

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Rukiye SÖNMEZ

YARIGRUP TEORİSİNDE BAZI RANKLAR VE STATÜLER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2019

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YARIGRUP TEORİSİNDE BAZI RANKLAR VE STATÜLER

Rukiye SÖNMEZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 07/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

.....
Prof. Dr. Hayrullah AYIK
DANIŞMAN

.....
Dr. Öğr. Üyesi Leyla BUGAY
ÜYE

.....
Dr. Öğr. Üyesi Cennet ESKAL
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

**Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü**

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YARIGRUP TEORİSİNDE BAZI RANKLAR VE STATÜLER

Rukiye SÖNMEZ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Hayrullah AYIK

Yıl: 2019, Sayfa:79

Jüri : Prof. Dr. Hayrullah AYIK

: Dr. Öğr. Üyesi Leyla BUGAY

: Dr. Öğr. Üyesi Cennet ESKAL

S bir sonlu doğuraylı yarıgrup olsun. Küçük rank, normal (=düşük=alt) rank, orta rank, üst rank ve geniş rank, sırasıyla

$$r_1(S) = \max \{k : S \text{ nin tüm } k \text{ elemanlı alt kümeleri bağımsızdır}\},$$

$$r_2(S) = \min \{|U| : \exists U \subseteq S, \langle U \rangle = S\},$$

$$r_3(S) = \max \{|U| : \exists U \subseteq S, U \text{ bağımsız ve } \langle U \rangle = S\},$$

$$r_4(S) = \max \{|U| : \exists U \subseteq S, U \text{ bağımsız}\} \text{ ve}$$

$$r_5(S) = \min \{k : S \text{ nin tüm } k \text{ elemanlı alt kümeleri } S \text{ yi doğurur}\}$$

olarak tanımlanır. Bu çalışmada, bazı yarıgrupların bazı özel doğuray kümelerini ve bağımsız kümelerini inceledik. İncelemeler sonucunda ele aldığımız yarıgrupların yukarıda verilen rankları ile ilgili çalışmaları derledik.

Anahtar Kelimeler: Doğuray kümesi, bağımsız küme, rank

ABSTRACT

MSc. THESIS

SOME RANKS AND STATUSES IN SEMIGROUP THEORY

Rukiye SÖNMEZ

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
Year: 2019, Pages:79
Jury : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Asst. Prof. Dr. Leyla BUGAY
: Asst. Prof. Dr. Cennet ESKAL

Let S be a finitely generated semigroup. Small rank, lower rank, intermediate rank, upper rank and large rank are defined as

$$r_1(S) = \max \{k : \text{every subsets of cardinality } k \text{ of } S \text{ are independent}\},$$

$$r_2(S) = \min \{|U| : \exists U \subseteq S, \langle U \rangle = S\},$$

$$r_3(S) = \max \{|U| : \exists U \subseteq S, U \text{ independent and } \langle U \rangle = S\},$$

$$r_4(S) = \max \{|U| : \exists U \subseteq S, U \text{ independent}\} \text{ and}$$

$$r_5(S) = \min \{k : \text{every subsets of cardinality } k \text{ of } S \text{ generates } S\},$$

respectively. In this study, we examined some special generated sets and independent sets of some semigroups. As a result of these investigations, we have compiled the studies on the ranks given above of semigroups we have implied.

Key Words: Generating set, independent set, rank

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq T \subseteq S$ olsun. Eğer T , S deki işlemle bir yarıgrup oluyorsa T ye S nin bir **alt yarıgrubu** denir ve $T \leq S$ ile gösterilir. Ayrıca $\emptyset \neq X \subseteq S$ için S nin X kümesini içeren tüm alt yarıgruplarının arakesiti de X kümesini içeren bir alt yarıgrup olup bu alt yarıgruba S nin X tarafından **doğurulan alt yarıgrubu** denir ve ${}_S \langle X \rangle$ ile gösterilir, yani

$${}_S \langle X \rangle = \bigcap \{T : X \subseteq T \leq S\}$$

olur. ${}_S \langle X \rangle$, X kümesini içeren en küçük alt yarıgruptur. Ayrıca ${}_S \langle X \rangle$ alt yarıgrubu X kümesi üzerindeki tüm sonlu çarpımların kümesidir, yani

$${}_S \langle X \rangle = \{x_1 x_2 \cdots x_n : n \in \mathbb{Z}^+; x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$$

olur. Eğer ${}_S \langle X \rangle = S$ oluyorsa X e S nin bir **(yarıgrup) doğuray kümesi**, X in her bir elemanına S nin **(yarıgrup) doğurayı** ve S ye de X tarafından **doğurulan yarıgrup** denir. Eğer X kümesinin bir yarıgrup doğuray kümesi olduğu içerikten anlaşılıyorsa X tarafından doğurulan alt yarıgrup kısaca $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Eğer $S = \langle X \rangle$ olacak şekilde $\emptyset \neq X \subseteq S$ sonlu kümesi varsa S ye **sonlu doğuraylı yarıgrup** denir. Ayrıca, $X = \{x\}$ şeklinde tek elemanlı bir küme ise $\{x\}$ tarafından doğurulan alt yarıgrup kısaca $\langle x \rangle$ ile gösterilir ve $S = \langle x \rangle$ olacak şekilde bir $x \in S$ varsa S ye **monojenik (tek doğuraylı) yarıgrup** denir.

S , sonlu doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere

$$\min \{ |X| : S = \langle X \rangle \text{ ve } X \text{ sonlu} \}$$

pozitif tamsayısına S nin **(yarıgrup) rankı** denir ve $\text{rank}(S)$ ile gösterilir.

Ayrıca, S nin $\text{rank}(S)$ elemanlı bir doğuray kümesine de **minimal doğuray kümesi** denir.

S bir yarıgrup olsun. $\emptyset \neq U \subseteq S$ olmak üzere $\forall u \in U$ için $u \notin \langle U \setminus \{u\} \rangle$ ise U ya S nin bir **bağımsız alt kümesi** denir. Bir yarıgrupun bağımsız bir alt kümesi veya belirli özellikteki bazı elemanları tarafından doğurabilen özel doğuray kümeleri vardır. Dolayısıyla da özel ranklar elde edilebilmektedir.

S bir sonlu doğuraylı yarıgrup olmak üzere sırasıyla küçük rank, normal (=düşük=alt) rank, orta rank, üst rank ve geniş rank, sırasıyla

$$\begin{aligned} r_1(S) &= \max \{ k : S \text{ nin tüm } k \text{ elemanlı alt kümeleri bağımsızdır} \}, \\ r_2(S) &= \min \{ |U| : \exists U \subseteq S, \langle U \rangle = S \}, \\ r_3(S) &= \max \{ |U| : \exists U \subseteq S, U \text{ bağımsız ve } \langle U \rangle = S \}, \\ r_4(S) &= \max \{ |U| : \exists U \subseteq S, U \text{ bağımsız} \} \text{ ve} \\ r_5(S) &= \min \{ k : S \text{ nin tüm } k \text{ elemanlı alt kümeleri } S \text{ yi doğurur} \} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Biz de bu çalışmamızda bazı yarıgrupların bu özel rankları ile ilgili çalışmaları derledik.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında yardımlarını ve desteğini esirgemeyen, yapıcı ve yönlendirici fikirleri ile bana daima yol gösteren, bilgisi ve kişiliği ile örnek aldığım saygıdeğer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Hayrullah AYIK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, yüksek lisans tez jüri üyeleri Sayın Dr. Öğr. Üyesi Leyla BUGAY'a ve Dr. Öğr. Üyesi Cennet ESKAL'a destek ve teşviklerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Aynı zamanda sonsuz sevgisi ve güveniyle beni bu günlere getiren, beni her zaman destekleyen ve varlıklarıyla bana güç veren çok değerli aileme de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT.....	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR.....	V
İÇİNDEKİLER.....	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ	VIII
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
2.1. Yarıgruplar.....	3
2.2. Bağntı ve Denklikler.....	8
2.3. Green Denklik Bağntıları.....	11
2.4. Doğuray Kümeleri	14
2.5. Bazı Dönüşüm Yarıgrupları.....	16
2.6. Grafikler.....	23
3. BAZI ÖZEL RANKLAR.....	27
4. BAZI YARIGRUPLARIN RANKLARI.....	29
5. MONEJENİK YARIGRUPLARIN RANKLARI.....	45
6. DİKDÖRTGENSEL BANDLARIN RANKLARI	59
7. APERİYODİK BRANDT YARIGRUPLARIN RANKLARI.....	67
KAYNAKLAR	77
ÖZGEÇMİŞ	79



ŞEKİLLER DİZİNİ

SAYFA

Şekil 2.1. Green denklik bağıntılarının Hasse diyagramı.....	13
Şekil 2.2. Bir $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfının yumurta kutusu temsili	14
Şekil 2.3. Bazı 2. Tip Stirling sayıları.....	20
Şekil 2.4. T_3 ün Green denklik sınıflarının yapısı	21
Şekil 2.5. Bir yönlü grafik örneği.....	24





1. GİRİŞ

1904 yılında ortaya çıkan yarıgrup kavramı, grup ve halka teorisi başta olmak üzere matematiğin diğer alanları ve bilgisayar bilimleri ile olan bağlantısı sayesinde hızla gelişerek 1950'li yılların sonunda cebirin başlı başına bir alt dalı haline gelmiştir.

Diğer cebirsel teorilerde olduğu gibi yarıgrup teorisinde de temel problemlerden biri, yarıgrupların sınıflandırılmasını sağlayacak ve onların yapısını tanımlayacak belirli özelliklerle ifade edilip edilemeyeceğini gösteren yöntemler bulmaktır. Bu yöntemlerden bazıları (varsa sonlu) doğuray kümesi bulma ve sonlu doğuraylı ise rankını bulma yöntemleridir.

“Rank” ya da boyut kavramı başlıca lineer cebire ait bir kavramdır. Örneğin, bir sonlu boyutlu V vektör uzayının rankı ya V nin bir maksimal lineer bağımsız alt kümesinin eleman sayısı olarak ya da V nin bir minimal doğuray kümesinin eleman sayısı olarak tanımlanabilir. Bu iki eleman sayısının eşit olduğu lineer cebirde bir temel sonuçtur. Daha genel bir cebirsel sisteme, örneğin bir yarıgrup ya da bir gruba rank kavramı genişletildiğinde rank'ın mümkün tanımlarının farklı değerlerde verildiği bulunur. Yarıgrup teorisinde rank kavramı sonlu yarıgruplar için anlamlı olduğu için tüm yarıgruplarımızın sonlu olduğunu varsayacağız.

J.M. Howie ve M.I.M. Ribeiro 2000 yılında yaptıkları çalışmada bir yarı grubun bir alt kümesinin bağımsızlığı tanımından hareketle küçük rank, normal (= düşük = alt) rank, orta rank, üst rank ve geniş rank kavramlarını sırasıyla şöyle tanımlamışlardır:

$$r_1(S) = \max\{k : S \text{ nin tüm } k \text{ elemanlı alt kümeleri bağımsızdır} \},$$

$$r_2(S) = \min\{|U| : \exists U \subseteq S, \langle U \rangle = S \},$$

$$r_3(S) = \max\{|U| : \exists U \subseteq S, U \text{ bağımsız ve } \langle U \rangle = S \},$$

$$r_4(S) = \max\{|U| : \exists U \subseteq S, U \text{ bağımsız} \} \text{ ve}$$

$$r_5(S) = \min\{k : S \text{ nin tüm } k \text{ elemanlı alt kümeleri } S \text{ yi doğurur} \}.$$

Biz de bu çalışmamızda bazı yarıgrupların bazı özel doğuray kümelerini ve bağımsız kümelerini inceleyerek ele aldığımız yarıgrupların bu özel rankları ile ilgili yapılan çalışmaları derleyeceğiz.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.1. Yarıgruplar

Tanım 2.1.1. $S \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $\mu : S \times S \rightarrow S$ şeklinde tanımlı fonksiyona S üzerinde bir **ikili işlem** denir. Eğer “ μ ”, S üzerinde bir ikili işlem ise (S, μ) ikilisine de bir **grupoid** denir.

(S, μ) bir grupoid olsun. Eğer μ ikili işlemi S üzerinde birleşme özelliğine sahip, yani $\forall x, y, z \in S$ için

$$((x, y)\mu, z)\mu = (x, (y, z)\mu)\mu$$

ise (S, μ) ikilisine bir **yarıgrup** denir.

Eğer ikili işlemin ne olduğu içerikten belli ise işlemlerde kolaylık sağlamak adına (S, μ) yerine S ve $\forall x, y \in S$ için $(x, y)\mu$ yerine xy yazacağız. Bu durumda yukarıdaki eşitlik $(xy)z = x(yz)$ şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 2.1.2. Bir S yarıgrubu, üzerindeki ikili işleme göre değişme özelliğine sahip, yani $\forall x, y \in S$ için

$$xy = yx$$

oluyorsa S yarıgrubuna bir **değişmeli yarıgrup** denir.

Tanım 2.1.3. S bir yarıgrup ve $z \in S$ olsun. Eğer $\forall s \in S$ için $zs = z$ oluyorsa z ye S nin bir **sol sıfır elemanı** denir. Eğer $\forall s \in S$ için $sz = z$ oluyorsa z ye S nin bir **sağ sıfır elemanı** denir. Eğer z hem sol hem sağ sıfır eleman ise z ye S nin bir **sıfır elemanı** denir.

Bir yarıgrupun birden fazla sağ sıfır ve/veya sol sıfır elemanı olabilir. Fakat bir yarıgrupun sıfır elemanı varsa tektir ve genellikle “0” ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $\forall s \in S$ için $es = s$ oluyorsa e ye S nin bir **sol birim elemanı** denir. Eğer $\forall s \in S$ için $se = s$ oluyorsa e ye S nin bir **sağ birim elemanı** denir. Eğer e hem sol hem sağ birim eleman ise e ye S nin bir **birim elemanı** denir.

Bir yarıgrupun birden fazla sağ birim ve/veya sol birim elemanı olabilir. Fakat bir S yarıgrupunun birim elemanı varsa tektir ve genellikle 1_S veya kısaca “1” ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. Birim elemanlı bir yarıgruba **monoid** denir. S bir yarıgrup olmak üzere

$$S^1 = \begin{cases} S, & S \text{ bir monoid ise} \\ S \cup \{1\}, & S \text{ bir monoid değilse} \end{cases}$$

kümesini ele alalım. Bu kümenin, üzerinde tanımlanan

$$\forall x, y \in S^1 \text{ için } xy = \begin{cases} xy, & x \neq 1, y \neq 1 \text{ ise} \\ x, & y = 1 \text{ ise} \\ y, & x = 1 \text{ ise} \\ 1, & x = y = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ikili işlemi ile bir monoid olduğu açıktır ve bu monoide S ye **gerekirse birim eleman eklenerek elde edilen monoid** denir.

Tanım 2.1.6. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer

$$ee = e \quad (e^2 = e)$$

oluyor ise e ye S nin bir **idempotent elemanı** denir. S yarıgrupunun tüm idempotent elemanlarının kümesi $E(S)$ ile gösterilir.

S yarıgrupunun her elemanı idempotent ise $(\forall s \in S \text{ için } s^2 = s)$, yani $E(S) = S$ ise S ye bir **band** denir. Eğer S yarıgrubu hem değişmeli hem de bir band ise S ye bir **yarılatis** denir.

S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. O zaman

$$Sa = \{sa : s \in S\} \text{ ve } aS = \{as : s \in S\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.7. S bir yarıgrup olsun. Eğer

$$\forall a \in S \text{ için } Sa = S \text{ ve } aS = S$$

oluyorsa S ye bir **grup** denir. Bu tanıma denk olarak şu tanım da verilebilir. S bir yarıgrup olmak üzere

$$\left. \begin{array}{l} (\exists e \in S), (\forall a \in S) \quad ea = a \\ (\forall a \in S), (\exists a^{-1} \in S) \quad a^{-1}a = e \end{array} \right\}$$

koşulları sağlanıyorsa S ye bir **grup** denir.

Aslında bu iki tanım da çok kullanılan tanımlar değildir. Genellikle bu tanımlara denk olan ve daha çok grup teorisinde kullanılan şu tanım kullanılmaktadır. S bir yarıgrup olmak üzere

$$\left. \begin{array}{l} (\text{bir } e \in S), (\forall a \in S) \quad ea = ae = a \\ (\forall a \in S), (\text{bir } a^{-1} \in S) \quad a^{-1}a = aa^{-1} = e \end{array} \right\}$$

koşulları sağlanıyorsa S ye bir **grup** denir. Burada $e \in S$ ye grubun **birim elemanı** ve $a^{-1} \in S$ ye de a elemanının **tersi** denir.

S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq U, V \subseteq S$ olsun. O zaman

$$UV = \{uv : u \in U \text{ ve } v \in V\}$$

olarak tanımlanır. Özel olarak $U = V$ ise UU yerine U^2 yazılır.

Tanım 2.1.8. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq T \subseteq S$ olsun. Eğer $\forall x, y \in T$ için $xy \in T$ ($T^2 \subseteq T$) oluyor ise T ye S nin bir **alt yarıgrubu** denir ve $T \leq S$ şeklinde gösterilir.

Örneğin; $S^2 \subseteq S$ olup $S \leq S$ olur. S yarıgrubunda bir sıfır eleman var ise $\{0\} \leq S$ ve S bir monoid ise $\{1\} \leq S$ olur. Bu alt yarıgruplara **aşikâr alt yarıgruplar** ve bunların dışındaki alt yarıgruplara da **öz alt yarıgruplar** denir.

Tanım 2.1.9. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq I \subseteq S$ olsun. Eğer $\forall s \in S$ ve $\forall a \in I$ için

- i) $sa \in I$, yani $SI \subseteq I$ oluyorsa I ya S nin bir **sol ideali**,
- ii) $as \in I$, yani $IS \subseteq I$ oluyorsa I ya S nin bir **sağ ideali**

denir.

Eğer I , S nin hem sol hem de sağ ideali ise ($SI \subseteq I$ ve $IS \subseteq I$ ise) I ya S nin bir **ideali** denir ve $I \trianglelefteq S$ ile gösterilir.

Örneğin; $S^2 \subseteq S$ olup $S \trianglelefteq S$ olur. S de bir sıfır eleman 0 varsa $\{0\}S = \{0\} \subseteq \{0\}$ ve $S\{0\} = \{0\} \subseteq \{0\}$ olup $\{0\} \trianglelefteq S$ olur. Bu ideallere **aşikâr idealler** denir. S yarıgrubunun $I \neq S$ ve $I \neq \{0\}$ olacak şekilde bir ideali varsa bu ideale de **öz ideal** denir.

Tanım 2.1.10. S ve T iki yarıgrup ve $\varphi: S \rightarrow T$ bir dönüşüm (fonksiyon) olsun. Eğer $\forall x, y \in S$ için

$$(xy)\varphi = (x\varphi)(y\varphi)$$

oluyor ise φ ye bir **(yarıgrup) homomorfizmi** denir. Ayrıca $\varphi: S \rightarrow T$ homomorfizm olmak üzere

- i) φ bire-bir ise φ ye bir **monomorfizm**,
- ii) φ örten ise φ ye bir **epimorfizm**,
- iii) φ hem bire-bir hem de örten ise φ ye bir **izomorfizm**,
- iv) φ, S den S ye bir homomorfizm ise φ ye bir **endomorfizm**,
- v) φ, S den S ye bir izomorfizm ise φ ye bir **otomorfizm**

denir. Eğer S den T ye bir izomorfizm varsa S ile T ye **izomorfik yarıgruplar** denir ve $S \cong T$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.11. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. X kümesi $\forall x, y \in X$ için $xy = x$ işlemi ile bir yarıgruptur. Bu yarıgruba **sol sıfır yarıgrup** denir ve L_X ile gösterilir.

Tanım 2.1.12. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. X kümesi $\forall x, y \in X$ için $xy = y$ işlemi ile bir yarıgruptur. Bu yarıgruba **sağ sıfır yarıgrup** denir ve R_X ile gösterilir.

Tanım 2.1.13. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $z \in X$ özel bir eleman olsun. X üzerinde tanımlanan $\forall x, y \in X$ için $xy = z$ işlemi ile bir yarıgruptur. Bu yarıgruba **sıfır yarıgrup** denir ve Z_X ile gösterilir.

Tanım 2.1.14. S bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall a, b \in S$ için $aba = a$ ise S ye bir **dikdörtgensel band** denir.

2.2. Bağntı ve Denklikler

Tanım 2.2.1. $X \neq \emptyset$ ve $Y \neq \emptyset$ iki küme olmak üzere

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

kümesine X ile Y nin **kartezyen çarpımı** denir ve $x, x' \in X$ ve $y, y' \in Y$ olmak üzere $X \times Y$ kartezyen çarpım kümesi, üzerinde tanımlanan

$$(x, y)(x', y') = (xx', yy')$$

çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba X ile Y nin **direkt çarpımı** denir. $X \times Y$ nin her bir ρ alt kümesine **X ten Y ye bir bağntı** denir. $X \times X$ in her bir ρ alt kümesine ise **X üzerinde bir bağntı** denir. X üzerindeki tüm bağntıların kümesi $B_X = \{\rho : \rho \subseteq X \times X\}$ ile gösterilir. Ayrıca, $\rho \in B_X$ olmak üzere $(a, b) \in \rho$ elemanı kısaca apb şeklinde de gösterilebilir. $\emptyset$, $\Delta_X = 1_X = \{(x, x) : x \in X\}$ kümesi ve $X \times X$ in kendisi, X üzerinde birer bağntıdır. Bu

bağıntılara sırasıyla **boş bağıntı**, **birim/eşitlik/köşegen bağıntı** ve **evrensel bağıntı** denir. Ayrıca, $\forall \rho \in B_X$ olmak üzere

$$\rho^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in \rho\}$$

bağıntısına ρ nun **ters bağıntısı (= tersi)** ve

$$\begin{aligned} \text{dom}(\rho) &= \{x \in X : \exists y \in X \text{ için } (x, y) \in \rho\}, \\ x\rho &= \{y \in X : (x, y) \in \rho\}, \\ \text{im}(\rho) &= \{y \in X : \exists x \in X \text{ için } (x, y) \in \rho\} \end{aligned}$$

kümelerine de sırasıyla ρ bağıntısının **tanım kümesi**, $x \in X$ in **ρ altındaki görüntü kümesi** ve ρ bağıntısının **görüntü kümesi** denir.

Tanım 2.2.2. X boş olmayan bir küme olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in B_X$ için

$$\alpha \circ \beta = \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X \text{ için } (x, z) \in \alpha \text{ ve } (z, y) \in \beta\}$$

şeklinde tanımlanan ‘ $\circ$ ’ bileşke işlemi ile B_X bir yarıgruptur (hatta birim elemanı Δ_X olan bir monoiddir) ve bu yarıgruba **bağıntılar yarıgrubu** denir. $\forall \alpha, \beta, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in B_X$ için

$$\text{i) } \alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha \circ \delta \subseteq \beta \circ \delta \text{ ve } \delta \circ \alpha \subseteq \delta \circ \beta \text{ ve}$$

$$\text{ii) } (\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \dots \circ \alpha_n)^{-1} = \alpha_n^{-1} \circ \dots \circ \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1^{-1}$$

olur.

Tanım 2.2.3. X boş olmayan bir küme ve ρ, X üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere

- i) $\Delta_X \subseteq \rho$ ise ρ ya **yansımali bağıntı**,
- ii) $\rho = \rho^{-1}$ ise ρ ya **simetrik bağıntı**,
- iii) $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_X$ ise ρ ya **ters simetrik bağıntı** ve
- iv) $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ ise ρ ya **geçişmeli bağıntı**

denir. Eğer ρ bağıntısı yansımali, simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise ρ ya X üzerinde bir **denklik bağıntısı** denir. Eğer ρ bağıntısı yansımali, ters simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise ρ ya X üzerinde bir **sıralama bağıntısı** denir.

Eğer $\{\rho_i : i \in I\}$, X kümesi üzerindeki denklik bağıntılarının boştan farklı bir ailesi ise kolayca gösterilebilir ki, $\bigcap_{i \in I} \rho_i$ kümesi de X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

ρ , X üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in X$ olmak üzere

$$x\rho = \{y \in X : (x, y) \in \rho\}$$

kümesine **x in denklik sınıfı** ve X in tüm denklik sınıflarının ailesi olan

$$X/\rho = \{x\rho : x \in X\}$$

kümesine de X in ρ ile elde edilen **bölüm kümesi** denir.

Tanım 2.2.4. X boş olmayan bir küme ve R, X kümesi üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O halde $R \subseteq X \times X$ olup X üzerinde R yi içeren en az bir denklik bağıntısı vardır. X üzerinde R yi içeren denklik bağıntılarının arakesiti de R yi

içeren bir denklik bağıntısı olup bu denklik bağıntısına R tarafından doğrulan denklik bağıntısı denir ve R^e ile gösterilir, yani

$$R^e = \bigcap \{ \rho : R \subseteq \rho \text{ ve } \rho, X \text{ üzerinde bir denklik bağıntısı} \}$$

olur. Dikkat edilirse R^e , R yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır.

Ayrıca,

- i) $R = \emptyset \Rightarrow R^e = \Delta_X$,
- ii) R bir denklik bağıntısı ise $R^e = R$ ve
- iii) $R^e = (R^{-1})^e$

olduğu da kolayca gösterilebilir.

2.3. Green Denklik Bağıntıları

Tanım 2.3.1. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun.

$$\begin{aligned} S^1 a &= Sa \cup \{a\} = \{xa : x \in S^1\}, \\ aS^1 &= aS \cup \{a\} = \{ay : y \in S^1\} \text{ ve} \\ S^1 aS^1 &= SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\} = \{xay : x, y \in S^1\} \end{aligned}$$

kümeleri sırasıyla S nin a elemanını içeren en küçük sol, sağ, — idealleri olup bu ideallere sırasıyla esas sol, esas sağ ve esas ideali denir.

S üzerinde tanımlanan

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{ (a, b) \in S \times S : S^1 a = S^1 b \}, \\ \mathcal{R} &= \{ (a, b) \in S \times S : a S^1 = b S^1 \} \text{ ve} \\ \mathcal{J} &= \{ (a, b) \in S \times S : S^1 a S^1 = S^1 b S^1 \}\end{aligned}$$

bağıntılarına sırasıyla **sol-Green bağıntısı** ($\mathcal{L}$ -Green), **sağ-Green bağıntısı** ($\mathcal{R}$ -Green) ve **Green bağıntısı** ($\mathcal{J}$ -Green) denir. Bu bağıntıların birer denklik bağıntısı olduğu açıktır.

Önerme 2.3.2. S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun.

- i) $a \mathcal{L} b \Leftrightarrow a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
- ii) $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a = bx$ ve $b = ay$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
- iii) $a \mathcal{J} b \Leftrightarrow a = xby$ ve $b = uav$ olacak şekilde $x, y, u, v \in S^1$ vardır.

İspat. Howie (1995), Proposition 2.1.1'e bakınız. ■

Tanım 2.3.3. S bir yarıgrup olsun. $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ sırasıyla S yarıgrubu üzerindeki üzerindeki sol-Green ve sağ-Green bağıntıları olmak üzere

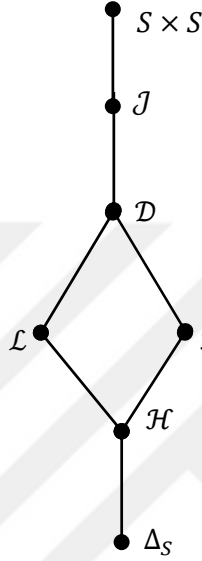
$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$$

olarak tanımlanan denklik bağıntısına **$\mathcal{H}$ -Green bağıntısı** ve $\mathcal{L}$ ile $\mathcal{R}$ bağıntılarını içeren en küçük denklik bağıntısına da **$\mathcal{D}$ -Green bağıntısı** denir. O halde

$$\mathcal{D} = (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^e$$

olur.

Bir S yarıgrubu üzerindeki $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}$ ve $\mathcal{D}$ -Green denklik bağıntıları için $\Delta_S \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{J} \subseteq S \times S$ olup aralarındaki bu ilişki şu diyagram ile ifade edilebilir. Bu diyagrama **Hasse diyagramı** denir.



Şekil 2.1. Green denklik bağıntılarının Hasse diyagramı

Tanım 2.3.4. S yarıgrubu üzerindeki $\mathcal{J}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{H}$ -Green denklik bağıntılarının denklik sınıflarının kümeleri sırasıyla $S/\mathcal{J}$, $S/\mathcal{D}$, $S/\mathcal{L}$, $S/\mathcal{R}$, $S/\mathcal{H}$ ile gösterilir. Ayrıca $a \in S$ için a yı içeren $\mathcal{J}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfları sırasıyla J_a , D_a , L_a , R_a ve H_a ile gösterilir. Bu durumda

$$H_a \subseteq L_a \subseteq D_a, \quad H_a \subseteq R_a \subseteq D_a \quad \text{ve} \quad H_a = L_a \cap R_a$$

olduğu ve $\mathcal{D}$ -Green denklik bağıntısının tanımından dolayı da

$$a\mathcal{D}b \Leftrightarrow R_a \cap L_b \neq \emptyset \Leftrightarrow L_a \cap R_b \neq \emptyset$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfı D , ayrık $\mathcal{L}$ -Green denklik ve $\mathcal{R}$ -Green denklik sınıflarının birleşimi olup D sınıfı, her satırı bir $\mathcal{R}$ -sınıfını, her sütunu bir $\mathcal{L}$ -sınıfını ve her hücresi de bir $\mathcal{H}$ -sınıfını temsil eden bir yumurta kutusu olarak düşünülür.

	D_a		L_a		
R_a		H_a			

Şekil 2.2. Bir $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfının yumurta kutusu temsili

2.4. Doğuray Kümeleri

Tanım 2.4.1. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq X \subseteq S$ olmak üzere S nin X kümesini içeren tüm alt yarıgruplarının arakesiti de X kümesini içeren bir alt yarıgrup olup bu alt yarıgruba **S nin X tarafından doğurulan alt yarıgrubu** denir ve ${}_S\langle X \rangle$ ile gösterilir, yani

$${}_S\langle X \rangle = \bigcap \{T : X \subseteq T \leq S\}$$

olur.

Eğer X kümesinin bir yarıgrup doğuray kümesi olduğu içerikten anlaşılıyorsa X tarafından doğurulan alt yarıgrup kısaca $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Dikkat edilirse $\langle X \rangle$, X kümesini içeren en küçük alt yarıgruptur ve $\langle X \rangle$ alt yarıgrubu, X kümesi üzerindeki tüm sonlu çarpımların kümesidir, yani

$$\langle X \rangle = \{x_1 x_2 \cdots x_n : n \in \mathbb{Z}^+; x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$$

olur. Tanımdan da kolayca görülebileceği gibi, S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq X \subseteq Y \subseteq S$ ise $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ olur.

Tanım 2.4.2. S bir yarıgrup olmak üzere eğer $S = \langle X \rangle$ olacak şekilde bir $\emptyset \neq X \subseteq S$ kümesi varsa bu X kümesine S nin bir **(yarıgrup) doğuray kümesi**, X in her bir elemanına S nin **(yarıgrup) doğurayı** ve S ye de **X tarafından doğurulan yarıgrup** denir.

Eğer $S = \langle X \rangle$ olacak şekilde sonlu bir $\emptyset \neq X \subseteq S$ kümesi varsa S ye **sonlu doğuraylı yarıgrup** denir. Özel olarak, sonlu bir yarıgrup aynı zamanda kendisi için bir sonlu doğuray kümesi olup sonlu doğuraylıdır. Ayrıca, $S = \langle \{a\} \rangle$ olacak şekilde bir $a \in S$ varsa S ye **monojenik (tek doğuraylı) yarıgrup** denir ve $S = \langle a \rangle$ şeklinde de yazılabilir. $\langle a \rangle$ monojenik yarıgrupunun eleman sayısına (kardinalitesine) **a elemanının derecesi** denir. Benzer tanımlar monoid ve grup için de yapılabilir.

Eğer $\langle a \rangle$ sonsuz elemanlı ise $\phi: \langle a \rangle \rightarrow (\mathbb{Z}^+, +)$, $a^k \mapsto k$ dönüşümü ile $\langle a \rangle \cong (\mathbb{Z}^+, +)$ olduğu görülür. O halde izomorfizm altında bir tek sonsuz monojenik yarıgrup vardır, o da $(\mathbb{Z}^+, +)$ yarıgrupudur.

Eğer $\langle a \rangle$ sonlu ise $\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots, a^n, a^{n+1}, \dots\}$ kümesinde sonlu sayıda farklı eleman vardır. O halde $\{x \in \mathbb{Z}^+ : a^x = a^y, (x \neq y)\} \neq \emptyset$ olur. Bu küme tamsayılar kümesinin alttan sınırlı bir alt kümesi olduğundan zorn lemması gereği en küçük elemanı m mevcuttur. m ye a nın **indeksi** denir.

Ayrıca $\{z \in \mathbb{Z}^+ : a^{m+z} = a^m\} \neq \emptyset$ olup benzer şekilde bu kümenin de bir en küçük elemanı r vardır. r ye de a nın **periyodu** denir. Bu sonlu yarıgrup

$$M_{m,r}(a) = \langle a \rangle = \{a, a^2, \dots, a^m, a^{m+r-1}\}$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca $m + k \equiv 0 \pmod{r}$ ve $m + l \equiv 1 \pmod{r}$ olacak şekildeki $k, l \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ elemanları için $K_a = \{a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1}\}$ kümesi birim elemanı a^{m+k} olan ve a^{m+l} tarafından doğurulan devirli bir gruptur. K_a grubuna $\langle a \rangle$ - nın **çekirdeği** denir.

Tanım 2.4.3. Bir yarıgrubun her elemanı sonlu dereceli ise bu yarıgruba **periyodik** yarıgrup denir. Tanımı gereği, her sonlu yarıgrubun aynı zamanda periyodik olduğu kolayca görülmektedir.

Önerme 2.4.4. S bir periyodik yarıgrup ise $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ olur.

İspat. Howie (1995), Proposition 2.1.4'e bakınız. ■

Tanım 2.4.5. S sonlu doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere

$$\text{rank}(S) = \min\{|X| : S = \langle X \rangle \text{ ve } X \text{ sonlu}\}$$

pozitif tamsayısına S nin (**yarıgrup**) **rankı** denir ve $\text{rank}_s(S)$ ile gösterilir. Ayrıca, S nin $\text{rank}_s(S)$ elemanlı bir doğuray kümesine de **minimal doğuray kümesi** denir. **Monoid rankı** $\text{rank}_M(S)$ ve **grup rankı** $\text{rank}_G(S)$ de benzer şekilde tanımlanabilir.

2.5. Bazı Dönüşüm Yarıgrupları

Tanım 2.5.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\alpha \in B_X$ olsun. Eğer

$$\forall x \in X \text{ için } |x\alpha| \leq 1$$

ise α ya X üzerinde bir **kısmi dönüşüm** denir. X kümesi üzerindeki tüm kısmi dönüşümlerin kümesi P_X ile gösterilir. P_X dönüşümlerin bileşke işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba **kısmi dönüşümler yarıgrubu** denir. Eğer

$$\forall x \in X \text{ için } |x\alpha| = 1$$

ise α ya X üzerinde bir **(tam) dönüşüm** denir. X kümesi üzerindeki tüm (tam) dönüşümlerin kümesi T_X ile gösterilir. T_X dönüşümlerin bileşke işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba **(tam) dönüşümler yarıgrubu** denir. Ayrıca, $T_X \leq P_X$ olduğu açıktır.

Dikkat edilirse $\alpha \in P_X$ iken $\emptyset \subseteq \text{dom}(\alpha) \subseteq X$ olur. Ayrıca, eğer $\alpha \in P_X$ ve $\text{dom}(\alpha) = X$ ise $\alpha \in T_X$ olur.

Eğer $\alpha \in P_X$ ve $\text{dom}(\alpha) = \emptyset$ ise α ya **boş dönüşüm** denir ve $\emptyset$ ile gösterilir. Ayrıca $\alpha \in P_X$, $x \in \text{dom}(\alpha)$ ve $(x, y) \in \alpha$ ise $x\alpha = \{y\}$ yerine genel olarak $(x)\alpha = y$ veya $x\alpha = y$ şeklinde yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \text{dom}(\alpha) &= \{x : \exists y \in X \text{ için } x\alpha = y\} \\ \text{im}(\alpha) &= \{y : \exists x \in X \text{ için } x\alpha = y\} \end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

X kümesi üzerindeki tüm bire-bir ve örten dönüşümlerin (permütasyonların) kümesi dönüşümlerin bileşke işlemi ile bir grup olup bu gruba **simetrik dönüşümler grubu (simetrik grup)** veya **permütasyonlar grubu** denir ve S_X ile gösterilir.

Tanımları gereği

$$S_X \leq T_X \leq P_X \leq B_X$$

olduğu açıktır.

Biz çalışmamız boyunca sonlu $X = X_n = \{1, \dots, n\}$ kümesini ele alacağız ve B_X, P_X, T_X ve S_X yerine sırasıyla B_n, P_n, T_n ve S_n yazacağız. Ayrıca, $\alpha \in P_n$ kısmi dönüşümünü

$$\alpha = \begin{pmatrix} x \in \text{dom}(\alpha) & x \in X_n \setminus \text{dom}(\alpha) \\ x\alpha & - \end{pmatrix}$$

matris formunda ve özel olarak $\alpha \in T_n$ dönüşümünü de

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ 1\alpha & \dots & n\alpha \end{pmatrix}$$

matris formunda düşünebiliriz. Buradan $|P_n| = (n+1)^n$, $|T_n| = n^n$ ve $|S_n| = n!$ olduğu kolayca görülmektedir.

Tanım 2.5.2. T_n ve S_n sırasıyla $X_n = \{1, \dots, n\}$ kümesi üzerindeki (tam) dönüşümler yarıgrubu ve permütasyonlar grubu olsun. $T_n \setminus S_n$ kümesi T_n nin bir alt yarıgrubudur. Bu alt yarıgruba **(tekil) dönüşümler yarıgrubu** denir ve $Sing_n$ veya ST_n ile gösterilir. Yani $ST_n = Sing_n = T_n \setminus S_n$ olur.

$\alpha \in P_n$ olmak üzere

$$\ker(\alpha) = \{(x, y) \in X_n \times X_n : (x, y \in \text{dom}(\alpha) \text{ ve } x\alpha = y\alpha) \text{ veya } (x, y \in X_n \setminus \text{dom}(\alpha))\}$$

kümesine **α nın çekirdek kümesi** denir. Özel olarak; $\alpha \in T_n$ iken

$$\ker(\alpha) = \{(x, y) \in X_n \times X_n : x\alpha = y\alpha\}$$

şeklinde dir. $\ker(\alpha)$, X_n kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Teorem 2.5.3. $\alpha, \beta \in T_n$ olmak üzere

- i) $\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$,
- ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta)$,
- iii) $\alpha \mathcal{D} \beta \Leftrightarrow |\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)|$,
- iv) $\alpha \mathcal{H} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta) \text{ ve } \ker(\alpha) = \ker(\beta)$

şeklindedir.

İspat. Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 4.5.1'e bakınız. ■

Sonuç 2.5.4. T_n yarıgrubunun n tane $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfı vardır. Bunlar, $1 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$D_k = \{\alpha \in T_n : |\text{im}(\alpha)| = k\}$$

şeklindedir. ■

Tanım 2.5.5. “ $1 \leq n$ kişiyi her grupta en az bir kişi olacak şekilde $1 \leq k \leq n$ tane gruba kaç farklı sayıda ayırabiliriz?” sorusunun cevabı olan sayılara **2. Tip Stirling sayıları** denir ve $S(n, k)$ ile gösterilir. Her bir grup bir alt küme olduğundan bu soruyu “ n elemanlı bir kümenin k tane ayrık ve boş olmayan alt kümeye parçalanışlarının sayısı nedir?” şeklinde de düşünebiliriz.

Kolayca görüleceği gibi, n elemanlı bir kümeyi istenen şekilde 1 tane alt kümeye 1 şekilde ve n tane alt kümeye yine 1 şekilde parçalayabiliriz. Dolayısıyla $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ olur. Şimdi $1 < k < n$ için $S(n, k)$ sayısını hesaplayalım. Tanımı gereği $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin k tane ayrık ve boş olmayan alt kümeye parçalanışlarının sayısı $S(n, k)$ olup alt kümelerden biri $\{n\}$ olacak şekildeki

parçalanışların sayısı $S(n-1, k-1)$ ve “ n ” elemanının tek olarak bir alt küme oluşturmadığı parçalanışların sayısı $kS(n-1, k)$ olduğundan

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$$

indirgeme bağıntısı elde edilir.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$S(1, k)$	1				
$S(2, k)$	1	1			
$S(3, k)$	1	3	1		
$S(4, k)$	1	7	6	1	
$S(5, k)$	1	15	25	10	1

Şekil 2.3. Bazı 2. Tip Stirling sayıları

Önerme 2.5.6. $1 \leq k \leq n$ olmak üzere T_n yarıgrubundaki D_k sınıfı $\binom{n}{k}$ tane $\mathcal{L}$ -Green denklik sınıfı, $S(n, k)$ tane $\mathcal{R}$ -Green denklik sınıfı ve $\binom{n}{k}S(n, k)$ tane $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfı içerir.

İspat. Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Proposition 4.6.3 ve Proposition 4.6.4’e bakınız. ■

Örnek 2.5.7. T_3 ün Green denklik sınıflarının yapısı aşağıdaki gibidir.

D_3		$L_{1,2,3}$	
$R_{1,2,3}$		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	

D_2		$L_{1,2}$		$L_{1,3}$		$L_{2,3}$	
$R_{1,23}$		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	
$R_{13,2}$		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	
$R_{12,3}$		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	

D_1		L_1		L_2		L_3	
R_{123}		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	

Şekil 2.4. T_3 ün Green denklik sınıflarının yapısı

Örneğin; $L_{1,2}$ burada görüntü kümesi $\{1,2\}$ olan elemanların $\mathcal{L}$ -Green denklik sınıfını, $R_{1,23}$ ise çekirdek parçalanışı $\{\{1\}, \{2,3\}\}$ olan elemanların oluşturduğu $\mathcal{R}$ -Green denklik sınıfını göstermektedir.

Green denklik bağıntıları ile ilgili daha fazla bilgi için Howie (1995)'e bakınız.

Tanım 2.5.8. $\alpha \in P_n$ olsun. Eğer bir $x \in \text{dom}\alpha$ için $x\alpha = x$ ise x e α nın bir **sabit noktası** denir. α nın tüm sabit noktalarının kümesi

$$\text{Fix}(\alpha) = \{x \in \text{dom} \alpha : x\alpha = x\}$$

şeklinde gösterilir. Aksi halde, $x \in \alpha$ nın bir **sabit olmayan noktası** denir. α nın tüm sabit olmayan noktalarının kümesi

$$\text{Shift}(\alpha) = \{x \in \text{dom}(\alpha) : x\alpha \neq x\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.5.9. $n, r \geq 2$ tamsayıları için $\alpha \in S_n$ ve $\text{Shift}(\alpha) = \{j_1, \dots, j_r\}$ olsun. Eğer

$$j_1\alpha = j_2, j_2\alpha = j_3, \dots, j_{r-1}\alpha = i_r \text{ ve } j_r\alpha = j_1$$

ise α ya bir $r - \text{devir}$ denir ve $\alpha = (j_1 j_2 \dots j_r)$ şeklinde yazılır. Ayrıca bir α devirinin yazılışında görülen elemanların sayısına α nın **uzunluğu** denir. Uzunluğu 2 olan bir devire, yani 2-devire **transpozisyon** denir.

Teorem 2.5.10. $n > 2$ ve $\alpha = (1\ 2), \beta = (1\ 2 \dots n) \in S_n$ olmak üzere $S_n = \langle \alpha, \beta \rangle$ olur.

İspat. Howie (1995), 1.9 Exercise 6'ya bakınız. ■

Tanım 2.5.11. $n, r \geq 2$ tamsayıları için $\alpha \in T_n$ ve $\text{Shift}(\alpha) = \{i_1, \dots, i_{r-1}\}$ olsun. Eğer

$$i_1\alpha = i_2, i_2\alpha = i_3, \dots, i_{r-1}\alpha = i_r$$

ise $\alpha = \|i_1 i_2 \dots i_r\|$ şeklinde yazılır.

Teorem 2.5.12. $n > 2$, $\alpha = (1\ 2)$, $\beta = (1\ 2 \dots n)$ ve $\theta = \|1\ 2\|$ olmak üzere $T_n = \langle \alpha, \beta, \theta \rangle$ olur.

İspat. Howie (1995), 1.9 Exercise 7'ye bakınız. ■

2.6. Grafikler

Tanım 2.6.1. Köşeler kümesi olarak adlandırdığımız boş olmayan sonlu bir küme ve **kenarlar listesi** olarak adlandırdığımız köşeler kümesinin sırasız ikililerinin oluşturduğu listeden oluşan yapıya **grafik** denir. Bir G grafiği, köşelerin kümesi $V(G)$ ile kenarların listesi $E(G)$ olmak üzere $G = (V(G), E(G))$ ikilisi ile gösterilir.

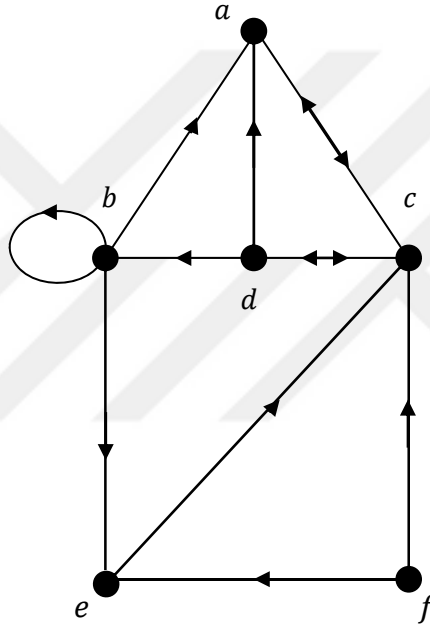
Genellikle bir G grafiğinin köşeleri $a, b, u, v, x, y, z, \dots, 1, 2, 3, \dots$ gibi sembollerle ve ayrıca $u, v \in V(G)$ olmak üzere, eğer G grafiğinde u ile v köşesini birleştiren bir kenar varsa bu kenar $\{u, v\}$ ile gösterilir. Eğer G grafiğinde u ile v köşelerini birleştiren 1 den çok kenar varsa bu kenarların hepsine birden **kath kenar** ve eğer $\{u, u\} \in E(G)$ ise $\{u, u\}$ kenarına da bir **halka** denir.

Tanım 2.6.2. Köşeler kümesi olarak adlandırdığımız boş olmayan sonlu bir kümeden ve **yönlü kenarlar listesi** veya **oklar listesi** olarak adlandırdığımız, köşeler kümesinin sıralı ikililerinin oluşturduğu listeden oluşan yapıya **yönlü grafik (diyagram)** denir.

Genellikle bir D yönlü grafiğinin köşeleri $a, b, u, v, x, y, z, \dots, 1, 2, 3, \dots$ gibi sembollerle ve köşeler kümesi $V(D)$ ile gösterilir. Ayrıca $u, v \in V(D)$ olmak üzere, eğer D yönlü grafiğinde u dan v ye bir yönlü kenar varsa bu yönlü kenar (u, v) ile ve yönlü kenarlar listesi $\vec{E}(D)$ ile gösterilir. Eğer u dan v ye 1 den çok

yönlü kenar varsa bu yönlü kenarların hepsine birden **u dan v ye katlı kenar** denir. Eğer u dan u ya bir yönlü kenar varsa bu yönlü kenara da **halka** denir.

Örnek 2.6.3. $V(D) = \{a, b, c, d, e, f\}$ ve $\vec{E}(D) = \{(b, a), (a, c), (b, b), (b, e), (c, a), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c), (e, c), (f, c), (f, e)\}$ olmak üzere D yönlü grafiği şu şekildedir.



Şekil 2.5. Bir yönlü grafik örneği

Tanım 2.6.4. D bir yönlü grafik olsun.

$$V(G) = V(D)$$

$$E(G) = \{\{u, v\} : (u, v) \in \vec{E}(D) \text{ veya } (v, u) \in \vec{E}(D)\}$$

olarak tanımlanan, yani D yönlü grafiğinin yönleri silinerek elde edilen, G grafiğine D yönlü grafiğinin **öz grafiği** denir.

Tanım 2.6.5. D bir yönlü grafik ve $u, v, v_1, v_2, \dots, v_{n+1} \in V(D)$ olsun.

- i) Eğer $i = 1, \dots, n$ için $(v_i, v_{i+1}) \in \vec{E}(D)$ ise $v_1 v_2 \dots v_{n+1}$ dizisine D yönlü grafiğinde uzunluğu n olan bir **yol** ve bu yolda $v_{n+1} = v_1$ ise bu yola bir **kapalı yol** denir.
- ii) Eğer $v_1 v_2 \dots v_{n+1}$ yolunda $\forall 1 \leq i \neq j \leq n+1$ için $v_i \neq v_j$ ise, yani bu yoldaki tüm köşeler farklı ise bu yola bir **yönlü patika** denir.
- iii) Eğer $v_1 v_2 \dots v_n v_1$ kapalı yolunda $\forall 1 \leq i \neq j \leq n$ için $v_i \neq v_j$ ise bu kapalı yola bir **devir** denir.
- iv) Herhangi iki köşesi arasında bir patika olan grafiğe **bağlantılı grafik**, aksi halde **bağlantısız grafik** denir. Eğer D yönlü grafiğinin öz grafiği G bağlantılı grafik ise D ye **bağlantılı yönlü grafik**, aksi halde **bağlantısız yönlü grafik** denir.
- v) Eğer D yönlü grafiğinde u köşesinden v köşesine bir yönlü patika bulunabiliyor ise u köşesi v köşesine **bağlı** denir.
- vi) Eğer D yönlü grafiğinde $\forall u, v \in V(D)$ için u köşesinden v köşesine bir yönlü patika bulunabiliyor, yani u köşesi v köşesine bağlı ise D yönlü grafiğine **sıkı bağlantılı** yönlü grafik denir. Kolayca görüleceği gibi D yönlü grafiğinde tüm köşeleri içeren bir devir varsa D sıkı bağlantılıdır.

Tanım 2.6.6. $m \geq 2$ için $x_1, \dots, x_{m-1}$ lerin u ve v den farklı olduğu

$$u = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_m = v ,$$

yönlendirilmiş kenarlarının bir serisine u dan v ye bir **öz patika** denir. Bir diyagramda bir kenar ile bağlantılı tüm u, v köşeleri için u dan v ye öz patika yoksa bu diyagram **bağımsız** olarak adlandırılır.

Grafiklerle ilgili daha fazla bilgi için Wilson ve Watkins (1990)'a bakınız.



3. BAZI ÖZEL RANKLAR

Tanım 3.1. S bir yarıgrup olsun. $U \subseteq S$ olmak üzere $\forall u \in U$ için $u \notin \langle U \setminus \{u\} \rangle$ ise U ya S nin bir **bağımsız alt kümesi** denir.

Tanım 3.2. S bir sonlu doğuraylı yarıgrup olmak üzere küçük rank, normal (= düşük = alt) rank, orta rank, üst rank ve geniş rank, sırasıyla

$$r_1(S) = \max\{k : S \text{ nin tüm } k \text{ elemanlı alt kümeleri bağımsızdır} \},$$

$$r_2(S) = \min\{|U| : \exists U \subseteq S, \langle U \rangle = S \},$$

$$r_3(S) = \max\{|U| : \exists U \subseteq S, U \text{ bağımsız ve } \langle U \rangle = S \},$$

$$r_4(S) = \max\{|U| : \exists U \subseteq S, U \text{ bağımsız} \} \text{ ve}$$

$$r_5(S) = \min\{k : S \text{ nin tüm } k \text{ elemanlı alt kümeleri } S \text{ yi doğurur} \}$$

olarak tanımlanır.

Dikkat edilirse burada tanımlanan $r_2(S)$ rankı daha önce tanımlanan $\text{rank}(S)$ ile eşdeğerdir.

Teorem 3.3. S bir yarıgrup olmak üzere $r_1(S) \leq r_2(S) \leq r_3(S) \leq r_4(S) \leq r_5(S)$ olur.

İspat. Bir $n \geq 1$ tamsayısı için $r_2(S) = n$ ise $|U| = n$ ve $\langle U \rangle = S$ olacak şekilde bir $U \subseteq S$ vardır. $r_2(S)$ nin tanımından U bağımsız olmak zorundadır. Aksi halde $u \in \langle U \setminus \{u\} \rangle$ olacak şekilde bir $u \in U$ mevcut olurdu ve bu durumda $\langle U \setminus \{u\} \rangle = S$ ve $r_2(S) \leq n - 1$ olur ki bu da $r_2(S) = n$ olmasıyla çelişir.

Bir $m \geq 1$ tamsayısı için $r_1(S) = m$, $r_2(S) = n$ ve kabul edelim ki $n < m$ olsun. O zaman $|U| = n$ ve $\langle U \rangle = S$ olacak şekilde bir $U \subseteq S$ vardır. Ayrıca, $U \subsetneq V$, $|V| = m$ ve V bağımsız olacak şekilde en az bir $V \subseteq S$ vardır. Dolayısıyla $n < m$ olduğundan $V \setminus U \neq \emptyset$ olup en az bir $v \in (V \setminus U)$ mevcuttur. V bağımsız olduğundan $v \notin \langle V \setminus \{v\} \rangle$ olur. Ayrıca, $U \subsetneq V$ ve $v \in (V \setminus U)$ olduğundan $\langle U \rangle \subseteq \langle V \setminus \{v\} \rangle$ olup $v \notin \langle U \rangle$ olur. Bu ise $\langle U \rangle = S$ olması ile çelişir. O halde $m \leq n$ olup $r_1(S) \leq r_2(S)$ olur.

Eğer $|U| = r_2(S)$ ve $\langle U \rangle = S$ ise gösterildiği üzere $U \subseteq S$ bağımsız olur. Böylece $r_3(S)$ nin tanımından $r_2(S) = |U| \leq r_3(S)$ olur. Benzer şekilde, $r_3(S) = |U|$, $U \subseteq S$ bağımsız ve $\langle U \rangle = S$ ise $r_4(S)$ nin tanımından $r_3(S) = |U| \leq r_4(S)$ olur.

Son olarak $r_4(S) \leq r_5(S)$ olduğunu gösterelim. Bir $t \geq 1$ tamsayısı için $r_5(S) = t$ ve bir $k \geq 1$ tamsayısı için $r_4(S) = k$ olsun. Kabul edelim ki $k > t$ olsun. O zaman S nin k elemanlı bağımsız bir alt kümesi $V \subseteq S$ mevcut olup herhangi bir $v \in V$ için $|V \setminus \{v\}| \geq t$ ve $r_5(S)$ nin tanımından $\langle V \setminus \{v\} \rangle = S$ olur. Bu durumda $v \in \langle V \setminus \{v\} \rangle$ olur ki bu V nin bağımsızlığı ile çelişir. O halde $k \leq t$ yani $r_4(S) \leq r_5(S)$ olur.

Böylece

$$r_1(S) \leq r_2(S) \leq r_3(S) \leq r_4(S) \leq r_5(S)$$

olduğu gösterilmiş olur. ■

4. BAZI YARIGRUPLARIN RANKLARI

Tanım 4.1. S bir yarıgrup olmak üzere eğer $r_2(S) = |S| - 1$ ise S ye **noble yarıgrup** denir. Diğer bir deyişle, eğer $\forall s, t \in S$ ve $s \neq t$ için $\langle S \setminus \{s, t\} \rangle \neq S$ ve bir $z \in S$ için de $\langle S \setminus \{z\} \rangle = S$ ise S ye **noble yarıgrup** denir. Bu tanımda belirtilen z elemanı **gereksiz** eleman olarak adlandırılır.

$S, S \setminus \{z\}$ tarafından doğurulan bir noble yarıgrup olsun. Bu durumda, eğer herhangi bir $s \in S \setminus \{z\}$ için $s^2 \neq s$ ve $s^2 \neq z$ olsaydı $\langle S \setminus \{s^2, z\} \rangle = S$ olur ki bu da S nin bir noble yarıgrup olması ile çelişir. O halde her bir $s \in S \setminus \{z\}$ için

$$s^2 = s \text{ ya da } s^2 = z$$

olmak zorundadır. Benzer şekilde herhangi farklı iki $s, t \in S \setminus \{z\}$ için $st \neq s$, $st \neq t$ ve $st \neq z$ olsaydı $\langle S \setminus \{st, z\} \rangle = S$ olur ki, bu da S nin bir noble yarıgrup olması ile çelişir. Böylece, her bir $s, t \in S \setminus \{z\}$ için

$$\text{ya } st = s \text{ ya } st = t \text{ ya da } st = z$$

olmak zorundadır.

Lemma 4.2. $S, S \setminus \{z\}$ tarafından doğurulan bir noble yarıgrup olsun. O zaman $g, h \in S \setminus \{z\}$ vardır öyle ki $gh = z$ olur.

İspat. $S, S \setminus \{z\}$ tarafından doğurulan bir noble yarıgrup olsun. Kabul edelim ki $gh = z$ olacak şekilde $g, h \in S \setminus \{z\}$ var olmasın. Bu durumda $S \setminus \{z\}, S$ yi doğuramayacağından sonuç açıktır. ■

Lemma 4.3. $S, S \setminus \{z\}$ tarafından doğurulan bir noble yarıgrup olsun. O zaman $z^2 = z$ olur. Ayrıca her $s \in S \setminus \{z\}$ için $\langle S \setminus \{s\} \rangle \neq S$ ya da yalnız bir $s \in S \setminus \{z\}$ için $\langle S \setminus \{s\} \rangle = S$ olur ki bu durumda da S bir band olur.

İspat. Giraldes ve Howie (1985), Lemma 3.4 ve Theorem 3.7'ye bakınız. ■

Tanım 4.4. S bir sonlu yarıgrup olmak üzere eğer $r_2(S) = |S|$ ise S ye **royal yarıgrup** denir. Diğer bir ifade ile bir sonlu yarıgrup S nin royal yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul S nin kendisi dışında doğuray kümesi olmamasıdır. Bu durumda $\forall s \in S$ için $\langle S \setminus \{s\} \rangle \neq S$ olur.

Örnek 4.5. S bir sonlu sol sıfır yarıgrup olsun ve $X \subseteq S$ de S nin bir doğuray kümesi olsun. O zaman $S = \langle X \rangle$ olduğundan her bir $s \in S$ için

$$s = x_1 x_2 \cdots x_n$$

olacak şekilde $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ vardır. Diğer taraftan da S bir sol sıfır yarıgrup olduğundan

$$x_1 x_2 \cdots x_n = (x_1)(x_2 \cdots x_n) = x_1$$

olup $s = x_1 \in X$ olur. Böylece $S \subseteq X$ olup $S = X$ olur. Dolayısıyla her sonlu sol sıfır yarıgrup royal yarıgruptur.

Benzer şekilde gösterileceği üzere her sonlu sağ sıfır yarıgrup da bir royal yarıgruptur. Diğer bir ifade ile S bir sol veya sağ sıfır yarıgrup ise $r_2(S) = |S|$ olur.

Tanım 4.6. I boş olmayan bir küme ve $\leq$ bağıntısı da I üzerinde bir sıralama bağıntısı olsun. Eğer $\forall i, j \in I$ için $i \leq j$ veya $j \leq i$ ise $(I, \leq)$ ikilisine bir **zincir** denir. Eğer $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ şeklinde sonlu (n elemanlı) bir zincir ise I nın elemanları

$$i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$$

şeklindedir.

$(I, \leq)$ bir sonlu zincir ve $\forall i \in I$ için S_i bir sonlu sol ya da sağ sıfır yarıgrup olmak üzere

$$S = \bigcup_{i \in I} S_i$$

kümesini ele alalım. $a, b \in S$ için $a \in S_i$ ve $b \in S_j$ olacak şekilde $i, j \in I$ mevcut olup S üzerinde bir ikili işlem

$$ab = \begin{cases} a & i \leq j \\ b & j \not\leq i \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu işlem ile S açıkça bir yarıgrup olur. Gerçekten de S üzerinde tanımlanan bu ikili işlemin iyi tanımlı olduğu açık olup S nin yarıgrup olduğunu göstermek için ikili işlemin birleşme özelliğini göstermek yeterlidir.

$a, b, c \in S$ olsun. O zaman $a \in S_i$ ve $b \in S_j$ ve $c \in S_k$ olacak şekilde $i, j, k \in I$ var olup i, j ve k için 6 farklı sıralama $i \leq j \leq k$, $i \leq k \leq j$, ..., $k \leq j \leq i$ vardır. Bu durumda

$$i \leq j \leq k \Rightarrow a(bc) = ab = a \text{ ve } (ab)c = ac = a \text{ olup } a(bc) = (ab)c$$

$$i \leq k \leq j \Rightarrow a(bc) = ac = a \text{ ve } (ab)c = ac = a \text{ olup } a(bc) = (ab)c$$

$$j \leq i \leq k \Rightarrow a(bc) = ab = b \text{ ve } (ab)c = bc = b \text{ olup } a(bc) = (ab)c$$

$$j \leq k \leq i \Rightarrow a(bc) = ab = b \text{ ve } (ab)c = bc = b \text{ olup } a(bc) = (ab)c$$

$$k \leq i \leq j \Rightarrow a(bc) = ac = c \text{ ve } (ab)c = ac = c \text{ olup } a(bc) = (ab)c$$

$$k \leq j \leq i \Rightarrow a(bc) = ac = c \text{ ve } (ab)c = bc = c \text{ olup } a(bc) = (ab)c$$

olur. Buradan görüleceği üzere $i_1, i_2, \dots, i_k \in I$ farklı elemanlar olmak üzere $a_j \in S_j$ ($\forall j \in \{i_1, \dots, i_k\}$) ve $\min\{i_1, \dots, i_k\} = m$ olmak üzere

$$a_{i_1} \cdots a_{i_k} = a_m$$

olur. Bu yarıgruba S_i lerin zinciri denir ve $S = (S_i, I)$ ile gösterilir.

Örnek 4.7. $I = \{1 < 2 < 3\}$ bir zincir ve $S_1 = \{a, b, c\}$, $S_2 = \{u, v\}$ ve $S_3 = \{x, y, z\}$ sol sıfır yarıgruplar olmak üzere S_i lerin zinciri $S = (S_i, I)$ yarıgrupunu göz önüne alalım. O zaman $a, b, c, u, v, x, y, z \in S$ için

$$\begin{aligned} auvxbzyb &\equiv a(uv)xb(zy)b = auxbzb \equiv au(xb)zb = aubzb \equiv aub(zb) \\ &= aubbb \equiv (au)(bb) = ab = a \end{aligned}$$

ve ayrıca,

$$uvxyyzbacauv \equiv (uv)(xyyz)(baca)(uv) = uxbu \equiv ux(bu) = uxb = b$$

olur.

Teorem 4.8. I bir zincir ve her $i \in I$ için S_i ler birer sol sıfır yarıgrup olsun. O zaman S_i lerin zinciri $S = (S_i, I)$ yarıgrubu bir royal yarıgrup olur.

İspat. Bir $X \subseteq S$ için $S = \langle X \rangle$ olsun. $a \in S$ için $a \in S_i$ olacak şekilde bir $i \in I$ vardır. Ayrıca $S = \langle X \rangle$ olduğundan

$$a = x_1 x_2 \cdots x_n$$

olacak şekilde $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ vardır. $X \subseteq S$ olduğundan $x_k \in S_{i_k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) olacak şekilde $i_k \in I$ vardır. Her $i, j \in I$ için $S_i S_j = S_j S_i$ olduğundan genelliği bozmaksızın $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca eğer herhangi bir $k = 1, 2, \dots, n-1$ için $i_k = i_{k+1}$ iken $x_k x_{k+1} = x_k$ ($\in S_{i_k}$) olduğundan benzer şekilde genelliği bozmaksızın her $k = 1, 2, \dots, n-1$ için $i_k \neq i_{k+1}$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda

$$\min\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = i_1$$

oldüğünden $x_1 x_2 \cdots x_n = x_1$ olup $a = x_1 \in X$ olur. Böylece, $S \subseteq X$ olup $S = X$ olur. Dolayısıyla S bir royal yarıgruptur. ■

Benzer şekilde sağ sıfır yarıgrupların bir zinciri de bir royal yarıgruptur. Ayrıca tersi de doğrudur. Yani her royal yarıgrup ya sol sıfırların ya da sağ sıfırların bir zinciridir. Burada ifade edilen bu durumun ispatını ileride vereceğiz.

Tanım 4.9. Y bir yarıgrup olsun. Daha önce tanımlandığı üzere, eğer $\forall a \in Y$ için $a^2 = a$ ve $\forall a, b \in Y$ için $ab = ba$ ise Y yarıgrubuna bir **yarılatis** denir. Y üzerinde bir sıralama bağıntısı $\forall a, b \in Y$ için

$$a \leq b \Leftrightarrow ab = ba = a$$

olarak tanımlansın.

Y bir yarılatış ve $\forall \alpha \in Y$ için S_α bir yarıgrup olsun. Eğer

$$S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$$

ve $\forall \alpha, \beta \in Y$ için $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$ olacak şekilde bir yarıgrup ise S ye S_α ların bir yarılatışı denir ve

$$S = \mathfrak{Y}[Y; \{S_\alpha : \alpha \in Y\}]$$

olarak gösterilir.

Lemma 4.10. Her royal yarıgrup bir band olur.

İspat. S bir royal yarıgrup olsun. O zaman $r_2(S) = |S|$ olur. Eğer bir $a \in S$ için $a \neq a^2$ olsaydı $A = S \setminus \{a^2\}$ alındığında $|A| = |S| - 1$ ve $aa = a^2 \in \langle A \rangle = S$ olur ki bu da S nin royal yarıgrup olmasıyla çelişir. O halde her $a \in S$ için $a = a^2$ olup S nin tüm elemanları idempotent olur. ■

S bir band değil ise S royal yarıgrup olmak zorunda değildir. Clifford-McLean Teoremi gereği her band dikdörtgensel bandların bir yarılatışı olur. Yani S bir band ise

$$S = \mathfrak{Y}[Y; \{E_\alpha : \alpha \in Y\}]$$

olacak şekilde bir Y yarılatışı ve her $\alpha \in Y$ için E_α dikdörtgensel bandları vardır. (Howie (1995), Theorem 4.4.1'e bakınız bakınız. ■)

Lemma 4.11. $S = \mathfrak{Y}[Y; \{E_\alpha : \alpha \in Y\}]$ bir royal ya da noble band olsun. O zaman her $\alpha \in Y$ için E_α ya bir sol sıfır ya da bir sağ sıfır yarıgruptur.

İspat. **RZ** ile sağ sıfır yarıgrupların sınıfını ve **LZ** ile sol sıfır yarıgrupların sınıfını gösterelim. Kabul edelim ki bazı E_α lar **RZULZ** ye ait olmasın. O zaman E_α , her $e_{ij}, e_{kl} \in E_\alpha$ için

$$e_{ij}e_{kl} = e_{il}$$

olacak şekilde bir 2×2 dikdörtgensel bandı $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ kümesini içerir. Böylece $e_{12} = e_{11}e_{22}$ ve $e_{21} = e_{22}e_{11}$ olduğundan $\langle S \setminus \{e_{12}, e_{21}\} \rangle = S$ olur. Bu durumda da $r_2(S) \leq |S| - 2$ olur ki bu da S nin royal ya da noble oluşu ile çelişir. Bu yüzden her E_α ya bir sol sıfır ya da bir sağ sıfır yarıgruptur. ■

Lemma 4.12. $S = \mathfrak{Y}[Y; \{E_\alpha : \alpha \in Y\}]$ royal yarıgrup ise Y bir zincirdir.

İspat. Kabul edelim ki Y bir zincir olmasın. O zaman Y de bir dallanma noktası (branch-point) γ vardır. Yani $\alpha\beta = \gamma$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in Y$ vardır. Bu durumda $E_\alpha E_\beta \subseteq E_{\alpha\beta} = E_\gamma$ olur. Böylece $x \in E_\alpha, y \in E_\beta$ için $z = xy$ ise $z \in E_\gamma$ olup hem $x \neq z$ hem de $y \neq z$ olur. Bu durumda $\langle S \setminus \{z\} \rangle = S$ olur ki bu da S nin royal yarıgrup olması ile çelişir. Böylece Y bir zincir olmak zorundadır. ■

Teorem 4.13. Sıfırdan farklı tüm kardinal sayılarının sınıfı Ω olsun. $(Y, \leq)$ bir zincir ve $M : Y \rightarrow \Omega, H : Y \rightarrow \{R, L\}$ birer fonksiyon olsun. $\forall \alpha \in Y$ için eğer $H(\alpha) = R$ ise $E_\alpha, M(\alpha)$ elemanlı bir sağ sıfır yarıgrup ve eğer $H(\alpha) = L$ ise $E_\alpha, M(\alpha)$ elemanlı bir sol sıfır yarıgrup olsun. O zaman $S = \bigcup \{E_\alpha : \alpha \in Y\}$ kümesi üzerinde tanımlanan

$$xy = yx = y \quad (x \in E_\alpha, y \in E_\beta \text{ ve } \alpha > \beta)$$

çarpma işlemi ile S bir royal yarıgrup olur. Bu yarıgrup $S = \text{Roy}(Y, M, H)$ ile gösterilir. Tersine her royal yarıgrup ya sol sıfırların ya da sağ sıfırların bir zinciridir.

İspat. Açıkça, $S = \cup\{E_\alpha : \alpha \in Y\}$ üzerinde tanımlanan çarpma ile royal yarıgruptur.

Tersine S bir royal yarıgrup olsun. O zaman Lemma 4.10 dan S bir band olup Clifford-McLean Teoremi gereği

$$S = \mathfrak{Y}[Y; \{E_\alpha : \alpha \in Y\}]$$

dikdörtgensel bandların bir yarılatısı olur. Lemma 4.11 den de her $\alpha \in Y$ için $E_\alpha \in \mathbf{RZ} \cup \mathbf{LZ}$ olur. Ayrıca Lemma 4.12 den Y bir zincirdir. $\forall \alpha \in Y$ için $M : Y \rightarrow \Omega$ ve $H : Y \rightarrow \{R, L\}$ fonksiyonlarını

$$M(\alpha) = |E_\alpha| \quad \text{ve} \quad H(\alpha) = \begin{cases} R & E_\alpha \in \mathbf{RZ} \text{ ise} \\ L & E_\alpha \in \mathbf{LZ} \text{ ve } |E_\alpha| > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

Eğer herhangi iki $x, y \in S$ için $xy \neq x$ ve $xy \neq y$ olsaydı $\langle S \setminus \{xy\} \rangle = S$ olur ki bu da S nin royal yarıgrup olması ile çelişir. Dolayısıyla herhangi iki $x, y \in S$ için $xy = x$ ya da $xy = y$ olur. Herhangi iki $x, y \in S$ için $x \in E_\alpha$ ve $y \in E_\beta$ olsun. Genelliği bozmaksızın kabul edelim ki $\alpha > \beta$ olsun. O zaman $\alpha\beta = \beta$ olup

$$E_\alpha E_\beta \subseteq E_\beta \quad \text{ve} \quad E_\beta E_\alpha \subseteq E_\beta$$

olduğundan $xy = yx = y$ olur. ■

Lemma 4.14. Bir royal yarıgrubun her alt yarıgrubu da royaldır.

İspat. S bir royal yarıgrup ve $T \not\leq S$ olsun. Kabul edelim ki T bir royal yarıgrup olmasın. O zaman $\langle X \rangle = T$ olacak şekilde bir $X \subsetneq T$ mevcuttur. Bu durumda

$$S = T \cup (S \setminus T) = \langle X \rangle \cup (S \setminus T) \subseteq \langle X \rangle \cup \langle S \setminus T \rangle \subseteq \langle X \cup (S \setminus T) \rangle \subseteq S$$

olduğundan $S = \langle X \cup (S \setminus T) \rangle$ olur. Bu durumda

$$|X \cup (S \setminus T)| \leq |X| + |S \setminus T| \leq |T| - 1 + |S \setminus T| \leq |S| - 1$$

olur ki bu S nin royal yarıgrup olması ile çelişir. Böylece T royal yarıgruptur. ■

Not. Eğer bir k elemanlı $V \subseteq S$ kümesi bağımlı ise her $|S| \geq l > k$ için l elemanlı alt kümelerden en az biri bağımlı olur. Gerçekten de S nin V yi içeren l elemanlı U alt kümesi bağımlıdır.

Teorem 4.15. $|S| \geq 2$ olmak üzere S bir sonlu yarıgrup olsun. Eğer

- i) S bir band değil ise $r_1(S) = 1$,
- ii) S bir band ise fakat royal yarıgrup değilse $r_1(S) = 2$,
- iii) S bir royal yarıgrup ise $r_1(S) = |S|$

olur.

İspat. i) Eğer S bir band değil ise $a^2 \neq a$ olacak şekilde en az bir $a \in S$ vardır. O zaman $U = \{a, a^2\}$ alınır ise U kümesi bağımsız değildir. Çünkü $U \setminus \{a^2\} = \{a\}$ olup $a^2 \in \langle U \setminus \{a^2\} \rangle = \langle a \rangle$ olur. Dolayısıyla U bağımlı olup $r_1(S) \neq 2$ olur. Böylece $r_1(S) = 1$ olur.

ii) S bir band olsun. Eğer $a, b \in S$ ve $a \neq b$ ise $\{a, b\}$ kümesi bağımsızdır. Eğer $b \in \langle a \rangle$ olsaydı $b = a^m$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ mevcut olur. S bir band olduğundan $a^2 = a$ olup $\langle a \rangle = \{a\}$ olur. Böylece $a^m = a$ ve $b = a$ olur ki bu da $a \neq b$ olmasıyla çelişir. O zaman $r_1(S) \geq 2$ olur. S bir band olduğundan S, E_α ($\alpha \in Y$) dikdörtgensel bandlarının bir Y yarılatısidir. Önce kabul edelim ki Y bir zincir olmasın. O zaman $\alpha\beta < \alpha$, $\alpha\beta < \beta$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in Y$ vardır. Eğer $x \in E_\alpha$ ve $y \in E_\beta$ ise $\{x, y, xy\}$ kümesinin kardinalitesi 3 olup bağımsız değildir. Böylece $r_1(S) \leq 2$ olup $r_1(S) = 2$ olur.

Şimdi de Y nin bir zincir olduğunu kabul edelim. Eğer E_α dikdörtgensel bandlarının arasında $|C_\alpha|, |D_\alpha| \geq 2$ olacak şekilde bir $E_\alpha = C_\alpha \times D_\alpha$ “öz” dikdörtgensel bandı varsa $c_1, c_2 \in C_\alpha$ ve $d_1, d_2 \in D_\alpha$ olmak üzere bağımsız olmayan bir $\{(c_1, d_1), (c_2, d_2), (c_1, d_2)\}$ kümesi vardır. Buradan $r_1(S) = 2$ olur. Yani bir S bandı için Y bir zincir ve E_α bir sol ya da sağ sıfır yarıgrup olmazsa $r_1(S) = 2$ olur.

Son olarak, S , her biri sağ ya da sol sıfır olan yarıgrupların bir $Z_1 < Z_2 < \dots < Z_m$ ($m \geq 1$) zincirinin birleşimi ve $Z_i Z_j \subseteq Z_{\min\{i, j\}}$ olsun. Eğer $i > j$, $x \in Z_i$ ve $y \in Z_j$ ise $xy \in Z_j$ olur. Eğer $xy \neq y$ ise $\{x, y, xy\}$ kümesi bağımsız değildir ve bu yüzden $r_1(S) = 2$ olur. Benzer şekilde $yx \neq y$ ise $r_1(S) = 2$ olur. Sonuç olarak S bir band fakat royal değilse $r_1(S) = 2$ olur.

iii) $|S| = m$ sonlu olsun. S bir royal yarıgrup olduğundan $r_2(S) = |S|$ olur. O halde $\langle S \rangle = S$ olup S bağımsızdır. Bu durumda $r_1(S) = |S|$ olur. ■

$X_k = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ($1 \leq k \leq n$) olsun ve $CL_n = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ olsun. Bir işlem olarak küme teorisinden birleşim ' $\cup$ ' göz önüne alınsın. Bu işleme göre CL_n idempotentlerin değişmeli yarıgrubudur ve X_n , CL_n nin sıfır elemanıdır. CL_n , n dereceli bir zincirdir.

Lemma 4.16. CL_n , n elemanlı bir zincir olsun. O zaman $r_1(CL_n) = r_2(CL_n) = r_3(CL_n) = r_4(CL_n) = r_5(CL_n) = n$ olur.

İspat. Her $X_i, X_j \in CL_n$ için $X_i X_j = X_{\min\{i,j\}}$ olduğundan CL_n minimum doğuray kümesi kendisi olan bir band olur. Böylece $r_2(CL_n) = n$ olup CL_n bir royal yarıgrup olur. Dolayısıyla, Teorem 4.15 den $r_1(CL_n) = n$ olur. Ayrıca,

$$n = r_1(CL_n) \leq r_2(CL_n) \leq r_3(CL_n) \leq r_4(CL_n) \leq r_5(CL_n) \leq |CL_n| = n$$

olduğundan $r_3(CL_n) = r_4(CL_n) = r_5(CL_n) = n$ olur. ■

İki sonlu zincir $CL_m = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ve $CL_n = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ nin direkt çarpımı $CL_{m,n} = CL_m \times CL_n$ yi göz önüne alalım.

Lemma 4.17. CL_m ve CL_n sırasıyla $m \geq 2$ ve $n \geq 2$ elemanlı iki zincir olsun. Eğer $D = CL_{m,n} = CL_m \times CL_n$ şeklindeki direkt çarpım yarıgrubu ise $r_1(D) = 2$ ve $r_2(D) = r_3(D) = m + n - 1$ olur.

İspat. Gösterimde kolaylık için $CL_m = \{1, 2, \dots, m\}$ ve $CL_n = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. Bu gösterimler ile $D = CL_{m,n} = CL_m \times CL_n$ direkt çarpım yarıgrubu

$$(i, j)(k, l) = (\max\{i, k\}, \max\{j, l\})$$

şeklinde verilsin. Bu durumda

$$G = \{(1,1)\} \cup \{(i,1): 2 \leq i \leq m\} \cup \{(1,j): 2 \leq j \leq n\}$$

kümesi D için aşikar bir doğuray kümesidir. Ayrıca, G bağımsız ve minimum doğuray kümesi olup D nin her doğuray kümesi G yi içermek zorundadır. Böylece

$$r_2(D) = 1 + (m - 1) + (n - 1) = m + n - 1$$

olur. $r_2(D) < |D|$ olduğu için D royal yarıgrup değildir. Diğer taraftan D nin her elemanı idempotent olup Teorem 4.15 den $r_1(D) = 2$ olur.

D nin herhangi bir doğuray kümesi U olsun. O zaman $G \subseteq U$ olup eğer bir $(k, l) \in U \setminus G$ mevcut olsaydı

$$(k, l) = (k, 1)(1, l) \in \langle G \rangle$$

olur. Dolayısıyla U bağımlı olur. Böylece $r_3(D) = m + n - 1$ olur. ■

$n \geq 2$ için $Z_n = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ olsun. Z_n üzerinde bir ikili işlem $x_i x_j = x_0$ ($1 \leq i \leq n - 1$) şeklinde tanımlanır ise Z_n bir yarıgrup olup buna (n elemanlı) **sıfır yarıgrup** denir. Burada x_0 , Z_n in sıfır elemanıdır. Z_n değişmelidir fakat bir band değildir.

Teorem 4.18. Z_n , n elemanlı sıfır yarıgrup olsun. O zaman $r_1(Z_n) = 1$, $r_2(Z_n) = r_3(Z_n) = r_4(Z_n) = n - 1$ ve $r_5(Z_n) = n$ olur.

İspat. Z_n bir band olmayıp Teorem 4.15 den $r_1(Z_n) = 1$ olduğu elde edilir.

S bir yarıgrup olsun. $S = \langle X \rangle$ ise $S \setminus S^2 \subseteq X$ olur. Eğer S bir sıfır yarıgrup ise, yani $\forall x_1, x_2 \in S$ için $x_1 x_2 = 0$ ise $S^2 = 0$ olup $S \setminus S^2 = S \setminus \{0\}$ olur. O halde $S \setminus \{0\} \subseteq X$ olup $\langle S \setminus \{0\} \rangle = S$ olur. $S \setminus \{0\}$ bir minimum doğuray kümesi olup $r_2(S) = |S| - 1$ olur.

Z_n , $n - 1$ eleman tarafından doğuruluyor olup $r_2(Z_n) = n - 1$ olduğundan Z_n noble yarıgruptur. $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ kümesinin hem en geniş bağımsız küme hem de en geniş bağımsız doğuray kümesi olduğu açıktır ve bu yüzden $r_3(Z_n) = r_4(Z_n) = n - 1$ olur.

Son olarak, Z_n yi doğurmayan $n - 1$ elemanlı en az bir alt küme var olduğundan (x_0 ı içeren herhangi alt küme) $r_5(Z_n) = n$ olduğu elde edilir. ■

Teorem 4.19. S bir sonlu yarıgrup ve S nin en geniş öz alt yarıgrubu mevcut olsun. Eğer S nin en geniş öz alt yarıgrubu V ise $r_5(S) = |V| + 1$ olur.

İspat. S bir sonlu yarıgrup ve V de S nin en geniş öz alt yarıgrubu olsun. O zaman $\langle V \rangle = V$ olur. Ayrıca, $a \in S \setminus V \neq \emptyset$ olup $\langle V \cup \{a\} \rangle \neq V$ olur. Böylece $V \subseteq \langle V \cup \{a\} \rangle \subseteq S$ olup V en geniş öz alt yarıgrup olduğundan $\langle V \cup \{a\} \rangle = S$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $r_5(S) = |V| + 1$ olur. ■

$X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ üzerinde $\alpha = (1\ 2\ \dots\ n)$, $\beta = (1\ 2)$, $\gamma = \|(1\ 2)\|$ olsun.

Teorem 4.20. $n \geq 3$ için $S_n = \langle \alpha, \beta \rangle$ olup $rank(S_n) = 2$ olur.

İspat. Teorem 2.5.7 den $S_n = \langle \alpha, \beta \rangle$ olduğunu biliyoruz. Eğer bir grup devirli değilse grup rankı en az 2 olup (grup rankı 1 olsa grup devirli olmak zorundadır) $2 \leq rank_g(S_n)$ ve $S_n = \langle \alpha, \beta \rangle$ olup $rank_g(S_n) = 2$ olur. S_n sonlu olduğundan grup ve yarıgrup rankı eşittir. Bu nedenle $rank(S_n) = 2$ olur. ■

Teorem 4.21. $n \geq 3$ için $T_n = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ olup $\text{rank}(T_n) = 3$ olur.

İspat. $n = 1 \Rightarrow \text{rank}(T_n) = 1$ ve $n = 2 \Rightarrow \text{rank}(T_n) = 2$ olur. $T_n = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ olduğu iyi bilinmektedir. Dolayısıyla $\text{rank}(T_n) \leq 3$ olur. Bir $X \subseteq T_n$ için $T_n = \langle X \rangle$ olsun. $S_n \leq T_n$ ve $T_n \setminus S_n \triangleleft T_n$ olup $S_n \cap X = Y$ ise $S_n = \langle Y \rangle$ olur. $\text{rank}(S_n) = 2$ olduğundan $|Y| \geq 2$ olur. $X \setminus Y = \emptyset$ olsa $X = Y$ olur. O zaman $\langle X \rangle = \langle Y \rangle$ olup $T_n = S_n$ çelişkisi elde edilir. O halde $X \setminus Y \neq \emptyset$ olur. $|X \setminus Y| \geq 1$ olmalıdır. $|X| = |Y| + |X \setminus Y| \geq 2 + 1 = 3$ ise $|X| \geq 3$, yani $\text{rank}(T_n) \geq 3$ olur. Dolayısıyla $\text{rank}(T_n) = 3$ olur. ■

Tanım 4.22. Bir permütasyonun transpozisyonlarının çarpımı olarak yazılışındaki transpozisyonların sayısı çift ise bu permütasyona **çift permütasyon**, aksi halde **tek permütasyon** adı verilir. S_n simetrik grubunun çift permütasyonlardan oluşan alt grubuna **alterne grup** adı verilir ve A_n ile gösterilir. Tek permütasyonlardan oluşan alt kümesi de B_n ile gösterilir ve bir yarıgrup değildir.

Teorem 4.23. Eğer $n \geq 3$ ise $r_5(T_n) = n^n - (1/2)n! + 1$ olur.

İspat. $ST_n = T_n \setminus S_n = \{ \alpha \in T_n : |\text{im}(\alpha)| \leq n - 1 \}$ olsun. $S_n = A_n \cup B_n$ olup S_n nin en büyük alt grubu A_n ($|A_n| = \frac{n!}{2}$) olur.

$V = ST_n \cup A_n$ olsun. O zaman V , T_n nin bir alt yarıgrubu olup

$$|V| = (n^n - n!) + \frac{n!}{2} = n^n - \frac{n!}{2}$$

olur. Şimdi V nin T_n nin en geniş öz alt yarıgrubu olduğunu göstermeliyiz. Bunun için herhangi bir $U \not\subseteq T_n$ için $U_1 = U \cap S_n$ (U bir alt yarıgruptur ve aynı zamanda S_n nin bir alt grubudur.) ve $U_2 = U \cap ST_n$ olsun.

$$U_1 = A_n \Rightarrow U = U_1 \cup U_2 = A_n \cup U_2 \subseteq A_n \cup ST_n \text{ ve}$$

$$U_1 = S_n \Rightarrow U_2 \neq ST_n \text{ (aksi takdirde } U = T_n \text{ olur)}$$

olur.

$$J_{n-1} = \{ \alpha \in T_n : |\text{im}(\alpha)| = n - 1 \}$$

alalım. $\alpha \in U_2 \cap J_{n-1}$ ise $\langle \{\alpha\} \cup S_n \rangle = T_n$ ve $\langle \{\alpha\} \cup S_n \rangle \subseteq U$ olur. Buradan da $U = T_n$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $U_2 \cap J_{n-1} = \emptyset$ olur. Böylece

$$|J_{n-1}| = |D_{n-1}| = \frac{n(n-1)}{2} n(n-1)!$$

(Burada n , $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfı D_{n-1} deki $\mathcal{L}$ -sınıflarının sayısı; $\frac{n(n-1)}{2}$, D_{n-1} deki $\mathcal{R}$ -sınıflarının sayısı; $(n-1)!$, D_{n-1} deki $\mathcal{H}$ -sınıflarının sayısıdır.)

$$|U| \leq n^n - |J_{n-1}| = n^n - \frac{n(n-1)}{2} n! < n^n - \frac{n!}{2} = |V|$$

olur. Böylece V , T_n nin mümkün en geniş öz alt yarıgrubudur. Dolayısıyla Teorem 4.19 dan $r_5(T_n) = n^n - (1/2)n! + 1$ bulunur. ■



5. MONEJENİK YARIGRUPLARIN RANKLARI

S herhangi bir monojenik yarıgrup olsun. Genel olarak, $r_2(S)$ ve $r_4(S)$ farklıdır. Örneğin, $S = \{0,1,2,3,4,5\} = \mathbb{Z}_6$, 6 elemanlı devirli grup olsun. O zaman $r_2(S) = 1$ olduğu açıktır.

Şimdi $r_4(S) = 2$ olduğunu gösterelim:

Her $a \in \mathbb{Z}_6$ ve $U \subseteq \mathbb{Z}_6$ için $0 \in \langle a \rangle = \{0, a, 2a, \dots\}$ olduğundan $0 \in U \subseteq \mathbb{Z}_6$ ise U bağımlıdır. $1 \in U \subseteq \mathbb{Z}_6$ veya $5 \in U \subseteq \mathbb{Z}_6$ ise $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_6$ ve $\langle 5 \rangle = \mathbb{Z}_6$ olduğundan $U \setminus \{1\} \neq \emptyset$ veya $U \setminus \{5\} \neq \emptyset$ ise U bağımlıdır. Bu nedenler ile $\{2,3,4\}$ kümesinin alt kümelerini incelemek yeterlidir. $U = \{2,3\}$ kümesi bağımsızdır. $U = \{2,3,4\}$ ise $4 \in \langle 2 \rangle \subseteq \langle U \setminus \{4\} \rangle$ olduğundan U bağımlıdır. Dolayısıyla 3 elemanlı alt kümeler bağımlıdır. Daha önce de belirtildiği üzere, eğer bir k elemanlı $V \subseteq S$ kümesi bağımlı ise her $|S| \geq l > k$ için l elemanlı alt kümelerden en az biri bağımlı olur. Böylece $r_4(S) = 2$ olur. ■

Teorem 5.1. T bir S yarı grubunun bir alt yarı grubu ise

$$r_4(T) \leq r_4(S) \quad (1)$$

olur.

İspat. $r_4(T) = n$ olsun. O zaman $|U_0| = n$ ve U_0 bağımsız olacak şekilde bir $U_0 \subseteq T$ vardır. Ayrıca T nin her bağımsız alt kümesi V için $|V| \leq n$ olur. Böylece $T \subseteq S$ olduğundan U_0 , S nin de bir bağımsız alt kümesi olup T de herhangi bağımsız alt küme aynı zamanda S de de bağımsızdır $r_4(S) \geq |U_0| = n = r_4(T)$ olur. ■

Bu eşitsizlik $r_2(S)$ için genelde doğru değildir. Yani $U \subseteq S$ iken $r_2(S) \not\leq r_2(U)$ olabilir.

Örnek 5.2. Daha önce gösterdiği üzere $n \geq 3$ için $T_n = \langle (1\ 2), (1\ 2 \dots n), \|(1\ 2)\| \rangle$ ve $r_2(T_n) = 3$ olur. Özel olarak $S = T_4 = \langle (1\ 2), (1\ 2\ 3\ 4), \|(1\ 2)\| \rangle$ alınırsa $r_2(T_4) = 3$ olduğu görülür. Burada

$$(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2134 \end{pmatrix}, \quad (1\ 2\ 3\ 4) = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2341 \end{pmatrix}, \quad \|(1\ 2)\| = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2234 \end{pmatrix}$$

olur.

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1234 \\ 1111 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 2222 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 3333 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 4444 \end{pmatrix} \right\}$$

şeklinde alınır ise $U \leq T_4 = S$ olur. $\forall \alpha, \beta \in U$ için $\alpha\beta = \beta$ olduğundan U bir sağ sıfır yarıgruptur. Böylece U bir royal yarıgrup olup $r_2(U) = |U| = 4$ olur. Dolayısıyla da $r_2(U) > r_2(T_4)$ olur.

Teorem 5.3. S ve T monoid ise

$$r_4(S \times T) \geq r_4(S) + r_4(T) \quad (2)$$

$$r_3(S \times T) \geq r_3(S) + r_3(T) \quad (3)$$

olur.

İspat. $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ ve $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ sırasıyla S ve T de maksimal bağımsız kümeler ise o zaman

$$\{(s_1, 1), \dots, (s_m, 1), (1, t_1), \dots, (1, t_n)\}$$

$S \times T$ de bir bağımsız küme olup

$$r_4(S \times T) \geq r_4(S) + r_4(T)$$

olur.

$S = \langle A \rangle$ ve $T = \langle B \rangle$ olsun. O zaman her $(s, t) \in S \times T$ için $s = a_1 \cdots a_k$ ve $t = b_1 \cdots b_l$ olacak şekilde $a_1, \dots, a_k \in A$ ve $b_1, \dots, b_l \in B$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} (s, t) &= (a_1 \cdots a_k, b_1 \cdots b_l) \\ &= (a_1 \cdots a_k, 1)(1, b_1 \cdots b_l) \\ &= (a_1, 1)(a_2, 1) \cdots (a_k, 1)(1, b_1) \cdots (1, b_l) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $C = \{(a, 1_T) : a \in A\} \cup \{(1_S, b) : b \in B\}$ olmak üzere $S \times T = \langle C \rangle$ olur. Böylece, benzer şekilde bağımsız doğuray kümeleri düşünülerek, orta rank için

$$r_3(S \times T) \geq r_3(S) + r_3(T)$$

olduğu elde edilir. ■

Tanım 5.4. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer $b, c \in S$ için $a = bc$ olduğunda $a = b$ veya $a = c$ oluyor ise a ya **indirgenemez eleman** denir. Diğer bir ifade ile $T = S \setminus \{a\}$ ve $T^2 = \{xy : x, y \in T\}$ olmak üzere

$$a \text{ indirgenemez} \Leftrightarrow a \notin T^2$$

olur.

Böylece $\langle X \rangle = S$ ise X kümesinin tüm indirgenemez elemanları içerdiği açıktır. Ayrıca, $S^2 = \{ab : a, b \in S\}$ ise $S \setminus S^2 \subseteq X$ olduğunu da hatırlayalım.

Sonuç 5.5. S bir sonlu yarıgrup olsun. $r_5(S) = |S|$ olması için gerek ve yeter koşul S nin en az bir indirgenemez eleman içermesidir.

İspat. $(\Rightarrow)$ $|S| = 1$ ise sonuç açıktır. $r_5(S) = |S| > 1$ olsun. O halde $|U| = |S| - 1$ ve $\langle U \rangle \neq S$ olacak şekilde en az bir $U \subseteq S$ vardır. $|S \setminus U| = 1$ olup $U = S \setminus \{a\}$ olsun. Bu durumda $(S \setminus U) = \{a\}$ olur. Ayrıca $\langle U \rangle = U$ olduğundan a indirgenemez bir elemandır. Dolayısıyla, S indirgenemez bir eleman içerir.

$(\Leftarrow)$ $a \in S$ bir indirgenemez eleman olsun. O zaman $\langle S \setminus \{a\} \rangle = S \setminus \{a\}$ olduğundan $S \setminus \{a\} \leq S$ olur. (Yani $S \setminus \{a\}$ kümesi bir alt yarıgruptur.) $U \subseteq S$ ve $a \notin U$ olsun. O zaman $U \subseteq S \setminus \{a\}$ olup $\langle U \rangle \subseteq \langle S \setminus \{a\} \rangle = S \setminus \{a\} \neq S$ olduğundan $\langle U \rangle \neq S$ olur. Böylece $r_5(S) > |S| - 1$ olup $r_5(S) = |S|$ eşitliği elde edilir. ■

Açıkça görüldüğü üzere $M(m, n) = \langle a \mid a^m = a^{m+n} \rangle$ tek doğuraylı yarıgrubunun bir tek indirgenemez elemanının olması için gerek ve yeter koşul $m > 1$ ve $n > 2$ olmasıdır.

Örnek 5.6. Sonlu tek doğuraylı yarıgrup $M(m, n) = \langle a \mid a^m = a^{m+n} \rangle$ bir tek indirgenemez elemana sahip ise

$$r_5(M(m, n)) = m + n - 1 \quad (m > 1)$$

olur. Gerçekten, $M(m, n) = \{a, a^2, \dots, a^{m+n-1}\}$ olup her $U \subseteq M(m, n) \setminus \{a\}$ için $a \notin \langle U \rangle$ olduğundan $M(m, n) \setminus \{a\}$ en geniş alt yarıgrup olup $r_5(M(m, n)) = |M(m, n)| = m + n - 1$ olur. Eğer $m = 1$ ise o zaman $M(m, n)$ devirli grup $\mathbb{Z}_n$ olur.

Teorem 5.7. $\mathbb{Z}_n$, n dereceli bir devirli grup olsun. ($n \geq 2$) O zaman p , n nin en küçük asal böleni olmak üzere

$$r_5(\mathbb{Z}_n) = n/p + 1$$

olur.

İspat. $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_n$ toplamsal grubunun maksimal alt grubunu bulalım. p , n yi bölen en küçük asal sayı olmak üzere $V = \langle p \rangle$ olsun. O zaman

$$V = |\langle p \rangle| = n/p$$

olur. Ayrıca $H = \langle m \rangle$ de $\mathbb{Z}_n$ in başka bir öz alt yarigrubu olsun. Bu durumda

$$(m, n) = d \neq 1$$

olur (aksi halde $H = \langle m \rangle = \mathbb{Z}_n$ olurdu). Böylece $p \leq d$ olduğundan

$$|H| = |\langle m \rangle| = \frac{n}{d} \leq \frac{n}{p} = |V|$$

olur. Böylece $V = \langle p \rangle$, $\mathbb{Z}_n$ in maksimal alt grubudur. Teorem 4.19 dan

$$r_5(\mathbb{Z}_n) = n/p + 1$$

bulunur. ■

$A = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere SL_n , A kümesinin tüm boş olmayan alt kümelerinin kümesi olsun. SL_n üzerinde bir ikili işlem kümelerin birleşimi ' $\cup$ ' olarak tanımlanır ise SL_n , $2^n - 1$ elemanlı bir yarılatıdır. Bu yarılatı A üzerindeki **serbest yarılatı** olarak adlandırılır.

Teorem 5.8. $n \geq 2$ için $r_1(SL_n) = 2$, $r_2(SL_n) = n$, $r_3(SL_n) = n$ ve $r_5(SL_n) = 2^n - 1$ olur.

İspat. Açıkça $X = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ kümesinin elemanları SL_n nin tüm indirgenemez elemanları olduğundan SL_n nin tüm doğuray kümeleri X kümesini içerir. Ayrıca, X in bir doğuray kümesi olduğu da açıktır. Böylece X kümesi SL_n nin minimum doğuray kümesi olur. Dolayısıyla $r_2(SL_n) = n$ olur.

SL_n bir band ve $r_2(SL_n) = n \neq |SL_n| = 2^n - 1$ olduğundan SL_n bir royal yarıgrup değildir. Böylece Teorem 4.15 den $r_1(SL_n) = 2$ eşitliği elde edilir. X kümesinin SL_n nin bir doğuray kümesi olması dışında bağımsız olduğu da açıktır. Diğer bir ifade ile X bağımsız doğuray kümesidir. Kabul edelim ki Y , SL_n için en az $n + 1$ elemanlı bir doğuray kümesi olsun. O zaman Y kümesi X kümesini içerir. Bu durumda $Y = X \cup Z$ olacak şekilde bir $Z \in SL_n$ mevcut olur. Dolayısıyla

$$Z \in SL_n = \langle X \rangle = \langle Y \setminus Z \rangle$$

oldüğünden Y bağımsız değildir. Böylece, $r_3(SL_n) = n$ olur.

SL_n nin (tüm) indirgenemez elemanları kümesi $X = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ olup boş değildir. Dolayısıyla Sonuç 5.5 den $r_5(SL_n) = |SL_n| = 2^n - 1$ elde edilir. ■

Tanım 5.9. $[x]$ notasyonu, $x \leq n$ olan en küçük tamsayı n anlamında x in tamsayısal kısmını belirtmek için kullanılır. ($[x] = n \Leftrightarrow x \leq n < x + 1$)

Şimdi $r_4(SL_n)$ i ele alalım. Her $1 \leq r \leq n$ için $A = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin r elemanlı alt kümelerinin kümesi P_r olsun. O zaman açıkça görüldüğü üzere P_r kümesi bağımsızdır ve ayrıca $|P_r| = \binom{n}{r}$ olur. Böylece, $r_4(SL_n)$ için ilk tahmin $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ dereceli olan $P_{\lfloor n/2 \rfloor}$ olacaktır. Gerçekten de

$$r_4(SL_n) \geq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

olduğu açıktır.

Ancak, daha iyi bir sınır bulmak mümkündür. Örneğin, $n = 7$ alırsak P_4 de $\binom{7}{4} = 35$ alt küme var; ama üç tek alt küme $1, 2, 3$ ekleyebiliriz ve yine de bağımsız bir küme elde ederiz. Genel olarak $n = 2m$ şeklinde bir çift tamsayı ise veya $n = 2m - 1$ şeklinde bir tek tamsayı ise $P_m \cup \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{m-1\}\}$ kümesi bağımsızdır. Dolayısıyla aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 5.10. SL_n , $n \geq 1$ serbest yarılatis olsun. O zaman, $n = 2m$ şeklinde bir çift tamsayı ise

$$r_4(SL_n) \geq \binom{2m}{m} + m - 1$$

ve $n = 2m - 1$ şeklinde bir tek tamsayı ise

$$r_4(SL_n) \geq \binom{2m-1}{m} + m - 1$$

olur. ■

Tanım 5.11. $[x]$ notasyonu, $n \leq x$ olan en büyük tamsayı n anlamında x in tamsayısal kısmını belirtmek için kullanılır. ($[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$)

Teorem 5.12. $m > 1$ ve $n > 1$ için $S = M(m, n) = \langle a \mid a^{m+n} = a^m \rangle$ olsun. Ayrıca, $\pi(n)$, n nin farklı asal çarpanlarının sayısı olsun.

Eğer $m \neq 3$ ya da $n > 2$ ve $n, 2$ nin bir kuvveti değil ise

$$r_4(S) = \max \left\{ \pi(n), \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right\}$$

olur. Eğer $m = 3$, $n > 1$ ve $n, 2$ nin bir kuvveti ise

$$r_4(S) = \max \left\{ \pi(n), \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right\} + 1 = 2$$

olur.

İspat. $m > 1$ ise o zaman açıkça $\left\{ a^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, \dots, a^{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1} \right\}$ bağımsızdır ve bu yüzden $r_4(S) \geq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ olur. $n > 1$ olduğunu varsayalım. $K_a = \{a^m, \dots, a^{m+n-1}\}$ devirli grubu S nin bir alt yarigrubudur ve ayrıca (1) den dolayı $r_4(S) \geq r_4(K_a)$ olur.

$p_1, \dots, p_k$ farklı asal sayılar olmak üzere her $i = 1, 2, \dots, k$ için $\alpha_i \geq 1$, $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ ve $q_i = n/p_i^{\alpha_i}$ olsun. O zaman, her $i = 1, 2, \dots, k$ için $H_i = \langle a^{q_i} \rangle$, $p_i^{\alpha_i}$ dereceli bir devirli gruplar olmak üzere

$$K_a = H_1 \times \dots \times H_k,$$

olur. (G bir grup ve H de G nin bir alt grubu olsun. $|G| = n$ ve $G = \langle a \rangle$ olsun.

Bir m/n için $H = \langle a^m \rangle$ ise $|H| = \frac{n}{m}$ olur.) Dolayısıyla,

$$r_4(S) \geq r_4(H_1) + \cdots + r_4(H_k) \geq r_2(H_1) + \cdots + r_2(H_k) = k = \pi(n) \quad (4)$$

bulunur. Böylece, $r_4(S) \geq \max\left\{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, \pi(n)\right\}$ olur.

Tersine A , S nin bir bağımsız alt kümesi olsun. Ayrıca

$$|A| > \max\left\{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, \pi(n)\right\}$$

olduğunu varsayalım. O zaman kesinlikle $|A| \geq 2$ ve $a \notin A$ olur. ($a \in A$ ise $\forall 1 \neq k \in \mathbb{Z}^+$ için $a^k \in \langle a \rangle \subseteq \langle A \setminus \{a^k\} \rangle$ olur. Bu ise A nın bağımsızlığı ile çelişir.) e , K_a devirli grubunun birim elemanını gösterebilir. S de her a^r elemanı, e ye eşit olan bir kuvvete sahiptir ve bu yüzden $e \notin A$ olur.

$$1 < i_1 < \cdots < i_s < m \ (s \neq 0) \text{ ve } m \leq j_1 < \cdots < j_t < m+n \ (t \neq 0)$$

için

$$A = \{a^{i_1}, \dots, a^{i_s}, a^{j_1}, \dots, a^{j_t}\}$$

olsun.

$t = 0$ olduğunu varsayalım. O zaman $s = |A| > \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ olur. $i_1 \geq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$ ise

$$i_s \geq i_1 + s - 1 \geq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \geq m$$

çelişkisi elde edilir. Bu yüzden $i_1 \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ olur. Ayrıca $|\{i_1, \dots, i_s\}| = s > \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \geq 1$ olur. Bazı $k, l \in \{1, \dots, s\}$ ve $k > l$ için $i_k \equiv i_l \pmod{i_1}$ olsaydı $i_k - i_l = xi_1 \Rightarrow i_k = i_l + xi_1$ olur.

$$a^{i_l} a^{x_{i_1}} = a^{i_l + x_{i_1}} = a^{i_k} \in \langle a^{i_l}, a^{i_1} \rangle$$

olur. Bu durum A nın bağımsızlığı ile çelişir. Buradan $t > 0$ sonucu çıkarılır ve $m \leq j_1 < m + n$ olduğu için $n > 1$ olduğu görülür. Aksi taktirde $a^{j_1} = a^m = e \in A$ olur. $l \in \{1, \dots, t\}$ olsun ve H_l ,

$$i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_{l-1}, j_{l+1}, \dots, j_t$$

nin en büyük ortak böleni olsun. O zaman, bazı $z_1, \dots, z_s, w_1, \dots, w_{l-1}, w_{l+1}, \dots, w_t \in \{0, \dots, n-1\}$ için

$$H_l \equiv z_1 i_1 + \dots + z_s i_s + w_1 j_1 + \dots + w_{l-1} j_{l-1} + w_{l+1} j_{l+1} + \dots + w_t j_t \pmod{n}$$

olur. H_l / j_l ise $j_l = h H_l$ olur. O zaman e nin, S nin her alt yarigrubunda yer aldığını belirterek

$$a^{j_l} = a^{h H_l} = (e a^{z_1 i_1} \dots a^{z_s i_s} a^{w_1 j_1} \dots a^{w_{l-1} j_{l-1}} a^{w_{l+1} j_{l+1}} \dots a^{w_t j_t})^h \in \langle A \setminus \{a^{j_l}\} \rangle$$

bulunur. Bu durum A nın bağımsızlığı ile çelişir. Bu çelişkidenden H_l nin j_l yi bölmediği sonucu çıkarılır ve bu yüzden bir asal p_l ve bir pozitif tamsayı β_l vardır öyle ki $p_l^{\beta_l}$, H_l yi böler ama j_l yi bölmez. p_l ($l = 1, \dots, t$) asallarının tümü farklıdır ve tümü n yi böler. Bu yüzden

$$t \leq \pi(n) \quad (5)$$

olur. Özellikle varsayımımız, $s + t > \pi(n)$ ve $s \geq 1$ olduğunu söyler. $1 < i_s < m$ olduğu için

$$m \geq 3 \quad (6)$$

olur.

$Q = p_1^{\beta_1} \dots p_t^{\beta_t}$ olsun. O zaman $Q > 1$, $i_1, \dots, i_s$ nin her birini böler ve bu yüzden

$$i_1 \geq Q, \dots, i_s \geq sQ \quad (7)$$

olur. $s \geq 2$ olduğunu varsayalım. Eğer $i_s = sQ$ ise (7)'deki tüm eşitsizlikler eşitliğe dönüşür ve $a^{i_2} = (a^{i_1})^2$ sonucu çıkarılır. Bu durum da A nın bağımsızlığı ile çelişir. Bu yüzden $i_s \geq (s+1)Q$ ve Q ile ilgili çok basit bir eşitsizlik ile

$$m > i_s \geq (s+1)(t+1)!$$

olur. Fakat $s+t = |A| > \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ olur ve bu yüzden

$$2(s+t) \geq m > (s+1)(t+1)!$$

olur. Buradan

$$0 \geq 2s - s(t+1)! > (t+1)! - 2t \geq 0$$

olur. Bu ancak

$$s = 1 \quad (8)$$

iken mümkündür. Bu nedenle

$$m \geq i_1 + 1 \geq Q + 1 \geq (t + 1)! + 1$$

olur. Bu durumda

$$t + 1 = |A| \geq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1 \geq \frac{(t + 1)!}{2} + 1$$

bulunur. Bu yüzden

$$2t \geq (t + 1)!$$

olur ve dolayısıyla

$$t = 1 \tag{9}$$

olur.

(8) ve (9) dan $|A| = 2$ bulunur. Bu yüzden $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor < |A| = 2$ ve (6) ile birlikte,

$$m = 3$$

sonucu çıkarılır. Aynı zamanda, $2 = |A| > \pi(n) \geq t = 1$ ((5) ile) olur. Bu yüzden $\pi(n) = 1$ bulunur. Dolayısıyla $n = p^\alpha$ bir asal kuvvettir. n tek ise, o zaman Q için

$$3 = m \geq Q + 1 > 3$$

imkansızdır. Bu yüzden $n, 2$ nin bir pozitif kuvvetidir. $m \neq 3$ ya da $n, 2$ nin bir pozitif kuvveti değil ise, o zaman $|A| \leq \max \left\{ \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, \pi(n) \right\}$ olur.

$m = 3$ ve $n, 2$ nin bir pozitif kuvveti ise, o zaman $|A| \leq 2$ olur.

2. Durumda açıkça $\{a^2, a^3\}$ bağımsızdır ve bu yüzden $r_4(S) = 2$ bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır. ■

Sonuç 5.13. $S, n \geq 2$ dereceli bir devirli grup ise, o zaman $r_4(S) = \pi(n)$ olur. S bir nilpotent monojenik (tek doğuraylı) yarıgrup ise ($m \geq 2$ boyutlu), o zaman $r_4(S) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ olur. ■

Lemma 5.14. $m \neq 1$ ise o zaman açıktır ki $S = M(m, n)$ yarıgrubunun her doğuray kümesi a içermelidir.

İspat. S bir yarıgrup ve X de S nin bir doğuray kümesi olsun. O zaman $S \setminus S^2 \subseteq X$ olur.

$$S = M(m, n) = \{a, a^2, a^3, \dots, a^m, \dots, a^{m+n-1}\}$$

$$S^2 = \{a^2, a^3, \dots, a^m, \dots, a^{m+n-1}\}$$

olur. Buradan

$$S \setminus S^2 = \{a\} \subseteq X$$

bulunur. $a \in X$ olur. ■

Dolayısıyla tek bağımsız doğuray kümesi $\{a\}$ olur. Bu yüzden $r_3(S) = 1$ olur. Zıttına $m = 1$ ise S bir n dereceli devirli grup öyle ki (4) eşitsizlikte (2)'nin yerine (3) kullanarak $r_3(S) = \pi(n)$ olduğu gösterilir.



6. DİKDÖRTGENSEL BANDLARIN RANKLARI

$S = R_{m,n} = \{ (i,j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \} = \{1,2, \dots, m\} \times \{1,2, \dots, n\}$
 ve $(i,j)(k,l) = (i,l)$ çarpımı ile verilen sonlu dikdörtgenel band olsun. $X \subseteq R_{m,n}$
 ve $R_{m,n} = \langle X \rangle$ olsun. O zaman, her bir $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ için

$$\begin{aligned} (i, 1) &= x_1 x_2 \cdots x_p \\ (1, j) &= y_1 y_2 \cdots y_q \end{aligned}$$

olacak şekilde $x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q \in X$ vardır. Eğer,

$$x_\alpha = (i_\alpha, j_\alpha) \quad (1 \leq \alpha \leq p) \text{ ve } y_\beta = (k_\beta, l_\beta) \quad (1 \leq \beta \leq q)$$

ise $(i, 1) = x_1 x_2 \cdots x_p = (i_1, j_p)$ ve $(1, j) = y_1 y_2 \cdots y_q = (k_1, l_q)$ olduğundan
 $i = i_1$ ve $j = l_q$ olup $(i, j_p), (k_1, j) \in X$ olur. Böylece $|X| \geq m, n$ ve
 dolayısıyla, $|X| \geq \max\{m, n\}$ olur.

$(i, j) \mapsto (j, i)$ dönüşümü ile $R_{m,n} \cong R_{n,m}$ olduğundan kabul edelim
 ki $m \leq n$ olsun. O zaman

$$X = \{ (1,1), (2,2), \dots, (m,m), (m,m+1), \dots, (m,n) \}$$

alınır ise $\langle X \rangle = R_{m,n}$ olur. (Ayrıca, $n \leq m$ olduğunda da

$$X = \{ (1,1), (2,2), \dots, (n,n), (n+1, n), \dots, (m,n) \}$$

alınır ve $\langle X \rangle = R_{m,n}$ olur.)

Gerçekten, her $(i, j) \in R_{m,n}$ için

$$\begin{array}{lll} i, j \leq m, n & \text{ise} & (i, j) = (i, i)(j, j) \\ m \leq j \leq n & \text{ise} & (i, j) = (i, i)(m, j) \\ n \leq i \leq m & \text{ise} & (i, j) = (i, n)(j, j) \end{array}$$

olur.

$n \leq m$ durumunda $i = 1, 2, \dots, m$ için bir doğuray kümesi ilk koordinatı i olan en az bir eleman içermeli ve bu yüzden en azından m eleman içermelidir. Böylece $r_2(R_{m,n}) = m$ olur. $m \leq n$ durumunda da benzer bir argüman ile $j = 1, 2, \dots, n$ için bir doğuray kümesi ikinci koordinatı j olan en az bir eleman içermeli ve bu yüzden en azından n eleman içermelidir. Böylece $r_2(R_{m,n}) = n$ olur. Buradan herhangi $m, n \geq 1$ için

$$r_2(R_{m,n}) = \max\{m, n\}$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 6.1. S bir sonlu sol ya da sağ sıfır yarıgrup ise o zaman $r_2(S) = r_3(S) = r_4(S) = |S|$ olur.

İspat. L bir sol sıfır yarıgrup ve $|L| = m$ ise

$$L \cong R_{m,1} = \{ (i, 1) : i \in \{1, 2, \dots, m\} \}$$

olur. R bir sağ sıfır yarıgrup ve $|R| = n$ ise

$$R \cong R_{1,n} = \{ (1, j) : j \in \{1, 2, \dots, n\} \}$$

olur. Buradan

$$|S| = r_2(S) \leq r_3(S) \leq r_4(S) \leq |S|$$

olur. Böylece $|S| = r_2(S) = r_3(S) = r_4(S)$ bulunur. ■

Teorem 6.2. $m, n \geq 2$ için $S = R_{m,n}$ dikdörtgenel band olsun. O zaman

$$r_3(S) = r_4(S) = m + n - 2$$

olur.

İspat. $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ve $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$G_{ij} = \{ (i, k) : k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\} \} \cup \{ (l, j) : l \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i\} \}$$

kümesinin S de bir bağımsız doğuray kümesi olduğunu gösterelim.

İlk olarak G_{ij} kümesinin bağımsız olduğunu gösterelim:

$G_{ij} \setminus \{(i, k)\}$ da ikinci koordinat olarak k olan ($k \neq j$ ile) eleman olmadığından $(i, k) \notin \langle G_{ij} \setminus \{(i, k)\} \rangle$ olur. Benzer şekilde $G_{ij} \setminus \{(l, j)\}$ de ilk koordinat olarak l olan ($l \neq i$ ile) eleman olmadığından $(l, j) \notin \langle G_{ij} \setminus \{(l, j)\} \rangle$ olur. Gerçekten, herhangi $(a, b), (c, d) \in G_{ij}$ alalım ve dört durumda inceleyelim:

1) $(a, b) = (i, k_1)$ ve $(c, d) = (i, k_2)$ ise

$$(a, b)(c, d) = (i, k_2) = (c, d)$$

olur.

2) $(a, b) = (i, k)$ ve $(c, d) = (l, j)$ ise

$$(a, b)(c, d) = (i, j) \notin G_{ij}$$

olur.

3) $(a, b) = (l, j)$ ve $(c, d) = (i, k)$ ise

$$(a, b)(c, d) = (l, k) \notin G_{ij}$$

olur

4) $(a, b) = (l_1, j)$ ve $(c, d) = (l_2, j)$ ise

$$(a, b)(c, d) = (l_1, j) = (a, b)$$

olur.

Bu 4 durumdan dolayı G_{ij} bağımsızdır.

Şimdi G_{ij} nin bir doğuray kümesi olduğunu gösterelim:

Herhangi bir $(k, l) \in S$ alalım ve benzer şekilde dört durumda inceleyelim:

1) Eğer $k = i$ ve $l = j$ ise bir $p \neq j$ için $(i, p) \in G_{ij}$ ve $q \neq i$ için $(q, j) \in G_{ij}$ mevcut olup

$$(k, l) = (i, j) = (i, p)(q, j) \in \langle G_{ij} \rangle$$

olur.

2) Eğer $k = i$ ve $l \neq j$ ise $(k, l) = (i, l) \in G_{ij}$ olur.

3) Eğer $k \neq i$ ve $l = j$ ise $(k, l) = (k, j) \in G_{ij}$ olur.

4) Eğer $k \neq i$ ve $l \neq j$ ise $(i, l), (k, j) \in G_{ij}$ mevcut olup

$$(k, l) = (k, j)(i, l) \in \langle G_{ij} \rangle$$

olur.

Bu 4 durumdan dolayı $R_{m,n} = \langle G_{ij} \rangle$ olduğu elde edilir.

G_{ij} , $m + n - 2$ eleman içeren bir bağımsız doğuray kümesi olduğundan

$$r_3(R_{m,n}) \geq m + n - 2 \quad (10)$$

bulunur.

Eğer $R_{m,n}$ nin $m + n - 1$ elemanlı bağımsız bir alt küme içermediği, yani

$$r_4(R_{m,n}) \leq m + n - 2 \quad (11)$$

olduğu gösterilir ise (10) ve (11) eşitsizlikleri ile birlikte sonuç elde edilir.

$P(m, n)$: Dikdörtgensel band $R_{m,n}$ de $m + n - 1$ elemanlı bağımsız küme yoktur.

Bu iddiayı $m + n$ üzerinden tümevarım ile ispatlayalım.

İlk olarak $P(2,2)$ için doğrudan ispat ile iddianın doğru olduğu görülür. Buradan $2 + 2 - 1 = 3$ elemanlı sadece 4 tane mümkün küme vardır ve onların hiçbiri bağımsız değildir.

Şimdi şu lemmaya bakalım:

Lemma 6.3. Eğer $2m > n$ ise o zaman $P(m - 1, n) \Rightarrow P(m, n)$ olur.

İspat. $2m > n$ ve $P(m - 1, n)$ nin geçerli olduğunu varsayalım. H , $R_{m,n}$ nin $m + n - 1$ eleman içeren bağımsız bir alt kümesi olsun.

$i = 1, 2, \dots, m$ için B_i , $R_{m,n}$ nin ilk koordinatı i olan tüm elemanları silinerek elde edilen $(m-1) \times n$ alt bandı olsun. $H \cap B_i$ kümelerinin her biri bağımsız olmalı ve bu yüzden tümevarım hipotezi ile

$$|H \cap B_i| \leq m + n - 3 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

olur. Başka bir ifade ile $|H \setminus (H \cap B_i)| \geq 2$ olur. Yani $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ için

$$H_i = \{h \in \{1, 2, \dots, n\} : (i, h) \in H\}$$

kümesi en azından 2 eleman içerir. Dahası H_i kümeleri ayrık alt kümelerdir. Gerçekten, eğer $i \neq j$ ve $h \in H_i \cap H_j$ olsaydı o zaman $\forall h' \in H_i \setminus \{h\}$ için $(i, h) = (i, h')(j, h)$ olur ki bu da H nin bağımsızlığı ile çelişir. Bu yüzden $i \neq j$ için $H_i \cap H_j = \emptyset$ olur. $\{1, 2, \dots, n\}$ nin, her biri en az 2 elemana sahip $H_1, H_2, \dots, H_m$ ayrık alt kümeleri olduğu için $2m \leq n$ olduğu sonucu çıkarılır. Bu durum varsayım ile çelişir. Dolayısıyla, $R_{m,n}$ nin $m + n - 1$ eleman içeren bağımsız bir alt kümesi yoktur. ■

m ve n nin rollerini değiştirerek bir benzer lemma elde edilir.

Lemma 6.4. Eğer $2n > m$ ise o zaman $P(m, n-1) \Rightarrow P(m, n)$ olur. ■

$2m > n$ ve $2n > m$ nin en azından biri geçerli olmalıdır.

Bu yüzden dikdörtgensel band $R_{m,n}$ de $m + n - 1$ elemanlı bağımsız küme yoktur. Dolayısıyla

$$r_4(R_{m,n}) \leq m + n - 2$$

olur.

$$m + n - 2 \leq r_3(R_{m,n}) \leq r_4(R_{m,n}) \leq m + n - 2$$

olduğu için

$$r_3(R_{m,n}) = r_4(R_{m,n}) = m + n - 2$$

olduğu gösterilir. ■



7. APERİYODİK BRANDT YARIGRUPLARIN RANKLARI Rukiye SÖNMEZ

7. APERİYODİK BRANDT YARIGRUPLARIN RANKLARI

Tanım 7.1. $B_n = \{ (i, j) : i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \} \cup \{0\}$ kümesi, üzerinde tanımlı

$$(i, j)(k, l) = \begin{cases} (i, l) & j = k \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$
$$(i, j)0 = 0(i, j) = 00 = 0$$

çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba **Aperiyodik Brandt Yarıgrubu** denir.

Gomes ve Howie (1987) $r_2(B_n) = n$ olduğunu göstermişti. Ayrıca Teorem 4.15 den $r_1(B_n) = 1$ olur.

Lemma 7.2. $n \geq 2$ için Δ , n köşeli sıkı bağlantılı bağımsız diyagram olsun. O zaman $|E(\Delta)| \leq 2n - 2$ olur.

İspat. Howie, Ribeiro (1999) Lemma 3.2'ye bakınız. ■

Teorem 7.3. $n \geq 2$ için B_n aperiodic Brandt yarıgrup olsun. O zaman $r_3(B_n) = 2n - 2$ olur.

İspat. $X = \{ (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), \dots, (1, n), (n, 1) \}$ kümesi $2n - 2$ elemanlı bir bağımsız doğuray kümesidir:

Öncelikle X kümesinin B_n nin doğuray kümesi olduğunu gösterelim:

$$X = \{ (1, i), (j, 1) : 2 \leq i, j \leq n \}$$

olarak alınırsa, $(i, j) \in B_n$ için

7. APERİYODİK BRANDT YARIGRUPLARIN RANKLARI Rukiye SÖNMEZ

$$(i, j) = (i, 1)(1, j) \in \langle X \rangle = B_n$$

olur. Böylece X kümesi B_n nin doğuray kümesidir.

Şimdi X kümesinin bağımsız küme olduğunu gösterelim: $(1, i) \in X$ için $(i \neq 1)$

$$(1, i) = (x_1, y_1) \cdots (x_m, y_m) = (x_1, y_m) \Leftrightarrow y_m = i \neq 1, x_m = 1$$

$(x_m, y_m) = (1, i)$ olmalıdır. Böylece X kümesi bağımsız kümedir. Yani X kümesi bağımsız doğuray kümesidir. Buradan $r_3(B_n) \geq 2n - 2$ bulunur.

Eşitliği göstermek için X kümesinden daha geniş bağımsız doğuray kümesi mümkün olmadığını göstermeliyiz.

$\forall \emptyset \neq A \subseteq B_n$ için $\Delta(A) = (V(A), E(A))$ diyagramını, köşe kümesi $V(A) = \{1, 2, \dots, n\}$ ve yönlü kenar kümesi $\vec{E}(A) = \{i \rightarrow j : (i, j) \in A\}$ olarak tanımlayalım. Kolayca görüleceği üzere, eğer A bir doğuray kümesi ise $\Delta(A)$ bir bağlantılı diyagram olur. Gerçekten, her $(i, j) \in B_n$ için A bir doğuray kümesi olduğundan

$$(i, j) = (i_1, j_1) \cdots (i_m, j_m)$$

olacak şekilde $(i_1, j_1), \dots, (i_m, j_m) \in A$ vardır. Ayrıca, $(i_1, j_1) \cdots (i_m, j_m) = (i_1, j_m)$ olduğundan $i_1 = i$ ve $j_m = j$ olur. Böylece,

$$i = i_1 \rightarrow j_1 = i_2 \rightarrow j_2 \rightarrow \cdots \rightarrow i_m \rightarrow j_m = j$$

patikası $\Delta(A)$ mevcut olup, $\Delta(A)$ sıkı bağlantılıdır. $m = 0$ ise patika açıktır. Lemma 7.2 den sonuca ulaşılır. ■

7. APERİYODİK BRANDT YARIGRUPLARIN RANKLARI Rukiye SÖNMEZ

Teorem 7.4. B_n aperiodic Brandt yargrup olsun. O zaman $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + n$ elemanlı bağımsız bir alt kümesi vardır.

İspat. n bir çift sayı ($n = 2k$) ise kolayca gösterileceği üzere

$$A = \{ (i, i): 1 \leq i \leq 2k \} \cup \{ (p, q): 1 \leq p \leq k, k+1 \leq q \leq 2k \}$$

kümesi $k^2 + 2k = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + n$ elemanlı bir bağımsız kümedir. Eğer n bir tek sayı ($n = 2k + 1$) ise benzer şekilde

$$B = \{ (i, i): 1 \leq i \leq 2k + 1 \} \cup \{ (p, q): 1 \leq p \leq k, k+1 \leq q \leq 2k + 1 \}$$

kümesi $k(k+1) + 2k + 1 = \left\lfloor k^2 + k + \left(\frac{1}{4}\right) \right\rfloor + 2k + 1 = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + n$ elemanlı bir bağımsız kümedir. ■

Teorem 7.5. B_n aperiodic Brandt yargrup olsun. O zaman $r_4(B_n) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + n$ olur.

İspat. Howie ve Ribeiro (1999) 'a bakınız. ■

Herhangi bir sonlu grup G için Brandt yarıgrup $B(G, n)$,

$$B(G, n) = (\{1, 2, \dots, n\} \times G \times \{1, 2, \dots, n\}) \cup \{0\}$$

$$(i, a, j)(k, b, l) = \begin{cases} (i, ab, l) & j = k \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$
$$0(i, a, j) = (i, a, j)0 = 00 = 0$$

7. APERİYODİK BRANDT YARIGRUPLARIN RANKLARI Rukiye SÖNMEZ

çarpımı ile tanımlıdır.

Teorem 7.6. $S = B(G, n)$, $n \geq 2$ için bir Brandt yarıgrup ve $|G| \geq 1$ olsun. O zaman

$$r_5(B_n) = (n^2 - n + 1)|G| + 2$$

olur.

İspat. $V = \{(i, a, j): 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n, a \in G\} \cup \{(n, a, n): a \in G\} \cup \{0\}$

S nin bir alt yarıgrubudur ve $|V| = (n^2 - n + 1)|G| + 1$ olur. Gerçekten de

$$(n-1)n|G| + |G| + 1 = (n^2 - n + 1)|G| + 1$$

olur. Şimdi S nin bir alt yarıgrubu olduğunu gösterelim:

$$(i, a, j), (k, b, l), (n, a, n), (n, b, n) \in V \text{ için,}$$

$$(i, a, j)(k, b, l) = \begin{cases} (i, ab, l) & j = k \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$(i, a, j)(n, b, n) = \begin{cases} (i, ab, n) & j = n \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$(n, b, n)(i, a, j) = 0 \in V \quad i \neq n$$

$$(n, a, n)(n, b, n) = (n, ab, n) \in V$$

7. APERİYODİK BRANDT YARIGRUPLARIN RANKLARI Rukiye SÖNMEZ

Bu yüzden V , S nin bir alt yarıgrubudur. Ayrıca, $(n, a, j) \notin V$ ($1 \leq j \leq n-1$ ve $a \in G$) olduğundan V , S nin bir öz alt yarıgrubudur.

S nin V den daha büyük dereceli öz alt yarıgrubunun olmadığını göstermeliyiz. S nin

$$|U \setminus \{0\}| \geq (n^2 - n + 1)|G| + 1$$

olacak şekilde bir öz alt yarıgrubu U mevcut olsun. Şimdi bir lemmaya bakalım.

Lemma 7.7. $U \setminus \{0\}$, S de her sıfır olmayan $\mathcal{L}$ -sınıf ve her sıfır olmayan $\mathcal{R}$ -sınıf ile boş olmayan kesişime sahiptir.

İspat. $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için S de her bir sıfır olmayan $\mathcal{R}$ -sınıf,

$$R_i = \{(i, a, j) : a \in G, j = 1, 2, \dots, n\}$$

biçimindedir ve $|R_i| = n|G|$ olur. Benzer şekilde, $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için S de her bir sıfır olmayan $\mathcal{L}$ -sınıf,

$$L_j = \{(i, a, j) : a \in G, i = 1, 2, \dots, n\}$$

biçimindedir ve $|L_j| = n|G|$ olur.

Genelliği bozmaksızın kabul edelim ki $R_1 \in \mathcal{R}$ -sınıf için, $R_1 \cap (U \setminus \{0\}) = \emptyset$ olsun. O zaman $U \setminus \{0\} \subseteq S \setminus R_1$ olup

$$\begin{aligned} |U \setminus \{0\}| &\leq |S \setminus R_1| &= & |S| - |R_1| \\ &= & n^2 |G| - n|G| \\ &= & (n^2 - n)|G| \end{aligned}$$

7. APERİYODİK BRANDT YARIGRUPLARIN RANKLARI Rukiye SÖNMEZ

yani $|U \setminus \{0\}| \leq (n^2 - n)|G|$ çelişkisi elde edilir. Böylece, $U \setminus \{0\}$ ile sıfır olmayan $\mathcal{R}$ – sınıf ya da $\mathcal{L}$ – sınıf ın kesişimi boş küme olarak alınır ise bu $U \setminus \{0\}$ ın seçimi ile çelişir. O halde $R_i \cap (U \setminus \{0\}) \neq \emptyset$ olmalıdır. Benzer şekilde $L_j \cap (U \setminus \{0\}) \neq \emptyset$ olmalıdır. ■

$\forall 1 \leq i, j \leq n$ için S de her bir sıfır olmayan $\mathcal{H}$ – sınıf,

$$H_{i,j} = R_i \cap L_j = \{(i, a, j) : a \in G\}$$

biçimindedir.

$$P = \{(i, j) : U \cap H_{i,j} \neq \emptyset\} \text{ olsun. } |P| \leq n^2 - n + 1 \text{ ise}$$

$$|U \setminus \{0\}| \leq (n^2 - n + 1)|G|$$

olur ki bu da $U \setminus \{0\}$ ın seçimi ile çelişir. Dolayısıyla $|P| \geq n^2 - n + 1$ olmalıdır.

$\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ in bir alt kümesi P olup benzer şekilde $\Delta(P)$ diyagramını şöyle tanımlayalım: $V(P) = \{1, 2, \dots, n\}$ ve $\vec{E}(P) = \{i \rightarrow j : (i, j) \in P\}$ olsun.

Lemma 7.8. $n \geq 2$ için Δ , n köşeli bir diyagram olsun. $E(\Delta)$ kümesi en az $n^2 - n + 2$ elemana sahipse Δ sıkı bağlantılıdır.

İspat. n üzerinden tümevarım ile ispatlayalım.

$n = 2$ ve $|E(\Delta)| \geq 2^2 - 2 + 2 = 4$ ise sonuç açıktır, o zaman Δ sıkı bağlantılıdır. ($1 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2$ kenarlar ile)

7. APERİYODİK BRANDT YARIGRUPLARIN RANKLARI Rukiye SÖNMEZ

$n \geq 3$ için Δ , $1, 2, \dots, n$ etiketli n köşeli ve en azından $n^2 - n + 2$ kenarlı bir diyagram olsun. Δ' , n ile etiketli köşesi ve bir uç noktası n köşesi olan tüm yönlendirilmiş kenarlar silinerek elde edilen grafik olsun. İki durum vardır:

(1) Δ' sıkı bağlantılı değildir, öyle ki (tümevarım hipotezi ile)

$$|E(\Delta')| \leq (n-1)^2 - (n-1) + 1 = n^2 - 3n + 3.$$

varsayabiliriz.

(2) Δ' sıkı bağlantılıdır.

(1) durumunda, Δ da bir köşesi en azından n olan kenarların sayısı

$$(n^2 - n + 2) - (n^2 - 3n + 3) = 2n - 1$$

olmalıdır. Aslında sayı tam olarak $2n - 1$ olmalıdır. Bu kenarlar

$$n \rightarrow n, n \rightarrow 1, 1 \rightarrow n, \dots, n \rightarrow n-1, n-1 \rightarrow n$$

olur. Böylece $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ için $i \rightarrow n \rightarrow j$ patikası vardır ve bu yüzden Δ sıkı bağlantılıdır.

(2) durumunda, Δ' de $(n-1)^2$ kenardan daha fazla yoktur ve bu yüzden en azından Δ da kenarlar

$$(n^2 - n + 2) - (n^2 - 2n + 1) = n + 1$$

olmalıdır. $n \rightarrow n$ vardır ve en azından n yi $1, 2, \dots, n-1$ köşelerine bağlayan n kenar vardır. En azından bir $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ vardır öyle ki hem $i \rightarrow n$ hem de $n \rightarrow i$ mevcuttur. $\forall j, k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ için, Δ' de j den k ya bir patika vardır. Bu yüzden, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ için

7. APERİYODİK BRANDT YARIGRUPLARIN RANKLARI Rukiye SÖNMEZ

$$n \rightarrow i \rightarrow \dots \rightarrow j, \quad j \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow n$$

Δ da patikaları vardır. Bu yüzden Δ sıkı bağlantılıdır. ■

Yukarıdaki sonuçtan $\Delta(P)$ nin sıkı bağlantılı olduğu sonucu çıkarılır. Böylece her $p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$p = j_1 \rightarrow j_2 \rightarrow \dots \rightarrow j_{m-1} \rightarrow j_m = q$$

patikası $\Delta(P)$ de mevcut olur.

P nin tanımı ile $r = 1, 2, \dots, m-1$ için G de a_r elemanları vardır öyle ki $(j_r, a_r, j_{r+1}) \in U$ olur.

$$(p, a_1 a_2 \dots a_{m-1}, q) = \prod_{r=1}^{m-1} (j_r, a_r, j_{r+1}) \in U$$

Bu yüzden $(p, q) \in P$ dir. $P = \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ bulunur. $|P| = n^2$ olur.

$$M_{i,j} = \{a \in G : (i, a, j) \in U\}$$

Her bir i ve j için G nin boştan farklı altkümesidir. $b \in M_{k,i}$ ve $c \in M_{j,l}$ ise $\forall a \in M_{i,j}$ için

$$(k, b, i)(i, a, j)(j, c, l) \in U$$

olur.

Bu yüzden, $bM_{i,j}c \subseteq M_{k,l}$ olur. $|bM_{i,j}c| = |M_{i,j}|$ (G grubunun alt kümeleri olduklarından) olup

7. APERİYODİK BRANDT YARIGRUPLARIN RANKLARI Rukiye SÖNMEZ

$$|M_{i,j}| \leq |M_{k,l}|$$

bulunur. Aynı zamanda

$$|M_{k,l}| \leq |M_{i,j}|$$

olur. Dolayısıyla da $\forall i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$|M_{i,j}| = |M_{k,l}|$$

bulunur. $M_{i,i}$, G nin bir altgrubudur ve Lagrange Teoreminden ya $M_{i,i} = G$ ya da $|M_{i,i}| \leq (\frac{1}{2})|G|$ olur. İlk durumda (2) den $U = S$ sonucu çıkarılır ve bu U nun öz alt yarıgrup olduğu varsayımı ile çelişir. İkinci durumda $\forall i$ ve j için $|M_{i,j}| \leq (\frac{1}{2})|G|$ olur. Bu yüzden

$$|U \setminus \{0\}| \leq \frac{1}{2}n^2|G|$$

bulunur. Bu $U \setminus \{0\}$ ın seçimi (1) ile çelişir. Bu yüzden V , S nin en geniş öz alt yarıgrubudur. Böylece Teorem 7.6 nın ispatı Teorem 4.19 dan

$$r_5(B_n) = (n^2 - n + 1)|G| + 2$$

bulunarak tamamlanır. ■

Teorem 7.6 da $|G| = 1$ alınır ise $r_5(B_n) = (n^2 - n + 3)$ bulunur. Dolayısıyla da B_n nin tüm 5 rankı birbirlerinden farklı olur.

7. APERİYODİK BRANDT YARIGRUPLARIN RANKLARI Rukiye SÖNMEZ



KAYNAKLAR

- Ganyushkin, O., Mazorchuk, V., 2009. Classical Finite Transformation Semigroups. Springer-Verlag, London, 314 s.
- Giraldes, E., Howie, J.M., 1985. Semigroups of High Rank. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 28: 13-34.
- Gomes, G.M.S., Howie, J.M., 1987. On the Rank of Certain Finite Semigroups of Transformations. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 101: 395-403.
- Howie, J.M., 1995. Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford University Press. New York, 351 s.
- Howie, J.M., Ribeiro, M.I.M., 1999. Rank Properties in Finite Semigroups. Communications in Algebra, 27(11): 5333-5347.
- _____, 2000. Rank Properties in Finite Semigroups 2: The Small Rank and the Large Rank. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 24: 231-237.
- Minisker M., 2009. Rank Properties of Certain Semigroups. Semigroup Forum, 78: 99-105.
- Wilson, R. J., Watkins J. J., 1990. Graphs: An Introductory Approach. Wiley, 340s.



ÖZGEÇMİŞ

1993 yılında Adana’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana’da tamamladıktan sonra 2011 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2015 yılında bölüm 3. sınıfları olarak mezun oldu. 2016 yılında Ç. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa kabul edildi.

