



**T. C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL Bİ-QUASİ İDEALLERİ,
ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN Bİ-İDEALLERİ VE TRİ-
İDEALLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BEYZA ONUR

OCAK

**YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL Bİ-QUASI İDEALLERİ, ESNEK
KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN Bİ-İDEALLERİ VE TRİ-İDEALLERİ**

Beyza ONUR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2025

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Beyza ONUR tarafından hazırlanan “Yarıgrupların Esnek Kesişimsel Bi-quasi İdealleri, Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Bi-idealleri ve Tri-idealleri” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Yozgat Bozok Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet DAĞLI

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 02/01/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Beyza ONUR

02/01/2025

YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL Bİ-QUASI İDEALLERİ, ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN Bİ-İDEALLERİ VE TRI-İDEALLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Beyza ONUR

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2025

ÖZET

Esnek küme teorisi 1999 yılında Molodtsov tarafından ortaya atıldığından bu yana yeni bir matematiksel yaklaşım olarak kabul edilmiş ve cebirsel anlamda geniş kapsamlı uygulama alanına sahip olmuştur. İdealler ise cebirsel yapıların ve uygulamalarının ileri düzeyde incelenmesi için gereklidir. Bu alandaki çalışmaları ilerletmek için cebirsel yapılardaki idealleri geliştirmek ve genelleştirmek gerekmektedir. Bu tez çalışmasında, esnek küme teorisine katkıda bulunmak amacıyla yarıgrupların “Esnek Kesişimsel Bi-quasi İdeal”, “Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Bi-ideal” ve “Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Tri-ideal” olarak adlandırılan yeni esnek kesişimsel (hemen hemen) ideal türleri tanıtılmış, özellikleri ifade edilmiş ve yarıgrupların diğer esnek kesişimsel (hemen hemen) idealler ile olan ilişkileri incelenmiştir. Esnek küme teorisi ile klasik yarıgrup teorisi arasında bir köprü oluşturmak amacıyla, bazı önemli bağlantılar elde edilmiştir. Altı bölümden oluşan bu çalışmada ilk bölümde yarıgruplar, esnek kümeler, yarıgrupların esnek kesişimsel idealleri ve esnek kesişimsel hemen hemen idealleri ile ilgili literatürde yer alan çalışmalara değinilmiştir. İkinci bölümde, bu tez çalışmasında kullanılan temel tanımlar, özellikler ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde yarıgrupların esnek kesişimsel bi-quasi ideali tanıtılmış, örneği verilmiş ve yarıgrupların bazı esnek kesişimsel ideallerle ilişkisi incelenmiştir. Gerekli şartlar altında bir yarı grubun esnek kesişimsel idealinin (bi-idealın, quasi-idealın, iç idealın), bir esnek kesişimsel bi-quasi ideal olduğu gösterilmiştir. Bu ifadelerin karşıtlarının her zaman doğru olmadığına ilişkin aksi örnekler sunulmuş ve karşıtlarının geçerli olması için, yarı grubun esnek basit* yarıgrup veya regüler yarıgrup olması gerektiği kanıtlanmıştır. Dördüncü ve beşinci bölümlerde sırasıyla bir yarı grubun esnek kesişimsel hemen hemen bi-ideal ve esnek kesişimsel hemen hemen tri-ideal tanıtılmış, örneği verilmiş, yarıgrupların çeşitli esnek kesişimsel idealler ve esnek kesişimsel (hemen hemen) ideallerle ilişkileri incelenmiştir. Yeterli şartlar altında yarıgrupların bir esnek kesişimsel bi-idealının (tri-idealın) bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-ideal (tri-ideal); bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-idealının (tri-idealın) bir esnek kesişimsel hemen hemen alt yarıgrup olduğu gösterilmiştir. Son bölümde ise bu çalışmadan elde edilen sonuçlara ayrıntılı bir şekilde yer verilmiştir.

Sayfa Adedi	: 96
Anahtar Kelimeler	: Yarıgrup, Esnek küme, Yarıgrupların esnek kesişimsel (hemen hemen) idealleri
Danışman	: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

SOFT INTERSECTION BI-QUASI IDEALS, SOFT INTERSECTION ALMOST BI-IDEALS AND TRI-IDEALS OF SEMIGROUPS

(M. Sc. Thesis)

Beyza ONUR

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2025

ABSTRACT

The theory of soft sets has been recognized as a new mathematical approach since it was introduced by Molodtsov in 1999, and it has a wide range of applications in algebraic contexts. Ideals are essential for the advanced study of algebraic structures and their applications. To advance research in this field, it is necessary to develop and generalize the ideals within algebraic structures. In this thesis, new types of soft intersection (almost) ideals of semigroups, named “Soft Intersection Bi-quasi Ideal,” “Soft Intersection Almost Bi-ideal,” and “Soft Intersection Almost Tri-ideal,” are introduced to contribute to soft set theory, their properties are expressed, and their relationships with other soft intersection (almost) ideals of semigroups are examined. To establish a bridge between soft set theory and classical semigroup theory, some important connections have been obtained. This study consists of six chapters. The first chapter discusses the existing literature on semigroups, soft sets, soft intersection ideals, and soft intersection almost ideals of semigroups. The second chapter presents the basic definitions, properties, and theorems that are used in this thesis. The third chapter introduces the soft intersection bi-quasi ideal of semigroups, provides its examples, and examines its relationship with certain soft intersection ideals of semigroups. Under necessary conditions, it is shown that a soft intersection ideal (bi-ideal, quasi-ideal, interior ideal) is a soft intersection bi-quasi ideal of a semigroup. Counterexamples are presented to demonstrate that the converse of these statements does not always hold, and it is proven that the semigroup has to be a soft simple* or regular semigroup for the converse to be valid. In the fourth and fifth chapters, the soft intersection almost bi-ideal and soft intersection almost tri-ideal of a semigroup are respectively introduced, their examples are provided, and their relationships with other soft intersection (almost) ideals are analyzed. Under sufficient conditions, it is shown that a soft intersection bi-ideal (tri-ideal) is an almost bi-ideal (tri-ideal), and that an almost bi-ideal (tri-ideal) is a soft intersection almost subsemigroup. The final chapter provides a detailed discussion of the results obtained from this study and the significance of these results.

Number of pages	: 96
Keywords	: Semigroup, Soft set, Soft intersection (almost) ideals of semigroups
Supervisor	: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince bilgisi ve tecrübesiyle yolumu aydınlatan, güler yüzü ve sevgi dolu yaklaşımıyla desteğini esirgemeyen, birlikte çalışmaktan onur duyduğum saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN'e teşekkürlerimi sunarım.

Bu uzun süreçte her anlamda birbirimize destek olduğumuz değerli arkadaşlarım Aleyna İLGİN, Fatıma Zehra KOCAKAYA ve Zeynep Hare BAŞ'a çalışmam boyunca gösterdikleri katkılardan ötürü teşekkür ederim.

Her koşulda yanımda olan ve her zaman desteklerini hissettiğim annem Yasemen ONUR ve babam Çetin ONUR'a çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	8
2.1. Yarıgruplar ve Yarıgrup Çeşitleri	8
2.2. Yarıgrupların İdealleri ve Hemen Hemen İdealleri	11
2.3. Esnek Kümeler ve Temel Kavramları	14
2.4. Esnek Kesişimsel İdealler ve Esnek Kesişimsel Hemen Hemen İdealler	19
3. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL Bİ-QUASİ İDEALLERİ	26
4. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN Bİ-İDEALLERİ	59
5. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN TRİ-İDEALLERİ..	70
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	86
KAYNAKLAR	89
ÖZGEÇMİŞ	96

ŞEKİLLER DİZİNİ**Şekil****Sayfa**

Şekil 3.1. Bazı esnek kesişimsel idealler arasındaki ilişkileri gösteren diyagram.....	58
--	----



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
D_3	Dihedral grup
$\emptyset$	Boş küme
$\exists$	Varlıksal niceleyici, en az bir
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\neq$	Eşit değildir
$\subseteq$	Alt kümesidir
$\not\subseteq$	Alt kümesi değildir
$\supseteq$	Kapsar
$\not\supseteq$	Kapsamaz
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Birleşim
$\Rightarrow$	Gerek şart
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter şart
E	Parametre kümesi
U	Evrensel küme
$S_E(U)$	E üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
$\emptyset_S$	S ye göre boş esnek küme

$\tilde{S}$	Tam esnek küme
S_A	A nın esnek karakteristik fonksiyonu
S_x	x in esnek karakteristik fonksiyonu
$\circ$	Esnek kesişimsel çarpım işlemi
$\subseteq$	Esnek alt kümesidir
$\tilde{\cap}$	Esnek kesişim
$\tilde{\cup}$	Esnek birleşim
$Im(f_S)$	f_S nin görüntü kümesi
$\mathcal{U}(f_S; \alpha)$	f_S nin üst α -kapsama kümesi
$supp(f_S)$	f_S nin destek kümesi

Kısaltmalar

Açıklama

EK	Esnek kesişimsel
----	------------------

1. GİRİŞ

Günlük yaşamda karşılaştığımız bazı durumları açıklamak ve bu durumlarla ilgili kesin yargılara varmak oldukça zordur. Çünkü bir şeyin doğru ya da yanlış olması, neyin doğru ya da yanlış olduğu, zaman, ortam ve kişilerin bakış açılarına göre değişir. Örneğin, "pahalı ev", "güzel araba", "dayanıklı masa" ya da "kaliteli elbise" gibi ifadeler, kişiye göre farklı anlamlar taşıyabilir ve bu belirsizlikler günlük hayatta sıkça karşımıza çıkar. Ancak bu tür belirsizlikler sadece günlük yaşamla sınırlı kalmaz; matematik ve diğer bilim dallarında da benzer sorunlarla karşılaşırız. Araştırmacılar, ekonomi, sosyoloji, mühendislik, çevre bilimleri, tıp gibi birçok alanda, karmaşık problemlere çözüm ararken, aynı zamanda bu belirsizlikleri doğru bir şekilde modellemeye çalışmışlardır. Ancak, her belirsizliği klasik yöntemlerle anlamak ya da modellemek her zaman mümkün olmayabilir. Bu yüzden zaman içinde, çevremizdeki belirsizlikleri daha iyi anlayabilmek ve onları modellemek için farklı matematiksel teoriler geliştirilmiştir. Bu teoriler, belirsizliklerin daha doğru bir şekilde ele alınmasını sağlamayı amaçlar ve bilimsel araştırmalara önemli katkılar sunar. Olasılık teorisi, aralık matematiği, sezgisel bulanık kümeler teorisi ve bulanık kümeler teorisi gibi matematiksel yaklaşımlar, belirsizlikleri açıklamak için kullanılan teorilerdir. Ancak, bu teorilerin her birinin kendi içinde çeşitli zorlukları bulunmaktadır. Bu modellemelere öncülük eden teori, bulanık kümeler teorisidir ve 1965 yılında Zadeh tarafından ortaya atılmıştır. Bu teori, bir kümeyi üyelik fonksiyonu aracılığıyla tanımlar. Her bir önerme için bu fonksiyon, $[0,1]$ aralığında bir gerçek sayı ile ilişkilendirilir. Bu gerçek sayı bulanık kümeye olan aidiyet derecesini gösterir. Aidiyet derecesi 1'e yaklaştıkça artarken, 0'a yaklaştıkça azalır. Eğer eleman kümeye ait değilse, aitlik değeri 0 olur. Üyelik fonksiyonunun belirlenmesi için tek bir yol bulunmaması, bu fonksiyonun doğasında büyük bir kişisellik taşır ve her özel durum için üyelik fonksiyonunun nasıl ayarlanacağı önemli bir sorun oluşturmuştur. Bu nedenle, üyelik fonksiyonundan bağımsız bir kümeler teorisi geliştirilmesi gerekliliği doğmuştur.

Molodtsov (1999), belirsizlikleri modellemek ve belirsizlik içeren problemlerle başa çıkmak amacıyla, esnek küme teorisini ortaya koymuştur. Bu yeni yaklaşım, üyelik fonksiyonunun ayarlanmasıyla ilgili zorlukları ortadan kaldırmış ve dolayısıyla teorinin farklı alanlarda kolayca uygulanmasını sağlamıştır (Molodtsov, 1999). Molodtsov, esnek küme teorisini matematiğin pek çok farklı alanında başarılı bir şekilde kullanmıştır. Bu alanlar arasında

oyun teorisi, Riemann integrasyonu, Perron integrasyonu, işlem araştırmaları, olasılık teorisi ve ölçüm teorisi gibi konular bulunmaktadır. Esnek kümeler kullanılarak esnek cebirsel yapılar üzerinde pek çok araştırma yapılmıştır. Aktaş ve Çağman (2007), esnek kümeleri bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümeler gibi ilgili kavramlarla karşılaştırmış ve bu alanda yapılan birçok yeni çalışmaya ışık tutmuş olan esnek grup teorisini literatüre kazandırmıştır. Esnek grup yapısı üzerinde, esnek alt grup, normal esnek alt grup ve esnek grup homomorfizmi gibi cebirsel yapıları da tanımlamıştır. Jun (2008), esnek BCK-BCI-cebirlerini ve esnek alt cebir kavramlarını tanımlayarak bu yapıların bazı temel özelliklerini incelemiştir. Jun ve Park (2008), esnek kümeleri BCK-BCI-cebirlerine uygulayarak, bu cebirlerin esnek cebirsel özelliklerini araştırmış ve bazı örnekler sunmuştur. Ayrıca Park, Jun ve Öztürk (2008), esnek WS-cebirleri üzerine çalışmalar yapmıştır. Feng, Jun ve Zhao (2008), esnek küme teorisini kullanarak esnek yarı halkalar, esnek yarı halkalardaki esnek idealler ve idealist yarı halkalar kavramlarını tanımlamıştır. Sun, Zhang ve Liu (2008) ise esnek modüller kavramını tanıtarak, esnek küme teorisinden faydalanan esnek modüllerin temel özelliklerini incelemiştir. Jun, Lee ve Zhan (2009), esnek p-idealleri ve p-idealistik esnek BCI-cebirleri kavramlarını tanıtmış ve bu yapıları inceleyerek temel özelliklerini araştırmıştır. Ayrıca, esnek kümeleri kullanarak, BCI cebirlerindeki bulanık p-ideallerinin farklılıklarını ortaya koymuştur. Zhan ve Jun (2010) ise esnek BL-cebirleri üzerinde çalışmalar yapmıştır. Acar, Koyuncu ve Tanay (2010), esnek halka kavramını tanıtarak, esnek alt halka, esnek idealler, idealist esnek halkalar ve esnek halka homomorfizmaları gibi konuları, ilgili özellikleriyle birlikte detaylı bir şekilde incelemiştir. Kazancı, Yılmaz ve Yamak (2010), esnek BCH-cebiri kavramını tanıtarak, bu cebirin yapısal özelliklerini araştırmıştır. Esnek BCH-cebirleri ve esnek BCH-alt cebirleri ailesinin çeşitli kesişim ve birleşim türlerini, yani ikili kesişim, genişletilmiş kesişim, kısıtlı birleşim, V-birleşim, $\wedge$ -kesişim ve kartezyen çarpımını ele almıştır. Ayrıca, esnek kümelerin homomorfik görüntü ve esnek BCH-homomorfizmi kavramlarını tanıtarak, bu kavramların temel özelliklerini incelemiştir. Jun, Lee ve Khan (2010), esnek küme kavramını sıralı yarıgruplara uygulamıştır. Bu çalışmada, esnek sıralı yarı grup, esnek sıralı alt yarı grup, esnek sol (sağ) ideal ve sol (sağ) idealistik esnek sıralı yarı grup kavramlarını tanıtarak, bu yapıların temel özelliklerini incelemiştir. Jun, Lee ve Park (2010) ise BCK/BCI cebirlerindeki farklı türleri ele almak için yapıyı bulanık esnek kümeye uygulamış ve bu çerçevede bulanık esnek BCK/BCI cebirleri, bulanık esnek idealler ve bulanık esnek p-idealler kavramlarını tanımlayarak, bu yapıların özelliklerini detaylı bir şekilde araştırmıştır. Sezgin ve Atagün

(2011a, 2011b), esnek gruplar ve normalistik esnek gruplar üzerinde detaylı incelemeler yapmıştır. Sezgin, Atagün ve Aygün (2011), idealistik esnek yakın halkaların özelliklerini araştırmış ve yakın halka epimorfizmleri altında yapının korunduğunu kanıtlamıştır. Bu çalışmalar, esnek yakın halkalar konusundaki teorik bilgiyi genişletmiştir. Sezer, Çağman ve Atagün (2014), yarı grupların esnek kesişimsel iç ideallerini, quasi-ideallerini ve (genelleştirilmiş) bi-ideallerini tanımlayarak, bu kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya koymuştur. Ayrıca, regüler, intra-regüler, tamamen regüler, zayıf regüler ve quasi-regüler yarıgrup kavramları, bu ideallerin özellikleriyle karakterize edilmiştir. Çağman, Çıtak ve Aktaş (2012), çeşitli esnek cebirsel sistemlerin incelenmesine olanak tanıyan esnek-int gruplar kavramını tanımlamıştır. Aktaş ve Özlü (2014) ise devirli esnek gruplar üzerinde çalışmalar yapmıştır. Sen (2014), sabit parametreler kümesindeki tüm esnek kümelerin kümesinin cebirsel yapısını incelemiştir. Sezer, Çağman, Atagün, Ali ve Türkmen (2015), yarı grupların esnek kesişimsel yarıgruplarını, esnek kesişimsel ideallerini ve esnek kesişimsel bi ideallerini tanımlayarak, bu yapıları ve aralarındaki bağlantıları araştırmıştır. Sezgin ve Orbay (2022), yarı basit yarıgrupları, duo yarıgrupları, sağ (sol) sıfır yarıgrupları, sağ (sol) basit yarıgrupları, sol (sağ) basit yarı grupların yarı kafeslerini ve grupların yarı kafeslerini yarıgrup üzerindeki esnek kesişim alt-yapıları açısından karakterize etmiştir. Ullah, Ahmad, Hayat, Karaaslan ve Rashad (2018), esnek kesişimli AG-grubunu tanımlamış ve esnek küme teorisi ile AG grupları arasında bir bağlantı kurmuştur. Karaaslan (2019), AG-grupoid, AG^* -grupoid ve AG-bant üzerinde esnek küme ailesinin bazı özelliklerini incelemiş ve ayrıca esnek idempotent eleman, esnek kesişimsel AG-bandı, sol (sağ) bağlantılı esnek küme, esnek kesişimsel ideali ve esnek kesişimsel AG-grupoidinin esnek asal ideali gibi yeni kavramlar tanımlamıştır. Karaaslan, Ullah ve Ahmed (2021), normal bipolar esnek alt grup kavramını tanıtarak, bu tür alt grupların özelliklerini detaylı bir şekilde incelemiştir. Ayrıca, bir bipolar esnek grubun bipolar esnek sol ve sağ kosetleri kavramlarını ve eşlenik bipolar esnek alt grup kavramını da tanımlamıştır.

Molodtsov'un 1999 yılında geliştirdiği esnek küme teorisi ile temel esnek küme işlemlerini sunmuş; ancak daha sonra, Pawlak'ın (1982), yaklaşımlı küme teorisinden yararlanarak, Maji, Biswas ve Roy (2003), esnek küme işlemleri ve özelliklerini daha detaylı bir şekilde tanımlamıştır. Ayrıca esnek alt küme, bir esnek kümenin tümleyeni, iki esnek kümenin birleşimi ve kesişimi gibi yeni esnek küme işlemlerini ilk kez tanımlamıştır. Pei ve Miao (2005) ise esnek kümeler için kesişim ve alt küme gibi temel kavramları literatüre

kazandırmıştır. Yang, Lin, Yang, Li ve Yu (2009), aralık değerli bulanık esnek küme kavramını tanıtmış ve "tümleyen", "VE" ve "VEYA" işlemlerini aralık değerli bulanık esnek kümeler üzerinde tanımlayarak, bu kümelerin De Morgan, birleşme ve dağılma özelliklerini ispatlamıştır. Sezgin ve Atagün (2011) ise esnek kümelerle ilgili yaptıkları çalışmada, daha önce incelenmemiş olan esnek kümelerin temel özelliklerini araştırmıştır. Esnek kümeler üzerindeki temel işlemlerin özelliklerini tartışarak, bu işlemlerin birbirleriyle olan bağlantılarını ortaya koymuş ve ayrıca esnek kümelerin kısıtlı simetrik farkını tanımlayarak, bu kavramın özelliklerini açıklamıştır. Husain ve Shivani (2018), iki esnek kümenin eşitliği, bir esnek kümenin alt kümesi, esnek kümenin üst kümesi, boş esnek küme, "ve", "veya", birleşim, kesişim, bağıl kesişim, bağıl birleşim, simetrik fark ve bağıl simetrik fark gibi çeşitli esnek küme işlemlerini örneklerle açıklamıştır. Sezgin, Ahmad ve Mehmood (2019) ise esnek kümelerin genişletilmiş farkını inceleyerek, bu işlemin özelliklerini araştırmıştır. Eren (2019), esnek kümelerde ikili parçalı fark işlemini tanımlayarak, bu işlemin özelliklerini incelemiştir. Sezgin ve Çalışıcı (2024) ise klasik kümelerdeki fark işleminin özelliklerini esnek ikili parçalı fark işlemine uygulayarak detaylı bir analiz yapmıştır. Çağman (2021), literatüre iki yeni tümleyen işlemi kazandırmış ve Sezgin, Çağman, Atagün ve Aybek (2023c), yeni ikili küme işlemleri üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bu küme işlemleri esnek kümelere aktarılmış ve yeni kısıtlanmış esnek küme işlemleri ile genişletilmiş esnek küme işlemleri tanıtılmıştır (Aybek, 2024). Demirci (2024), Sarıaloğlu (2024) ve Akbulut (2024) ise esnek kümelerdeki genişletilmiş işlemlerinin formunu değiştirerek, tümleyenli genişletilmiş işlemler üzerine çalışmalarını sürdürmüştür. Ayrıca, esnek kümelerdeki ikili parçalı işleminin formu biraz daha değiştirilerek, tümleyenli ikili parçalı esnek küme işlemleri, Sezgin ve Demirci (2023), Sezgin ve Sarıaloğlu (2024), Sezgin ve Yavuz (2023), Sezgin ve Aybek (2023), Sezgin ve Atagün (2023), Sezgin, Aybek ve Atagün (2023a), Sezgin, Aybek ve Güngör (2023b), Sezgin ve Çağman (2024) tarafından detaylı bir şekilde çalışılmıştır.

Cebirsel yapılar, bir veya daha fazla küme ve işlemden oluşur ve matematiğin birçok alanında önemli bir rol oynar. Grup, halka ve cisim gibi yapılar, modüler aritmetik, sayı teorisi, fizik, kimya ve bilgisayar uygulamaları gibi pek çok alanda kullanılır. Cebirsel yapıların benzer özelliklere sahip sınıflara ayrılması, bir yapının hangi tür aileye ait olduğunu belirlememize ve bu ailedeki tüm elemanların karakteristik özelliklerini anlamamıza yardımcı olur.

Teorik bilgisayar bilimlerinde, otomatlarda, kodlama teorisi, graf teorisi ve optimizasyon teorisi gibi alanlarda yarıgruplar temel bir rol oynar. Uygulamalı matematikte, ilk kez 1900'lerin başlarında resmi olarak incelenen yarıgruplar, doğrusal zamana bağlı olmayan sistemler için temel bir modeldir. Sonlu yarıgruplar, sonlu otomatlarla iç içe geçmiş bir şekilde ilişkili olduğundan, bunların incelenmesi teorik bilgisayar bilimi açısından çok önemlidir. Ayrıca, olasılık teorisinde yarıgruplar ve Markov süreçleri arasında bir ilişki bulunmaktadır. İdealler kavramı, matematiksel yapıların ve bunların uygulamalarının anlaşılması için çok önemlidir, bu yüzden birçok matematikçi araştırmalarının çoğunu cebirsel yapılardaki ideallerin geliştirilmesine odaklanmıştır. Yani, cebirsel yapıların daha fazla incelenmesi, cebirsel yapılardaki ideallerin geliştirilmesini gerektirmektedir. Cebirsel yapılardaki ideallerin geliştirilmesi kavramı ve özellikleri kullanılarak, birçok matematikçi önemli bulgular ve cebirsel yapıların karakterizasyonlarını ortaya koymuştur.

Dedekind, cebirsel yapıların incelenmesine yardımcı olmak amacıyla ideal kavramını ortaya atmıştır. Daha sonra bu kavram Noether tarafından birleşmeli halkalar için geliştirilmiştir. Good ve Hughes (1952) tarafından yarıgruplar için bi-ideal kavramı tanıtılmıştır. Steinfeld (1956) ilk olarak yarıgruplar için tanımladığı quasi-ideal kavramını, sonra halkalar için tanımlamıştır. Quasi-idealler, sağ ve sol ideallerin geliştirilmiş halidir; bi-idealler ise quasi-ideal kavramının bir geliştirilmiş şeklidir. İç ideal kavramı ilk kez Lajos (1976) tarafından gösterilmiştir. İç idealler ise ideallerin bir genellemesidir.

Farklı türdeki ideallerin daha genel bir kavramı olarak "hemen hemen" idealler kavramı önerilmiş, bunların özellikleri ve ilgili idealler arasındaki ilişkiler kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Bu bağlamda, Grosek ve Satko (1980), yarıgruplar için hemen hemen ideal kavramını ilk kez ortaya koymuştur. Ardından, Bogdanovic (1981), bi-ideal kavramını yarıgruplar için hemen hemen bi-ideal kavramına genişletmiştir. Hemen hemen quasi-ideal kavramı ilk olarak Wattanatripop, Chinram, ve Changphas (2018a) tarafından tanıtılmış, yarıgruplar için hemen hemen iç ideal ve zayıf hemen hemen iç ideal kavramları önerilerek, yarıgruplar için hemen hemen ideal ve iç ideal kavramları Kaopusek, Kaewnoi ve Chinram (2020) tarafından genişletilmiş ve incelenmiştir.

Son yıllarda Rao (2018c, 2018d, 2020b, 2020c), yarıgrupların birçok yeni ideal biçimini tanıtmış; bunlar arasında bi-iç ideal, bi-quasi ideal, quasi-iç ideal, bi-quasi-iç ideal ve zayıf

iç ideal gibi idealler yer almaktadır. Baupradist, Chemat, Palanivel ve Chinram (2021) ise esas idealleri incelemiştir. Rao (2024), ayrıca yarıgrupların tri-ideal kavramını literatüre kazandırmıştır. Ayrıca yarıgrupların tri-quasi idealleri, Rao, Kona, Rafi ve Bolineni (2024) tarafından incelenmiştir.

Yarıgruplar için sırasıyla Iampan, Chinram ve Petchkaew (2021), hemen hemen alt yarıgrup, Chinram ve Nakkhasen (2022), hemen hemen bi-quasi-iç ideal, Gaketem (2022), hemen hemen bi-iç ideal ve Gaketem ve Chinram (2023), hemen hemen bi-quasi-ideal kavramlarını önermiştir. Yakın zamanlarda esnek küme teorisinde yarıgrupların idealleri ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Sezgin ve Onur (2024), esnek kesişimsel hemen hemen bi-ideal; Sezgin, Onur ve İlgin (2024b), esnek kesişimsel hemen hemen tri-ideal; Sezgin ve Kocakaya (Baskıda), esnek kesişimsel hemen hemen quasi-ideal; Sezgin, Kocakaya ve İlgin (2024a), esnek kesişimsel hemen hemen quasi-iç ideal; Sezgin ve Baş (2024), esnek kesişimsel hemen hemen iç ideal; Sezgin, Baş ve İlgin (2025), esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi-iç ideal; Sezgin ve İlgin (2024a, 2024b, 2024c, 2024d, 2024e), sırasıyla esnek kesişimsel hemen hemen alt yarıgrup, esnek kesişimsel hemen hemen ideal, esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi ideal, esnek kesişimsel hemen hemen bi-iç ideal ve esnek kesişimsel hemen hemen zayıf-iç ideal; Sezgin, İlgin ve Atagün (2024c), esnek kesişimsel hemen hemen tri-bi-ideal kavramlarını tanıtarak özelliklerini detaylı olarak incelemiştir.

Literatürde yapılan incelemeler sonucunda, bi-quasi idealler ile ilgili bazı önemli çalışmalara ulaşılmaktadır. Bunların ilki, Rao (2017) tarafından Γ -yarıgrupların bi-quasi idealleri ve bu yarıgrupların bulanık bi-quasi idealleri üzerine yaptığı çalışmadır. Ayrıca, Rao, Venkateswarlu ve Rafi (2017) tarafından Γ -yarıhalkalarının bi-quasi idealleri incelenmiştir. Rao (2018a, 2018b) ise yarıhalkaların bi-quasi idealleri üzerine kapsamlı bir araştırma sunmuştur. Benzer şekilde Rao (2020b), yarıgrupların bi-quasi idealleri üzerine önemli katkılarda bulunmuştur. Wattanatripop, Chinram ve Changphas (2018b), yarıgrupların bulanık hemen hemen bi-ideallerini incelemiştir. Simuen, Abdullah, Yonthanthum ve Chinram (2020), yarıgrupların hemen hemen bi- Γ -ideallerini ve yarıgrupların bulanık hemen hemen bi- Γ -ideallerini çalışmıştır. Suebsung, Chinram, Yonthanthum, Hila ve Iampan (2022), sıralı yarıgrupların hemen hemen bi-ideallerini ele almıştır. Rao (2019), Γ -yarıhalkalar için tri-idealleri ve bulanık tri-ideallerini incelemiştir. Rao (2020a), yarıhalkaların tri-ideallerini ele almıştır. Rao ve Kona (2022), yarıgrupların bulanık tri-

ideallerini araştırmıştır. Ayrıca, Rao (2024), yarıgrupların tri-idealleri üzerinde önemli katkılarda bulunmuştur.

Son yıllarda yapılmış olan çeşitli çalışmalardan esinlenerek bu tez çalışmasında ise klasik yarıgrup teorisinde çalışılan bazı idealler ve hemen hemen idealler esnek küme teorisine aktarılmış, yarıgrupların “Esnek Kesişimsel Bi-quasi İdealleri”, “Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Bi- idealleri” ve “Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Tri-idealleri” tanıtılmıştır. Tanıtılan bu yeni ideallerin özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Klasik yarıgrup teoride var olan özellikler ve ilişkilendirmelerin esnek küme teorisi üzerine yansıması nasıl olur sorusu göz önünde bulundurularak, klasik yarıgruptaki tanımlamalar, özellikler, önermeler ve teoremler esnek küme teorisine aktarılmıştır.

Tezin ilk bölümünde, yarıgruplar ve (hemen hemen) idealleri, esnek kümeler ve yarıgrupların çeşitli esnek kesişimsel (hemen hemen) idealleri ile ilgili literatür taraması yapılmış; ikinci bölümde, bu tez çalışmasında kullanılan tanımlar, özellikler ve teoremlere yer verilmiştir. Tezin özgün bölümlerinden olan üçüncü bölümde, yarıgrupların esnek kesişimsel bi-quasi idealleri; dördüncü bölümde, yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen bi-idealleri; beşinci bölümde, yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen tri-idealleri tanıtılmış, örnekleri verilmiş, özellikleri ayrıntılı şekilde incelenmiş ve bazı (hemen hemen) esnek kesişim idealleriyle ilişkileri kurularak önemli sonuçlar elde edilmiştir. Son bölümde ise bu çalışmadan elde edilen sonuçlara yer verilmiş ve sonuçların önemi tartışılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılan tanımlar, özellikler ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Yarıgruplar ve Yarıgrup Çeşitleri

Bu alt bölümde, tez boyunca kullanılacak yarıgrup kavramı ve bazı çeşitleri hakkında bilgiler verilmiştir. Clifford ve Preston (1961: 58-62, 1967: 79-83), Petrich (1973: 59-70, 1977: 202-211, 1985), Howie (1995: 103-109), Grillet (1995: 101-108, 2013: 65-77), Nagy (2013: 43-77) kaynaklarından yarıgruplar hakkında detaylı bilgilere ulaşılabilir.

2.1.1. Tanım G boş olmayan bir küme olmak üzere,

$$\diamond: G \times G \rightarrow G$$

fonksiyonuna, G kümesi üzerinde bir (ikili) işlem denir. Bu tanıma göre, (ikili) işlem iki değişkenli bir fonksiyon olarak tanımlanır (Hacısalıoğlu, 2007: 163-164). Herhangi bir küme üzerinde tanımlanan bir işlem ya da işlemler, bu küme ile birlikte cebirsel bir yapı (matematiksel yapı/matematiksel sistem) oluşturur (Hacısalıoğlu, 2007: 181; Bayraktar, 2006: 87). İşlemli cebirsel yapılar arasında en yaygın olanı grup, iki işlemli cebirsel yapılar arasında ise en bilinenler halka ve cisimdir.

2.1.2. Tanım G boştan farklı bir küme olmak üzere,

$$\begin{aligned} \diamond: G \times G &\rightarrow G \\ (k, m) &\rightarrow \diamond(k, m) \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlansın. " $\diamond$ ", G kümesi üzerinde bir (ikili) işlem olup, her $k, m, n \in G$ için, $k \diamond (m \diamond n) = (k \diamond m) \diamond n$ şartını sağlıyorsa $(G, \diamond)$ cebirsel yapısına yarıgrup denir.

Bu çalışma boyunca aksi belirtilmediği takdirde, $m \diamond n$ yerine mn yazılıp, $(G, \diamond)$ yerine de G kullanılacaktır.

2.1.3. *Örnek* $\mathbb{Z}^+$ pozitif sayılar kümesi olmak üzere $(\mathbb{Z}^+, +)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

2.1.4. Tanım Bir S yarıgrubu,

- Her $b, y \in S$ için, $by = yb$ ise değişmeli yarıgrup,
- Her $t \in S$ için, $t^2 = t$ ise band (idempotent yarıgrup),
- Her $a \in S$ için, $a^2 = a$ ve her $k, l \in S$ için, $kl = lk$ ise yarıkafes (değişmeli band),
- Birim elemana sahip bir yarıkafes ise sınırlı yarıkafes,
- Bir band olmak üzere, her $m, r \in S$ için, $mr = m$ veya buna eşdeğer olarak her $w, v, k \in S$ için, $wvk = wk$ ise dikdörtgensel band,
- Her $g, h \in S$ için, $gh = hg$ ve $g^n = rh$ olacak şekilde en az $n, r \in S$ varsa arşimedyan değişmeli yarıgrup,
- Her $n, z \in S$ için, $nz = zn$ olması $n = z$ olmasını gerektiriyor ise hiçbir yerde değişmeli olmayan yarıgrup,
- Her $x, t \in S$ için, $(xy)^n = yt$ olacak şekilde bir $y \in S$ ve pozitif bir n tamsayısı var ise sol zayıf değişmeli yarıgrup,
- Her $p, v \in S$ için, $(pv)^t = rp$ olacak şekilde bir $r \in S$ ve pozitif bir t tamsayısı var ise sağ zayıf değişmeli yarıgrup,
- Hem sol zayıf değişmeli yarıgrup hem de sağ zayıf değişmeli yarıgrup ise yani, her $h, k \in S$ için, $(hk)^m = dh = ks$ olacak şekilde $s, d \in S$ ve pozitif bir m tamsayısı var ise zayıf değişmeli yarıgrup,
- Her $e, p \in S$ için, $ep = pe$ olması en az bir $v \in S$ için, $evp = pve$ olmasını gerektiriyor ise koşullu değişmeli yarıgrup,
- Her $y, x \in S$ için, $yx = (xy)^r$ olacak şekilde pozitif bir r tamsayısı var ise quasi değişmeli yarıgrup,

- Her $p, t, m \in S$ için, $ptm = pmt$ ise sağ değişmeli yarıgrup,
- Her $p, h, r \in S$ için, $phr = hpr$ ise sol değişmeli yarıgrup,
- Her $y, s, m \in S$ için, $ysm = msy$ ise dışsal değişmeli yarıgrup,
- Her $z, v, n, r \in S$ için, $nzvr = nvzr$ ise orta yarıgrup,
- $k \geq 2$ tamsayısı için, $t, m \in S$ olmsk üzere, $(tm)^k = t^k m^k$ ise $E - k$ yarıgrup,
- Her $k \geq 2$ tamsayısı için, $E - k$ yarıgrubu ise üstel yarıgrup,
- Her $p, k, l \in S$ için, $pk = lk$ olması $p = l$ olmasını gerektiriyor ise sağ sadeleştirici yarıgrup,
- Her $h, w, r \in S$ için, $hw = hr$ olması $w = r$ olmasını gerektiriyor ise sol sadeleştirici yarıgrup,
- Hem sol sadeleştirici yarıgrup hem de sağ sadeleştirici yarıgrup ise sadeleştirici yarıgrup,
- Her $b \in S$ için, $b = bcb$ olacak şekilde bir $b \in S$ var ise regüler yarıgrup,
- Her $r \in S$ için, $r = yr^2z$ olacak şekilde $y, z \in S$ var ise iç-regüler yarıgrup,
- Her $u \in S$ için, $u = cu^2$ olacak şekilde $c \in S$ var ise sol regüler yarıgrup,
- Her $g \in S$ için, $g = g^2f$ olacak şekilde $f \in S$ var ise sağ regüler yarıgrup,
- Bir band olmak üzere, her $e, k \in S$ için, $eke = ek$ ise sol-regüler band,
- Bir band olmak üzere, her $a, u \in S$ için $aua = ua$ ise sağ-regüler band,
- Her $w \in S$ için, $w = whw$ ve $wh = hw$ olacak şekilde bir $h \in S$ var ise tamamen regüler yarıgrup,
- Her $c \in S$ için, $c^m = c^m y c^m$ olacak şekilde bir $y \in S$ ve pozitif bir m tamsayısı var ise k -regüler yarıgrup

- Her $m \in S$ için, $mn = m$ ve $nm = n$ olacak şekilde m 'nin tek bir n tersi var ise ters yarıgrup,
- $0 \in S$ yani yutan elemana sahip olmak üzere, her $n, h \in S$ için, $nh = 0$ ise boş (sıfır) yarıgrup,
- Her $t, d \in S$ için, $td = t$ ise sol sıfır yarıgrup,
- Her $e, c \in S$ için, $ec = c$ ise sağ sıfır yarıgrup,
- Kendisi dışında hiçbir sol idealini içermiyor ise sol basit yarıgrup,
- Kendisi dışında hiçbir sağ idealini içermiyor ise sağ basit yarıgrup

olarak adlandırılır.

2.2. Yarıgrupların İdealleri ve Hemen Hemen İdealleri

Bu alt bölümde, yarıgrupların idealleri ve hemen hemen idealleri ile ilgili hatırlatıcı bilgiler verilmiştir.

2.2.1. Tanım S yarıgrupunun boş kümeden farklı bir alt kümesi $\mathfrak{B}$ olmak üzere,

- $\mathfrak{B}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ ise S yarıgrupunun bir alt yarıgrubu,
- $S\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}S \subseteq \mathfrak{B}$) ise S yarıgrupunun bir sol (sağ) ideali; S yarıgrupunun hem bir sol ideali hem de bir sağ ideali ise S yarıgrupunun bir iki taraflı ideali (ideali),
- Bir alt yarıgrup ve $\mathfrak{B}S\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ ise S yarıgrupunun bir bi-ideali (Good ve Hughes, 1952),
- $S\mathfrak{B}S \subseteq \mathfrak{B}$ ise S yarıgrupunun bir iç ideali (Lajos, 1976),
- $S\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}S \subseteq \mathfrak{B}$ ise S yarıgrupunun bir quasi-ideali (Steinfeld, 1956),

- vi. $S\mathfrak{B}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}\mathfrak{B}S \subseteq \mathfrak{B}$) ise S yarıgrubunun bir sol (sağ) zayıf-iç ideali; S yarıgrubunun hem bir sol zayıf-iç ideali hem de bir sağ zayıf-iç ideali ise S yarıgrubunun bir zayıf-iç ideali (Rao, 2020d),
- vii. $S\mathfrak{B}S \cap \mathfrak{B}S\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ ise S yarıgrubunun bir bi-iç ideali (Rao, 2018c),
- viii. $S\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}S\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}S \cap \mathfrak{B}S\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$) ise S yarıgrubunun bir sol (sağ) bi-quasi ideali; S yarıgrubunun hem bir sol bi-quasi ideali hem de bir sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir bi-quasi ideali (Rao, 2020b),
- ix. $S\mathfrak{B}S\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}S\mathfrak{B}S \subseteq \mathfrak{B}$) ise S yarıgrubunun bir sol (sağ) quasi-iç ideali; S yarıgrubunun hem bir sol quasi-iç ideali hem de bir sağ quasi-iç ideali ise S yarıgrubunun bir quasi-iç ideali (Rao, 2020c),
- x. $\mathfrak{B}S\mathfrak{B}S\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ ise S yarıgrubunun bir bi-quasi-iç ideali (Rao, 2018d),
- xi. $\mathfrak{B}S\mathfrak{B}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}\mathfrak{B}S\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$) ise S yarıgrubunun bir sol (sağ) tri-ideali; S yarıgrubunun hem bir sol tri-ideali hem de bir sağ tri-ideali ise S yarıgrubunun bir tri-ideali (Rao, 2024),
- xii. $\mathfrak{B}\mathfrak{B}S\mathfrak{B}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ ise S yarıgrubunun bir tri-quasi-ideali (Rao ve diğerleri, 2024)

olarak adlandırılır.

2.2.2. Tanım S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi $\mathcal{D}$,

- i. $\mathcal{D}\mathcal{D} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen alt yarıgrubu (Iampan ve diğerleri, 2021),
- ii. Her $z \in S$ için, $z\mathcal{D} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ ($\mathcal{D}z \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$) ise S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) ideali; S yarıgrubunun hem bir hemen hemen sol ideali hem de bir hemen hemen sağ ideali ise S yarıgrubunun bir hemen hemen iki taraflı ideali (hemen hemen ideali) (Grosek ve Satko, 1980),
- iii. Her $z \in S$ için, $\mathcal{D}z\mathcal{D} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-ideali (Bogdanovic, 1981),

- iv. Her $z, p \in S$ için, $zDp \cap D \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen iç ideali; her $z \in S$ için, $zDz \cap D \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir zayıf hemen hemen iç ideali (Kaopusek ve diğerleri, 2020),
- v. Her $z \in S$ için, $(zD \cap Dz) \cap D \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-ideali (Wattanatripop ve diğerleri, 2018b),
- vi. Her $z, p, \kappa \in S$ için, $(zDp \cap D\kappa D) \cap D \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç ideali; her $z \in S$ için, $(zDz \cap DzD) \cap D \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir zayıf hemen hemen bi-iç ideali (Gaketem, 2022),
- vii. Her $z, p \in S$ için, $(zD \cap DpD) \cap D \neq \emptyset$ $((Dz \cap DpD) \cap D \neq \emptyset)$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideali; S yarıgrubunun hem bir hemen hemen sol bi-quasi ideali hem de bir hemen hemen sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi ideali (Gaketem ve Chinram, 2023),
- viii. Her $z, p \in S$ için, $zDpD \cap D \neq \emptyset$ $(DzDp \cap D \neq \emptyset)$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideali; S yarıgrubunun hem bir hemen hemen sol quasi-iç ideali hem de bir hemen hemen sağ quasi-iç ideali ise S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-iç ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024a),
- ix. Her $z, p \in S$ için, $DzDpD \cap D \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç ideali; Her $z \in S$ için, $DzDzD \cap D \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir zayıf hemen hemen bi-quasi-iç ideali (Chinram ve Nakkhasen, 2022),
- x. Her $z \in S$ için, $DzDD \cap D \neq \emptyset$ $(DDzD \cap D \neq \emptyset)$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) tri-ideali; S yarıgrubunun hem bir hemen hemen sol tri-ideali hem de bir hemen hemen sağ tri-ideali ise S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024b),
- xi. Her $z \in S$ için, $DDzDD \cap D \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024c)

olarak adlandırılır.

2.3. Esnek Kümeler ve Temel Kavramları

Bu alt bölümde, esnek küme teorisiyle ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

2.3.1. Tanım U başlangıç evrensel kümesi, E parametreler kümesi; $P(U)$, U 'nun kuvvet kümesi ve $K \subseteq E$ olsun. $\forall t \notin K$ için, $h(t) = \emptyset$ olacak şekilde $h_K: E \rightarrow P(U)$ fonksiyonuna, U üzerinde bir esnek küme denir. O halde bir h_K esnek kümesi

$$h_K = \{(t, h_K(t)): t \in E, h_K(t) \in P(U)\}$$

biçiminde sıralı ikililerin kümesidir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Bu yazı boyunca, U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi $S_E(U)$ ile gösterilecektir.

2.3.2. Tanım $h_K \in S_E(U)$ olsun. Her $t \in E$ için, $h_K(t) = \emptyset$ ise h_K esnek kümesine boş esnek küme denir ve $\emptyset_E$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.3. Tanım $h_K \in S_E(U)$ olsun. Her $t \in E$ için, $h_K(t) = U$ ise h_K esnek kümesine evrensel esnek küme denir ve U_E ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.4. Tanım S bir yarıgrup ve $h_S \in S_E(U)$ olsun. Her $t \in S$ için, $h_S(t) = U$ ise h_S esnek kümesine tam esnek küme denir ve $\tilde{S}$ ile gösterilir.

2.3.5. Tanım $h_C, h_D \in S_E(U)$ olsun. Her $t \in S$ için, $h_C(t) \subseteq h_D(t)$ ise h_C esnek kümesine h_D 'nin esnek alt kümesi denir ve $h_C \subseteq h_D$ şeklinde gösterilir. Her $t \in E$ için, $h_C(t) = h_D(t)$ ise h_C ve h_D esnek kümelerine esnek eşit kümeler denir ve $h_C = h_D$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.6. Tanım $h_Y, h_Z \in S_E(U)$ olsun. h_Y ve h_Z esnek kümelerinin esnek birleşimi $h_Y \tilde{\cup} h_Z$, her $t \in E$ için,

$$(h_Y \tilde{\cup} h_Z)(t) = h_Y(t) \cup h_Z(t)$$

şeklinde tanımlanır (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.7. Tanım $h_N, h_M \in S_E(U)$ olsun. h_N ve h_M esnek kümelerinin esnek kesişimi $h_N \tilde{\cap} h_M$, her $t \in E$ için,

$$(h_N \tilde{\cap} h_M)(t) = h_N(t) \cap h_M(t)$$

şeklinde tanımlanır (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.8. Tanım $h_S \in S_E(U)$ olsun. Bu durumda,

$$\text{supp}(h_S) = \{t \in A: h_S(t) \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanan $\text{supp}(h_S)$ kümesine, h_S 'nin destek kümesi denir (Feng ve diğerleri, 2008).

Destek kümesi boş küme olan bir esnek kümenin boş esnek küme olduğu açıktır; aksi takdirde, esnek küme boş esnek küme değildir.

2.3.9. Not $h_S, p_S \in S_E(U)$ olsun. Bu durumda, $h_S \preceq p_S$ ise $\text{supp}(h_S) \subseteq \text{supp}(p_S)$ (Sezgin ve İlgin, 2024a).

2.3.10. Tanım S bir yarıgrup ve $h_S, p_S \in S_E(U)$ olsun. Her $r \in S$ için,

$$(h_S \circ p_S)(r) = \begin{cases} \bigcup_{r=vt} \{h_S(v) \cap p_S(t)\}, & \text{eğer } r = vt \text{ olacak şekilde } \exists v, t \in S \text{ varsa} \\ \emptyset, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $h_S \circ p_S$ esnek kümesine, h_S ve p_S 'nin esnek kesişimsel çarpımı denir (Sezgin ve diğerleri, 2015).

2.3.11. Örnek $S = \{t, \ell\}$ kümesi üzerinde Tablo 2.1 yardımıyla tanımlanan “ $\#$ ” ikili işlemi ile $(S, \#)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

#	t	ℓ
t	t	ℓ
ℓ	ℓ	ℓ

Tablo 2.1. Örnek 2.3.11 'deki “#” ikili işlemi

$U = Z$ evrensel kümesi üzerinde h_S ve p_S esnek kümeleri

$$h_S = \{(t, \{-1, 3, 5\}), (\ell, \{-2, 2\})\}$$

$$p_S = \{(t, \{-3, 3, 9\}), (\ell, \{1, 5\})\}$$

şeklinde tanımlansın.

$$t = tt \text{ ve } \ell = t\ell = \ell t = \ell\ell$$

olduğundan,

$$(h_S \circ p_S)(t) = h_S(t) \cap p_S(t) = \{3\}$$

$$(h_S \circ p_S)(\ell) = \{h_S(t) \cap p_S(\ell)\} \cup \{h_S(\ell) \cap p_S(t)\} \cup \{h_S(\ell) \cap p_S(\ell)\} = \{5\}$$

elde edilir.

2.3.12. Tanım $f_K, f_H \in S_E(U)$ ve φ, K 'den H 'ye bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f_K 'nin φ altındaki esnek görüntüsü $\varphi(f_K)$, her $x \in H$ için,

$$(\varphi(f_K))(x) = \begin{cases} \bigcup \{f_K(a) | a \in K \text{ ve } \varphi(a) = x\}, & x \in \varphi(K) \text{ ise} \\ \emptyset, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve f_H 'nin φ altındaki esnek ön görüntüsü (ya da esnek ters görüntüsü) $\varphi^{-1}(f_H)$, her $a \in K$ için,

$$\left(\varphi^{-1}(f_{\mathbb{H}})\right)(a) = f_{\mathbb{H}}(\varphi(a))$$

şeklinde tanımlanır (Çağman ve diğerleri, 2012).

2.3.13. Teorem $\mathfrak{h}_S \in S_E(U)$ olsun ve $\mathbb{B} \subseteq U$ olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{U}(\mathfrak{h}_S; \mathbb{B}) = \{y \in G \mid \mathfrak{h}_S(y) \supseteq \mathbb{B}\}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{U}(\mathfrak{h}_S; \mathbb{B})$ kümesine $\mathfrak{h}_S$ 'nin üst $\mathbb{B}$ -kapsama kümesi denir (Sezgin, Çağman ve Çıtak, 2019).

2.3.14. Teorem $\mathfrak{h}_S, \mathfrak{p}_S, \mathfrak{n}_S \in S_S(U)$ olsun. O halde,

- i. $(\mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{p}_S) \circ \mathfrak{n}_S = \mathfrak{h}_S \circ (\mathfrak{p}_S \circ \mathfrak{n}_S)$
- ii. Genellikle, $\mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{p}_S \neq \mathfrak{p}_S \circ \mathfrak{h}_S$
- iii. $\mathfrak{h}_S \circ (\mathfrak{p}_S \tilde{\cup} \mathfrak{n}_S) = (\mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{p}_S) \tilde{\cup} (\mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{n}_S)$ ve $(\mathfrak{h}_S \tilde{\cup} \mathfrak{p}_S) \circ \mathfrak{n}_S = (\mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{n}_S) \tilde{\cup} (\mathfrak{p}_S \circ \mathfrak{n}_S)$
- iv. $\mathfrak{h}_S \circ (\mathfrak{p}_S \tilde{\cap} \mathfrak{n}_S) = (\mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{p}_S) \tilde{\cap} (\mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{n}_S)$ ve $(\mathfrak{h}_S \tilde{\cap} \mathfrak{p}_S) \circ \mathfrak{n}_S = (\mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{n}_S) \tilde{\cap} (\mathfrak{p}_S \circ \mathfrak{n}_S)$
- v. $\mathfrak{h}_S \subseteq \mathfrak{p}_S$ ise $\mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{n}_S \subseteq \mathfrak{p}_S \circ \mathfrak{n}_S$ ve $\mathfrak{n}_S \circ \mathfrak{h}_S \subseteq \mathfrak{n}_S \circ \mathfrak{p}_S$
- vi. $\mathfrak{j}_S \subseteq \mathfrak{h}_S$ ve $\mathfrak{u}_S \subseteq \mathfrak{p}_S$ olacak şekilde $\mathfrak{j}_S, \mathfrak{u}_S \in S_S(U)$ ise $\mathfrak{j}_S \circ \mathfrak{u}_S \subseteq \mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{p}_S$ (Sezer ve diğerleri, 2015).

2.3.15. Tanım $A \subseteq S$ olsun. Bu durumda,

$$S_A(\mathfrak{t}) = \begin{cases} U, & \mathfrak{t} \in A \text{ ise} \\ \emptyset, & \mathfrak{t} \in S \setminus A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan S_A esnek kümesine, A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu denir.

S_A 'nın, U üzerinde bir esnek küme olduğu açıktır, yani, $S_A: S \rightarrow P(U)$ (Sezer ve diğerleri, 2015).

S bir yarıgrup olmak üzere, her $t \in S$ için, $f_S(t) = U$ ise f_S esnek kümesinin $\tilde{S}$ ile gösterildiği, yani her $t \in S$ için, $\tilde{S}(t) = U$ olduğu bilinmektedir. O halde, $\tilde{S}$ esnek kümesinin, S 'nin esnek karakteristik fonksiyonu S_S esnek kümesine denk olduğu, yani $\tilde{S} = S_S$ olduğu açıktır.

2.3.16. *Sonuç* S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, $\text{supp}(S_A) = A$ (Sezgin ve İlgin, 2024a).

2.3.17. Teorem $K, H \subseteq S$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i) $K \subseteq H$ olması için gerek ve yeter şart $S_K \subseteq S_H$ olmasıdır.
- ii) $S_K \tilde{\cap} S_H = S_{K \cap H}$ ve $S_K \tilde{\cup} S_H = S_{K \cup H}$
- iii) $S_K \circ S_H = S_{KH}$ (Sezer ve diğerleri, 2015; Sezgin ve İlgin, 2024a).

2.3.18. Tanım $g, r \in S$ olsun. Bu durumda,

$$S_g(r) = \begin{cases} U, & r = g \text{ ise} \\ \emptyset, & r \neq g \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan S_g esnek kümesine, g 'nin esnek karakteristik fonksiyonu denir. S_g 'nin, U üzerinde bir esnek küme olduğu açıktır, yani, $S_g: S \rightarrow P(U)$ (Sezgin ve İlgin, 2024b).

2.3.19. Teorem h_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i) $\tilde{S} \circ \tilde{S} \subseteq \tilde{S}$
- ii) $\tilde{S} \circ h_S \subseteq \tilde{S}$ ve $h_S \circ \tilde{S} \subseteq \tilde{S}$
- iii) $h_S \tilde{\cup} \tilde{S} = \tilde{S}$ ve $h_S \tilde{\cap} \tilde{S} = h_S$ (Sezer ve diğerleri, 2015).

Teorem 2.3.19 (Sezer ve diğerleri, 2015), “ h_S, U üzerinde bir esnek kesişimsel alt yarıgrup olsun” kabulüyle verilmiştir. Ancak bu çalışmada, “ h_S, U üzerinde bir esnek küme olsun” kabulü kullanılmıştır.

2.4. Esnek Kesişimsel İdealler ve Esnek Kesişimsel Hemen Hemen İdealler

Bu alt bölümde, yarıgrupların esnek kesişimsel (hemen hemen) idealleri ile ilgili bilgiler verilmiştir.

2.4.1. Tanım U üzerinde bir h_S esnek kümesi,

- i. Her $g, h \in S$ için, $h_S(gh) \supseteq h_S(g) \cap h_S(h)$ ise S yarıgrupunun U üzerinde bir esnek kesişimsel alt yarıgrubu (Sezer ve diğerleri, 2015),
- ii. Her $z, v \in S$ için, $h_S(zv) \supseteq h_S(v)$ ($h_S(zv) \supseteq h_S(z)$) ise S yarıgrupunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ, iki taraflı) ideali; hem esnek kesişimsel sol ideali hem de esnek kesişimsel sağ ideali ise S yarıgrupunun bir esnek kesişimsel ideali (Sezer ve diğerleri, 2015),
- iii. h_S , bir esnek kesişimsel alt yarıgrup olmak üzere, her $h, b, r \in S$ için, $h_S(hbr) \supseteq h_S(h) \cap h_S(r)$ ise S yarıgrupunun U üzerinde bir esnek kesişimsel bi-ideali (Sezer ve diğerleri, 2015),
- iv. Her $b, y, a \in S$ için, $h_S(bay) \supseteq h_S(a)$ ise S yarıgrupunun U üzerinde bir esnek kesişimsel iç ideali (Sezer ve diğerleri, 2014),
- v. $(h_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ h_S) \subseteq h_S$ ise S yarıgrupunun U üzerinde bir esnek kesişimsel quasi ideali (Sezer ve diğerleri, 2014),
- vi. Her $n, \sigma, q \in S$ için, $h_S(n\sigma q) \supseteq h_S(n) \cap h_S(q)$ ise S yarıgrupunun U üzerinde bir esnek kesişimsel genelleştirilmiş bi-ideali (Sezer ve diğerleri, 2014),
- vii. Her $t, w, r \in S$ için, $h_S(twr) \supseteq h_S(w) \cap h_S(r)$ ($h_S(twr) \supseteq h_S(t) \cap h_S(w)$) ise S yarıgrupunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ) zayıf-iç ideali; hem esnek kesişimsel sol zayıf-iç ideali hem de esnek kesişimsel sağ zayıf-iç ideali ise S yarıgrupunun bir esnek kesişimsel zayıf-iç ideali (İlgin, 2025),

- viii. $(\tilde{S} \circ h_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (h_S \circ \tilde{S} \circ h_S) \subseteq h_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel bi-iç ideali (İlgin, 2025),
- ix. Her $k, h, v, e \in S$ için, $h_S(khve) \supseteq h_S(k) \cap h_S(e)$ ($h_S(khve) \supseteq h_S(k) \cap h_S(v)$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ) quasi-iç ideali; hem esnek kesişimsel sol quasi-iç ideali hem de esnek kesişimsel sağ quasi-iç ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel quasi-iç ideali (Kocakaya, 2025),
- x. Her $y, t, m, z, r \in S$ için, $h_S(ytmzr) \supseteq h_S(y) \cap h_S(m) \cap h_S(r)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel bi-quasi-iç ideali (Baş, 2025),
- xi. Her $\ell, v, n, r \in S$ için, $h_S(\ell vnr) \supseteq h_S(\ell) \cap h_S(n) \cap h_S(r)$ ($h_S(\ell vnr) \supseteq h_S(\ell) \cap h_S(v) \cap h_S(r)$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ) tri-ideali; hem esnek kesişimsel sol tri-ideali hem de esnek kesişimsel sağ tri-ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel tri-ideali (İlgin ve Sezgin, Baskıda a),
- xii. Her $a, s, \eta, t, \vartheta \in S$ için, $h_S(a\eta t\vartheta) \supseteq h_S(a) \cap h_S(s) \cap h_S(t) \cap h_S(\vartheta)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel tri-bi-ideali (İlgin ve Sezgin, Baskıda b)

olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.1 (1) (Sezer ve diğerleri, 2015), “esnek kesişimsel yarıgrup” olarak verilmiştir. Ancak bu çalışmada genelliği kaybetmemek adına bu tanım, “esnek kesişimsel alt yarıgrup” olarak verilmiştir.

Bundan sonra, S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel alt yarıgrubu ((sol/sağ) ideali, (genelleştirilmiş) bi-ideali, iç ideali, quasi-ideali, bi-iç ideali, (sol/sağ) zayıf-iç ideali, (sol/sağ) quasi-iç ideali, bi-quasi-iç ideali, (sol/sağ) tri-ideali, tri-bi-ideali), EK-alt yarıgrup ((sol/sağ) ideal, (genelleştirilmiş) bi-ideal, iç ideal, quasi-ideal, bi-iç ideal, (sol/sağ) zayıf-iç ideal, (sol/sağ) quasi-iç ideal, bi-quasi-iç ideal, (sol/sağ) tri-ideal, tri-bi-ideal) olarak gösterilecektir.

2.4.2. Teorem H , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_H , H kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, H kümesinin S yarıgrubunun bir alt yarıgrubu (sol ideali, sağ ideali, ideali, bi-ideali, genelleştirilmiş bi-ideali, iç ideali) olması için gerek ve yeter şart S_H esnek kümesinin, bir EK-alt yarıgrup (sol ideal, sağ ideal, ideal, bi-ideal, genelleştirilmiş bi-ideal, iç ideal) olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2015, Sezer ve diğerleri, 2014).

2.4.3. Önerme $Im(h_S)$, h_S 'nin görüntü kümesi olmak üzere, $\alpha \in Im(h_S)$ olacak şekilde $\alpha \subseteq U$ ve h_S bir esnek küme olsun. h_S , bir EK-alt yarıgrup ise $\mathcal{U}(h_S; \alpha)$ bir EK-alt yarıgruptur (Sezer ve diğerleri, 2015).

2.4.4. Teorem h_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- i. h_S 'nin bir EK-alt yarıgrup olması için gerek ve yeter şart $h_S \circ h_S \subseteq h_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2015).
- ii. h_S 'nin bir EK-sol (sağ) ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{S} \circ h_S \subseteq h_S$ ($h_S \circ \tilde{S} \subseteq h_S$) olması; h_S 'nin bir EK-ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{S} \circ h_S \subseteq h_S$ ve $h_S \circ \tilde{S} \subseteq h_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2015).
- iii. h_S 'nin bir EK-bi-ideal olması için gerek ve yeter şart $h_S \circ h_S \subseteq h_S$ ve $h_S \circ \tilde{S} \circ h_S \subseteq h_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2015).
- iv. h_S 'nin bir EK-genelleştirilmiş bi-ideal olması için gerek ve yeter şart $h_S \circ \tilde{S} \circ h_S \subseteq h_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2014).
- v. h_S 'nin bir EK-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{S} \circ h_S \circ \tilde{S} \subseteq h_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2014).
- vi. h_S 'nin bir EK-sol (sağ) zayıf-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{S} \circ h_S \circ h_S \subseteq h_S$ ($h_S \circ h_S \circ \tilde{S} \subseteq h_S$) olması; h_S 'nin bir EK-zayıf-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{S} \circ h_S \circ h_S \subseteq h_S$ ve $h_S \circ h_S \circ \tilde{S} \subseteq h_S$ olmasıdır (İlgin, 2025).

- vii. $\mathfrak{h}_S$ 'nin bir EK-bi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $(\tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{h}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}}) \tilde{\cap} (\mathfrak{h}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{h}_S) \subseteq \mathfrak{h}_S$ olmasıdır (İlgin, 2025).
- viii. $\mathfrak{h}_S$ 'nin bir EK-sol (sağ) quasi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{h}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \subseteq \mathfrak{h}_S$ ($\mathfrak{h}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{h}_S \subseteq \mathfrak{h}_S$) olması; $\mathfrak{h}_S$ 'nin bir EK-quasi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{h}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \subseteq \mathfrak{h}_S$ ve $\mathfrak{h}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{h}_S \subseteq \mathfrak{h}_S$ olmasıdır (Kocakaya, 2025).
- ix. $\mathfrak{h}_S$ 'nin bir EK-bi-quasi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{h}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{h}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \subseteq \mathfrak{h}_S$ olmasıdır (Baş, 2025).
- x. $\mathfrak{h}_S$ 'nin bir EK-sol (sağ) tri-ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{h}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{h}_S \subseteq \mathfrak{h}_S$ ($\mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{h}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{h}_S \subseteq \mathfrak{h}_S$) olması; $\mathfrak{h}_S$ 'nin bir EK-tri-ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{h}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{h}_S \subseteq \mathfrak{h}_S$ ve $\mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{h}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{h}_S \subseteq \mathfrak{h}_S$ olmasıdır (İlgin ve Sezgin, Baskıda a).
- xi. $\mathfrak{h}_S$ 'nin bir EK-tri-bi-ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{h}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{h}_S \subseteq \mathfrak{h}_S$ olmasıdır (İlgin ve Sezgin, Baskıda b).

2.4.5. Teorem Bir S yarıgrubu için aşağıdaki koşullar geçerlidir.

- i. Her EK-sol (sağ/iki-taraflı) ideal bir EK-alt yarıgruptur (Sezer ve diğerleri, 2015).
- ii. Her EK-sol (sağ/iki-taraflı) ideal bir EK-bi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2015).
- iii. Her EK-sol (sağ/iki-taraflı) ideal bir EK-genelleştirilmiş bi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).
- iv. Her EK-sol (sağ/iki-taraflı) ideal bir EK-quasi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).
- v. Her EK-ideal bir EK-iç idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).
- vi. Her EK-bi-ideal bir EK-genelleştirilmiş bi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).
- vii. Her EK-quasi-ideal bir EK-alt yarıgruptur (Sezer ve diğerleri, 2014).
- viii. Her EK-quasi-ideal bir EK-bi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).

2.4.6. Tanım U üzerinde bir h_S esnek kümesi,

- i. $(h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ ise h_S esnek kümesine S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen alt yarıgrubu (Sezgin ve İlgin, 2024a),
- ii. Her $k \in S$ için, $(S_k \circ h_S) \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ ($(h_S \circ S_k) \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) ideali; hem esnek kesişimsel hemen hemen sol ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen ideali (Sezgin ve İlgin, 2024b),
- iii. Her $\gamma, \eta \in S$ için, $(S_\gamma \circ h_S \circ S_\eta) \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen iç ideali (Sezgin ve Baş, 2024),
- iv. Her $k, v \in S$ için, $[(h_S \circ S_k) \tilde{\cap} (S_v \circ h_S)] \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen quasi-ideali (Sezgin ve Kocakaya, Baskıda),
- v. Her $t \in S$ için, $(S_t \circ h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ ($(h_S \circ h_S \circ S_t) \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideali; hem esnek kesişimsel hemen hemen sol zayıf-iç ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ zayıf-iç ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen zayıf-iç ideali (Sezgin ve İlgin, 2024e),
- vi. Her $\ell, s, r \in S$ için, $[(S_\ell \circ h_S \circ S_s) \tilde{\cap} (h_S \circ S_r \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-iç ideali; $[(S_\ell \circ h_S \circ S_\ell) \tilde{\cap} (h_S \circ S_\ell \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen bi-iç ideali (Sezgin ve İlgin, 2024d),
- vii. Her $x, y \in S$ için, $[(S_x \circ h_S) \tilde{\cap} (h_S \circ S_y \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol bi-quasi ideali; $[(h_S \circ S_x) \tilde{\cap} (h_S \circ S_y \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sağ bi-quasi ideali; hem esnek kesişimsel hemen hemen sol bi-quasi ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi ideali; $[(S_x \circ h_S) \tilde{\cap} (h_S \circ S_x \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ ($[(h_S \circ S_x) \tilde{\cap} (h_S \circ S_x \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sol (sağ) bi-quasi

ideali; hem esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sol bi-quasi ideali hem de esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen bi-quasi ideali (Sezgin ve İlgin, 2024c),

- viii. Her $p, q \in S$ için, $(S_p \circ h_S \circ S_q \circ h_S) \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ ($h_S \circ S_p \circ h_S \circ S_q \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideali; hem esnek kesişimsel hemen hemen sol quasi-iç ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ quasi-iç ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen quasi-iç ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024a),
- ix. Her $x, y \in S$ için, $(h_S \circ S_x \circ h_S \circ S_y \circ h_S) \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi-iç ideali (Sezgin ve diğerleri, 2025),
- x. Her $z \in S$ için, $(h_S \circ h_S \circ S_z \circ h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen tri-bi-ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024c)

olarak adlandırılır.

Bundan sonra, S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen alt yarıgrubu ((sol/sağ) ideali, iç ideali, quasi-ideali, bi-iç ideali, (sol/sağ) bi-quasi ideali, (sol/sağ) zayıf-iç ideali, (sol/sağ) quasi-iç ideali, bi-quasi-iç ideali, (sol/sağ) tri-bi-ideali), kısaca EK-hemen hemen alt yarıgrup ((sol/sağ) ideal, iç ideal, quasi-ideal, bi-iç ideal, (sol/sağ) bi-quasi ideal, (sol/sağ) zayıf-iç ideal, (sol/sağ) quasi iç-ideal, bi-quasi-iç ideal, tri-bi-ideal) şeklinde ifade edilecektir.

2.4.7. Tanım Bir S yarıgrubu üzerinde $\tilde{S}$ 'den başka hiçbir EK-sol ideal yoksa esnek sol basit* yarıgrup, $\tilde{S}$ 'den başka hiçbir EK-sağ ideal yoksa esnek sağ basit* yarıgrup denir. S yarıgrubu, hem esnek sol basit* hem de esnek sağ basit* yarıgrup ise esnek basit* yarıgrup denir (İlgin, 2025).

Burada, $h_S \in S_E(U)$ olmak üzere, $\tilde{S} \circ h_S$ ve $h_S \circ \tilde{S}$ esnek kümeleri, sırasıyla birer EK-sol ideal ve EK-sağ ideal olduğundan, Sonuç 2.4.8 elde edilir.

2.4.8. *Sonuç* S bir yarıgrup ve h_S, U üzerinde bir esnek küme olsun.

(1) S bir esnek sol basit* yarıgrup ise $\tilde{S} = \tilde{S} \circ h_S$

(2) S bir esnek sağ basit* yarıgrup ise $\tilde{S} = h_S \circ \tilde{S}$

(3) S bir esnek basit* yarıgrup ise $\tilde{S} = \tilde{S} \circ h_S = h_S \circ \tilde{S}$ (İlgin, 2025).

2.4.9. *Sonuç* S yarıgrubu için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) S regülerdir.

(2) h_S ve p_S , birer EK-ideal olmak üzere, $h_S \circ p_S = h_S \tilde{\cap} p_S$ (Sezer ve diğerleri, 2015).

3. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL Bİ-QUASI İDEALLERİ

Bu bölümde, yarıgrupların esnek kesişimsel bi-quasi idealleri adı verilen yeni bir ideal biçimi tanıtılmış, örneği verilmiş ve diğer esnek kesişimsel idealler ile olan ilişkisine bakılarak önemli sonuçlar elde edilmiştir.

3.1. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. $(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$ ise f_S esnek kümesine S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol bi-quasi ideali ve $(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$ ise f_S esnek kümesine S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sağ bi-quasi ideali denir. U üzerinde bir esnek küme S yarı grubunun hem esnek kesişimsel sol bi-quasi ideali hem de esnek kesişimsel sağ bi-quasi ideali ise S yarı grubunun bir esnek kesişimsel bi-quasi idealidir denir.

Bundan sonra, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol bi-quasi ideali kısaca “EK-sol bi-quasi ideal”; S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sağ bi-quasi ideali “EK-sağ bi-quasi ideal” ve S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel bi-quasi ideali ise “EK-bi-quasi ideal” olarak gösterilecektir.

3.2. Örnek $S = \{f, h, r\}$ kümesi üzerinde Tablo 3.1 yardımıyla tanımlanan “ $\diamond$ ” ikili işlemi ile $(S, \diamond)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\diamond$	f	h	r
f	f	r	r
h	r	h	r
r	r	r	r

Tablo 3.1. Örnek 3.2 ’deki “ $\diamond$ ” ikili işlemi

$U = D_3 = \{ \langle x, y \rangle : x^3 = y^2 = e, xy = yx^2 \} = \{e, x, x^2, y, yx, yx^2\}$ evrensel kümesi üzerinde f_S ve h_S esnek kümeleri,

$$f_S = \{(f, \{e, x, x^2\}), (h, \{e, x\}), (r, \{e, x, x^2, y\})\}$$

$$h_S = \{(f, \{e, x, y\}), (h, \{e, x\}), (r, \{e, x^2, y, yx^2\})\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada, f_S bir EK-bi-quasi idealdir.

Öncelikle, $(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} [(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)](f) &= (\tilde{S} \circ f_S)(f) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(f) \\ &= [\tilde{S}(f) \cap f_S(f)] \cap [f_S(f) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(f)] = f_S(f) \cap f_S(f) = f_S(f) \\ &\subseteq f_S(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)](h) &= (\tilde{S} \circ f_S)(h) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(h) \\ &= [\tilde{S}(h) \cap f_S(h)] \cap [f_S(h) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(h)] = f_S(h) \cap f_S(h) = f_S(h) \\ &\subseteq f_S(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)](r) &= (\tilde{S} \circ f_S)(r) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(r) \\ &= [[\tilde{S}(f) \cap f_S(h)] \cup [\tilde{S}(f) \cap f_S(r)] \cup [\tilde{S}(h) \cap f_S(f)] \cup [\tilde{S}(h) \cap f_S(r)] \\ &\quad \cup [\tilde{S}(r) \cap f_S(f)] \cup [\tilde{S}(r) \cap f_S(h)] \cup [\tilde{S}(r) \cap f_S(r)]] \\ &\quad \cap [[f_S(f) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(h)] \cup [f_S(f) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(r)] \cup [f_S(h) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(f)] \\ &\quad \cup [f_S(h) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(r)] \cup [f_S(r) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(f)] \cup [f_S(r) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(h)] \\ &\quad \cup [f_S(r) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(r)]] \\ &= [f_S(h) \cup f_S(r) \cup f_S(f)] \cap [f_S(h) \cup f_S(r) \cup f_S(f)] \\ &= f_S(h) \cup f_S(r) \cup f_S(f) \subseteq f_S(r) \end{aligned}$$

olduğundan, f_S esnek kümesi bir EK-sol bi-quasi idealdir.

Benzer şekilde,

$$[(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)](f) \subseteq f_S(f)$$

$$[(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)](h) \subseteq f_S(h)$$

$$[(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)](r) \subseteq f_S(r)$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir. Dolayısıyla, f_S bir EK-bi-quasi idealdir. Fakat,

$$[(\tilde{S} \circ h_S) \tilde{\cap} (h_S \circ \tilde{S} \circ h_S)](r) = [h_S(h) \cup h_S(r) \cup h_S(f)] \not\subseteq h_S(r)$$

olduğundan, h_S esnek kümesi bir EK-sol bi-quasi ideal değildir. Dolayısıyla, h_S bir EK-bi-quasi ideal değildir.

3.3. *Sonuç* $\tilde{S}$ ve $\emptyset_S$ birer EK-bi-quasi idealdir.

3.4. Teorem A , S yarıgrubunun bir alt yarıgrubu ve S_A , A kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir bi-quasi ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-bi-quasi ideal olmasıdır.

İspat: A , S yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olmak üzere bir bi-quasi ideali olsun. O halde, $SA \cap ASA \subseteq A$ ve $AS \cap ASA \subseteq A$. Böylece, Teorem 2.3.17'den,

$$(\tilde{S} \circ S_A) \tilde{\cap} (S_A \circ \tilde{S} \circ S_A) = (S_S \circ S_A) \tilde{\cap} (S_A \circ S_S \circ S_A) = S_{SA} \tilde{\cap} S_{ASA} = S_{SA \cap ASA} \subseteq S_A$$

ve

$$(S_A \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (S_A \circ \tilde{S} \circ S_A) = (S_A \circ S_S) \tilde{\cap} (S_A \circ S_S \circ S_A) = S_{AS} \tilde{\cap} S_{ASA} = S_{AS \cap ASA} \subseteq S_A$$

elde edilir. Buradan, S_A bir EK-bi-quasi idealdir.

Tersine, S_A bir EK-sol bi-quasi ideal olsun. O halde, $(\tilde{S} \circ S_A) \tilde{\cap} (S_A \circ \tilde{S} \circ S_A) \subseteq S_A$ sağlanır. $x \in SA \cap ASA$ olmak üzere Teorem 2.3.17'den,

$$S_A(x) \supseteq (\tilde{S} \circ S_A)(x) \cap (S_A \circ \tilde{S} \circ S_A)(x) \supseteq S_{SA}(x) \cap S_{ASA}(x) \supseteq S_{SA \cap ASA}(x) = U$$

olduğundan, $S_A(x) = U$, buradan $x \in A$ elde edilir. Sonuç olarak, $SA \cap ASA \subseteq A$. Kabul gereği, A, S yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. Böylece A, S yarıgrubunun bir sol bi-quasi idealidir. Benzer şekilde, $y \in AS \cap ASA$ olmak üzere,

$$S_A(y) \supseteq (S_A \circ \tilde{S})(y) \cap (S_A \circ \tilde{S} \circ S_A)(y) \supseteq S_{AS}(y) \cap S_{ASA}(y) \supseteq S_{AS \cap ASA}(y) = U$$

olduğundan, $S_A(y) = U$, buradan $y \in A$ elde edilir. Sonuç olarak, $AS \cap ASA \subseteq A$. Kabul gereği, A, S yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. Böylece A, S yarıgrubunun bir sağ bi-quasi idealidir. O halde A, S yarıgrubunun bir bi-quasi idealidir.

3.5. Örnek Örnek 3.2’de verilen S yarıgrubunu ele alalım. $B = \{f, r\}$, S kümesinin boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, B kümesinin S yarıgrubunun bir bi-quasi ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Rutin hesaplamalarla, B kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu $S_B = \{(f, U), (h, \emptyset), (r, U)\}$ ’nin bir EK-bi-quasi ideal olduğu gösterilebilir.

Tersine, $K = \{h, r\}$ kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olan f_S EK-bi-quasi idealini $f_S = \{(f, \emptyset), (h, U), (r, U)\}$ olarak alırsak, rutin hesaplamalarla, $K = \{h, r\}$ kümesinin S yarıgrubunun bir bi-quasi ideali olduğu gösterilebilir.

Şimdi, EK-bi-quasi idealler ile diğer EK-idealler arasındaki ilişkilere bakılacaktır.

3.6. Önerme Her EK-bi-ideal, bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

İspat: f_S bir EK-bi-ideal olsun. O halde, $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$$

elde edilir. Böylece, f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

Önerme 3.6’nın karşıtının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.7. Örnek $S = \{m, n, r, s\}$ kümesi üzerinde, Tablo 3.2 yardımıyla tanımlanan “ $\ddagger$ ” ikili işlemi ile $(S, \ddagger)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\S$	m	n	r	s
m	m	m	m	m
n	m	m	m	m
r	m	m	m	n
s	m	m	n	r

Tablo 3.2. Örnek 3.7’deki “ $\S$ ” ikili işlemi

$U = N$ evrensel kümesi üzerinde f_S esnek kümesi,

$$f_S = \{(m, \{1,2,3,4\}), (n, \{1,2,3\}), (r, \{4\}), (s, \{1,2\})\}$$

şeklinde tanımlansın. f_S esnek kümesi bir EK-sağ bi-quasi idealdir. Gerçekten,

$$[(f_S \circ \S) \tilde{\cap} (f_S \circ \S \circ f_S)](m) = f_S(m) \cup f_S(n) \cup f_S(r) \cup f_S(s) \subseteq f_S(m)$$

$$[(f_S \circ \S) \tilde{\cap} (f_S \circ \S \circ f_S)](n) = f_S(s) \subseteq f_S(n)$$

$$[(f_S \circ \S) \tilde{\cap} (f_S \circ \S \circ f_S)](r) = \emptyset \subseteq f_S(r)$$

$$[(f_S \circ \S) \tilde{\cap} (f_S \circ \S \circ f_S)](s) = \emptyset \subseteq f_S(s)$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir. Fakat,

$$(f_S \circ f_S)(r) = f_S(s) \cap f_S(s) \not\subseteq f_S(r)$$

olduğundan, f_S bir EK-bi-ideal değildir.

Önerme 3.8, Önerme 3.6’nın karışının esnek sol basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.8. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek sol basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-bi-idealdir.
2. f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.6'nın ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. Kabul gereği, Sonuç 2.4.8. (1)'den, $\tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S$ olduğu bilinmektedir. f_S bir EK-sağ bi-quasi ideal olmak üzere,

$$f_S \circ f_S = (f_S \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ f_S) \subseteq (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S}) = (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$$

olduğundan f_S bir EK-alt yarıgruptur ve

$$f_S \circ \tilde{S} \circ f_S = (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) = (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-bi-idealdir.

3.9. Önerme Her EK-bi-ideal, bir EK-sol bi-quasi idealdir.

İspat: f_S bir EK-bi-ideal olsun. O halde, $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$$

elde edilir. Böylece, f_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.

Önerme 3.9'un karşıtının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.10. Örnek Örnek 3.7'deki f_S esnek kümesini ele alalım. f_S esnek kümesi bir EK-sol bi-quasi idealdir. Gerçekten,

$$[(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)](m) = f_S(m) \cup f_S(n) \cup f_S(r) \cup f_S(s) \subseteq f_S(m)$$

$$[(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)](n) = f_S(s) \subseteq f_S(n)$$

$$[(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)](r) = \emptyset \subseteq f_S(r)$$

$$[(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)](s) = \emptyset \subseteq f_S(s)$$

olduğundan, f_S esnek kümesi bir EK-sol bi-quasi idealdir. Fakat,

$$(f_S \circ f_S)(r) = f_S(s) \cap f_S(s) \not\subseteq f_S(r)$$

olduğundan, f_S bir EK-bi-ideal değildir.

Önerme 3.11, Önerme 3.9'un karıştının esnek sağ basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.11. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek sağ basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-bi-idealdir.
2. f_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.9'un ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. Kabul gereği, Sonuç 2.4.8. (2)'den, $\tilde{S} = f_S \circ \tilde{S}$ olduğu bilinmektedir. f_S bir EK-sol bi-quasi ideal olmak üzere,

$$f_S \circ f_S = (f_S \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ f_S) \subseteq (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S}) = (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$$

olduğundan f_S bir EK-alt yarıgruptur ve

$$f_S \circ \tilde{S} \circ f_S = (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) = (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-bi-idealdir.

3.12. Teorem Her EK-bi-ideal, bir EK-bi-quasi idealdir.

İspat: İspatı, Önerme 3.6 ve Önerme 3.9'dan açıktır.

Teorem 3.13, Teorem 3.12'nin karşısının esnek basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.13. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-bi-idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Teorem 3.12'den açıktır. (2)'yi kabul edelim. Kabul gereği, S bir esnek sol basit* yarıgrup ve bir esnek sağ basit* yarıgruptur. İspatın devamı, Önerme 3.8 ve Önerme 3.11'den açıktır.

3.14. Önerme Her EK-sağ ideal, bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

İspat: f_S bir EK-sağ ideal olsun. O halde, $f_S \circ \mathbb{S} \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(f_S \circ \mathbb{S}) \cap (f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S) \subseteq f_S \circ \mathbb{S} \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

Ayrıca, f_S bir EK-sağ ideal ise Teorem 2.4.5.(ii)'den, bir EK-bi-idealdir. O halde, Önerme 3.6'dan, f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

Önerme 3.14'ün karşısının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.15. Örnek $S = \{v, z\}$ kümesi üzerinde Tablo 3.3 yardımıyla tanımlanan “ $\odot$ ” ikili işlemi ile $(S, \odot)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\odot$	v	z
v	v	z
z	v	z

Tablo 3.3. Örnek 3.15'teki “ $\odot$ ” ikili işlemi

$U = \mathbb{Z}$ evrensel kümesi üzerinde f_S esnek kümesi,

$$f_S = \{(v, \{1,3\}), (z, \{1,2\})\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada, f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir. Gerçekten,

$$[(f_S \circ \mathbb{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S)](v) = (f_S \circ \mathbb{S})(v) \cap (f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S)(v) = f_S(v) \subseteq f_S(v)$$

$$[(f_S \circ \mathbb{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S)](z) = (f_S \circ \mathbb{S})(z) \cap (f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S)(z) = f_S(z) \subseteq f_S(z)$$

olduğundan, f_S esnek kümesi bir EK-sağ bi-quasi idealdir. Fakat,

$$(f_S \circ \mathbb{S})(v) = [f_S(v) \cap \mathbb{S}(v)] \cup [f_S(z) \cap \mathbb{S}(v)] = f_S(v) \cup f_S(z) \not\subseteq f_S(v)$$

$$(f_S \circ \mathbb{S})(z) = [f_S(v) \cap \mathbb{S}(z)] \cup [f_S(z) \cap \mathbb{S}(z)] = f_S(v) \cup f_S(z) \not\subseteq f_S(z)$$

olduğundan, f_S esnek kümesi bir EK-sağ ideal değildir.

Önerme 3.16, Önerme 3.14'ün karşınının esnek sol basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.16. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek sol basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sağ idealdir.
2. f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.14'ün ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. Kabul gereği, Sonuç 2.4.8. (1)'den, $\tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S$ olduğu bilinmektedir. f_S bir EK-sağ bi-quasi ideal olmak üzere,

$$(f_S \circ \tilde{S}) = (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S}) = (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ idealdir.

3.17. Önerme Her EK-sağ ideal, bir EK-sol bi-quasi idealdir.

İspat: f_S bir EK-sağ ideal olsun. O halde, $f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ ve $f_S \circ f_S \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S \circ f_S \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.

Ayrıca, f_S bir EK-sağ ideal ise Teorem 2.4.5. (ii)'den, bir EK-bi-idealdir. O halde, Önerme 3.9'dan, f_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.

Önerme 3.17'nin karşınının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.18. Örnek Örnek 3.15'teki f_S esnek kümesini ele alalım. f_S esnek kümesi bir EK-sol bi-quasi idealdir. Gerçekten,

$$[(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)](v) = (\tilde{S} \circ f_S)(v) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(v) = f_S(v) \subseteq f_S(v)$$

$$[(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)](z) = (\tilde{S} \circ f_S)(z) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(z) = f_S(z) \subseteq f_S(z)$$

olduğundan, f_S esnek kümesi bir EK-sol bi-quasi idealdir. Fakat,

$$(f_S \circ \tilde{S})(v) = [f_S(v) \cap \tilde{S}(v)] \cup [f_S(z) \cap \tilde{S}(v)] = f_S(v) \cup f_S(z) \not\subseteq f_S(v)$$

$$(f_S \circ \tilde{S})(z) = [f_S(v) \cap \tilde{S}(z)] \cup [f_S(z) \cap \tilde{S}(z)] = f_S(v) \cup f_S(z) \not\subseteq f_S(z)$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ ideal değildir.

Önerme 3.19, Önerme 3.17'nin karşıtının esnek basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.19. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sağ idealdir.
2. f_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Teorem 3.17'nin ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. Kabul gereği, Sonuç 2.4.8. (3)'ten, $\tilde{S} = f_S \circ \tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S$ olduğu bilinmektedir. f_S bir EK-sol bi-quasi ideal olmak üzere,

$$(f_S \circ \tilde{S}) = (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S}) = (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ idealdir.

3.20. Teorem Her EK-sağ ideal, bir EK-bi-quasi idealdir.

İspat: İspatı, Önerme 3.14 ve Önerme 3.17'den açıktır.

Teorem 3.20'nin karşıtının her zaman doğru olmadığı Örnek 3.15 ve Örnek 3.18'den açıktır.

Teorem 3.21, Teorem 3.20'nin karşıtının esnek basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.21. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sağ idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Teorem 3.20'den açıktır. (2)-nin (1)-i gerektirdiği Önerme 3.16 ve Önerme 3.19'dan açıktır.

3.22. Önerme Her EK-sol ideal, bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

İspat: f_S bir EK-sol ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ ve $f_S \circ f_S \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(f_S \circ \tilde{S}) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S \circ f_S \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

Ayrıca, f_S bir EK-sol ideal ise Teorem 2.4.5. (ii)'den, bir EK-bi-idealdir. O halde, Önerme 3.6'dan, f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

Önerme 3.22'nin karşınının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.23. Örnek $S = \{d, k\}$ kümesi üzerinde Tablo 3.4 yardımıyla tanımlanan “ $\otimes$ ” ikili işlemi ile $(S, \otimes)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\otimes$	d	k
d	d	d
k	k	k

Tablo 3.4. Örnek 3.23'teki “ $\otimes$ ” ikili işlemi

$U = \mathbb{Z}$ evrensel kümesi üzerinde f_S esnek kümesi,

$$f_S = \{(d, \{3,6\}), (k, \{3,9\})\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada, f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir. Gerçekten,

$$[(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)](d) = (f_S \circ \tilde{S})(d) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(d) = f_S(d) \subseteq f_S(d)$$

$$[(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)](k) = (f_S \circ \tilde{S})(k) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(k) = f_S(k) \subseteq f_S(k)$$

olduğundan, f_S esnek kümesi bir EK-sağ bi-quasi idealdir. Fakat,

$$(\tilde{S} \circ f_S)(d) = [\tilde{S}(d) \cap f_S(d)] \cup [\tilde{S}(d) \cap f_S(k)] = f_S(d) \cup f_S(k) \not\subseteq f_S(d)$$

$$(\tilde{S} \circ f_S)(k) = [\tilde{S}(k) \cap f_S(d)] \cup [\tilde{S}(k) \cap f_S(k)] = f_S(d) \cup f_S(k) \not\subseteq f_S(k)$$

olduğundan, f_S bir EK-sol ideal değildir.

Önerme 3.24, Önerme 3.22'nin karşıtının esnek basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.24. Önerme f_S, U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sol idealdir.
2. f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.22'nin ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. Kabul gereği, Sonuç 2.4.8. (3)'ten, $\tilde{S} = f_S \circ \tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S$ olduğu bilinmektedir. f_S bir EK-sağ bi-quasi ideal olmak üzere,

$$\tilde{S} \circ f_S = (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S) = (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sol idealdir.

3.25. Önerme Her EK-sol ideal, bir EK-sol bi-quasi idealdir.

İspat: f_S bir EK-sol ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \cong f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(\tilde{S} \circ f_S) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong \tilde{S} \circ f_S \cong f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.

Ayrıca, f_S bir EK-sol ideal ise Teorem 2.4.5. (ii)'den, bir EK-bi-idealdir. O halde, Önerme 3.9'dan, f_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.

Önerme 3.25'in karşıtının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.26. *Örnek* Örnek 3.23'teki f_S esnek kümesini ele alalım. f_S esnek kümesi bir EK-sol bi-quasi idealdir. Gerçekten,

$$[(\tilde{S} \circ f_S) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)](d) = (\tilde{S} \circ f_S)(d) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(d) = f_S(d) \subseteq f_S(d)$$

$$[(\tilde{S} \circ f_S) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)](k) = (\tilde{S} \circ f_S)(k) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(k) = f_S(k) \subseteq f_S(k)$$

olduğundan, f_S esnek kümesi bir EK-sol bi-quasi idealdir. Fakat,

$$(\tilde{S} \circ f_S)(d) = [\tilde{S}(d) \cap f_S(d)] \cup [\tilde{S}(d) \cap f_S(k)] = f_S(d) \cup f_S(k) \not\subseteq f_S(d)$$

$$(\tilde{S} \circ f_S)(k) = [\tilde{S}(k) \cap f_S(d)] \cup [\tilde{S}(k) \cap f_S(k)] = f_S(d) \cup f_S(k) \not\subseteq f_S(k)$$

olduğundan, f_S bir EK-sol ideal değildir.

Önerme 3.27, Önerme 3.25'in karşıtının esnek sağ basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.27. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek sağ basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sol idealdir.

2. f_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.25'in ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. Kabul gereği, Sonuç 2.4.8. (2)'den, $\tilde{S} = f_S \circ \tilde{S}$ olduğu bilinmektedir. f_S bir EK-sol bi-quasi ideal olmak üzere,

$$\tilde{S} \circ f_S = (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S) = (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sol idealdir.

3.28. Teorem Her EK-sol ideal, bir EK-bi-quasi idealdir.

İspat: İspatı, Önerme 3.22 ve Önerme 3.25'ten açıktır.

Teorem 3.28'in karışının her zaman doğru olmadığı Örnek 3.23 ve Örnek 3.26'dan açıktır.

Teorem 3.29, Teorem 3.28'in karışının esnek basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.29. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sol idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Teorem 3.28'den açıktır. (2)-nin (1)-i gerektirdiği Önerme 3.24 ve Önerme 3.27'den açıktır.

3.30. Teorem Her EK-ideal, bir EK-bi-quasi idealdir.

İspat: İspatı, Teorem 3.20 ve Teorem 3.28'den açıktır.

Teorem 3.31, Teorem 3.30'un karşıtının esnek basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.31. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiğı Teorem 3.30'dan açıktır. (2)-nin (1)-i gerektirdiğı Teorem 3.21 ve Teorem 3.28'den açıktır.

3.32. Önerme Her EK-quasi-ideal, bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

İspat: f_S bir EK-quasi ideal olsun. O halde, $(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$$

elde edilir. Böylece, f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

Önerme 3.32'nin karşıtının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.33. *Örnek* Örnek 3.7'deki f_S esnek kümesini ele alalım. f_S esnek kümesi bir EK-sağ bi-quasi idealdir. Fakat,

$$[(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S)](n) = f_S(r) \cup f_S(s) \not\subseteq f_S(n)$$

olduğundan, f_S bir EK-quasi-ideal değildir.

Önerme 3.34, Önerme 3.32'nin karşıtının esnek sağ basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.34. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek sağ basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-quasi-idealdir.
2. f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.32'nin ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. Kabul gereği, Sonuç 2.4.8. (2)'den, $\tilde{S} = f_S \circ \tilde{S}$ olduğu bilinmektedir. f_S bir EK-sağ bi-quasi ideal olmak üzere,

$$(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S) = (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-quasi-idealdir.

3.35. Önerme Her EK-quasi-ideal, bir EK-sol bi-quasi idealdir.

İspat: f_S bir EK-quasi-ideal olsun. O halde, $(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ \tilde{S}) \subseteq (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S}) \subseteq f_S$$

elde edilir. Böylece, f_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.

Önerme 3.35'in karşınının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.36. Örnek Örnek 3.7'deki f_S esnek kümesini ele alalım. f_S esnek kümesi bir EK-sol bi-quasi idealdir. Fakat,

$$[(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S)](n) = f_S(r) \cup f_S(s) \not\subseteq f_S(n)$$

olduğundan, f_S bir EK-quasi-ideal değildir.

Önerme 3.37, Önerme 3.35'in karışının esnek basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.37. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-quasi-idealdir.
2. f_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.35'in ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. Kabul gereği, Sonuç 2.4.8. (3)'ten, $\tilde{S} = f_S \circ \tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S$ olduğu bilinmektedir. f_S bir EK-sol bi-quasi ideal olmak üzere,

$$(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S) = (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-quasi-idealdir.

3.38. Teorem Her EK-quasi-ideal, bir EK-bi-quasi idealdir.

İspat: İspatı, Önerme 3.32 ve Önerme 3.35'ten açıktır.

Teorem 3.38'in karışının her zaman doğru olmadığı Örnek 3.33 ve Örnek 3.36'dan açıktır.

Teorem 3.39, Teorem 3.38'in karışının esnek basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.39. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-quasi-idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Teorem 3.38'den açıktır. (2)-nin (1)-i gerektirdiği Önerme 3.34 ve Önerme 3.37'den açıktır.

3.40. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-iç ideal ise f_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.

İspat: f_S , bir idempotent EK-iç ideal olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ ve $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$. Buradan,

$$(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq \tilde{S} \circ f_S = \tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.

3.41. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-iç ideal ise f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

İspat: f_S , bir idempotent EK-iç ideal olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ ve $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$. Buradan,

$$(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S \circ \tilde{S} = f_S \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

3.42. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-iç ideal ise f_S bir EK bi-quasi idealdir.

İspat: İspatı, Önerme 3.40 ve Önerme 3.41'den açıktır.

3.43. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-iç idealdir.
2. f_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.

İspat: (1)'i kabul edelim. f_S bir EK-iç ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği, Sonuç 2.4.8. (3)'den, $\tilde{S} = f_S \circ \tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S$. Buradan,

$$(\tilde{S} \circ f_S) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S = \tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.

Tersine, (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-sol bi-quasi ideal olsun. O halde, $(\tilde{S} \circ f_S) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği, Sonuç 2.4.8. (3)'den, $\tilde{S} = f_S \circ \tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S$. f_S 'nin bir EK-iç ideal olduğunu göstermek için, $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ olduğunu göstermek yeterlidir. Buradan,

$$\begin{aligned} \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} &= (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \cap (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) = (\tilde{S} \circ \tilde{S} \circ f_S) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ \tilde{S}) \subseteq (\tilde{S} \circ f_S) \cap (f_S \circ \tilde{S}) \\ &= (\tilde{S} \circ f_S) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S \end{aligned}$$

olduğundan, f_S bir EK-iç idealdir.

3.44. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-iç idealdir.
2. f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

İspat: (1)'i kabul edelim. f_S bir EK-iç ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği, Sonuç 2.4.8. (3)'ten, $\tilde{S} = f_S \circ \tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S$. Buradan,

$$(f_S \circ \tilde{S}) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S = \tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

Tersine, (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-sağ bi-quasi ideal olsun. O halde, $(f_S \circ \tilde{S}) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği, Sonuç 2.4.8. (3)'den, $\tilde{S} =$

$f_S \circ \mathbb{S} = \mathbb{S} \circ f_S$. f_S 'nin bir EK-iç ideal olduğunu göstermek için, $\mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S} \subseteq f_S$ olduğunu göstermek yeterlidir. Buradan,

$$\begin{aligned} \mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S} &= (\mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S}) \cap (\mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S}) = (f_S \circ \mathbb{S} \circ \mathbb{S}) \cap (f_S \circ \mathbb{S} \circ \mathbb{S}) \subseteq (f_S \circ \mathbb{S}) \cap (f_S \circ \mathbb{S}) \\ &= (f_S \circ \mathbb{S}) \cap (f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S) \subseteq f_S \end{aligned}$$

olduğundan, f_S bir EK-iç idealdir.

3.45. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-iç idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi idealdir.

İspat: İspatı, Önerme 3.43 ve Önerme 3.44'ten açıktır.

3.46. Önerme f_S ve h_S birer EK-sol (sağ) bi-quasi ideal olsun. Bu durumda, $f_S \cap h_S$ bir EK-sol (sağ) bi-quasi idealdir.

İspat: İspat, EK-sol bi-quasi ideal için verilecek olup EK-sağ bi-quasi ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S ve h_S birer EK-sol bi-quasi ideal olsun. Buradan,

$$(\mathbb{S} \circ f_S) \cap (f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S) \subseteq f_S \text{ ve } (\mathbb{S} \circ h_S) \cap (h_S \circ \mathbb{S} \circ h_S) \subseteq h_S$$

olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$[\mathbb{S} \circ (f_S \cap h_S)] \cap [(f_S \cap h_S) \circ \mathbb{S} \circ (f_S \cap h_S)] \subseteq (\mathbb{S} \circ f_S) \cap (f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S) \subseteq f_S$$

ve

$$[\mathbb{S} \circ (f_S \cap h_S)] \cap [(f_S \cap h_S) \circ \mathbb{S} \circ (f_S \cap h_S)] \subseteq (\mathbb{S} \circ h_S) \cap (h_S \circ \mathbb{S} \circ h_S) \subseteq h_S$$

olup,

$$[\tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S)] \tilde{\cap} [(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S)] \subseteq f_S \tilde{\cap} h_S$$

elde edilir. Buradan, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-sol bi-quasi idealdir.

3.47. Teorem f_S ve h_S birer EK-bi-quasi ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-bi-quasi idealdir.

3.48. Sonuç EK-bi-quasi ideallerin sonlu esnek kesişimleri de bir EK-bi-quasi idealdir.

3.49. Önerme f_S ve h_S birer EK-sol (sağ) ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-sol (sağ) bi-quasi idealdir.

İspat: İspat, EK-sol bi-quasi ideal için verilecek olup EK-sağ bi-quasi ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S ve h_S birer EK-sol ideal olsun. Buradan, $\tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ ve $\tilde{S} \circ h_S \subseteq h_S$ olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$[\tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S)] \tilde{\cap} [(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S)] \subseteq (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$$

ve

$$[\tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S)] \tilde{\cap} [(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S)] \subseteq (\tilde{S} \circ h_S) \tilde{\cap} (h_S \circ \tilde{S} \circ h_S) \subseteq \tilde{S} \circ h_S \subseteq h_S$$

olup,

$$[\tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S)] \tilde{\cap} [(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S)] \subseteq f_S \tilde{\cap} h_S$$

elde edilir. Buradan, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-sol bi-quasi idealdir.

3.50. Teorem f_S ve h_S birer EK-ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-bi-quasi idealdir.

3.51. Teorem f_S ve h_S sırasıyla birer EK-sağ ideal ve EK-sol ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-bi-quasi idealdir.

İspat: f_S ve h_S sırasıyla birer EK-sağ ideal ve EK-sol ideal olsun. Buradan,

$$f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S, \tilde{S} \circ h_S \subseteq h_S, f_S \circ f_S \subseteq f_S \text{ ve } h_S \circ h_S \subseteq h_S$$

olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$[\tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S)] \tilde{\cap} [(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S)] \subseteq (\tilde{S} \circ h_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq h_S \tilde{\cap} (f_S \circ f_S) \subseteq h_S \tilde{\cap} f_S$$

elde edilip, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-sol bi-quasi idealdir. Benzer şekilde,

$$[(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{S}] \tilde{\cap} [(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S)] \subseteq (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (h_S \circ \tilde{S} \circ h_S) \subseteq f_S \tilde{\cap} (h_S \circ h_S) \subseteq f_S \tilde{\cap} h_S$$

olduğundan, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-sağ bi-quasi idealdir. Böylece, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-bi-quasi idealdir.

3.52. Teorem f_S , bir EK-sol bi-quasi ideal ve h_S bir EK-sol ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-sol bi-quasi idealdir.

İspat: f_S bir EK-sol bi-quasi ideal ve h_S bir EK-sol ideal olsun. Buradan, $(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$ ve $\tilde{S} \circ h_S \subseteq h_S$ olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$[\tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S)] \tilde{\cap} [(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S)] \subseteq (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$$

ve

$$[\tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S)] \tilde{\cap} [(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S)] \subseteq (\tilde{S} \circ h_S) \tilde{\cap} (h_S \circ \tilde{S} \circ h_S) \subseteq \tilde{S} \circ h_S \subseteq h_S$$

olup,

$$[\tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S)] \tilde{\cap} [(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S)] \subseteq f_S \tilde{\cap} h_S$$

elde edilir. Buradan, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-sol bi-quasi idealdir.

3.53. Teorem f_S , bir EK-sol ideal ve h_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda, $f_S \circ h_S$ bir EK-sol bi-quasi idealdir.

İspat: f_S bir EK-sol ideal olsun. Buradan, $\tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$[\tilde{S} \circ (f_S \circ h_S)] \tilde{\cap} [(f_S \circ h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \circ h_S)] \subseteq \tilde{S} \circ (f_S \circ h_S) = (\tilde{S} \circ f_S) \circ h_S \subseteq f_S \circ h_S$$

olduğundan, $f_S \circ h_S$ bir EK-sol bi-quasi idealdir.

3.54. Teorem f_S , bir EK-sağ ideal ve h_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda, $h_S \circ f_S$ bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

İspat: f_S bir EK-sağ ideal olsun. Buradan, $f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$[(h_S \circ f_S) \circ \tilde{S}] \tilde{\cap} [(h_S \circ f_S) \circ \tilde{S} \circ (h_S \circ f_S)] \subseteq (h_S \circ f_S) \circ \tilde{S} = h_S \circ (f_S \circ \tilde{S}) \subseteq h_S \circ f_S$$

olduğundan, $h_S \circ f_S$ bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

3.55. Teorem f_S , boş esnek kümeden farklı bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S esnek kümesinin $(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cup} (f_S \circ \tilde{S})$ esnek kümesini kapsayan her esnek alt kümesi, bir EK-bi-quasi idealdir.

İspat: h_S , f_S esnek kümesinin $(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cup} (f_S \circ \tilde{S})$ esnek kümesini kapsayan bir esnek alt kümesi olsun. Bu durumda,

$$\tilde{S} \circ h_S \subseteq \tilde{S} \circ f_S \subseteq (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cup} (f_S \circ \tilde{S}) \subseteq h_S$$

elde edilir. Böylece, $\tilde{S} \circ h_S \subseteq h_S$ olup, h_S bir EK-sol idealdir. Buradan,

$$h_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S \circ \tilde{S} \subseteq (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cup} (f_S \circ \tilde{S}) \subseteq h_S$$

elde edilir. Böylece, $h_S \circ \tilde{S} \subseteq h_S$ olup, h_S bir EK-sağ idealdir. Sonuç olarak, h_S bir EK-idealdir.

O halde, Teorem 3.30'dan, h_S bir EK-bi-quasi idealdir. Buradan, f_S 'nin $(\tilde{S} \circ f_S) \cup (f_S \circ \tilde{S})$ esnek kümesini kapsayan her esnek alt kümesinin bir EK-bi-quasi ideal olduğu açıktır.

3.56. Teorem f_S , boş esnek kümeden farklı bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S esnek kümesinin $\tilde{S} \circ f_S$ esnek kümesini kapsayan her esnek alt kümesi, bir EK-sol bi-quasi idealdir.

İspat: h_S, f_S esnek kümesinin $\tilde{S} \circ f_S$ esnek kümesini kapsayan bir esnek alt kümesi olsun.

Bu durumda,

$$\tilde{S} \circ h_S \subseteq \tilde{S} \circ f_S \subseteq h_S$$

elde edilir. Böylece, $\tilde{S} \circ h_S \subseteq h_S$ olup, h_S bir EK-sol idealdir.

O halde, Önerme 3.25'ten, h_S bir EK-sol bi-quasi idealdir. Buradan, f_S 'nin $\tilde{S} \circ f_S$ esnek kümesini kapsayan her esnek alt kümesinin bir EK-sol bi-quasi ideal olduğu açıktır.

3.57. Teorem f_S , boş esnek kümeden farklı bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S esnek kümesinin $(\tilde{S} \circ f_S) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$ esnek kümesini kapsayan her esnek alt kümesi, bir EK-sol bi-quasi idealdir.

İspat: h_S, f_S esnek kümesinin $(\tilde{S} \circ f_S) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$ esnek kümesini kapsayan bir esnek alt kümesi olsun. Bu durumda, $\tilde{S} \circ h_S \subseteq \tilde{S} \circ f_S$ ve $h_S \circ \tilde{S} \circ h_S \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S$ elde edilir. Böylece,

$$(\tilde{S} \circ h_S) \cap (h_S \circ \tilde{S} \circ h_S) \subseteq (\tilde{S} \circ f_S) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq h_S$$

olduğundan, h_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.

3.58. Önerme f_S , bir EK-alt yarıgrup, $Im(f_S)$, f_S 'nin görüntü kümesi, $a \in Im(f_S)$ olmak üzere a , U kümesinin alt kümesi olsun. f_S , bir EK-sol (sağ) bi-quasi ideal ise $\mathcal{U}(f_S; a)$, S yarıgrupunun bir sol (sağ) bi-quasi idealidir.

İspat: İspat EK-sol bi-quasi ideal için verilecek olup EK-sağ bi-quasi ideal için de benzer şekilde yapılır. Bazı $x \in S$ için, $f_S(x) = a$ ise $\emptyset \neq \mathcal{U}(f_S; a) \subseteq S$ olur. $k \in (S \cdot \mathcal{U}(f_S; a)) \cap (\mathcal{U}(f_S; a) \cdot S \cdot \mathcal{U}(f_S; a))$ olsun. $k = sx = yrz$ olacak şekilde $x, y, z \in \mathcal{U}(f_S; a)$ ve $r, s \in S$ alalım. O halde, $f_S(x) \supseteq a$, $f_S(y) \supseteq a$ ve $f_S(z) \supseteq a$. Buradan,

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{S}} \circ f_S)(k) &= \bigcup_{k=mn} \{\tilde{\mathcal{S}}(m) \cap f_S(n)\} \\ &\supseteq \tilde{\mathcal{S}}(s) \cap f_S(x) \\ &= U \cap f_S(x) \\ &= f_S(x) \\ &\supseteq a \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (f_S \circ \tilde{\mathcal{S}} \circ f_S)(k) &= \bigcup_{k=mn} \{f_S(m) \cap (\tilde{\mathcal{S}} \circ f_S)(n)\} \\ &\supseteq f_S(x) \cap (\tilde{\mathcal{S}} \circ f_S)(yz) \\ &= f_S(x) \cap \bigcup_{yz=pq} \{\tilde{\mathcal{S}}(p) \cap f_S(q)\} \\ &\supseteq f_S(x) \cap f_S(y) \cap f_S(z) \\ &\supseteq a \cap a \cap a \\ &= a \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $(\tilde{\mathcal{S}} \circ f_S)(k) \cap (f_S \circ \tilde{\mathcal{S}} \circ f_S)(k) \supseteq a$. f_S bir EK-sol bi-quasi ideal olduğundan, $f_S(k) \supseteq (\tilde{\mathcal{S}} \circ f_S)(k) \cap (f_S \circ \tilde{\mathcal{S}} \circ f_S)(k) \supseteq a$. Buradan, $k \in \mathcal{U}(f_S; a)$. O halde, $\mathcal{U}(f_S; a)$, S yarıgrupunun bir bi-quasi idealidir.

3.59. Teorem f_S , bir EK-alt yarıgrup, $Im(f_S)$, f_S 'nin görüntü kümesi, $a \in Im(f_S)$ olmak üzere a , U kümesinin alt kümesi olsun. f_S , bir EK-bi-quasi ideal ise $\mathcal{U}(f_S; a)$, S yarıgrupunun bir bi-quasi idealidir.

Teorem 3.59'u bir örnek ile gösterelim:

3.60. *Örnek* Örnek 3.2'deki f_S esnek kümesini ele alalım. Örnek 3.2'de f_S esnek kümesinin bir EK-bi-quasi ideal olduğu açıktır.

$Im(f_S) = \{\{e, x, x^2, y\}, \{e, x, x^2\}, \{e, x\}\}$ olduğu dikkate alınarak,

$$\mathcal{U}(f_S; a) = \begin{cases} \{f, h, r\}, & \alpha = \{e, x\} \\ \{f, r\}, & \alpha = \{e, x, x^2\} \\ \{r\}, & \alpha = \{e, x, x^2, y\} \end{cases}$$

elde edilir.

Burada, $\{f, h, r\}$, $\{f, r\}$ ve $\{r\}$ kümeleri S yarıgrupunun birer bi-quasi idealleridir. Gerçekten de;

$$\{r\} \cdot \{r\} \subseteq \{r\}$$

$$\{f, r\} \cdot \{f, r\} \subseteq \{f, r\}$$

$$\{f, h, r\} \cdot \{f, h, r\} \subseteq \{f, h, r\}$$

olduğundan, her bir $\mathcal{U}(f_S; a)$, S yarıgrupunun birer alt yarıgrupudur. Benzer şekilde,

$$(S \cdot \{r\}) \cap (\{r\} \cdot S \cdot \{r\}) \subseteq \{r\} \cap \{r\} \subseteq \{r\}$$

$$(S \cdot \{f, r\}) \cap (\{f, r\} \cdot S \cdot \{f, r\}) \subseteq \{f, r\} \cap \{f, r\} \subseteq \{f, r\}$$

$$(S \cdot \{f, h, r\}) \cap (\{f, h, r\} \cdot S \cdot \{f, h, r\}) \subseteq \{f, h, r\} \cap \{f, h, r\} \subseteq \{f, h, r\}$$

olduğundan, her bir $\mathcal{U}(f_S; a)$, S yarıgrubunun birer sol bi-quasi ideali ve benzer şekilde,

$$(\{r\}.S) \cap (\{r\}.S.\{r\}) \subseteq \{r\} \cap \{r\} \subseteq \{r\}$$

$$(\{f, r\}.S) \cap (\{f, r\}.S.\{f, r\}) \subseteq \{f, r\} \cap \{f, r\} \subseteq \{f, r\}$$

$$(\{f, h, r\}.S) \cap (\{f, h, r\}.S.\{f, h, r\}) \subseteq \{f, h, r\} \cap \{f, h, r\} \subseteq \{f, h, r\}$$

olduğundan, her bir $\mathcal{U}(f_S; a)$, S yarıgrubunun birer sağ bi-quasi idealidir. Böylece, her bir $\mathcal{U}(f_S; a)$, S yarıgrubunun birer bi-quasi idealidir.

Şimdi ise Örnek 3.2'deki h_S esnek kümesini ele alalım.

$Im(h_S) = \{\{e, x^2, y, yx^2\}, \{e, x, y\}, \{e, x\}\}$ olduğu dikkate alınarak,

$$\mathcal{U}(h_S; a) = \begin{cases} \{f, h\}, & \alpha = \{e, x\} \\ \{f, r\}, & \alpha = \{e, x, y\} \\ \{r\}, & \alpha = \{e, x^2, y, yx^2\} \end{cases}$$

elde edilir.

Burada, $\{f, h\}$ kümesi S yarıgrubunun bir bi-quasi ideali değildir. Gerçekten de;

$$(S.\{f, h\}) \cap (\{f, h\}.S.\{f, h\}) \subseteq \{f, h, r\} \cap \{f, h, r\} \not\subseteq \{f, h\}$$

olduğundan, $\mathcal{U}(h_S; a)$ 'lardan birinin S yarıgrubunun bir sol bi-quasi ideali olmadığı, dolayısıyla, $\mathcal{U}(h_S; a)$ 'nın S yarıgrubunun bir bi-quasi ideali olmadığı görülmektedir. Diğer taraftan, h_S esnek kümesinin bir EK-bi-quasi ideal olmadığı Örnek 3.2'den açıktır.

3.61. Önerme S bir yarıgrup ve f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda, aşağıdaki şartlar denktir:

1. S regülerdir.

2. f_S bir EK-sol bi-quasi ideal olmak üzere, $f_S = (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$.

İspat: (1)'i kabul edelim. S regüler yarıgrup olsun. O halde, her $x \in S$ için, $x = xyx$ olacak şekilde bir $y \in S$ vardır. f_S bir EK-sol bi-quasi ideal olduğundan, $(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$ açıktır. Buradan,

$$\begin{aligned} (\tilde{S} \circ f_S)(x) &= \bigcup_{x=kn} \{\tilde{S}(k) \cap f_S(n)\} \\ &\supseteq \tilde{S}(xy) \cap f_S(x) \\ &= U \cap f_S(x) \\ &= f_S(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(x) &= \bigcup_{x=kn} \{f_S(k) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(n)\} \\ &\supseteq f_S(x) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(yx) \\ &= f_S(x) \cap \bigcup_{yx=rs} \{\tilde{S}(r) \cap f_S(s)\} \\ &\supseteq f_S(x) \cap \tilde{S}(y) \cap f_S(x) \\ &= f_S(x) \cap U \cap f_S(x) \\ &= f_S(x) \end{aligned}$$

olup, $(\tilde{S} \circ f_S)(x) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(x) \supseteq f_S(x) \cap f_S(x) \supseteq f_S(x)$ elde edilir. Buradan, $f_S \subseteq (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$ olur.

Böylece, $f_S = (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$.

Tersine, f_S bir EK-sol bi-quasi ideal olmak üzere, $f_S = (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$ olsun. S yarıgrupunun regüler olduğunu göstermek için, S yarıgrupunun her sol bi-quasi ideali A için $A = SA \cap ASA$ sağlandığını göstermek gerekir. A , S yarıgrupunun bir sol bi-quasi ideali olsun. O halde, $SA \cap ASA \subseteq A$ açıktır. Bu durumda, $A \subseteq SA \cap ASA$ olduğunu göstermek

yeterlidir. $b \in A$ olsun. A, S yarıgrubunun bir sol bi-quasi ideali olduğundan, Teorem 3.4'ten, S_A bir EK-sol bi-quasi idealdir. Kabul gereği ve Teorem 2.3.17'den,

$$\begin{aligned} S_A(b) &= (\tilde{S} \circ S_A)(b) \cap (S_A \circ \tilde{S} \circ S_A)(b) = (S_S \circ S_A)(b) \cap (S_A \circ S_S \circ S_A)(b) = S_{SA \cap ASA}(b) \\ &= U \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $b \in SA \cap ASA$ olup, $A = SA \cap ASA$ elde edilir. Böylece, S regüler bir yarıgruptur.

3.62. Önerme S bir yarıgrup ve f_S, U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda, aşağıdaki şartlar denktir:

1. S regülerdir.
2. f_S bir EK-sağ bi-quasi ideal olmak üzere, $f_S = (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$.

İspat: (1)'i kabul edelim. S regüler yarıgrup olsun. O halde, her $x \in S$ için, $x = xyx$ olacak şekilde bir $y \in S$ vardır. f_S bir EK-sağ bi-quasi ideal olduğundan, $(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$ açıktır. Buradan,

$$\begin{aligned} (f_S \circ \tilde{S})(x) &= \bigcup_{x=kn} \{f_S(k) \cap \tilde{S}(n)\} \\ &\supseteq f_S(x) \cap \tilde{S}(yx) \\ &= f_S(x) \cap U \\ &= f_S(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(x) &= \bigcup_{x=kn} \{f_S(k) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(n)\} \\ &\supseteq f_S(x) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(yx) \\ &= f_S(x) \cap \bigcup_{yx=rs} \{\tilde{S}(r) \cap f_S(s)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\supseteq f_S(x) \cap \tilde{S}(y) \cap f_S(x) \\
&= f_S(x) \cap U \cap f_S(x) \\
&= f_S(x)
\end{aligned}$$

olup, $(f_S \circ \tilde{S})(x) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(x) \supseteq f_S(x) \cap f_S(x) \supseteq f_S(x)$ elde edilir. Buradan, $f_S \subseteq (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$ olur.

Böylece, $f_S = (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$.

Tersine, f_S bir EK-sağ bi-quasi ideal olmak üzere, $f_S = (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$ olsun. S yarıgrubunun regüler olduğunu göstermek için, S yarıgrubunun her sağ bi-quasi ideali A için $A = AS \cap ASA$ sağlandığını göstermek gerekir. A , S yarıgrubunun bir sağ bi-quasi ideali olsun. O halde, $AS \cap ASA \subseteq A$ açıktır. Bu durumda, $A \subseteq AS \cap ASA$ olduğunu göstermek yeterlidir. $b \in A$ olsun. A , S yarıgrubunun bir sağ bi-quasi ideali olduğundan, Teorem 3.4'ten, S_A bir EK-sağ bi-quasi idealdir. Kabul gereği ve Teorem 2.3.17'den,

$$\begin{aligned}
S_A(b) &= (S_A \circ \tilde{S})(b) \cap (S_A \circ \tilde{S} \circ S_A)(b) = (S_A \circ S_S)(b) \cap (S_A \circ S_S \circ S_A)(b) = S_{AS \cap ASA}(b) \\
&= U
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $b \in AS \cap ASA$ olup, $A = AS \cap ASA$ elde edilir. Böylece, S regüler bir yarıgruptur.

3.63. Teorem S bir yarıgrup ve f_S, U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda, aşağıdaki şartlar denktir:

1. S regülerdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi ideal olmak üzere, $f_S = (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) = (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$.

İspat: İspatı, Önerme 3.61 ve Önerme 3.62'den açıktır.

3.64. Önerme Regüler bir yarıgrubun her EK-sol bi-quasi ideali, bir EK-quasi-idealdir.

İspat: f_S EK-sol bi-quasi ideal olsun. Buradan, $(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong f_S$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca $f_S \circ \tilde{S}$ ve $\tilde{S} \circ f_S$ 'nin sırasıyla EK-sağ ideal ve EK-sol ideal olduğu bilinmektedir. Sonuç 2.4.9 'dan $(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S) = f_S \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ f_S$ olduğu açıktır. Böylece,

$$(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S) \cong \tilde{S} \circ f_S$$

ve

$$(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S) = f_S \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ f_S \cong f_S \circ \tilde{S} \circ f_S$$

olup,

$$(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S) \cong (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong f_S$$

elde edilir. Buradan, f_S bir EK-quasi-idealdir.

3.65. Önerme Regüler bir yarıgrubun her EK-sağ bi-quasi ideali, bir EK-quasi-idealdir.

İspat: f_S EK-sağ bi-quasi ideal olsun. Buradan, $(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong f_S$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca $f_S \circ \tilde{S}$ ve $\tilde{S} \circ f_S$ 'nin sırasıyla EK-sağ ideal ve EK-sol ideal olduğu bilinmektedir. Sonuç 2.4.9 'dan $(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S) = f_S \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ f_S$ olduğu açıktır. Böylece,

$$(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S) \cong f_S \circ \tilde{S}, (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S) = f_S \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ f_S \cong f_S \circ \tilde{S} \circ f_S$$

olup,

$$(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S) \cong (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong f_S$$

elde edilir. Buradan, f_S bir EK-quasi-idealdir.

3.66. Teorem Regüler bir yarıgrubun her EK-bi-quasi ideali, bir EK-quasi-idealdir.

İspat: İspatı, Önerme 3.64 ve Önerme 3.65'ten açıktır.

4. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN Bİ-İDEALLERİ

Bu bölüm, yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen bi-idealleri üzerine olup, bölümde Sezgin ve Onur (2024) çalışmasından elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

4.1. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ise f_S esnek kümesine, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-ideali denir.

Bundan sonra, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel bi-ideali kısaca “EK-hemen hemen bi-ideal” olarak gösterilecektir.

4.2. Örnek $S = \{n, r\}$ kümesi üzerinde, Tablo 4.1 yardımıyla tanımlanan “ $\cdot$ ” ikili işlemi ile $(S, \cdot)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\cdot$	n	r
n	n	r
r	r	n

Tablo 4.1. Örnek 4.2 ’deki “ $\cdot$ ” ikili işlemi

$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ evrensel kümesi üzerinde f_S esnek kümesi,

$$f_S = \left\{ \left(n, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right), \left(r, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\} \right) \right\}$$

şeklinde tanımlansın.

Burada, f_S bir EK-hemen hemen bi-idealdir. Öncelikle, her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim.

S_n ile başlayacak olursak:

$$\begin{aligned}
& [(f_S \circ S_n \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](n) = (f_S \circ S_n \circ f_S)(n) \cap f_S(n) \\
& = [((f_S \circ S_n)(n) \cap f_S(n)) \cup ((f_S \circ S_n)(r) \cap f_S(r))] \cap f_S(n) \\
& = [([(f_S(n) \cap S_n(n)) \cup (f_S(r) \cap S_n(r))] \cap f_S(n)) \cup [(f_S(r) \cap S_n(n)) \\
& \cup (f_S(n) \cap S_n(r))] \cap f_S(r))] \cap f_S(n) \\
& = [(f_S(n) \cap f_S(n)) \cup (f_S(r) \cap f_S(r))] \cap f_S(n) = [f_S(n) \cup f_S(r)] \cap f_S(n) \\
& = f_S(n) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(f_S \circ S_n \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](r) = (f_S \circ S_n \circ f_S)(r) \cap f_S(r) \\
& = [((f_S \circ S_n)(r) \cap f_S(n)) \cup ((f_S \circ S_n)(n) \cap f_S(r))] \cap f_S(r) \\
& = [([(f_S(r) \cap S_n(n)) \cup (f_S(n) \cap S_n(r))] \cap f_S(n)) \\
& \cup [(f_S(n) \cap S_n(n)) \cup (f_S(r) \cap S_n(r))] \cap f_S(r))] \cap f_S(r) \\
& = [(f_S(r) \cap f_S(n)) \cup (f_S(n) \cap f_S(r))] \cap f_S(r) = [f_S(n) \cap f_S(r)] \cap f_S(r) \\
& = f_S(n) \cap f_S(r) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_n \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \left\{ \left(n, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right), \left(r, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right) \right\} \neq \emptyset_s$$

S_r ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned}
& [(f_S \circ S_r \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](n) = (f_S \circ S_r \circ f_S)(n) \cap f_S(n) \\
& = [((f_S \circ S_r)(n) \cap f_S(n)) \cup ((f_S \circ S_r)(r) \cap f_S(r))] \cap f_S(n) \\
& = [([(f_S(n) \cap S_r(n)) \cup (f_S(r) \cap S_r(r))] \cap f_S(n)) \cup [(f_S(r) \cap S_r(n)) \\
& \cup (f_S(n) \cap S_r(r))] \cap f_S(r))] \cap f_S(n) \\
& = [(f_S(r) \cap f_S(n)) \cup (f_S(n) \cap f_S(r))] \cap f_S(n) = [f_S(n) \cap f_S(r)] \cap f_S(n) \\
& = f_S(n) \cap f_S(r) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(f_S \circ S_r \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](r) = (f_S \circ S_r \circ f_S)(r) \cap f_S(r) \\
& = [((f_S \circ S_r)(r) \cap f_S(n)) \cup ((f_S \circ S_r)(n) \cap f_S(r))] \cap f_S(r) \\
& = [[(f_S(r) \cap S_r(n)) \cup (f_S(n) \cap S_r(r))] \cap f_S(n)] \cup [[(f_S(n) \cap S_r(n)) \\
& \cup (f_S(r) \cap S_r(r))] \cap f_S(r)] \cap f_S(r) \\
& = [(f_S(n) \cap f_S(n)) \cup (f_S(r) \cap f_S(r))] \cap f_S(r) = [f_S(n) \cup f_S(r)] \cap f_S(r) \\
& = f_S(r) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_n \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \left\{ \left(n, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right), \left(r, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\} \right) \right\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ sağlandığından, f_S bir EK-hemen hemen bi-idealdir.

4.3. Örnek $S = \{k, m, n\}$ kümesi üzerinde, Tablo 4.2 yardımıyla tanımlanan “ Δ ” ikili işlemi ile (S, Δ) cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

Δ	k	m	n
k	m	n	m
m	n	m	n
n	m	n	m

Tablo 4.2. Örnek 4.3. ’deki “ Δ ” ikili işlemi

$U = \mathbb{N}$ evrensel kümesi üzerinde g_S esnek kümesi,

$$g_S = \{(k, \{1, 2\}), (m, \{3, 4\}), (n, \emptyset)\}$$

şeklinde tanımlansın.

Burada, g_S bir EK-hemen hemen bi-ideal değildir. Gerçekten,

$$[(g_S \circ S_k \circ g_S) \tilde{\cap} g_S](k) = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
& [(g_S \circ S_k \circ g_S) \tilde{\cap} g_S](m) = (g_S \circ S_k \circ g_S)(m) \cap g_S(m) \\
& = [[(g_S \circ S_k)(k) \cap g_S(k)] \cup [(g_S \circ S_k)(k) \cap g_S(n)] \\
& \cup [(g_S \circ S_k)(m) \cap g_S(m)] \cup [(g_S \circ S_k)(n) \cap g_S(k)] \\
& \cup [(g_S \circ S_k)(n) \cap g_S(n)]] \cap g_S(m) \\
& = [\emptyset \cup \emptyset \\
& \cup [[g_S(k) \cap S_k(k)] \cup [g_S(k) \cap S_k(n)] \cup [g_S(m) \cap S_k(m)] \cup [g_S(n) \\
& \cap S_k(k)] \cup [g_S(n) \cap S_k(n)]] \cap g_S(m)] \\
& \cup [[g_S(k) \cap S_k(m)] \cup [g_S(m) \cap S_k(k)] \cup [g_S(m) \cap S_k(n)] \\
& \cup [g_S(n) \cap S_k(m)]] \cap g_S(k)] \\
& \cup [[g_S(k) \cap S_k(m)] \cup [g_S(m) \cap S_k(k)] \cup [g_S(m) \cap S_k(n)] \\
& \cup [g_S(n) \cap S_k(m)]] \cap g_S(n)] \cap g_S(m) \\
& = [\emptyset \cup \emptyset \cup [[g_S(k) \cup g_S(n)] \cap g_S(m)] \cup [g_S(m) \cap g_S(k)] \cup [g_S(m) \\
& \cap g_S(n)]] \cap g_S(m) = [\emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset] \cap g_S(m) = \emptyset
\end{aligned}$$

$$[(g_S \circ S_k \circ g_S) \tilde{\cap} g_S](n) = (g_S \circ S_k \circ g_S)(n) \cap g_S(n) = (g_S \circ S_k \circ g_S)(n) \cap \emptyset = \emptyset$$

olduğundan, $k \in S$ için, $(g_S \circ S_k \circ g_S) \tilde{\cap} g_S = \emptyset_S$ elde edilir. O halde, g_S bir EK-hemen hemen bi-ideal değildir.

4.4. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve $f_S \circ S_x \circ f_S \neq \emptyset_S$ olsun. Bu durumda, f_S bir EK-bi-ideal ise bir EK-hemen hemen bi-idealdir.

İspat: f_S , bir EK-bi-ideal ve $f_S \circ S_x \circ f_S \neq \emptyset_S$ olsun. O halde, $f_S \circ f_S \subseteq f_S$ ve $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ sağlanır. Her $x \in S$ için, $f_S \circ S_x \circ f_S \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olup buradan, $f_S \circ S_x \circ f_S \subseteq f_S$ olduğundan,

$$(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = f_S \circ S_x \circ f_S \neq \emptyset_S.$$

Böylece, $(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olup, f_S bir EK-hemen hemen bi-idealdir.

Burada, $\emptyset_S \circ \emptyset_S \cong \emptyset_S$ ve $\emptyset_S \circ \tilde{S} \circ \emptyset_S \cong \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ esnek kümesinin bir EK-bi-ideal olduğu açıktır. Fakat, her $x \in S$ için, $(\emptyset_S \circ S_x \circ \emptyset_S) \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ esnek kümesi bir EK-hemen hemen bi-ideal değildir.

Önerme 4.4'ün karşısının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

4.5. *Örnek* Örnek 4.2'de verilen f_S esnek kümesini ele alalım. f_S esnek kümesinin bir EK-hemen hemen bi-ideal olduğu, Örnek 4.2'de gösterilmiştir. Fakat, f_S bir EK-bi-ideal değildir.

Gerçekten,

$$\begin{aligned} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(n) &= [(f_S \circ \tilde{S})(n) \cap f_S(n)] \cup [(f_S \circ \tilde{S})(r) \cap f_S(r)] \\ &= [(f_S(n) \cap \tilde{S}(n)) \cup (f_S(r) \cap \tilde{S}(r))] \cap f_S(n) \cup [(f_S(r) \cap \tilde{S}(n)) \\ &\quad \cup (f_S(n) \cap \tilde{S}(r))] \cap f_S(r) \\ &= [(f_S(n) \cup f_S(r)) \cap f_S(n)] \cup [(f_S(r) \cup f_S(n)) \cap f_S(r)] = f_S(n) \cup f_S(r) \\ &\neq f_S(n) \end{aligned}$$

olduğundan, f_S bir EK-bi-ideal değildir.

4.6. *Önerme* f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen bi-ideal ise f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

İspat: f_S , bir idempotent EK-hemen hemen bi-ideal olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ ve her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$. Buradan,

$$\begin{aligned} (f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S &= [(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S] \tilde{\cap} f_S \\ &= [(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \cong (f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \end{aligned}$$

olup, $(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

4.7. *Teorem* f_S ve g_S , $f_S \cong g_S$ olacak şekilde, U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen bi-ideal ise g_S bir EK-hemen hemen bi-idealdir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen bi-ideal olsun. O halde, her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği, $f_S \cong g_S$ olduğundan,

$$(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \cong (g_S \circ S_x \circ g_S) \tilde{\cap} g_S$$

açıktır. Burada, $(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(g_S \circ S_x \circ g_S) \tilde{\cap} g_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, g_S bir EK-hemen hemen bi-idealdir.

4.8. Teorem f_S ve g_S , birer EK-hemen hemen bi-ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} g_S$ bir EK-hemen hemen bi-idealdir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen bi-ideal olsun. $f_S \cong f_S \tilde{\cup} g_S$ olduğundan, Teorem 4.7'den, $f_S \tilde{\cup} g_S$ bir EK-hemen hemen bi-idealdir.

4.9. *Sonuç* EK-hemen hemen bi-ideallerin esnek sonlu birleşimleri de bir EK-hemen hemen bi-idealdir.

4.10. *Sonuç* f_S ya da g_S bir EK-hemen hemen bi-ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} g_S$ bir EK-hemen hemen bi-idealdir.

Burada, f_S ve g_S birer EK-hemen hemen bi-ideal iken $f_S \tilde{\cap} g_S$ bir EK-hemen hemen bi-ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

4.11. *Örnek* Örnek 4.2. de verilen S yarıgrubunu ele alalım. $U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ evrensel kümesi üzerinde h_S ve t_S esnek kümeleri,

$$h_S = \left\{ \left(n, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right), \left(r, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right) \right\}$$

$$t_S = \left\{ \left(n, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\} \right), \left(r, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\} \right) \right\}$$

şeklinde tanımlansın.

Burada, h_S ve t_S birer EK-hemen hemen bi-idealdir. Fakat,

$$h_S \tilde{\cap} t_S = \{(n, \emptyset), (r, \emptyset)\}$$

olduğundan, $h_S \tilde{\cap} t_S$ bir EK-hemen hemen bi-ideal değildir.

Şimdi, S yarıgrubunun hemen hemen bi-ideali ile EK-hemen hemen bi-ideali arasındaki ilişki verilecektir. Fakat öncelikle Teorem 4.13'te kullanılmak üzere aşağıdaki lemmayı verelim.

4.12. Lemma Y , S kümesinin boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $x \in S$ olsun. S_x , x 'in esnek karakteristik fonksiyonu ve S_Y , Y 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, $S_x \circ S_Y = S_{xY}$ (Sezgin ve İlgin, 2024).

4.13. Teorem A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-hemen hemen bi-ideal olmasıdır.

İspat: A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-ideali olsun. O halde, her $x \in S$ için, $AxA \cap A \neq \emptyset$ yani, $k \in AxA \cap A$ olacak şekilde en az bir $k \in S$ vardır. Buradan,

$$((S_A \circ S_x \circ S_A) \tilde{\cap} S_A)(k) = (S_{AxA} \tilde{\cap} S_A)(k) = (S_{AxA \cap A})(k) = U \neq \emptyset$$

olup, $(S_A \circ S_x \circ S_A) \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, S_A bir EK-hemen hemen bi-idealdir.

Tersine, S_A bir EK-hemen hemen bi-ideal olsun. O halde, her $x \in S$ için, $(S_A \circ S_x \circ S_A) \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$. Kabul gereği, $A \neq \emptyset$. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \emptyset_S \neq (S_A \circ S_x \circ S_A) \tilde{\cap} S_A &\implies \exists k \in S; ((S_A \circ S_x \circ S_A) \tilde{\cap} S_A)(k) \neq \emptyset \\ &\implies \exists k \in S; (S_{AxA} \tilde{\cap} S_A)(k) \neq \emptyset \\ &\implies \exists k \in S; (S_{AxA \cap A})(k) \neq \emptyset \\ &\implies \exists k \in S; (S_{AxA \cap A})(k) = U \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k \in Ax A \cap A$$

olup, $Ax A \cap A \neq \emptyset$ elde edilir. Böylece, A, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-idealidir.

4.14. *Örnek* Örnek 3.2'deki S yarıgrubunu ele alalım. $A = \{f, r\}$, S kümesinin boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Rutin hesaplamalarla, A kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu $S_A = \{(f, U), (h, \emptyset), (r, U)\}$ 'nın bir EK-hemen hemen bi-ideal olduğu gösterilebilir.

Tersine, $K = \{h, r\}$ kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olan f_S EK-hemen hemen bi-idealini $f_S = \{(f, \emptyset), (h, U), (r, U)\}$ olarak alırsak, rutin hesaplamalarla, $K = \{h, r\}$ kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-ideali olduğu gösterilebilir.

4.15. Lemma f_S, U üzerinde bir esnek küme olmak üzere, $f_S \subseteq S_{\text{supp}(f_S)}$ (Sezgin ve İlgin, 2024).

4.16. Teorem f_S , bir EK-hemen hemen bi-ideal ise $\text{supp}(f_S), S$ yarıgrubunun bir hemen hemen bi-idealidir.

İspat: f_S bir EK-hemen hemen bi-ideal olsun. O halde, $f_S \neq \emptyset_S, \text{supp}(f_S) \neq \emptyset_S$ ve her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. $\text{supp}(f_S)$ 'nin S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-ideali olduğunu göstermek için, Teorem 4.13'ten, $S_{\text{supp}(f_S)}$ 'nin bir EK-hemen hemen bi-ideal olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 4.15'ten,

$$(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \subseteq (S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)}$$

ve $(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)} \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, $S_{\text{supp}(f_S)}$ bir EK-hemen hemen bi-ideal olup, Teorem 4.13'ten, $\text{supp}(f_S), S$ yarıgrubunun bir hemen hemen bi-idealidir.

Teorem 4.16'nın karşınının genellikle doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

4.17. *Örnek* Örnek 4.3'teki g_S esnek kümesini ele alalım. $\text{supp}(g_S) = \{k, m\}$ olup,

$$\begin{aligned} [\text{supp}(g_S)\{k\}\text{supp}(g_S)] \cap \text{supp}(g_S) &= \{k, m\}\{k\}\{k, m\} \cap \{k, m\} \\ &= \{m, n\}\{k, m\} \cap \{k, m\} = \{m, n\} \cap \{k, m\} = \{m\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\text{supp}(g_S)\{m\}\text{supp}(g_S)] \cap \text{supp}(g_S) &= \{k, m\}\{m\}\{k, m\} \cap \{k, m\} \\ &= \{m, n\}\{k, m\} \cap \{k, m\} = \{m, n\} \cap \{k, m\} = \{m\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\text{supp}(g_S)\{n\}\text{supp}(g_S)] \cap \text{supp}(g_S) &= \{k, m\}\{n\}\{k, m\} \cap \{k, m\} \\ &= \{m, n\}\{k, m\} \cap \{k, m\} = \{m, n\} \cap \{k, m\} = \{m\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan, $\text{supp}(g_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-idealidir. O halde, $\text{supp}(g_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-idealidir. Fakat, Örnek 4.3'te gösterildiği üzere g_S , bir EK hemen hemen bi-ideal değildir.

4.18. Tanım f_S ve h_S , $h_S \cong f_S$ olacak şekilde, birer EK-hemen hemen bi-ideal olsun. $\text{supp}(h_S) = \text{supp}(f_S)$ ise f_S esnek kümesine S yarıgrubunun bir minimal EK-hemen hemen bi-ideali denir.

4.19. Teorem A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen bi-ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir minimal EK-hemen hemen bi-ideal olmasıdır.

İspat: A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen bi-ideali olsun. O halde, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-idealidir ve Teorem 4.13'ten, S_A bir EK-hemen hemen bi-idealidir. $f_S \cong S_A$ olacak şekilde f_S bir EK-hemen hemen bi-ideal olsun. Teorem 4.16'dan, $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-idealidir ve Not 2.3.9'dan ve Sonuç 2.3.16'dan,

$$\text{supp}(f_S) \subseteq \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. A, S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen bi-ideali olduğundan, $\text{supp}(f_S) = \text{supp}(S_A) = A$ olup, böylece, Tanım 4.18'den, S_A bir minimal EK-hemen hemen bi-idealdir.

Tersine, S_A bir minimal EK-hemen hemen bi-ideal olsun. O halde, S_A bir EK-hemen hemen bi-ideal ve Teorem 4.13'ten, A, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-idealidir. $B \subseteq A$ olacak şekilde B, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-ideali olsun. Teorem 4.13'ten, S_B bir EK-hemen hemen bi-ideal ve Teorem 2.3.17 (i) 'den, $S_B \subseteq S_A$ olur. S_A bir minimal EK-hemen hemen bi-ideal olduğundan ve Sonuç 2.3.16'dan,

$$B = \text{supp}(S_B) = \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. Böylece, A, S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen bi-idealidir.

4.20. Tanım f_S, g_S ve h_S birer EK-hemen hemen bi-ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ g_S \subseteq f_S$ olması $h_S \subseteq f_S$ veya $g_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-asal hemen hemen bi-ideal denir.

4.21. Tanım f_S ve h_S birer EK-hemen hemen bi-ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ h_S \subseteq f_S$ olması $h_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-yarı asal hemen hemen bi-ideal denir.

4.22. Tanım f_S, g_S ve h_S birer EK-hemen hemen bi-ideal olsun. Bu durumda, $(h_S \circ g_S) \cap (g_S \circ h_S) \subseteq f_S$ olması $h_S \subseteq f_S$ veya $g_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-kuvvetli asal hemen hemen bi-ideal denir.

Her EK-kuvvetli asal hemen hemen bi-ideal, bir EK-asal hemen hemen bi-ideal olduğu ve her EK-asal hemen hemen bi-ideal, bir EK-yarı asal hemen hemen bi-ideal olduğu açıktır.

4.23. Teorem P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-asal hemen hemen bi-ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen bi-idealidir.

İspat: S_P , bir EK-asal hemen hemen bi-ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen bi-idealdir ve Teorem 4.13'ten, P, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-idealidir. $AB \subseteq P$ olacak şekilde A ve B , S yarıgrubunun birer hemen hemen bi-ideali olsun. Bu durumda, Teorem 4.13'ten, S_A ve S_B , birer EK-hemen hemen bi-idealdir ve Teorem 2.3.17 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_B = S_{AB} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-asal hemen hemen bi-ideal ve $S_A \circ S_B \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ veya $S_B \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.17 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen bi-idealidir.

4.24. Teorem P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen bi-ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen bi-idealidir.

İspat: S_P , bir EK-yarı asal hemen hemen bi-ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen bi-idealdir ve Teorem 4.13'ten, P, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-idealidir. $AA \subseteq P$ olacak şekilde A , S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-ideali olsun. Bu durumda, Teorem 4.13'ten, S_A bir EK-hemen hemen bi-idealdir ve Teorem 2.3.17 (i) ve (iii)'ten $S_A \circ S_A = S_{AA} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen bi-ideal ve $S_A \circ S_A \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.17 (i)'den,, $A \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen bi-idealidir.

4.25. Teorem P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen bi-ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen bi-idealidir.

İspat: S_P , bir EK-kuvvetli asal hemen hemen bi-ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen bi-idealdir ve Teorem 4.13'ten, P, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-idealidir. $AB \cap BA \subseteq P$ olmak üzere, A ve B , S yarıgrubunun birer hemen hemen bi-ideali olsun. Bu durumda, Teorem 4.13'ten, S_A ve S_B birer EK-hemen hemen bi-idealdir ve Teorem 2.3.17'den, $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) = S_{AB} \tilde{\cap} S_{BA} = S_{AB \cap BA} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen bi-ideal ve $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ veya $S_B \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.17 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen bi-idealidir.

5. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN TRI-İDEALLERİ

Bu bölüm, yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen tri-idealleri üzerine olup, bölümde Sezgin, Onur ve İlgin (2024b) çalışmasından elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

5.1. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ $((f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S)$ ise f_S esnek kümesine, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) tri-ideali denir. U üzerinde bir esnek küme, S yarı grubunun hem esnek kesişimsel hemen hemen sol tri-ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ tri-ideali ise S yarı grubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen tri-idealidir denir.

Bundan sonra, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol tri-ideali kısaca “EK-hemen hemen sol tri-ideal”; S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sağ tri-ideali “EK-hemen hemen sağ tri-ideal” ve S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen tri-ideali ise “EK-hemen hemen tri-ideal” olarak gösterilecektir.

5.2. Örnek $S = \{p, r\}$ kümesi üzerinde, Tablo 5.1 yardımıyla tanımlanan “ $\bullet$ ” ikili işlemi ile $(S, \bullet)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\bullet$	p	r
p	p	r
r	r	p

Tablo 5.1. Örnek 5.2’deki “ $\bullet$ ” ikili işlemi

$U = \mathbb{N}$ evrensel kümesi üzerinde f_S , h_S ve g_S esnek kümeleri,

$$f_S = \{(p, \{1,2\}), (r, \{1,3\})\}$$

$$h_S = \{(p, \{4,5\}), (r, \{5,6\})\}$$

$$g_S = \{(p, \{1,2\}), (r, \{3,4\})\}$$

şeklinde tanımlansın.

Burada, f_S ve h_S birer EK-hemen hemen tri-idealdir. Öncelikle, her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim.

S_p ile başlayacak olursak:

$$\begin{aligned} [(f_S \circ S_p \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](p) &= [(f_S \circ S_p) \circ (f_S \circ f_S)](p) \cap f_S(p) \\ &= \left[[(f_S \circ S_p)(p) \cap (f_S \circ f_S)(p)] \cup [(f_S \circ S_p)(r) \cap (f_S \circ f_S)(r)] \right] \cap f_S(p) \\ &= \left[[[(f_S(p) \cap S_p(p)) \cup (f_S(r) \cap S_p(r))] \cap [(f_S(p) \cap f_S(p)) \cup (f_S(r) \cap f_S(r))]] \cup [[(f_S(r) \cap S_p(p)) \cup (f_S(p) \cap S_p(r))] \cap [(f_S(r) \cap f_S(p)) \cup (f_S(p) \cap f_S(r))]] \right] \cap f_S(p) \\ &= [[f_S(p) \cap (f_S(p) \cup f_S(r))] \cup [f_S(r) \cap (f_S(p) \cap f_S(r))]] \cap f_S(p) \\ &= [f_S(p) \cup (f_S(p) \cap f_S(r))] \cap f_S(p) = f_S(p) \cap f_S(p) = f_S(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(f_S \circ S_p \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](r) &= [(f_S \circ S_p) \circ (f_S \circ f_S)](r) \cap f_S(r) \\ &= \left[[(f_S \circ S_p)(r) \cap (f_S \circ f_S)(p)] \cup [(f_S \circ S_p)(p) \cap (f_S \circ f_S)(r)] \right] \cap f_S(r) \\ &= \left[[[(f_S(r) \cap S_p(p)) \cup (f_S(p) \cap S_p(r))] \cap [(f_S(p) \cap f_S(p)) \cup (f_S(r) \cap f_S(r))]] \cup [[(f_S(p) \cap S_p(p)) \cup (f_S(r) \cap S_p(r))] \cap [(f_S(r) \cap f_S(p)) \cup (f_S(p) \cap f_S(r))]] \right] \cap f_S(r) \\ &= [[f_S(r) \cap (f_S(p) \cup f_S(r))] \cup [f_S(p) \cap (f_S(p) \cap f_S(r))]] \cap f_S(r) \\ &= [f_S(r) \cup (f_S(p) \cap f_S(r))] \cap f_S(r) = f_S(r) \cap f_S(r) = f_S(r) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_p \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(p, \{1,2\}), (r, \{1,3\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. S_r ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned}
[(f_S \circ S_r \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](p) &= [(f_S \circ S_r) \circ (f_S \circ f_S)](p) \cap f_S(p) \\
&= [(f_S \circ S_r)(p) \cap (f_S \circ f_S)(p)] \cup [(f_S \circ S_r)(r) \cap (f_S \circ f_S)(r)] \\
&\cap f_S(p) \\
&= [[[(f_S(p) \cap S_r(p)) \cup (f_S(r) \cap S_r(r))] \cap [(f_S(p) \cap f_S(p)) \cup (f_S(r) \\
&\cap f_S(r))]] \cup [[(f_S(r) \cap S_r(p)) \cup (f_S(p) \cap S_r(r))] \cap [(f_S(r) \cap f_S(p)) \\
&\cup (f_S(p) \cap f_S(r))]]] \cap f_S(p) \\
&= [[f_S(r) \cap (f_S(p) \cup f_S(r))] \cup [f_S(p) \cap (f_S(p) \cap f_S(r))]] \cap f_S(p) \\
&= [f_S(r) \cup (f_S(p) \cap f_S(r))] \cap f_S(p) = f_S(r) \cap f_S(p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(f_S \circ S_r \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](r) &= [(f_S \circ S_r) \circ (f_S \circ f_S)](r) \cap f_S(r) \\
&= [(f_S \circ S_r)(r) \cap (f_S \circ f_S)(p)] \cup [(f_S \circ S_r)(p) \cap (f_S \circ f_S)(r)] \cap f_S(r) \\
&= [[[(f_S(r) \cap S_r(p)) \cup (f_S(p) \cap S_r(r))] \cap [(f_S(p) \cap f_S(p)) \cup (f_S(r) \\
&\cap f_S(r))]] \cup [[(f_S(p) \cap S_r(p)) \cup (f_S(r) \cap S_r(r))] \cap [(f_S(r) \cap f_S(p)) \\
&\cup (f_S(p) \cap f_S(r))]]] \cap f_S(r) \\
&= [[f_S(p) \cap (f_S(p) \cup f_S(r))] \cup [f_S(r) \cap (f_S(p) \cap f_S(r))]] \cap f_S(r) \\
&= [f_S(p) \cup (f_S(p) \cap f_S(r))] \cap f_S(r) = f_S(p) \cap f_S(r)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_r \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(p, \{1\}), (r, \{1\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ sağlandığından, f_S bir EK-hemen hemen sol tri-idealdir. Şimdi her $x \in S$ için, $(f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim.

S_p ile başlayacak olursak:

$$\begin{aligned}
[(f_s \circ f_s \circ S_p \circ f_s) \tilde{\cap} f_s](p) &= [(f_s \circ f_s) \circ (S_p \circ f_s)](p) \cap f_s(p) \\
&= \{[(f_s \circ f_s)(p) \cap (S_p \circ f_s)(p)] \cup [(f_s \circ f_s)(r) \cap (S_p \circ f_s)(r)]\} \cap f_s(p) \\
&= \{[(f_s(p) \cap f_s(p)) \cup (f_s(r) \cap f_s(r))] \cap [(S_p(p) \cap f_s(p)) \cup (S_p(r) \cap f_s(r))]\} \cup \{[(f_s(r) \cap f_s(p)) \cup (f_s(p) \cap f_s(r))] \cap [(S_p(r) \cap f_s(p)) \cup (S_p(p) \cap f_s(r))]\} \cap f_s(p) \\
&= \{(f_s(p) \cup f_s(r)) \cap f_s(p)\} \cup \{(f_s(r) \cap f_s(p)) \cap f_s(r)\} \cap f_s(p) \\
&= [f_s(p) \cup (f_s(p) \cap f_s(r))] \cap f_s(p) = f_s(p) \cap f_s(p) = f_s(p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(f_s \circ f_s \circ S_p \circ f_s) \tilde{\cap} f_s](r) &= [(f_s \circ f_s) \circ (S_p \circ f_s)](r) \cap f_s(r) \\
&= \{[(f_s \circ f_s)(r) \cap (S_p \circ f_s)(p)] \cup [(f_s \circ f_s)(p) \cap (S_p \circ f_s)(r)]\} \cap f_s(r) \\
&= \{[(f_s(r) \cap f_s(p)) \cup (f_s(p) \cap f_s(r))] \cap [(S_p(p) \cap f_s(p)) \cup (S_p(r) \cap f_s(r))]\} \cup \{[(f_s(p) \cap f_s(p)) \cup (f_s(r) \cap f_s(r))] \cap [(S_p(r) \cap f_s(p)) \cup (S_p(p) \cap f_s(r))]\} \cap f_s(r) \\
&= \{(f_s(p) \cap f_s(r)) \cap f_s(p)\} \cup \{(f_s(p) \cup f_s(r)) \cap f_s(r)\} \cap f_s(r) \\
&= [(f_s(p) \cap f_s(r)) \cup f_s(r)] \cap f_s(r) = f_s(r) \cap f_s(r) = f_s(r)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(f_s \circ f_s \circ S_p \circ f_s) \tilde{\cap} f_s = \{(p, \{1,2\}), (r, \{1,3\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. S_r ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned}
[(f_s \circ f_s \circ S_r \circ f_s) \tilde{\cap} f_s](p) &= [(f_s \circ f_s) \circ (S_r \circ f_s)](p) \cap f_s(p) \\
&= \{[(f_s \circ f_s)(p) \cap (S_r \circ f_s)(p)] \cup [(f_s \circ f_s)(r) \cap (S_r \circ f_s)(r)]\} \cap f_s(p) \\
&= \{[(f_s(p) \cap f_s(p)) \cup (f_s(r) \cap f_s(r))] \cap [(S_r(p) \cap f_s(p)) \cup (S_r(r) \cap f_s(r))]\} \cup \{[(f_s(r) \cap f_s(p)) \cup (f_s(p) \cap f_s(r))] \cap [(S_r(r) \cap f_s(p)) \cup (S_r(p) \cap f_s(r))]\} \cap f_s(p) \\
&= \{(f_s(p) \cup f_s(r)) \cap f_s(r)\} \cup \{(f_s(r) \cap f_s(p)) \cap f_s(r)\} \cap f_s(p) \\
&= [f_s(r) \cup (f_s(p) \cap f_s(r))] \cap f_s(p) = f_s(r) \cap f_s(p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(f_S \circ f_S \circ S_r \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](r) &= [(f_S \circ f_S) \circ (S_r \circ f_S)](r) \cap f_S(r) \\
&= \{[(f_S \circ f_S)(r) \cap (S_r \circ f_S)(p)] \cup [(f_S \circ f_S)(p) \cap (S_r \circ f_S)(r)]\} \cap f_S(r) \\
&= \{[(f_S(r) \cap f_S(p)) \cup (f_S(p) \cap f_S(r))] \cap [(S_r(p) \cap f_S(p)) \cup (S_r(r) \cap f_S(r))]\} \cup \{[(f_S(p) \cap f_S(p)) \cup (f_S(r) \cap f_S(r))] \cap [(S_r(r) \cap f_S(p)) \cup (S_r(p) \cap f_S(r))]\} \cap f_S(r) \\
&= \{[f_S(p) \cap f_S(r)] \cap f_S(r) \cup [(f_S(p) \cup f_S(r)) \cap f_S(p)]\} \cap f_S(r) \\
&= [(f_S(p) \cap f_S(r)) \cup f_S(p)] \cap f_S(r) = f_S(p) \cap f_S(r)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(f_S \circ f_S \circ S_r \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(p, \{1\}), (r, \{1\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, her $x \in S$ için, $(f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ sağlandığından, f_S bir EK-hemen hemen sağ tri-idealdir. O halde, f_S bir EK-hemen hemen tri-idealdir.

Benzer şekilde, h_S bir EK-hemen hemen tri-idealdir. Gerçekten,

$$(h_S \circ S_p \circ h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S = \{(p, \{4,5\}), (r, \{5,6\})\} \neq \emptyset_S$$

$$(h_S \circ S_r \circ h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S = \{(p, \{5\}), (r, \{5\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, h_S bir EK-hemen hemen sol tri-idealdir. Ayrıca,

$$(h_S \circ h_S \circ S_p \circ h_S) \tilde{\cap} h_S = \{(p, \{4,5\}), (r, \{5,6\})\} \neq \emptyset_S$$

$$(h_S \circ h_S \circ S_r \circ h_S) \tilde{\cap} h_S = \{(p, \{5\}), (r, \{5\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, h_S bir EK-hemen hemen sağ tri-idealdir. Böylece, h_S bir EK-hemen hemen tri-idealdir.

Fakat, g_S ne bir EK-hemen hemen sol tri-idealdir ne de bir EK-hemen hemen sağ tri-idealdir.

Gerçekten,

$$\begin{aligned}
[(g_S \circ S_r \circ g_S \circ g_S) \tilde{\cap} g_S](p) &= [(g_S \circ S_r) \circ (g_S \circ g_S)](p) \cap g_S(p) \\
&= \{[(g_S \circ S_r)(p) \cap (g_S \circ g_S)(p)] \cup [(g_S \circ S_r)(r) \cap (g_S \circ g_S)(r)]\} \cap g_S(p) \\
&= \{[(g_S(p) \cap S_r(p)) \cup (g_S(r) \cap S_r(r))] \cap [(g_S(p) \cap g_S(p)) \cup (g_S(r) \cap g_S(r))]\} \cup \{[(g_S(r) \cap S_r(p)) \cup (g_S(p) \cap S_r(r))] \cap [(g_S(r) \cap g_S(p)) \cup (g_S(p) \cap g_S(r))]\} \cap g_S(p) \\
&= \{[g_S(r) \cap (g_S(p) \cup g_S(r))] \cup [g_S(p) \cap (g_S(p) \cap g_S(r))]\} \cap g_S(p) \\
&= [g_S(r) \cup (g_S(p) \cap g_S(r))] \cap g_S(p) = g_S(r) \cap g_S(p) = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(g_S \circ S_r \circ g_S \circ g_S) \tilde{\cap} g_S](r) &= [(g_S \circ S_r) \circ (g_S \circ g_S)](r) \cap g_S(r) \\
&= \{[(g_S \circ S_r)(r) \cap (g_S \circ g_S)(p)] \cup [(g_S \circ S_r)(p) \cap (g_S \circ g_S)(r)]\} \cap g_S(r) \\
&= \{[(g_S(r) \cap S_r(p)) \cup (g_S(p) \cap S_r(r))] \cap [(g_S(p) \cap g_S(p)) \cup (g_S(r) \cap g_S(r))]\} \cup \{[(g_S(p) \cap S_r(p)) \cup (g_S(r) \cap S_r(r))] \cap [(g_S(r) \cap g_S(p)) \cup (g_S(p) \cap g_S(r))]\} \cap g_S(r) \\
&= \{[g_S(p) \cap (g_S(p) \cup g_S(r))] \cup [g_S(r) \cap (g_S(p) \cap g_S(r))]\} \cap g_S(r) \\
&= [g_S(p) \cup (g_S(p) \cap g_S(r))] \cap g_S(r) = g_S(p) \cap g_S(r) = \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan, $r \in S$ için, $(g_S \circ S_r \circ g_S \circ g_S) \tilde{\cap} g_S = \{(p, \emptyset), (r, \emptyset)\} = \emptyset_S$ elde edilir. O halde, g_S bir EK-hemen hemen sol tri-ideal değildir.

Benzer şekilde, $r \in S$ için, $(g_S \circ g_S \circ S_r \circ g_S) \tilde{\cap} g_S = \{(p, \emptyset), (r, \emptyset)\} = \emptyset_S$ elde edilir. O halde, g_S bir EK-hemen hemen sağ tri-ideal değildir. Bu durumda, g_S esnek kümesinin bir EK-hemen hemen tri-ideal olmadığı açıktır.

5.3. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve $f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S \neq \emptyset_S$ ($f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \neq \emptyset_S$) olsun. f_S , bir EK-sol (sağ) tri-ideal ise bir EK-hemen hemen sol (sağ) tri-idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol tri-ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ tri-ideal için de benzer şekilde yapılır. $f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S \neq \emptyset_S$ ve f_S , bir EK-sol tri-ideal olsun. O halde, $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S$ sağlanır. Her $x \in S$ için, $f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S$ olup buradan, $f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S$ olduğundan,

$$(f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S \neq \emptyset_S$$

Böylece, $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olup, f_S bir EK-hemen hemen sol tri-idealdir.

Burada, $f_S \circ \tilde{S} \circ \emptyset_S \circ \emptyset_S \subseteq \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ esnek kümesinin bir EK-sol tri-ideal olduğu açıktır. Fakat, her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ \emptyset_S \circ \emptyset_S) \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ esnek kümesi bir EK-hemen hemen sol tri-ideal değildir.

5.4. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve $f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S \neq \emptyset_S$ ve $f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \neq \emptyset_S$ olsun. f_S , bir EK-tri-ideal ise bir EK-hemen hemen tri-idealdir.

f_S , bir EK-hemen hemen tri-ideal ise bir EK-tri-ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

5.5. *Örnek* Örnek 5.2’de verilen f_S ve h_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve h_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen tri-ideal olduğu, Örnek 5.2’de gösterilmiştir. Fakat, f_S ve h_S birer EK-tri-ideal değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
 (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ f_S)(p) &= [(f_S \circ \tilde{S})(p) \cap (f_S \circ f_S)(p)] \cup [(f_S \circ \tilde{S})(r) \cap (f_S \circ f_S)(r)] \\
 &= \{[(f_S(p) \cap \tilde{S}(p)) \cup (f_S(r) \cap \tilde{S}(r))] \cap [(f_S(p) \cap f_S(p)) \cup (f_S(r) \\
 &\cap f_S(r))]\} \cup \{[(f_S(r) \cap \tilde{S}(p)) \cup (f_S(p) \cap \tilde{S}(r))] \cap [(f_S(r) \cap f_S(p)) \\
 &\cup (f_S(p) \cap f_S(r))]\} \\
 &= [((f_S(p) \cup f_S(r)) \cap (f_S(p) \cup f_S(r))) \cup [((f_S(r) \cup f_S(p)) \cap ((f_S(p) \\
 &\cap f_S(r)))] = [(f_S(p) \cup f_S(r)) \cup [(f_S(p) \cap f_S(r))] = [(f_S(p) \cup f_S(r))] \\
 &\not\subseteq f_S(p)
 \end{aligned}$$

olduğundan, f_S bir EK-sol tri-ideal değildir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
(f_S \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(p) &= [(f_S \circ f_S)(p) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(p)] \cup [(f_S \circ f_S)(r) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(r)] \\
&= \{[(f_S(p) \cap f_S(p)) \cup (f_S(r) \cap f_S(r))] \cap [\tilde{S}(p) \cap f_S(p)] \cup [\tilde{S}(r) \cap f_S(r)]\} \\
&\cup \{[(f_S(r) \cap f_S(p)) \cup (f_S(p) \cap f_S(r))] \cap [\tilde{S}(r) \cap f_S(p)] \cup [\tilde{S}(p) \cap f_S(r)]\} \\
&= [((f_S(p) \cup f_S(r)) \cap (f_S(p) \cup f_S(r))) \cup ((f_S(r) \cap f_S(p)) \cap ((f_S(p) \cup f_S(r))) \\
&= [(f_S(p) \cup f_S(r))] \cup [(f_S(p) \cap f_S(r))] = [(f_S(p) \cup f_S(r))] \\
&\not\subseteq f_S(p)
\end{aligned}$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ tri-ideal değildir. Bu durumda, f_S 'nin bir EK-tri-ideal olmadığı açıktır.

Benzer şekilde,

$$(h_S \circ \tilde{S} \circ h_S \circ h_S)(p) = h_S(p) \cup h_S(r) \not\subseteq h_S(p)$$

olduğundan, h_S bir EK-sol tri-ideal değildir. Ayrıca,

$$(h_S \circ h_S \circ \tilde{S} \circ h_S)(p) = h_S(p) \cup h_S(r) \not\subseteq h_S(r)$$

olduğundan, h_S bir EK-sağ tri-ideal değildir. Bu durumda, h_S 'nin bir EK-tri-ideal olmadığı açıktır.

5.6. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen sol (sağ) tri-ideal ise f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol tri-ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ tri-ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir idempotent EK-hemen hemen sol tri-ideal olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ ve her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ Buradan,

$$\begin{aligned}
(f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S &= [(f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S] \tilde{\cap} f_S \\
&= [(f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \\
&\cong (f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S
\end{aligned}$$

olup, $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

5.7. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen tri-ideal ise f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

5.8. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. f_S , bir EK hemen hemen tri-ideal olması için gerek ve yeter şart f_S 'nin bir EK-hemen hemen bi-ideal olmasıdır.

İspat: f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ ve her $x \in S$ için,

$$\emptyset_S \neq (f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = (f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

ve

$$\emptyset_S \neq (f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = (f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olduğundan, ispat açıktır.

5.9. Önerme f_S ve h_S , $f_S \cong h_S$ olacak şekilde, U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen sol (sağ) tri-ideal ise h_S bir EK-hemen hemen sol (sağ) tri-idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol tri-ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ tri-ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-hemen hemen sol tri-ideal olsun. O halde, her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği $f_S \cong h_S$ olduğundan,

$$(f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \cong (h_S \circ S_x \circ h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S$$

açıktır. Burada, $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(h_S \circ S_x \circ h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, h_S bir EK-hemen hemen sol tri-idealdir.

5.10. Teorem f_S ve h_S , $f_S \subseteq h_S$ olacak şekilde, U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen tri-ideal ise h_S bir EK-hemen hemen tri-idealdir.

5.11. Önerme f_S ve h_S , birer EK-hemen hemen sol (sağ) tri-ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen sol (sağ) tri-idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol tri-ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ tri-ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-hemen hemen sol tri-ideal olsun. $f_S \subseteq f_S \tilde{\cup} h_S$ Önerme 5.9'dan, $f_S \tilde{\cup} h_S$, bir EK-hemen hemen sol tri-idealdir.

5.12. Teorem f_S ve h_S , birer EK-hemen hemen tri-ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen tri-idealdir.

5.13. Sonuç EK-hemen hemen tri-ideallerin esnek sonlu birleşimleri de bir EK-hemen hemen tri-idealdir.

5.14. Sonuç f_S ya da h_S bir EK-hemen hemen tri-ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen tri-idealdir.

Burada, f_S ve h_S birer EK-hemen hemen tri-ideal iken $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-hemen hemen tri-ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

5.15. Örnek Örnek 5.2'deki f_S ve h_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve h_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen tri-ideal olduğu, Örnek 5.2'de gösterilmiştir. Fakat,

$$f_S \tilde{\cap} h_S = \{(p, \emptyset), (r, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

olduğundan, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-hemen hemen tri-ideal değildir.

5.16. Önerme A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) tri-ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-hemen hemen sol (sağ) tri-ideal olmasıdır.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol tri-ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ tri-ideal için de benzer şekilde yapılır. A, S kümesinin boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol tri-ideali olsun. O halde, her $x \in S$ için, $AxAA \cap A \neq \emptyset$ yani, $t \in AxAA \cap A$ olacak şekilde en az bir $t \in S$ vardır. Buradan,

$$((S_A \circ S_x \circ S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A)(t) = (S_{AxAA} \tilde{\cap} S_A)(t) = (S_{AxAA \cap A})(t) = U \neq \emptyset$$

olup, $(S_A \circ S_x \circ S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, S_A bir EK-hemen hemen sol tri-idealidir.

Tersine, S_A bir EK-hemen hemen sol tri-ideal olsun. O halde her $x \in S$ için, $(S_A \circ S_x \circ S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$. Kabul gereği, $A \neq \emptyset$. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \emptyset_S \neq (S_A \circ S_x \circ S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A &\Rightarrow \exists n \in S ; ((S_A \circ S_x \circ S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A)(n) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists n \in S ; (S_{AxAA} \tilde{\cap} S_A)(n) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists n \in S ; (S_{AxAA \cap A})(n) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists n \in S ; (S_{AxAA \cap A})(n) = U \\ &\Rightarrow n \in AxAA \cap A \end{aligned}$$

olup, $AxAA \cap A \neq \emptyset$ elde edilir. Böylece, A, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol tri-idealidir.

5.17. Teorem A, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A, A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-hemen hemen tri-ideal olmasıdır.

5.18. *Örnek* Örnek 4.3.'teki S yarıgrubunu ele alalım. $C = \{m, n\}$, S kümesinin boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, C kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Rutin hesaplamalarla, C kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu $S_C = \{(m, U), (n, U), (k, \emptyset)\}$ 'nin bir EK-hemen hemen tri-ideal olduğu gösterilebilir.

Tersine, $C = \{m, n\}$ kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olan f_S EK-hemen hemen tri-idealini $f_S = \{(m, U), (n, U), (k, \emptyset)\}$ olarak alırsak, rutin hesaplamalarla, $C = \{m, n\}$ kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-ideali olduğu gösterilebilir.

5.19. Önerme f_S , bir EK-hemen hemen sol (sağ) tri-ideal ise $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) tri-idealidir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol tri-ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ tri-ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S bir EK-hemen hemen sol tri-ideal olsun. O halde, $f_S \neq \emptyset_S$, $\text{supp}(f_S) \neq \emptyset_S$ ve her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. $\text{supp}(f_S)$ 'nin S yarıgrubunun bir hemen hemen sol tri-ideali olduğunu göstermek için, Önerme 5.16'dan, $S_{\text{supp}(f_S)}$ 'nin bir EK-hemen hemen sol tri-ideal olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 4.15'ten,

$$(f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \cong (S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)}$$

ve $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan,

$$(S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, $S_{\text{supp}(f_S)}$ bir EK-hemen hemen sol tri-ideal olup, Önerme 5.16'dan, $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol tri-idealidir.

5.20. Teorem f_S , bir EK-hemen hemen tri-ideal ise $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-idealidir.

Teorem 5.20'nin karşıtının genellikle doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

5.21. Örnek Örnek 5.2'deki g_S esnek kümesini ele alalım. $\text{supp}(g_S) = \{p, r\}$ olup,

$$[\text{supp}(g_S)p\text{supp}(g_S)\text{supp}(g_S)] \cap \text{supp}(g_S) = \{p, r\}p\{p, r\}\{p, r\} \cap \{p, r\} = \{p, r\} \neq \emptyset$$

$$[\text{supp}(g_S)r\text{supp}(g_S)\text{supp}(g_S)] \cap \text{supp}(g_S) = \{p, r\}r\{p, r\}\{p, r\} \cap \{p, r\} = \{p, r\} \neq \emptyset$$

elde edilir. Böylece, $\text{supp}(g_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol tri-idealidir. Benzer şekilde,

$$[\text{supp}(g_S)\text{supp}(g_S)p\text{supp}(g_S)] \cap \text{supp}(g_S) = \{p, r\}\{p, r\}p\{p, r\} \cap \{p, r\} = \{p, r\} \neq \emptyset$$

$$[\text{supp}(g_S)\text{supp}(g_S)r\text{supp}(g_S)] \cap \text{supp}(g_S) = \{p, r\}\{p, r\}r\{p, r\} \cap \{p, r\} = \{p, r\} \neq \emptyset$$

olduğundan, $\text{supp}(g_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sağ tri-idealidir. O halde, $\text{supp}(g_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-idealidir. Fakat, Örnek 5.2’de gösterildiği üzere g_S , bir EK hemen hemen tri-ideal değildir.

5.22. Tanım f_S ve h_S , $h_S \cong f_S$ olacak şekilde, birer EK-hemen hemen sol (sağ) tri-ideal olsun. $\text{supp}(h_S) = \text{supp}(f_S)$ ise f_S esnek kümesine S yarıgrubunun bir minimal EK-hemen hemen sol (sağ) tri-ideali denir.

5.23. Önerme A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A ’nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol (sağ) tri-ideali olması için gerek ve yeter şart S_A ’nın bir minimal EK-hemen hemen sol (sağ) tri-ideal olmasıdır.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol tri-ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ tri-ideal için de benzer şekilde yapılır. A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol ideali olsun. O halde, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol tri-idealidir ve Önerme 5.16’dan, S_A bir EK-hemen hemen sol tri-idealidir. $f_S \cong S_A$ olacak şekilde f_S bir EK-hemen hemen sol tri-ideal olsun. Önerme 5.19’dan, $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol tri-idealidir ve Not 2.3.9’dan ve Sonuç 2.3.16’dan,

$$\text{supp}(f_S) \subseteq \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol tri-ideali olduğundan, $\text{supp}(f_S) = \text{supp}(S_A) = A$ olup, böylece, Tanım 5.22’den, S_A bir minimal EK-hemen hemen sol idealidir.

Tersine, S_A bir minimal EK-hemen hemen sol tri-ideal olsun. O halde, S_A bir EK-hemen hemen sol tri-ideal ve Önerme 5.16'dan, A, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol tri-idealidir. $B \subseteq A$ olacak şekilde B, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol tri-ideali olsun. Önerme 5.16'dan, S_B bir EK hemen hemen sol tri-ideal ve Teorem 2.3.17 (i)'den, $S_B \cong S_A$ olur. S_A bir minimal EK-hemen hemen sol tri-ideal olduğundan ve Sonuç 2.3.16'dan,

$$B = \text{supp}(S_B) = \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. Böylece, A, S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol tri-idealidir.

5.24. Teorem A, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A, A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen tri-ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir minimal EK-hemen hemen tri-ideal olmasıdır.

5.25. Tanım f_S, g_S ve h_S birer EK-hemen hemen sol (sağ) tri-ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ g_S \cong f_S$ olması $h_S \cong f_S$ veya $g_S \cong f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-asal hemen hemen sol (sağ) tri-ideal denir.

5.26. Tanım f_S ve h_S birer EK-hemen hemen sol (sağ) tri-ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ h_S \cong f_S$ olması $h_S \cong f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-yarı asal hemen hemen sol (sağ) tri-ideal denir.

5.27. Tanım f_S, g_S ve h_S birer EK-hemen hemen sol (sağ) tri-ideal olsun. Bu durumda, $(h_S \circ g_S) \tilde{\cap} (g_S \circ h_S) \cong f_S$ olması $h_S \cong f_S$ veya $g_S \cong f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) tri-ideal denir.

Her EK-kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) tri-idealin, bir EK-asal hemen hemen sol (sağ) tri-ideal olduğu ve her EK-asal hemen hemen sol (sağ) tri-idealin, bir EK-yarı asal hemen hemen sol (sağ) tri-ideal olduğu açıktır.

5.28. Önerme P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-asal hemen hemen sol (sağ) tri-ideal ise, P kümesi S yarıgrubunun asal hemen hemen sol (sağ) tri-idealidir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol tri-ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ tri-ideal için de benzer şekilde yapılır. S_P , bir EK-asal hemen hemen sol tri-ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen sol tri-idealdir ve Önerme 5.16'dan, P, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol tri-idealidir. $AB \subseteq P$ olacak şekilde A ve B , S yarıgrubunun birer hemen hemen sol tri-ideali olsun. Bu durumda, Önerme 5.16'dan, S_A ve S_B , birer EK-hemen hemen sol tri-idealdir ve Teorem 2.3.17 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_B = S_{AB} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-asal hemen hemen sol tri-ideal ve $S_A \circ S_B \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ veya $S_B \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.17 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen sol tri-idealidir.

5.29. Teorem P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-asal hemen hemen tri-ideal ise, P kümesi S yarıgrubunun asal hemen hemen tri-idealidir.

5.30. Önerme P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen sol (sağ) tri-ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen sol (sağ) tri-idealidir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol tri-ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ tri-ideal için de benzer şekilde yapılır. S_P , bir EK-yarı asal hemen hemen sol tri-ideal olsun. O halde, S_P bir EK hemen hemen sol tri-idealdir ve Önerme 5.16'dan, P, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol tri-idealidir. $AA \subseteq P$ olacak şekilde A , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol tri-ideali olsun. Bu durumda, Önerme 5.16'dan, S_A bir EK-hemen hemen sol tri-idealdir ve Teorem 2.3.17 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_A = S_{AA} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen sol tri-ideal ve $S_A \circ S_A \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.17 (i)'den, $A \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen sol tri-idealidir.

5.31. Teorem P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen tri-ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen tri-idealidir.

5.32. Önerme P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) tri-ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) tri-idealidir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol tri-ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ tri-ideal için de benzer şekilde yapılır. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol tri-ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen sol tri-idealdir ve Önerme 5.16'dan, P, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol tri-idealidir. $AB \cap BA \subseteq P$ olmak üzere, A ve B, S yarıgrubunun birer hemen hemen sol tri-ideali olsun. Bu durumda, Önerme 5.16'dan, S_A ve S_B birer EK-hemen hemen sol tri-idealdir ve Teorem 2.3.17'den, $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) = S_{AB} \tilde{\cap} S_{BA} = S_{AB \cap BA} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol tri-ideal ve $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ veya $S_B \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.17 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen sol tri-idealidir.

5.33. Teorem P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen tri-ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen tri-idealidir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, yarıgrupların yeni bir esnek kesişimsel ideal türü olarak EK-bi-quasi ideal ve yeni esnek kesişimsel hemen hemen ideal türleri olarak EK-hemen hemen bi-ideal ve EK-hemen hemen tri-ideal tanıtılmış, özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiş, çeşitli EK-idealler ve EK-hemen hemen idealler ile olan ilişkilerine bakılmıştır.

Tezin ilk bölümünde, yarıgruplar, esnek kümeler, yarıgrupların EK-idealleri ve EK-hemen hemen idealleri ile ilgili detaylı bir literatür taraması yapılmıştır.

İkinci bölümde, tez boyunca kullanılan yarıgruplar ve yarıgrup çeşitleri, yarıgrupların idealleri ve hemen hemen idealleri, esnek kümeler, yarıgrupların EK-idealleri ve EK-hemen hemen idealleri ile ilgili temel kavramlar sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, yarıgrupların EK-bi-quasi ideal kavramı tanıtılmış, örneği verilmiş ve çeşitli EK-ideallerle olan bağlantıları incelenmiştir. Bu bağlamda bir yarıgrupun her EK-bi-ideal, bir EK-bi-quasi ideal, her EK-ideal, bir EK-bi-quasi ideal, her EK-quasi ideal, bir EK-bi-quasi ideal, idempotent esnek bir kümenin her EK-iç idealinin, bir EK-bi-quasi ideal olduğu gösterilmiştir. Bu ifadelerin terslerinin her zaman doğru olmadığına dair aksi örnekler sunulmuştur ve terslerinin geçerli olması için basit* yarıgrup olması veya regüler yarıgrup olması şartı gerektiği kanıtlanmıştır. Bu kapsamda, bir esnek basit* yarıgrupun EK-bi-quasi ideali ile EK-bi-idealinin, bir esnek basit* yarıgrupun EK-bi-quasi ideali ile EK-sol (sağ) idealinin, bir esnek basit* yarıgrupun EK-bi-quasi ideali ile EK-quasi idealinin, bir regüler yarıgrupun EK-bi-quasi ideali ile EK-quasi idealinin, bir esnek basit* yarıgrupun EK-iç ideali ile EK-bi-quasi idealinin çakışık olduğu gösterilmiştir. Esnek küme teorisi ile klasik yarıgrup teorisi arasında bir köprü kurmak amacıyla bir EK-alt yarıgrup, bir EK-bi-quasi ideal ise onun üst α -kapsama kümesinin bir bi-quasi ideal olduğu gösterilmiş ve örneklendirilmiştir. Ayrıca, bir yarıgrupun bir alt yarıgrubu, bi-quasi ideal ise bu alt yarıgrupun esnek karakteristik fonksiyonunun da bir EK-bi-quasi ideal olduğu ve bu ifadenin karşınının da doğru olduğu kanıtlanarak, örneklendirilmiştir. EK-bi-quasi ideallerin sonlu esnek kesişimlerinin bir EK-bi-quasi ideal olduğu ve EK-ideallerin esnek kesişimlerinin de bir EK-bi-quasi ideal olduğu gösterilmiştir. Ayrıca regüler bir yarıgrup ile EK-bi-quasi ideal arasındaki bağlantı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, bir yarıgrupun EK-hemen hemen bi-ideal kavramı tanıtılmış, örneği verilmiş ve yarıgrupların bazı EK-idealleri ve EK-hemen hemen ideallerle ilişkisi incelenmiştir. Burada gerekli koşul altında bir yarıgrupun bir EK-bi-ideal, EK-hemen hemen bi-ideal olduğu gösterilerek bu ifadenin karşınının her zaman doğru olmadığına ilişkin aksi örnek verilmiştir. İdempotent bir EK-hemen hemen bi-ideal, bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olduğu gösterilmiştir. EK-hemen hemen bi-ideallerin sonlu esnek birleşimlerinin bir EK-hemen hemen bi-ideal olduğu ancak sonlu esnek kesişimlerinin her zaman bir EK-hemen hemen bi-ideal olmadığı aksi bir örnek ile gösterilmiştir. Esnek küme teorisi ile klasik yarıgrup teorisi arasında bir bağlantı kurmak amacıyla bir yarıgrunun boş kümeden farklı bir alt kümesi bir hemen hemen bi-ideal ise bu alt kümenin esnek karakteristik fonksiyonun da bir EK-hemen hemen bi-ideal olduğu ve bu ifadenin karşınının da doğru olduğu bir teorem ile gösterilmiştir ve örneklendirilmiştir. Bir EK-hemen hemen bi-ideal destek kümesinin, hemen hemen bi-ideal olduğu gösterilmiştir. Bir yarıgrunun boş kümeden farklı bir alt kümesinin bir minimal hemen hemen bi-ideal olması için gerek ve yeter şart bu kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun da bir minimal EK-hemen hemen bi-ideal olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca, EK-hemen hemen bi-idealler ile hemen hemen bi-idealler arasındaki ilişki minimalite, asal olma, yarı asal olma ve kuvvetli asal olma durumlarına göre incelenmiştir. Böylece, bir yarıgrunun boş kümeden farklı bir alt kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu bir EK-(asal, yarı asal, kuvvetli asal) hemen hemen bi-ideal ise o alt kümenin bir (asal, yarı asal, kuvvetli asal) hemen hemen bi-ideal olduğu gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, bir yarıgrupun EK-hemen hemen tri-ideal kavramı tanıtılmış, örneği verilmiş ve çeşitli EK-ideallerle ilişkisi incelenmiştir. Gerekli şart altında bir yarıgrupun EK-tri-ideal, bir EK-hemen hemen tri-ideal olduğu gösterilmiştir. Bu ifadenin tersinin her zaman doğru olmadığına ilişkin aksi örnek sunulmuştur. İdempotent bir esnek kümenin EK-hemen hemen tri-idealinin, bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olduğu gösterilmiştir. İdempotent bir esnek kümenin EK- hemen hemen tri-ideal olması için gerek ve yeter şart o esnek kümenin EK-hemen hemen bi-ideal olmasıdır ifadesi kanıtlanmıştır. EK-hemen hemen tri-ideallerin sonlu esnek birleşimlerinin bir EK-hemen hemen tri-ideal olduğu ancak esnek kesişimleri için durumun her zaman böyle olmadığı aksi bir örnek ile ifade edilmiştir. Esnek küme teorisi ile klasik yarıgrup teorisi arasında bir bağlantı kurmak amacıyla, bir yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesi hemen hemen tri-ideal ise bu kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun bir EK-hemen hemen tri-ideal olduğu ve bu ifadenin karşınının

da doğru olduğu bir teorem ile gösterilmiştir ve örneklendirilmiştir. Bir EK-hemen hemen tri-idealın destek kümesinin, hemen hemen tri-ideal olduğu gösterilmiştir. Bir yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesinin bir minimal hemen hemen tri-ideal olması için gerek ve yeter şart bu kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun da bir minimal EK-hemen hemen tri-ideal olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca, EK-hemen hemen tri-idealler ile hemen hemen tri-idealler arasındaki ilişki minimalite, asal olma, yarı asal olma ve kuvvetli asal olma durumlarına göre incelenmiştir. Böylece, bir yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu bir EK-(asal, yarı asal, kuvvetli asal) hemen hemen tri-ideal ise o kümenin bir (asal, yarı asal, kuvvetli asal) hemen hemen tri-ideal olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışmanın ileriki araştırmalara yol göstereceğini, esnek küme teorisine katkı sağlayacağını, cebirsel yapıların ve uygulamalarının gelişmesine katkıda bulunacağını ümit ediyoruz. Gelecek çalışmalarda yarıgrupların EK-bi-quasi ideallerinin, sol (sağ) basit yarıgruplar, sol (sağ) sıfır yarıgruplar, regüler ve iç regüler gibi çeşitli yarıgrup türleri ile karakterizasyonları yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Acar, U., Koyuncu, F. and Tanay, B. (2010). Soft Sets and Soft Rings. *Computers Mathematics Applications*, 59(11), 3458-3463.
- Akbulut, E. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Difference and Lamda Operations*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University the Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Aktaş, H. and Çağman, N. (2007). Soft Sets and Soft Groups. *Information Sciences*, 177(13), 2726-2735.
- Aktaş, H. and Özlü, Ş. (2014). Cyclic Soft Groups and Their Applications on Groups. *The Scientific World Journal*, Volume 2014 Article ID 437324, 5 pages.
- Aybek, F. (2024). *New Restricted and Extended Soft Set Operations*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University the Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Baş, Z. H. (2025). *Yarıgrupların Esnek Kesişimsel (Hemen Hemen) Bi-quasi-iç İdealleri ve Esnek Kesişimsel Hemen Hemen İç İdealleri*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya.
- Baupradist, S., Chemat, B., Palanivel, K. and Chinram, R. (2021). Essential Ideals and Essential Fuzzy Ideals in Semigroups. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 24(1), 223-233.
- Bayraktar, M. (2006). *Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi* (Birinci Baskı). Türkiye: Gazi Kitabevi, 87-185.
- Bogdanovic, S. (1981). Semigroups in Which Some Bi-ideal is a Group. *Zbornik radova PMF Novi Sad*, 11(81), 261-266.
- Chinram, R. and Nakkhasen, W. (2022). Almost Bi-quasi-interior Ideals and Fuzzy Almost Bi-quasi-interior Ideals of Semigroups. *Journal Mathematical Computer Science*, 26, 128-136.
- Clifford, A. H. and Preston, G. B. (1961). *The Algebraic Theory of Semigroups, Volume I*. Providence: American Mathematical Society, 58-62.
- Clifford, A. H. and Preston, G. B. (1967). *The Algebraic Theory of Semigroups, Volume II*. Providence: American Mathematical Society, 79-83.
- Çağman, N. (2021). Conditional Complements of Sets and Their Application to Group Theory. *Journal of New Results in Science*, 10(3), 67-74.
- Çağman, N., Çıtak, F. and Aktaş, H. (2012). Soft Int-group and Its Applications to Group Theory. *Neural Computing and Applications*, 21, 151-158.

- Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010). Soft Set Theory and Uni-int Decision Making. *European Journal of Operational Research*, 207(2), 848-855.
- Demirci, A. M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Union, Plus and Theta Operations*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University the Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Eren, Ö. F. (2019). *Esnek Küme Teorisi Üzerine*. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Feng, F., Jun, Y. B. and Zhao, X. (2008). Soft Semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(10), 2621-2628.
- Gaketem, T. (2022). Almost Bi-interior Ideal in Semigroups and Their Fuzzifications. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 15(1), 281-289.
- Gaketem, T. and Chinram, R. (2023). Almost Bi-quasi-Ideals and their Fuzzifications in Semigroups. *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, 50(2), 342-352.
- Good, R. A. and Hughes, D. R. (1952). Associated Groups for a Semigroup. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 58(6), 624-625.
- Grillet, P. A. (1995). *Semigroups: An Introduction to the Structure Theory* (First Edition). Routledge, 101-108.
- Grillet, P. A. (2013). *Commutative Semigroups (Vol. 2)*. Springer Science and Business Media, 65-77.
- Grošek, O. and Satko, L. (1980). A New Notion in the Theory of Semigroup. *Semigroup Forum*, 20(1), 233-240.
- Hacısalıhoğlu, H. (2007). *Soyut Matematik (İkinci Baskı)*. Türkiye: Üniversite Yayınevi, 181.
- Howie, J. M. (1995). *Fundamentals of Semigroup Theory*. New York: Oxford University Press, 103-109.
- Husain, S. and Shivani K. M. (2018). A Study of Properties of Soft Set and its Applications. *International Research Journal of Engineering and Technology*, 5(1), 363-372.
- Iampan, A., Chinram, R. and Petchkaew, P. (2021). A Note on Almost Subsemigroups of Semigroups. *International Journal Mathematical Computer Science*, 16(4), 1623-1629.
- İlgin, A. (2025). *Yarıgrupların Esnek Kesişimsel (Hemen Hemen) Bi-iç İdealleri ve Zayıf-iç İdealleri, Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Alt Yarıgruplar ve İdealleri, Bi-quasi İdealleri ve Tri-bi-idealleri*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya.

- İlgin, A. and Sezgin, A. (Baskıda a). Soft Intersection Tri-ideals of Semigroups. *Acta Scientiarum Technology*.
- İlgin, A. and Sezgin, A. (Baskıda b). Soft Intersection Tri-bi-ideals of Semigroups. *Journal of the Korean Society for Industrial and Applied Mathematics*.
- Jun, Y. B. (2008). Soft BCK-BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(5), 1408-1413.
- Jun, Y. B., Lee K. J. and Khan, A. (2010). Soft Ordered Semigroups. *Mathematical Logic Quarterly*, 56(1), 42–50.
- Jun, Y. B., Lee, K. S. and Park, C. H. (2010). Fuzzy Soft Set Theory Applied to BCK/BCI-Algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 3180-3192.
- Jun, Y. B., Lee, K. J. and Zhan, J. (2009). Soft p-ideals of Soft BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(10), 2060-2068.
- Jun, Y. B. and Park, C. H. (2008). Applications of Soft Sets in Ideal Theory of BCK-BCI-Algebras. *Information Sciences: An International Journal*, 178(11), 2466-2475.
- Kaopusek, N., Kaewnoi, T. and Chinram, R. (2020). On Almost Interior Ideals and Weakly Almost Interior Ideals of Semigroups. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 23(3), 773-778.
- Karaaslan, F. (2019). Some Properties of AG*-groupoids and AG-bands Under SI-product Operation. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(1), 231-239.
- Karaaslan, F., Ullah, A. and Ahmad, I. (2021). Normal Bipolar Soft Subgroups. *Fuzzy Information and Engineering*, 13(1), 79-98.
- Kazancı, O., Yılmaz, S. and Yamak, S. (2010). Soft Sets and Soft BCH-algebras. *Hacettepe Journal of Mathematics Statistics*, 39(2), 205-217.
- Kocakaya, F. Z. (2025). *Yarıgrupların Esnek Kesişimsel (Hemen Hemen) Quasi-iç-idealleri, ve Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Quasi-idealleri*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya.
- Lajos S. (1976). $(m;k;n)$ -ideals in Semigroups. Notes on Semigroups II, *Karl Marx University of Economics Department of Mathematics Budapest*, (1), 12-19.
- Maji, P. K., Biswas, R. and Roy, A. R. (2003). Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 555-562.
- Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory-First Results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19-31.
- Nagy, A. (2013). *Special Classes of Semigroups (Vol. 1)*. Springer Science and Business Media, 43-77.

- Park, C. H., Jun, Y. B. and Öztürk, M. A. (2008). Soft WS-algebras. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 23(2), 313-324.
- Pawlak, Z. (1982). Rough Sets. *International Journal of Information and Computer Sciences*, 11(1), 341-356.
- Pei, D. and Miao, D. (2005). From Soft Sets to Information Systems. *2005 IEEE International Conference on Granular Computing*, 2, 617-621.
- Petrich, M. (1973). *Introduction to Semigroups*. Merrill Columbus, 59-70.
- Petrich, M. (1977). *Lectures in Semigroups*. Wiley New York, 202-211.
- Petrich, M. (1985). Inverse Semigroups. *Semigroup Forum*, 32, 215-219.
- Rao, M. M. K. (2017). Bi-quasi Ideals and Fuzzy Bi-quasi Ideals of Semigroups. *Bulletin of International Mathematical Virtual Institute*, 7(2), 231-242.
- Rao, M. M. K. (2018a). Left Bi-quasi Ideals of Semirings. *Bulletin of International Mathematical Virtual Institute*, 8(1), 45-53.
- Rao, M. M. K. (2018b). Fuzzy Left and Right Bi-quasi Ideals of Semiring. *Buletin of the International Mathematical Virtual Institute*, 8(3), 449-460.
- Rao, M. M. K. (2018c). Bi-interior Ideals of Semigroups. *Discussiones Mathematicae-general Algebra and Applications*, 38(1), 69-78.
- Rao, M. M. K. (2018d). A Study of A Generalization of Bi-ideal, Quasi Ideal and Interior Ideal of Semigroup. *Mathematica Moravica*, 22(2), 103-115.
- Rao, M. M. K. (2019). Tri-ideals and Fuzzy Tri-ideals of Γ -semirings. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 18(2), 181-193.
- Rao, M. M. K. (2020a). Tri-ideals of Semirings. *Buletin of the International Mathematical Virtual Institute*, 10(1), 145-155.
- Rao, M. K. K. (2020b). Left Bi-quasi Ideals of Semigroups. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 44(3), 369-376.
- Rao, M. M. K. (2020c). Quasi-interior Ideals and Weak-interior Ideals. *Asia Pacific Journal Mathematics*, 7(21), 1-20.
- Rao, M. M. K. (2020d). Weak-interior Ideals and Fuzzy Weak-interior Ideals of Γ -semirings. *Journal of the International Mathematical Virtual Institute*, 10(1), 75-91.
- Rao, M. M. K. (2024). Tri-ideals of Semigroups. *Bulletin of International Mathematical Virtual Institute*, 14(2), 213-223.
- Rao M. M. K. and Kona R. K. (2022). Fuzzy Tri-ideals and Fuzzy Soft Tri-ideals over Semirings. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics Volume*, 24(3), 315-329.

- Rao, M. M. K., Kona R. K., Rafi, N. and Bolineni, V. (2024). Tri-quasi Ideals and Fuzzy Tri-quasi Ideals of Semigroups. *Annals of Communications in Mathematics*, 7(3), 281-295.
- Rao, M. M. K., Venkateswarlu, B. and Rafi, N. (2017). Left Bi-quasi-Ideals of Γ -semirings. *Asia Pacific Journal of Mathematics*, 4(2), 144-153.
- Sarialioğlu, M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Intersection, Gamma and Star Operations*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University the Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Sen, J. (2014). On Algebraic Structure of Soft Sets. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 7(6), 1013-1020.
- Sezer, A. S., Çağman, N. and Atagün, A. O. (2014). Soft Intersection Interior Ideals, Quasi-ideals and Generalized Bi-Ideals; A New Approach to Semigroup Theory II. *Journal of Multiple-valued Logic and Soft Computing*, 23(1-2), 161-207.
- Sezer, A. S., Çağman, N., Atagün, A. O., Irfan Ali, M. and Türkmen, E. (2015). Soft Intersection Semigroups, Ideals and Bi-Ideals; A New Application on Semigroup Theory I. *Filomat*, 29(5), 917-946.
- Sezgin, A., Ahmad, S. and Mehmood, A. (2019). A New Operation on Soft Sets: Extended Difference of Soft Sets. *Journal of New Theory*, 27, 33-42.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011a). On Operations of Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5), 1457-1467.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011b). Soft Groups and Normalistic Soft Groups. *Computers and Mathematics with Applications*, 62(2), 685-698.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Plus Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 110-127.
- Sezgin, A., Atagün, A. O. and Aygün, E. (2011). A Note on Soft Near-rings and Idealistic Soft Near-rings, *Filomat*, 25(1), 53-68.
- Sezgin, A., Aybek, F. (2023). New soft set operation: Complementary Soft Binary Piecewise Gamma Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(1), 27-45.
- Sezgin, A., Aybek, F. and Atagün, A. O. (2023a). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Intersection Operation. *Black Sea Journal of Engineering and Science*, 6(4), 330-346.
- Sezgin, A., Aybek, F. and Güngör N. B. (2023b). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Union Operation. *Acta Informatica Malaysia*, (7)1, 38-53.
- Sezgin, A. and Baş, Z. H. (2024). Soft-int Almost Interior Ideals for Semigroups. *Information Sciences with Applications*, 4, 25-36.

- Sezgin, A., Baş, Z. H. and İlgin, A. (2025). Soft Intersection Almost Bi-quasi-interior Ideals of Semigroup. *Journal of Fuzzy Extension and Applications*, 6(1), 43-58.
- Sezgin, A. and Çağman, N. (2024). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Osmaniye Korkut Ata University Journal of The Institute of Science and Technology*, 7(1), 58-94.
- Sezgin, A., Çağman, N., Atagün, A. O. and Aybek, F. (2023c). Complemental Binary Operations of Sets and Their Application to Group Theory. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 114-121.
- Sezgin, A., Çağman, N. and Çıtak, F. (2019). α -inclusions and Their Applications to Group Theory. *Communications Faculty of sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(1), 334-352.
- Sezgin, A. and Çalışıcı, H. (2024) A Comprehensive Study on Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(1), 1-23.
- Sezgin, A. and Demirci, A. M. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Star Operation. *Ikonion Journal of Mathematics*, 5(2), 24-52.
- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024a). Soft Intersection Almost Subsemigroups of Semigroups. *International Journal of Mathematics and Physics*, 15(1), 13-20.
- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024b). Soft Intersection Almost Ideals of Semigroups. *Journal of Innovative Engineering and Natural Science*, 4(2), 466-481.
- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024c). Soft Intersection Almost Bi-quasi Ideals of Semigroups. *Soft Computing Fusion with Applications*, 1(1), 27-42.
- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024d). Soft Intersection Almost Bi-interior Ideals of Semigroups. *Journal of Natural and Applied Sciences Pakistan*, 6(1), 1619-1638.
- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024e). Soft Intersection Almost Weak-interior Ideals of Semigroups: A Theoretical Study. *Journal of Natural Sciences and Mathematics (JNSM)* 9(17/18), 372-385.
- Sezgin, A., İlgin, A. and Atagün, A. O. (2024c). Soft Intersection Almost Tri-bi-ideals of Semigroups. *Science and Technology Asia*, 29(4), 1-13.
- Sezgin, A. and Kocakaya F. Z. (Baskıda). Soft Intersection Almost Quasi-ideals of Semigroups. *Songklanakarın Journal of Science and Technology*.
- Sezgin, A., Kocakaya, F. Z. and İlgin, A. (2024a). Soft Intersection Almost Quasi-interior Ideals of Semigroups. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(2), 81-99.
- Sezgin, A. and Onur, B. (2024). Soft Intersection Almost Bi-ideals of Semigroups. *Systemic analytics*, 2(1), 95-105.

- Sezgin, A., Onur, B. and İlgin, A. (2024b). Soft Intersection Almost Tri-ideals of Semigroups. *SciNexuses*, 1, 126-138.
- Sezgin, A. and Orbay, M. (2022). Analysis of Semigroups with Soft Intersection Ideals. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica*, 14(1), 166-210.
- Sezgin, A. and Sarıalioğlu, M. (2024). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Theta Operation. *Kadirli Uygulamalı Bilimler Fakültesi Dergisi*, 4(1), 1-33.
- Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023b). A New Soft Set Operation: Soft Binary Piecewise Symmetric Difference Operation. *Necmettin Erbakan University Journal of Science and Engineering*, 5(2), 189-208.
- Simuen A., Abdullah S., Yonthanthum W. and Chinram R. (2020). Almost Bi- Γ -Ideals and Fuzzy Almost Bi- Γ -Ideals of Γ -Semigroups. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(3), 620-630.
- Steinfeld, O. (1956). Uher Die Quasi Ideals. *Von halbgruppens Publication Mathematical Debrecen*, 4, 262-275.
- Suebsung, S., Chinram, R., Yonthanthum, W., Hila, K., and Iampan, A. (2022). On Almost Bi-ideals and Almost Quasi-ideals of Ordered Semigroups and their Fuzzifications. *ICIC Express Lett*, 16(2), 127-135.
- Sun, Q. M., Zhang, Z. L. and Liu, J. (2008). Soft Sets and Soft Modules. *Lecture Notes in Computer Science*, 5009, 403-409.
- Ullah, A., Ahmad, I., Hayat, F., Karaaslan, F. and Rashad, M. (2018). Soft Intersection Abel-Grassmann's Groups. *Journal of Hyperstructures*, 7(2), 149-173.
- Yang X., Lin T. S., Yang J., Li Y. and Yu D. (2009). Combination of Interval-Valued Fuzzy Set and Soft Set. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(3), 521-527.
- Wattanatripop, K., Chinram, R. and Changphas, T. (2018a). Quasi-A-ideals and Fuzzy A-Ideals in Semigroups. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 21(5), 1131-1138.
- Wattanatripop K., Chinram R. and Changphas T. (2018b). Fuzzy Almost Bi-ideals in Semigroups. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 13(1), 51-58.
- Zhan, J. and Jun, Y. B. (2010). Soft BL-algebras Based on Fuzzy Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(6), 2037-2046.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Beyza ONUR

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Amasya Üniversitesi	2021
Yüksek Lisans	Amasya Üniversitesi	

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

- 1) Sezgin, A. and Onur, B. (2024). Soft Intersection Almost Bi-ideals of Semigroups. *Systemic Analytics*, 2(1), 95-105.
- 2) Sezgin, A., Onur, B. and İlgin, A. (2024). Soft Intersection Almost Tri-ideals of Semigroups. *SciNexuses*, 1, 126-138.
- 3) Sezgin, A., İlgin, A., Kocakaya F. Z., Baş Z. H., Onur, B. and Çıtak, F. (2024). A Remarkable Contribution to Soft Int-group Theory via A Comprehensive View on Soft Cosets. *Journal of Science and Arts*, 24(4), 905-934.
- 4) Sezgin, A. and Onur, B. (Baskıda). Soft Intersection Bi-quasi Ideals of Semigroups. *Turkish Journal of Nature and Science*.