 1$ ve $i = a, j = 1, l = b$ için Codazzi (2.1.39) denkleminde $\omega_{ab}(e_1)(k_a - k_b) = \omega_{a1}(e_b)(k_a - k_1)$ olur ki bu da (3.5.7) ve (3.5.8) den

$$\omega_{ab}(e_1) = 0, \quad a, b = 2, 3, \dots, n, \quad k_a \neq k_b \quad (3.5.9)$$

anlamına gelir. Aslında $i = a, j = b, l = c$ için Codazzi denklemi (2.1.39) dan

$$\omega_{ab}(e_c) = 0, \quad a, b, c = 1, 2, 3, \dots, n, \quad a \neq c \quad k_a = k_c \neq k_b \quad (3.5.10)$$

bulunur. Böylece (3.5.7) den $\langle [e_1, e_a], e_1 \rangle = 0$ olur ve ayrıca $[e_1, e_a](k_1) = 0$ olduğundan ve (3.5.5) den

$$e_a[e_1(k_1)] = e_a e_1[e_1(k_1)] = 0, \quad a = 2, 3, \dots, n \quad (3.5.11)$$

elde edilir.

3.5.2 Bikonservatif hiperyüzeyleri ile ilgili bazı lemmalar

Burada daha sonra ihtiyacımız olacak olan bazı lemmalar ispatlanacaktır. İlk önce

$$D(p) = \{X \in T_p M \mid AX = k_2 X\} \quad (3.5.12)$$

distribüsyonunu ele alalım. Açıktır ki D nin boyutu, M nin şekil operatörü A nın eigen değeri olarak k_2 nin karşılık geldiği lineer bağımsız vektörlerin sayısına eşittir.

Lemma 3.5.1. M , Öklid uzayı $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir bikonservatif hiperyüzey ve M nin asli eğriliklerinden birisi k_2 olsun. O halde (3.5.12) ile verilen D distribüsyonu involutivedir.

İspat: Eğer D nin boyutu 1 ise bu durumda D nin involutive olduğu açıktır. Şimdi

$$k_2 = k_3 = \dots = k_{p+1} \quad (3.5.13)$$

olmak üzere $\text{boy} D = m > 1$ durumunu ele alalım. Bu durumda $i = 1, m+2, m+3, \dots, n$, $A, B = 2, 3, \dots, m+1$, $A \neq B$ için (3.5.10) den, $\langle \nabla_{e_A} e_B, e_i \rangle = \omega_{Bi}(e_A) = 0$ elde edilir. Böylece $(\nabla_{e_A} e_B)_p \in D(p)$ dir ve bu ise $X_p, Y_p \in D(p)$ iken $[X_p, Y_p] \in D(p)$ olması anlamına gelir yani D involutivedir (integrellenebilirdir).

Şimdi (3.5.12) ile verilen D distribüsyonunun integral altmanifoldlarını oluşturmaya çalışalım.

Lemma 3.5.2. $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayında bir bikonservatif hiperyüzey (H -hiperyüzey) M , asli eğriliklerinden biri k_2 olmak üzere (3.5.12) ile verilen D distribüsyonunun boyutunun 1 den daha büyük olduğunu varsayalım. O halde, D nin herhangi bir integral altmanifoldu $\hat{M}$ nin H ortalama eğrilik vektör alanı $\mathbb{R}^{n+1}$ de paraleldir. Ayrıca $\mathbb{R}^{n+1}$ de, $\hat{M}$ nin herhangi bir H normal vektör alanı için şekil operatörü $\hat{A}_H = \tau I$ olacak şekilde M üzerinde bir τ fonksiyonu vardır.

İspat: D nin boyutu $m > 1$ olsun. O zaman, indisleri yeniden adlandırarak, (3.5.13) olduğu varsayılabilir. $\bar{\nabla}_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^n \omega_{jk}(e_i) e_k$ olduğundan (3.5.9) ve (3.5.10) u kullanarak $A \neq B$ olmak

üzere tüm $A, B = 2, 3, \dots, m+1$ için

$$\bar{\nabla}_{e_A} e_A = -\omega_{1A}(e_A) e_1 + \sum_{C=2}^{m+1} \omega_{AC}(e_A) e_C + \sum_{a=m+2}^n \omega_{Aa}(e_A) e_a + k_2 N, \quad (3.5.14)$$

$$\bar{\nabla}_{e_A} e_B = \sum_{C=2}^{m+1} \omega_{BC}(e_A) e_C$$

bulunur. $i = 1, j = A$ ve $i = a, j = A$ için Codazzi denklemi (2.1.38) den sırasıyla $\omega_{1A}(e_A) = \frac{e_1(k_A)}{k_1 - k_A}$ ve $\omega_{Aa}(e_A) = \frac{e_a(k_A)}{k_A - k_a}$ olur. Böylece (3.5.13), $a = m+2, m+3, \dots, n$ için ξ ve η_a fonksiyonları

$$\xi = -\omega_{12}(e_2) = -\omega_{13}(e_3) = \dots = -\omega_{1(m+1)}(e_{m+1}), \quad (3.5.15)$$

$$\eta_a = \omega_{a2}(e_2) = \omega_{a3}(e_3) = \dots = \omega_{a(m+1)}(e_{m+1})$$

olur.

Şimdi

$$f_{A-1} = e_A|_{\hat{M}}, \quad f_{m+1} = e_1|_{\hat{M}}, \quad f_a = e_a|_{\hat{M}}, \quad f_{n+1} = N|_{\hat{M}} \quad (3.5.16)$$

olmak üzere

$$\{f_1, f_2, \dots, f_m; f_{m+1}, f_{m+2}, \dots, f_{n+1}\}$$

D distribüsyonunun integral altmanifoldu $\hat{M}$ nin lokal ortonormal çatısıdır. (3.5.14) ve (3.5.15) dan

$$\bar{\nabla}_{f_i} f_i = \hat{\nabla}_{f_i} f_i + \hat{\xi} f_{m+1} + \sum_{a=m+2}^n \hat{\eta}_a f_a + \hat{k}_2 f_{n+1} \quad (3.5.17)$$

$$\bar{\nabla}_{f_i} f_j = \hat{\nabla}_{f_i} f_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, p, \quad i \neq j \quad (3.5.18)$$

ifadelerine sahip oluruz, burada $\hat{\nabla}$, $\hat{M}$ nin Levi Civita konneksiyonu ve $\hat{\xi}$, $\hat{\eta}_a$, $\hat{k}_2$ larda, sırasıyla ξ , η_a , k_2 nin $\hat{M}$ ya kısıtlanmışlarıdır. Buradan

$$\hat{A}_{m+1} = \hat{\xi} I, \quad \hat{A}_a = \hat{\eta}_a I, \quad \hat{A}_{n+1} = \hat{k}_2 I$$

olur veya bunlara eşdeğer olarak

$$H = \hat{h}(f_1, f_1) = \hat{h}(f_2, f_2) = \dots = \hat{h}(f_m, f_m) = \hat{\xi} f_{m+1} + \sum_{a=m+2}^n \hat{\eta}_a f_a + \hat{k}_2 f_{n+1} \quad (3.5.19)$$

bulunur, burada $\hat{h}$, $\mathbb{R}^{n+1}$ de $\hat{M}$ nin ikinci temel formu ve $\hat{A}_\alpha = \hat{A}_{f_\alpha}$ dir. Ayrıca, Codazzi denklemi (2.1.33) den, $X = Z = f_i$ ve $Y = f_j, i \neq j$ için

$$\hat{\nabla}_{f_i}^\perp \hat{h}(f_i, f_j) - \hat{h}(\hat{\nabla}_{f_i} f_i, f_j) - \hat{h}(f_i, \hat{\nabla}_{f_i} f_j) = \hat{\nabla}_{f_j}^\perp \hat{h}(f_i, f_i) - 2\hat{h}(\hat{\nabla}_{f_j} f_i, f_i)$$

olur, burada $\widehat{\nabla}^\perp$, $\mathbb{R}^{n+1}$ de $\widehat{M}$ nin normal konneksiyonudur. Bu denklemde (3.5.17), (3.5.18) ve (3.5.19) kullanılarak tüm $j = 1, 2, \dots, m$ için (3.5.19) dan $\widehat{\nabla}_{f_j}^\perp H = 0$ bulunur ve böylece H paraleldir.

Uyarı 3.5.2. M , $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayında bir bikonservatif hiperyüzey (H -hiperyüzey) ve k_2 onun asli eğriliklerinden biri, (3.5.12) ile verilen D distribüsyonu boyutu 1 den büyük ve $\widehat{M}$ de $p \in M$ noktasından geçen bağlantılı integral altmanifoldu olsun. Lemma 3.5.2 nin ispatından kolayca görülür ki k_2 , $\xi = \omega_{1A}(e_A)$ ve $\eta_a = \omega_{Aa}(e_A)$ $\widehat{M}$ üzerinde sabittir.

Önerme 3.5.1. M , $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayında bir bikonservatif hiperyüzey (H -hiperyüzey) ve k_2 de M nin asli eğriliklerinden biri olsun. Kabul edelim ki (3.5.12) ile verilen D distribüsyonunun boyutu 1 den büyük ve $\widehat{M}$ de D nin $p \in M$ noktasından geçen bir bağlantılı integral altmanifoldu olsun. Eğer $k_2(p) = 0$ ve $(\text{grad} k_2)_p = 0$ ise o zaman $\widehat{M}$, $\mathbb{R}^{n+1}$ in m - düzlemdir. Aksi takdirde, $\widehat{M}$, $\mathbb{R}^{n+1}$ in $(m+1)$ -düzleminde yatan ve $\mathbb{R}^{m+1}$ in bir hiperküresine kongruent olan bir altmanifolddur [2].

İspat: İlk önce kabul edelimki k_2 ve $\text{grad} k_2$, p noktasında sıfır olsun. Bu durumda $a = p + 2, p + 3, \dots, n$ için $\widehat{\eta}_a(p) = \widehat{\xi}(p) = 0$ olur, burada $\widehat{\eta}_a$ ve $\widehat{\xi}$ Lemma 3.5.2 nin ispatında tanımlanan fonksiyonlardır. Buradan Uyarı 3.5.2 ye göre $\widehat{M}$ üzerinde $\widehat{k}_2 \equiv 0$, $\widehat{\xi} \equiv 0$, $\widehat{\eta} \equiv 0$ olur. Böylece (3.5.19) dan $\widehat{h} = 0$ olur, yani $\widehat{M}$, $\mathbb{R}^{n+1}$ in total geodezik bir m -boyutlu altmanifoldu ve dolayısıyla M , bir m -düzlemdir.

Şimdi kabul edelim ki $k_2(p) \neq 0$ olsun. $H_1 = \widehat{k}_2 f_m - \widehat{\xi} f_{n+1}$ ve $H_a = \widehat{k}_2 f_a - \widehat{\eta}_a f_{n+1}$ olacak şekilde $(n-m)$ -tane normal vektör alanı $H_1, H_{m+2}, \dots, H_n$ olsun. Buna göre $H_1, H_{m+2}, \dots, H_n$ vektör alanları $\widehat{M}$ ya normal lineer bağımsız sabit vektör alanlarıdır. Bu nedenle $\widehat{M}$, $\mathbb{R}^{n+1}$ in bir $(m+1)$ -düzlemi $\Pi \cong \mathbb{R}^{m+1}$ dir. Dolayısıyla $\widehat{M}$ nin ortalama eğrilik vektör alanı paraleldir ve şekil operatörü ise I özdeşlik dönüşümü ile orantılıdır, yani $\widehat{M}$, Π nin bir hiperküresidir.

Eğer $(\text{grad} k_2)_p \neq 0$ ise bu durumda Codazzi denkleminde $\widehat{\xi}(p) \neq 0$ veya $\widehat{\eta}_a(p) \neq 0$ olur. Bu her iki durum için de ispat benzer şekilde yapılabilir.

3.6 Üç Farklı Asli Eğrilikli Bikonservatif Hiperyüzeyleri

M , $\mathbb{R}^{n+1}$ de üç farklı asli eğrilik k_1, k_2 ve k_{m+2} ye sahip bir bikonservatif (H -hiperyüzey) ve A da M nin şekil operatörü olsun. Uyarı 3.5.1 den k_1 eğriliğine karşılık gelen asli vektör alanı 1 tanedir. Bundan dolayı A nın matris gösterimi

$$A = \text{diag}(k_1, k_2, k_2, \dots, k_2, k_{m+2}, k_{m+2}, \dots, k_{m+2}), \quad k_2 \neq k_{m+2} \quad (3.6.1)$$

şeklinde olur, burada k_2 , m -tane, k_{m+2} de q -tanedir. M nin bu asli eğriliklerine karşılık gelen ortonormal asli çatı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun, burada $m + q + 1 = n$ dir. Ayrıca $k_1 - k_2$, $k_1 - k_{m+2}$ ve $k_2 - k_{m+2}$ lerin M de sıfırdan farklı olduklarını kabul edebiliriz.

Şimdi

$$D^\perp(p) = \{X_p \in T_p M \mid \langle X_p, Y \rangle = 0, \forall Y \in D(p)\} \quad (3.6.2)$$

ile tanımlı $D^\perp$ distribüsyonunu göz önüne alalım.

Lemma 3.6.1. $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayında şekil operatörü (3.6.1) ile verilen bir bikonservatif hiperyüzey (H -hiperyüzey) M olsun. Bu durumda (3.6.2) ile verilen $D^\perp$ distribüsyonu involutivedir.

İspat: Tanımdan $D^\perp(p) = Sp\{(e_1)_p, (e_{m+2})_p, (e_{m+3})_p, \dots, (e_n)_p\}$ olur. Ayrıca (3.5.9), (3.5.10) ve (3.6.1) den $a, b = m+2, m+3, \dots, n$ için $\nabla_{e_a} e_b, \nabla_{e_a} e_1, \nabla_{e_1} e_a \in \Gamma(D^\perp)$ olur. Böylece her $X, Y \in \Gamma(D^\perp)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D^\perp)$ olur ve buradan $D^\perp$ involutivedir.

Uyarı 3.6.1. (3.5.7), (3.5.8) ve Cartan'ın birinci yapı denklemi (2.1.15) kullanılırsa $d\omega_1 = 0$ olarak bulunur, yani ω_1 bir kapalı formdur. Böylece Poincaré Lemmasından $\omega_1 = ds$ olacak şekilde bir s fonksiyonu vardır, yani ω_1 bir tam formdur. Ayrıca (3.5.12) ve (3.6.2) ile verilen D ve $D^\perp$ distribüsyonları integrallenebilir distribüsyonlar olduklarından lokal Frobenius teoreminden dolayı bir $p \in M$ noktasının komşuluğunda $t_2, \dots, t_n$ ve $t_1 = s, t_{m+2}, t_{m+3}, \dots, t_n$ lokal koordinat sistemi vardır öyle ki, sırasıyla, $\partial_{t_2}, \partial_{t_3}, \dots, \partial_{t_{m+1}}$, D yi ve $\partial_{t_1}, \partial_{t_{m+2}}, \dots, \partial_{t_n}$ de $D^\perp$ i gerer. Böylece e_i vektör alanlarını yeniden tanımlayarak $i = 2, 3, \dots, n$ olmak üzere $F_i = F_i(s, t_2, t_3, \dots, t_n)$ sıfırdan farklı diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$e_1 = \partial_s, \quad e_i = F_i \partial_{t_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (3.6.3)$$

olduğunu kabul edebiliriz.

Bundan önceki kısımlarda $n = 2$ ve $n = 3$ için, sırasıyla, $\mathbb{R}^3$ de bikonservatif yüzeyler ve $\mathbb{R}^4$ de bikonservatif hiperyüzeyler incelenmişti, şimdi ise $n > 3$ durumuna odaklanalım. Genelliği bozmaksızın $m > 1$ olduğunu kabul edelim. Böylece (3.5.13) ve Codazzi denklemi (2.1.38) den

$$e_A(k_2) = 0, \quad A = 2, 3, \dots, m+1 \quad (3.6.4)$$

elde edilir. (3.5.5), (3.5.6), (3.6.1) ve (3.6.4) den

$$e_A(k_a) = 0, \quad a = m+2, m+3, \dots, n \quad (3.6.5)$$

olur ve $i = A$, $j = a$ için Codazzi denklemi (2.1.38) den

$$\omega_{Aa}(e_a) = 0 \quad (3.6.6)$$

olarak bulunur. Şimdi m ve q nun oluşabilecek durumlarına göre inceleyelim.

$m > 1$ ve $q > 1$ Durumu :

Bu durum için (3.6.4), (3.6.5) ve (3.6.6) denklemlerinden

$$e_a(k_{m+2}) = 0, \quad (3.6.7)$$

$$e_a(k_2) = 0, \quad (3.6.8)$$

$$\omega_{Aa}(e_A) = 0, \quad A = 2, 3, \dots, m+1, a = m+2, m+3, \dots, n \quad (3.6.9)$$

eşitliklerine sahip oluruz. (3.5.7) – (3.5.10), (3.6.6) ve (3.6.9) dan

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_A = \sum_{C=2}^{m+1} \omega_{AC}(e_1) e_C, \quad (3.6.10)$$

$$\bar{\nabla}_{e_A} e_1 = \omega_{12}(e_2) e_A, \quad (3.6.11)$$

$$\bar{\nabla}_{e_a} e_1 = \omega_{1(m+2)}(e_{m+2}) e_a \quad (3.6.12)$$

elde edilir. Diğer yandan $[e_1, e_A](k_2) = e_A(e_1(k_2))$ olduğundan (3.6.10) ve (3.6.11) kullanılarak

$$e_A(e_1(k_2)) = \left(\sum_{C=2}^{m+1} \omega_{AC}(e_1) e_C - \omega_{1A}(e_A) e_A \right) (k_2)$$

bulunur. (3.6.4) den bu denklemin sağ tarafı sıfırdır. Böylece

$$e_A(e_1(k_2)) = 0 \quad (3.6.13)$$

olur ve bulunan son denklem kullanılarak $i = 1$ ve $j = 2$ için Codazzi denklemi (2.1.38) den

$$e_A(\omega_{12}(e_2)) = e_A\left(\frac{e_1(k_2)}{k_1 - k_2}\right) \quad (3.6.14)$$

ifadesine sahip oluruz. Burada (3.5.5), (3.6.4) ve (3.6.13) ile birlikte göz önüne alınırsa (3.6.14),

$$e_A(\omega_{12}(e_2)) = 0 \quad (3.6.15)$$

haline dönüşür. Benzer irdelemelerle

$$e_a(\omega_{12}(e_2)) = 0, \quad (3.6.16)$$

$$e_A (\omega_{1(m+2)} (e_{m+2})) = e_a (\omega_{1(m+2)} (e_{m+2})) = 0 \quad (3.6.17)$$

bulunur. (3.6.14), (3.6.16), (3.6.17) denklemlerinden ξ , η fonksiyonları

$$\omega_{12} (e_2) = \xi (s), \quad \omega_{1(m+2)} (e_{m+2}) = \eta (s) \quad (3.6.18)$$

olarak elde edilir, burada s , Uyarı 3.6.1 de verilen lokal koordinattır.

Teorem 3.6.1. $M, \mathbb{R}^{n+1}$ de ξ operatörü (3.6.1) ile verilen ve $k_2 \neq k_{m+2}, m > 1, q > 1$ olan bir hiperyüzey olsun. Bu durumda M nin bir bikonservatif hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart M nin aşağıdaki hiperyüzeylerden birine kongruent olmasıdır.

i) M hiperyüzeyi, profil eğrisi (ψ, ϕ) , $\psi'^2 + \phi'^2 = 1$ ve

$$\phi' \psi'' - \phi'' \psi' = \frac{1}{3} \left(m \frac{\phi'}{\psi} - q \frac{\psi'}{\phi} \right) \quad (3.6.19)$$

şartlarını sağlayan

$$x(s, t_2, \dots, t_n) = (\psi(s) \cos t_2, \psi(s) \sin t_2 \cos t_3, \dots, \psi(s) \sin t_2 \dots \sin t_m \cos t_{m+1}, \quad (3.6.20)$$

$$\psi(s) \sin t_2 \dots \sin t_m \sin t_{m+1}, \phi(s) \cos t_{m+2}, \phi(s) \sin t_{m+2} \cos t_{m+3}, \dots,$$

$$\phi(s) \sin t_{m+2} \dots \sin t_{n-1} \cos t_n, \phi(s) \sin t_{m+2} \dots \sin t_{n-1} \sin t_n)$$

ile verilen bir genelleştirilmiş dönel hiperyüzeydir.

ii) M hiperyüzeyi, profil eğrisi (ψ, ϕ) , $\psi'^2 + \phi'^2 = 1$ ve

$$\phi' \psi'' - \phi'' \psi' = \frac{m \phi'}{3 \psi} \quad (3.6.21)$$

şartlarını sağlayan

$$x(s, t_1, \dots, t_n) = (\psi(s) \cos t_2, \psi(s) \sin t_2 \cos t_3, \dots, \psi(s) \sin t_2 \dots \sin t_m \cos t_{m+1}, \quad (3.6.22)$$

$$\psi(s) \sin t_2 \dots \sin t_m \sin t_{m+1}, \phi(s), t_{m+2}, t_{m+3}, \dots, t_n)$$

ile verilen dönel hiperyüzey üzerindeki bir genelleştirilmiş silindirdir.

İspat: M , bir bikonservatif hiperyüzey ise (3.5.6) sağlanır. $s, t_2, t_3, \dots, t_n$, Uyarı 3.6.1 de verilen lokal koordinat sistemi olsun. (3.6.11) ve (3.6.12) den

$$x_{st_A} = \omega_{12} (e_2) x_{t_A}, \quad A = 2, 3, \dots, m+1 \quad (3.6.23)$$

$$x_{st_a} = \omega_{1(m+2)} (e_{m+2}) x_{t_a}, \quad a = m+2, m+3, \dots, n \quad (3.6.24)$$

olur. Üstteki ifadelerde integral alınıp (3.6.18) kullanılırsa

$$x_s = \xi(s)x + \tilde{\Theta}_2(s, t_{m+2}, t_{m+3}, \dots, t_n) = \eta(s)x + \tilde{\Theta}_1(s, t_2, t_3, \dots, t_{m+1})$$

bulunur, burada $\tilde{\Theta}_1$ ve $\tilde{\Theta}_2$ vektör değerli fonksiyonlardır. Buradan M hiperyüzeyinin yer vektörünü

$$x(s, t_2, t_3, \dots, t_n) = \hat{\Theta}_1(s, t_2, t_3, \dots, t_{m+1}) + \hat{\Theta}_2(s, t_{m+2}, t_{m+3}, \dots, t_n) \quad (3.6.25)$$

olarak ifade edebiliriz. (3.6.23) ve (3.6.24) da (3.6.25) yi kullanarak

$$\hat{\Theta}_{1, s t_A} = \xi(s) \hat{\Theta}_{1, t_A}, \quad \hat{\Theta}_{2, s t_a} = \eta(s) \hat{\Theta}_{2, t_a}$$

elde edilir. Bu denklemlerin integrali alınır

$$x(s, t_2, t_3, \dots, t_n) = \psi(s) \Theta_1(t_2, t_3, \dots, t_{m+1}) + \phi(s) \Theta_2(t_{m+2}, t_{m+3}, \dots, t_n) + \varphi(s)$$

bulunur, burada ϕ, ψ fonksiyonlar ve $\Theta_1, \Theta_2, \varphi$ de vektör değerli fonksiyonlardır. Uyarı 3.5.1 den φ bir sabit vektördür ve $\varphi = 0$ alınması genelliği bozmaz. Böylece

$$x(s, t_2, t_3, \dots, t_n) = \psi(s) \Theta_1(t_2, t_3, \dots, t_{m+1}) + \phi(s) \Theta_2(t_{m+2}, t_{m+3}, \dots, t_n) \quad (3.6.26)$$

olarak alabiliriz. (3.6.3) den

$$\langle \Theta_{1, t_A}, \Theta_{2, t_a} \rangle = 0, \quad (3.6.27)$$

$$\langle x_s, x_s \rangle = 1 \quad (3.6.28)$$

ifadelerine sahip oluruz. $k_2 \neq k_{m+2}$ olduğundan genelliği bozmaksızın $k_2 \neq 0$ olduğu kabul edilebilir. Şimdi $p = x(\bar{s}, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \dots, \bar{t}_n) \in M$ noktasından geçen

$$y_1(t_2, t_3, \dots, t_{m+1}) = x(\bar{s}, t_2, t_3, \dots, t_{m+1}, \bar{t}_{m+2}, \bar{t}_{m+3}, \dots, \bar{t}_n)$$

ile verilen M nin $\hat{M}$ altmanifoldunu gözönüne alalım. (3.6.26) den

$$y_1(t_2, t_3, \dots, t_{m+1}) = c_0 \Theta_1(t_2, t_3, \dots, t_{m+1}) + v_0 \quad (3.6.29)$$

olur, burada $c_0 = \phi(\bar{s})$ bir reel sabit ve $v_0 = \psi(\bar{s}) \Theta_2(\bar{t}_{m+2}, \bar{t}_{m+3}, \dots, \bar{t}_n)$ de bir sabit vektördür. $\hat{M}$, (3.5.12) ile verilen D distribüsyonunun bir integral altmanifoldu ve $k_2 \neq 0$ olduğundan Önerme 3.5.1 den dolayı $\hat{M}$, $\mathbb{R}^{m+1}$ in hiperküresine kongruenttir. Böylece uygun koordinatlar seçilerek ve ψ yeniden tanımlanarak

$$\begin{aligned} \Theta_1(t_2, \dots, t_{p+2}) &= (\cos t_2, \sin t_2 \cos t_3, \dots, \sin t_2 \dots \sin t_m \cos t_{m+1}, \\ &\quad \sin t_2 \dots \sin t_m \sin t_{m+1}, 0, 0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (3.6.30)$$

olduğunu kabul edebiliriz. Şimdi $D'(p') = \{X \in T_{p'}M \mid AX = k_{m+2}X\}$ distribüsyonunun integral altmanifoldu olan, $p \in M$ noktasından geçen ve

$$y_2(t_{m+2}, t_{m+3}, \dots, t_n) = x(\bar{s}, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \dots, \bar{t}_{m+1}, t_{m+2}, t_{m+3}, t_n)$$

ile verilen $\widehat{M}'$ altmanifoldunu göz önüne alalım. Burada $k_{m+2} = 0$ ve $k_{m+2} \neq 0$ olmak üzere iki durum söz konusudur.

$k_{m+2} = 0$ **Hali** : Bu durumda $\widehat{M}'$, Önerme 3.5.1 den dolayı bir q -düzlemdir. Böylece, Θ_2 bir q -düzlemin yer vektörüdür. Genelliği bozmaksızın (3.6.27) den

$$\Theta_2(t_{m+2}, t_{m+3}, \dots, t_n) = (0, 0, \dots, 1, t_{m+2}, t_{m+3}, \dots, t_n)$$

olarak alabiliriz. Buna göre $t_{m+2}, \dots, t_n$ i yeniden tanımlayarak (3.6.22) yeniden elde edilir ve (3.6.28) den de $\psi'^2 + \phi'^2 = 1$ dır. Ayrıca bu hiperyüzeyin şekil operatörü

$$A = \text{diag} \left(k_1, \frac{\phi'}{\psi}, \frac{\phi'}{\psi}, \dots, \frac{\phi'}{\psi}, 0, 0, \dots, 0 \right) \quad (3.6.31)$$

ile verilir, burada eğriliklerin m -tanesi $\frac{\phi'}{\psi}$ ve q -tanesi de sıfırdır. (3.5.6) ve (3.6.31) den $k_1 = -\frac{m}{3} \frac{\phi'}{\psi}$ ve $N_s = -k_1 x_s$ olduğundan (3.6.21) elde edilir. Böylece teoremin (ii) durumunun ispatı tamamlanmış olur.

$k_{m+2} \neq 0$ **Hali** : Bu durumda Önerme 3.5.1 den dolayı $\widehat{M}'$, $\mathbb{R}^{q+1}$ in bir hiperküresine kongruenttir. (3.6.27) ve (3.6.28) den, genelliği bozmaksızın

$$\Theta_2(t_{m+2}, t_{m+3}, \dots, t_n) = (0, 0, \dots, 0, \cos t_{m+2}, \sin t_{m+2} \cos t_{m+3}, \dots, \sin t_{m+2} \dots \sin t_{n-1} \cos t_n, \psi \sin t_{m+2} \dots \sin t_n)$$

olarak alabiliriz, burada bileşenlerin $(p+1)$ -tanesi sıfırdır. Buradan (3.6.20) elde edilmiş olur ve (3.6.28) den de $\psi'^2 + \phi'^2 = 1$ dır. Ayrıca bu hiperyüzeyin şekil operatörü de

$$A = \text{diag} \left(k_1, \frac{\phi'}{\psi}, \frac{\phi'}{\psi}, \dots, \frac{\phi'}{\psi}, -\frac{\psi'}{\phi}, -\frac{\psi'}{\phi}, \dots, -\frac{\psi'}{\phi} \right) \quad (3.6.32)$$

şeklinde bulunur, burada asli eğriliklerin m -tanesi $\frac{\phi'}{\psi}$ ve q -tanesi $-\frac{\psi'}{\phi}$ dir. (3.5.6) ve (3.6.32) den $k_1 = \frac{1}{3} \left(q \frac{\psi'}{\phi} - m \frac{\phi'}{\psi} \right)$ ve $N_s = -k_1 x_s$ olduğundan (3.6.19) elde edilir. Böylece teoremin (i) durumunun da ispatı yapılmış olur.

$m > 1$ ve $q = 1$ **Durumu :**

Kalan kısımda, gerekli koşulu elde etmek için üç farklı asli eğrilige sahip null 2-tipli hiperyüzeyler için $m > 1$ ve $q = 1$ durumunu ele alacağız. Bu durumda (3.6.1) denklemi

$$A = \text{diag}(k_1, k_2, k_2, \dots, k_2, k_n) \quad (3.6.33)$$

halini alır, burada asli eğriliklerin $(n-2)$ -tanesi k_2 dir. $m = n - 2 > 1$ olduğundan (3.6.4) – (3.6.6) denklemlerinin tamamı sağlanır. Ayrıca (3.5.12) ile verilen D distribüsyonu integrallenebilirdir ve D nin integral altmanifoldu Lemma 3.5.1 ve Lemma 3.5.2 den $\mathbb{R}^{n-1}$ in hiperküresine veya hiperdüzlemine kongruenttir. Ayrıca Lemma 3.2.2 den ayrıca $e_1 = \partial_s$ nin integral eğrilerinin düzlemsel eğriler olduğu ve bunların birbirine kongruent olduğunu biliyoruz. Bu nedenle kalan kısımda e_n in integral eğrilerine odaklanacağız.

Şimdi M , şekil operatörü (3.6.33) ile verilen bir hiperyüzey olsun. k_1, k_2 ve k_n birbirinden farklı üç asli eğrilik olduklarından $k_1 - k_2, k_1 - k_n, k_2 - k_n$ fonksiyonlarının M üzerinde sıfırdan farklı olduklarını kabul edebiliriz. Eğer M bir null 2-tipli hiperyüzey ise bu durumda M , (3.5.4) ü sağlayan bir bikonservatif hiperyüzeydir. Ayrıca M , bir bikonservatif (H –hiperyüzey) olduğundan (3.5.6) ve (3.6.33) den

$$3k_1 + (n-2)k_2 + k_n = 0 \quad (3.6.34)$$

elde edilir. (3.6.4) ve (3.6.5) ile Codazzi denklemi (2.1.38) birlikte göz önüne alınırsa $\omega_{An}(e_n) = 0$ olur. Böylece

$$\bar{\nabla}_{e_n} e_1 = \omega_{1n}(e_n) e_n, \quad \bar{\nabla}_{e_A} e_1 = \omega_{1A}(e_A) e_A \quad (3.6.35)$$

$$\bar{\nabla}_{e_A} e_n = -\omega_{An}(e_A) e_A, \quad \bar{\nabla}_{e_n} e_A = \omega_{AB}(e_n) e_B \quad (3.6.36)$$

olur.

Şimdi $e_n(k_2) = 0$ olduğunu gösterelim. $e_A(k_2) = 0$ ve $e_A(k_n) = 0$ olması durumunda, $[e_A, e_1](k_2) = e_A(e_1(k_2))$ ve $[e_A, e_1](k_n) = e_A(e_1(k_n))$ elde edilir. (3.6.36) kullanılarak bu denklemlerin sol tarafı hesaplanırsa

$$e_A(e_1(k_2)) = e_A(e_1(k_n)) = 0, \quad A = 2, 3, \dots, n-1 \quad (3.6.37)$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Ayrıca $X = e_A, Y = e_n, Z = e_1$ ve $W = e_A$ için Gauss denklemi (2.1.32) den

$$e_n(\omega_{12}(e_2)) = \frac{e_n(k_2)}{k_2 - k_n} (\omega_{12}(e_2) - \omega_{1n}(e_n)) \quad (3.6.38)$$

elde edilir. Codazzi denklemi (2.1.38) ile (3.5.5), (3.6.34) ve (3.6.38) kullanılarak

$$\begin{aligned} e_n(\omega_{1n}(e_n)) &= e_n\left(\frac{e_1(k_n)}{k_1 - k_n}\right) \\ &= -(n-2)\left(\frac{e_n e_1(k_n)}{k_1 - k_n} + \frac{e_1(k_n) e_n(k_2)}{(k_1 - k_n)^2}\right) \\ &= -(n-2)\frac{e_n(k_2)}{k_1 - k_n}\left(\frac{e_1(k_n)}{k_1 - k_n} - \frac{e_1(k_2)}{k_1 - k_2}\right)\frac{k_1 + k_n - 2k_2}{k_n - k_2} \end{aligned}$$

veya

$$e_n(\omega_{1n}(e_n)) = (n-2)\frac{(2k_2 - k_1 - k_n)e_n(k_2)}{(k_1 - k_n)(k_2 - k_n)}(\omega_{12}(e_2) - \omega_{1n}(e_n)) \quad (3.6.39)$$

olarak bulunur. Diğer taraftan (3.6.33) ve (3.5.4) den

$$-e_1(e_1(k_1)) - \left((n-2)\frac{e_1(k_2)}{k_1 - k_2} + \frac{e_1(k_n)}{k_1 - k_n}\right)e_1(k_1) + k_1(k_1^2 + (n-2)k_2^2 + k_n^2 - \lambda) = 0$$

veya

$$e_1(e_1(k_1)) + (n-2)\omega_{12}(e_2)e_1(k_1) + \omega_{1n}(e_n)e_1(k_1) = k_1(k_1^2 + (n-2)k_2^2 + k_n^2 - \lambda) \quad (3.6.40)$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafının da e_n yönünde türevi alınarak ve (3.5.11), (3.6.38), (3.6.39) kullanılarak

$$e_n(k_n)(e_1(k_1)(\omega_{12}(e_2) - \omega_{1n}(e_n)) - k_1(k_2 - k_n)(k_1 - k_n)) = 0 \quad (3.6.41)$$

bulunur. Kabullerden dolayı $\omega_{12}(e_2) - \omega_{1n}(e_n)$ ve k_1 fonksiyonları sıfırdan farklıdır. Böylece, eğer $e_n(k_n) \neq 0$ ise bu durumda (3.6.41) den

$$\frac{e_1(k_1)}{k_1} = \frac{(k_2 - k_n)(k_1 - k_n)}{\omega_{12}(e_2) - \omega_{1n}(e_n)}$$

olur. Bu denklemin e_n yönünde türevini alarak, (3.5.5) ve (3.5.11) den

$$e_n\left(\frac{(k_2 - k_n)(k_1 - k_n)}{\omega_{12}(e_2) - \omega_{1n}(e_n)}\right) = 0$$

elde edilir. Üstelik, (3.5.5), (3.6.34), (3.6.38) ve (3.6.39) ifadeleri kullanılarak bu denklemin sol tarafından bir a_0 sabiti için $k_n = a_0 k_2$ olarak bulunur. Böylece bu denklem, (3.5.5) ve (3.6.34) den $e_n(k_2) = 0$ olmasını gerektirir ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle

$$e_n(k_2) = 0 \quad (3.6.42)$$

olur ve (3.5.5) ve (3.6.34) den de

$$e_n(k_n) = 0 \quad (3.6.43)$$

elde edilir. Ayrıca Codazzi denklemi (2.1.38) ve (3.6.42) den

$$\omega_{An}(e_A) = 0 \quad (3.6.44)$$

bulunur. Diğer yandan, (3.6.38), (3.6.39), ve (3.6.42) den

$$e_n(\omega_{1n}(e_n)) = e_n(\omega_{1A}(e_A)) = 0 \quad (3.6.45)$$

ve $X = e_A$, $Y = e_n$, $Z = e_1$, $W = e_n$ için Gauss denklemini, (3.6.35) ve (3.6.36) ifadelerinde kullanarak

$$e_A(\omega_{1n}(e_n)) = 0 \quad (3.6.46)$$

elde edilir. $i = 1$, $j = A$ için Codazzi denklemi (2.1.38) de $i = 1$, $j = A$ için $\omega_{1A}(e_A) = \frac{e_1(k_A)}{(k_1 - k_A)}$ olur ve buradan

$$e_A(\omega_{1A}(e_A)) = 0 \quad (3.6.47)$$

olduğu sonucuna ulaşılır.

Önerme 3.6.1. $M, \mathbb{R}^{n+1}$ de şekil operatörü (3.6.33) le verilen ve birinci ortalama eğriliği sabit olmayan bir null 2-tipli hiperyüzey olsun. Bu durumla e_n in bir integral eğrisi ya bir çemberdir ya da bir doğrudur.

İspat: (3.6.44) den

$$\bar{\nabla}_{e_n} e_n = -\omega_{1n}(e_n) e_1 + k_n N, \quad \bar{\nabla}_{e_n} e_1 = \omega_{1n}(e_n) e_n, \quad \bar{\nabla}_{e_n} N = -k_n e_n \quad (3.6.48)$$

olur. Ayrıca (3.6.45) ve (3.6.43) den $\omega_{1n}(e_n)$ ve k_n in, e_n in herhangi bir bağlantılı integral eğrisi α üzerinde sabit olduğu anlamına gelir. t ve n , α nın, sırasıyla, teğet ve normal vektör alanları olsun, burada $t = e_n|_{\alpha}$ dır. Eğer

$$\|\hat{\nabla}_t t\| = a = 0$$

ise bu durumda α bir doğrudur, burada $\hat{\nabla}$, α nın Levi-Civita konneksiyonu ve a , $(\omega_{1n}(e_n)^2 + k_n^2)^{\frac{1}{2}}|_{\alpha}$ ile verilen sabittir. Eğer $\hat{\nabla}_t t \neq 0$ ise bu durumda $n = \frac{\hat{\nabla}_t t}{\|\hat{\nabla}_t t\|}$ olur. (3.6.48)

den $\hat{\nabla}_t t = an$, $\hat{\nabla}_t n = -an$ dir ve böylece α bir düzlemsel eğri, eğriliği ise $a > 0$ sabitidir, yani α bir çemberdir.

(3.6.45) – (3.6.47) ifadelerinden kolayca görülür ki $q = 1$ için (3.6.18) sağlanır. Böylece null 2-tipli hiperyüzeylerin sınıflandırılması için Teorem 3.6.1 e benzer şekilde aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 3.6.2. M , şekil operatörü (3.6.33) ile verilen ve birinci ortalama eğriliği sabit olmayan hiperyüzey olsun. Eğer M bir null 2-tipli hiperyüzey ise bu durumda M aşağıdaki hiperyüzeylerden birine kongruenttir:

i) M , $\psi'^2 + \phi'^2 = 1$ ve (3.6.19) şartını sağlayan ψ , ϕ fonksiyonları için, $m = n - 2$, $q = 1$ olmak üzere (3.6.20) ile verilen bir genelleştirilmiş dönel hiperyüzeydir,

ii) M , $\psi'^2 + \phi'^2 = 1$ ve (3.6.21) şartını sağlayan ψ , ϕ fonksiyonları için, $m = n - 2$, $q = 1$ olmak üzere (3.6.22) ile verilen bir dönel hiperyüzey üzerinde bir genelleştirilmiş silindirdir,

iii) M , $\psi'^2 + \phi'^2 = 1$ ve (3.6.21) şartını sağlayan ψ , ϕ fonksiyonları için, $m = 1$, $q = n - 2$ olmak üzere (3.6.22) ile verilen bir dönel bir hiperyüzey üzerinde bir genelleştirilmiş silindirdir.

4. MINKOWSKI 3-UZAYDA BİKONSERVATİF YÜZEYLER

Bu bölümde ilk önce 3–boyutlu Minkowski (Lorentz) uzayında bikonsarvatif yüzeyleri ve daha sonra ise 3–boyutlu Lorentz uzay formda bikonsarvatif yüzeyleri inceleyeceğiz. Bu yüzeylerle ilgili sınıflandırmalar yapılacak, bunlarla ilgili karakterizasyon teoremleri verilecektir.

3-boyutlu reel uzay $\mathbb{R}^3$ de, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ vektörleri için

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$$

Lorentz metrik ile $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ ikilisine 3-boyutlu Minkowski uzayı denir ve bu $\mathbb{R}_1^3$ ile gösterilir. $\mathbb{R}_1^3$ ün izometri grubu, öteleme grubu ve ortogonal Lorentz grup $O(1, 2)$ nin direkt çarpımı olarak ifade edilir. Bu ortogonal gruba göre $\mathbb{R}_1^3$ ün izometrilerinin üç tane bir parametrelili alt grubu vardır. Bunlar dönme ekseninin causal karakterine göre şu şekilde verilir:

Eğer eksen spacelike ise dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \quad t \in R \text{ (hiperbolik grup)}$$

ile verilir. Eğer eksen timelike ise dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < t < 2\pi \text{ (eliptik grup)}$$

ile verilir. Eğer eksen null ise dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & -t & t \\ t & 1 - \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} \\ t & -\frac{t^2}{2} & 1 + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}, \quad t \in R \text{ (parabolik grup)}$$

ile verilir. $\mathbb{R}_1^3$ deki dönel yüzeyler, izometrilerin üstteki bir parametrelili alt gruplarının birinin etkisi yardımıyla elde edilir [42].

Böylece xz -düzlemindeki profil eğrisi $\gamma(s) = (f(s), 0, g(s))$ olmak üzere dönme eksen spacelike ise dönel yüzey

$$x(s, t) = (f(s), g(s) \cosh t, g(s) \sinh t), \quad g(s) \neq 0$$

veya

$$x(s, t) = (f(s), g(s) \sinh t, g(s) \cosh t), \quad g(s) \neq 0$$

olur. Eğer dönme eksen timelike ise dönel yüzey

$$x(s, t) = (f(s) \cos t, f(s) \sin t, g(s)), \quad f(s) \neq 0$$

dir. Eğer dönme eksenini null ve profil eğrisi $\gamma(s) = (f(s), g(s), 0)$ ise dönel yüzey

$$x(s, t) = \left((f(s) - g(s)) \frac{t^2}{2} + g(s), (f(s) - g(s))t, (f(s) - g(s)) \frac{t^2}{2} + f(s) \right)$$

dir [3].

4.1 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bikonservatif Yüzeylerin Sınıflandırılması

Bir biharmonik yüzeyin aynı zamanda bir bikonservatif yüzey olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla genel olarak bir Riemann manifoldun herhangi bir altmanifoldunun biharmonikliğini karakterize eden teorem, Minkowski uzayındaki yüzeylerin biharmonikliğini ve bikonservatifliğini incelemek için de kullanılır. Şimdi bu bilgileri verelim.

Teorem 4.1.1. $(\bar{M}, \bar{g})$ $(n+1)$ -boyutlu bir Riemann manifold, M de n -boyutlu diferensiyelenebilir manifold ve $x : M \rightarrow \bar{M}$, $H = \mathbf{H}N$ ortalama eğrilik vektörlü bir izometrik immersiyon olsun. Bu durumda x biharmoniktir ancak ve ancak x in bitensiyon alanı $\tau_2(x)$ nin normal ve teğet bileşenleri sırasıyla

$$\Delta \mathbf{H} - \mathbf{H} |A|^2 + \mathbf{H} \bar{Ric}(N, N) = 0, \quad (4.1.1)$$

$$2A(\text{grad } \mathbf{H}) + nH \text{grad } \mathbf{H} - 2\mathbf{H}(\bar{Ric}(N))^\top = 0$$

şartlarını sağlar, burada $\bar{Ric} : T_q \bar{M} \rightarrow T_q \bar{M}$, $\langle \bar{Ric}(Z), W \rangle = \bar{Ric}(Z, W)$ ile tanımlanan, gömülen uzay $\bar{M}$ nin Ricci operatörüdür ve A da N birim normal vektörlü hiperyüzeyin şekil operatörüdür [43].

İspat: M de bir $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ lokal ortonormal çatı seçelim öyle ki $\{dx(e_1), \dots, dx(e_n), N\}$ de $\bar{M}$ nin bir ortonormal çatısı olsun. Buradan $\bar{\nabla}$, ∇ , sırasıyla, $\bar{M}$ ve M nin Levi-Civita konneksiyonları olmak üzere x in tensiyon alanı $\tau(x) = n\mathbf{H}N$ dir. Buradan x in bitensiyon alanını

$$\begin{aligned} \tau_2(x) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} (n\mathbf{H}N) - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^x (n\mathbf{H}N) - \bar{R}(e_i, n\mathbf{H}N) e_i \right\} \\ &= n \sum_{i=1}^n (e_i e_i (\mathbf{H}) N + 2e_i (H) \bar{\nabla}_{e_i} N + \mathbf{H} \nabla_{e_i}^{\bar{M}} \nabla_{e_i}^{\bar{M}} N - (\nabla_{e_i} e_i) (\mathbf{H}N - \mathbf{H} \bar{\nabla}_{e_i} N)) \\ &\quad - n\mathbf{H} \sum_{i=1}^n \bar{R}(e_i, N) (e_i) \\ &= n(\Delta H)N - 2nA(\text{grad } H) - nH \Delta^x N - nH \sum_{i=1}^n \bar{R}(e_i, N) e_i \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Bitensiyon alanının teğet ve normal kısımlarını bulmak için önce eğrilik tensörünün teğet ve normal bileşenlerini hesaplayalım, bunun içinde

$$\sum_{i,k=1}^n \langle \bar{R}(dx(e_i), N) dx(e_i), e_k \rangle e_k = -(\bar{Ric}(N, e_k)) e_k = -(\text{Ric}(N))^\top,$$

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, \tau(x)) e_i, N \rangle = -n \bar{H} \bar{Ric}(N, N)$$

almak yeterlidir. $\Delta^x N$ nin normal kısmını bulmak için

$$\langle \Delta^x N, N \rangle = \sum_{i=1}^n \langle -\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N + \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} N, N \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \quad (4.1.2)$$

almak yeterlidir. Diğer taraftan, h ikinci temel form, N birim normal vektör alanı ve altmanifoldun ikinci temel formu da B olmak üzere hiperyüzeyin şekil operatörü ve ikinci temel form arasındaki ilişki

$$B(X, Y) = \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle N = -\langle Y, \bar{\nabla}_X N \rangle N = \langle AX, Y \rangle N$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \sum_{i,j=1}^n \langle Ae_i, e_j \rangle^2 = \sum_{i,j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle^2 = \sum_{i=1}^n \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \sum_{j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece $\Delta^x N$ nin normal kısmı (4.1.2) den

$$(\Delta^x N)^\perp = \langle \Delta^x N, N \rangle N = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i}^{\bar{M}} N, \bar{\nabla}_{e_i}^{\bar{M}} N \rangle N = |A|^2 N$$

şeklinde yazılır. Basit bir hesaplama ile $\Delta^x N$ nin teğet kısmı

$$\begin{aligned} (\Delta^x N)^\top &= \sum_{i,k=1}^n \langle -\bar{\nabla}_{e_i}^{\bar{M}} N \bar{\nabla}_{e_i}^{\bar{M}} N + \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i}^{\bar{M}} N, e_k \rangle e_k \\ &= \sum_{i,k=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i}^{\bar{M}} N A e_i - A(\nabla_{e_i} e_i), e_k \rangle e_k = \sum_{i,k=1}^m ((\nabla_{e_i} h)(e_k, e_i)) e_k \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

bulunur. Codazzi denkleminde

$$(\bar{R}(e_i, e_k) e_i)^\perp = \langle \bar{R}(e_i, e_k) e_i, N \rangle$$

olduğu dikkate alınırsa, (4.1.3) ü

$$\begin{aligned} (\Delta^x N)^\top &= \sum_{i,k=1}^n ((\nabla_{e_i} h)(e_k, e_i)) e_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n (\nabla_{e_k} h)(e_i, e_i) - \bar{Ric}(N, e_k) \right) e_k = n \text{grad}(H) - (\bar{Ric}(N, e_k)) e_k \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece bitensiyon alanının teğet ve normal kısımlarını ayrı ayrı

$$\begin{aligned} (\tau_2(x))^\perp &= \langle \tau_2(x), N \rangle N = n \left(\Delta H - H |A|^2 + H \bar{Ric}(N, N) \right) N, \\ (\tau_2(x))^\top &= \sum_{k=1}^m \langle \tau_2(x), e_k \rangle e_k = -n \left(2A(\text{grad} H) + \frac{1}{2} n (\text{grad} H^2) - 2H (\bar{Ric}(N)) \right)^\top \end{aligned}$$

olarak bulmuş oluruz ve bu da ispatı tamamlar.

3-boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{R}_1^3$ de bir yönlendirilebilir non-degenere (spacelike veya timelike) yüzey M ve M nin birim normal vektör alanı N olmak üzere M nin bir ortonormal çatısı $\{e_1, e_2, N\}$, $\varepsilon = \langle N, N \rangle = \pm 1$ olsun. Eğer $\varepsilon = -1$ ise M spacelike, $\varepsilon = 1$ ise de timelike hiperyüzeydir.

Şimdi daha sonra kullanacağımız [12] da verilen sonucu ifade edelim.

Lemma 4.1.1. 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey M ve M nin ortalama eğrilik vektör alanı $H = \mathbf{H}N$ olsun, burada $\mathbf{H}$, M nin ortalama eğriliğidir. Bu durumda M nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta \mathbf{H} + \varepsilon \mathbf{H} |A|^2 = 0, \quad (4.1.4)$$

$$A(\text{grad } \mathbf{H}) + \varepsilon \mathbf{H} \text{grad } \mathbf{H} = 0 \quad (4.1.5)$$

ifadelerini sağlamasıdır, burada A , N birim normal vektörlü hiperyüzeyin şekil operatörüdür [12].

Bundan önceki bölümden de hatırlanacağı gibi (4.1.5) şartını sağlayan yüzey bir bikonservatif yüzeydir. Buna göre $\mathbb{R}_1^3$ de sabit ortalama eğrilik ($CMC = \text{constant mean curvature}$) vektörüne sahip yüzeyler aşikar olarak bikonservatif yüzeylerdir. Bundan sonraki kısımda kısalık için "sabit ortalama eğrilikli" yerine CMC ifadesini kullanacağız. Böylece CMC yüzeyler bikonservatif yüzeyler ailesine aittir.

Aşağıda verilecek olan teorem 3-boyutlu Minkowski uzayında bikonservatif yüzeyleri karakterize eden teoremdir.

Teorem 4.1.2. 3-boyutlu Minkowski uzayında bir bikonservatif immersiyon $x : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ ve $\text{grad } \mathbf{H}$ non-null olsun. Bu durumda M ya bir CMC yüzeydir veya aşağıda lokal olarak verilen yedi yüzeyden biridir [3]:

1) M yüzeyi

$$x(u, t) = (f(u), u \cosh t, u \sinh t), \quad u \in (27, +\infty),$$

ile verilen bir spacelike eksenli timelike dönel yüzey ve burada

$$f(u) = \frac{9}{2} \left(u^{\frac{1}{3}} \sqrt{u^{\frac{2}{3}} - 9} + 9 \ln \left(u^{\frac{1}{3}} + \sqrt{u^{\frac{2}{3}} - 9} \right) \right)$$

dur.

2) M yüzeyi

$$x(u, t) = (f(u), u \sinh t, u \cosh t), \quad u \in (0, 27)$$

ile verilen bir spacelike eksenli spacelike dönel yüzey ve burada

$$f(u) = \frac{81}{2} \arcsin \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}} - \frac{9}{2} u^{\frac{1}{3}} \sqrt{9 - u^{\frac{2}{3}}}$$

dir.

3) M yüzeyi

$$x(u, t) = (u \cos t, u \sin t, f(u)), \quad u \in (0, +\infty)$$

ile verilen bir timelike eksenli spacelike dönel yüzey ve burada

$$f(u) = \frac{9}{2} \left(u^{\frac{1}{3}} \sqrt{u^{\frac{2}{3}} + 9} - 9 \ln \left(u^{\frac{1}{3}} + \sqrt{u^{\frac{2}{3}} + 9} \right) \right)$$

dir.

4) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(\frac{1}{2} u t^2 - \frac{1}{30} u^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2} u, u t, \frac{1}{2} u t^2 - \frac{1}{30} u^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{2} u \right), \quad u \in (0, +\infty)$$

ile verilen bir lightlike eksenli spacelike dönel yüzeydir.

5) M yüzeyi

$$x(u, t) = (f(u), u \sinh t, u \cosh t), \quad u \in (0, \infty)$$

ile verilen bir spacelike eksenli timelike dönel yüzey ve burada

$$f(u) = \frac{9}{2} \left(u^{\frac{1}{3}} \sqrt{u^{\frac{2}{3}} + 9} - 9 \ln \left(u^{\frac{1}{3}} + \sqrt{u^{\frac{2}{3}} + 9} \right) \right)$$

dir.

6) M yüzeyi

$$x(u, t) = (u \cos t, u \sin t, f(u)), \quad u \in (0, 27)$$

ile verilen bir timelike eksenli timelike dönel yüzey ve burada

$$f(u) = \frac{81}{2} \arcsin \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}} - \frac{9}{2} u^{\frac{1}{3}} \sqrt{9 - u^{\frac{2}{3}}}$$

dir.

7) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(\frac{1}{2} u t^2 + \frac{1}{30} u^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2} u, u t, \frac{1}{2} u t^2 + \frac{1}{30} u^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{2} u \right), \quad u \in (0, +\infty)$$

ile verilen bir null eksenli timelike dönel yüzeydir.

İspat: *CMC* yüzeyleri aşıkarak olarak bikonservatif olduklarından sadece *CMC* olmayan yüzeylere odaklanacağız. Şimdi bir $p \in M$ noktasında $\text{grad } \mathbf{H} \neq 0$ olduğunu varsayalım. (4.1.5) ifadesinden

$$A(\text{grad } \mathbf{H}) = -\varepsilon \mathbf{H}(\text{grad } \mathbf{H}) \quad (4.1.6)$$

dır ve bu da gösterir ki $\text{grad } \mathbf{H}$ asli doğrultusuna karşılık gelen asli eğrilik $-\varepsilon \mathbf{H}$ dir. Buna göre $\text{grad } \mathbf{H}$ nin causal karakteri önemli rol oynar ve üç durum söz konusudur.

Durum 4.1.1. $\text{grad } \mathbf{H}$ spacelike olsun. $e_1, \text{grad } \mathbf{H}$ ya paralel olmak üzere M üzerinde bir ortonormal çatı $\{e_1, e_2\}$ olsun. Bu durumda $\langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon$ ve $e_2(\mathbf{H}) = 0$ olur. (4.1.6) den $Ae_1 = -\varepsilon \mathbf{H}e_1$ ve $\mathbf{H} = \varepsilon \frac{k_1+k_2}{2}$ olduğu gözönüne alınırsa $Ae_2 = 3\varepsilon \mathbf{H}e_2$ elde edilir. $X \in \Gamma(TM)$ için $\nabla_X e_1 = \omega(X)e_2$ olmak üzere $\nabla_X e_2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ den $\lambda_1 = \varepsilon \omega(X)$, $\lambda_2 = 0$ olarak bulunur; yani $\nabla_X e_2 = \varepsilon \omega(X)e_1$ olur. Buna göre Codazzi denklemi $(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X$ ifadesinde $X = e_1$, $Y = e_2$ için bu değerler yerlerine yazılırsa

$$\nabla_{e_1} A e_2 - A(\nabla_{e_1} e_2) = \nabla_{e_2} A e_1 - A(\nabla_{e_2} e_1)$$

veya

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} (3\varepsilon \mathbf{H}e_2) - A(\varepsilon \omega(e_1)e_2) \\ = \nabla_{e_2} (-\varepsilon \mathbf{H}e_1) - A(\omega(e_2)e_2) \end{aligned}$$

olur. Buradan hesaplamalar yapılır ve e_1, e_2 bileşenlerine ayrıştırılırsa

$$4\mathbf{H}\omega(e_1) = 0, \quad (4.1.7)$$

$$3e_1(\mathbf{H}) = -4\mathbf{H}\omega(e_2) \quad (4.1.8)$$

elde edilir. $\mathbf{H}$ sabit olmadığından (4.1.7) den $\omega(e_1) = 0$ olarak bulunur. Genelliği bozmaksızın $\mathbf{H} > 0$ olduğunu kabul edelim. $u = \mathbf{H}^{-\frac{3}{4}}$ için

$$\begin{aligned} [e_1, ue_2] &= (\nabla_{e_1} ue_2 - \nabla_{ue_2} e_1) \\ &= e_1(u)e_2 + u\nabla_{e_1} e_2 - u\nabla_{e_2} e_1 \\ &= -\frac{3}{4}\mathbf{H}^{-\frac{7}{4}}e_1(\mathbf{H})e_2 + u\varepsilon\omega(e_1)e_2 - u\omega(e_2)e_2 \end{aligned}$$

dir. $\omega(e_1) = 0$ ve (4.1.8) den $e_1(\mathbf{H}) = -\frac{4}{3}\mathbf{H}\omega(e_2)$ olduğundan

$$\begin{aligned} [e_1, ue_2] &= \left(-\frac{3}{4}\mathbf{H}^{-\frac{7}{4}} \left(-\frac{4}{3}\mathbf{H} \right) - \mathbf{H}^{-\frac{7}{4}} \right) \omega(e_2)e_2 \\ &= \left(\mathbf{H}^{-\frac{3}{4}} - \mathbf{H}^{-\frac{3}{4}} \right) \omega(e_2)e_2 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, M üzerinde $\frac{\partial}{\partial s} = e_1$ ve $\frac{\partial}{\partial t} = ue_2$ olacak şekildeki (s,t) lokal koordinat sistemini seçebiliriz. Buradan M nin metrik tensörü

$$g = ds^2 - \epsilon u^2 dt^2 \quad (4.1.9)$$

şeklinde bulunur. $e_2(\mathbf{H}) = 0$ ve $u = \mathbf{H}^{-\frac{3}{4}}$ olduğundan u sadece s değişkenine bağlıdır. Böylece M nin Levi-Civita konneksiyonu,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s} = 0, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s} = \frac{u'}{u} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = \epsilon uu' \frac{\partial}{\partial s} \quad (4.1.10)$$

şeklinde ve ikinci temel formu ise

$$h\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}\right) = -u^{-\frac{4}{3}}N, \quad h\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 0, \quad h\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = -3\epsilon u^{\frac{2}{3}}N \quad (4.1.11)$$

olarak elde edilir. Gauss formülünde $x_{ss} = \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s} + h\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}\right)$ olduğundan ve (4.1.10) ile (4.1.11) den

$$x_{ss} = -u^{-\frac{4}{3}}N, \quad x_{st} = \frac{u'}{u}x_t, \quad x_{tt} = \epsilon uu'x_s - 3\epsilon u^{\frac{2}{3}}N \quad (4.1.12)$$

elde edilir. Ayrıca $\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} N = N_s = -A \frac{\partial}{\partial s} = -Ae_1$ ve $\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} N = N_t = -A \frac{\partial}{\partial t} = -Aue_2 = -uAe_2$ olduğundan

$$N_s = \epsilon u^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial}{\partial s}, \quad N_t = -3\epsilon u^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.1.13)$$

olarak bulunur. (4.1.12) de verilen kısmi diferensiyel denklem sisteminin bağdaşabilir olma şartı, (4.1.13) kullanılarak

$$u'' = 3\epsilon u^{-\frac{5}{3}} \quad (4.1.14)$$

şeklinde elde edilir. (4.1.14) ifadesinin s değişkenine göre integralini alalım. $v = u'$ değişken değiştirmesi yapılırsa $u'' = \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{du} \frac{du}{ds} = v \frac{dv}{du}$ veya

$$v dv = 3\epsilon u^{-\frac{5}{3}} du$$

olur. Buradan integral alınırsa bir C integral sabiti için

$$u'^2 + 9\epsilon u^{-\frac{2}{3}} = C \quad (4.1.15)$$

bulunur. (4.1.15) denkleminin s değişkenine göre tekrar integralini alalım. $\epsilon = 1$ için

$$\frac{du}{ds} = \pm u^{-\frac{1}{3}} \sqrt{Cu^{\frac{2}{3}} - 9} \quad (4.1.16)$$

veya

$$\frac{u^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{Cu^{\frac{2}{3}} - 9}} du = \pm ds$$

olarak yazılır. Eşitliğin sol taraftaki kısmının binom integrali olduğu dikkate alınırsa

$$\frac{1}{C^2} \left(\left(Cu^{\frac{2}{3}} - 9 \right)^{\frac{3}{2}} + 27\sqrt{Cu^{\frac{2}{3}} - 9} \right) = \pm s + C_1$$

veya buna eşdeğer olarak

$$\left(Cu^{\frac{2}{3}} - 9 \right)^{\frac{3}{2}} + 27\sqrt{Cu^{\frac{2}{3}} - 9} = \pm s + C_1, \quad 9u^{-\frac{2}{3}} < C$$

elde edilir. Benzer şekilde $\varepsilon = -1$ için $C = 0$ olduğunda

$$u = (\pm 4s + C_1)^{\frac{3}{4}}$$

ve $C \neq 0$ olduğunda

$$\left(Cu^{\frac{2}{3}} + 9 \right)^{\frac{3}{2}} - 27\sqrt{Cu^{\frac{2}{3}} + 9} = \pm s + C_1, \quad 9u^{-\frac{2}{3}} > -C$$

olarak bulunur, burada C_1 ikinci kez alınan integralden gelen integral sabitidir.

(4.1.12) nin ikinci denkleminin çözümünden, x immersiyonu, L^3 de vektör değerli fonksiyonlar $a(t)$ ve $b(s)$ için

$$x = u(s)a(t) + b(s) \quad (4.1.17)$$

olarak yazılır. (4.1.12) nin birinci denkleminde $N_s = u^{-\frac{4}{3}}x_{ss}$ olduğundan ve (4.1.17) den x_s, x_{tt}, x_{ss} türevleri alınıp (4.1.12) nin üçüncü denkleminde yerine yazılırsa

$$ua''(t) = \varepsilon uu'(u'a(t) + b'(s)) + 3\varepsilon u^2(u''a(t) + b''(s))$$

veya düzenlenirse buna eşdeğer olarak

$$a''(t) = \varepsilon(u'^2 + 3uu'')a(t) + \varepsilon u'b'(s) + 3\varepsilon ub''(s)$$

olarak bulunur. (4.1.14) ve (4.1.15) denklemlerindeki u'' ve u'^2 değerleri bu son denklemde yerine yazılırsa

$$a''(t) - \varepsilon Ca(t) = \varepsilon(u'b'(s) + 3ub''(s)) \quad (4.1.18)$$

elde edilir. (4.1.18) denkleminin sağ tarafı s ye, sol tarafı ise t ye bağlıdır. Böylece (4.1.18) denklemi sabit olmak zorundadır, yani $\mathbb{R}_1^3$ de bir sabit c vektörü vardır ve

$$a''(t) - \varepsilon Ca(t) = c, \quad (4.1.19)$$

$$\varepsilon(u'b'(s) + 3ub''(s)) = c \quad (4.1.20)$$

dir. Şimdi ε ve C nin farklı durumlarına göre bunu dört farklı şekilde inceleyebiliriz.

Durum 1.A $\varepsilon = 1$ ve $C > 0$ Hali. Bu durumda $\langle N, N \rangle = \varepsilon = 1$ olduğundan immersiyon bir timelike yüzeydir. (4.1.19) denklemi ikinci mertebeden, sabit katsayılı, homojen olmayan bir lineer diferensiyel denklemdir. O halde bu denklemin homojen kısmı ve özel çözümüünden $c_1, c_2 \in \mathbb{L}^3$ sabit vektörleri için

$$a(t) = c_1 \cosh(\sqrt{C}t) + c_2 \sinh(\sqrt{C}t) - \frac{1}{C}c \quad (4.1.21)$$

olarak bulunur. (4.1.17) denklemine tekrar dönecek olursak burada $c = 0$ olduğunu kabul edebiliriz, yani

$$\bar{a}(t) = c_1 \cosh(\sqrt{C}t) + c_2 \sinh(\sqrt{C}t)$$

ve

$$\bar{b}(s) = -\frac{1}{C}u(s)c + b(s)$$

olmak üzere immersiyonu yeniden

$$x = u(s)\bar{a}(t) + \bar{b}(s)$$

şekilde yazabiliriz. Böylece x immersiyonu

$$x = u(s) \left(c_1 \cosh(\sqrt{C}t) + c_2 \sinh(\sqrt{C}t) \right) + b(s) \quad (4.1.22)$$

olur. (4.1.20) diferensiyel denklem sisteminin çözümü ise $\varepsilon = 1, C > 0$ için, $y = \frac{db}{ds}$ denilirse

$$\frac{dy}{ds} + \frac{u'}{3u}y = \frac{C}{3u}$$

haline dönüşür. Bu denklem birinci mertebeden lineer olan diferensiyel denklemdir. Bu denklemin integral çarpanı $\mu(s) = e^{\frac{1}{3} \int \frac{u'}{u} ds} = u^{\frac{1}{3}}$ dır. Buna göre sistemin çözümü, c_3 bir sabit vektör olmak üzere

$$y = b'(s) = u^{-\frac{1}{3}}c_3 \quad (4.1.23)$$

olarak bulunur. Bu durumda (4.1.22) den

$$\begin{aligned} x_s &= u' \left(c_1 \cosh(\sqrt{C}t) + c_2 \sinh(\sqrt{C}t) \right) + u^{-\frac{1}{3}}c_3, \\ x_t &= \sqrt{C}u(s) \left(c_1 \sinh(\sqrt{C}t) + c_2 \cosh(\sqrt{C}t) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.9) indirgenmiş metriğinde $\langle e_1, e_1 \rangle = -\langle e_2, e_2 \rangle = 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\langle c_1, c_1 \rangle = -\langle c_2, c_2 \rangle = \frac{1}{C}, \quad (4.1.24)$$

$$\langle c_1, c_2 \rangle = \langle c_1, c_3 \rangle = \langle c_2, c_3 \rangle = 0,$$

$$\frac{1}{C}u'^2 + u^{-\frac{2}{3}}\langle c_3, c_3 \rangle = 1 \quad (4.1.25)$$

ifadelerine ulaşılır. $u'^2 + 9u^{-\frac{2}{3}} = C$ olduğu göz önüne alınırsa (4.1.25) denkleminde

$$\langle c_3, c_3 \rangle = \frac{9}{C}$$

bulunur. $C = 1$ olarak alacak olursak, $\mathbb{L}^3$ de c_1, c_2, c_3 vektörlerini

$$c_1 = (0, 1, 0), \quad c_2 = (0, 0, 1), \quad c_3 = (3, 0, 0) \quad (4.1.26)$$

olarak seçebiliriz. (4.1.23) denkleminde $b = b(u(s))$ şeklindedir, buna göre $\frac{db}{ds} = \frac{db}{du} \frac{du}{ds}$ olduğu göz önüne alınır ve $\dot{b} = \frac{db}{du}$ dersek

$$\dot{b}(u)u'(s) = u^{-\frac{1}{3}}c_3 \quad (4.1.27)$$

olarak yazabiliriz. (4.1.16) daki u' değeri üstte yerine yazılırsa

$$\dot{b}(u) = \pm \frac{1}{\sqrt{u^{\frac{2}{3}} - 9}}c_3 \quad (4.1.28)$$

olur. Bu son ifadenin u ya göre integralini alırsak

$$b(u) = \pm \frac{3}{2} \left(u^{\frac{1}{3}} \sqrt{u^{\frac{2}{3}} - 9} + 9 \ln \left(u^{\frac{1}{3}} + \sqrt{u^{\frac{2}{3}} - 9} \right) \right) c_3 + c_4 \quad (4.1.29)$$

elde edilir, burada c_4 , $\mathbb{L}^3$ de bir sabit vektördür. (4.1.22) ifadesinde (4.1.26) daki c_1, c_2, c_3 vektörlerini ve (4.1.29) daki $b(u)$ değerini yerine yazarsak

$$x(u, t) = (f(u), u \cosh t, u \sinh t), \quad u \in (27, +\infty) \quad (4.1.30)$$

olarak bulunur, burada

$$f(u) = \frac{9}{2} \left(u^{\frac{1}{3}} \sqrt{u^{\frac{2}{3}} - 9} + 9 \ln \left(u^{\frac{1}{3}} + \sqrt{u^{\frac{2}{3}} - 9} \right) \right).$$

dur. (4.1.30) denkleminde dikkat edilecek olursa bu immersiyon spacelike eksenli ve profil eğrisi $\gamma(u) = (f(u), 0, u)$ olan bir timelike dönel yüzeydir.

Durum 1.B. $\varepsilon = -1$ ve $C < 0$ Hali. Bu durumda yüzey, $\langle N, N \rangle = -1$ olduğundan bir spacelike yüzeydir. Durum A.1 de olduğu gibi benzer hesaplamalarla immersiyon

$$x(u, t) = (f(u), u \sinh t, u \cosh t), \quad u \in (0, 27) \quad (4.1.31)$$

olarak bulunur ve burada

$$f(u) = \frac{81}{2} \arcsin \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}} - \frac{9}{2} u^{\frac{1}{3}} \sqrt{9 - u^{\frac{2}{3}}}$$

dür. (4.1.31) denkleminde dikkat edilecek olursa bu immersiyon, spacelike eksenli ve profil eğrisi

$$\gamma(u) = (f(u), 0, u)$$

olan bir spacelike dönel yüzeydir.

Durum 1.C. $\varepsilon = -1$ ve $C > 0$ Hali. Bu durumda yüzey, $\langle N, N \rangle = -1$ olduğundan bir spacelike yüzeydir. $c = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (4.1.19) denklemi

$$a''(t) + Ca(t) = 0$$

halini alır ve bu denklem ikinci mertebeden, sabit katsayılı homojen lineer diferensiyel denklemdir. c_1 ve c_2 iki sabit vektör olmak üzere son denklemin çözümü

$$a(t) = c_1 \cos(\sqrt{C}t) + c_2 \sin(\sqrt{C}t) \quad (4.1.32)$$

dir. Böylece immersiyon

$$x(s, t) = u(s) \left(c_1 \cos(\sqrt{C}t) + c_2 \sin(\sqrt{C}t) \right) + b(s) \quad (4.1.33)$$

olur. (4.1.20) denkleminin çözümü c_3 sabit vektör olmak üzere

$$b'(s) = u^{-\frac{1}{3}} c_3 \quad (4.1.34)$$

olarak bulunur. (4.1.33) de x_s, x_t vektörleri (4.1.9) daki metriğe göre $g(x_s, x_s) = 1$, $g(x_t, x_t) = -\varepsilon u^2$, $g(x_s, x_t) = 0$ oldukları dikkate alınır ve hesaplamalar yapılırsa

$$\langle c_1, c_1 \rangle = \langle c_2, c_2 \rangle = \frac{1}{C}, \quad (4.1.35)$$

$$\langle c_1, c_2 \rangle = \langle c_1, c_3 \rangle = \langle c_2, c_3 \rangle = 0,$$

$$\frac{1}{C} u'^2 + u^{-\frac{2}{3}} \langle c_3, c_3 \rangle = 1$$

ve (4.1.35) in son denklemini ile C ile çarpılır ve (4.1.15) ile birlikte göz önüne alınırsa

$$\langle c_3, c_3 \rangle = -\frac{9}{C}$$

olarak elde edilir. $C = 1$ olduğunu kabul edersek bu sabit vektörler, c_1, c_2, c_3 ü

$$c_1 = (1, 0, 0), \quad c_2 = (0, 1, 0), \quad c_3 = (0, 0, 3) \quad (4.1.36)$$

olarak seçebiliriz. $b'(s) = \frac{db}{du} \frac{du}{ds}$ olduğundan $\dot{b} = \frac{db}{du}$ denilirse (4.1.34) ifadesi

$$\dot{b}(u) u'(s) = u^{-\frac{1}{3}} c_3 \quad (4.1.37)$$

olarak yazılır. Buna göre (4.1.15) den u' ifadesi, (4.1.37) de yerine yazılırsa

$$\dot{b}(u) = \pm \frac{1}{\sqrt{u^{\frac{2}{3}} + 9}} c_3 \quad (4.1.38)$$

olur. (4.1.38) den

$$\int db = \pm c_3 \int \frac{1}{\sqrt{u^{\frac{2}{3}} + 9}} du$$

olur ve her iki tarafın integrali alındığında

$$b(u) = \pm \frac{3}{2} \left(u^{\frac{1}{3}} \sqrt{u^{\frac{2}{3}} + 9} - 9 \ln \left(u^{\frac{1}{3}} + \sqrt{u^{\frac{2}{3}} + 9} \right) \right) c_3 + c_4 \quad (4.1.39)$$

olarak bulunur, burada c_4 integral sabiti olan vektördür. O halde (4.1.33), (4.1.36) ve (4.1.39) dan x immersiyonu

$$x(u, t) = (u \cos t, u \sin t, f(u))$$

olarak yazılır ve burada f fonksiyonu

$$f(u) = \frac{9}{2} \left(u^{\frac{1}{3}} \sqrt{u^{\frac{2}{3}} + 9} - 9 \ln \left(u^{\frac{1}{3}} + \sqrt{u^{\frac{2}{3}} + 9} \right) \right), \quad u \in (0, +\infty)$$

dur. Bu durumda immersiyon timelike eksenli ve profil eğrisi

$$\gamma(u) = (u, 0, f(u))$$

olan bir spacelike yüzeydir.

Durum 1.D. $\varepsilon = -1$ ve $C = 0$ Hali. (4.1.19) denklemi $a''(t) = c$ haline gelir. Burada t ye göre integral alınır

$$a'(t) = ct + c_1$$

ve tekrar integral alınır

$$a(t) = \frac{1}{2} ct^2 + c_1 t + c_2 \quad (4.1.40)$$

olur, burada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_1^3$ sabit vektörlerdir. Üst taraflarda olduğu gibi $c_2 = 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda (4.1.20) denklemi b nin u ya göre birinci türevi $\dot{b}$ ve ikinci türevi $\ddot{b}$ olmak üzere $b'' = \ddot{b}u'^2 + \dot{b}u''$ olacağından

$$3uu'^2\ddot{b} + (3uu'' - u'^2)\dot{b} = -c \quad (4.1.41)$$

olur. $C = 0$ için (4.1.14) den $u'' = -3u^{-\frac{5}{3}}$ ve (4.1.15) dan $u'^2 = 9u^{-\frac{2}{3}}$ değerleri (4.1.41) de yerine yazılırsa

$$\ddot{b} = -\frac{1}{27}u^{-\frac{1}{3}}c \quad (4.1.42)$$

olarak bulunur. Bu denklem u ya göre ikinci dereceden bir diferensiyel denklemdir ve çözümü ise

$$b(u) = -\frac{1}{30}u^{\frac{5}{3}}c + uc_3 + c_4 \quad (4.1.43)$$

dir ve burada $c_3, c_4, \mathbb{R}_1^3$ de sabit vektörlerdir. Böylece $x(s, t) = u(s)a(t) + b(s)$ immersiyonu $c_4 = 0$ için

$$x(u, t) = u \left(\frac{1}{2}ct^2 + c_1t \right) - \frac{1}{30}u^{\frac{5}{3}}c + uc_3 \quad (4.1.44)$$

halini alır. (4.1.44) de x_u, x_t kısmi türevleri alınıp $\langle x_u, x_u \rangle, \langle x_u, x_t \rangle, \langle x_t, x_t \rangle$ hesaplanarak ve $u'^2 = 9u^{-\frac{2}{3}}$ olduğu dikkate alınır

$$\langle c, c \rangle = \langle c, c_1 \rangle = \langle c_1, c_3 \rangle = \langle c_3, c_3 \rangle = 0,$$

$$\langle c_1, c_1 \rangle = 1, \quad \langle c, c_3 \rangle = -1$$

olarak bulunur. Böylece $\mathbb{R}_1^3$ deki c_1, c_2, c_3 sabit vektörlerini

$$c_1 = (0, 1, 0), \quad c = (1, 0, 1), \quad c_3 = \frac{1}{2}(-1, 0, 1) \quad (4.1.45)$$

olarak seçilebiliriz. (4.1.44) ile (4.1.45) birlikte göz önüne alınırsa x immersiyonu

$$x(u, t) = \left(\frac{1}{2}ut^2 - \frac{1}{30}u^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2}u, ut, \frac{1}{2}ut^2 - \frac{1}{30}u^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{2}u \right)$$

şeklinde elde edilir. Bu immersiyon ise profil eğrisi

$$\gamma(u) = \left(-\frac{1}{30}u^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{2}u, -\frac{1}{30}u^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2}u, 0 \right)$$

olan bir null eksenli dönel spacelike yüzeydir.

Durum 4.1.2. Ortalama eğrilik fonksiyonunun gradienti $\text{grad} \mathbf{H}$ timelike olsun. Bu durumda yüzey de bir timelike yüzey olur. Durum 4.1.1 de olduğu gibi benzer tartışmalarla teoremin ifadesindeki (5), (6) ve (7) timelike yüzeyleri elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4.2 Lorentz 3-Uzay Formlarda Bikonservatif Yüzeylerin Sınıflandırılması

$(n+1)$ -boyutlu yarı-Öklid uzayını $\mathbb{R}_s^{n+1}$ ile ve s -ideksli yarı-Öklid metriğini de, $x, y \in \mathbb{R}_s^{n+1}$ için,

$$g(x, y) = -\sum_{i=1}^s x_i y_i + \sum_{j=s+1}^{n+1} x_j y_j$$

ile gösterelim. $\mathbb{R}_s^{n+1}$ de

$$\mathbb{S}_1^n(c) = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = c^{-1}\}, \quad \mathbb{H}_1^n(-c) = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -c^{-1}\}$$

olmak üzere $\mathbb{S}_1^n(c)$ ve $\mathbb{H}_1^n(-c)$ sabit eğrilikli Lorentz manifoldlardır ve $\mathbb{S}_1^n(c)$ ye *de Sitter uzayı* (Lorentz küre), $\mathbb{H}_1^n(-c)$ ye de *anti-de Sitter uzayı* (Hiperbolik uzay) denir. Bu uzay formlar $M_1^n(c)$ ile gösterilecektir. $M_1^3(c)$, $c = \pm 1$, 3-boyutlu non-flat Lorentz uzay formda bir non-dejenere yönlendirilebilir yüzey M nin immersiyonu $x : M \rightarrow M_1^3(c)$ olsun. Böylece $M_1^3(c)$ uzay formu $c = 1$ için $\mathbb{R}_1^4$ uzayında de Sitter uzayı (Lorentz 3-küre) ve $c = -1$ için $\mathbb{R}_2^4$ uzayında anti-de Sitter uzayı (Hiperbolik 3-uzay) dır. $M_1^3(c)$ de M yüzeyinin birim normali N olmak üzere $\varepsilon = \langle N, N \rangle$ ve M nin bir ortonormal çatısı $\{e_1, e_2\}$ olsun. Bu durumda $\varepsilon = -1$ ise M bir spacelike yüzey, $\varepsilon = 1$ ise de M bir timelike yüzeydir. M nin ortalama eğrilik vektör alanı $H = \mathbf{H}N$ ve şekil operatörü de A olsun. Bu durumda bundan önceki kısımda olduğu gibi aşağıdaki lemmaya sahip oluruz.

Lemma 4.2.1. *M , Lorentz 3-uzay form $M_1^3(c)$ de bir yüzey olmak üzere M nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart*

$$\Delta \mathbf{H} + \varepsilon \mathbf{H} |A|^2 - 2c \mathbf{H} = 0 \quad (4.2.1)$$

$$A(\text{grad } \mathbf{H}) + \varepsilon \mathbf{H}(\text{grad } \mathbf{H}) = 0 \quad (4.2.2)$$

denklemlerinin sağlanmasıdır, burada Δ , M üzerindeki Laplasyandır [44].

Lemma (4.2.1) den M yüzeyinin bikonservatif yüzey olması için (4.2.2) in sağlanması gerekir. Aşıkarak $M_1^3(c)$ deki CMC yüzeyleri bikonservatif yüzeylerdir.

Şimdi $\mathbb{S}_1^3(1)$ i $\mathbb{R}_1^4$ in ve $\mathbb{H}_1^3(-1)$ i de $\mathbb{R}_2^4$ nin hiperyüzeyleri olarak göz önüne alalım. $\mathbb{R}_1^4$ veya $\mathbb{R}_2^4$ de M yüzeyinin yer vektörünü x ile, normal konneksiyonunu da $\nabla^\perp$ ile gösterelim. İlk önce $M_1^3(c)$ deki bikonservatif M yüzeylerinin sınıflandırma teoremlerini ifade edelim ve ifade edilen bu teoremlerin ispatları benzer olduğundan bir tek ispat şeklinde verelim.

Teorem 4.2.1. *Dört boyutlu Lorentz uzay $\mathbb{R}_1^4$ de üç boyutlu de Sitter uzayı $\mathbb{S}_1^3(1)$ in bir bikonservatif M yüzeyi $x : M \rightarrow \mathbb{S}_1^3(1) \subset \mathbb{R}_1^4$ immersiyonu ile verilsin. Bu durumda $x(M)$ ya bir CMC yüzeyidir ya da aşağıdaki dokuz yüzeyden birisidir [4].*

1) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(u \sinh t, u \cosh t, \sqrt{1-u^2} \cos f, \sqrt{1-u^2} \sin f \right), \quad u \in (0, 1)$$

ile verilen bir timelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \pm \int \frac{3u^{-\frac{1}{3}}}{(1-u^2) \sqrt{1-9u^{-\frac{2}{3}}-u^2}} du$$

dur.

2) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(u \cosh t, u \sinh t, \sqrt{1+u^2} \cos f, \sqrt{1+u^2} \sin f \right), \quad u \in (0, \infty)$$

ile verilen bir spacelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \pm \int \frac{3u^{-\frac{1}{3}}}{(1+u^2) \sqrt{9u^{-\frac{2}{3}}-u^2-1}} du$$

dur.

3) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(\sqrt{1-u^2} \sinh f, \sqrt{1-u^2} \cosh f, u \cos t, u \sin t \right), \quad u \in (0, 1)$$

ile verilen bir spacelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \pm \int \frac{3u^{-\frac{1}{3}}}{(1-u^2) \sqrt{1+9u^{-\frac{2}{3}}-u^2}} du$$

dur.

4) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(\sqrt{u^2-1} \cosh f, \sqrt{u^2-1} \sinh f, u \cos t, u \sin t \right), \quad u \in (1, \infty)$$

ile verilen bir spacelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \pm \int \frac{3u^{-\frac{1}{3}}}{(u^2-1) \sqrt{1+9u^{-\frac{2}{3}}-u^2}} du$$

dur.

5) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(\frac{1}{2} \left(ut^2 + uf^2 - \frac{1}{u} + u \right), \frac{1}{2} \left(ut^2 + uf^2 - \frac{1}{u} - u \right), uf, ut \right), \quad u \in \left(0, 3^{\frac{3}{4}} \right)$$

ile verilen bir spacelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \int \frac{3}{u^2 \sqrt{9 - u^{\frac{8}{3}}}} du$$

dur.

6) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(u \cosh t, u \sinh t, \sqrt{1 + u^2} \cos f, \sqrt{1 + u^2} \sin f \right), \quad u \in (0, \infty)$$

ile verilen bir timelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \int \frac{3u^{-\frac{1}{3}}}{(1 + u^2) \sqrt{9u^{-\frac{2}{3}} + u^2 + 1}} du$$

dur.

7) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(\sqrt{1 - u^2} \sinh f, \sqrt{1 - u^2} \cosh f, u \cos t, u \sin t \right), \quad u \in (0, 1)$$

ile verilen bir timelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \pm \int \frac{3u^{-\frac{1}{3}}}{(1 - u^2) \sqrt{9u^{-\frac{2}{3}} + u^2 - 1}} du$$

dur.

8) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(\sqrt{u^2 - 1} \cosh f, \sqrt{u^2 - 1} \sinh f, u \cos t, u \sin t \right), \quad u \in (1, \infty)$$

ile verilen bir timelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \pm \int \frac{3u^{-\frac{1}{3}}}{(u^2 - 1) \sqrt{9u^{-\frac{2}{3}} + u^2 - 1}} du$$

dur.

9) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(\frac{1}{2} \left(ut^2 + uf^2 - \frac{1}{u} + u \right), \frac{1}{2} \left(ut^2 + uf^2 - \frac{1}{u} - u \right), uf, ut \right), \quad u \in (0, \infty)$$

ile verilen bir timelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \int \frac{3}{u^2 \sqrt{9 + u^{\frac{8}{3}}}} du$$

dur.

Üstte ifade edilen teoremden (3), (4), (7) ve (8) yüzeyleri küresel, (1), (2) ve (6) daki yüzeyler hiperbolik ve (5), (9) yüzeyleri ise parabolik yüzeylerdir.

Teorem 4.2.2. *Dört boyutlu 2-indeksli yarı-Öklid uzayı $\mathbb{R}_2^4$ de üç boyutlu anti-de Sitter uzayı (1-indeksli Hiperbolik uzay) $H_1^3(-1)$ de bir non-degenere bikonservatif yüzey $x : M \rightarrow \mathbb{H}_1^3(-1) \subset \mathbb{R}_2^4$ immersiyonu ile verilsin. Bu durumda M ya bir CMC yüzey veya aşağıdaki on bir yüzeyden birisidir [4].*

1) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(u \sinh t, \sqrt{1+u^2} \cosh f, u \cosh t, \sqrt{1+u^2} \sinh f \right), \quad u \in (0, \infty)$$

ile verilen bir timelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \pm \int \frac{3u^{-\frac{1}{3}}}{(1+u^2) \sqrt{1-9u^{-\frac{2}{3}}+u^2}} du$$

dur.

2) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(u \cosh t, \sqrt{1-u^2} \cosh f, u \sinh t, \sqrt{1-u^2} \sinh f \right), \quad u \in (0, 1)$$

ile verilen bir spacelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \pm \int \frac{3u^{-\frac{1}{3}}}{(1-u^2) \sqrt{9u^{-\frac{2}{3}}+u^2-1}} du$$

dur.

3) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(u \cosh t, \sqrt{u^2-1} \sinh f, u \sinh t, \sqrt{u^2-1} \cosh f \right), \quad u \in (1, \infty)$$

ile verilen bir spacelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \pm \int \frac{3u^{-\frac{1}{3}}}{(u^2-1) \sqrt{9u^{-\frac{2}{3}}+u^2-1}} du$$

dur.

4) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(\sqrt{1+u^2} \cos f, \sqrt{1+u^2} \sin f, u \cos t, u \sin t \right), \quad u \in (0, \infty)$$

ile verilen bir spacelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \pm \int \frac{3u^{-\frac{1}{3}}}{(1+u^2)\sqrt{1+9u^{-\frac{2}{3}}-u^2}} du$$

dur.

5) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(u \cos t, u \sin t, \sqrt{u^2 - 1} \cos f, \sqrt{u^2 - 1} \sin f \right), \quad u \in (1, \infty)$$

ile verilen bir timelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \pm \int \frac{3u^{-\frac{1}{3}}}{(u^2 - 1)\sqrt{u^2 - 9u^{-\frac{2}{3}} - 1}} du$$

dur.

6) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(\frac{1}{2} \left(ut^2 - uf^2 + \frac{1}{u} + u \right), uf, \frac{1}{2} \left(ut^2 - uf^2 + \frac{1}{u} - u \right), ut \right), \quad u \in (0, \infty)$$

ile verilen bir spacelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \int \frac{3}{u^2 \sqrt{9 + u^{\frac{8}{3}}}} du$$

dur.

7) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(\frac{1}{2} \left(ut^2 + uf^2 + \frac{1}{u} + u \right), ut, \frac{1}{2} \left(ut^2 + uf^2 + \frac{1}{u} - u \right), uf \right), \quad u \in \left(3^{\frac{3}{4}}, \infty \right)$$

ile verilen bir timelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \int \frac{3}{u^2 \sqrt{u^{\frac{8}{3}} - 9}} du$$

dur.

8) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(u \cosh t, \sqrt{1 - u^2} \cosh f, u \sinh t, \sqrt{1 - u^2} \sinh f \right), \quad u \in (0, 1)$$

ile verilen bir timelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \pm \int \frac{3u^{-\frac{1}{3}}}{(1 - u^2)\sqrt{9u^{-\frac{2}{3}} - u^2 + 1}} du$$

dur.

9) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(u \cosh t, \sqrt{u^2 - 1} \sinh f, u \sinh t, \sqrt{u^2 - 1} \cosh f \right), \quad u \in (1, \infty)$$

ile verilen bir timelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \pm \int \frac{3u^{-\frac{1}{3}}}{(u^2 - 1) \sqrt{9u^{-\frac{2}{3}} - u^2 + 1}} du$$

dur.

10) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(\sqrt{1 + u^2} \cos f, \sqrt{1 + u^2} \sin f, u \cos t, u \sin t \right), \quad u \in (0, \infty)$$

ile verilen bir timelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \pm \int \frac{3u^{-\frac{1}{3}}}{(1 + u^2) \sqrt{9u^{-\frac{2}{3}} - u^2 - 1}} du$$

dur.

11) M yüzeyi

$$x(u, t) = \left(\frac{1}{2} \left(ut^2 - uf^2 + \frac{1}{u} + u \right), uf, \frac{1}{2} \left(ut^2 - uf^2 + \frac{1}{u} - u \right), ut \right), \quad u \in \left(0, 3^{\frac{3}{4}} \right)$$

ile verilen bir timelike dönel yüzeydir, burada

$$f(u) = \int \frac{3}{u^2 \sqrt{9 - u^{\frac{8}{3}}}} du$$

dur.

Teoremin ifadelerinde verilen (4), (5), (10) yüzeyleri küresel, (1), (2), (3), (8), (9) yüzeyleri hiperbolik ve (6), (7), (11) yüzeyleri de parabolik yüzeylerdir.

Bu iki teoremin ispatı benzer olduğundan, bu ikisinin ispatını da birlikte yapacağız.

İspat: $M_1^3(c)$ deki CMC yüzeyleri aşikar olarak bikonservatif yüzeyler olduğundan, ortalama eğrilik vektörü sabit olmayan yüzeylere odaklanacağız. (4.2.2) den $\text{grad} \mathbf{H}$ bir asli doğrultudur ve bu asli doğrultuya karşılık gelen asli eğrilik de $-\varepsilon \mathbf{H}$ dir. Böylece ispatı yaparken $\text{grad} \mathbf{H}$ nın causal karakterine göre yapacağız. O halde üç farklı durumu göz önüne almalıyız.

Durum 4.2.1. Ortalama eğriliğin gradienti $\text{grad}\mathbf{H}$ spacelike olsun. Bu durumda $e_1 = \frac{\text{grad}\mathbf{H}}{|\text{grad}\mathbf{H}|}$ olmak üzere M nin bir ortonormal çatısını $\{e_1, e_2\}$ olarak alalım. Böylece $\langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon$ ve $e_2(\mathbf{H}) = 0$ olur. (4.2.2) den

$$Ae_1 = -\varepsilon\mathbf{H}e_1 \quad (4.2.3)$$

olur. $\mathbf{H} = \varepsilon \frac{k_1 + k_2}{2}$ veya $k_1 + k_2 = \varepsilon 2\mathbf{H}$, $k_1 = -\varepsilon\mathbf{H}$ olduğundan

$$Ae_2 = 3\varepsilon\mathbf{H}e_2 \quad (4.2.4)$$

olur. M üzerine indirgenen Levi-Civita konneksiyonu ∇ olmak üzere, $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X e_1 = \omega(X) e_2, \quad \nabla_X e_2 = \varepsilon \omega(X) e_1 \quad (4.2.5)$$

olarak yazılır, burada $\omega(X) = -\varepsilon \langle \nabla_X e_1, e_2 \rangle = -\varepsilon \langle \nabla_X e_2, e_1 \rangle$ şeklinde tanımlı 1-formdur. Codazzi dekleminde $(\nabla_{e_1} A) e_2 = (\nabla_{e_2} A) e_1$ olduğundan hesaplamalar yapılırsa

$$4\mathbf{H}\omega(e_1) = 0 \quad (4.2.6)$$

$$3e_1(\mathbf{H}) = -4\mathbf{H}\omega(e_2) \quad (4.2.7)$$

olarak bulunur. $\mathbf{H}$ sabit olmadığından (4.2.6) dan $\omega(e_1) = 0$ olur. Genelliği bozmaksızın $\mathbf{H} > 0$ olduğunu kabul edebiliriz. $u = \mathbf{H}^{-\frac{3}{4}}$ denilirse (4.2.7) den $[e_1, ue_2] = 0$ elde edilir. Buna göre M üzerinde $\frac{\partial}{\partial s} = e_1$, $\frac{\partial}{\partial t} = ue_2$ olacak şekilde bir (s, t) lokal koordinat sistemi vardır. Böylece $g_{11} = \left\langle \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle$, $g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 0$, $g_{22} = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$ olmak üzere M nin metrik tensörü

$$g = ds^2 - \varepsilon u^2 dt^2 \quad (4.2.8)$$

ile verilir. $e_2(\mathbf{H}) = 0$ olduğundan $u = \mathbf{H}^{-\frac{3}{4}}$ sadece s değişkenine bağlıdır. Buradan M nin Levi-Civita konneksiyonu

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s} = 0, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s} = \frac{u'}{u} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon u u' \frac{\partial}{\partial s} \quad (4.2.9)$$

olarak ve $M_1^3(c)$ de M nin ikinci temel formu

$$h\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}\right) = -u^{-\frac{4}{3}}N, \quad h\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 0, \quad h\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = -3\varepsilon u^{\frac{2}{3}}N$$

olarak bulunur. M , $\mathbb{R}_1^4$ (veya $\mathbb{R}_2^4$) de ek boyutu iki olan bir altmanifolddur. Buna göre bu altmanifoldun ikinci temel formu

$$\bar{h}\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}\right) = -u^{-\frac{4}{3}}N - cx, \quad \bar{h}\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 0, \quad \bar{h}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = -3\varepsilon u^{\frac{2}{3}}N + c\varepsilon u^2 x \quad (4.2.10)$$

olarak bulunur, burada $c = \pm 1$ dir. $\mathbb{R}_i^4$ ($i = 1, 2$) de $M_1^3(c)$ nin normal konneksiyonu $\nabla^\perp$ olmak üzere $X \in \Gamma(TM)$ için $\nabla_X^\perp x = 0$ olduğundan $\nabla_X^\perp N = 0$ olur. Böylece Gauss ve Weingarten formüllerinde (4.2.9) ve (4.2.10) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} x_{ss} &= -u^{-\frac{4}{3}}N - cx, \\ x_{st} &= \frac{u'}{u}x_t, \\ x_{tt} &= \epsilon uu' \frac{\partial}{\partial s} - 3\epsilon u^{\frac{2}{3}}N + c\epsilon u^2x \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

ve

$$N_s = \epsilon u^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial}{\partial s}, \quad N_t = -3\epsilon u^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.2.12)$$

elde edilir. Kısmi diferensiyel denklem sistemi (4.2.11) in bağdaşabilirlik şartı

$$u'' = 3\epsilon u^{-\frac{5}{3}} - cu \quad (4.2.13)$$

olarak bulunur. $v = u'$ denilirse $u'' = \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{du} \frac{du}{ds} = v \frac{dv}{du}$ veya

$$v dv = \left(3\epsilon u^{-\frac{5}{3}} - cu \right) du$$

olur. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$u'^2 + 9\epsilon u^{-\frac{2}{3}} + cu^2 = C \quad (4.2.14)$$

olarak bulunur, burada C integral sabitidir. (4.2.11) in ikinci denkleminin çözümünden x immersiyonu

$$x = u(s)a(t) + b(s) \quad (4.2.15)$$

olarak ifade edilir, burada $a(t)$ ve $b(s)$, $\mathbb{R}_1^4$ veya $\mathbb{R}_2^4$ de vektör değerli fonksiyonlardır. (4.2.15) den x_{ss}, x_{tt}, x_s hesaplanıp (4.2.11) in birinci ve üçüncü denklemlerinde yerine yazılıp düzenlenirse

$$a''(t) = \epsilon u' (u'a(t) + b'(s)) + 3\epsilon u (u''a(t) + b''(s)) + 4\epsilon cu (ua(t) + b(s))$$

veya

$$a''(t) - \epsilon (u'^2 + 3uu'' + 4cu^2) a(t) = \epsilon u' b'(s) + 3\epsilon u b''(s) + 4\epsilon ucb(s)$$

olur. (4.2.13) ve (4.2.14) denklemleri üstteki denklemde kullanılacak olursa

$$a''(t) - \epsilon Ca(t) = \epsilon (u' b'(s) + 3u b''(s) + 4cub(s)) \quad (4.2.16)$$

elde edilir. (4.2.16) denkleminin sağ tarafı s değişkenine, sol tarafı ise t değişkenine bağlıdır. Böylece (4.2.16) ifadesi bir sabit $c_0 \in \mathbb{R}_i^4, i = 1, 2$ vektörü şeklindedir. Buna göre (4.2.16) denklemini

$$a''(t) - \varepsilon Ca(t) = c_0 \quad (4.2.17)$$

$$u'b'(s) + 3ub''(s) + 4cub(s) = \varepsilon c_0 \quad (4.2.18)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

$C \neq 0$ için (4.2.15) denkleminde $c_0 = 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Buna göre x immersiyonu, $\bar{a}(t) = a(t) + \frac{\varepsilon}{C}c_0$ ve $\bar{b}(s) = -\frac{\varepsilon u}{C}c_0 + b(s)$ olmak üzere

$$x = u(s)\bar{a}(t) + \bar{b}(s)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. ε ve C nin farklı durumları göz önüne alınırsa bu durum dört farklı şekilde incelenebilir.

Durum 4.A. $\varepsilon = 1$ ve $C > 0$ Hali. Bu durumda x immersiyonu $M_1^3(c)$ de bir timelike yüzeydir. (4.2.17) denklemi $a''(t) - \varepsilon Ca(t) = 0$ haline dönüşür ve bu denklem ikinci mertebeden, sabit katsayılı bir homojen lineer diferensiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü, $\mathbb{R}_i^4$ ($i = 1, 2$) de sabit c_1, c_2 vektörleri için

$$a(t) = c_1 \cosh(\sqrt{C}t) + c_2 \sinh(\sqrt{C}t) \quad (4.2.19)$$

olarak bulunur. $C = 1$ olarak kabul edelim. Buna göre x immersiyonu

$$x(s, t) = u(s)(c_1 \cosh t + c_2 \sinh t) + b(s)$$

olarak yazılır. Buna göre x_s ve x_t kısmi türevleri

$$x_s = u'(c_1 \cosh t + c_2 \sinh t) + b'(s)$$

$$x_t = u(c_1 \sinh t + c_2 \cosh t)$$

olur. Buradan $\langle x_s, x_s \rangle, \langle x_t, x_t \rangle, \langle x_s, x_t \rangle$, (4.2.8) metriğine göre hesaplanırsa

$$\langle c_1, c_1 \rangle = -\langle c_2, c_2 \rangle = 1, \quad (4.2.20)$$

$$\langle c_1, c_2 \rangle = \langle c_1, b' \rangle = \langle c_2, b' \rangle = 0, \quad (4.2.21)$$

$$u'^2 + \langle b', b' \rangle = 1 \quad (4.2.22)$$

olarak bulunur. Ayrıca $\langle x, x \rangle = c$ olduğundan

$$\langle c_1, b \rangle = \langle c_2, b \rangle = 0, \quad u^2 + \langle b, b \rangle = c \quad (4.2.23)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi (4.2.18) diferansiyel denkleminin çözümünü iki farklı alt durumda göz önüne alalım.

Durum 4.A.1. $c = 1$ durumu. Bu durumda $b(s)$ vektörü spacelike vektör olur. (4.2.23) ün ikinci denkleminde $\langle b, b \rangle = 1 - u^2$ olur. Eğer $\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}b(s)$ dersek, bu durumda

$$b'(s) = \sqrt{1-u^2}\alpha' - \frac{uu'}{\sqrt{1-u^2}}\alpha,$$

$$b''(s) = \sqrt{1-u^2}\alpha'' - \frac{2uu'}{\sqrt{1-u^2}}\alpha' - \frac{u'^2 - u^3u'' + uu''}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}\alpha$$

olarak bulunur. Bu ifadeler (4.2.18) denkleminde yerine yazılırsa

$$3u\alpha'' + \frac{u'(1-7u^2)}{1-u^2}\alpha' + \left(-\frac{uu'^2}{1-u^2} - \frac{3u(u'^2 - u^3u'' + uu'')}{(1-u^2)^2} + 4u \right) \alpha = 0 \quad (4.2.24)$$

denklemine ulaşılır. Şimdi

$$f = 3 \int \frac{u^{-\frac{1}{3}}}{1-u^2} ds \quad (4.2.25)$$

diyelim. Buna göre $\alpha' = \frac{d\alpha}{df} \frac{df}{ds}$, $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{df}$ olmak üzere, (4.2.13) ve (4.2.14) kullanılırsa uzunca bir hesaplamadan sonra (4.2.24) denklemi

$$\ddot{\alpha} + \alpha = 0 \quad (4.2.26)$$

olarak ifade edilir. (4.2.26) denklemi f ye göre ikinci mertebeden, sabit katsayılı bir homojen lineer diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü, $\mathbb{R}_1^4$ deki c_3, c_4 sabit vektörleri için

$$\alpha = c_3 \cos f + c_4 \sin f$$

olarak bulunur. Böylece

$$b(s) = \sqrt{1-u^2} (c_3 \cos f + c_4 \sin f) \quad (4.2.27)$$

olarak yazılır. $\langle b, b \rangle = 1 - u^2$, $\langle c_1, b \rangle = \langle c_2, b \rangle = 0$ olduğundan, (4.2.27) ifadesinden

$$\langle c_1, c_3 \rangle = \langle c_2, c_3 \rangle = \langle c_1, c_4 \rangle = \langle c_2, c_4 \rangle = \langle c_3, c_4 \rangle = 0$$

$$\langle c_3, c_3 \rangle = \langle c_4, c_4 \rangle = 1$$

olarak bulunur. $\mathbb{R}_1^4$ deki c_1, c_2, c_3, c_4 sabit vektörlerini

$$c_1 = (0, 1, 0, 0), \quad c_2 = (1, 0, 0, 0), \quad c_3 = (0, 0, 1, 0), \quad c_4 = (0, 0, 0, 1)$$

olarak seçebiliriz. (4.2.14) de $u'^2 = 1 - 9u^{-\frac{2}{3}} - u^2$ olduğundan ve $du = u'ds$ veya $\pm \frac{du}{\sqrt{1-9u^{-\frac{2}{3}}-u^2}} = ds$ olduğu dikkate alınır (4.2.25) ifadesi

$$f = \pm \int \frac{3u^{-\frac{1}{3}}}{(1-u^2)\sqrt{1-9u^{-\frac{2}{3}}-u^2}} du \quad (4.2.28)$$

olur. Böylece $\mathbb{S}_1^3(1)$ deki dönel yüzeyin immersiyonunu

$$x(u, t) = \left(u \sinh t, u \cosh t, \sqrt{1-u^2} \cos f, \sqrt{1-u^2} \sin f \right), \quad u \in (-1, 1) \quad (4.2.29)$$

olarak elde ederiz. Bu durumda Teorem 4.2.1 in ifadesindeki (1) elde edilmiş olur.

Durum 4.A.2. $c = -1$ durumu. Bu durumda $b(s)$ bir timelike vektördür. (4.2.23) ün ikinci denklemden

$$\langle b, b \rangle = -1 - u^2$$

olur. $\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} b(s)$ diyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} b' &= \sqrt{1+u^2} \alpha' + \frac{uu'}{\sqrt{1+u^2}} \alpha, \\ b'' &= \sqrt{1+u^2} \alpha'' + \frac{2uu'}{\sqrt{1+u^2}} \alpha' + \frac{u'^2 + u^3 u'' + uu''}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \alpha \end{aligned}$$

elde edilir. b' ve b'' değerleri (4.2.18) denkleminde yerine yazılırsa

$$3u\alpha'' + \frac{u'(1+7u^2)}{1+u^2} \alpha' + \left(\frac{uu'^2}{1+u^2} + \frac{3u(u'^2 + u^3 u'' + uu'')}{(1+u^2)^2} - 4u \right) \alpha = 0 \quad (4.2.30)$$

elde edilir. Şimdi

$$f = 3 \int \frac{u^{-\frac{1}{3}}}{1+u^2} ds \quad (4.2.31)$$

diyelim. Buna göre göre $\alpha' = \frac{d\alpha}{df} \frac{df}{ds}$, $\ddot{\alpha} = \frac{d\alpha}{df}$ olmak üzere, (4.2.13) ve (4.2.14) kullanılırsa uzunca bir hesaplamadan sonra (4.2.30) denklemi

$$\ddot{\alpha} - \alpha = 0 \quad (4.2.32)$$

olarak elde edilir. (4.2.32) denklemi ikinci mertebeden sabit katsayılı, homojen lineer diferensiyel denklemdir ve çözümü ise $\mathbb{R}_2^4$ deki sabit c_3, c_4 vektörleri için

$$\alpha = c_3 \cosh f + c_4 \sinh f$$

olarak bulunur. Böylece

$$b(s) = \sqrt{1+u^2} (c_3 \cosh f + c_4 \sinh f) \quad (4.2.33)$$

olur. $\langle b, b \rangle = -1 - u^2$, $\langle c_1, b \rangle = \langle c_2, b \rangle = 0$ olduğundan (4.2.33) ifadesinden

$$\begin{aligned}\langle c_1, c_3 \rangle &= \langle c_2, c_3 \rangle = \langle c_1, c_4 \rangle = \langle c_2, c_4 \rangle = \langle c_3, c_4 \rangle = 0 \\ -\langle c_3, c_3 \rangle &= \langle c_4, c_4 \rangle = 1\end{aligned}$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece $\mathbb{R}_2^4$ deki bu sabit vektörleri

$$c_1 = (0, 0, 1, 0), \quad c_2 = (1, 0, 0, 0), \quad c_3 = (0, 1, 0, 0), \quad c_4 = (0, 0, 0, 1)$$

olarak seçebiliriz. (4.2.14) den $u'^2 = 1 - 9u^{-\frac{2}{3}} + u^2$ olduğu ve buradan $\pm \frac{du}{\sqrt{1 - 9u^{-\frac{2}{3}} + u^2}} = ds$ olduğu dikkate alınırsa (4.2.31) ifadesi

$$f = \pm \int \frac{3u^{-\frac{1}{3}}}{(1+u^2)\sqrt{1 - 9u^{-\frac{2}{3}} + u^2}} du \quad (4.2.34)$$

olur. Böylece $\mathbb{H}_1^3(-1)$ deki dönel yüzeyin immersiyonu

$$x(u, t) = \left(u \sinh t, \sqrt{1+u^2} \cosh f, u \cosh t, \sqrt{1+u^2} \sinh f \right)$$

elde edilir, bu ise Teorem 4.2.2 nin (1) durumunu verir.

Durum 4.B. $\varepsilon = -1$ ve $C < 0$ durumu. Durum 4.A. daki tartışmalara benzer olarak Teorem 4.2.1 deki (2) yi ve Teorem 4.2.2 deki (2) ve (3) ü elde ederiz.

Durum 4.C. $\varepsilon = -1$ ve $C > 0$ durumu. Bu durumda immersiyon bir spacelike yüzeydir. (4.2.17) denkleminin çözümünden $\mathbb{R}_i^4$, $i = 1, 2$ de c_1 ve c_2 sabit vektörleri için

$$a(t) = c_1 \cos(\sqrt{C}t) + c_2 \sin(\sqrt{C}t) \quad (4.2.35)$$

elde edilir. Böylece x immersiyonu, $C = 1$ için

$$x(s, t) = u(s) (c_1 \cos t + c_2 \sin t) + b(s) \quad (4.2.36)$$

olarak ifade edilir. $\langle x_s, x_s \rangle$, $\langle x_s, x_t \rangle$ ve $\langle x_t, x_t \rangle$, (4.2.8) metriğine göre hesaplanırsa

$$\langle c_1, c_1 \rangle = \langle c_2, c_2 \rangle = 1, \quad (4.2.37)$$

$$\langle c_1, c_2 \rangle = \langle c_1, b' \rangle = \langle c_2, b' \rangle = 0, \quad (4.2.38)$$

$$u'^2 + \langle b', b' \rangle = 1 \quad (4.2.39)$$

olarak bulunur. Ayrıca $\langle x, x \rangle = c$ olduğundan

$$\langle c_1, b \rangle = \langle c_2, b \rangle = 0, \quad u^2 + \langle b, b \rangle = c \quad (4.2.40)$$

olur. $c = 1$ ve $c = -1$ olması durumuna göre aşağıdaki iki altdurumu inceleyelim.

Durum 4.C.1. $c = 1$ durumu. (4.2.40) in ikinci denkleminde

$$\langle b, b \rangle = 1 - u^2$$

olur. Eğer $u \in (0, 1)$ ise bu durumda $b(s)$ bir spacelike vektördür. $\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}b(s)$ diyelim.

Durum 4.A.1 de olduğu gibi benzer hesaplamalar yapılırsa

$$3u\alpha'' + \frac{u'(1-7u^2)}{1-u^2}\alpha' + \left(-\frac{uu'^2}{1-u^2} - \frac{3u(u'^2 - u^3u'' + uu''')}{(1-u^2)^2} + 4u\right)\alpha = 0 \quad (4.2.41)$$

elde edilir. $f = 3 \int \frac{u^{-\frac{1}{3}}}{1-u^2} ds$ diyelim, buna göre Durum 4.A.1. de olduğu gibi (4.2.41) denklemi

$$\ddot{\alpha} - \alpha = 0 \quad (4.2.42)$$

olarak yazılır, burada $\ddot{\alpha}$, α nın f ye göre ikinci türevidir. (4.2.42) diferensiyel denkleminin çözümü $\mathbb{R}_1^4$ deki c_3, c_4 sabit vektörleri için

$$\alpha = c_3 \cosh f + c_4 \sinh f$$

olarak bulunur. Böylece $b(s)$ vektörü

$$b(s) = \sqrt{1-u^2}(c_3 \cosh f + c_4 \sinh f) \quad (4.2.43)$$

şeklinde ifade edilir. $\langle b, b \rangle = 1 - u^2$ ve (4.2.40) da $\langle c_1, b \rangle = \langle c_2, b \rangle = 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$\langle c_1, c_3 \rangle = \langle c_2, c_3 \rangle = \langle c_1, c_4 \rangle = \langle c_2, c_4 \rangle = \langle c_3, c_4 \rangle = 0,$$

$$\langle c_3, c_3 \rangle = -\langle c_4, c_4 \rangle = 1$$

olur. Böylece c_1, c_2, c_3, c_4 sabit vektörlerini

$$c_1 = (0, 0, 1, 0), \quad c_2 = (0, 0, 0, 1), \quad c_3 = (1, 0, 0, 0), \quad c_4 = (0, 0, 0, 0)$$

olarak seçebiliriz. Bu ise Teorem 4.2.1 deki (3) durumunu verir.

Eğer $u \in (1, \infty)$ ise bu durumda $b(s)$ bir timelike vektördür. $\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}b(s)$ ve $f = 3 \int \frac{u^{-\frac{1}{3}}}{1+u^2} ds$ diyelim. Durum 4.A.2 deki benzer hesaplamalarla

$$\ddot{\alpha} - \alpha = 0 \quad (4.2.44)$$

elde edilir. (4.2.44) diferensiyel denkleminin çözümü $\mathbb{R}_1^4$ deki sabit c_3, c_4 vektörleri için

$$\alpha = c_3 \cosh f + c_4 \sinh f$$

olarak bulunur. Buna göre

$$b(s) = \sqrt{1-u^2} (c_3 \cosh f + c_4 \sinh f) \quad (4.2.45)$$

şeklinde yazılır. Üstte olduğu gibi uygun c_1, c_2, c_3, c_4 sabit vektörleri seçilerek Teorem 4.2.1 deki (4) elde edilir.

Durum 4.C.2. $c = -1$ durumu. (4.2.40) in ikinci denkleminde

$$\langle b, b \rangle = -1 - u^2$$

olur ki bu da $b(s)$ vektörünün timelike olması demektir. $\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} b(s)$ ve $f = 3 \int \frac{u^{-\frac{1}{3}}}{1+u^2} ds$ diyelim. Durum 4.A.2 de olduğu gibi benzer hesaplamalarla

$$\ddot{\alpha} + \alpha = 0 \quad (4.2.46)$$

diferensiyel denkleminde ulaşılır, burada $\ddot{\alpha}$, α nın f ye göre ikinci türevidir. (4.2.46) denkleminin çözümü, $\mathbb{R}_2^4$ deki sabit c_3, c_4 vektörleri için

$$\alpha = c_3 \cos f + c_4 \sin f$$

olarak bulunur. Böylece

$$b(s) = \sqrt{1+u^2} (c_3 \cos f + c_4 \sin f)$$

şeklinde ifade edilir. Diğerlerinde olduğu gibi uygun şartlar altında c_1, c_2, c_3, c_4 vektörleri seçilerek Teorem 4.2.2 nin (4) ü elde edilir.

Durum 4.D. $\varepsilon = 1$ ve $C < 0$ durumu. Bu durumda immersiyon bir timelike yüzeydir. $C < 0$ olduğundan (4.2.14) denkleminde $c = -1$ olmak zorundadır. (4.2.17) denkleminin çözümünden $\mathbb{R}_2^4$ deki sabit c_1, c_2 vektörleri için

$$a(t) = c_1 \cos(\sqrt{C}t) + c_2 \sin(\sqrt{C}t) \quad (4.2.47)$$

olarak bulunur. $C = 1$ olarak kabul edersek x immersiyonunu

$$x(s, t) = u(s) (c_1 \cos t + c_2 \sin t) + b(s) \quad (4.2.48)$$

olarak ifade edebiliriz. (4.2.48) den $\langle x_s, x_s \rangle$, $\langle x_s, x_t \rangle$ ve $\langle x_t, x_t \rangle$ hesaplanacak olursa

$$\langle c_1, c_1 \rangle = \langle c_2, c_2 \rangle = -1, \quad (4.2.49)$$

$$\langle c_1, c_2 \rangle = \langle c_1, b' \rangle = \langle c_2, b' \rangle = 0, \quad (4.2.50)$$

$$-u'^2 + \langle b', b' \rangle = 1 \quad (4.2.51)$$

olarak bulunur. $\langle x, x \rangle = -1$ olduğundan

$$\langle c_1, b \rangle = \langle c_2, b \rangle = 0, \quad -u^2 + \langle b, b \rangle = -1 \quad (4.2.52)$$

olur. (4.2.52) nin ikinci denkleminde

$$\langle b, b \rangle = u^2 - 1$$

olur ve (4.2.14) denkleminde $u^2 - 1 > 0$, yani $u'^2 + 9u^{-\frac{2}{3}} - u^2 = -1$ veya $u'^2 + 9u^{-\frac{2}{3}} = u^2 - 1 > 0$ olduğundan $b(s)$ bir spacelike vektördür. Üstte olduğu gibi benzer tartışmalarla Teorem 4.2.2 nin (5) i elde edilir.

Durum 4.E. $\varepsilon = -1$ ve $C = 0$ durumu. Bu durumda (4.2.17) denklemi

$$a''(t) = c_0 \quad (4.2.53)$$

haline gelir. Ardışık olarak t ye göre iki kez integral alınırsa

$$a(t) = \frac{1}{2}c_0t^2 + c_1t + c_2 \quad (4.2.54)$$

olarak bulunur, burada c_1, c_2 vektörleri $\mathbb{R}_i^4$ ($i = 1, 2$) de sabit vektörlerdir. Genelliği bozmaksızın $c_2 = 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Buna göre x immersiyonu

$$x(s, t) = u(s) \left(\frac{1}{2}c_0t^2 + c_1t \right) + b(s) \quad (4.2.55)$$

şeklinde ifade edilir. (4.2.55) den $\langle x_s, x_s \rangle$, $\langle x_s, x_t \rangle$ ve $\langle x_t, x_t \rangle$ hesaplanacak olursa

$$\langle c_0, c_0 \rangle = \langle c_0, c_1 \rangle = \langle c_1, b' \rangle = 0, \quad (4.2.56)$$

$$\langle c_0, b' \rangle = -u', \quad \langle c_1, c_1 \rangle = \langle b', b' \rangle = 1 \quad (4.2.57)$$

elde edilir. $\langle x, x \rangle = c$ olduğundan (4.2.56) ve (4.2.57) nin kullanılmasıyla

$$\langle c_1, b \rangle = 0, \quad \langle c_0, b \rangle = -u, \quad \langle b, b \rangle = c \quad (4.2.58)$$

sonucuna ulaşılır. $\varepsilon = -1$ için (4.2.18) denklemi

$$u'b'(s) + 3ub''(s) + 4cub(s) = -c_0 \quad (4.2.59)$$

olur ve burada $\dot{b} = \frac{db}{du}$ olmak üzere $b' = \dot{b}u'$ ve $b'' = \ddot{b}u'^2 + \dot{b}u''$ olur. b' ve b'' değerleri (4.2.59) de yerine yazılırsa

$$3uu'^2\ddot{b} + (3u'' + u'^2)\dot{b} + 4cub = -c_0 \quad (4.2.60)$$

elde edilir. $C = 0$ olduğundan ayrıca (4.2.13) den $u'' = 3u^{-\frac{5}{3}} - cu$ ve (4.2.14) den $u'^2 = 9u^{-\frac{2}{3}} - cu^2$ olduğundan (4.2.60) denklemi

$$3u \left(9u^{-\frac{2}{3}} - cu^2 \right) \ddot{b} - 4cu^2 \dot{b} + 4cub = -c_0 \quad (4.2.61)$$

denklemine indirgenir. (4.2.61) diferensiyel denklemi ikinci mertebeden değişken katsayılı bir lineer diferensiyel denklemdir. İlk önce (4.2.61) denkleminin homojen durumu ile ilgileneceğiz. (4.2.58) in ikinci denkleminde $\mathbb{R}_i^4, (i = 1, 2)$ deki bir sabit c_3 vektörü için $b = uc_3$ olarak yazılır ve bu (4.2.61) denkleminin bir homojen çözümüdür, ayrıca bu c_3 vektörü

$$\langle c_3, c_3 \rangle = 0, \quad \langle c_0, c_3 \rangle = -1 \quad (4.2.62)$$

şartlarını sağlar. Şimdi (4.2.61) denkleminin bir diğer homojen çözümü $b = ufc_4$ olsun, burada $c_4, \mathbb{R}_i^4, (i = 1, 2)$ deki bir sabit vektördür. $b = ufc_4$ de $\ddot{b}$ ve $\dot{b}$ elde edilerek (4.2.61) de yerine yazılırsa

$$3u \left(9u^{-\frac{2}{3}} - cu^2 \right) \ddot{f} + \left(54u^{-\frac{2}{3}} - 10cu^2 \right) \dot{f} = 0$$

elde edilir ve burada f nin çözümü

$$f = \int \frac{1}{u^2 \sqrt{1 - \frac{1}{9}cu^{\frac{8}{3}}}} du \quad (4.2.63)$$

olarak bulunur. Böylece (4.2.61) denkleminin homojen çözümü

$$b^*(s) = uc_3 + ufc_4 \quad (4.2.64)$$

olarak bulunur. Buna göre (4.2.61) denkleminin genel çözümü uygun bir $g(u)$ fonksiyonu için

$$b(s) = uc_3 + ufc_4 + gc_0 \quad (4.2.65)$$

şeklindedir. (4.2.58) in üçüncü ifadesinden c_4 vektörünün birim vektör ve c_0, c_1, c_3 e dik olduğunu kabul edebiliriz, böylece

$$g = \frac{1}{2}cu f^2 - \frac{1}{2u}c \quad (4.2.66)$$

olarak yazabiliriz. Bu durumda $\langle c_4, c_4 \rangle = c$ olur. gc_0 in (4.2.61) denklemi için bir özel çözüm olup olmadığını göstermek oldukça kolaydır. (4.2.55) denkleminde $b(s)$ yerine yazılırsa x immersiyonu

$$x(u, t) = \frac{1}{2} \left(ut^2 + cuf^2 - \frac{c}{u} \right) c_0 + utc_1 + uc_3 + ufc_4$$

olur, burada f fonksiyonu (4.2.63) ile verilen ve sadece u ya bağlı olan fonksiyondur.

$c = 1$ için sabit vektörleri

$$c_0 = (1, 1, 0, 0), \quad c_3 = \frac{1}{2}(1, -1, 0, 0), \quad c_1 = (0, 0, 0, 1), \quad c_4 = (0, 0, 1, 0)$$

olarak seçilebilir ve bu durumda Teorem 4.2.1 in (5) ini elde ederiz.

$c = -1$ için sabit vektörleri

$$c_0 = (1, 0, 1, 0), \quad c_3 = \frac{1}{2}(1, 0, -1, 0), \quad c_1 = (0, 0, 0, 1), \quad c_4 = (0, 1, 0, 0)$$

olarak seçilebilir, bu ise Teorem 4.2.2 nin (6) sını verir.

Durum 4.F. $\varepsilon = 1$ ve $C = 0$ durumu. Bu durumda immersiyon timelikedir. (4.2.15) den $c = -1$ olmak zorundadır. Üstteki durumda olduğu gibi benzer tartışmalarla Teorem 4.2.2 nin (7) si elde edilir.

Durum 4.2.2. Ortalama eğrilik fonksiyonunun gradienti $\text{grad}\mathbf{H}$ timelike olsun.

Bu durumda yüzey de timelike olmak zorundadır. Durum 4.2.1 de spacelike yüzeyler için olan tartışmalara benzer tartışmalar yapılarak Teorem 4.2.1 deki (6) – (9) ve Teorem 4.2.2 deki (8) – (11) yüzeyleri elde edilir.

Durum 4.2.3. Ortalama eğrilik fonksiyonunun gradienti $\text{grad}\mathbf{H}$ null olsun.

Bu durumda yüzey Durum 4.2.2 de olduğu gibi yine timelike olur. $e_1 = \text{grad}\mathbf{H}$ olmak üzere M üzerinde

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 0, \quad \langle e_1, e_2 \rangle = -1$$

olacak şekilde bir e_2 null vektör alanı vardır ve $\{e_1, e_2\}$, M nin bir quasi-ortonormal çatısıdır. Ortalama eğrilik vektör alanı ise

$$H = -\mathbf{H}N$$

şeklindedir. Ortalama eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı olduğundan bu durum mümkün değildir, yani $\text{grad}\mathbf{H}$ null olacak şekilde bikonservatif yüzey yoktur.

Böylece Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 nin ispatları tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

- [1] **Hasanis, T. ve Vlachos, T.** (1995). Hypersurfaces in E^4 with Harmonic Mean Curvature Vector Field, *Math. Nachr.*, 172(1), 145–169.
- [2] **Turgay, N.C.** (2015). H-hypersurfaces with three distinct principal curvatures in the Euclidean spaces, *Annali di Matematica*, 194, 1795–1807.
- [3] **Fu, Y.** (2013). On biconservative surfaces in Minkowski 3-space, *J. Geom. Phys.*, 66, 71–79.
- [4] **Fu, Y.** (2015). Explicit classification of biconservative surfaces in Lorentz 3-space forms, *Ann. Mat.Pura Appl.*, 194, 805–822.
- [5] **Eells, J. ve Sampson, J.H.** (1964). Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.*, 86, 109–160.
- [6] **Eells, J. ve Lemaire, L.** (1983). Selected topics in harmonic maps, *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- [7] **Jiang, G.** (1986). 2–harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds, *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 7, 130–144.
- [8] **Chen, B.Y.** (1984). *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type*, cilt 1, World Scientific, Singapore.
- [9] **Chen, B.Y.** (1991). Some open problems and conjectures on submanifold of finite type, *Soochow J. Math.*, 17, 169–188.
- [10] **Caddeo, R., Montaldo, S. ve Oniciuc, C.** (2001). Biharmonic submanifolds of $\mathbb{S}^n$, *Internat. J. Math.*, 8(12).
- [11] **Chen, B.Y. ve Ishikawa, S.** (1991). Biharmonic surface in pseudo- Euclidean spaces, *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University*, 45(2), 323–347.
- [12] **Chen, B.Y. ve Ishikawa, S.** (1998). Biharmonic pseudo-Riemann submanifolds in pseudo- Euclidean spaces, *Kyushu J. Math.*, 52(1), 167–185.
- [13] **Defever, F.** (1998). Hypersurfaces of $\mathbb{E}^4$ with harmonic mean curvature vector, *Math. Nachr.*, 196, 61–69.
- [14] **Chen, B.Y. ve Munteanu, M.I.** (2013). Biharmonic ideal hypersurfaces in Euclidean spaces, *Differential Geom. Appl.*, 32(1), 1–16.
- [15] **Fetcu, D., Nistor, S. ve Oniciuc, C.** (2016). On biconservative surfaces in 3–dimensional space forms, *Comm. Anal. Geom.*, 24, 1027–1045.
- [16] **Fu, Y.** (2014). Biharmonic hypersurfaces with three distinct principal curvatures in Euclidean 5 space, *J. Geom. Phys.*, 75, 113–119.

- [17] **Fu, Y. ve Turgay, N.C.** (2016). Complete classification of biconservative hypersurfaces with diagonalizable shape operator in Minkowski 4-space, *Int. J. Math.*, 27, 1650041.
- [18] **Yeğin Ş, R.** (2018). On biconservative surfaces in 4-dimensional Euclidean space, *J. Math. Anal. Appl.*, 460, 565–581.
- [19] **Yeğin Ş, R. ve Turgay, N.** (2018). On biconservative surfaces in 4-dimensional Euclidean space, *arXiv preprint arXiv:1704.05270*.
- [20] **Kayhan, A. ve Turgay, N.C.** (2024). Biconservative surfaces with constant mean curvature in Lorentzian space forms, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, 94, 19–31.
- [21] **Kayhan, A. ve Turgay, N.C.** (2023). Biconservative Hypersurfaces in $\mathbb{E}_1^4$ with Non-diagonalizable Shape Operator, *Mediterr. J. Math.*, 20, 105.
- [22] **O'Neill, B.** (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York.
- [23] **Şahin, B.** (2017). *Riemannian submersions, Riemannian maps in Hermitian geometry and their applications*, Academic Press.
- [24] **Dong, Y. ve Ou, Y.** (2017). Biharmonic submanifolds of pseudo-Riemann manifold, *Journal of Geometry and Physics*, 112, 252–262.
- [25] **Şahin, B.** (2012). *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- [26] **Chen, B.Y.** (2017). *Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds*, World Scientific.
- [27] **Hacısalıhoğlu, H.H.** (1983). *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş*, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları.
- [28] **Chen, B.Y.** (2011). *Pseudo-Riemannian Geometry, δ -Invariants and Applications*, World Scientific, Hackensack, NJ.
- [29] **O'Neill, B.** (1997). *Elementary differential geometry*, Academic Press, New York.
- [30] **Kuhnel, W.** (2002). *Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds*, *Student Mathematical Library*, American Mathematical Society.
- [31] **Chen, B.Y.** (1973). *Geometry of submanifolds*, M. Dekker, New York.
- [32] **O'Neill, B.** (2006). *Elementary differential geometry*, Academic press.
- [33] **Kobayashi, S. ve Nomizu, K.** (1963). *Foundations of Differential Geometry, Vol.1*, Interscience publishers, New York.
- [34] **Chen, B.Y.** (2002). Geometry of position functions of Riemann submanifolds in pseudo-Euclidean space, *Journal of Geometry*, 61–77.
- [35] **Baird, P. ve Wood, J.** (2003). *Harmonic Morphisms between Riemannian Manifolds*, Clarendon Press, Oxford.

- [36] **Yeğın Ş, R.** (2024). Biconservative Riemannian Submanifolds in Minkowski 5-Space, *Int. Elec. Journal of Geometry*, 17(1), 137–145.
- [37] **Do Carmo, M. ve Dagezer, M.** (1983). Rotation Hypersurfaces in Spaces of Constant Curvatures, *Trans. Amer. Math.Soc.*, 277, 685–709.
- [38] **Chen, B.Y. ve Ludden, G.D.** (1972). Surfaces with Mean Curvature Vector Parallel in the Normal Bundle, *Nagoya Math*, 17, 161–167.
- [39] **Alias, L. ve Gürbüz, N.** (2006). An extension of Takahashi theorem for the linearized operators of the higher order mean curvatures, *Geom Dedicata*, 121, 113–127.
- [40] **Impera, D., Mari, L. ve Rigoli, M.** (2011). Some geometric properties of hypersurfaces with constant r-mean curvature in Euclidean space, *Pro. of the Ame. Math. Soci.*, 139, 2207–2215.
- [41] **Caddeo, R., Montaldo, S., Oniciuc, C. ve Piu, P.** (2014). Surfaces in three-dimensional space forms with divergence-free stress-bienenergy tensor, *Ann. Mat.*, 193, 529–550.
- [42] **Hano, J. ve Nomizu, K.** (1984). Surfaces of revolution with constant mean curvature in Lorentz-Minkowski space, *Tohoku Math. J. (2)*, 32, 427–437.
- [43] **Ou, Y.** (2010). Biharmonic hypersurfaces in Riemannian manifolds, *Pacific J. Math.*, 248(1), 217–232.
- [44] **Sasahara, T.** (2012). Biharmonic submanifolds in nonflat Lorentz 3-space form, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 85, 422–432.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad: Ece POLAT HAYIRLI

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2014, İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü

MESLEKİ DENEYİMLER:

- 2014 Eylül ayından beri MEB’de çalışıyor.