

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YARI-TEMİZ HALKALAR

HAZEL DUMLU POLAT

Danışman: Doç. Dr. Tufan ÖZDİN

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2024
Her Hakkı Saklıdır.

Kabul ve Onay Sayfası

Doç. Dr. Tufan ÖZDİN danışmanlığında, Hazel DUMLU POLAT tarafından hazırlanan bu çalışma 26/06/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan: Dr. Öğr. Üyesi Ali AYDOĞDU İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Rabia Nagehan ÜREGEN İmza:

Üye : Doç. Dr. Tufan ÖZDİN İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun / / 20.... tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Kemal Volkan ÖZDOKUR
Enstitü Müdür V.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etięe Uygunluk Sayfası

“Yarı-Temiz Halkalar” isimli “Yüksek Lisans” tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiğı gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 26/06/2024

Hazel DUMLU POLAT

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YARI-TEMİZ HALKALAR

Hazel DUMLU POLAT

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tufan ÖZDİN

Değişim halkaları, her $a \in R$ için $1 - e \in (1 - a)R$ olacak şekilde $e \in aR$ idempotenti mevcut olma özelliği ile karakterize edilmiştir. Bu tezde yarı-idempotent elaman aracılığıyla, yarı-değişim halkaların tanımı verilmiştir. Bir R halkasının yarı-değişim halkası olması için gerek ve yeter koşul k merkezli terslenir eleman ve I , R halkasının sağ ideali olmak üzere $kx - x^2 \in I$ şartını sağlayan $x \in R$ için $q - x \in I$ olacak şekilde $q^2 = kq$ yarı-idempotentinin var olduğunu ispatladık. Ayrıca R nin yarı-değişim olması için gerek ve yeter koşulun $R/J(R)$ halkasının değişim halkası olduğu ve R nin verilen denk koşulları $J(R)$ Jacobson radikali için sağladığını ispatladık. Yarı-değişim halkaları ve (güçlü) yarı-temiz halkalar arasındaki bazı ilişkiler incelenmiştir.

2024, 37 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Yarı-idempotent eleman, Yarı-değişim halka, Yarı-temiz halka

ABSTRACT

MSc Thesis

QUASI-CLEAN RINGS

Hazel DUMLU POLAT

Erzincan Binali Yıldırım University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Associate Professor Tufan ÖZDİN

Exchange rings have been characterized by the property that, for all $a \in R$, there exists an idempotent $e \in aR$ such that $1 - e \in (1 - a)R$. In this thesis, we introduce the notion of quasi-exchange rings via quasi-idempotent elements. We prove that a ring R is quasi-exchange if and only if, given a right ideal I of a ring R and $x \in R$ with $kx - x^2 \in I$ where k is a central unit of R , there exist a quasi-idempotent $q^2 = kq$ such that $q - x \in I$. We also show that R is a quasi-exchange ring if and only if $R/J(R)$ a quasi-exchange ring and R satisfies the previous equivalent condition for the Jacobson radical $J(R)$. Some relations between quasi-exchange rings and (strongly) quasi-clean rings are also obtained.

2024, 37 Pages

Keywords:, (Quasi)-idempotent element, (quasi)-exchange ring, (quasi)-clean ring.

TEŞEKKÜR

2014 de başlamış olduğum yüksek lisans serüvenimde karşılaşmış olduğum durumlara rağmen 2022 de af çıkması sonucu bugün emeklerimin karşılığını alabilmemde desteği olan Sayın Doç. Dr. Tufan ÖZDİN hocama teşekkür ederim. Emeklerinin karşılığını ödeyemeyeceğim sayın hocam benimle yeniden ve sıfırdan büyük bir özveri ile bu çalışmayı ortaya çıkarmamı sağlamış ve bitirme sevincimi yaşamama yardımcı olmuştur. Bu zorlu süreçte sevgili annem Bilgi DUMLU nun hayatımdaki en büyük desteğiyle başlamış olmama rağmen bugün bu sevinci buruk yaşamış olsam da her an yanımda ve hala destekçim olduğuna inanıyorum. Bu emek senin eserin canım annem bir gün bu yüksek lisansı bitireceğim ve göreceğiz dediğim günün sözünü tutmanın gururunu sayende yaşıyorum.

Hazel DUMLU POLAT

Haziran, 2024

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. Temel Kavramlar.....	4
2.2. Değişim Halkaları.....	7
2.3. Temiz Halkalar.....	9
3. MATERYAL ve YÖNTEM	13
3.1. Yarı-Temiz Halkalar.....	13
3.2. Değişmeli Yarı-Temiz Halkalar.....	19
4. BULGULAR.....	25
4.1. Yarı Değişim Halkaları.....	25
5. SONUÇLAR.....	36
KAYNAKLAR.....	37

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\subseteq$	Alt küme
$\cup$	Birleşim
$\equiv$	Denk
$\prod$	Dik Çarpım
$\oplus$	Dik toplam
$\in$	Eleman olma
$\triangleleft$	İdeal
$\blacksquare$	İspat sonu
$\cap$	Kesişim

Kısaltmalar

$\mathcal{R}[A, B]$	Bileşenleri A ve B halkası olan dizi halkası
$Id(R)$	İdempotent elemanlar kümesi
$J(R)$	Jacobson radikal
$Nil(R)$	Nil radikal
$UC(R)$	R merkezli terslenir elemanlar kümesi
$N(R)$	R nin asal radikali
$End(R)$	R nin endomorfizma halkası
$\mathcal{C}(R)$	R nin merkezli elemanlar kümesi
$R[x]$	R nin polinom halkası
$R[[x]]$	R nin seri halkası
$U(R)$	R nin terslenir elemanlar kümesi
$QId(R)$	R nin yarı-idempotent elemanlar kümesi
$M_n(R)$	$n \times n$ Matris halkası

1. GİRİŞ

Halka teorisinde, iki farklı elemanın toplamı veya çarpımı biçiminde yazılan elemanlardan oluşan halkaları karakterize etme bu alanda çalışan kişilerin temel çalışmalarını oluşturur. Bu çalışmalardan tezde kullandığımız temel çalışmalar aşağıdaki gibidir.

Crawley ve Jonsson (1964), “*Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems*” başlıklı çalışmada, bir M modülünün değişim özelliğine sahip olmasını “bir indeks kümesi I ve bir X modülü için, $X = M \oplus Y = \bigoplus_{i \in I} N_i$ ve $M \cong M'$ olmak üzere $X = M' \oplus (\bigoplus N_i')$ olacak şekilde $N_i' \subseteq N_i$ alt modülleri bulunabilmesi” olarak tanımlamışlardır. Ayrıca I sonlu ise, M yi sonlu değişim özelliğine sahip modül olarak tanımlarlar.

Warfield (1972), “*Exchange rings and decompositions of modules*” başlıklı makalesinde bir R halkası için R_R modülü sonlu değişim özelliğine sahipse, R halkasını değişim halkası olarak tanımlamış ve değişim halkalarının sınıflarını vermiştir. Ayrıca bir M_R modülünün sonlu değişim özelliğine sahip olmasının gerek ve yeter koşulunun $End(M_R)$ endomorfizma halkasının değişim halkası olduğunu ispatlamıştır.

Monk (1972), “*A characterization of exchange rings*” çalışmasında değişim halkalarının tanımını halkanın elemanlarını kullanarak ilk defa vermiştir. Buna göre, bir R halkasının değişim halkası olması için gerek ve yeter koşul her $x \in R$ için $xyx = y$ ve $z(1-x)(1-yx) = 1-yx$ olacak şekilde $y, z \in R$ var olmasıdır.

Nicholson (1977) tarafından yayınlanan “*Lifting idempotent and exchange rings*” başlıklı çalışmasında, değişim halkaları için yeni bir karakterizasyonu vermiştir. R halkasının değişim halkası olması için gerek ve yeter koşul olarak her sol (veya denk olarak sağ) ideali için halkanın idempotent elemanlarının bu sol (sağ) ideale göre yükseldiğini göstermiştir. Bu karakterizasyon ile alınan halkaların değişim halkası olması için denklikler elde edilmiş, bilinen bazı halkaların değişim halkası olup olmadığı incelenmiştir. Ayrıca, bir $x \in R$ elemanı, $u \in R$ tersinir eleman ve $e \in R$ idempotent eleman olmak üzere, $x = u + e$ şeklinde yazılabiliyorsa bu elemanlar “temiz eleman” olarak adlandırmıştır ve her elemanı temiz eleman olan halka da “temiz halka” olarak tanımlamıştır. Daha sonra, her temiz halkanın değişim halkası olduğu ispatlanmış ve

değişim halkaların temiz halka olabilmesi için gerek ve yeter şartın idempotent elemanlarının halkanın merkezinde olmasını ispatlamıştır.

Nicholson (1997), “*On exchange rings*” başlıklı makalesinde bir R halkası için R_R nin değişim özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşulun ${}_R R$ değişim özelliğine sahip olduğunun ispatını kısa bir şekilde vermiştir

Camillo ve Yu (1994) tarafından yayınlanan “*Exchange rings, units and idempotents*” başlıklı makalede, birleşmeli ve birimli bir R halkasının her elemanı bir idempotent eleman ile bir terslenir elemanın toplamı biçiminde yazılabiliyor ve R sonsuz bir dik idempotent kümesi içermiyorsa R halkasına yarı-mükemmel (semiperfect) halka olarak tanımlamıştır. Bu çalışmada yazarlar temiz halkalar, değişim halkaları ve yarı-mükemmel halkalar arasındaki ilişkileri incelemiştir ve temiz halka olmayan değişim halkası örneğini vermişlerdir. Ayrıca, terslenir düzenli halkaların temiz halka olduğunu ispatlamışlardır.

Nicholson (1999) tarafından yayınlanan “*Strongly clean rings and Fitting’s lemma*” başlıklı makalede, bir R halkasındaki her eleman birbirleriyle değişmeli olan bir idempotent eleman ile bir terslenir elemanın toplamı şeklinde yazılıyorsa R halkasını kuvvetli temiz halka olarak tanımlamıştır. Bu çalışmada, kuvvetli π –düzenli halkaların kuvvetli temiz halka olduğu ispatlamıştır ve temiz halkaların sağladığı bazı özelliklerin kuvvetli temiz halkaların da sağladığını gösterilmiştir.

Camillo ve Khurana (2001) “*A characterization of unit-regular rings*” başlıklı makalede yazarlar bir R halkasının terslenir düzenli halka olma koşulunu vermişlerdir. Buna göre bir R halkası terslenir düzenli olması için gerek ve yeter şart her $x \in R$ için, $u \in R$ terslenir eleman ve $e \in R$ idempotent eleman olmak üzere $x = u + e$ ve $xR \cap eR = 0$ olmasıdır.

Han ve Nicholson (2001) tarafından yayınlanan “*Extensions of clean rings*” başlıklı makalede, bir R halkasında $e \in R$ idempotenti hem eRe hem de $(1 - e)R(1 - e)$ halkaları temiz halka olacak şekilde var ise R halkasının da temiz halka olduğunu ispatlamışlardır. Bunu kullanarak, R temiz halkası üzerinde tanımlı $M_n(R)$ matris halkasının da temiz halka olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca Han ve Nicholson bu çalışmada polinom halkaları ve grup halkalarının temiz halka olması için gerekli ve yeterli şartları belirlemişlerdir.

Nicholson ve Zhou (2004) “*Rings which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit*” başlıklı makalede, yeni bir halka sınıfı olan tek türlü temiz halkaları tanımlamıştır. Bu makalede yazarlar, bir halkanın yerel olması için gerek ve yeter koşulun halkanın temiz ve bu halkada 0 ve 1 den başka idempotent olmayacağını ispatlamışlardır. Ayrıca tek türlü temiz halkalar hakkında temel yapı teoremlerini vermişlerdir.

Lee ve Zhou (2008) “*A class of exchange rings*” başlıklı çalışmalarında bir halkada tek türlü sağ ve sol değişim eleman ile halka tanımını vermişler ve bunların birbirini gerektirmediğini kanıtlamışlardır. Tek türlü değişim halkalar ile alakalı sınıflandırmalar ve tek türlü değişim halkalar için denklik koşulları vermişlerdir.

Tang, Su ve Yuan (2023) “*Quasi-clean ring and strongly quasi-clean rings*” başlıklı makalede, bir kuvvetli düzgün elemanın özel hali olan yarı-idempotent eleman tanımını vermişlerdir. Bu eleman sayesinde temiz halka ve kuvvetli halkaların doğal genelleştirmesini ifade etmişlerdir.

Bu tez beş bölümden oluşmuştur. Girişten sonraki bölümde halkalar, temiz halkalar ve değişim halkalarının temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Üçüncü bölümde yarı-temiz halka tanımı ile örnekleri verilmiştir. Dördüncü bölümde ise yarı-değişim halkalar tanımlanmış ve bu halka tanımı ile yarı-temiz halkalar arasındaki ilişki incelenmiştir. Tezin son bölümünde ise elde edilen sonuçların özetleri verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde tez çalışmasında kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bu çalışmada, R birleşmeli ve birimli bir halkadır. Bu halkanın sıfırı ve birimi sırasıyla 0 ve 1'dir. Modüller aksi belirtilmedikçe sağ R -modül olacaktır.

Tanım 2.1.1. R bir halka olsun.

$$C(R) = \{a \in R : \forall r \in R \text{ için } ar = ra\}$$

kümesine R halkasının merkezi denir. $0 \in C(R)$ olduğundan $C(R) \neq \emptyset$ dır (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.1.2. R halkası içinde, bir $u \in R$ için $vu = 1$ koşulunu sağlayan en az bir $v \in R$ elemanı varsa, u elemanı R halkasının sağ (sol) terslenir elemanı olarak adlandırılır. R 'nin tüm sağ (sol) terslenir elemanlarının kümesi $U(R)$ ile gösterilir (Anderson ve Fuller, 1992).

Hem terslenir hem de merkezil olan elemanlar kümesi $UC(R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. $x, y \in R$ olsun. Eğer $x, y \neq 0$ ve $xy = 0$ ise, x 'ya bir sol sıfır böleni ve y ye bir sağ sıfır böleni denir. Bir halkada sıfır böleni bulunmaması durumunda, o halkaya sıfır bölensiz halka denir (Faith, 1973).

Tanım 2.1.4. Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz halkaya tamlık bölgesi denir (Faith, 1973).

Tanım 2.1.5. $e \in R$ için $e^2 = e$ sağlanıyor ise e 'ye idempotent (eşkare) eleman denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.1.6. $e, f \in R$ idempotent elemanlar olmak üzere, $ef = 0 = fe$ ise e ve f elemanlarına dik idempotent denir (Faith, 1973).

Tanım 2.1.7. Bir R halkasının her elemanı idempotent ise, R 'ye bir Boolean halkası denir (Faith, 1973).

Tanım 2.1.8. $a \in R$ için $a^n = 0$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa, a 'ya nilpotent (üstel sıfır) eleman denir. R halkasında sıfırdan farklı nilpotent eleman yoksa, R 'ye indirgenmiş halka denir (Lam, 2001).

Tanım 2.1.9. M bir R -modül, $N \subseteq M$ ve $A \subseteq R$ olsun. $r_R(N) = \{r \in R : Nr = 0\}$ kümesine N 'nin R üzerinde sağ sıfırlayanı, $l_M(A) = \{x \in M : xA = 0\}$ kümesine A 'nın M üzerinde sol sıfırlayanı adı verilir (Lam, 2001).

Tanım 2.1.10. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $N + K = M$ olacak şekilde M 'nin her K alt modülü için $K = M$ ise, N 'ye dar (small) alt modül adı verilir ve $N \ll M$ ile gösterilir (Lam, 1998).

Tanım 2.1.11. M bir R -modül olsun. M nin maksimal alt modüllerinin kesişimine veya denk olarak M 'deki dar alt modüllerin toplamına, M 'nin radikali denir ve $Rad(M)$ ile gösterilir (Faith, 1973).

Önerme 2.1.12. R bir halka olmak üzere $Rad(R_R) = Rad(_R R)$ sağlanır (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.1.13. Bir R halkasının maksimal ideallerinin kesişimine R halkasının Jacobson radikali denir ve $J(R)$ ile gösterilir. Ayrıca, $Rad(R_R) = J(R) = Rad(_R R)$ dir (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.1.14. R ve S iki halka ve $\varphi : R \rightarrow S$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $a, b \in R$ için

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \text{ ve } \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

ise, φ ye R 'den S 'ye bir halka homomorfizması denir. Eğer φ bire bir ise φ ye bir halka monomorfizması; örten ise bir halka epimorfizması ve bijeksiyon ise bir halka izomorfizması denir. R 'den R 'ye tanımlı bir homomorfizmaya endomorfizma denir ve R üzerinde tanımlı tüm endomorfizmalar kümesi $End(R)$ ile gösterilir (Anderson ve Fuller, 1992).

Açık olarak, $e^2 = e \in R$ için $\varphi(e) = \varphi(e^2) = \varphi(e).\varphi(e)$ olduğundan homomorfizma idempotent elemanı korur.

Tanım 2.1.15. R bir halka, $\{R_i : i \in I\}$ halkalar ailesi ve $\mathcal{E} : R \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$ bir injektif halka homorfizması olsun. Eğer,

- (1) $\mathcal{E} : R \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$ monorfizma,
- (2) $\pi_i : \prod_{i \in I} R_i \rightarrow R_i$ kanonik projeksiyon olmak üzere; $\forall i \in I$ için $\pi_i \circ \mathcal{E} : R \rightarrow R_i$ örten,

ise R ye $\{R_i : i \in I\}$ halkalar ailesinin alt dik toplananı denir (Lam, 2001).

Teorem 2.1.16. (İndirgenmiş Halkalar için Yapı Teoremi): R halkasının indirgenmiş halka olması için gerek ve yeter koşul R 'nin tamlik bölgelerinin alt dik çarpımı olmasıdır.

Yardımcı Teorem 2.1.17. (Birkhoff Teoremi): Sıfır olmayan herhangi bir R halkası alt indirgenmez halkaların alt dik çarpım olarak temsil edilebilir.

Yardımcı Teorem 2.1.18. R değişmeli indirgenmiş bir halka olsun. R halkasının bir cisim olması için gerek ve yeter koşul R halkasının indirgenmez halkaların alt direkt çarpımı olarak gösterilmesidir.

Tanım 2.1.19. R bir halka olmak üzere $R / J(R)$ bölümlü halka ise, R 'ye yerel (local) halka denir. (Faith, 1973).

Tanım 2.1.20. R bir halka olmak üzere, her $a \in R$ için $aba = a$ olacak şekilde bir $b \in R$ varsa, R halkasına von Neumann düzenli (regular) halka veya kısaca düzenli halka denir (Nicholson 1999).

Tanım 2.1.21. R bir halka olmak üzere, her $a \in R$ için $aua = a$ olacak şekilde bir $u \in U(R)$ varsa, R halkasına terslenir düzenli (unit regular) halka denir (Camillo ve Khurana, 2001).

Tanım 2.1.22. R bir halka olmak üzere $a \in R$ için $a = a^2b$ olacak şekilde $b \in R$ varsa, a elemanına kuvvetli düzenli (strongly regular) eleman denir. Her elemanı kuvvetli düzenli olan halkaya kuvvetli düzenli (strongly regular) halka denir (Nicholson, 1999).

Tanım 2.1.23. R bir halka, $a \in R$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $a^n \in Ra^{n+1} \cap a^{n+1}R$ ise a elemanına π –kuvvetli düzenli eleman denir. R halkasının her elemanı π –kuvvetli düzenli ise, R halkasına π –kuvvetli düzenli halka denir (Tuganbaev, 2002).

Tanım 2.1.24. M, K ve U R -modüller olmak üzere her $f : K \rightarrow M$ R -modül monomorfizması ve her $\gamma : K \rightarrow U$ R -modül homomorfizması için $\bar{\gamma}f = \gamma$ olacak biçimde $\bar{\gamma} : M \rightarrow U$, R -modül homomorfizması varsa U ya M -injektif modül denir. Eğer U , her M modülü için M -injektif ise U ya injektif modül adı verilir (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.1.25. M, K ve U R -modüller olmak üzere her $f : K \rightarrow M$ R -modül epimorfizması ve her $\gamma : U \rightarrow K$ R -modül homomorfizması için $f\bar{\gamma} = \gamma$ olacak biçimde $\bar{\gamma} : U \rightarrow M$, R -modül homomorfizması varsa U ya M -projektif modül denir. Eğer U , her M modülü için M -projektif ise U ya projektif modül adı verilir (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.1.26. Bir R halkasının her sol (sağ) R -modülü projektif ise R ye yarı-basit halka denir (Lam, 2001).

Tanım 2.1.27. Bir R (değişmeli) halkasının sadece sayılabilir sayıda maksimal ideali var ise R halkasına yarı-yerel halka denir.

Daha genel olarak, $R/J(R)$ yarı-basit halka ise R halkasına yarı-yerel halka denir (Lam, 2001).

2.2. Değişim Halkaları

Önerme 2.2.1. R bir halka ve $x \in R$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

- (1) $e - x \in R(x - x^2)$ olacak biçimde $e^2 = e \in R$ vardır.
- (2) $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$ olacak biçimde $c \in R$ ve $e^2 = e \in Rx$ vardır.
- (3) $R = Re + R(1 - x)$ olacak biçimde $e^2 = e \in Rx$ vardır.
- (4) $1 - e \in R(1 - x)$ olacak biçimde $e^2 = e \in Rx$ vardır (Nicholson, 1977).

Tanım 2.2.2. R bir halka olsun. Eğer R halkasındaki her eleman Önerme 2.2.1'deki denk şartlardan birini sağlıyorsa, R halkasına sol değişim (exchange) halka denir (Nicholson, 1977).

Tanım 2.2.3. R bir halka ve L de R 'nin toplamsal bir alt grubu olsun. $x - x^2 \in L$ şartını sağlayan her $x \in R$ için $e - x \in L$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ varsa, bu durumda R halkası için L 'ye göre idempotent elemanlar yükselir olarak adlandırılır (Nicholson, 1977).

Örnek 2.2.4. $R = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : 2 \nmid m \text{ ve } 3 \nmid n \text{ (} m \text{ ve } n \text{ aralarında asal)}\}$ şeklinde tanımlanan bir halka olsun. Bu durumda $J(R) = 6R$ olur. Ancak idempotent elemanlar $J(R)$ idealine göre yükselmez (Chen, 1999).

Sonuç 2.2.5 Bir halkanın değişim halkası olabilmesi için gerek ve yeter şart idempotent elemanların sol ideal üzerinde yükselmesidir (Nicholson, 1977).

Önerme 2.2.6. Bir değişim halkasının her homomorfik görüntüsü bir değişim halkasıdır (Nicholson, 1977).

Önerme 2.2.7. R nin değişim halkası olması için gerek ve yeter koşul $R / J(R)$ bölüm halkasının bir değişim halkası olması ve $J(R)$ tarafından üretilen idealin idempotent elemanlarla yükselmesidir (Nicholson, 1977).

Örnek 2.2.8. Her düzenli halka, yani Jacobson radikali sıfır olan halkalar, değişim halkasıdır (Nicholson, 1977).

Örnek 2.2.9. Her yarı-cisim (bölümlü halka) değişim halkasıdır (Nicholson, 1977).

Tanım 2.2.10. Bir R halkasındaki idempotent elemanlar $J(R)$ 'ye göre yükseliyor ve $J(R)$ de kapsanmayan her sol ideal sıfırdan farklı bir idempotent eleman içeriyorsa, R 'ye güçlü (potent) halka denir (Nicholson, 1977).

Önerme 2.2.11. Değişim halkaları güçlü halkadır. (Nicholson, 1977).

Önerme 2.2.12. Her yerel halka değişim halkasıdır (Nicholson, 1977).

2.3. Temiz Halkalar

Tanım 2.3.1. R bir halka olsun. Her $a \in R$ için $a = e + u$ eşitliğini sağlayacak şekilde idempotent $e \in R$ ve tersinir $u \in R$ varsa, $a \in R$ 'ye temiz (clean) eleman denir. Tüm elemanları temiz olan halkaya temiz (clean) halka denir (Nicholson, 1977).

Örnek 2.3.2. Bir R halkasında e idempotent eleman ise, $1 - e \in R$ idempotent ve $2e - 1 \in R$ tersinir olduğundan $e = 1 - e + (2e - 1)$ olup e temiz elemandır. Diğer taraftan, $u \in R$ tersinir elemanı için, $0 \in R$ idempotent ve $u \in R$ tersinir olup $u = 0 + u$ olduğundan u temiz elemandır. Ayrıca $a = e + u \in R$ olacak biçimde $e \in R$ idempotent ve tersinir $u \in R$ varsa, $1 - e \in R$ idempotent ve $-u \in R$ tersinir olduğundan $1 - a = 1 - e + (-u) \in R$ olup $1 - a$ temiz elemandır (Han ve Nicholson, 2001).

Örnek 2.3.3. (1) Her idempotent eleman temiz eleman olduğundan Boolean halkaları da temiz halkadır.

(2) Cisimler ve yarı-cisimler de temiz halkalardır.

Önerme 2.3.4. R bir halka ve $2 \in U(R)$ olsun. R halkasının temiz halka olması için gerek ve yeter koşul her $a \in R$ için $a = t + u$ biçiminde yazılabilen $t^2 = 1$ ve $u \in U(R)$ olmasıdır (Camillo ve Yu, 1994).

Önerme 2.3.5. (1) Temiz halkalar her zaman değişim halkalarıdır.

(2) İdempotent elemanı merkezli olan her bir halkanın temiz halka olabilmesi için gerek ve yeter koşul değişim halkası olmasıdır (Nicholson, 1977).

Önerme 2.3.6. İndirgenmiş halkaların her idempotent elemanı merkezlidir (Nicholson, 1977).

Önerme 2.3.7. Değişmeli veya indirgenmiş bir halka olan R için, R halkasının değişim halkası olması için gerek ve yeter koşul R 'nin temiz halka olmasıdır (Nicholson, 1977).

Önerme 2.3.8. Bir R halkası için aşağıdakiler birbirine eşdeğerdir:

- (1) R kuvvetli düzenli bir halkadır,
- (2) Her $x \in R$ için $x = x^2y = zx^2$ olacak şekilde $y, z \in R$ bulunur,
- (3) R düzenli ve indirgenmiş bir halkadır,
- (4) R düzenli ve idempotent elemanları merkezil olan bir halkadır,
- (5) Her $x \in R$ için $xR = x^2R$ ve $r_R(x) = r_R(x^2)$ geçerlidir,
- (6) Her $x \in R$ için $x = xax$ ve $xa = ax$ olacak şekilde $a \in R$ bulunur,
- (7) Her $x \in R$ için $x = xux$ ve $xu = ux$ olacak şekilde $u \in U(R)$ bulunur,
- (8) Her $x \in R$ için $x = ue = eu$ olacak şekilde $e = e^2R$ ve $u \in U(R)$ bulunur,
- (9) Her $x \in R$ için $x^2u = x = ux^2$ olacak şekilde $u \in U(R)$ bulunur (Tuganbaev, 2002).

Önerme 2.3.9. Kuvvetli düzenli her halka bir temiz halkadır (Nicholson, 1977).

Önerme 2.3.10. $L = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid 2 \nmid b \right\}$ kümesi, $\mathbb{Q}$ nın bir alt halkası ve yereldir. Ayrıca Önerme 2.2.12. gereğince değişim halkasıdır. Ancak, $R = R(\mathbb{Q}, L)$ halkası temiz ve indirgenmiş halka olmasına rağmen, kuvvetli düzenli halka değildir (Nicholson, 1977).

Önerme 2.3.11. Her yerel halka temiz halkadır (Han ve Nicholson, 2001).

Tanım 2.3.12. R bir halka ve $a, b \in R$ olmak üzere, $ab = 1$ olduğunda $ba = 1$ ise, R 'ye Dedekind sonlu halka denir (Lam, 2001).

Önerme 2.3.13. Her tersinir düzenli halka Dedekind sonlu halkadır.

Önerme 2.3.14. Her tersinir düzenli halka düzenli halkadır.

Önerme 2.3.15. R bir tersinir düzenli halka ve $r_R(a) = 0$ olduğunda, $a \in R$ tersinirdir.

Teorem 2.3.16. R bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

- (1) R düzenli bir halkadır,
- (2) R 'nin her tek üreteçli sağ (sol) ideali bir idempotent eleman tarafından üretilir,
- (3) R 'nin her sonlu üretilen sağ (sol) ideali bir idempotent eleman tarafından üretilir (Goodearl, 1979).

Dolayısıyla, düzenli bir halkanın her sonlu üreteçli ve tek üreteçli ideali bir direkt toplanandır.

Teorem 2.3.17. R bir düzenli halka ve R üzerindeki bir projektif modül M olsun. M modülünün her sonlu üreteçli alt modülü M 'nin bir direkt toplananıdır (Goodearl, 1979).

Teorem 2.3.18. R bir düzenli halka ise R 'nin tersinir düzenli bir halka olması için gerek ve yeter şart her A, B ve C sonlu üretilen projektif sağ R -modülleri için $A \oplus B \cong A \oplus C$ olduğunda, $B \cong C$ olmasıdır (Goodearl, 1979).

Camillo ve Khurana, tersinir düzenli halkaları temiz halkalar yardımıyla şu şekilde karakterize etmiştir.

Teorem 2.3.19. Bir R halkasının tersinir düzenli bir halka olması için gerek ve yeter şart, her $a \in R$ için $a = e + u$ olacak biçimde $e^2 = e \in R$ ve tersinir $u \in R$ mevcut olup $aR \cap eR = 0$ olmasıdır (Camillo ve Khurana, 2001).

Önerme 2.3.20. Bir halkanın temiz halka olması durumunda, her homomorfik görüntüsü de temiz halkadır (Han ve Nicholson, 2001).

Önerme 2.3.21. R bir halka ve R 'nin bir ideali I için $I \subseteq J(R)$ olsun. R halkasının temiz halka olması için gerek ve yeter şart, R/A 'nın temiz halka ve idempotent elemanlarının I 'ya göre yükselmesidir (Han ve Nicholson, 2001).

Sonuç 2.3.22. R halkasının temiz olması için gerek ve yeter koşul, $R / J(R)$ nin temiz halka ve idempotent elemanların $J(R)$ 'ye göre yükselmesidir (Nicholson, 1977).

Yardımcı Teorem 2.3.23. Bir R halkası için, $e^2 = e \in R$ olacak şekilde eRe ile $(1 - e)R(1 - e)$ temiz halkaları varsa R 'ye temiz halka denir (Han ve Nicholson, 2001).

Teorem 2.3.24. Eğer bir R halkası için $i = 1, 2, \dots, n$ ve $e_i Re_i$ temiz halkalarının $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ olacak şekilde e_i dik idempotent elemanlar varsa, R temiz halkadır (Han ve Nicholson, 2001).

Sonuç 2.3.25. Eğer R temiz halkaysa, o zaman $M_n(R)$ matris halkası da temiz halkadır (Han ve Nicholson, 2001).

Sonuç 2.3.26. $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ için $i = 1, 2, \dots, n$ ve $End(M_i)$ halkaları temiz halka ise, o zaman $End(M)$ temiz halkadır (Han ve Nicholson, 2001).

Sonuç 2.3.27. A ve B halka ve ${}_A V_B$ bir bimodülü olsun. $\begin{bmatrix} A & V \\ 0 & B \end{bmatrix}$ matris halkasının temiz halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin temiz halka olmasıdır (Han ve Nicholson, 2001).

Tanım 2.3.28. R bir halka olsun. Eğer $J(R)$ tarafından kapsanmayan her sol ideal, sıfırdan farklı bir idempotent eleman içeriyorsa, R 'ye yarı-güçlü (semipotent) halka denir (Han ve Nicholson, 2001).

Tanım 2.3.29. Bir R halka ve $e \in R$ idempotent olsun. Eğer eRe halkası yerel halkaysa, e 'ye yerel idempotent denir (Han ve Nicholson, 2001).

Önerme 2.3.30. R temiz halka iken aşağıdakiler sağlanır.

(1) R yarıgüçlü halkadır.

(2) R halkasındaki her ilkel idempotent eleman yerel idempotentdir (Han ve Nicholson, 2001).

Özet olarak aşağıdaki tanımlar birbirlerini gerçekler: $\forall a \in R$ için

(1) Temiz Halka: $u \in U(R)$, $e \in Id(R)$ ise $a = u + e$

(2) Zayıf Temiz Halka: $u \in U(R)$, $e \in Id(R)$ ise $a = u + e$ veya $a = u - e$

(3) Kuvvetli Temiz Halka: $u \in U(R)$, $e \in Id(R)$ ise $a = u + e$ ve $ue = eu$

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Yarı-Temiz Halkalar

Bu bölümde, bir tür kuvvetli düzenli eleman olan yarı-idempotent eleman tanımı ve bu elemanlar tarafından inşa edilen yarı-temiz halkaların özellikleri verilecektir.

Tanım 3.1.1. R bir halka iken $q \in R$ elemanı $q^2 = kq$ olacak şekilde $k \in UC(R)$ varsa bu elemana yarı-idempotent eleman denir. Bu q elemanı, k -idempotent eleman olarak da adlandırılır.

R halkasının tüm yarı-idempotent elemanlar kümesi $QId(R)$ ile gösterilir. Açık olarak aşağıdaki diyagram elde edilir;

$$Idempotent\ Eleman \Rightarrow Yarı - idempotent\ Eleman \Rightarrow Kuvvetli\ Düzenli\ Eleman$$

Fakat bu diyagramın tersi doğru değildir.

Eğer $k \in UC(R)$ ve $q \in R$ bir k -idempotent ise,

$$(k^{-1}q)^2 = k^{-1}qk^{-1}q = k^{-1}k^{-1}qq = k^{-1}k^{-1}kq = k^{-1}q$$

dır. Yani $(k^{-1}q)$ bir idempotenttir. Buradan $k^{-1}q = e$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır. Öyleyse $q \in QId(R)$ için $k \in UC(R)$ ve $e^2 = e \in R$ olmak üzere $q = ke$ biçiminde bir karakterizasyona sahiptir.

Eğer $q \in R$ bir k -idempotent, yani $k \in UC(R)$ ve $e \in Id(R)$ olmak üzere $q^2 = kq$ ve $q = ke$ ise

$$R = qR \oplus (k - q)R = eR \oplus (1 - e)R$$

şeklinde R halkasının bir dik toplam ayrışımı elde edilir. Burada $qR = eR$ ve $(k - q)R = (1 - e)R$ dır. Aynı zamanda $k - q = k(1 - e)$ olduğundan $k - q$ bir yarı-idempotenttir.

Yarı-idempotent eleman tanımı kullanılarak, yarı-Boolean halka tanımı aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 3.1.2. R halkasının her elemanı yarı-idempotent eleman ise R halkasına yarı-Boolean halka denir.

Örneğin; Boolean halkalar ve cisimlerin dik çarpımı yarı-Boolean halkadır. Ayrıca, yarı-idempotent elemanların homomorfik görüntülerinin yine yarı-idempotent olduğu açık olduğu için, yarı-Boolean halkaların homomorfik görüntüleri de yarı-Boolean halkadır.

Aşağıdaki diyagram bilinmektedir:

$$\begin{aligned} \text{Değişmeli bir halka düzenli halkadır} &\Leftrightarrow \text{Terslenir düzenli halkadır} \\ &\Leftrightarrow \text{Kuvvetli düzenli halkadır} \end{aligned}$$

Diyagrama göre, aşağıdaki sonuçlar yarı-Boolean halkaları için bir karakterisyon verir.

Önerme 3.1.3. R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) R yarı-Boolean halkasıdır,
- (2) R değişmeli düzenli halkadır,
- (3) R değişmeli indirgenmiş halkadır ve her asal ideali maksimaldir,
- (4) R , cisimlerin bir alt dik çarpımıdır ve her asal ideali maksimaldir,
- (5) R , cisimlerin bir alt dik çarpımıdır ve R nin herhangi bir maksimal idealinin her lokalizasyonu cisimdir.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) R yarı-Boolean olduğundan, herhangi bir $0 \neq q \in R$ için $q = ke$ olacak şekilde $k \in UC(R)$ ve $e \in Id(R)$ vardır. Buradan, herhangi bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için;

$$q^n = kekeke \dots ke = k^n e, \quad e \neq 0$$

elde edilir. Buradan q nilpotent değildir. Dolayısıyla R indirgenmiştir. O halde, R indirgenmiş olduğundan her idempotent merkezdendir. Yani, $q = ke$ merkezli olur. Buradan R değişmelidir.

(2) $\Rightarrow$ (1) R değişmeli ve düzenli olduğu için terslenir düzenlidir. Yani, herhangi bir $a \in R$ için;

$$a = aka$$

olacak şekilde bir $k \in U(R) = UC(R)$ vardır. R değişmeli olduğundan,

$$a = ka^2$$

dir. $k \in UC(R)$ olup $\exists k^{-1} \in R$ için $kk^{-1} = 1$ dir. Buradan,

$$k^{-1}a = k^{-1}ka^2 \implies a^2 = k^{-1}a$$

elde edilir. Yani, $a \in R$, k^{-1} –idempotentdir. O halde R yarı-Boolean halkadır.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) (Goodearl, 1979, Teorem 1.16)’ den gelir.

(2) $\Rightarrow$ (4) Yardımcı Teorem 2.1.17.’ye göre;

$$\varphi : R \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$$

bir halka monomorfizması vardır, burada her R_i alt dik indirgenemez bir halka ve her bir $i \in I$ için $\pi_i \varphi : R \rightarrow R_i$ üzerine dönüşümdür. Böylece her R_i alt dik indirgenemez değişmeli indirgenmiş halkadır. Yardımcı Teorem 2.1.18 den R_i cisimdir. Buradan R alt dik cisimler tarafından üretilir. Dolayısıyla (3) e göre R nin tüm asal idealleri maksimal idealdir.

(4) $\Rightarrow$ (3) Teorem 2.1.16. dan açıktır.

(4) $\Leftrightarrow$ (5) Açıktır. ■

Böylece bir R değişmeli düzenli halka (yani Boolean olmayan halka) için, R deki her eleman yarı-idempotent elemandır fakat idempotent eleman değildir.

Tanım 3.1.4. Bir $a \in R$ için $u \in U(R)$ ve $q \in QId(R)$ olmak üzere $a = u + q$ biçiminde yazılabiliyorsa bu elemana yarı-temiz eleman denir. R halkasının her elemanı yarı-temizse, R ’ye yarı-temiz halka denir. Her $a \in R$ için $a = u + q$, $u \in U(R)$, $q \in QId(R)$ ve $uq = qu$ ise R halkasına kuvvetli yarı-temiz halka denir.

R halkasında bir a elemanın (kuvvetli) yarı-temizliği sağlaması için gerek ve yeter koşul ka 'nın (kuvvetli) temiz olacak şekilde bir merkezli tersinir k elemanının olmasıdır.

Temiz halka tanımları ile aşağıdaki diyagram elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{Kuvvetli Temiz Halka} &\Rightarrow \text{Temiz Halka} \Rightarrow \text{Zayıf Temiz Halka} \\ &\Rightarrow \text{Yarı - Temiz Halka} \end{aligned}$$

Ancak diyagramın tersi doğru değildir.

Örnek 3.1.5. Yarı-Boolean halkalar, değişmeli düzenli halkalar, temiz halkalar ve zayıf temiz halkaların tümü yarı-temiz halkadır. Ayrıca yarı-Boolean halkalar ve kuvvetli temiz halkaların tümü kuvvetli yarı-temiz halkadır.

A halka ve B, A 'nin bir alt halkası olsun. Dolayısıyla;

$$\mathcal{R}[A, B] := \{(a_1, \dots, a_n, b, b, \dots) : a_i \in A, b \in B, n \geq 1\}$$

kümesi bileşenlerinin toplama ve çarpma işlemine göre bir halkadır.

Önerme 3.1.6. R halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- (1) (Kuvvetli) Yarı-temiz halkaların homomorfik görüntüsü de (kuvvetli) yarı-temiz halkadır.
- (2) $R[x]$ yarı-temiz halka değildir.
- (3) $R[[x]]$ seri halkasının yarı-temiz halka olması için gerek ve yeter şart R 'nin yarı-temiz halka olmasıdır.
- (4) $R[x]/(x^{n+1})$ yarı temiz olması için gerek ve yeter şart R 'nin yarı-temiz halka olmasıdır.
- (5) $\{R_\alpha\}$ bir halka ailesi olsun. O zaman, doğrudan $R = \prod R_\alpha$ kuvvetli yarı-temiz halkadır ancak ve ancak R_α lar kuvvetli yarı-temiz halkalardır.

(6) A bir halka ve B, A 'nin alt halkası olsun. O zaman, $\mathcal{R}[A, B]$ yarı-temiz halka iken ancak ve ancak A yarı-temiz halkadır. Burada $\forall b \in B$ için $b = e + u$ şeklinde olup $u \in U(B)$ ve $e^2 = ke$ ile $k \in U(B) \cap C(A)$ dir.

İspat (1) Bir R halkasındaki idempotent ve terslenir elemanların homomorfik görüntüleri sırasıyla idempotent ve terslenir eleman olduğundan ispatı açıktır.

(2) $(R/J(R))[x]$, $R[x]$ polinomlar halkasının bir görüntüsü olduğundan, $(R/J(R))[x]$ ' in yarı-temiz halka olmadığını göstermek yeterlidir. Yani $J(R) = 0$ olduğunu varsayalım. Böylece 0 , R halkasındaki tek merkezli nilpotent elemanıdır. $R[x]$ 'in her merkezli terslenir elemanı aynı zamanda R halkasının da merkezli terslenir elemanıdır. Şimdi $x \in R[x]$ nin yarı-temiz eleman olmadığını gösterelim. Farz edelim $x \in R[x]$ yarı-temiz eleman iken, $x = \alpha + (x - \alpha)$ olacak şekilde $R[x]$ te $\alpha = e_0 + e_1x + \dots + e_nx^n$ bir k -idempotent ve $(x - \alpha)$ terslenir elemanı olsun. Burada k, R de merkezli terslenir eleman ve e_0, R ' de terslenir elemandır. $\alpha^2 = k\alpha$ dan;

$$e_0^2 = ke_0$$

$$e_0e_1 + e_1e_0 = ke_1$$

$$e_0e_1 + e_1^2 + e_2e_0 = ke_2$$

$$\vdots$$

elde edilir. İkinci eşitliği soldan e_0 ile çarpılırsa,

$$ke_0e_1 = e_0^2e_1 + e_0e_1e_0 = ke_0e_1 + e_0e_1e_0$$

elde edilir. Buradan, $e_0e_1e_0 = 0$ dir. e_0, R 'de terslenir olduğundan $e_1 = 0$ bulunur. Benzer şekilde, üçüncü eşitlikten $e_2 = 0$ bulunur. İşleme devam edilirse, $i = 1, \dots, n$ için $e_i = 0$ olur. Böylece $\alpha - x = e_0 - x$ bulunur ki bu $R[x]$ te terslenir değildir. Bu ise $x - a$ nin terslenir oluşunu kabul etmemizle çelişir. O halde, $R[x]$ yarı-temiz halka değildir.

(3) $R, R[[x]]$ in homomorfik görüntüsü olduğu için gereklilik (1)' den açıktır.

Yeterlilik; $\alpha = \sum a_i x^i \in R[[x]]$ olsun. R yarı-temiz halka olduğundan, merkezil terslenir $k \in R$ ve terslenir $u \in R$ için $q^2 = kq$ olmak üzere $a_0 = q + u$ biçimindedir. Böylece $\alpha = q + (u + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$ dir, burada $u + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \in R[[x]]$ te terslenir eleman ve $q \in R[[x]]$ te yarı-idempotent elemandır. Yani $\alpha, R[[x]]$ te yarı-temiz elemandır.

(4) $R[x]/(x^{n+1})$, $R[[x]]$ in bir görüntüsü ve R de $R[x]/(x^{n+1})$ in görüntüsü olduğundan Sonuç (1) ve (3)' den açıktır.

(5) Her bir R_α, R nin bir görüntüsüdür, bu nedenle gereklilik (1) tarafından sağlanır. Yeterlilik için $r = (r_\alpha) \in R$ için $r_\alpha = q_\alpha + u_\alpha$ olup burada $q_\alpha \in R_\alpha, k_\alpha$ -idempotent ve $u_\alpha \in R_\alpha$ in terslenir elemandır. Buradan $u := (u_\alpha) \in R$ nin birimi, $k := (k_\alpha) \in R$ 'nin merkezil terslenir elemanıdır ve $q = (q_\alpha)$, olmak üzere $q^2 = kq$ ve $r = q + u$ dir. Yani r yarı temizdir.

(6) $T = \mathcal{R}[A, B]$ olsun. T nin yarı temiz olduğunu varsayalım. A, T nin görüntüsü olduğundan (1)'den A yarı-temizdir. $b \in B$ ve $\beta = (b, b, \dots, b, b, \dots) \in T$ olsun. $\beta = (q_i) + (u_i)$ yazılır, burada $(q_i) \in T$ (k_i)-idempotent ve $(u_i) \in T$ terslenir elemandır. Buradan;

$$(q_i) = (q_1, \dots, q_n, q, q, \dots), (u_i) = (u_1, \dots, u_n, u, u, \dots)$$

yazılabilir ve $(k_i) = (k_1, \dots, k_n, k, k, \dots)$ olur. Burada $u, q \in B, k \in U(B) \cap C(A)$, $q^2 = kq$ için $b = q + u$ olur.

Gereklilik, $\alpha = (a_1, \dots, a_n, b, b, \dots) \in T$ olsun. Burada $k \in U(B) \cap C(A)$ olmak üzere, $q^2 = kq$ ve $u \in U(B)$ için $b = q + u$ dir. Ayrıca her i için, q_i ler A da k_i -idempotent ve $u_i \in U(A)$ olmak üzere $a_i = q_i + u_i$ dir. Böylece, $(k_i) = (k_1, \dots, k_n, k, k, \dots) \in T$ merkezil terslenir elemandır. ve $a = (q_1, \dots, q_n, q, q, \dots) + (u_1, \dots, u_n, u, u, \dots)$ olacak şekilde (k_i) -idempotent ve terslenir eleman toplamı şeklindedir. Böylece α , yarı-temizdir. ■

Örnek 3.1.7. $p \neq q$ tek asal sayılar ve $R = \mathbb{Z}_{(p)} \cap \mathbb{Z}_{(q)} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, p \nmid b, q \nmid b\}$ temiz olmayan yarı-temiz bir halka olsun (Anderson ve Comillo, 2002). Buradan, Önerme 3.1.3(4) den $R \times R$ yarı-temiz halkadır ancak zayıf temiz halka değildir

(Ahn ve Anderson, 2006). Önerme 3.1.3(5) ten $\mathcal{R}[R, R]$ yarı-temiz halka fakat zayıf temiz halka değildir (Kosan ve Sakinkaya, 2017).

Teorem 3.1.8. R terslenir düzenli bir halkadır ancak ve ancak her $a \in R$, $aR \cap qR = 0$ olmak üzere, $a = q + u$ şeklinde yarı-temiz bir ayrışmaya sahiptir.

İspat ($\Rightarrow$) (Camillo ve Khurana, 2001) den bir temiz ayrışım, yarı-temiz bir ayrışım olmasından gerçeklenir.

($\Leftarrow$) Her $a \in R$ için, $q^2 = kq$, $u \in U(R)$ ve $aR \cap qR = 0$ olmak üzere, $a = q + u$ olacak şekilde yarı-temiz bir ayrışmaya sahip olsun. Buradan $au^{-1}q = (q + u)u^{-1}q = qu^{-1}q + q \in aR \cap qR = 0$ dir. Böylece $au^{-1}(a - u) = 0$ ve $a = au^{-1}a$ elde edilir. Yani, R terslenir düzenli halkadır. ■

3.2. Değişmeli Yarı-Temiz Halkalar

(Anderson, 2002; Örnek 13)'e göre, her ayrıştırılmaz değişmeli temiz halka yerel iken, bir değişmeli halkanın yerelleştirilmesinin temiz halka olması gerekmez. Buna rağmen aşağıdakilere sahibiz.

Önerme 3.2.1. Değişmeli yarı-temiz bir halkanın her yerelleştirilmesi, yarı-temizdir.

İspat R yarı-temiz halka ve S, R 'nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. $T = S^{-1}R$ alalım. Her bir $x \in T$ için, $a \in R, s \in S$ olmak üzere, $x = \frac{a}{s}$ ve R yarı-temiz halka olduğu için, R de $a = q + u$ şeklinde yarı-temiz ayrışmaya sahiptir. Böylece,

$$x = s^{-1}q + s^{-1}u$$

şeklinde T de yarı-temiz ayrışımı elde edilir. ■

R 'nin her asal ideallerinin kesişimine asal radikal denir. $N(R)$ ile ifade edilir. Değişmeli bir halka için R de $N(R) = Nil(R)$ dir.

Önerme 3.2.2. R değişmeli bir halka iken R nin yarı-temiz olması için gerek ve yeter koşul, $R/N(R)$ 'nin yarı-temiz halka olmasıdır.

İspat. ($\Rightarrow$) Önerme 3.1.6 (1) den açıktır.

($\Leftarrow$) Her hangi bir $a \in R$ için, $\bar{a}, a$ nın $R/N(R)$ deki görüntüsü iken $R/N(R)$ yarı-temiz olduğundan, $R/N(R)$ de $\bar{q}$ yarı-idempotent ve $\bar{u}$ terslenir eleman olmak üzere, $\bar{a} = \bar{q} + \bar{u}$ şeklinde yazılır. R değişmeli ve $N(R)$ nil radikal olduğu için, $R/N(R)$ deki idempotentler ve terslenir elemanlar R ye yükseltilebilir. Böylece, R de e yarı-idempotent ve u terslenir eleman olarak farz edebiliriz. Yani, $a - (e + u) = b \in N(R)$ ve böylece $a = e + (u + b)$ biçiminde de yarı temiz ayrışımı elde edilir. ■

Önerme 3.2.3. R değişmeli halka, $r \in R$ iken a kuvvetli π –düzenli ve $u \in U(R)$ olmak üzere $r = a + u$ ise r yarı-temiz halkadır.

İspat a kuvvetli π –düzenli olduğu için, e bir idempotent ve $v \in U(R)$ olmak üzere $a = e + v$ biçiminde yazabiliriz ve ea nilpotenttir. Buradan,

$$r = a + u = ea + (1 - e)a + u = ea + (1 - e)v + u = v(1 - e) + (u + ea)$$

dir. Bu, yarı-temiz ayrışmadır. ■

Önerme 3.2.4. R değişmeli halka ve R 'nin yarı-temiz olması için gerek ve yeter koşul, her bir $I \triangleleft R$ için R/I ayrıştırılmaz R/I 'nin terslenir olmayan her elemanın iki terslenir eleman toplamı biçiminde yazılmasıdır.

İspat Yeterlilik, $a \in R$ yarı temiz olmadığını varsayalım. Boştan farklı,

$$F = \left\{ I \triangleleft R : a + I \in \frac{R}{I} \text{ yarı temiz değildir} \right\}$$

kümesini alalım. F nin $\{I_\lambda\}$ zinciri için, $I = U_\lambda I_\lambda$ olsun. O zaman I, R nin bir idealidir. $a + I \in R/I$ yarı-temiz olduğunu varsayalım. Böylece $e, k, k', u, u' \in R$ için;

$$(e + I)^2 = e + I, (k + I)(k' + I) = 1 + I, (u + I)(u' + I) = 1 + I$$

olmak üzere

$$a + I = (k + I)(e + I) + (u + I)$$

biçimindedir. Bu nedenle;

$$a - ke - u, \quad e^2 - e, \quad kk' - 1, \quad uu' - 1.$$

I nin elemanıdır. $\{I_\lambda\}$ bir zincir olduğu için bazı I_λ 'ler vardır öyle ki tüm bu öğeler I_λ 'da bulunur. Dolayısıyla R/I_λ içindedir. Böylece, $a + I_\lambda = (k + I_\lambda)(e + I_\lambda) + (u + I_\lambda) \in R/I_\lambda$ yarı-temizdir. Bu çelişki gösteriyor ki I, F 'nin içindedir. Yani $\mathcal{F}$ bir tümevarımsal kümedir. Zorn Lemma' ya göre, $\mathcal{F}$ maksimal bir elemana sahiptir ve bu I olsun. Şimdi, R/I nin ayrıştırılmaz olduğunu gösterelim.

R/I nin ayrıştırılabilir olduğunu varsayalım. Buradan, $I \subseteq I_j$ ($j = 1, 2$) idealleri vardır. Bunadan;

$$r + I \mapsto (r + I_1, r + I_2) \text{ ile } \frac{R}{I} \cong \frac{R}{I_1} \oplus \frac{R}{I_2}$$

dir. $I, \mathcal{F}$ de maksimum oluşu ile $j = 1, 2$ için $a + I_j \in R/I_j$ yarı-temizdir. Yani R/I_j de $k_j + I_j, u_j + I_j$ terslenir elemanlar ve $e_j + I_j$ idempotent olmak üzere,

$$a + I_j = (k_j + I_j)(e_j + I_j) + (u_j + I_j)$$

biçiminde yazılışa sahiptir. Dolayısıyla $R/I_1 \oplus R/I_2$ de,

$$(a + I_1, a + I_2) = (k_1 + I_1, k_2 + I_2)(e_1 + I_1, e_2 + I_2) + (u_1 + I_1, u_2 + I_2)$$

şeklinde bir yarı-idempotent ve bir terslenir elemanın toplamı şeklindedir. Buradan $a + I \in R/I$ nin yarı-temizdir. Bu ise kabulümüz ile çelişir, yani $a + I \in R/I$ yarı-temiz ayrışması ile R/I ayrışmazdır. Dolayısıyla $a + I \in R/I$ terslenir değildir ve iki terslenir eleman toplamı değildir.

Gerekliklik, R nin bir ayrıştırılmaz görüntüsü R/I olduğunu varsayalım. O zaman R/I nin sadece triviyal idempotent elemanları vardır. Böylece R/I deki yarı idempotent elemanlar ya sıfır ya da terslenir elemanlardır. Yani $x \in R/I$ için, x sıfır ile bir terslenir elemanın toplamı ya da x terslenir iki elemanın toplamı biçimindedir. ■

Bir değişmeli ayrıştırılmaz R 'nin temiz halka olabilmesi için gerek ve yeter koşul, R 'nin bir yerel halka olmasıdır (Anderson ve Camillo 2002, Teorem 3). Bir değişmeli ayrıştırılmaz R halkasının zayıf temiz halka olabilmesi için gerek ve yeter koşul R

halkasının yerel halka veya 2 nin terslenir eleman olduğu tam olarak iki maksimal ideali olan bir ayrıştırılmaz halka olmasıdır (Ahn ve Anderson 2006, Sonuç 1.4).

Sonuç 3.2.5. R bir değişmeli ayrıştırılmaz halka olsun. R nin yarı temiz halka olması için gerek ve yeter koşul R de terslenir olmayan her elemanın iki terslenir elemanın toplamı biçiminde yazılmasıdır.

Önerme 3.2.6. R değişmeli yarı-yerel bir halka iken R yarı temiz olur ancak ve ancak $R = A \times B$ biçimde yazılır. Burada A sonlu sayıda yerel bir halkanın dik çarpımı ve B , $\mathbb{Z}_2$ ye izomorfik görüntüsü olmayan yarı-yerel bir halkadır.

İspat ($\Leftarrow$) Önerme 3.1.6(4)'e göre, B nin yarı-temiz olduğunu göstermek yeterlidir. Yarı-yerel bir halkanın 2-iyi halka olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{Z}_2$ 'ye izomorfik görüntüsü yoktur. Böylece B nin değişmeli 2-iyi bir halkadır, böylece yarı-temiz halkadır.

($\Rightarrow$) Her bir R_i yerel halka ve her bir S_i ayrıştırılmaz halka olmak üzere $R = R_1 \times \dots \times R_n \times S_1 \times \dots \times S_m$ şeklinde yazalım. $A = R_1 \times \dots \times R_n$ ve $B = S_1 \times \dots \times S_m$ olmak üzere $R = A \times B$ şeklinde yazılabilir. B nin $\mathbb{Z}_2$ ye izomorfik görüntüsü olmadığını göstermeliyiz. Farz edelim ki bazı S_i lerin $\mathbb{Z}_2$ ye izomorfik görüntüsü mevcut olsun ve buna S_1 diyelim. S_1 ayrıştırılmaz olduğundan, Sonuç 3.2.5 den S_1 de terslenir olmayan her eleman iki terslenir eleman toplamı şeklindedir. Yani, $S_1/J(S_1)$ de her terslenir olmayan eleman iki terslenir elemanın toplamı şeklindedir. S_1 yerel olmadığı için $l \geq 2$ için $S_1/J(S_1) = F_1 \times \dots \times F_l$ yazılabilir burada her bir F_i cisimdir. S_1 in $\mathbb{Z}_2$ ye izomorfik bir görüntüye sahip olduğundan, bazı F_i ler $\mathbb{Z}_2$ dir. $F_1 = \mathbb{Z}_2$ olduğunu varsayabiliriz. Buradan $(1, 0, \dots, 0) \in S_1/J(S_1)$ iki terslenir elemanın toplamı değildir. Bu ise kabulümüz ile çelişir. ■

Sonuç 3.2.7. R değişmeli, ayrıştırılmaz yarı yerel halka iken, R yarı-temizdir ancak ve ancak ya R yerel halka ya da R nin $\mathbb{Z}_2$ 'ye izomorfik görüntüsü yoktur.

Sonuç 3.2.8. $m \geq 1, p_1, \dots, p_m$ farklı asal sayılar olsun. $R := \bigcap_{i=1}^m \mathbb{Z}_{p_i}$ olsun.

(1) R temizdir ancak ve ancak $m = 1$ dir.

(2) R yarı-temiz ancak ve ancak ya $m = 1$ ya da $i = 1, \dots, m$ için $p_i \neq 2$ ile $m \geq 2$ dir.

İspat (1) (Anderson ve Camillo 2002, Teorem 3) ten görülür.

(2) Sonuç 3.2.7' den açıktır. ■

Değişmeli yarı yerel halkaların yarı-temiz olma koşulları yukarıda verilmiştir. Aşağıda, bir yarı-temiz, diğerleri yarı-temiz olmayan sayılabilir çoklukta maksimal idealleri olan iki tamlık bölgesi örneği verilmiştir.

Örnek 3.2.9. $F \neq \mathbb{Z}_2$ olan bir cisim ve $R_1 = F[x_1, x_2, \dots]$ F cismi üzerinde sayılabilir bilinmeyenli polinom halkası olsun. $S = R_1 - \bigcup_{i=1}^{\infty} (x_i)$ ve $R = S^{-1}R_1$ olsun. O zaman R yarı-temiz bir halkadır.

İspat Açık olarak, $\text{Max}(R) = \{(x_1), (x_2), \dots\}$ dir. R 'nin terslenir olman her elemanının, R deki terslenir iki eleman toplamı şeklinde yazıldığını göstermeliyiz. Her bir $f(X) \in (x_1)$ için, n pozitif tamsayı, $l_1 \geq 1$, $l_n \geq 1$, $i = 2, \dots, n-1$ için $l_i \geq 0$ ve $u \in U(R)$ olmak üzere

$$f(X) = x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n} u$$

olarak yazılabilir. $|F| > 2$ olduğu için, $1 = a + b$ ve $a, b \in F^*$ olur. Böylece;

$$f(X) = (ax_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n} - x_{n+1})u + (bx_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n} + x_{n+1})u$$

iki terslenir elemanın toplamı şeklindedir. Benzer şekilde, (x_i) maksimal ideallerindeki her eleman yarı-temiz olduğu gösterilebilir. ■

Örnek 3.2.10. p bir asal, $X = \{q | q \equiv 1 \pmod{p} \text{ ve } q \text{ bir asal}\}$ ve $S = \{\mp q_1^{l_1} q_2^{l_2} \dots q_n^{l_n} | n \geq 1, l_i \geq 0, q_i \in X\}$ olsun. $R = S^{-1}\mathbb{Z}$ olsun. Eğer $p \geq 7$ ise R yarı temiz halka değildir.

İspat $U(R) = \left\{ \frac{b}{a} \mid a, b \in S \right\}$ dir. R 'de iki terslenir elemanın toplamı olmayan terslenir olmayan bir $a \in R$ bulmalıyız. Drichlet Teoremi ile X sonsuzdur ve $q' \equiv 3 \pmod{p}$ şeklinde sonsuz sayıda q' asal elemanı vardır. Bu şekilde q' için, $q' \in U(R) + U(R)$ ise

$q' = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} = \frac{1}{a_1 a_2} (b_1 a_2 + b_2 a_1)$ olacak şekilde $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2} \in U(R)$ vardır. Buradan, $a_1 a_2 q' = (b_1 a_2 + b_2 a_1)$ dir. Fakat $p \geq 7$ için $a_1 a_2 q' = 3 \pmod{p}$ ve $(b_1 a_2 + b_2 a_1) = 0, 1, -1, 2, -2 \pmod{p}$ çelişkisi bulunur. O halde $q \notin U(R) + U(R)$ dir. ■



4. BULGULAR

4.1. Yarı Değişim Halkaları

Lemma 4.1.1. Eğer q, R de yarı-idempotent ise, herhangi bir $u \in U(R)$ için $u^{-1}qu$ bir yarı-idempotenttir.

İspat: $q \in R$ için yarı-idempotent olsun. Bu durumda $q^2 = kq$ olacak şekilde $k \in UC(R)$ vardır. Herhangi bir $u \in U(R)$ için;

$$(u^{-1}qu)^2 = (u^{-1}qu)(u^{-1}qu) = u^{-1}q^2u = u^{-1}(kq)u = k(u^{-1}qu)$$

dir. Yani $u^{-1}qu$ yarı-idempotenttir. ■

Önerme 4.1.2. R halkasının bir x elemanı için aşağıdakiler denktir:

- (1) $q - x \in R(kx - x^2)$ olacak şekilde, $k \in UC(R)$ olmak üzere $q^2 = kq \in R$ vardır,
- (2) $(k - q) - c(k - x) \in J(R)$ olacak şekilde, $k \in UC(R)$ olmak üzere $q^2 = kq \in Rx$ ve $c \in R$ vardır,
- (3) $Rq + R(k - x) = Rk = R$ olacak şekilde, $k \in UC(R)$ olmak üzere $q^2 = kq \in Rx$ vardır,
- (4) $k - q \in R(k - x)$ olacak şekilde, $k \in UC(R)$ olmak üzere $q^2 = kq \in Rx$ vardır,

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) $q - x \in R(kx - x^2)$ olacak şekilde $q^2 = kq \in R, k \in UC(R)$ olsun. Bu durumda $q - x \in R(kx - x^2)$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Böylece

$$k - q = k - x - krx + rx^2 = (1 - rx)(k - x)$$

$c := 1 - rx$ seçilirse $(k - q) - c(k - x) = 0 \in J(R)$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $(k - q) - c(k - x) \in J(R)$ iken $c \in R$ ve $q^2 = kq \in Rx$ ($k \in UC(R)$) mevcut olsun. O halde

$$1 - [(k - q) - c(k - x)] \in U(R)$$

dir. Yani $1 - [(k - q) - c(k - x)] = u$ olacak şekilde bir $u \in U(R)$ vardır. $u \in U(R)$ olduğundan $uv = 1 = vu$ ve $v \in U(R)$ ifade edilebilir. Dolayısıyla;

$$v(1 - k) + vq + vc(k - x) = 1$$

olduğundan $R(1 - k) + Rq + R(k - x) = R$ bulunur. Sonuç olarak,

$$R - Rk + Rq + R(k - x) = R \text{ ve } Rq + R(k - x) = Rk = R$$

bulunur.

(3) $\Rightarrow$ (4) $k \in UC(R)$ olmak üzere $q^2 = kq \in Rx$ mevcut olsun öyle ki $Rq + R(k - x) = Rk = R$ olsun. Buradan $1 = rq + s(k - x)$ ve $r, s \in R$ vardır.

$f := q + (k - q)rq$ seçilirse

$$\begin{aligned} f^2 &= [q + (k - q)rq][q + (k - q)rq] \\ &= q^2 + q(k - q)rq + (k - q)rq^2 + (k - q)rq(k - q)rq \\ &= kq + k(k - q)rq \\ &= k[q + (k - q)rq] = kf, \end{aligned}$$

yani, f, R' de bir yarı-idempotent ve $f \in Rx$ tir. O halde

$$k - f = k - q - (k - q)rq = (k - q)(1 - rq) = (k - q)s(k - x)$$

ve $k - f \in R(k - x)$ bulunur.

(4) $\Rightarrow$ (1) $k - q \in R(k - x)$ olacak şekilde, $k \in UC(R)$ olmak üzere, $q^2 = kq \in Rx$ mevcut olsun. O halde

$$kq = r'x \text{ ve } q = k^{-1}r'x = rx$$

ve

$$k - q = s(k - x)$$

olacak şekilde $r, s \in R$ vardır. Böylece,

$$\begin{aligned}
 kq - kx &= kq - qx - kx + qx \\
 &= q(k - x) - (k - q)x \\
 &= rx(k - x) - s(k - x)x \\
 &= (r - s)(kx - x^2)
 \end{aligned}$$

ve

$$q - x = k^{-1}(r - s)(kx - x^2) \in R(kx - x^2)$$

olur. ■

Tanım 4.1.3. Bir halkanın tüm elemanları Önerme 4.1.2'deki denk koşullardan birini sağlıyorsa bu halkaya yarı-değişim halka denir.

Örnek 4.1.4. (1) Değişim halkaları yarı-değişim halkalarıdır.

(2) Yerel halkalar yarı-değişim halkasıdır. Gerçekten, R bir yerel halka ve $x \in R$ olsun. $x \in J(R), k \in UC(R)$ olmak üzere $q^2 = kq = 0$ alırsak $0 = q \in Rx$ ve $1 = c \in R$ ile

$$x = k - k + x = (k - q) - c(k - x) \in J(R)$$

bulunur. Önerme 4.1.2(2) ile R yarı-değişim halkasıdır. Diğer durumda, $x \notin J(R)$ olsun. Bu durumda, R yerel halka olduğu için $x \in U(R)$ dir. Böylece, $ux = xu = 1$ olacak şekilde $u \in U(R)$ mevcuttur. Buradan $1 - ux \in J(R)$ ve $Rx = R$ dir. $1 = q \in Rx$ ve $1 = c \in R$ için

$$(k - q) - c(k - ux) = -(1 - ux) \in J(R)$$

bulunur. Dolayısıyla R yarı-değişim halkadır.

(3) Yarı temiz halkalar yarı-değişim halkadır. Gerçekten, R yarı-temiz halka ve $x \in R$ olsun. Bu durumda, $q \in QId(R)$ ve $u \in U(R)$ olmak üzere $x = q + u$ biçiminde yazılabilir. Böylece,

$$u[x - u^{-1}(k - q)u] = ux - (k - q)u = uq + u^2 - ku + qu = x^2 - kx$$

dir. Dolayısıyla Önerme 4.1.2. den R yarı-değişim halkasıdır.

Aşağıdaki önermede, yarı-değişim halkaların bazı temel özellikleri gösterilmiştir.

Önerme 4.1.5. (1) Yarı-değişim halkaların tüm homomorfik görüntüleri de yarı-değişim halkasıdır.

(2) Yarı-idempotentlerin merkezil halkanın yarı-temiz olması için gerek ve yeter koşul yarı-değişim halka olmasıdır.

(3) R değişmeli halka ve R 'nin yarı-değişim halka olması için gerek ve yeter koşul R 'nin yarı-temiz halka olmasıdır.

(4) Eğer R bir yarı-değişim halka ve $e^2 = e \in R$ ise eRe yarı-değişim halkasıdır.

İspat (1) Her yarı-idempotent elemanın homomorfik görüntüsünde yarı-idempotent olmasından ve Önerme 4.1.2'den açıktır.

(2) ($\Rightarrow$.) R yarı-değişim halkası ve $x \in R$ iken, $k \in UC(R)$ olmak üzere, $q^2 = kq \in Rx$ vardır öyle ki $(k - q) \in R(k - x)$ dir. $q \in Rx$ olduğu için, $q = rx$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Buradan $q^2 = qrx$ den $krx = qrx$ dir. Dolayısıyla, $krx = qrx$ ile $qr = kx$ olduğunu farz edebiliriz. Böylece, $kr = rxr$ bulunur. Ayrıca, $(rx)(rx) = (rxr)x = krx$ ve $(xr)(xr) = x(rxr) = x(kr) = kxr$ den rx ve xr yarı-idempotenttir. Hipotezden, her yarı-idempotent merkezil olduğu için,

$$xr = x(k^{-1}rxr) = k^{-1}x(rx)r = k^{-1}(rx)(xr) = k^{-1}[(xr)r]x = k^{-1}(rxr)x = rx$$

den $qr = rq$ bulunur. Benzer şekilde, $(k - q) \in R(k - x)$ olduğu için $(k - q) = s(k - x)$, $(k - q)s = ks$ ve $s(k - q) = (k - q)s$ olacak şekilde $s \in R$ vardır. Ayrıca, $[k^{-1}(r - s)](x - (k - q)) = 1$ olduğu için $x - (k - q)$, R de terslenir elemandır. Dolayısıyla $k - q \in R$ yarı-idempotent ve $x - (k - q) \in R$ terslenir eleman olup,

$$x = x - (k - q) + (k - q)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece R bir yarı-temiz halkadır.

($\Leftarrow$:) Örnek 4.1.4(3) ile açıktır.

(3) ($\Rightarrow$) R değişmeli olduğu için (Lee, 2008) den açıktır.

($\Leftarrow$:) Örnek 4.1.4(3)' ten açıktır.

(4) R yarı-değişim halkası $e^2 = e \in R$ ve $x \in eRe$ olsun. R yarı-değişim halkası olduğu için, $k \in UC(R)$ olmak üzere, $q^2 = kq \in Rx$ vardır öyle ki $k - q \in R(k - x)$ tır. $q \in Rx$ olduğundan $kq = r'x$ olacak şekilde $r' \in R$ vardır. Yani $r = k^{-1}r'$ olmak üzere $q = rx$ şeklinde yazılır. O halde $qe = rxe = rx = q$ dır.

$$(eq)^2 = e(qe)q = eq^2 = keq \text{ ve } eq \in (eRe)x$$

elde edilir. Böylece $ke - eq = e(k - q)e \in eRe(ke - x)$ dir. Dolayısıyla, eRe yarı-değişim halkasıdır. ■

Yardımcı Teorem 4.1.6. R bir halka, $a \in R$ ve $k \in UC(R)$ olsun. Bu durumda,

$$a \in xR \text{ ve } k - a \in (k - x)R \Leftrightarrow x - a \in (x^2 - kx)R$$

dır.

İspat ($\Rightarrow$) $a \in xR$ ve $k - a \in (k - x)R$ olsun. Bu durumda, $a = xr$ ve $k - a = (k - x)s$ olacak şekilde $r, s \in R$ vardır. Böylece,

$$\begin{aligned} k(a - x) &= ka - xa + xa - kx \\ &= (k - x)a + x(a - k) \\ &= (k - x)xr - x(k - x)s \\ &= (x^2 - kx)(s - r). \end{aligned}$$

dır. Buradan $a - x = (x^2 - kx)k^{-1}(s - r)$ ve $a - x \in (x^2 - kx)R$ bulunur.

($\Leftarrow$:) $a - x \in (x^2 - kx)R$ olsun. Bu durumda, $a - x = (x^2 - kx)r$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Böylece

$$a = x^2r - kxr + x = x(xr - kr + 1)$$

den $a \in xR$ ve

$$k - a = (k - x) + (x - a) = (k - x) - (x^2 - kx)r = (k - x)(1 + xr)$$

den $k - a \in (k - x)R$ elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 4.1.7. $a, u, v \in R$ ve $k \in UC(R)$ olmak üzere $q^2 = kq \in R$ ise aşağıdakiler sağlanır.

(1) Eğer $a = q + u$ ve $uv = 1$, ise $a - u(k - q)v = (a^2 - ka)v$ dir.

(2) Eğer $a = q + u$ ve $uv = 1$, ise $a - v(k - q)u = u(a^2 - ka)$ dir.

(3) Eğer $a = q + u$ ve $u \in U(R)$, ise $a - u(k - q)u^{-1} = (a^2 - ka)u^{-1}$ ve $a - u^{-1}(k - q)u = u^{-1}(a^2 - ka)$ dir.

İspat (1) $a = q + u$ ve $uv = 1$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} a(a - k) &= (q + u)((q - k) + u) \\ &= q(q - k) + qu + u(q - k) + u^2 \\ &= qu + u(q - k) + u^2 \end{aligned}$$

ile

$$\begin{aligned} a(a - k)v &= quv + u(q - k)v + u^2v \\ &= q - u(k - q)v + u \\ &= a - u(k - q)v \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $a - u(k - q)v = (a^2 - ka)v$ dir.

(2) (1)'e benzer şekilde ispatlanır.

(3) (1) ve (2)'den çıkar. ■

Önerme 4.1.8. $a \in R$, $k \in UC(R)$ olmak üzere $q^2 = kq \in R$ ve $aq = qa$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

$$(1) (a - q)R = R \Leftrightarrow a - (k - q) \in (a^2 - ka)R$$

$$(2) R(a - q) = R \Leftrightarrow a - (k - q) \in R(a^2 - ka)$$

İspat (1) ($\Rightarrow$) : $u = a - q$ ve $v \in R$ ile $uv = 1$ olsun. Yardımcı Teorem 4.1.7(1) ile

$$a - (k - q) = a - (k - q)uv = a - u(k - q)v = (a^2 - ka)v$$

bulunur. Böylece $a - (k - q) \in (a^2 - ka)R$ dir.

($\Leftarrow$) : $a - (k - q) \in (a^2 - ka)R$ olsun. Yardımcı Teorem 4.1.6 ile $k - q \in aR$ ve $q \in (k - a)R$ dir. Böylece, $k - q = ar$ ve $q = (k - a)s$ olacak şekilde $r, s \in R$ vardır. Buradan,

$$(k - q) = ar$$

$$(k - q)(k - q) = ar(k - q)$$

$$k^2 - kq - kq + q^2 = ar(k - q)$$

$$k^2 - kq = ar(k - q)$$

$$(k - q)(k^2 - kq) = (k - q)ar(k - q)$$

$$k^3 - k^2q - kq^2 + kq^2 = (k - q)ar(k - q)$$

$$k(k - q)k = (k - q)ar(k - q)$$

ve

$$q = (k - a)s$$

$$q^2 = q(k - a)s$$

$$kq = q(k - a)s$$

$$kq^2 = q(k - a)sq$$

$$kqk = q(k - a)sq$$

elde edilir. Böylece $kr = (k - q)r = r(k - q)$ ve $ks = qs = sq$ farz edilebilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} [(a - q)(r - s)]k^{-1} &= [ar - as - qr + qs]k^{-1} \\ &= [(k - q) - as + ks]k^{-1} \\ &= [(k - q) + (k - a)s]k^{-1} \\ &= [k - q + q]k^{-1} \\ &= kk^{-1} = 1 \end{aligned}$$

den $(a - q)R = R$ bulunur.

(2) (1)'e benzer şekilde yapılır. ■

Sonuç 4.1.9. R halkası için aşağıdakiler denktir:

- (1) Herhangi bir $a \in R$ için $k \in UC(R)$ olmak üzere $q^2 = kq \in R$ ve $uR = R$ ile $u \in R$ mevcuttur öyle ki $a = q + u$ ve $qa = aq$ dır,
- (2) Herhangi bir $a \in R$ için $k \in UC(R)$ olmak üzere $q^2 = kq \in R$ mevcuttur öyle ki $a - q \in (a^2 - ka)R$ ve $qa = aq$ dır,

Sonuç 4.1.10. R halkası için aşağıdakiler denktir:

- (1) Herhangi bir $a \in R$ için $k \in UC(R)$ olmak üzere $q^2 = kq \in R$ ve $Ru = R$ ile $u \in R$ mevcuttur öyle ki $a = q + u$ ve $qa = aq$ dır.
- (2) Herhangi bir $a \in R$ için $k \in UC(R)$ olmak üzere $q^2 = kq \in R$ mevcuttur öyle ki $a - q \in R(a^2 - ka)$ ve $qa = aq$ dır.

Sonuç 4.1.11. $a \in R$ için aşağıdakiler denktir.

(1) $a \in R$ kuvvetli yarı-temiz elemandır.

(2) R 'de $k \in UC(R)$ olmak üzere $q^2 = kq$ yarı-idempotent elemanı mevcuttur öyle ki $q \in aR \cap Ra, k - q \in (k - q)R \cap R(k - a)$ ve $aq = qa$ dır.

(3) R 'de $k \in UC(R)$ olmak üzere $q^2 = kq$ yarı-idempotent elemanı mevcuttur öyle ki $a - q \in (a^2 - ka)R \cap R(a^2 - ka)$ ve $qa = aq$ dır.

İspat (1) $\Rightarrow$ (3) $a \in R$ bir kuvvetli yarı-temiz eleman olsun. Bu durumda $k \in UC(R)$ olmak üzere bir $q^2 = kq \in R$ yarı-idempotent eleman ve $u \in R$ terslenir eleman mevcut öyle ki $a = q + u$ ve $qu = uq$ (yani $aq = qa$). Önerme 4.1.8'den

$$a - (k - q) \in (a^2 - ka)R \cap R(a^2 - ka)$$

elde ederiz.

(3) $\Rightarrow$ (1) Önerme 4.1.8 ve (3) ten $a - (k - q)$ 'nın R 'de bir terslenir elemandır. Böylece, a, R 'de kuvvetli yarı-temiz elemandır.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Yardımcı Teorem 4.1.6'dan denklik açıktır. ■

R bir halka ve L , R 'nin toplamsal alt grubu ve $x - x^2 \in L$ şartını sağlayan $x \in R$ için $e - x \in L$ ise $e^2 = e \in R$ varsa idempotent elemanlar L ye göre yükselir. Aşağıdaki koşul verilsin.

(*) Koşulu: $k \in UC(R)$ olmak üzere $kx - x^2 \in L$ koşulunu sağlayan $x \in R$ için $q - x \in L$ olacak biçimde $q^2 = kq$ yarı-idempotenti vardır.

(Nicholson, 1977 Sonuç 1.3)' de, Nicholson değişim halkaları aşağıdaki karakterizyonu verdi:

“Bir R halkasının değişim halkası olması için gerek ve yeter koşul R deki idempotent elemanların her sol (sağ) ideale göre yükselmesidir.”

Sonuç 4.1.12. R halkasının yarı-değişim halka olması için gerek ve yeter koşul R nin her sol (sağ) idealinin (*) koşulunu sağlamasıdır.

İspat ($\Rightarrow$): R bir yarı-değişim halkası ve L R 'nin sol ideali için $k \in UC(R)$ olmak üzere $kx - x^2 \in L$ şartını sağlayan $x \in R$ verilsin. Önerme 4.1.2(1)'den R yarı-değişim halkası olması için, $q - x \in R(kx - x^2)$ olacak şekilde $q^2 = kq \in R$ vardır. Dolayısıyla $R(kx - x^2) \triangleleft L$ den $q - x \in L$ bulunur.

($\Leftarrow$): R halkasında (*) koşulunu sağlayan $x \in R$ ve $k \in UC(R)$ verilsin. $R(kx - x^2)$, R 'nin bir sol ideali olduğundan, $kx - x^2 \in R(kx - x^2)$ dır. Hipotezdan, $q - x \in R(kx - x^2)$ olacak şekilde bir $q^2 = kq \in R$ yarı-idempotent elemanı vardır. Önerme 4.1.2(1)'e göre, R yarı-değişim halkasıdır. ■

Önerme 4.1.13. R bir halka olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

- (1) R , yarı-değişim halkası olması için gerek ve yeter koşul $R/J(R)$ nin yarı-değişim halka olması ve $J(R)$ için R nin (*) koşulunu sağlamasıdır.
- (2) R yarı-temiz halkası olması için gerek ve yeter koşul $R/J(R)$ nin yarı-temiz halka olması ve $J(R)$ için R nin (*) koşulunu sağlamasıdır.

İspat (1) ($\Leftarrow$): $\bar{R}: R/J(R)$ yarı-değişim halka ve $J(R)$ için R (*) koşulunu sağlasın. $x \in R$ olsun. $\bar{x} = x + J(R)$ dir. $\bar{R}$ yarı-değişim halka olduğu için $(\bar{k} - \bar{q}) - \bar{c}(\bar{k} - \bar{x}) \in J(\bar{R})$ olacak şekilde $\bar{k} \in UC(\bar{R})$ olmak üzere $\bar{q}^2 = \bar{k}\bar{q} \in R$ ve $\bar{c} \in \bar{R}$ vardır. Buradan, $(\bar{k} - \bar{q}) = \bar{c}(\bar{k} - \bar{x})$ olduğu açıktır. $J(R)$ için (*) özelliği ile $k \in UC(R)$ olmak üzere $q^2 = kq \in Rx$ olduğunu farz sayalım. $\bar{a} = \overline{v^{-1}f}$ olacak şekilde $v \in UC(R)$ ve $f^2 = vf$ seçilsin. O zaman $v^{-1}f - a \in J(R)$ dır ve $u = 1 - v^{-1}f + a$, R 'de bir terslenir elemandır. $fu = f - v^{-1}f^2 + fa = fa$ olduğu dikkate alınıp, $e = u^{-1}fu$ seçilsin. Lemma 4.1.1(4) ile, e yarı-idempotent ve $e = u^{-1}fu = u^{-1}fa \in Rx$ dir. Dolayısıyla

$$\bar{e} = \bar{a}, (k - e) - c(k - x) \in J(R)$$

dan R yarı-değişim halkasıdır.

Tersi açıktır.

(2) ($\Rightarrow$;) R yarı-temiz halka olsun. Örnek 4.1.4(3) ten R yarı-değişim halkasıdır ve böylece (Önerme 4.1.13(1)) ten $R, J(R)$ için (*) özelliğini gerçekler. Her yarı-temiz halkanın her homomorfik görüntüsü de yarı-temiz olduğundan $R/J(R)$ 'nin yarı-temiz olduğunu elde ederiz.

($\Leftarrow$;) $x \in R$ olsun. $R/J(R)$ yarı-temiz olduğundan, $\bar{x} = \bar{q} + \bar{u}$ olacak şekilde $\bar{q} \in QId(R/J(R))$ ve $\bar{u} \in U(R/J(R))$ vardır. $\bar{q} \in QId(R/J(R))$ olduğundan $\bar{q}^2 = \bar{k}\bar{q}$ olacak şekilde $\bar{k} \in UC(R/J(R))$ vardır. Böylece u nun R de terslenir ve k nin R de merkezil birim olduğunu varsayabiliriz. Yani, $kq - q^2 \in J(R)$ dir. R (*) koşulunu $J(R)$ sağladığı için $q^2 = kq$ olduğunu varsayabiliriz. Buradan, $r \in J(R)$ için $x = q + u + r$ dir. $r \in J(R)$ olduğu için $u^{-1}(u + r) = 1 + u^{-1}r \in U(R)$ dir. Dolayısıyla $q \in QId(R)$ ve $u + r \in U(R)$ için $x = q + (u + r)$ dir. Yani, x, R yarı-temiz elemandır. Böylece R yarı-temiz bir halkadır. ■

5. SONUÇLAR

Tezde ilk olarak yarı-idempotentler yardımı ile tanımlanan yarı-temiz halkaların temel özellikleri incelenmiştir. Bir halkanın terslenir düzenli halka olması için gerek ve yeter koşullun yarı-temiz bir ayrışımına sahip olması gerekliliğinin ispatı verilmiştir. Ayrıca değişmeli yarı-temiz halkalar incelenerek, bir halkanın değişmeli yarı-temiz halka olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

Son bölümde ise elde ettiğimiz sonuçlar;

- (1) Yarı-değişim halkası tanımı verilmiştir.
- (2) Yarı-idempotentlerin merkezi olduğu bir halkanın yarı-temiz halka olması için gerek ve yeter koşul yarı-değişim halkası olması gerektiği ispatlanmıştır.
- (3) Yarı-temiz halka ve yarı-değişim halkalar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.
- (4) Bir $a \in R$ nin kuvvetli yarı-temiz eleman olması için denk koşullar verilmiştir.
- (5) Aşağıdakiler ispat edilmiştir.

(*) koşulu : $k \in UC(R)$ olmak üzere $kx - x^2 \in L$ koşulunu sağlayan $x \in R$ için $q - x \in L$ olacak şekilde $q \in QI(R)$ vardır.

Bir R halkasının yarı-değişim halka olması için gerek ve yeter koşul R nin her sol(sağ) idealinin (*) koşulunu sağlaması, R nin yarı-değişim halkası olması için gerek ve yeter koşul $R/J(R)$ nin yarı-değişim halka olması ve $J(R)$ için R nin (*) koşulunu sağlamasıdır.

KAYNAKLAR

- Ahn M. S. and Anderson D. D. (2006) “Weakly clean ring and almost clean rings”, *Rocky Mountain J. Math*, 36, 783-798.
- Anderson D.D. and Camillo V. P. (2002) “Commutative rings whose elements are a sum of a unit and idempotent”, *Comm. Algebra*, 30(7), 3327-3336.
- Anderson F. W. and Fuller K. R. (1992) “Rings and categories of modules” *Springer-Verlag*, Berlin.
- Camillo V. P. and Yu H. P. (1994) “Exchange rings, units and idempotents”, *Comm. Algebra*, 22, 4737-4749.
- Camillo V. P. and Khurana D. (2001) “A characterization of unit regular rings”, *Comm. Algebra*, 29, 2293-2295.
- Camillo V. P., Khurana D., Lam T. Y., Nicholson W. K. and Zhou Y. (2006) “Continuons modules are clean” *J. Algebra*, 304, 94-111.
- Chen, H. (1999) “Exchange rings with artinian primitive factors” *Algebr. and Represent. Theory*, 2, 201-207.
- Crawley P. and Jonsson B. (1964) “Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems” *Pacific J. Math.*, 14, 797-855
- Goodearl K. R. (1979) “Von Neumaan regular rings”, *Pitman Publishing Limited*, USA.
- Han J. and Niholson W. K. (2001) “Extensions of clean rings” *Comm. Algebra*. 29; 2589-2595.
- Kosan T., Sahinkaya S. and Zhou Y. (2017) “On weakly clean ring”, *Comm. Algebra*, 45(8) 3494-3502.
- Lam T.Y. (1998) “Lectures on Modules and Rings” *Springer-Verlag*, Berlin.
- Lam T.Y. (2001) “A First Course in Noncommuutative Ring”, 2nd ed. Gradvate Texts in Mathematics, *Springer-Verlag*, New York, 131.
- Lee T.K. and Zhou Y. (2008) “A class of exchange ring”, *Glasgow Math. J.*, 50, 506-522.
- Monk G. S. (1977) “A characterization of exchange rings” *Proc. Amer. Math. Soc.*, 35(2), 349-353.
- Nicholson W. K. (1977) “Lifting idempotents and exchange rings”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 229, 269-278.
- Nicholson W. K. (1997) “On exchange rings” *Com. Algebra*, 126; 61-64.

- Nicholson W.K. (1999) “Strongly clean ring and Fitting’s lemma” *Com. Algebra*, 27(8), 3583-3592.
- Nicholson W. K and Zhou Y. (2004) “Rings which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit” *Glasg. Math. J.*, 46(2), 227-236.
- Tang, G., Su, H. and Yuan P. (2023) “Quasi-clean rings and strongly quasi-clean rings” *Commun. Contemp. Math.*, 25(2), 2150079.
- Tuganbaev A. (2002) “Semiregular, weakly regular and π –regular rings” *J. Mah. Sci.*, 3, 1509-1588.
- Warfield Jr. R. B. (1972) “Exchange rings and decompositions of modules” *Math. Ann.*, 199, 31-36

