



T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL (HEMEN HEMEN) Bİ-İÇ
İDEALLERİ VE ZAYIF-İÇ İDEALLERİ, ESNEK KESİŞİMSSEL
HEMEN HEMEN ALT YARIGRUPLAR VE İDEALLERİ, Bİ-QUASI
İDEALLERİ VE TRİ-Bİ-İDEALLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ALEYNA İLGİN

OCAK

**YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSEL (HEMEN HEMEN) Bİ-İÇ
İDEALLERİ VE ZAYIF-İÇ İDEALLERİ, ESNEK KESİŞİMSEL HEMEN
HEMEN ALT YARIGRUPLAR VE İDEALLERİ, Bİ-QUASI İDEALLERİ VE
TRİ-Bİ-İDEALLERİ**

Aleyna İLGİN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Prof. Dr. Ashhan SEZGİN

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2025

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Aleyna İLGİN tarafından hazırlanan “Yarıgrupların Esnek Kesişimsel (Hemen Hemen) Bi-iç İdealleri ve Zayıf-iç İdealleri, Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Alt Yarıgruplar ve İdealleri, Bi-quasi İdealleri ve Tri-bi-idealleri” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Prof. Dr. Faruk KARAASLAN

Matematik Anabilim Dalı, Çankırı Karatekin Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 02/01/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Aleyna İLGİN

02/01/2025

YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL (HEMEN HEMEN) Bİ-İÇ İDEALLERİ VE
ZAYIF-İÇ İDEALLERİ, ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN ALT YARIGRUPLAR
VE İDEALLERİ, Bİ-QUASİ İDEALLERİ VE TRİ-Bİ-İDEALLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Aleyna İLGİN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2025

ÖZET

Esnek küme teorisi, Molodtsov tarafından 1999 yılında belirsizliği modellemek amacıyla ortaya atılmış ve birçok alanda geniş kapsamlı çalışmalarla ilerleme göstermiştir. Bu çalışmalardan biri de yarıgrup teorisinde esnek kümeler kullanılarak yarıgrupların farklı çeşitlerdeki esnek kesişimsel ideallerinin tanımlanması ve temel özelliklerinin incelenmesidir. Bu tez çalışmasında, esnek küme teorisine katkıda bulunmak amacıyla, yarıgrupların çeşitli esnek kesişimsel idealleri ve esnek kesişimsel hemen hemen idealleri tanıtılmıştır. On bir bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde, yarıgruplar ve (hemen hemen) idealleri, esnek kümeler, yarıgruplar ve yarıgrupların çeşitli esnek kesişimsel (hemen hemen) idealleri ile ilgili literatürde yer alan çalışmalara değinilmiştir. İkinci bölümde, bu tez çalışmasında kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiş, esnek basit* yarıgrup kavramı tanıtılmış ve örneklendirilmiştir. Üçüncü bölümde yarıgrupların esnek kesişimsel zayıf-iç idealleri, dördüncü bölümde yarıgrupların esnek kesişimsel bi-iç idealleri, beşinci bölümde yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen alt yarıgrupları, altıncı bölümde yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen idealleri, yedinci bölümde yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen zayıf-iç idealleri, sekizinci bölümde yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen bi-iç idealleri, dokuzuncu bölümde yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi idealleri, onuncu bölümde yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen tri-bi-idealleri tanıtılmış, örnekleri verilmiş ve özellikleri incelenmiştir. Bazı esnek kesişimsel (hemen hemen) idealler arasındaki ilişkiler detaylı bir şekilde incelenmiş; klasik yarıgrup teorisi ve esnek küme teorisi arasındaki önemli bağlantılar, bazı ana teoremler ve örneklerle sunulmuştur. Ayrıca, esnek küme işlemlerinin bu yapılar ile ilişkili sonuçları ile bu yapıların esnek görüntü, esnek ters görüntü gibi bazı kavramsal karakterizasyonları ele alınmış ve örneklendirilmiştir. Çeşitli hemen hemen idealler ile esnek kesişimsel hemen hemen idealler arasında minimalite, asallık, yarı asallık ve kuvvetli asallık açısından önemli ilişkiler elde edilmiştir. Son bölümde ise bu çalışmadan elde edilen sonuçlara yer verilmiş ve sonuçların önemi tartışılmıştır.

Sayfa Adedi	: 183
Anahtar Kelimeler	: Yarıgrup, Esnek küme, Yarıgrupların esnek kesişimsel (hemen hemen) idealleri
Danışman	: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

SOFT INTERSECTION (ALMOST) BI-INTERIOR IDEALS AND WEAK-INTERIOR IDEALS, SOFT INTERSECTION ALMOST SUBSEMIGROUPS AND IDEALS, BI-QUASI IDEALS AND TRI-BI-IDEALS OF SEMIGROUPS

(M. Sc. Thesis)

Aleyna İLGİN

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2025

ABSTRACT

Soft set theory, introduced by Molodtsov in 1999 to model uncertainty and has shown progress with wide-ranging studies in a lot fields. One of these studies is proposing the concepts of different types of soft intersection ideals of semigroups using soft sets in semigroup theory and examination of their basic properties. In this thesis, various soft intersection ideals and soft intersection almost ideals of semigroups are presented to contribute to soft set theory. In the first section of this thesis, which consists of eleven sections, the existing studies in the literature related to semigroups and their (almost) ideals, soft sets, semigroups, and various soft intersection (almost) ideals of semigroups are mentioned. In the second section, fundamental definitions and theorems that are used in this thesis are given; the concept of soft simple* semigroup is introduced and exemplified. In the third section soft intersection weak-interior ideals of semigroups, in the fourth section soft intersection bi-interior ideals of semigroups, in the fifth section soft intersection almost subsemigroups of semigroups, in the sixth section soft intersection almost ideals of semigroups, in the seventh section soft intersection almost weak-interior ideals of semigroups, the eighth section soft intersection almost bi-interior ideals of semigroups, the ninth section soft intersection almost bi-quasi ideals of semigroups, and in the tenth section soft intersection almost tri-bi-ideals of semigroups are introduced, their properties are examined, and their examples are given. Their relationships between certain soft intersection (almost) ideals are examined in detail; and important connections between classical semigroup theory and soft set theory are presented through some key theorems and examples. Additionally, the results regarding soft set operations on these structures, as well as some conceptual characterizations of these structures such as soft image and soft inverse image, have been discussed and exemplified. Significant relationships regarding minimality, primeness, semiprimeness, and strongly primeness have been obtained between various almost ideals and soft intersection almost ideals. In the final section, the results obtained from this study are given and the importance of the results is discussed.

Number of pages	: 183
Keywords	: Semigroup, Soft set, Soft intersection (almost) ideals of semigroups
Supervisor	: Prof. Dr. Ashhan SEZGİN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında en büyük katkıyı sağlayan danışmanım Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN'e, beni bu çalışmaya yönlendirdiği, engin bilgi ve deneyimleriyle bana rehberlik ettiği, yapıcı geri bildirimleriyle çalışmalarımı şekillendirmeme yardımcı olduğu ve desteğini hiçbir zaman esirgemediği için içtenlikle teşekkür ediyorum. Bir diğer yandan, bugüne kadar eğitimime katkı sağlayan ve bana ilham veren öğretmenlerimin her birine ayrı ayrı teşekkürü borç bilirim.

Süreç boyunca desteklerini ve motivasyonlarını hiç eksik etmeyen yüksek lisans sınıf arkadaşlarım Beyza ONUR, Fatıma Zehra KOCAKAYA ve Zeynep Hare BAŞ'a tüm emekleri için teşekkür ediyorum. Aynı zamanda, hayatımda her daim yanımda olan dostlarıma da müteşekkirim.

Ayrıca, annem Nurhayat İLGİN, babam İhsan İLGİN ve abim Kağan İLGİN'e hayatım boyunca gösterdikleri koşulsuz sevgi, anlayış, sabır ve destekleri için en içten teşekkürlerimi sunuyorum. Her zaman yanımda oldukları için minnetarım.

Son olarak, bu süreçte gösterdiğim tüm emeklerim için kendime de içtenlikle teşekkür ediyorum ve bu başarıyı kendime armağan ediyorum.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	9
2.1. Yarıgruplar ve Yarıgrup Çeşitleri	9
2.2. Yarıgrupların İdealleri ve Hemen Hemen İdealleri.....	13
2.3. Esnek Kümeler ve Temel Kavramları.....	16
2.4. Esnek Kesişimsel İdealler ve Esnek Kesişimsel Hemen Hemen İdealler....	21
3. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL ZAYIF-İÇ İDEALLERİ.....	30
4. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL Bİ-İÇ İDEALLERİ.....	58
5. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN ALT YARIGRUPLARI.....	79
6. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN İDEALLERİ.....	89
7. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN ZAYIF-İÇ İDEALLERİ.....	106
8. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN Bİ-İÇ İDEALLERİ.....	120
9. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN Bİ-QUASI İDEALLERİ.....	136
10. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN TRİ-Bİ-İDEALLERİ.....	154
11. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	167

KAYNAKLAR	174
ÖZGEÇMİŞ	182



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. Bazı esnek kesişimsel idealler arasındaki ilişkileri gösteren diyagram.....	57
Şekil 4.1. Bazı esnek kesişimsel idealler arasındaki ilişkileri gösteren diyagram.....	78



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^-$	Negatif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}'$	İrrasyonel sayılar kümesi
$\emptyset$	Boş küme
$\exists$	Varlıksal niceleyici, en az bir
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\neq$	Eşit değildir
$\subseteq$	Alt kümesidir
$\not\subseteq$	Alt kümesi değildir
$\supseteq$	Kapsar
$\not\supseteq$	Kapsamaz
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Birleşim
$\Rightarrow$	Gerek şart
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter şart
E	Parametre kümesi
U	Evrensel küme

$S_E(U)$	E üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
$\emptyset_S$	S ye göre boş esnek küme
$\tilde{S}$	Tam esnek küme
S_A	A nın esnek karakteristik fonksiyonu
S_x	x in esnek karakteristik fonksiyonu
$\circ$	Esnek kesişimsel çarpım işlemi
$\subseteq$	Esnek alt kümesidir
$\tilde{\cap}$	Esnek kesişim
$\tilde{\cup}$	Esnek birleşim
$Im(f_S)$	f_S nin görüntü kümesi
$\mathcal{U}(f_S; \alpha)$	f_S nin üst α -kapsama kümesi
$supp(f_S)$	f_S nin destek kümesi

Kısaltmalar

Açıklama

EK

Esnek kesişimsel

1. GİRİŞ

Bilimsel bilgi, zaman içinde kabul edilegelen kesinliği ve nesnel keşif yöntemi yüzünden, özünde diğer bilgi çeşitlerinden farklı olarak algılanır (James, 1998/2003). Günlük yaşamda ise, eğlenceli oyun, güzel ev, iyi insan, kötü film gibi kişiden kişiye değişen, bilimsel bilgi gibi nesnel olmayan kavramlarla karşılaşırız. İnsanlar, günlük yaşamlarında karşılaştıkları belirsizlik içeren karmaşık problemleri çözebilmek amacıyla tarihsel süreç içerisinde çeşitli çözüm yolları aramışlardır. Ancak, yeni keşfedilen veya daha önceden var olan yöntemler, değişen koşullarda ortaya çıkan karmaşık problemlerin çözümü için yetersiz kalmıştır. Belirsizlik içeren durumlara çözüm üretebilmek amacıyla geliştirilen teoriler arasında en bilinenlerden biri, Zadeh (1965) tarafından ortaya atılan ‘Bulanık Kümeler Teorisi’dir. Bulanık kümeler üyelik fonksiyonları aracılığıyla tanımlanır. Ancak, üyelik fonksiyonunun son derece öznel olması ve bununla birlikte getirdiği yapısal zorluklar nedeniyle, Molodtsov (1999) belirsizliği modellemek ve belirsizlik içeren problemlerde kullanmak için, üyelik fonksiyonundan bağımsız bir küme teorisi olan ‘Esnek Küme Teorisi’ni ortaya atmıştır.

Esnek küme kavramı ortaya atıldığından bu yana hem teorik hem de uygulamalı birçok alanda kendine yer bulmuş ve öncülüğünde pek çok yeni çalışma literatüre kazandırılmıştır. Maji, Biswas ve Roy (2003) bir esnek kümenin alt kümesi kavramını tanımlamış; iki esnek kümenin eşitliği, bir esnek kümenin tümleyeni, ve/veya gibi esnek ikili işlemler ile esnek kümeler için birleşim ve kesişim işlemlerini geliştirmiştir. Pei ve Miao (2005), esnek alt küme ve iki esnek kümenin kesişimi kavramlarını yeniden tanımlamıştır. Aktaş ve Çağman (2007), esnek grup, esnek alt grup ve esnek homomorfizma kavramlarını ilk kez literatüre sunarak, esnek cebirsel yapı üzerine gerçekleştirilecek birçok çalışmanın önünü açmıştır. Park, Jun ve Öztürk (2008) esnek cebirsel kavramlar üzerine çalışmalar yapmıştır. Ali, Feng, Liu, Min ve Shabir (2009), esnek kümelerin kısıtlanmış birleşimi, kısıtlanmış kesişimi, kısıtlanmış farkı ve genişletilmiş kesişimi kavramlarını tanımlayarak bu işlemlerin temel özelliklerini incelemiştir. Çağman ve Enginoğlu (2010), Molodtsov'un esnek küme tanımını ve esnek küme işlemlerini daha kullanışlı hale getirmek amacıyla yeniden tanımlamıştır. Babitha ve Sunil (2010), iki esnek kümenin kartezyen çarpımı üzerine çalışmıştır. Sezgin ve Atagün (2011a), kısıtlanmış simetrik fark işlemini tanımlayarak özelliklerini incelemiştir. Neog ve Sut (2011), esnek kümeler için tümleyen kavramını yeniden tanımlamıştır. Zhu ve Wen (2013), klasik kümelerin temel özelliklerinin esnek kümelerde de geçerli olduğunu

göstermiştir. Kharal (2014), bir esnek kümenin çekirdeği ve desteği kavramlarını tanımlanmış ve incelemiştir. Sezgin, Ahmad ve Mehmood (2019), esnek kümeler üzerinde genişletilmiş fark adı verilen yeni bir işlem tanımlamış, bu işlemin diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisini araştırmıştır. Stojanovic (2021), esnek kümeler üzerinde genişletilmiş simetrik fark işlemini tanımlamış, bu işlemin özelliklerini ve diğer esnek küme işlemleri ile ilişkisini detaylı bir şekilde incelemiştir. Tümleyenli esnek ikili parçalı esnek küme işlemleri detaylı şekilde çeşitli araştırmacılar (Sezgin ve Aybek, 2023; Sezgin ve Demirci, 2023; Sezgin ve Sarıaloğlu, 2024; Sezgin ve Yavuz, 2023a; Sezgin, Aybek ve Atagün, 2023; Sezgin, Aybek ve Güngör, 2023) tarafından çalışılmıştır. Sezgin ve Çalışıcı (2024), klasik kümelerde bulunan fark işleminin özelliklerini esnek ikili parçalı fark işleminde çalışmıştır. Ayrıca, esnek küme işlemleri daha birçok araştırmacı (Ali, Shabir ve Naz, 2011; Sezgin ve Atagün, 2023; Sezgin ve Yavuz, 2023b; Sezgin ve Çağman, 2024) tarafından ilgi görmüş ve incelenmiştir.

Esnek küme teorisindeki teorik çalışmalar, genellikle bir cebirsel yapının esnek cebirsel formunun ayrıntılı bir şekilde incelenmesine yoğunlaşmıştır. Bu alandaki öncü çalışmalardan biri, Aktaş ve Çağman (2007) tarafından yapılan esnek grup araştırmasıdır. Bu çalışmanın devamında esnek cebirsel yapılar ile ilgili birçok çalışma literatüre kazandırılmıştır. Jun (2008), esnek BCK/BCI cebirini incelerken; Feng, Jun ve Zhao (2008), esnek yarı halka kavramını çalışmış; Jun ve Park (2008) ise esnek BCK/BCI cebirlerinin cebirsel özelliklerini analiz etmiştir. Jun, Lee ve Zhan (2009), esnek küme kavramını BCI cebirlerindeki p-ideallerine uygulayarak, esnek p-ideal ve esnek p-idealist BCI-cebiri kavramlarını tanımlamış ve bulanık p-ideal ile esnek p-idealist BCI-cebiri arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Acar, Koyuncu ve Tanay (2010), esnek halkaları tanımlamış; esnek halka idealleri, idealist esnek halkalar ve esnek halka homomorfizmalarının temel özelliklerini incelemiştir. Kazancı, Yılmaz ve Yamak (2010), esnek BCH-cebirini tanımlamış ve özelliklerini araştırmıştır. Zhan ve Jun (2010), bulanık küme ve esnek küme teorilerini BL-cebirine uyarlamıştır. Jun, Lee ve Khan (2010), esnek sıralı yarıgrup, esnek sıralı alt yarıgrup ve esnek sıralı bir yarıgrupun esnek ideali kavramlarını tanıtmış ve özelliklerini incelemiştir. Jun, Song ve So (2011), bulanık esnek BCI cebir, bulanık esnek idealler ve bulanık esnek p-idealler kavramlarını tanımlamıştır. Esnek grup, normalistik esnek grup ve normalistik esnek grup homomorfizmi kavramları Sezgin ve Atagün (2011b) tarafından sunulmuştur. Sezgin, Atagün ve Aygün (2011), esnek yakın halkalar üzerine yapılan teorik çalışmaları

geliştirmiştir. Çağman, Çıtak ve Aktaş (2012), çeşitli esnek cebirsel sistemlerin araştırılmasına yol açan esnek kesişimsel gruplar kavramını tanımlamıştır. Aktaş ve Özlü (2014), esnek grupların mertebesi, esnek grupların kuvveti ve devirli esnek grup kavramlarını tanıtmış, devirli esnek gruplar ile klasik gruplar arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Sezer, Çağman ve Atagün (2014) ve Sezer, Çağman, Atagün, Ali ve Türkmen (2015b), yarıgrup teorisine yeni bir yaklaşım getirmiş, Çağman ve Enginoğlu (2010) tarafından düzenlenen esnek küme tanımını kullanarak, esnek kesişim çarpım işlemini ve esnek karakteristik fonksiyon kavramını literatüre kazandırmıştır. Ayrıca, esnek kesişimsel yarıgrup, yarıgrupların esnek kesişimsel sol (sağ/iki taraflı) idealleri, esnek kesişimsel (genelleştirilmiş) bi-idealleri, esnek kesişimsel iç idealleri ve esnek kesişimsel quasi-idealleri kavramlarını tanımlamış, bu ideallerin birbirileri ile ilişkilerini ortaya koymuş ve regüler yarıgrup, iç regüler yarıgrup, tamamen regüler yarıgrup gibi farklı yarıgrup türlerini bu idealler ile karakterize etmişlerdir. Tanımladıkları bu çeşitli esnek kesişimsel ideallerin; esnek kesişim, esnek görüntü, esnek ters görüntü gibi literatürde mevcut olan esnek küme işlemleri ve kavramları üzerinde gösterdiği sonuçları sistematik bir şekilde sunmuşlardır. Öne sürdükleri bazı ana teoremler aracılığıyla, esnek küme teorisi ile klasik yarıgrup teorisi arasında önemli geçişler elde etmişlerdir. Ullah, Ahmad, Hayat, Karaaslan ve Rashad (2018), esnek kesişimsel AG-gruplarını tanımlamıştır. Ullah, Karaaslan ve Ahmad (2018), esnek birleşimsel grup kavramını esnek birleşimsel AG-grubu kapsayacak şekilde genişletmiştir. Karaaslan (2019), esnek kesişimsel çarpım işlemini kullanarak AG-grupoid, AG*-groupoid ve AG-bantın bazı özelliklerini incelemiştir. Ayrıca, esnek idempotent eleman, esnek kesişimsel AG-bant ve esnek kesişim AG-grupoidin esnek asal ideali gibi yeni kavramları tanımlamış ve bu kavramların özelliklerini sunmuştur. Sezgin ve Orbay (2022), yarı basit yarıgruplar, duo yarıgruplar, sağ (sol) sıfır yarıgrupları, sağ (sol) basit yarıgruplar, sol (sağ) basit yarıgrupların yarı kafesi, sol (sağ) grupların yarı kafesi ve grupların yarı kafesi gibi belirli yarıgrup sınıflarını; esnek kesişimsel idealler, (genelleştirilmiş) bi-idealler, iç idealler ve quasi-idealler açısından karakterize etmiştir. Ayrıca, esnek normal yarıgrupları tanımlamış ve bu kavramın yarıgruplarla ilişkisini ortaya koymuştur. Karaaslan, Ullah ve Ahmad (2021), normal bipolar esnek alt grup, konjuge bipolar esnek alt grup, bipolar esnek grubun bipolar sol (sağ) kosetleri kavramlarını literatüre kazandırmıştır. Bunun yanı sıra, çeşitli cebirsel yapıların esnek formları daha birçok araştırmacı (Sezer, 2014a, 2014b; Sezer, Çağman ve Atagün, 2015a; Muştuoğlu, Sezgin ve Türk, 2016; Tunçay ve Sezgin, 2016; Sezer ve Atagün, 2016; Sezgin, Çağman ve Atagün,

2017; Mahmood, Rehman ve Sezgin, 2018; Atagün ve Sezgin, 2018; Sezgin, 2018; Jana, Pal, Karaaslan ve Sezgin, 2019; Özlü ve Sezgin, 2020; Sezgin, Atagün, Çağman ve Demir, 2022) tarafından araştırılmış ve sunulmuştur.

Soyut cebir, birçok cebirsel yapı içerir ve bu cebirsel yapıları sınıflandırmanın yanı sıra genel özelliklerini incelemeyi amaçlar. Bu bağlamda yarıgruplar, soyut cebirde hem teorik hem uygulama alanında önemli bir yer tutar. Yarıgrup kavramı, ilk kez 1900'lerin başında ortaya çıkmış ve genellikle parçalı çalışmalar şeklinde geliştirilmiştir. 1940'lardan itibaren yarıgruplar üzerine yapılan çalışmaların istikrarlı bir şekilde artmasıyla birlikte Clifford ve Preston (1961, 1967), yayımladıkları iki ciltlik bir kitap ile belli tipteki yarıgrupların yapısı, kongrüanslar teorisi ve yarıgrupların gruplara yerleştirilmesi konularını ele almıştır. Yarıgrupların, teorik bilgisayar biliminde, otomatlarda, kodlama teorisinde, biçimsel dillerde ve olasılık teorisi gibi matematiğin birçok disiplinde uygulama alanı bulunmaktadır. Bunun yanı sıra, biyoloji, psikoloji, biyokimya ve sosyoloji gibi alanların bazı kısımları da yarıgruplardan yararlanır. Ayrıca, graf teorisi ve optimizasyon teorisinde yarıgruplar cebirsel yapılar olarak temel bir rol oynar. Cebirsel yapıların ve uygulamalarının ileri düzeyde incelenmesi için idealler son derece önemlidir. Cebirsel yapılardaki ideallerin genelleştirilmesi, cebirsel yapılar hakkında daha fazla araştırma yapmak için gereklidir. Birçok matematikçi, cebirsel yapılarda idealler kavramının farklı açılımlarını sunarak önemli sonuçlar ortaya koymuş ve cebirsel yapıları karakterize etmiştir. Dedekind, cebirsel yapılar üzerindeki çalışmaların daha sistematik incelenmesine yardımcı olmak amacıyla ilk kez ideal kavramını ortaya atmıştır ve Noether bu kavramı birleşmeli halkalar için genelleştirmiştir. Herhangi bir cebirsel yapının tek taraflı ideali fikri, ideal fikrinin bir uzantısıdır ve tek taraflı ve iki taraflı idealler hâlâ halka teorisinde temel fikirler olarak kabul edilmektedir.

Yarıgruplar için bi-ideal kavramı ilk kez 1952'de Good ve Hughes (1952) tarafından tanıtılmıştır. Quasi-idealler fikri ilk olarak Steinfeld (1956) tarafından yarıgruplar ve daha sonra halkalar için geliştirilmiştir. Quasi-idealler, sol ideallerin ve sağ ideallerin bir genellemesi iken; bi-idealler, quasi-ideallerin bir genellemesidir. Bir yarı grubun iç ideali kavramı, Lajos (1976) tarafından tanımlanmış ve daha sonra Szasz (1977, 1981) tarafından incelenmiştir. Herhangi bir cebirsel yapının iç ideali kavramı ise ideal kavramının bir genellemesidir.

Farklı tipteki ideallerin daha genelleştirilmiş bir kavramı olarak "hemen hemen" idealler önerilmiş, bu ideallerin özellikleri ve ilgili ideallerle arasındaki ilişkileri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu bağlamda, Grosek ve Satko (1980), yarıgrupların hemen hemen sol, sağ ve iki taraflı idealleri kavramını ilk kez ortaya atmıştır. Daha sonra, Bogdanovic (1981), bi-idealler kavramını yarıgrupların hemen hemen bi-ideallerine genişletmiştir. Wattanatripop, Chinram ve Changphas (2018), yarıgrupların hemen hemen quasi-idealleri kavramını tanıtmıştır. Yarıgrupların hemen hemen iç idealleri ve zayıf hemen hemen iç idealleri fikirleri Kaopusek, Kaewnoi ve Chinram (2020) tarafından incelenmiştir. Hemen hemen alt yarıgruplar Iampan, Chinram ve Petchkaew (2021) tarafından tanımlanmıştır.

Mevcut ideallerin bir uzantısı olarak son zamanlarda Rao (2018a, 2018b, 2020a, 2020b) tarafından yarıgrupların bi-iç idealleri, bi-quasi-iç idealleri, bi-quasi idealleri, quasi-iç idealleri ve zayıf-iç idealleri önerilmiştir. Baupradist, Chemat, Palanivel ve Chinram (2021), yarıgrupların esas ideallerini tanımlamıştır. Yarıgrupların tri-quasi idealleri ise Rao, Kona, Rafi ve Bolineni (2024) tarafından çalışılmıştır. Ayrıca, yarıgrupların tri-idealleri Rao (2024) tarafından literatüre kazandırılmıştır.

Yeni tanımlanan bu çeşitli ideallerin genellemesi olan “hemen hemen” kavramları da tanıtılmıştır ve incelenmiştir. Yarıgrupların hemen hemen bi-iç idealleri Gaketem (2022) ve Chinram ve Nakkhasen (2022a) tarafından; yarıgrupların hemen hemen bi-quasi-iç idealleri Chinram ve Nakkhasen (2022b) tarafından ve yarıgrupların hemen hemen bi-quasi idealleri Gaketem ve Chinram (2023) tarafından tanımlanmış ve incelenmiştir.

Klasik yarıgrup teorisi üzerinde tanımlanan farklı tipteki idealler, esnek küme teorisinde “esnek kesişimsel hemen hemen” kavramına genellenerek araştırılmıştır. Bu bağlamda, yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen alt yarıgrupları, esnek kesişimsel hemen hemen idealleri, esnek kesişimsel hemen hemen zayıf-iç idealleri, esnek kesişimsel hemen hemen bi-iç idealleri ve esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi idealleri Sezgin ve İlgin (2024a, 2024b, 2024c, 2024d, 2024e) tarafından tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Sezgin ve Onur (2024), yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen bi-ideallerini; Sezgin ve Baş (2024), yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen iç ideallerini; Sezgin ve Kocakaya (Baskıda), yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen quasi-ideallerini çalışmıştır. Ayrıca, Sezgin, Baş ve İlgin (2025), yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi-iç

ideallerini; Sezgin, İlgin ve Atagün (2024a), yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen tri-bi-ideallerini; Sezgin, Kocakaya ve İlgin (2024b), yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen quasi-iç ideallerini; Sezgin, Onur ve İlgin (2024c), yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen tri-ideallerini tanımlamış ve incelemiştir.

Rao (2020b), bir yarıgrupun zayıf-iç ideali kavramını, ideal, iç ideal ve quasi-idealin bir genellemesi olarak tanımlamış, özelliklerini incelemiş ve yarıgrupların zayıf-iç ideallerini kullanarak basit yarıgrupları ve regüler yarıgrupları karakterize etmiştir. Literatürdeki çalışmalar tarandığında, zayıf-iç ideal kavramı ayrıca Γ -yarıhalkalar için Rao (2020c), Γ -yarıgruplar için Rao ve Rao (2021) ve yarıhalkalar için Rao (2022b) tarafından çalışılmıştır. Bir yarıgrupun bi-iç ideali kavramını ilk kez Rao (2018a), bi-ideal ve iç idealin bir genellemesi olarak önermiş ve basit yarıgruplar ile regüler yarıgrupların bi-iç ideallerinin özelliklerini incelemiştir. Literatürdeki çalışmalar tarandığında, bi-iç ideal kavramı ayrıca Γ -yarıhalkalar için Rao ve Venkateswarlu (2018) ve Γ -yarıgruplar için Rao (2022a) tarafından çalışılmıştır.

Bu tez çalışmasında, bir yarıgrupun zayıf-iç ideali kavramı esnek küme teorisine aktararak “Yarıgrupların Esnek Kesişimsel Zayıf-iç İdealleri” kavramı tanıtılmış, örneklendirilmiş ve detaylıca incelenmiştir. Bu bağlamda, bir alt yarıgrup bir zayıf-iç ideal ise bu altarı grubun esnek karakteristik fonksiyonunun bir esnek kesişimsel zayıf-iç ideal olduğu ve bunun karşınının da geçerli olduğu bir teorem ile gösterilmiştir ve örneklendirilmiştir. Böylece, klasik yarıgrup teorisi ile esnek küme teorisi arasında önemli bir ilişki kurulmuştur. Ayrıca, bir yarıgrupun esnek kesişimsel zayıf-iç idealleri ile diğer esnek kesişimsel idealleri arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Elde edilen bulgular, regüler bir yarıgrupun her esnek kesişimsel zayıf-iç idealinin bir esnek kesişimsel alt yarıgrup olduğunu ve bir yarıgrupun esnek kesişimsel zayıf-iç idealinin, esnek kesişimsel ideal ve esnek kesişimsel iç idealin bir genellemesi olduğunu göstermektedir. Bunun yanı sıra, her idempotent esnek kesişimsel zayıf-iç idealin, esnek kesişimsel ideal ile çakışık olduğu ve bir grubun her esnek kesişimsel zayıf-iç idealinin bir grubun esnek kesişimsel ideali (iç ideali, bi-ideali, quasi-ideali) ile denk olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, esnek kesişimsel sol (sağ) zayıf-iç idealler kullanılarak sol basit ve sağ basit yarıgruplar karakterize edilmiştir. Diğer taraftan, yarıgrupların esnek kesişimsel zayıf-iç idealleri kavramı, esnek kesişim ve esnek kesişimsel çarpım işlemi gibi esnek küme işlemleri bakımından değerlendirilmiş; esnek görüntü ve esnek ters görüntü gibi

kavramlar açısından da analiz edilmiştir. Ayrıca, idempotentlik şartı altında, bir yarıgrupun regülerliği ile esnek kümenin esnek kesişimsel sol (sağ) zayıf-iç idealliği arasında çift gerektirme ilişkisi kurularak, klasik yarıgrup teorisi ile esnek küme teorisi arasındaki bağlantı pekiştirilmiştir.

Ayrıca bu tez çalışmasında, “Yarıgrupların Esnek Kesişimsel Bi-iç İdealleri” kavramı sunulmuş, örneklendirilmiş ve detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu bağlamda, bir yarıgrupun boştan farklı bir alt kümesi bir bi-iç ideal ise bu alt kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun bir esnek kesişimsel bi-iç ideal olduğu ve bunun karşınının da geçerli olduğu bir teorem ile gösterilmiştir ve örneklendirilmiştir. Böylece, klasik yarıgrup teorisi ile esnek küme teorisi arasında önemli bir ilişki kurulmuştur. Ayrıca, bir yarıgrupun esnek kesişimsel bi-iç idealleri ile diğer esnek kesişimsel idealleri arasındaki ilişkiler araştırılırken ilk defa bu çalışmada tanıtılan esnek basit* yarıgrup kavramı kullanılmıştır. Buradan elde edilen bulgular, esnek basit* bir yarıgrupun her esnek kesişimsel bi-iç idealinin bir esnek kesişimsel alt yarıgrup olduğunu göstermiştir. Bunun yanı sıra, bir yarıgrupun her esnek kesişimsel sol (sağ/iki taraflı) ideali, bi-ideali, iç ideali ve quasi-idealinin bir esnek kesişimsel bi-iç ideal olduğu kanıtlanmış, karşıtlarının her zaman doğru olmadığını göstermek için aksine örnekler verilmiş ve karşıtlarının yarıgrupların esnek basit* yarıgrup olması durumunda geçerli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, yarıgrupların esnek kesişimsel bi-iç idealleri kavramı, esnek kesişim ve esnek kesişimsel çarpım işlemi gibi esnek küme işlemleri bakımından değerlendirilmiş; esnek görüntü gibi kavramlar açısından da analiz edilmiştir. Diğer taraftan, bir yarıgrupun regülerliği ile esnek kümenin esnek kesişimsel bi-iç idealliği arasında çift gerektirme ilişkisi kurularak, klasik yarıgrup teorisi ile esnek küme teorisi arasındaki bağlantı pekiştirilmiştir.

On bir bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde, yarıgruplar ve (hemen hemen) idealleri, esnek kümeler ve yarıgrupların çeşitli esnek kesişimsel (hemen hemen) idealleri ile ilgili literatürde yer alan çalışmalara değinilmiştir. İkinci bölümde, bu tez çalışmasında kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiş, esnek basit* yarıgrup kavramı tanıtılmış ve örneklendirilmiştir. Üçüncü bölümde yarıgrupların esnek kesişimsel zayıf-iç idealleri, dördüncü bölümde yarıgrupların esnek kesişimsel bi-iç idealleri sunulmuştur. Beşinci, altıncı, yedinci, sekizinci, dokuzuncu ve onuncu bölümlerde sırasıyla, yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen alt yarıgrupları, esnek kesişimsel hemen hemen idealleri, esnek

kesişimsel hemen hemen zayıf-iç idealleri, esnek kesişimsel hemen hemen bi-iç idealleri, esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi idealleri ve esnek kesişimsel tri-bi-idealleri tanıtılmış, örnekleri verilmiş ve birbirleri ve diğer esnek kesişimsel hemen hemen idealler ile ilişkileri incelenmiştir. Klasik yarıgrup teorisi ve esnek küme teorisi arasındaki önemli bağlantılar, bazı ana teoremler ve örneklerle sunulmuştur. Ayrıca, esnek küme işlemleri ile ilişkili sonuçlar ile bu yapıların esnek görüntü gibi bazı kavramsal karakterizasyonlar ele alınmış ve örneklendirilmiştir. Çeşitli hemen hemen idealler ile esnek kesişimsel hemen hemen idealler arasında minimalite, asallık, yarı asallık ve kuvvetli asallık açısından önemli ilişkiler elde edilmiştir. Son bölümde ise bu çalışmadan elde edilen sonuçlara yer verilmiş ve sonuçların önemi tartışılmıştır.



2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez boyunca kullanılan yarıgrup kavramı ve esnek kümeler ile ilgili temel bilgilere verilmiştir.

2.1. Yarıgruplar ve Yarıgrup Çeşitleri

Bu alt bölümde, yarıgrup tanımı ve yarıgrupların bazı çeşitleri hakkında bilgi verilmiştir. Clifford ve Preston (1961: 58-62, 1967: 79-83), Petrich (1973: 59-70, 1977: 202-211, 1985), Howie (1995: 103-109), Grillet (1995: 101-108, 2013: 65-77), Nagy (2013: 43-77) kaynaklarından yarıgruplar hakkında detaylı bilgilere ulaşılabilir.

2.1.1. Tanım A boş kümeden farklı bir küme olmak üzere,

$$\star : A \times A \rightarrow A$$

fonksiyonuna, A kümesi üzerinde bir (ikili) işlem denir (Aydın ve Kandamar, 2013: 71). Bu açıdan, ikili işlemler iki değişkenli fonksiyondur (Hacısalıhoğlu, 2007: 163).

“ $\star$ ” ikili işlemi, bir fonksiyon olduğundan her $x, y \in A$ için, $x \star y \in A$ sağlandığı açıktır. Bu, A kümesinin “ $\star$ ” işlemine göre kapalı olması demektir (Aydın ve Kandamar, 2013: 71).

Herhangi bir kümede tanımlanan işlem/işlemler bu küme ile birlikte cebirsel yapı oluşturur (Hacısalıhoğlu, 2007: 181). Cebirsel yapıların diğer adı, matematiksel yapı ya da matematiksel sistemdir. Cebirde en bilinen cebirsel yapılar bir işlemli olan grup; iki işlemli olan halka ve cisimdir. Cebirin amacı, cebirsel yapıları sınıflandırmak olup, bu bağlamda matematikte yapılan en önemli işlemlerden biri bir kümede tanımlanan bağıntı işlemin özelliklerini incelemektir (Hacısalıhoğlu, 2007: 181).

2.1.2. Tanım S boş kümeden farklı bir küme ve $\star$, S kümesi üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Her $a, b, c \in S$ için, $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$ ise $(S, \star)$ cebirsel yapısına bir yarıgrup denir.

Bu tez boyunca aksi belirtilmediği sürece, $a \star b$ yerine ab yazılıp, $(S, \star)$ yerine de S kullanılacaktır.

2.1.3. Örnek $(\mathbb{Z}^+, +)$ ve $(2\mathbb{Z}, \cdot)$ birer yarıgruptur.

2.1.4. Tanım Bir S yarıgrubu,

- i. Her $a, j \in S$ için, $aj = ja$ ise değişmeli yarıgrup,
- ii. Her $h \in S$ için, $h^2 = h$ ise band (idempotent yarıgrup),
- iii. Her $c \in S$ için, $c^2 = c$ ve her $f, l \in S$ için, $fl = lf$ ise yarıkafes (değişmeli band),
- iv. Birim elemana sahip bir yarıkafes ise sınırlı yarıkafes,
- v. Bir band olmak üzere, her $s, y \in S$ için, $sys = s$ veya buna eşdeğer olarak her $d, m, x \in S$ için, $dmx = dx$ ise dikdörtgensel band,
- vi. Her $i, z \in S$ için, $iz = zi$ ve $i^k = mz$ olacak şekilde en az $k, m \in S$ var ise arşimedyan değişmeli yarıgrup,
- vii. Her $f, j \in S$ için, $fj = jf$ olması $f = j$ olmasını gerektiriyor ise hiçbir yerde değişmeli olmayan yarıgrup,
- viii. Her $u, p \in S$ için, $(uw)^n = wp$ olacak şekilde bir $w \in S$ ve pozitif bir n tamsayısı var ise sol zayıf değişmeli yarıgrup,
- ix. Her $a, l \in S$ için, $(al)^k = ta$ olacak şekilde bir $t \in S$ ve pozitif bir k tamsayısı var ise sağ zayıf değişmeli yarıgrup,
- x. Hem sol zayıf değişmeli yarıgrup hem de sağ zayıf değişmeli yarıgrup ise yani, her $d, q \in S$ için, $(dq)^t = yd = qv$ olacak şekilde $v, y \in S$ ve pozitif bir t tamsayısı var ise zayıf değişmeli yarıgrup,
- xi. Her $t, r \in S$ için, $tr = rt$ olması en az bir $j \in S$ için, $tjr = rjt$ olmasını gerektiriyor ise koşullu değişmeli yarıgrup,

- xii. Her $h, n \in S$ için, $hn = (nh)^k$ olacak şekilde pozitif bir k tamsayısı var ise quasi değişmeli yarıgrup,
- xiii. Her $c, p, z \in S$ için, $cpz = czp$ ise sağ değişmeli yarıgrup,
- xiv. Her $r, u, y \in S$ için, $ruy = ury$ ise sol değişmeli yarıgrup,
- xv. Her $k, n, y \in S$ için, $kny = ynk$ ise dışsal değişmeli yarıgrup,
- xvi. Her $g, l, n, r \in S$ için, $nglr = nlgr$ ise orta yarıgrup,
- xvii. Her $d, r, w \in S$ için, $dr = wr$ olması $d = w$ olmasını gerektiriyor ise sağ sadeleştirici yarıgrup,
- xviii. Her $f, l, x \in S$ için, $lf = lx$ olması $f = x$ olmasını gerektiriyor ise sol sadeleştirici yarıgrup,
- xix. Hem sol sadeleştirici yarıgrup hem de sağ sadeleştirici yarıgrup ise sadeleştirici yarıgrup,
- xx. Her $t \in S$ için, $t = tyt$ olacak şekilde bir $y \in S$ var ise regüler yarıgrup,
- xxi. Her $v \in S$ için, $v = kv^2d$ olacak şekilde $k, d \in S$ var ise iç-regüler yarıgrup,
- xxii. Her $p \in S$ için, $p = up^2$ olacak şekilde bir $u \in S$ var ise sol regüler yarıgrup,
- xxiii. Her $c \in S$ için, $c = c^2h$ olacak şekilde bir $h \in S$ var ise sağ regüler yarıgrup,
- xxiv. Bir band olmak üzere, her $i, q \in S$ için, $iqi = iq$ ise sol-regüler band,
- xxv. Bir band olmak üzere, her $u, x \in S$ için, $uxu = xu$ ise sağ-regüler band,
- xxvi. Her $b \in S$ için, $b = beb$ ve $be = eb$ olacak şekilde bir $e \in S$ var ise tamamen regüler yarıgrup,
- xxvii. Her $c \in S$ için, $c^m = c^m y c^m$ olacak şekilde bir $y \in S$ ve pozitif bir m tamsayısı var ise k-regüler yarıgrup,

- xxviii. $0 \in S$ yani yutan elemana sahip olmak üzere, $e \neq 0$ ve $f = ef = fe$ olması $e = f$ olmasını gerektiriyor ise ilkel yarıgrup,
- xxix. Her $u \in S$ için, $ulu = u$ ve $lul = l$ olacak şekilde u 'nun tek bir l tersi var ise ters yarıgrup,
- xxx. $0 \in S$ yani yutan elemana sahip olmak üzere, her $a, i \in S$ için, $ai = 0$ ise boş (sıfır) yarıgrup,
- xxxi. Her $r, w \in S$ için $rw = r$ ise sol sıfır yarıgrup,
- xxxii. Her $t, n \in S$ için $tn = n$ ise sağ sıfır yarıgrup,
- xxxiii. Her $b, m \in S$ için, $bm = b^2 = m^2$ olması $b = m$ olmasını gerektiriyor ise ayırıcı yarıgrup,
- xxxiv. Kendisi dışında hiçbir sol idealini içermiyor ise sol basit yarıgrup,
- xxxv. Kendisi dışında hiçbir sağ idealini içermiyor ise sağ basit yarıgrup

olarak adlandırılır.

2.1.5. Teorem S yarıgrubu için aşağıdaki durumlar geçerlidir:

- (1) S 'nin bir sol (sağ) basit yarıgrup olması için gerek ve yeter şart her $a \in S$ için, $Sa = S$ ($aS = S$) olması yani, her $a, b \in S$ için, $b = xa$ ($b = ax$) olacak şekilde $x \in S$ olmasıdır.
- (2) S 'nin basit yarıgrup olması için gerek ve yeter şart her $a \in S$ için, $SaS = S$ olması yani, her $a, b \in S$ için, $b = xay$ olacak şekilde $x, y \in S$ olmasıdır.

2.1.6. Teorem S yarıgrubu için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (1) S bir gruptur.
- (2) S hem bir sol basit yarıgrup hem de bir sağ basit yarıgruptur (Huntington, 1902).

2.2. Yarıgrupların İdealleri ve Hemen Hemen İdealleri

Bu alt bölümde, yarıgrupların bazı idealleri ve hemen hemen ideallerinin tanımları verilmiştir.

2.2.1. Tanım S yarı grubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi A ,

1. $AA \subseteq A$ ise S yarı grubunun bir alt yarı grubu,
2. $SA \subseteq A$ ($AS \subseteq A$) ise S yarı grubunun bir sol (sağ) ideali; S yarı grubunun hem bir sol ideali hem de bir sağ ideali ise S yarı grubunun bir iki taraflı ideali (ideali),
3. Bir alt yarı grup ve $ASA \subseteq A$ ise S yarı grubunun bir bi-ideali (Good ve Hughes, 1952),
4. $SAS \subseteq A$ ise S yarı grubunun bir iç ideali (Lajos, 1976),
5. $SA \cap AS \subseteq A$ ise S yarı grubunun bir quasi-ideali (Steinfeld, 1956),
6. Bir alt yarı grup ve $SAA \subseteq A$ ($AA S \subseteq A$) ise S yarı grubunun bir sol (sağ) zayıf-iç ideali; S yarı grubunun hem bir sol zayıf-iç ideali hem de bir sağ zayıf-iç ideali ise S yarı grubunun bir zayıf-iç ideali (Rao, 2020b),
7. $SAS \cap ASA \subseteq A$ ise S yarı grubunun bir bi-iç ideali (Rao, 2018a),
8. Bir alt yarı grup ve $SA \cap ASA \subseteq A$ ($AS \cap ASA \subseteq A$) ise S yarı grubunun bir sol (sağ) bi-quasi ideali; S yarı grubunun hem bir sol bi-quasi ideali hem de bir sağ bi-quasi ideali ise S yarı grubunun bir bi-quasi ideali (Rao, 2020a),
9. Bir alt yarı grup ve $SASA \subseteq A$ ($ASAS \subseteq A$) ise S yarı grubunun bir sol (sağ) quasi-iç ideali; S yarı grubunun hem bir sol quasi-iç ideali hem de bir sağ quasi-iç ideali ise S yarı grubunun bir quasi-iç ideali (Rao, 2020b),
10. Bir alt yarı grup ve $ASASA \subseteq A$ ise S yarı grubunun bir bi-quasi-iç ideali (Rao, 2018b),

11. Bir alt yarıgrup ve $ASA \subseteq A$ ($AAS \subseteq A$) ise S yarıgrupunun bir sol (sağ) tri-ideali; S yarıgrupunun hem bir sol tri-ideali hem de bir sağ tri-ideali ise S yarıgrupunun bir tri-ideali (Rao, 2024),
12. Bir alt yarıgrup ve $AASAA \subseteq A$ ise S yarıgrupunun bir tri-quasi ideali (Rao ve diğerleri, 2024)

olarak adlandırılır.

Rao ve diğerleri (2024), “tri-bi-ideal” kavramını “tri-quasi-ideal” olarak adlandırmaktadır; ancak, sol tri-ideal tanımına bakıldığında, sol ideali temsil eden SA ’nın yapının ortasında yer aldığı ve diğer iki A ’nın sola ve sağa yerleştirildiği görülmekte ve benzer şekilde sağ tri-ideal tanımına baktığımızda, sağ ideali temsil eden AS ’nin ortada yer aldığı ve diğer iki A ’nın sola ve sağa yerleştirildiği görülmektedir. Tri-quasi ideal için, yapının ortasında yer alan ASA ’nın zihinde bi-ideali çağrıştırdığı ve diğer iki A ’nın yine sola ve sağa yerleştirildiği görülmektedir. Bu nedenle, sol (sağ) tri-ideal tanımıyla tutarlı olmak adına, bu tez boyunca “tri-quasi ideal” yerine “tri-bi-ideal” kavramı kullanılacaktır.

2.2.2. Tanım S yarıgrupunun boş kümeden farklı bir alt kümesi A ,

1. $AA \cap A \neq \emptyset$ ise S yarıgrupunun bir hemen hemen alt yarıgrubu (Iampan ve diğerleri, 2021),
2. Her $x \in S$ için, $xA \cap A \neq \emptyset$ ($Ax \cap A \neq \emptyset$) ise S yarıgrupunun bir hemen hemen sol (sağ) ideali; S yarıgrupunun hem bir hemen hemen sol ideali hem de bir hemen hemen sağ ideali ise S yarıgrupunun bir hemen hemen iki taraflı ideali (hemen hemen ideali) (Grosek ve Satko, 1980),
3. Her $x \in S$ için, $AxA \cap A \neq \emptyset$ ise S yarıgrupunun bir hemen hemen bi-ideali (Bogdanovic, 1981),
4. Her $x, y \in S$ için, $xAy \cap A \neq \emptyset$ ise S yarıgrupunun bir hemen hemen iç ideali; her $x \in S$ için, $xAx \cap A \neq \emptyset$ ise S yarıgrupunun bir zayıf hemen hemen iç ideali (Kaopusek ve diğerleri, 2020),

5. Her $x \in S$ için, $(x\mathcal{A} \cap \mathcal{A}x) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-ideali (Wattanatripop ve diğerleri, 2018),
6. Her $x \in S$ için, $x\mathcal{A}\mathcal{A} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ ($\mathcal{A}\mathcal{A}x \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$) ise A' 'ya S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideali; S yarıgrubunun hem bir hemen hemen sol zayıf-iç ideali hem de bir hemen hemen sağ zayıf-iç ideali ise S yarıgrubunun bir hemen hemen zayıf-iç ideali (Sezgin ve İlgin, 2024c),
7. Her $x, y, z \in S$ için, $(x\mathcal{A}y \cap \mathcal{A}z\mathcal{A}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç ideali (Gaketem, 2022; Chinram ve Nakkhasen, 2022a),
8. Her $x, y \in S$ için, $(x\mathcal{A} \cap \mathcal{A}y\mathcal{A}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ ($(\mathcal{A}x \cap \mathcal{A}y\mathcal{A}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$) ise S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideali; S yarıgrubunun hem bir hemen hemen sol bi-quasi ideali hem de bir hemen hemen sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi ideali; her $x \in S$ için, $(x\mathcal{A} \cap \mathcal{A}x\mathcal{A}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ ($(\mathcal{A}x \cap \mathcal{A}x\mathcal{A}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$) ise S yarıgrubunun bir zayıf hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideali; S yarıgrubunun hem bir zayıf hemen hemen sol bi-quasi ideali hem de bir zayıf hemen hemen sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir zayıf hemen hemen bi-quasi ideali (Gaketem ve Chinram, 2023),
9. Her $x, y \in S$ için, $x\mathcal{A}y\mathcal{A} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ ($\mathcal{A}x\mathcal{A}y \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$) ise A' 'ya S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideali; S yarıgrubunun hem bir hemen hemen sol quasi-iç ideali hem de bir hemen hemen sağ quasi-iç ideali ise S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-iç ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024b),
10. Her $x, y \in S$ için, $(\mathcal{A}x\mathcal{A}y\mathcal{A}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç ideali (Chinram ve Nakkhasen, 2022b),
11. Her $x \in S$ için, $\mathcal{A}x\mathcal{A}\mathcal{A} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ ($\mathcal{A}\mathcal{A}x\mathcal{A} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$) ise S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) tri-ideali; S yarıgrubunun hem bir hemen hemen sol tri-ideali hem de bir hemen hemen sağ tri-ideali ise S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024c),
12. Her $x \in S$ için, $\mathcal{A}\mathcal{A}x\mathcal{A}\mathcal{A} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024a)

olarak adlandırılır.

2.3. Esnek Kümeler ve Temel Kavramları

Bu alt bölümde, esnek kümeler ile ilgili temel kavramlara ve teoremlere yer verilmiştir.

2.3.1. Tanım U evrensel küme, E parametreler kümesi, $P(U)$, U 'nun kuvvet kümesi ve $W \subseteq E$ olsun. $x \notin W$ için, $f_W(x) = \emptyset$ olacak şekilde, $f_W: E \rightarrow P(U)$ dönüşümüne U üzerinde bir esnek küme denir. O halde bir f_W esnek kümesi,

$$f_W = \{(x, f_W(x)): x \in E, f_W(x) \in P(U)\}$$

şeklindeki sıralı ikililerin kümesidir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Bu tez boyunca, U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi $S_E(U)$ ile gösterilecektir.

2.3.2. Tanım $f_W \in S_E(U)$ olsun. Her $q \in E$ için, $f_W(q) = \emptyset$ ise f_W esnek kümesine boş esnek küme denir ve $\emptyset_E$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.3. Tanım $f_W \in S_E(U)$ olsun. Her $q \in E$ için, $f_W(q) = U$ ise f_W esnek kümesine evrensel esnek küme denir ve U_E ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.4. Tanım S bir yarıgrup ve $f_S \in S_E(U)$ olsun. Her $x \in S$ için, $f_S(x) = U$ ise f_S esnek kümesine tam esnek küme denir ve $\tilde{S}$ ile gösterilir.

2.3.5. Tanım $f_C, f_L \in S_E(U)$ olsun. Her $x \in E$ için, $f_C(x) \subseteq f_L(x)$ ise f_C 'ye f_L 'nin esnek alt kümesi denir ve $f_C \subseteq f_L$ ile gösterilir. Her $x \in E$ için, $f_C(x) = f_L(x)$ ise f_C ve f_L esnek kümelerine esnek eşit kümeler denir ve $f_C = f_L$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.6. Tanım $f_C, f_L \in S_E(U)$ olsun. Her $x \in E$ için, $(f_C \tilde{\cap} f_L)(x) = f_C(x) \cap f_L(x)$ $((f_C \tilde{\cup} f_L)(x) = f_C(x) \cup f_L(x))$ şeklinde tanımlanan $f_C \tilde{\cap} f_L$ ($f_C \tilde{\cup} f_L$) esnek kümesine, f_C ve f_L esnek kümelerinin esnek kesişimi (birleşimi) denir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.7. Tanım $f_{\mathfrak{C}}, f_L \in S_E(U)$ olsun. Her $(x, y) \in E \times E$ için, $(f_{\mathfrak{C}} \wedge f_L)(x, y) = f_{\mathfrak{C}}(x) \cap f_L(y)$ $((f_{\mathfrak{C}} \vee f_L)(x, y) = f_{\mathfrak{C}}(x) \cup f_L(y))$ şeklinde tanımlanan $f_{\mathfrak{C}} \wedge f_L$ ($f_{\mathfrak{C}} \vee f_L$) esnek kümesine, $f_{\mathfrak{C}}$ ve f_L 'nin $\wedge$ -çarpımı ($\vee$ -çarpımı) denir ve $f_{\mathfrak{C}} \wedge f_L = f_{\mathfrak{C} \wedge L}$ ($f_{\mathfrak{C}} \vee f_L = f_{\mathfrak{C} \vee L}$) şeklinde gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.8. Tanım $f_{\mathfrak{C}}, h_L \in S_E(U)$ olsun. Bu durumda, $f_{\mathfrak{C}}$ ve h_L 'nin kartezyen çarpımı, $(a, b) \in (\mathfrak{C} \times L)$ için, $f_{\mathfrak{C} \times L}: \mathfrak{C} \times L \rightarrow P(U \times U)$ ve $f_{\mathfrak{C} \times L}(a, b) = f_{\mathfrak{C}}(a) \times h_L(b)$ olmak üzere,

$$f_{\mathfrak{C}} \times h_L = f_{\mathfrak{C} \times L}$$

şeklinde tanımlanır (Babitha ve Sunil, 2010).

2.3.9. Tanım $f_{\mathfrak{C}}, f_L \in S_E(U)$ ve $\varphi, \mathfrak{C}$ 'den L 'ye bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $f_{\mathfrak{C}}$ 'nin φ altındaki esnek görüntüsü $\varphi(f_{\mathfrak{C}})$, her $x \in L$ için,

$$(\varphi(f_{\mathfrak{C}}))(x) = \begin{cases} \bigcup \{f_{\mathfrak{C}}(a) \mid a \in \mathfrak{C} \text{ ve } \varphi(a) = x\}, & x \in \varphi(\mathfrak{C}) \text{ ise} \\ \emptyset, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve f_L 'nin φ altındaki esnek ön görüntüsü (ya da esnek ters görüntüsü) $\varphi^{-1}(f_L)$, her $a \in \mathfrak{C}$ için,

$$(\varphi^{-1}(f_L))(a) = f_L(\varphi(a))$$

şeklinde tanımlanır (Çağman ve diğerleri, 2012).

2.3.10. Tanım $f_L \in S_E(U)$ ve $\alpha \subseteq U$ olsun. Bu durumda, f_L 'nin üst α -kapsama kümesi, $\mathcal{U}(f_L; \alpha)$ ile gösterilir ve $\mathcal{U}(f_L; \alpha) = \{x \in L \mid f_L(x) \supseteq \alpha\}$ şeklinde tanımlanır (Sezgin, Çağman ve Çıtak, 2019).

2.3.11. Tanım $f_L \in S_E(U)$ olsun. Bu durumda,

$$\text{supp}(f_L) = \{x \in L : f_L(x) \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanan $\text{supp}(f_L)$ kümesine, f_L 'nin destek kümesi denir (Feng ve diğerleri, 2008).

Destek kümesi boş küme olan bir esnek kümenin boş esnek küme olduğu açıktır; aksi takdirde, esnek küme boş esnek küme değildir.

2.3.12. Not $f_C, f_L \in S_E(U)$ olsun. Bu durumda, $f_C \subseteq f_L$ ise $\text{supp}(f_C) \subseteq \text{supp}(f_L)$ (Sezgin ve İlgin, 2024a).

2.3.13. Tanım S bir yarıgrup ve $\bar{b}_S, h_S \in S_E(U)$ olsun. Bu durumda, her $x \in S$ için, $\bar{b}_S \circ h_S$ esnek kesişimsel çarpımı şu şekilde tanımlanır (Sezer ve diğerleri, 2015b):

$$(\bar{b}_S \circ h_S)(x) = \begin{cases} \bigcup_{x=yz} \{\bar{b}_S(y) \cap h_S(z)\}, & x = yz \text{ olacak şekilde } \exists y, z \in S \text{ var ise} \\ \emptyset, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

2.3.14. Örnek $S = \{\bar{t}, \bar{p}, \bar{u}\}$ kümesi üzerinde, Tablo 2.1 yardımıyla tanımlanan ‘ $\ast$ ’ ikili işlemi ile $(S, \ast)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\ast$	$\bar{t}$	$\bar{p}$	$\bar{u}$
$\bar{t}$	$\bar{t}$	$\bar{p}$	$\bar{t}$
$\bar{p}$	$\bar{t}$	$\bar{p}$	$\bar{p}$
$\bar{u}$	$\bar{t}$	$\bar{p}$	$\bar{u}$

Tablo 2.1. Örnek 2.3.14’teki “ $\ast$ ” ikili işlemi

$U = D_2 = \{\langle x, y \rangle : x^2 = y^2 = e, xy = yx\} = \{e, x, y, yx\}$ evrensel kümesi üzerinde f_S ve h_S esnek kümeleri,

$$f_S = \{(\bar{t}, \{e\}), (\bar{p}, \{x, y\}), (\bar{u}, \{x, y, yx\})\}$$

$$h_S = \{(\bar{t}, \{e, x\}), (\bar{p}, \{x, y\}), (\bar{u}, \{yx\})\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada, $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}\mathfrak{t} = \mathfrak{p}\mathfrak{t} = \mathfrak{w}\mathfrak{t} = \mathfrak{t}\mathfrak{w}$ olduğu göz önünde bulundurularak,

$$\begin{aligned}
 (f_S \circ h_S)(\mathfrak{t}) &= (f_S(\mathfrak{t}) \cap h_S(\mathfrak{t})) \cup (f_S(\mathfrak{p}) \cap h_S(\mathfrak{t})) \cup (f_S(\mathfrak{w}) \cap h_S(\mathfrak{t})) \cup (f_S(\mathfrak{t}) \cap h_S(\mathfrak{w})) \\
 &= \{\{e\} \cap \{e, x\}\} \cup \{\{x, y\} \cap \{e, x\}\} \cup \{\{x, y, yx\} \cap \{e, x\}\} \cup \{\{e\} \cap \{yx\}\} \\
 &= \{e\} \cup \{x\} \cup \{x\} \cup \emptyset \\
 &= \{e, x\}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $\mathfrak{p} = \mathfrak{t}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\mathfrak{p} = \mathfrak{w}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\mathfrak{w}$ olduğu göz önünde bulundurularak,

$$\begin{aligned}
 (f_S \circ h_S)(\mathfrak{p}) &= (f_S(\mathfrak{t}) \cap h_S(\mathfrak{p})) \cup (f_S(\mathfrak{p}) \cap h_S(\mathfrak{p})) \cup (f_S(\mathfrak{w}) \cap h_S(\mathfrak{p})) \\
 &\quad \cup (f_S(\mathfrak{p}) \cap h_S(\mathfrak{w})) \\
 &= \{\{e\} \cap \{x, y\}\} \cup \{\{x, y\} \cap \{x, y\}\} \cup \{\{x, y, yx\} \cap \{x, y\}\} \cup \{\{x, y\} \cap \{yx\}\} \\
 &= \emptyset \cup \{x, y\} \cup \{x, y\} \cup \emptyset \\
 &= \{x, y\}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}\mathfrak{w}$ olduğu göz önünde bulundurularak,

$$(f_S \circ h_S)(\mathfrak{w}) = f_S(\mathfrak{w}) \cap h_S(\mathfrak{w}) = \{x, y, yx\} \cap \{yx\} = \{yx\}$$

elde edilir.

2.3.15. Teorem $\tau_S, v_S, \kappa_S \in S_E(U)$ olsun. O halde,

$$i) \quad (\tau_S \circ v_S) \circ \kappa_S = \tau_S \circ (v_S \circ \kappa_S)$$

$$ii) \quad \text{Genellikle, } \tau_S \circ v_S \neq v_S \circ \tau_S$$

$$iii) \quad \tau_S \circ (v_S \tilde{\cup} \kappa_S) = (\tau_S \circ v_S) \tilde{\cup} (\tau_S \circ \kappa_S) \text{ ve } (\tau_S \tilde{\cup} v_S) \circ \kappa_S = (\tau_S \circ \kappa_S) \tilde{\cup} (v_S \circ \kappa_S)$$

$$iv) \quad \tau_S \circ (v_S \tilde{\cap} \kappa_S) = (\tau_S \circ v_S) \tilde{\cap} (\tau_S \circ \kappa_S) \text{ ve } (\tau_S \tilde{\cap} v_S) \circ \kappa_S = (\tau_S \circ \kappa_S) \tilde{\cap} (v_S \circ \kappa_S)$$

$$v) \quad \tau_S \tilde{\subseteq} v_S \text{ ise } \tau_S \circ \kappa_S \tilde{\subseteq} v_S \circ \kappa_S \text{ ve } \kappa_S \circ \tau_S \tilde{\subseteq} \kappa_S \circ v_S$$

vi) $h_S \cong \tau_S$ ve $k_S \cong v_S$ olacak şekilde $h_S, k_S \in S_S(U)$ ise $h_S \circ k_S \cong \tau_S \circ v_S$ (Sezer ve diğerleri, 2015b).

2.3.16. Tanım $A \subseteq S$ olsun. Bu durumda,

$$S_A(x) = \begin{cases} U, & x \in A \text{ ise} \\ \emptyset, & x \in S \setminus A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan S_A esnek kümesine, A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu denir.

S_A 'nın, U üzerinde bir esnek küme olduğu açıktır, yani, $S_A: S \rightarrow P(U)$ (Sezer ve diğerleri, 2015b).

S bir yarıgrup olmak üzere, her $x \in S$ için, $f_S(x) = U$ ise f_S esnek kümesinin $\tilde{S}$ ile gösterildiği, yani her $x \in S$ için, $\tilde{S}(x) = U$ olduğu bilinmektedir. O halde, $\tilde{S}$ esnek kümesinin, S 'nin esnek karakteristik fonksiyonu S_S esnek kümesine denk olduğu, yani $\tilde{S} = S_S$ olduğu açıktır.

2.3.17. Sonuç S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, $\text{supp}(S_A) = A$ (Sezgin ve İlgin, 2024a).

2.3.18. Teorem $\vartheta, Y \subseteq S$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i) $\vartheta \subseteq Y$ olması için gerek ve yeter şart $S_\vartheta \cong S_Y$ olmasıdır
- ii) $S_\vartheta \tilde{\cap} S_Y = S_{\vartheta \cap Y}$ ve $S_\vartheta \tilde{\cup} S_Y = S_{\vartheta \cup Y}$
- iii) $S_\vartheta \circ S_Y = S_{\vartheta Y}$ (Sezer ve diğerleri, 2015b; Sezgin ve İlgin, 2024a).

2.3.19. Tanım $a, b \in S$ olsun. Bu durumda,

$$S_a(b) = \begin{cases} U, & b = a \text{ ise} \\ \emptyset, & b \neq a \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan S_a esnek kümesine, a 'nın esnek karakteristik fonksiyonu denir.

S_a 'nın, U üzerinde bir esnek küme olduğu açıktır, yani, $S_a: S \rightarrow P(U)$ (Sezgin ve İlgin, 2024b).

2.3.20. Teorem $f_S \in S_E(U)$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$i) \quad \tilde{S} \circ \tilde{S} \subseteq \tilde{S}$$

$$ii) \quad \tilde{S} \circ f_S \subseteq \tilde{S} \text{ ve } f_S \circ \tilde{S} \subseteq \tilde{S}$$

$$iii) \quad f_S \cup \tilde{S} = \tilde{S} \text{ ve } f_S \cap \tilde{S} = f_S \text{ (Sezer ve diğerleri, 2015b).}$$

Teorem 2.3.20 (Sezer ve diğerleri, 2015b), “ f_S , U üzerinde bir esnek kesişimsel alt yarıgrup olsun” kabulüyle verilmiştir. Ancak bu çalışmada, “ f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun” kabulü tercih edilmiştir.

2.3.21. Lemma $j_S \in S_E(U)$ olsun. Bu durumda,

$$j_S \circ j_S = \emptyset_S \Leftrightarrow j_S = \emptyset_S$$

(Sezgin ve İlgin, 2024a).

2.3.22. Lemma $k_S, S_z \in S_E(U)$ ve $z \in S$ olsun. Bu durumda,

$$S_z \circ k_S = \emptyset_S \Leftrightarrow k_S = \emptyset_S \quad (k_S \circ S_z = \emptyset_S \Leftrightarrow k_S = \emptyset_S)$$

(Sezgin ve İlgin, 2024b).

2.4. Esnek Kesişimsel İdealler ve Esnek Kesişimsel Hemen Hemen İdealler

Bu alt bölümde, yarıgrupların esnek kesişimsel idealleri ve esnek kesişimsel hemen hemen ideallerinin tanımları ile bazı önerme ve teoremlere yer verilmiş, esnek basit* yarıgrup kavramı tanıtılmış ve örneklendirilmiştir.

2.4.1. Tanım U üzerinde bir $\mathfrak{N}_S$ esnek kümesi,

1. Her $a, x \in S$ için, $\mathfrak{n}_S(ax) \supseteq \mathfrak{n}_S(a) \cap \mathfrak{n}_S(x)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel alt yarıgrubu (Sezer ve diğerleri, 2015b),
2. Her $b, r \in S$ için, $\mathfrak{n}_S(br) \supseteq \mathfrak{n}_S(r)$ ($\mathfrak{n}_S(br) \supseteq \mathfrak{n}_S(b)$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ) ideali; S yarıgrubunun hem bir esnek kesişimsel sol ideali hem de bir esnek kesişimsel sağ ideali ise S yarıgrubunun bir iki taraflı ideali (ideali) (Sezer ve diğerleri, 2015b),
3. Bir esnek kesişimsel alt yarıgrup olmak üzere, her $c, k, v \in S$ için, $\mathfrak{n}_S(ckv) \supseteq \mathfrak{n}_S(c) \cap \mathfrak{n}_S(v)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel bi-ideali (Sezer ve diğerleri, 2015b),
4. Her $d, t, y \in S$ için, $\mathfrak{n}_S(dty) \supseteq \mathfrak{n}_S(t)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel iç ideali (Sezer ve diğerleri, 2014),
5. $(\mathfrak{S} \circ \mathfrak{n}_S) \tilde{\cap} (\mathfrak{n}_S \circ \mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{n}_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel quasi-ideali (Sezer ve diğerleri, 2014),
6. Her $l, n, y \in S$ için, $\mathfrak{n}_S(lny) \supseteq \mathfrak{n}_S(l) \cap \mathfrak{n}_S(y)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel genelleştirilmiş bi-ideali (Sezer ve diğerleri, 2014),
7. $(\mathfrak{S} \circ \mathfrak{n}_S) \tilde{\cap} (\mathfrak{n}_S \circ \mathfrak{S} \circ \mathfrak{n}_S) \subseteq \mathfrak{n}_S$ $\left((\mathfrak{n}_S \circ \mathfrak{S}) \tilde{\cap} (\mathfrak{n}_S \circ \mathfrak{S} \circ \mathfrak{n}_S) \subseteq \mathfrak{n}_S \right)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ) bi-quasi ideali; S yarıgrubunun hem bir esnek kesişimsel sol bi-quasi ideali hem de bir esnek kesişimsel sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir bi-quasi ideali (Onur, 2025),
8. Her $f, h, o, w \in S$ için, $\mathfrak{n}_S(fhow) \supseteq \mathfrak{n}_S(h) \cap \mathfrak{n}_S(w)$ ($\mathfrak{n}_S(fhow) \supseteq \mathfrak{n}_S(f) \cap \mathfrak{n}_S(o)$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ) quasi-iç ideali; S yarıgrubunun hem bir esnek kesişimsel sol quasi-iç ideali hem de bir esnek kesişimsel sağ quasi-iç ideali ise S yarıgrubunun bir quasi-iç ideali (Kocakaya, 2025),
9. Her $a, b, c, d, e \in S$ için, $\mathfrak{n}_S(abcde) \supseteq \mathfrak{n}_S(a) \cap \mathfrak{n}_S(c) \cap \mathfrak{n}_S(e)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel bi-quasi-iç ideali (Baş, 2025),

10. Her $p, v, x, z \in S$ için, $\mathfrak{n}_S(pvxz) \supseteq \mathfrak{n}_S(p) \cap \mathfrak{n}_S(x) \cap \mathfrak{n}_S(z)$ ($\mathfrak{n}_S(pvxz) \supseteq \mathfrak{n}_S(p) \cap \mathfrak{n}_S(v) \cap \mathfrak{n}_S(z)$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ) tri-ideali; S yarıgrubunun hem bir esnek kesişimsel sol tri-ideali hem de bir esnek kesişimsel sağ tri-ideali ise S yarıgrubunun bir tri-ideali (İlgin ve Sezgin, Baskıda a),
11. Her $a, b, c, d, e \in S$ için, $\mathfrak{n}_S(abcde) \supseteq \mathfrak{n}_S(a) \cap \mathfrak{n}_S(b) \cap \mathfrak{n}_S(d) \cap \mathfrak{n}_S(e)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel tri-bi-ideali (İlgin ve Sezgin, Baskıda b)

olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.1 (1) (Sezer ve diğerleri, 2015b), “esnek kesişimsel yarıgrup” olarak verilmiştir. Ancak bu tezde genelliği kaybetmemek adına bu tanım, “esnek kesişimsel alt yarıgrup” olarak kullanılmıştır.

Bundan sonra, S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel alt yarıgrubu ((sol/sağ) ideali, (genelleştirilmiş) bi-ideali, iç ideali, quasi-ideali, (sol/sağ) bi-quasi ideali, (sol/sağ) quasi-iç ideali, bi-quasi-iç ideali, (sol/sağ) tri-ideali, tri-bi-ideali), EK-alt yarıgrup ((sol/sağ) ideal, (genelleştirilmiş) bi-ideal, iç ideal, quasi-ideal, (sol/sağ) bi-quasi ideal, (sol/sağ) quasi-iç ideal, bi-quasi-iç ideal, (sol/sağ) tri-ideal, tri-bi-ideal) olarak gösterilecektir.

2.4.2. Önerme $\mathfrak{n}_S \in S_E(U)$, $Im(\mathfrak{n}_S)$, $\mathfrak{n}_S$ 'nin görüntü kümesi, $\alpha \in Im(\mathfrak{n}_S)$ olmak üzere α , U kümesinin alt kümesi olsun. $\mathfrak{n}_S$, bir EK-alt yarıgrup ise $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_S; \alpha)$, S yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur (Sezgin ve diğerleri, 2015b).

2.4.3. Teorem $\mathfrak{n}_S \in S_E(U)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

1. $\mathfrak{n}_S$ 'nin bir EK-alt yarıgrup olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{n}_S \circ \mathfrak{n}_S \subseteq \mathfrak{n}_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2015b).
2. $\mathfrak{n}_S$ 'nin bir EK-sol (sağ) ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \subseteq \mathfrak{n}_S$ ($\mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \subseteq \mathfrak{n}_S$) olması; $\mathfrak{n}_S$ 'nin bir EK-ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \subseteq \mathfrak{n}_S$ ve $\mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \subseteq \mathfrak{n}_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2015b).

3. $\mathfrak{n}_S$ 'nin bir EK-bi-ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{n}_S \circ \mathfrak{n}_S \subseteq \mathfrak{n}_S$ ve $\mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \subseteq \mathfrak{n}_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2015b).
4. $\mathfrak{n}_S$ 'nin bir EK-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \subseteq \mathfrak{n}_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2014).
5. $\mathfrak{n}_S$ 'nin bir EK-genelleştirilmiş bi-ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \subseteq \mathfrak{n}_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2014).
6. $\mathfrak{n}_S$ 'nin bir EK-sol (sağ) quasi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \subseteq \mathfrak{n}_S$ ($\mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \subseteq \mathfrak{n}_S$) olması; $\mathfrak{n}_S$ 'nin bir EK-quasi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \subseteq \mathfrak{n}_S$ ve $\mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \subseteq \mathfrak{n}_S$ olmasıdır (Kocakaya, 2025),
7. $\mathfrak{n}_S$ 'nin bir EK-bi-quasi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \subseteq \mathfrak{n}_S$ olmasıdır (Baş, 2025),
8. $\mathfrak{n}_S$ 'nin bir EK-sol (sağ) tri-ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \circ \mathfrak{n}_S \subseteq \mathfrak{n}_S$ ($\mathfrak{n}_S \circ \mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \subseteq \mathfrak{n}_S$) olması; $\mathfrak{n}_S$ 'nin bir EK-tri-ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \circ \mathfrak{n}_S$ ve $\mathfrak{n}_S \circ \mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \subseteq \mathfrak{n}_S$ olmasıdır (İlgin ve Sezgin, Baskıda a).
9. $\mathfrak{n}_S$ 'nin bir EK-tri-bi ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{n}_S \circ \mathfrak{n}_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \mathfrak{n}_S \circ \mathfrak{n}_S \subseteq \mathfrak{n}_S$ olmasıdır (İlgin ve Sezgin, Baskıda b).

2.4.4. Teorem S yarıgrubu için aşağıdaki durumlar geçerlidir.

1. Her EK-sol (sağ/iki taraflı) ideal, bir EK-alt yarıgruptur (Sezer ve diğerleri, 2015b).
2. Her EK-sol (sağ/iki taraflı) ideal, bir EK-bi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2015b).
3. Her EK-sol (sağ/iki taraflı) ideali, bir EK-quasi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).
4. Her EK-sol (sağ/iki taraflı) ideal, bir EK-genelleştirilmiş bi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).

5. Her EK-ideal, bir EK-iç idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).
6. Her EK-bi-ideal, bir EK-genelleştirilmiş bi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).
7. Her EK-quasi ideal, bir EK-alt yarıgruptur (Sezer ve diğerleri, 2014).
8. Her EK-quasi-ideal, bir EK-bi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).

2.4.5. Tanım U üzerinde bir $\mathfrak{n}_S$ esnek kümesi,

1. Her $a \in S$ için, $(\mathfrak{n}_S \circ S_a \circ \mathfrak{n}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{n}_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-ideali (Sezgin ve Onur, 2024),
2. Her $b, c \in S$ için, $(S_b \circ \mathfrak{n}_S \circ S_c) \tilde{\cap} \mathfrak{n}_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen iç ideali; her $d \in S$ için, $(S_d \circ \mathfrak{n}_S \circ S_d) \tilde{\cap} \mathfrak{n}_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen iç ideali (Sezgin ve Baş, 2024),
3. Her $f, g \in S$ için, $(S_f \circ \mathfrak{n}_S) \tilde{\cap} (\mathfrak{n}_S \circ S_g) \tilde{\cap} \mathfrak{n}_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen quasi-ideali; her $e \in S$ için, $(S_e \circ \mathfrak{n}_S) \tilde{\cap} (\mathfrak{n}_S \circ S_e) \tilde{\cap} \mathfrak{n}_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen quasi-ideali (Sezgin ve Kocakaya, Baskıda),
4. Her $h, i \in S$ için, $(S_h \circ \mathfrak{n}_S \circ S_i \circ \mathfrak{n}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{n}_S \neq \emptyset_S$ $((\mathfrak{n}_S \circ S_h \circ \mathfrak{n}_S \circ S_i) \tilde{\cap} \mathfrak{n}_S \neq \emptyset_S)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideali; S yarıgrubunun hem bir esnek kesişimsel hemen hemen sol quasi-iç ideali hem de bir esnek kesişimsel hemen hemen sağ quasi-iç ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen quasi-iç ideali; her $j \in S$ için, $(S_j \circ \mathfrak{n}_S \circ S_j \circ \mathfrak{n}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{n}_S \neq \emptyset_S$ $((\mathfrak{n}_S \circ S_j \circ \mathfrak{n}_S \circ S_j) \tilde{\cap} \mathfrak{n}_S \neq \emptyset_S)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideali; S yarıgrubunun hem bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sol quasi-iç ideali hem de bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sağ quasi-iç ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen quasi-iç ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024b),

5. Her $k, l \in S$ için, $(\mathfrak{N}_S \circ S_k \circ \mathfrak{N}_S \circ S_l \circ \mathfrak{N}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{N}_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi-iç ideali; her $m \in S$ için, $(\mathfrak{N}_S \circ S_m \circ \mathfrak{N}_S \circ S_m \circ \mathfrak{N}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{N}_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen bi-quasi-iç ideali (Sezgin ve diğerleri, 2025),
6. Her $p \in S$ için, $(\mathfrak{N}_S \circ S_p \circ \mathfrak{N}_S \circ \mathfrak{N}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{N}_S \neq \emptyset_S \left((\mathfrak{N}_S \circ \mathfrak{N}_S \circ S_p \circ \mathfrak{N}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{N}_S \neq \emptyset_S \right)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) tri-ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024c),

olarak adlandırılır.

Bundan sonra, S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-ideali (iç ideali, quasi-ideali, (sol/sağ) quasi-iç ideali, bi-quasi-iç ideali, (sol/sağ) tri-ideali), EK-hemen hemen bi-ideal (iç ideal, quasi-ideal, (sol/sağ) quasi-iç ideal, bi-quasi-iç ideal, (sol/sağ) tri-ideal) olarak gösterilecektir.

2.4.6. Önerme Sol basit bir yarıgrubun her EK-bi-ideali, bir EK-sağ idealdir (Sezgin ve Orbay, 2022).

Şimdi, esnek kesişimsel idealleri karakterize etmek amacıyla esnek sol (sağ) basit* yarıgrup kavramı sunulacaktır.

2.4.7. Tanım Bir S yarıgrubuna, $\tilde{S}$ dışında hiçbir EK-sol ideali yoksa esnek sol basit* yarıgrup; $\tilde{S}$ dışında hiçbir EK-sağ ideali yoksa esnek sağ basit* yarıgrup denir. S yarıgrubu, hem esnek sol basit* yarıgrup hem de esnek sağ basit* yarıgrup ise bir esnek basit* yarıgruptur.

Burada, $f_S \in S_E(U)$ olmak üzere, $\tilde{S} \circ f_S$ ve $f_S \circ \tilde{S}$ esnek kümeleri, sırasıyla birer EK-sol ideal ve EK-sağ ideal olduğundan, Sonuç 2.4.8 elde edilir.

2.4.8. Sonuç S bir yarıgrup ve $f_S \in S_E(U)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- (1) S bir esnek sol basit* yarıgrup ise $\tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S$.

(2) S bir esnek sağ basit* yarıgrup ise $\tilde{S} = f_S \circ \tilde{S}$.

(3) S bir esnek basit* yarıgrup ise $\tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S = f_S \circ \tilde{S}$.

2.4.9. *Örnek* $S = \{j, c, w\}$ kümesi üzerinde, Tablo 2.2 yardımıyla tanımlanan ‘ $\star$ ’ ikili işlemi ile $(S, \star)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\star$	j	c	w
j	w	c	j
c	c	c	c
w	j	c	w

Tablo 2.2. Örnek 2.4.9’deki “ $\star$ ” ikili işlemi

$U = D_2 = \{\langle x, y \rangle : x^2 = y^2 = e, xy = yx\} = \{e, x, y, yx\}$ evrensel kümesi üzerinde f_S esnek kümesi,

$$f_S = \{(j, \{e\}), (c, \{x, y\}), (w, \{x, y, yx\})\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada,

$$\tilde{S} = \{(j, U), (c, U), (w, U)\}$$

olduğu göz önünde bulundurularak, S yarıgrubu bir esnek sol basit* yarıgruptur. Gerçekten de,

$$\tilde{S} \circ f_S = \{(j, U), (c, U), (w, U)\}$$

olduğundan, $\tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S$ elde edilir. Böylece, S yarıgrubunun bir esnek sol basit* yarıgrup olduğu açıktır. Benzer şekilde, S yarıgrubu bir esnek sağ basit* yarıgruptur. Gerçekten de,

$$f_S \circ \tilde{S} = \{(j, U), (c, U), (w, U)\}$$

olduğundan, $\tilde{S} = f_S \circ \tilde{S}$ elde edilir. Böylece, S yarıgrubunun bir esnek sağ basit* yarıgrup olduğu açıktır. O halde, $\tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S = f_S \circ \tilde{S}$ olup, S yarıgrubu bir esnek basit* yarıgruptur.

2.4.10. Teorem S yarıgrubu için aşağıdaki durumlar geçerlidir.

- i. S bir esnek (sol/sağ) basit* yarıgrup olmak üzere her EK-bi-ideal, bir EK-quasi-idealdir.
- ii. S bir esnek basit* yarıgrup olmak üzere, her EK-quasi-ideal, bir EK-idealdir.
- iii. S bir esnek basit* yarıgrup olmak üzere, her EK-bi-ideal, bir EK-idealdir
- iv. S bir esnek basit* yarıgrup olmak üzere, her EK-iç ideal, bir EK-idealdir.

İspat: (i) İspat, esnek sol basit* yarıgrup için verilecek olup, esnek sağ basit* yarıgrup için de benzer şekilde yapılır. S bir esnek sol basit* yarıgrup ve $\mathcal{H}_S$ bir EK-bi-ideal olsun. O halde, $\tilde{S} = \tilde{S} \circ \mathcal{H}_S$ ve $\mathcal{H}_S \circ \tilde{S} \circ \mathcal{H}_S \subseteq \mathcal{H}_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(\tilde{S} \circ \mathcal{H}_S) \cap (\mathcal{H}_S \circ \tilde{S}) \subseteq \mathcal{H}_S \circ \tilde{S} = \mathcal{H}_S \circ \tilde{S} \circ \mathcal{H}_S \subseteq \mathcal{H}_S$$

elde edilir. Böylece, $\mathcal{H}_S$ bir EK-quasi-idealdir.

(ii) S bir esnek basit* yarıgrup ve $\mathcal{H}_S$ bir EK-quasi-ideal olsun. O halde, $\tilde{S} = \tilde{S} \circ \mathcal{H}_S = \mathcal{H}_S \circ \tilde{S}$ ve $(\tilde{S} \circ \mathcal{H}_S) \cap (\mathcal{H}_S \circ \tilde{S}) \subseteq \mathcal{H}_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\tilde{S} \circ \mathcal{H}_S = (\tilde{S} \circ \mathcal{H}_S) \cap (\tilde{S} \circ \mathcal{H}_S) = (\tilde{S} \circ \mathcal{H}_S) \cap (\mathcal{H}_S \circ \tilde{S}) \subseteq \mathcal{H}_S$$

olup, $\mathcal{H}_S$ bir EK-sol idealdir. Benzer şekilde,

$$\mathcal{H}_S \circ \tilde{S} = (\mathcal{H}_S \circ \tilde{S}) \cap (\mathcal{H}_S \circ \tilde{S}) = (\tilde{S} \circ \mathcal{H}_S) \cap (\mathcal{H}_S \circ \tilde{S}) \subseteq \mathcal{H}_S$$

olup, $\mathcal{H}_S$ bir EK-sağ idealdir. Böylece, $\mathcal{H}_S$ bir EK-idealdir.

(iii) S bir esnek basit* yarıgrup ve $\mathcal{H}_S$ bir EK-bi-ideal olsun. O halde, Teorem 2.4.10 (i)'den $\mathcal{H}_S$ bir EK-quasi-idealdir. İspatın devamı, Teorem 2.4.10 (ii)'den açıktır.

(iv) S bir esnek basit* yarıgrup ve $\mathcal{H}_S$ bir EK-iç ideal olsun. O halde, $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}} \circ \mathcal{H}_S = \mathcal{H}_S \circ \tilde{\mathcal{S}}$ ve $\tilde{\mathcal{S}} \circ \mathcal{H}_S \circ \tilde{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{H}_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\tilde{\mathcal{S}} \circ \mathcal{H}_S = \tilde{\mathcal{S}} \circ \mathcal{H}_S \circ \tilde{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{H}_S$$

olup, $\mathcal{H}_S$ bir EK-sol idealdir. Benzer şekilde,

$$\mathcal{H}_S \circ \tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}} \circ \mathcal{H}_S \circ \tilde{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{H}_S$$

olup, $\mathcal{H}_S$ bir EK-sağ idealdir. Böylece, $\mathcal{H}_S$ bir EK-idealdir.

3. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL ZAYIF-İÇ İDEALLERİ

Bu bölümde, yarıgrupların esnek kesişimsel zayıf-iç idealleri tanıtılmış, örneği verilmiş, diğer esnek kesişimsel idealler ile ilişkileri detaylı bir şekilde incelenmiş, bazı esnek küme kavramları ve işlemleri açısından analiz edilmiştir.

3.1. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x, y, z \in S$ için, $f_S(xyz) \supseteq f_S(y) \cap f_S(z)$ ($f_S(xyz) \supseteq f_S(x) \cap f_S(y)$) ise f_S esnek kümesine, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ) zayıf-iç ideali denir. U üzerinde bir esnek küme, S yarı grubunun hem esnek kesişimsel sol zayıf-iç ideali hem de esnek kesişimsel sağ zayıf-iç ideali ise S yarı grubunun bir esnek kesişimsel zayıf-iç idealidir denir.

Bundan sonra, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol zayıf-iç ideali kısaca “EK-sol zayıf-iç ideal”; S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sağ zayıf-iç ideali “EK-sağ zayıf-iç ideal” ve S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel zayıf-iç ideali ise “EK-zayıf-iç ideal” olarak gösterilecektir.

3.2. Örnek $S = \{l, y, n, a\}$ kümesi üzerinde, Tablo 3.1 yardımıyla tanımlanan “.” ikili işlemi ile $(S, \cdot)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\cdot$	l	y	n	a
l	l	l	l	l
y	l	l	l	l
n	l	l	y	l
a	l	l	y	y

Tablo 3.1. Örnek 3.2’deki “.” ikili işlemi

$U = S_3$ evrensel kümesi üzerinde f_S ve g_S esnek kümeleri,

$$f_S = \{(l, \{(12), (13), (23)\}), (y, \{(12)\}), (n, \{(13)\}), (a, \{(23)\})\}$$

$$g_S = \{(l, \{(1), (123), (132)\}), (y, \{(23)\}), (n, \{(13)\}), (a, \{(12)\})\}$$

şeklinde tanımlansın. f_S esnek kümesi, bir EK-zayıf-iç idealdir. Burada, daha anlaşılabilir olabilmek için gösterim kolaylığı açısından birkaç somut eleman örneğin verilmesi uygun görülmüştür. Gerçekten mesela,

$$f_S(lyn) = f_S(l) \supseteq f_S(y) \cap f_S(n)$$

$$f_S(aaa) = f_S(l) \supseteq f_S(a) \cap f_S(a)$$

$$f_S(nnl) = f_S(l) \supseteq f_S(n) \cap f_S(l)$$

olup, S kümesinin diğer tüm eleman kombinasyonları için de f_S esnek kümesinin EK-sol zayıf-iç ideal şartını sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. Benzer şekilde,

$$f_S(yna) = f_S(l) \supseteq f_S(y) \cap f_S(n)$$

$$f_S(aan) = f_S(l) \supseteq f_S(a) \cap f_S(a)$$

$$f_S(any) = f_S(l) \supseteq f_S(a) \cap f_S(n)$$

olup, S kümesinin diğer tüm eleman kombinasyonları için de f_S esnek kümesinin EK-sağ zayıf-iç ideal şartını sağladığı, dolayısıyla bir EK-zayıf-iç ideal olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Fakat,

$$g_S(nnn) = g_S(l) \not\supseteq g_S(n) \cap g_S(n)$$

olduğundan, g_S esnek kümesi bir EK-zayıf-iç ideal değildir.

S yarıgrubunun bir A alt yarıgrubunun, $SAA \subseteq A$ ise bir sol zayıf-iç ideal; $AAS \subseteq A$ ise bir sağ zayıf-iç ideal; hem sol zayıf-iç ideal hem de sağ zayıf-iç ideal ise bir zayıf-iç ideal olarak adlandırıldığı bilinmektedir. Bu durum, Önerme 3.3, Önerme 3.4 ve Teorem 3.5 ile esnek kesişimsel yarıgruplara da aktarılabilir:

3.3. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. f_S 'nin bir EK-sol zayıf-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S$ olmasıdır.

İspat: f_S bir EK-sol zayıf-iç ideal olsun. $a \in S$ için, $(\tilde{S} \circ f_S \circ f_S)(a) = \emptyset$ ise $\tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S$ olduğu açıktır. Diğer durumlarda, $a \in S$ için, $a = xy$ ve $x = pq$ olacak şekilde $x, y, p, q \in S$ olsun. f_S bir EK-sol zayıf-iç ideal olduğundan, $f_S(a) = f_S(xy) = f_S((pq)y) \supseteq f_S(q) \cap f_S(y)$. Buradan,

$$\begin{aligned}
 (\tilde{S} \circ f_S \circ f_S)(a) &= [(\tilde{S} \circ f_S) \circ f_S](a) \\
 &= \bigcup_{a=xy} \{(\tilde{S} \circ f_S)(x) \cap f_S(y)\} \\
 &= \bigcup_{a=xy} \left\{ \bigcup_{x=pq} \{\tilde{S}(p) \cap f_S(q)\} \cap f_S(y) \right\} \\
 &= \bigcup_{a=pqy} \{f_S(q) \cap f_S(y)\} \\
 &\subseteq \bigcup_{a=pqy} \{f_S(pqy)\} \\
 &= f_S(xy) \\
 &= f_S(a)
 \end{aligned}$$

olduğundan, $\tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S$ elde edilir. Ayrıca, $a \in S$ için, $a = xy$ fakat $x \neq pq$ olduğu durumda ise $(\tilde{S} \circ f_S)(x) = \emptyset$ elde edileceğinden, bu durumda da $\tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S$ sağlanacaktır.

Tersine, $\tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S$ olsun. $a \in S$ için, $a = xyz$ olacak şekilde $x, y, z \in S$ alalım. Buradan,

$$\begin{aligned}
 f_S(xyz) &= f_S(a) \\
 &\supseteq (\tilde{S} \circ f_S \circ f_S)(a) \\
 &= [(\tilde{S} \circ f_S) \circ f_S](a) \\
 &= \bigcup_{a=mn} \{(\tilde{S} \circ f_S)(m) \cap f_S(n)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\supseteq (\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S)(xy) \cap f_S(z) \\
&= \bigcup_{xy=pq} \{\tilde{\mathbb{S}}(p) \cap f_S(q)\} \cap f_S(z) \\
&\supseteq [\tilde{\mathbb{S}}(x) \cap f_S(y)] \cap f_S(z) \\
&= [U \cap f_S(y)] \cap f_S(z) \\
&= f_S(y) \cap f_S(z)
\end{aligned}$$

olduğundan, $f_S(xyz) \supseteq f_S(y) \cap f_S(z)$ elde edilir. Böylece, f_S bir EK-sol zayıf-iç idealdir.

3.4. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. f_S 'nin bir EK-sağ zayıf-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $f_S \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \subseteq f_S$ olmasıdır.

İspat: f_S bir EK-sağ zayıf-iç ideal olsun. $a \in S$ için, $(f_S \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(a) = \emptyset$ ise $f_S \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \subseteq f_S$ olduğu açıktır. Diğer durumlarda, $a \in S$ için, $a = xy$ ve $y = pq$ olacak şekilde $x, y, p, q \in S$ olsun. f_S bir EK-sağ zayıf-iç ideal olduğundan, $f_S(a) = f_S(xy) = f_S(x(pq)) \supseteq f_S(x) \cap f_S(p)$. Buradan,

$$\begin{aligned}
(f_S \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(a) &= [f_S \circ (f_S \circ \tilde{\mathbb{S}})](a) \\
&= \bigcup_{a=xy} \{f_S(x) \cap (f_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(y)\} \\
&= \bigcup_{a=xy} \left\{ f_S(x) \cap \bigcup_{y=pq} \{f_S(p) \cap \tilde{\mathbb{S}}(q)\} \right\} \\
&= \bigcup_{a=xpq} \{f_S(x) \cap f_S(p)\} \\
&\subseteq \bigcup_{a=xpq} \{f_S(xpq)\} \\
&= f_S(xy) \\
&= f_S(a)
\end{aligned}$$

olduğundan, $f_S \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \subseteq f_S$ elde edilir. Ayrıca, $a \in S$ için, $a = xy$ fakat $y \neq pq$ olduğu durumda ise $(f_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(y) = \emptyset$ elde edileceğinden, bu durumda da $f_S \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \subseteq f_S$ sağlanacaktır.

Tersine, $f_S \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ olsun. $a \in S$ için, $a = xyz$ olacak şekilde $x, y, z \in S$ alalım. Buradan,

$$\begin{aligned}
 f_S(xyz) &= f_S(a) \\
 &\supseteq (f_S \circ f_S \circ \tilde{S})(a) \\
 &= [f_S \circ (f_S \circ \tilde{S})](a) \\
 &= \bigcup_{a=mn} \{f_S(m) \cap (f_S \circ \tilde{S})(n)\} \\
 &\supseteq f_S(x) \cap (f_S \circ \tilde{S})(yz) \\
 &= f_S(x) \cap \bigcup_{yz=pq} \{f_S(p) \cap \tilde{S}(q)\} \\
 &\supseteq f_S(x) \cap [f_S(y) \cap \tilde{S}(z)] \\
 &= f_S(x) \cap [f_S(y) \cap U] \\
 &= f_S(x) \cap f_S(y)
 \end{aligned}$$

olduğundan, $f_S(xyz) \supseteq f_S(x) \cap f_S(y)$ elde edilir. Böylece, f_S bir EK-sağ zayıf-iç idealdir.

3.5. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. f_S 'nin bir EK-zayıf-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S$ ve $f_S \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ olmasıdır.

İspat: İspatı, Önerme 3.3 ve Önerme 3.4'ten açıktır.

3.6. Sonuç $\tilde{S}$ ve $\emptyset_S$ birer EK-zayıf-iç idealdir.

3.7. Teorem A , S yarıgrubunun bir alt yarıgrubu ve S_A , A kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir zayıf-iç ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-zayıf-iç ideal olmasıdır.

İspat: A , S yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olmak üzere bir zayıf-iç ideali olsun. O halde, $SAA \subseteq A$ ve $AAS \subseteq A$. Böylece, Teorem 2.3.18 (i) ve (iii)'ten,

$$\tilde{S} \circ S_A \circ S_A = S_S \circ S_A \circ S_A = S_{SAA} \subseteq S_A \text{ ve } S_A \circ S_A \circ \tilde{S} = S_A \circ S_A \circ S_S = S_{AAS} \subseteq S_A$$

elde edilir. Buradan, S_A bir EK-zayıf-iç idealdir.

Tersine, S_A bir EK-zayıf-iç ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ S_A \circ S_A \cong S_A$ ve $S_A \circ S_A \circ \tilde{S} \cong S_A$ olduğu bilinmektedir. $x \in SAA$ olmak üzere, Teorem 2.3.18 (i) ve (iii)'ten,

$$S_A(x) \supseteq (\tilde{S} \circ S_A \circ S_A)(x) = (S_S \circ S_A \circ S_A)(x) = S_{SAA}(x) = U$$

olduğundan, $S_A(x) = U$, buradan $x \in A$ elde edilir. Sonuç olarak, $SAA \subseteq A$. Kabul gereği, A, S yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. Böylece A, S yarıgrubunun bir sol zayıf-iç idealidir. Benzer şekilde, $y \in AAS$ olmak üzere,

$$S_A(y) \supseteq (S_A \circ S_A \circ \tilde{S})(y) = (S_A \circ S_A \circ S_S)(y) = S_{AAS}(y) = U$$

olduğundan, $S_A(y) = U$, buradan $y \in A$ elde edilir. Sonuç olarak, $AAS \subseteq A$. Kabul gereği, A, S yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. Böylece A, S yarıgrubunun bir sağ zayıf-iç idealidir. O halde, A, S yarıgrubunun bir zayıf-iç idealidir.

3.8. Örnek Örnek 3.2'de verilen S yarıgrubunu ele alalım. $A = \{l, y, n\}$, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir zayıf-iç ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Rutin hesaplamalarla, A kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu $S_A = \{(l, U), (y, U), (n, U), (a, \emptyset)\}$ esnek kümesinin bir EK-zayıf-iç ideal olduğu gösterilebilir.

Tersine, $B = \{l, y, n\}$ kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olan f_S EK-zayıf-iç idealini $f_S = \{(l, U), (y, U), (n, U), (a, \emptyset)\}$ olarak alırsak, rutin hesaplamalarla, $B = \{l, y, n\}$ kümesinin S yarıgrubunun bir zayıf-iç ideali olduğu gösterilebilir.

Şimdi, EK-zayıf-iç idealler ile diğer EK-idealler arasındaki ilişkilere bakılacaktır.

3.9. Önerme Regüler bir yarıgrubun her EK-sol zayıf-iç ideali, bir EK-alt yarıgruptur.

İspat: S bir regüler yarıgrup, f_S bir EK-sol zayıf-iç ideal ve $a, b \in S$ olsun. Kabul gereği, her $a \in S$ için, $a = axa$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(ab) = f_S((axa)b) = f_S((ax)ab) \supseteq f_S(a) \cap f_S(b)$$

olduğundan, f_S bir EK-alt yarıgruptur.

3.10. Önerme Regüler bir yarıgrubun her EK-sağ zayıf-iç ideali, bir EK-alt yarıgruptur.

İspat: S bir regüler yarıgrup, f_S bir EK-sağ zayıf-iç ideal ve $a, b \in S$ olsun. Kabul gereği, her $b \in S$ için, $b = bxb$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(ab) = f_S(a(bxb)) = f_S(ab(xb)) \supseteq f_S(a) \cap f_S(b)$$

olduğundan, f_S bir EK-alt yarıgruptur.

3.11. Teorem Regüler bir yarıgrubun her EK-zayıf-iç ideali, bir EK-alt yarıgruptur.

İspat: İspatı, Önerme 3.9 ve Önerme 3.10'dan açıktır.

3.12. Önerme Her EK-sol ideal, bir EK-sol zayıf-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-sol ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ ve $f_S \circ f_S \subseteq f_S$. Buradan,

$$\tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S \circ f_S \subseteq f_S$$

elde edilir. Böylece, f_S bir EK-sol zayıf-iç idealdir.

Önerme 3.12'nin karşınının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.13. Örnek Örnek 3.2'de verilen f_S esnek kümesini ele alalım. f_S 'nin bir EK-sol zayıf-iç ideal olduğu, Örnek 3.2'de gösterilmiştir. Fakat,

$$f_S(nn) = f_S(y) \not\subseteq f_S(n)$$

olduğundan, f_S bir EK-sol ideal değildir.

Önerme 3.14, Önerme 3.12'nin karşıtının sol basit yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.14. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir sol basit yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sol idealdir.
2. f_S bir EK-sol zayıf-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.12'nin ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S , bir EK-sol zayıf-iç ideal ve $a, b \in S$ olsun. Kabul gereği, her $a, b \in S$ için, $a = xb$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(ab) = f_S((xb)b) = f_S(xbb) \supseteq f_S(b) \cap f_S(b) = f_S(b)$$

olduğundan, f_S bir EK-sol idealdir.

Önerme 3.15, Önerme 3.12'nin karşıtının idempotent esnek kümeler için de geçerli olduğunu göstermektedir.

3.15. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sol idealdir.
2. f_S bir EK-sol zayıf-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.12'nin ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S , bir EK-sol zayıf-iç ideal olsun. f_S , idempotent bir esnek küme olduğundan, $f_S \circ f_S = f_S$ bilinmektedir. Buradan,

$$\tilde{S} \circ f_S = \tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sol idealdir.

Buradan, herhangi bir idempotent EK-sol zayıf-iç idealin, bir EK-sol idealin tüm özelliklerini göstereceği açıktır.

3.16. Önerme Her EK-sağ ideal, bir EK-sağ zayıf-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-sağ ideal olsun. O halde, $f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ ve $f_S \circ f_S \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$f_S \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S \circ f_S \subseteq f_S$$

elde edilir. Böylece, f_S bir EK-sağ zayıf-iç idealdir.

Önerme 3.16'nın karşınının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.17. *Örnek* Örnek 3.2'de verilen f_S esnek kümesini ele alalım. f_S 'nin bir EK-sağ zayıf-iç ideal olduğu, Örnek 3.2'de gösterilmiştir. Fakat,

$$f_S(nn) = f_S(y) \not\subseteq f_S(n)$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ ideal değildir.

Önerme 3.18, Önerme 3.16'nın karşınının sağ basit yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.18. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir sağ basit yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sağ idealdir.
2. f_S bir EK-sağ zayıf-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.16'nın ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S , bir EK-sağ zayıf-iç ideal ve $a, b \in S$ olsun. Kabul gereği, her $a, b \in S$ için, $b = ax$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(ab) = f_S(a(ax)) = f_S(aax) \supseteq f_S(a) \cap f_S(a) = f_S(a)$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ idealdir.

Önerme 3.19, Önerme 3.16'nın karşının idempotent esnek kümeler için de geçerli olduğunu göstermektedir.

3.19. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sağ idealdir.
2. f_S bir EK-sağ zayıf-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.16'nın ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S , bir EK-sağ zayıf-iç ideal olsun. f_S , idempotent bir esnek küme olduğundan, $f_S \circ f_S = f_S$ bilinmektedir. Buradan,

$$f_S \circ \tilde{f}_S = f_S \circ f_S \circ \tilde{f}_S \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ idealdir.

Buradan, herhangi bir idempotent EK-sağ zayıf-iç idealin, bir EK-sağ idealin tüm özelliklerini göstereceği açıktır.

3.20. Teorem Her EK-ideal, bir EK-zayıf-iç idealdir.

İspat: İspatı, Önerme 3.12 ve Önerme 3.16'dan açıktır.

Teorem 3.20'nin karşının her zaman doğru olmadığı Örnek 3.13 ve Örnek 3.17'den açıktır.

Teorem 3.21, Teorem 3.20'nin karşıtının gruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.21. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir grup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-idealdir.
2. f_S bir EK-zayıf-i idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Teorem 3.20'den açıktır. (2)'yi kabul edelim. Kabul gereği, Teorem 2.1.6'dan, S bir sol basit yarıgrup ve bir sağ basit yarıgruptur. İspatın devamı, Önerme 3.14 ve Önerme 3.18'den açıktır.

Teorem 3.22, Teorem 3.20'nin karşıtının idempotent esnek kümeler için de geçerli olduğunu göstermektedir.

3.22. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-idealdir.
2. f_S bir EK-zayıf-i idealdir.

İspat: İspatı, Önerme 3.15 ve Önerme 3.19'dan açıktır.

Buradan, herhangi bir idempotent EK-zayıf-i idealin, bir EK-idealın tüm özelliklerini göstereceği açıktır.

3.23 Önerme Her EK-i ideal, bir EK-sol zayıf-i idealdir.

İspat: f_S , bir EK-i ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sol zayıf-iç idealdir.

Önerme 3.23'ün karıştının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.24. *Örnek* $S = \{a, n, c\}$ kümesi üzerinde, Tablo 3.2 yardımıyla tanımlanan “ $\odot$ ” ikili işlemi ile $(S, \odot)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\odot$	a	n	c
a	a	n	c
n	a	n	c
c	a	n	c

Tablo 3.2. Örnek 3.24'teki “ $\odot$ ” ikili işlemi

$U = \{\Gamma, \Theta, \Lambda, \Pi, \Sigma\}$ evrensel kümesi üzerinde j_S esnek kümesi,

$$j_S = \{(a, \{\Gamma, \Theta, \Lambda\}), (n, \{\Pi\}), (c, \{\Sigma\})\}$$

şeklinde tanımlansın. j_S esnek kümesi, bir EK-sol zayıf-iç idealdir. Gerçekten,

$$(\tilde{\mathbb{S}} \circ j_S \circ j_S)(a) = \{\Gamma, \Theta, \Lambda\} \subseteq j_S(a) = \{\Gamma, \Theta, \Lambda\}$$

$$(\tilde{\mathbb{S}} \circ j_S \circ j_S)(n) = \{\Pi\} \subseteq j_S(n) = \{\Pi\}$$

$$(\tilde{\mathbb{S}} \circ j_S \circ j_S)(c) = \{\Sigma\} \subseteq j_S(c) = \{\Sigma\}$$

olduğundan, j_S bir EK-sol zayıf-iç idealdir. Fakat,

$$j_S(anc) = j_S(c) \not\subseteq j_S(n)$$

olduğundan, j_S bir EK-iç ideal değildir.

Önerme 3.25, Önerme 3.23'ün karşıtının sol basit yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.25. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir sol basit yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-iç idealdir.
2. f_S bir EK-sol zayıf-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.23'ün ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S , bir EK-sol zayıf-iç ideal olsun. Bu durumda, S bir sol basit yarıgrup olduğundan, Önerme 3.14'ten, f_S bir EK-sol idealdir. $a, b, c \in S$ olsun. Kabul gereği, her $b, c \in S$ için, $c = xb$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(abc) = f_S(ab(xb)) = f_S((abx)b) \supseteq f_S(b)$$

oldüğundan, f_S bir EK-iç idealdir.

3.26. Önerme Her EK-iç ideal, bir EK-sağ zayıf-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-iç ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$f_S \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$$

oldüğundan, f_S bir EK-sağ zayıf-iç idealdir.

Önerme 3.26'nın karşıtının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.27. Örnek $S = \{0, e, f\}$ kümesi üzerinde, Tablo 3.3 yardımıyla tanımlanan “ Θ ” ikili işlemi ile (S, Θ) cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\ominus$	0	e	f
0	0	0	0
e	e	e	e
f	f	f	f

Tablo 3.3. Örnek 3.27'deki " $\ominus$ " ikili işlemi

$U = \{\Gamma, \Theta, \Lambda, \Pi, \Sigma\}$ evrensel kümesi üzerinde c_S esnek kümesi,

$$c_S = \{(0, \{\Gamma, \Theta\}), (e, \{\Lambda\}), (f, \{\Pi, \Sigma\})\}$$

şeklinde tanımlansın. c_S esnek kümesi, bir EK-sağ zayıf-iç idealdir. Gerçekten,

$$(c_S \circ c_S \circ \widetilde{\mathbb{S}})(0) = \{\Gamma, \Theta\} \subseteq c_S(0) = \{\Gamma, \Theta\}$$

$$(c_S \circ c_S \circ \widetilde{\mathbb{S}})(e) = \{\Lambda\} \subseteq c_S(e) = \{\Lambda\}$$

$$(c_S \circ c_S \circ \widetilde{\mathbb{S}})(f) = \{\Pi, \Sigma\} \subseteq c_S(f) = \{\Pi, \Sigma\}$$

olduğundan, c_S bir EK-sağ zayıf-iç idealdir. Fakat,

$$c_S(fe0) = c_S(f) \not\subseteq c_S(e)$$

olduğundan, c_S bir EK-iç ideal değildir.

Önerme 3.28, Önerme 3.26'nın karşınının sağ basit yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.28. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir sağ basit yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-iç idealdir.

2. f_S bir EK-sağ zayıf-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.26'nın ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S , bir EK-sağ zayıf-iç ideal olsun. Bu durumda, S bir sağ basit yarıgrup olduğundan, Önerme 3.18'den, f_S bir EK-sağ idealdir. $a, b, c \in S$ olsun. Kabul gereği, her $a, b \in S$ için, $a = bx$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(abc) = f_S((bx)bc) = f_S(b(xbc)) \supseteq f_S(b)$$

olduğundan, f_S bir EK-iç idealdir.

3.29. Teorem Her EK-iç ideal, bir EK-zayıf-iç idealdir.

İspat: İspatı, Önerme 3.23 ve Önerme 3.26'dan açıktır.

Teorem 3.30, Teorem 3.29'un karışının gruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.30. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir grup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-iç idealdir.
2. f_S bir EK-zayıf-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Teorem 3.29'dan açıktır. (2)'yi kabul edelim. Kabul gereği, Teorem 2.1.6'dan, S bir sol basit yarıgrup ve bir sağ basit yarıgruptur. İspatın devamı, Önerme 3.25 ve Önerme 3.28'den açıktır.

Burada ayrıca, herhangi bir idempotent EK-zayıf-iç idealin, bir EK-iç ideal olacağı açıktır.

3.31. Önerme Sol basit bir yarıgrupun her EK-bi-ideali, bir EK-sağ zayıf-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-bi-ideal olsun. Kabul gereği, Önerme 2.4.6'dan, f_S bir EK-sağ idealdir. İspatın devamı, Önerme 3.16'dan açıktır.

3.32. Önerme Sağ basit bir yarıgrubun her EK-bi-ideali, bir EK-sol zayıf-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-bi-ideal ve $a, b, c \in S$ olsun. Kabul gereği, her $a, b \in S$ için, $a = bx$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(abc) = f_S((bxb)c) \supseteq f_S(bxb) \cap f_S(c) \supseteq (f_S(b) \cap f_S(b)) \cap f_S(c) = f_S(b) \cap f_S(c)$$

olduğundan, f_S bir EK-sol zayıf-iç idealdir.

3.33. Teorem Bir grubun her EK-bi-ideali, bir EK-zayıf-iç idealdir.

İspat: Kabul gereği, Teorem 2.1.6'dan, S bir sol basit yarıgrup ve bir sağ basit yarıgruptur. İspatın devamı, Önerme 3.31 ve Önerme 3.32'den açıktır.

3.34. Önerme Sol basit bir yarıgrubun her EK-quasi-ideali, bir EK-sağ zayıf-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-quasi-ideal olsun. O halde, Teorem 2.4.4 (8)'den, f_S bir EK-bi-idealdir. Kabul gereği, Önerme 3.31'den, f_S bir EK-sağ zayıf-iç idealdir.

3.35. Önerme Sağ basit bir yarıgrubun her EK-quasi-ideali, bir EK-sol zayıf-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-quasi-ideal olsun. O halde, Teorem 2.4.4 (8)'den, f_S bir EK-bi-idealdir. Kabul gereği, Önerme 3.32'den, f_S bir EK-sol zayıf-iç idealdir.

3.36. Teorem Bir grubun her EK-quasi-ideali, bir EK-zayıf-iç idealdir.

İspat: Kabul gereği, Teorem 2.1.6'dan, S bir sol basit yarıgrup ve bir sağ basit yarıgruptur. İspatın devamı, Önerme 3.34 ve Önerme 3.35'ten açıktır.

3.37. Önerme Sol basit bir yarıgrubun her EK-sol zayıf-iç ideali, bir EK-quasi-idealdir.

İspat: f_S , bir EK-sol zayıf-iç ideal olsun. Kabul gereği, Önerme 3.14'ten, f_S bir EK-sol idealdir. O halde, Teorem 2.4.4 (3)'ten, f_S bir EK-quasi-idealdir.

Burada ayrıca, herhangi bir idempotent EK-sol zayıf-iç idealin, bir EK-quasi-ideal olacağı açıktır.

3.38. Önerme Sağ basit bir yarıgrubun her EK-sağ zayıf-iç ideali, bir EK-quasi-idealdir.

İspat: f_S , bir EK-sağ zayıf-iç ideal olsun. Kabul gereği, Önerme 3.18'den, f_S bir EK-sağ idealdir. O halde, Teorem 2.4.4 (3)'ten, f_S bir EK-quasi-idealdir.

Burada ayrıca, herhangi bir idempotent EK-sağ zayıf-iç idealin, bir EK-quasi-ideal olacağı açıktır.

Teorem 3.36'nın karşıtının da geçerli olduğunu Teorem 3.39 ile gösterelim.

3.39. Teorem Bir grubun her EK-zayıf-iç ideali, bir EK-quasi-idealdir.

İspat: Kabul gereği, Teorem 2.1.6'dan, S bir sol basit yarıgrup ve bir sağ basit yarıgruptur. İspatın devamı, Önerme 3.37 ve Önerme 3.38'den açıktır.

Burada ayrıca, herhangi bir idempotent EK-zayıf-iç idealin, bir EK-quasi-ideal olacağı açıktır.

3.40. Önerme Sol basit bir yarıgrubun her EK-sol zayıf-iç ideali, bir EK-bi-idealdir.

İspat: f_S , bir EK-sol zayıf-iç ideal olsun. Kabul gereği, Önerme 3.37'den, f_S bir EK-quasi-idealdir. O halde, Teorem 2.4.4 (8)'den, f_S bir EK-bi-idealdir.

Burada ayrıca, herhangi bir idempotent EK-sol zayıf-iç idealin, bir EK-bi-ideal olacağı açıktır.

3.41. Önerme Sağ basit bir yarıgrubun her EK-sağ zayıf-iç ideali, bir EK-bi-idealdir.

İspat: f_S , bir EK-sağ zayıf-iç ideal olsun. Kabul gereği, Önerme 3.34'ten, f_S bir EK-quasi-idealdir. O halde, Teorem 2.4.4 (8)'den, f_S bir EK-bi-idealdir.

Burada ayrıca, herhangi bir idempotent EK-sağ zayıf-iç idealin, bir EK-bi-ideal olacağı açıktır.

Teorem 3.33'ün karşıtının da geçerli olduğunu Teorem 3.42 ile gösterelim.

3.42. Teorem Bir grubun her EK-zayıf-iç ideali, bir EK-bi-idealdir.

İspat: Kabul gereği, Teorem 2.1.6'dan, S bir sol basit yarıgrup ve bir sağ basit yarıgruptur. İspatın devamı, Önerme 3.37 ve Önerme 3.38'den açıktır.

Burada ayrıca, herhangi bir idempotent EK-zayıf-iç idealin, bir EK-bi-ideal olacağı açıktır.

3.43. Önerme f_S ve f_T , sırasıyla S yarı grubunun ve T yarı grubunun birer EK-sol (sağ) zayıf-iç ideali olsun. Bu durumda, $f_S \wedge f_T$, $S \times T$ yarı grubunun bir EK-sol (sağ) zayıf-iç idealidir.

İspat: İspat, EK-sol zayıf-iç ideal için verilecek olup, EK-sağ zayıf-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S ve f_T , sırasıyla S yarı grubunun ve T yarı grubunun birer EK-sol zayıf-iç ideali olsun. Her $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in S \times T$ için,

$$\begin{aligned} f_{S \wedge T}((x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3)) &= f_{S \wedge T}(x_1 x_2 x_3, y_1 y_2 y_3) \\ &= f_S(x_1 x_2 x_3) \cap f_T(y_1 y_2 y_3) \\ &\supseteq (f_S(x_1) \cap f_S(x_2)) \cap (f_T(y_1) \cap f_T(y_2)) \\ &= (f_S(x_1) \cap f_T(y_1)) \cap (f_S(x_2) \cap f_T(y_2)) \\ &= f_{S \wedge T}(x_1, y_1) \cap f_{S \wedge T}(x_2, y_2) \end{aligned}$$

olduğundan, $f_S \wedge f_T$, $S \times T$ yarı grubunun bir EK-sol zayıf-iç idealidir.

3.44. Teorem f_S ve f_T , sırasıyla S yarı grubunun ve T yarı grubunun birer EK-zayıf-iç ideali olsun. Bu durumda, $f_S \wedge f_T$, $S \times T$ yarı grubunun bir EK-zayıf-iç idealidir.

3.45. Önerme f_S ve f_T , sırasıyla S yarı grubunun ve T yarı grubunun U üzerinde birer EK-sol (sağ) zayıf-iç ideali olsun. Bu durumda, $f_S \times f_T$, $S \times T$ yarı grubunun $U \times U$ üzerinde bir EK-sol (sağ) zayıf-iç idealidir.

İspat: İspat, EK-sol zayıf-iç ideal için verilecek olup, EK-sağ zayıf-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. Her $(x, y) \in S \times T$ için, $f_{S \times T}(x, y) = f_S(x) \times f_T(y)$ olacak şekilde $f_S \times f_T = f_{S \times T}$ alalım. Her $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in S \times T$ için,

$$\begin{aligned}
 f_{S \times T}((x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3)) &= f_{S \times T}(x_1 x_2 x_3, y_1 y_2 y_3) \\
 &= f_S(x_1 x_2 x_3) \times f_T(y_1 y_2 y_3) \\
 &\supseteq (f_S(x_2) \cap f_S(x_3)) \times (f_T(y_2) \cap f_T(y_3)) \\
 &= (f_S(x_2) \times f_T(y_2)) \cap (f_S(x_3) \times f_T(y_3)) \\
 &= f_{S \times T}(x_2, y_2) \cap f_{S \times T}(x_3, y_3)
 \end{aligned}$$

olduğundan, $f_S \times f_T = f_{S \times T}$, $S \times T$ yarıgrubunun $U \times U$ üzerinde bir EK-sol zayıf-iç idealidir.

3.46. Teorem f_S ve f_T , sırasıyla S yarıgrubunun ve T yarıgrubunun U üzerinde birer EK-zayıf-iç ideali olsun. Bu durumda, $f_S \times f_T$, $S \times T$ yarıgrubunun $U \times U$ üzerinde bir EK-zayıf-iç idealidir.

3.47. Önerme f_S ve h_S birer EK-sol (sağ) zayıf-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-sol (sağ) zayıf-iç idealidir.

İspat: İspat, EK-sol zayıf-iç ideal için verilecek olup, EK-sağ zayıf-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S ve h_S birer EK-sol zayıf-iç ideal olsun. Buradan, $\tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S$ ve $\tilde{S} \circ h_S \circ h_S \subseteq h_S$ olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$\tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \subseteq \tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S$$

ve

$$\tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \subseteq \tilde{S} \circ h_S \circ h_S \subseteq h_S$$

olup,

$$\tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \subseteq f_S \tilde{\cap} h_S$$

elde edilir. Böylece, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-sol zayıf-iç idealdir.

3.48. Teorem f_S ve h_S birer EK-zayıf-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-zayıf-iç idealdir.

3.49. Sonuç EK-zayıf-iç ideallerin sonlu esnek kesişimleri de bir EK-zayıf-iç idealdir.

3.50. Önerme f_S bir EK-sol ideal, h_S bir EK-sağ ideal olsun. Bu durumda, $f_S \circ h_S$ bir EK-zayıf-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-sol ideal, h_S bir EK-sağ ideal olsun. Buradan, $\tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$, $h_S \circ \tilde{S} \subseteq h_S$, ve $f_S \circ f_S \subseteq f_S$, $h_S \circ h_S \subseteq h_S$ olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$\tilde{S} \circ (f_S \circ h_S) \circ (f_S \circ h_S) \subseteq f_S \circ h_S \circ f_S \circ h_S \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ h_S \subseteq f_S \circ f_S \circ h_S \subseteq f_S \circ h_S$$

elde edilip, $f_S \circ h_S$ bir EK-sol zayıf-iç idealdir. Benzer şekilde,

$$(f_S \circ h_S) \circ (f_S \circ h_S) \circ \tilde{S} \subseteq f_S \circ h_S \circ f_S \circ h_S \subseteq f_S \circ h_S \circ \tilde{S} \circ h_S \subseteq f_S \circ h_S \circ h_S \subseteq f_S \circ h_S$$

olduğundan, $f_S \circ h_S$ bir EK-sağ zayıf-iç idealdir. Böylece, $f_S \circ h_S$ bir EK-zayıf-iç idealdir.

3.51. Teorem f_S ve h_S birer EK-ideal olsun. Bu durumda, $f_S \circ h_S$ bir EK-zayıf-iç idealdir.

3.52. Önerme f_S , bir EK-alt yarıgrup, $Im(f_S)$, f_S 'nin görüntü kümesi, $\alpha \in Im(f_S)$ olmak üzere α , U kümesinin alt kümesi olsun. f_S , bir EK-sol (sağ) zayıf-iç ideal ise $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrupunun bir sol (sağ) zayıf-iç idealidir.

İspat: İspat, EK-sol zayıf-iç ideal için verilecek olup, EK-sağ zayıf-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. Bazı $x \in S$ için, $f_S(x) = \alpha$ ise $\emptyset \neq \mathcal{U}(f_S; \alpha) \subseteq S$ olur. $k \in [S \cdot \mathcal{U}(f_S; \alpha) \cdot \mathcal{U}(f_S; \alpha)]$ olsun. $k = axy$ olacak şekilde $x, y \in \mathcal{U}(f_S; \alpha)$ ve $a \in S$ alalım. O halde, $f_S(x) \supseteq \alpha$, $f_S(y) \supseteq \alpha$ elde edilir. f_S bir EK-sol zayıf-iç ideal olduğundan,

$$f_S(k) = f_S(axy) \supseteq f_S(x) \cap f_S(y) \supseteq \alpha \cap \alpha = \alpha$$

elde edilir. Buradan, $f_S(k) \supseteq \alpha$ yani, $k \in \mathcal{U}(f_S; \alpha)$. Böylece, $S \cdot \mathcal{U}(f_S; \alpha) \cdot \mathcal{U}(f_S; \alpha) \subseteq \mathcal{U}(f_S; \alpha)$ elde edilir. Ayrıca f_S , bir EK-alt yarıgrup olup, Önerme 2.4.2'ten, $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. O halde, $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrubunun bir sol zayıf-iç idealidir.

3.53. Teorem f_S bir EK-alt yarıgrup, $Im(f_S)$, f_S 'nin görüntü kümesi, $\alpha \in Im(f_S)$ olmak üzere α , U kümesinin alt kümesi olsun. f_S , bir EK-zayıf-iç ideal ise $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrubunun bir zayıf-iç idealidir.

Teorem 3.53'ü bir örnek ile gösterelim:

3.54. *Örnek* Örnek 3.2'de verilen $(S, \cdot)$ yarıgrubunu ele alalım. $U = S_3$ evrensel kümesi üzerinde, x_S esnek kümesi,

$$x_S = \{(l, \{(1), (12), (123), (132)\}), (y, \{(12), (123), (132)\}), (n, \{(12)\}), (a, \{(132)\})\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada, x_S esnek kümesi bir EK-alt yarıgruptur. Gerçekten,

$$(x_S \circ x_S)(l) = \{(1), (12), (123), (132)\} \subseteq x_S(l) = \{(1), (12), (123), (132)\}$$

$$(x_S \circ x_S)(y) = \{(12), (132)\} \subseteq x_S(y) = \{(12), (123), (132)\}$$

$$(x_S \circ x_S)(n) = \emptyset \subseteq x_S(n) = \{(12)\}$$

$$(x_S \circ x_S)(a) = \emptyset \subseteq x_S(a) = \{(132)\}$$

olduğundan, x_S bir EK-alt yarıgruptur. Benzer şekilde, x_S esnek kümesi bir EK-zayıf-iç idealdir. Gerçekten,

$$(\tilde{S} \circ x_S \circ x_S)(l) = \{(1), (12), (123), (132)\} \subseteq x_S(l) = \{(1), (12), (123), (132)\}$$

$$(\tilde{S} \circ x_S \circ x_S)(y) = \emptyset \subseteq x_S(y) = \{(12), (123), (132)\}$$

$$(\tilde{\mathbb{S}} \circ x_S \circ x_S)(n) = \emptyset \subseteq x_S(n) = \{(12)\}$$

$$(\tilde{\mathbb{S}} \circ x_S \circ x_S)(a) = \emptyset \subseteq x_S(a) = \{(132)\}$$

olduğundan, x_S bir EK-sol zayıf-iç idealdir. Benzer şekilde,

$$(x_S \circ x_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(l) = \{(1), (12), (123), (132)\} \subseteq x_S(l) = \{(1), (12), (123), (132)\}$$

$$(x_S \circ x_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(y) = \emptyset \subseteq x_S(y) = \{(12), (123), (132)\}$$

$$(x_S \circ x_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(n) = \emptyset \subseteq x_S(n) = \{(12)\}$$

$$(x_S \circ x_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(a) = \emptyset \subseteq x_S(a) = \{(132)\}$$

olduğundan, x_S bir EK-sağ zayıf-iç idealdir. Dolayısıyla, x_S bir EK-zayıf-iç idealdir.

$$Im(x_S) = \{\{(1), (12), (123), (132)\}, \{(12), (123), (132)\}, \{(12)\}, \{(132)\}\}$$

olduğu dikkate alınarak,

$$\mathcal{U}(x_S; \alpha) = \begin{cases} \{l, y, n\}, & \alpha = \{(12)\} \\ \{l, y, a\}, & \alpha = \{(132)\} \\ \{l, y\}, & \alpha = \{(12), (123), (132)\} \\ \{l\}, & \alpha = \{(1), (12), (123), (132)\} \end{cases}$$

elde edilir. Burada, $\{l, y, n\}$, $\{l, y, a\}$, $\{l, y\}$ ve $\{l\}$ kümeleri S yarıgrubunun birer zayıf-iç idealleridir. Gerçekten de;

$$\{l, y, n\} \cdot \{l, y, n\} = \{l, y\} \subseteq \{l, y, n\}$$

$$\{l, y, a\} \cdot \{l, y, a\} = \{l, y\} \subseteq \{l, y, a\}$$

$$\{l, y\} \cdot \{l, y\} = \{l\} \subseteq \{l, y\}$$

$$\{l\} \cdot \{l\} = \{l\} \subseteq \{l\}$$

olup, her bir $\mathcal{U}(x_S; \alpha)$, S yarıgrubunun birer alt yarıgrubudur. Benzer şekilde,

$$S \cdot \{l, y, n\} \cdot \{l, y, n\} = \{l\} \subseteq \{l, y, n\}$$

$$S \cdot \{l, y, a\} \cdot \{l, y, a\} = \{l\} \subseteq \{l, y, a\}$$

$$S \cdot \{l, y\} \cdot \{l, y\} = \{l\} \subseteq \{l, y\}$$

$$S \cdot \{l\} \cdot \{l\} = \{l\} \subseteq \{l\}$$

olduğundan, her bir $\mathcal{U}(x_S; \alpha)$, S yarıgrubunun birer sol zayıf-iç ideali ve benzer şekilde,

$$\{l, y, n\} \cdot \{l, y, n\} \cdot S = \{l\} \subseteq \{l, y, n\}$$

$$\{l, y, a\} \cdot \{l, y, a\} \cdot S = \{l\} \subseteq \{l, y, a\}$$

$$\{l, y\} \cdot \{l, y\} \cdot S = \{l\} \subseteq \{l, y\}$$

$$\{l\} \cdot \{l\} \cdot S = \{l\} \subseteq \{l\}$$

olduğundan, her bir $\mathcal{U}(x_S; \alpha)$, S yarıgrubunun birer sağ zayıf-iç idealidir. Böylece, her bir $\mathcal{U}(x_S; \alpha)$, S yarıgrubunun birer zayıf-iç idealidir.

Şimdi ise Örnek 3.2'deki g_S esnek kümesini ele alalım.

$$Im(g_S) = \{(1), (123), (132)\}, \{(23)\}, \{(13)\}, \{(12)\}\}$$

olduğu dikkate alınarak,

$$\mathcal{U}(g_S; \alpha) = \begin{cases} \{a\}, & \alpha = \{(12)\} \\ \{n\}, & \alpha = \{(13)\} \\ \{y\}, & \alpha = \{(23)\} \\ \{l\}, & \alpha = \{(1), (123), (132)\} \end{cases}$$

elde edilir. Burada, $\{a\}$ kümesi S yarıgrubunun bir zayıf-iç ideali değildir. Gerçekten de;

$$\{a\} \cdot \{a\} = \{y\} \not\subseteq \{a\}$$

olduğundan, $\mathcal{U}(g_S; \alpha)$ 'lardan birinin S yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olmadığı, dolayısıyla, $\mathcal{U}(g_S; \alpha)$ 'nın S yarıgrubunun bir zayıf-iç ideali olmadığı görülmektedir. Diğer taraftan, g_S esnek kümesinin bir EK-zayıf-iç ideal olmadığı Örnek 3.2'den açıktır.

3.55. Tanım f_S bir EK-alt yarıgrup olmak üzere bir EK-sol (sağ) zayıf-iç ideal olsun. Bu durumda, $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$ zayıf-iç ideallerine, f_S 'nin üst α -sol (sağ) zayıf-iç idealleri denir.

3.56. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme, her $\alpha \subseteq U$ için, $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, f_S 'nin bir üst α -sol (sağ) zayıf-iç ideali ve $Im(f_S)$ bir kapsama altında sıralı küme olsun. Bu durumda, f_S bir EK-sol (sağ) zayıf-iç idealdir.

İspat: İspat, EK-sol zayıf-iç ideal için verilecek olup, EK-sağ zayıf-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. $a, x, y \in S$ ve $f_S(x) = \alpha_1$ ve $f_S(y) = \alpha_2$. $\alpha_1 \subseteq \alpha_2$ olsun. Buradan, $x \in \mathcal{U}(f_S; \alpha_1)$ ve $y \in \mathcal{U}(f_S; \alpha_2)$ elde edilir. $\alpha_1 \subseteq \alpha_2$ olduğundan, $x, y \in \mathcal{U}(f_S; \alpha_1)$ ve her $\alpha \subseteq U$ için, $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$ S yarıgrubunun bir zayıf-iç ideali olduğundan, $axy \in \mathcal{U}(f_S; \alpha_1)$. Böylece, $f_S(axy) \supseteq \alpha_1 = \alpha_1 \cap \alpha_2 = f_S(x) \cap f_S(y)$. O halde, f_S bir EK-sol zayıf-iç idealdir.

3.57. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme, her $\alpha \subseteq U$ için, $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, f_S 'nin bir üst α -zayıf-iç ideali ve $Im(f_S)$ bir kapsama altında sıralı küme olsun. Bu durumda, f_S bir EK-zayıf-iç idealdir.

3.58. Önerme f_S ve f_T , U üzerinde birer esnek küme ve Ψ , S 'den T 'ye bir yarıgrup izomorfizması olsun. f_S , S yarıgrubunun bir EK-sol (sağ) zayıf-iç ideali ise $\Psi(f_S)$, T yarıgrubunun bir EK-sol (sağ) zayıf-iç idealidir.

İspat: İspat, EK-sol zayıf-iç ideal için verilecek olup, EK-sağ zayıf-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. $t_1, t_2, t_3 \in T$ alalım. Ψ örten olduğundan, $\Psi(s_1) = t_1$, $\Psi(s_2) = t_2$ ve $\Psi(s_3) = t_3$ olacak şekilde $s_1, s_2, s_3 \in S$ vardır. O halde,

$$\begin{aligned}
 (\Psi(f_S))(t_1 t_2 t_3) &= \bigcup \{f_S(s) : s \in S, \Psi(f_S) = t_1 t_2 t_3\} \\
 &= \bigcup \{f_S(s) : s \in S, s = \Psi^{-1}(t_1 t_2 t_3)\} \\
 &= \bigcup \{f_S(s) : s \in S, s = \Psi^{-1}(\Psi(s_1 s_2 s_3)) = s_1 s_2 s_3\} \\
 &= \bigcup \{f_S(s_1 s_2 s_3) : s_i \in S, \Psi(s_i) = t_i, i = 1, 2, 3\} \\
 &\supseteq \bigcup \{f_S(s_2) \cap f_S(s_3) : s_2, s_3 \in S, \Psi(s_2) = t_2 \text{ ve } \Psi(s_3) = t_3\} \\
 &= (\Psi(f_S))(s_2) \cap (\Psi(f_S))(s_3)
 \end{aligned}$$

olduğundan, $\Psi(f_S)$, T yarıgrubunun bir EK-sol zayıf-iç idealidir.

3.59. Teorem f_S ve f_T , U üzerinde birer esnek küme ve Ψ , S 'den T 'ye bir yarıgrup izomorfizması olsun. f_S , S yarıgrubunun bir EK-zayıf-iç ideali ise $\Psi(f_S)$, T yarıgrubunun bir EK-zayıf-iç idealidir.

3.60. Önerme f_S ve f_T , U üzerinde birer esnek küme ve Ψ , S 'den T 'ye bir yarıgrup izomorfizması olsun. f_T , T yarıgrubunun bir EK-sol (sağ) zayıf-iç ideali ise $\Psi^{-1}(f_T)$, S yarıgrubunun bir EK-sol (sağ) zayıf-iç idealidir.

İspat: İspat, EK-sol zayıf-iç ideal için verilecek olup, EK-sağ zayıf-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. $s_1, s_2, s_3 \in S$ alalım. O halde,

$$\begin{aligned}
 (\Psi^{-1}(f_T))(s_1 s_2 s_3) &= f_T(\Psi(s_1 s_2 s_3)) \\
 &= f_T(\Psi(s_1) \Psi(s_2) \Psi(s_3)) \\
 &\supseteq f_T(\Psi(s_2)) \cap f_T(\Psi(s_3)) \\
 &= (\Psi^{-1}(f_T))(s_2) \cap (\Psi^{-1}(f_T))(s_3)
 \end{aligned}$$

olduğundan, $\Psi^{-1}(f_T)$, S yarıgrubunun bir EK-sol zayıf-iç idealidir.

3.61. Teorem f_S ve f_T , U üzerinde birer esnek küme ve Ψ , S 'den T 'ye bir yarıgrup izomorfizması olsun. f_T , T yarıgrubunun bir EK-zayıf-iç ideali ise $\Psi^{-1}(f_T)$, S yarıgrubunun bir EK-zayıf-iç idealidir.

3.62. Önerme S bir idempotent yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. S regülerdir.
2. f_S bir EK-sol zayıf-iç ideal olmak üzere, $f_S = \tilde{S} \circ f_S \circ f_S$.

İspat: (1)'i kabul edelim. S regüler, f_S bir EK-sol zayıf-iç ideal ve $x \in S$ olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \circ f_S \cong f_S$, $f_S \circ f_S = f_S$ ve $x = xyx$ olacak şekilde $y \in S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\begin{aligned}
 (\tilde{S} \circ f_S \circ f_S)(x) &= (\tilde{S} \circ f_S)(x) \\
 &= \bigcup_{x=ab} \{\tilde{S}(a) \cap f_S(b)\} \\
 &\supseteq \tilde{S}(xy) \cap f_S(x) \\
 &= U \cap f_S(x) \\
 &= f_S(x)
 \end{aligned}$$

olduğundan, $f_S \cong \tilde{S} \circ f_S \circ f_S$ elde edilir. Böylece, $f_S = \tilde{S} \circ f_S \circ f_S$.

Tersine, (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-sol zayıf-iç ideal olmak üzere $f_S = \tilde{S} \circ f_S \circ f_S$ olsun. S yarıgrubunun regüler olduğunu göstermek için, S yarıgrubunun her bir sol zayıf-iç ideali A için $A = SAA$ sağlandığını göstermek gerekir. A , S yarıgrubunun bir sol zayıf-iç ideali olsun. O halde, $SAA \subseteq A$ açıktır. Bu durumda, $A \subseteq SAA$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a \in A$ olsun. A , S yarıgrubunun bir sol zayıf-iç ideali olduğundan, Teorem 3.7'den, S_A bir EK-sol zayıf-iç idealdir. Kabul gereği ve Teorem 2.3.18 (iii)'ten,

$$S_A(a) = (\tilde{S} \circ S_A \circ S_A)(a) = (S_S \circ S_A \circ S_A)(a) = S_{SAA}(a) = U$$

elde edilir. Buradan, $a \in SAA$ olup, $A = SAA$ elde edilir. Böylece, S regüler bir yarıgruptur.

3.63. Önerme S bir idempotent yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. S regülerdir.
2. Her EK-sağ zayıf-iç ideal için, $f_S = f_S \circ f_S \circ \tilde{S}$.

İspat: (1)'i kabul edelim. S regüler, f_S bir EK-sağ zayıf-iç ideal ve $x \in S$ olsun. O halde, $f_S \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$, $f_S \circ f_S = f_S$ ve $x = xyx$ olacak şekilde $y \in S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\begin{aligned}
 (f_S \circ f_S \circ \tilde{S})(x) &= (f_S \circ \tilde{S})(x) \\
 &= \bigcup_{x=ab} \{f_S(a) \cap \tilde{S}(b)\} \\
 &\supseteq f_S(x) \cap \tilde{S}(yx) \\
 &= f_S(x) \cap U \\
 &= f_S(x)
 \end{aligned}$$

olduğundan, $f_S \subseteq f_S \circ f_S \circ \tilde{S}$ elde edilir. Böylece, $f_S = f_S \circ f_S \circ \tilde{S}$.

Tersine, (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-sağ zayıf-iç ideal olmak üzere $f_S = f_S \circ f_S \circ \tilde{S}$ olsun. S yarıgrupunun regüler olduğunu göstermek için, S yarıgrupunun her bir sağ zayıf-iç ideali A için $A = AAS$ sağlandığını göstermek gerekir. A , S yarıgrupunun bir sağ zayıf-iç ideali olsun. O halde, $AAS \subseteq A$ açıktır. Bu durumda, $A \subseteq AAS$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a \in A$ olsun. A , S yarıgrupunun bir sağ zayıf-iç ideali olduğundan, Teorem 3.7'den, S_A bir EK-sağ zayıf-iç idealdir. Kabul gereği ve Teorem 2.3.18 (iii)'den,

$$S_A(a) = (S_A \circ S_A \circ \tilde{S})(a) = (S_A \circ S_A \circ S_S)(a) = S_{AAS}(a) = U$$

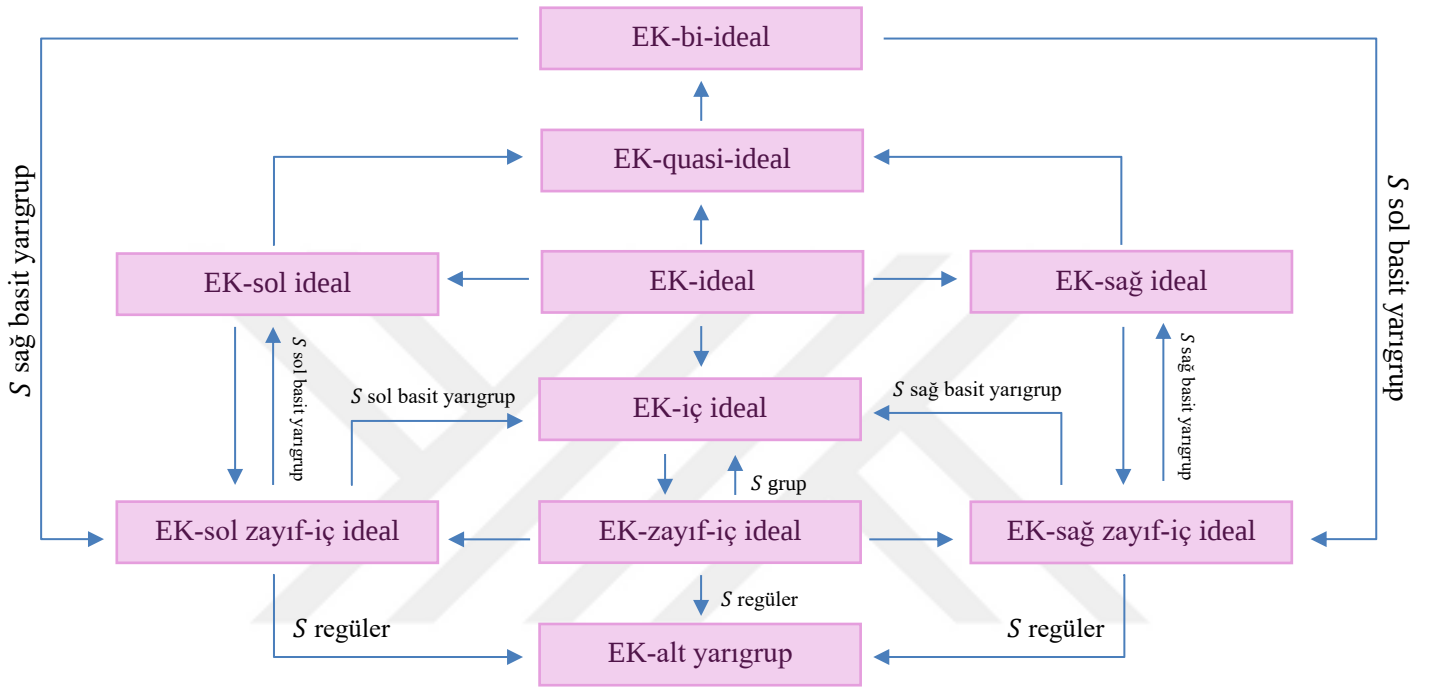
elde edilir. Buradan, $a \in AAS$ olup, $A = AAS$ elde edilir. Böylece, S regüler bir yarıgruptur.

3.64. Teorem S bir idempotent yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. S regülerdir.
2. Her EK-zayıf-iç ideal için, $f_S = \tilde{S} \circ f_S \circ f_S = f_S \circ f_S \circ \tilde{S}$.

İspat: İspatı, Önerme 3.62 ve Önerme 3.63'ten açıktır.

Birkaç esnek kesişimsel ideal ile bunların genelleştirilmiş idealleri arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Burada, $A \rightarrow B$, A'nın B olduğunu ancak B'nin her zaman A olmadığını gösterir.



Şekil 3.1. Bazı esnek kesişimsel idealler arasındaki ilişkileri gösteren diyagram

4. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL Bİ-İÇ İDEALLERİ

Bu bölümde, yarıgrupların esnek kesişimsel bi-iç idealleri tanıtılmış, örneği verilmiş, diğer esnek kesişimsel idealler ile ilişkileri detaylı bir şekilde incelenmiş, bazı esnek küme kavramları ve işlemleri açısından analiz edilmiştir.

4.1. Tanım f_S, U üzerinde bir esnek küme olsun. $(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$ ise f_S esnek kümesine, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel bi-iç ideali denir.

Bundan sonra, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel bi-iç ideali kısaca “EK-bi-iç ideal” olarak gösterilecektir.

4.2. Örnek $S = \{\ell, p, t, w\}$ kümesi üzerinde, Tablo 4.1 yardımıyla tanımlanan “•” ikili işlemi ile $(S, \bullet)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

•	ℓ	p	t	w
ℓ	ℓ	p	p	w
p	p	p	p	w
t	p	p	p	w
w	w	w	w	w

Tablo 4.1. Örnek 4.2’deki “•” ikili işlemi

$U = \mathbb{Z}$ evrensel kümesi üzerinde $\mathcal{K}_S$ ve $\mathcal{Q}_S$ esnek kümeleri,

$$\mathcal{K}_S = \{(\ell, \{1,2\}), (p, \{1,2,3\}), (t, \{2,3\}), (w, \mathbb{Z}^+)\}$$

$$\mathcal{Q}_S = \{(\ell, \{3,5\}), (p, \{3,5,7,8\}), (t, \{5,8\}), (w, \{3,5,7\})\}$$

şeklinde tanımlansın. $\mathcal{K}_S$ esnek kümesi, bir EK-bi-iç idealdir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
[(\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}}) \tilde{\cap} (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)](b) &= (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(b) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(b) \\
&= [\tilde{\mathbb{S}}(b) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(b)] \cap [\kappa_S(b) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(b)] = \kappa_S(b) \cap \kappa_S(b) \\
&= \kappa_S(b) \subseteq \kappa_S(b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}}) \tilde{\cap} (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)](p) &= (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(p) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(p) \\
&= [[\tilde{\mathbb{S}}(b) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(p)] \cup [\tilde{\mathbb{S}}(b) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(t)] \\
&\quad \cup [\tilde{\mathbb{S}}(p) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(b)] \cup [\tilde{\mathbb{S}}(p) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(p)] \cup [\tilde{\mathbb{S}}(p) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(t)] \\
&\quad \cup [\tilde{\mathbb{S}}(t) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(b)] \cup [\tilde{\mathbb{S}}(t) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(p)] \cup [\tilde{\mathbb{S}}(t) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(t)]] \\
&\quad \cap [[\kappa_S(b) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(p)] \cup [\kappa_S(b) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(t)] \\
&\quad \cup [\kappa_S(p) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(b)] \cup [\kappa_S(p) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(p)] \\
&\quad \cup [\kappa_S(p) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(t)] \cup [\kappa_S(t) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(b)] \\
&\quad \cup [\kappa_S(t) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(p)] \cup [\kappa_S(t) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(t)]] \\
&= [\kappa_S(b) \cup \kappa_S(p) \cup \kappa_S(t)] \cap [\kappa_S(b) \cup \kappa_S(p) \cup \kappa_S(t)] \\
&= \kappa_S(b) \cup \kappa_S(p) \cup \kappa_S(t) \subseteq \kappa_S(p)
\end{aligned}$$

$$[(\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}}) \tilde{\cap} (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)](t) = \emptyset \subseteq \kappa_S(t)$$

$$\begin{aligned}
[(\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}}) \tilde{\cap} (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)](w) &= (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(w) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(w) \\
&= [[\tilde{\mathbb{S}}(b) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(w)] \cup [\tilde{\mathbb{S}}(p) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(w)] \\
&\quad \cup [\tilde{\mathbb{S}}(t) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(w)] \cup [\tilde{\mathbb{S}}(w) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(b)] \\
&\quad \cup [\tilde{\mathbb{S}}(w) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(p)] \cup [\tilde{\mathbb{S}}(w) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(t)] \\
&\quad \cup [\tilde{\mathbb{S}}(w) \cap (\kappa_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(w)]] \\
&\quad \cap [[\kappa_S(b) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(w)] \cup [\kappa_S(p) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(w)] \\
&\quad \cup [\kappa_S(t) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(w)] \cup [\kappa_S(w) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(b)] \\
&\quad \cup [\kappa_S(w) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(p)] \cup [\kappa_S(w) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(t)] \\
&\quad \cup [\kappa_S(w) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ \kappa_S)(w)]] \\
&= [\kappa_S(b) \cup \kappa_S(p) \cup \kappa_S(t) \cup \kappa_S(w)] \\
&\quad \cap [\kappa_S(b) \cup \kappa_S(p) \cup \kappa_S(t) \cup \kappa_S(w)] \\
&= \kappa_S(b) \cup \kappa_S(p) \cup \kappa_S(t) \cup \kappa_S(w) \subseteq \kappa_S(w)
\end{aligned}$$

olduğundan, k_S bir EK-bi-iç idealdir. Fakat,

$$\begin{aligned}
 [(\tilde{S} \circ q_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (q_S \circ \tilde{S} \circ q_S)](w) &= (\tilde{S} \circ q_S \circ \tilde{S})(w) \cap (q_S \circ \tilde{S} \circ q_S)(w) \\
 &= [q_S(b) \cup q_S(p) \cup q_S(t) \cup q_S(w)] \\
 &\cap [q_S(b) \cup q_S(p) \cup q_S(t) \cup q_S(w)] \\
 &= q_S(b) \cup q_S(p) \cup q_S(t) \cup q_S(w) \not\subseteq q_S(w)
 \end{aligned}$$

olduğundan, q_S bir EK-bi-iç ideal değildir.

4.3. Sonuç $\tilde{S}$ ve $\emptyset_S$ birer EK-bi-iç idealdir.

Şimdi, EK-bi-iç idealler ile diğer EK-idealler arasındaki ilişkilere bakılacaktır.

4.4. Teorem Esnek basit* bir yarıgrubun her EK-bi-iç ideali, bir EK-alt yarıgruptur.

İspat: f_S , bir EK-bi-iç ideal olsun. O halde, $(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$. Kabul gereği, Sonuç 2.4.8 (3)'ten, $\tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S = f_S \circ \tilde{S}$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\begin{aligned}
 f_S \circ f_S &= (f_S \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ f_S) \subseteq (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S}) \\
 &= (\tilde{S} \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, f_S bir EK-alt yarıgruptur.

4.5. Teorem Her EK-sol ideal, bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-sol ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ ve $f_S \circ f_S \subseteq f_S$. Buradan,

$$(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S \circ f_S \subseteq f_S$$

elde edilir. Böylece, f_S bir EK-bi-iç idealdir.

Teorem 4.5'in karışının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

4.6. Örnek $S = \{s, a\}$ kümesi üzerinde, Tablo 4.2 yardımıyla tanımlanan “ $\odot$ ” ikili işlemi ile $(S, \odot)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\odot$	s	a
s	s	s
a	a	a

Tablo 4.2. Örnek 4.6’daki “ $\odot$ ” ikili işlemi

$U = \mathbb{Z}^+$ evrensel kümesi üzerinde r_S esnek kümesi,

$$r_S = \{(s, \{4\}), (a, \{1, 1999\})\}$$

şeklinde tanımlansın. r_S esnek kümesi bir EK-bi-iç idealdir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} [(\tilde{S} \circ r_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (r_S \circ \tilde{S} \circ r_S)](s) &= (\tilde{S} \circ r_S \circ \tilde{S})(s) \cap (r_S \circ \tilde{S} \circ r_S)(s) \\ &= (r_S(s) \cup r_S(a)) \cap r_S(s) = r_S(s) \subseteq r_S(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(\tilde{S} \circ r_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (r_S \circ \tilde{S} \circ r_S)](a) &= (\tilde{S} \circ r_S \circ \tilde{S})(a) \cap (r_S \circ \tilde{S} \circ r_S)(a) \\ &= (r_S(s) \cup r_S(a)) \cap r_S(a) = r_S(a) \subseteq r_S(a) \end{aligned}$$

olduğundan, r_S bir EK-bi-iç idealdir. Fakat,

$$r_S(sa) = r_S(s) \not\subseteq r_S(a)$$

olduğundan, r_S bir EK-sol ideal değildir.

Teorem 4.7, Teorem 4.5’in karşıtının esnek basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

4.7. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sol idealdir.
2. f_S bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Teorem 4.5'in ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S , bir EK-bi-iç ideal olsun. Kabul gereği, $\tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S = f_S \circ \tilde{S}$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\begin{aligned} \tilde{S} \circ f_S &= (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S) \\ &= (\tilde{S} \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S \end{aligned}$$

olduğundan, f_S bir EK-sol idealdir.

4.8. Teorem Her EK-sağ ideal, bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-sağ ideal olsun. O halde, $f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ ve $f_S \circ f_S \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S \circ f_S \subseteq f_S$$

elde edilir. Böylece, f_S bir EK-bi-iç idealdir.

Teorem 4.8'in karşınının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

4.9. Örnek $S = \{k, i\}$ kümesi üzerinde, Tablo 4.3 yardımıyla tanımlanan “ $\diamond$ ” ikili işlemi ile $(S, \diamond)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\diamond$	k	i
k	k	i
i	k	i

Tablo 4.3. Örnek 4.9'daki “ $\diamond$ ” ikili işlemi

$U = \mathbb{Z}^-$ evrensel kümesi üzerinde ℓ_S esnek kümesi,

$$\ell_S = \{(k, \{-1\}), (i, \{-2\})\}$$

şeklinde tanımlansın. ℓ_S esnek kümesi bir EK-bi-iç idealdir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} [(\tilde{S} \circ \ell_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\ell_S \circ \tilde{S} \circ \ell_S)](k) &= (\tilde{S} \circ \ell_S \circ \tilde{S})(k) \cap (\ell_S \circ \tilde{S} \circ \ell_S)(k) \\ &= (\ell_S(k) \cup \ell_S(i)) \cap \ell_S(k) = \ell_S(k) \subseteq \ell_S(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(\tilde{S} \circ \ell_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\ell_S \circ \tilde{S} \circ \ell_S)](i) &= (\tilde{S} \circ \ell_S \circ \tilde{S})(i) \cap (\ell_S \circ \tilde{S} \circ \ell_S)(i) \\ &= (\ell_S(k) \cup \ell_S(i)) \cap \ell_S(i) = \ell_S(i) \subseteq \ell_S(i) \end{aligned}$$

olduğundan, ℓ_S bir EK-bi-iç idealdir. Fakat,

$$\ell_S(ki) = \ell_S(i) \not\subseteq \ell_S(k)$$

olduğundan, ℓ_S bir EK-sağ ideal değildir.

Teorem 4.10, Teorem 4.8'in karışının esnek basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

4.10. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sağ idealdir.
2. f_S bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Teorem 4.8'in ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S , bir EK-bi-iç ideal olsun. Kabul gereği, $\tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S = f_S \circ \tilde{S}$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\begin{aligned} f_S \circ \tilde{S} &= (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S}) \\ &= (f_S \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong f_S \end{aligned}$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ idealdir.

4.11. Teorem Her EK-ideal, bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: İspatı, Teorem 4.5 ve Teorem 4.8'den açıktır.

Teorem 4.11'in karışının her zaman doğru olmadığı Örnek 4.6 ve Örnek 4.9'dan açıktır.

Teorem 4.12, Teorem 4.11'in karışının esnek basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

4.12. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-idealdir.
2. f_S bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: İspatı, Teorem 4.7 ve Teorem 4.10'dan açıktır.

4.13. Teorem Her EK-bi-ideal, bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-bi-ideal olsun. O halde, $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$$

elde edilir. Böylece, f_S bir EK-bi-iç idealdir.

Teorem 4.13'ün karışının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

4.14. Örnek $S = \{\#, \sigma, u, r\}$ kümesi üzerinde, Tablo 4.4 yardımıyla tanımlanan “ $\odot$ ” ikili işlemi ile $(S, \odot)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\odot$	f	σ	u	r
f	f	f	f	f
σ	f	f	f	f
u	f	f	f	σ
r	f	f	σ	u

Tablo 4.4. Örnek 4.14'teki “ $\odot$ ” ikili işlemi

$U = S_3$ evrensel kümesi üzerinde d_S esnek kümesi,

$$d_S = \{(f, \{(1), (123), (132)\}), (\sigma, \{(123)\}), (u, \{(1), (132)\}), (r, \{(1)\})\}$$

şeklinde tanımlansın. d_S esnek kümesi bir EK-bi-iç idealdir. Gerçekten,

$$[(\tilde{S} \circ d_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (d_S \circ \tilde{S} \circ d_S)](f) = \{(1), (123), (132)\} \subseteq d_S(f)$$

$$[(\tilde{S} \circ d_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (d_S \circ \tilde{S} \circ d_S)](\sigma) = \emptyset \subseteq d_S(\sigma)$$

$$[(\tilde{S} \circ d_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (d_S \circ \tilde{S} \circ d_S)](u) = \emptyset \subseteq d_S(u)$$

$$[(\tilde{S} \circ d_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (d_S \circ \tilde{S} \circ d_S)](r) = \emptyset \subseteq d_S(r)$$

olduğundan, d_S bir EK-bi-iç idealdir. Fakat,

$$d_S(ur) = d_S(\sigma) \not\subseteq d_S(u) \cap d_S(r)$$

olduğundan, d_S bir EK-alt yarıgrup değildir. Dolayısıyla, d_S bir EK-bi-ideal değildir.

Teorem 4.15, Teorem 4.13'ün karşıtının esnek basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

4.15. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-bi-idealdir.
2. f_S bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Teorem 4.13'ün ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S , bir EK-bi-iç ideal olsun. Kabul gereği, $\tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S = f_S \circ \tilde{S}$ olduğu bilinmektedir ve Teorem 4.4'ten, f_S bir EK-alt yarıgruptur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} f_S \circ \tilde{S} \circ f_S &= (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \\ &= (\tilde{S} \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S \end{aligned}$$

olduğundan, f_S bir EK-bi-idealdir.

4.16. Teorem Her EK-iç ideal, bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-iç ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$$

elde edilir. Böylece, f_S bir EK-bi-iç idealdir.

Teorem 4.16'nın karışının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

4.17. *Örnek* Örnek 4.9'da verilen ℓ_S esnek kümesini ele alalım. ℓ_S esnek kümesinin bir EK-bi-iç ideal olduğu, Örnek 4.9'da gösterilmiştir. Fakat,

$$\ell_S(iki) = \ell_S(i) \not\subseteq \ell_S(k)$$

olduğundan, f_S bir EK-iç ideal değildir.

Teorem 4.18, Teorem 4.16'nın karşıtının esnek basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

4.18. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-iç idealdir.
2. f_S bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiğı Teorem 4.16'nın ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S , bir EK-bi-iç ideal olsun. Kabul gereğı, $\tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S = f_S \circ \tilde{S}$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\begin{aligned} \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} &= (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \\ &= (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ \tilde{S}) \subseteq (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S}) \\ &= (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S \end{aligned}$$

olduğundan, f_S bir EK-iç idealdir.

4.19. Teorem Her EK-quasi-ideal, bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-quasi-ideal olsun. O halde, Teorem 2.4.4 (8)'den, f_S bir EK-bi-idealdir. İspatın devamı, Teorem 4.13'ten açıktır.

Teorem 4.19'un karşıtının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

4.20. *Örnek* Örnek 4.14'te verilen d_S esnek kümesini ele alalım. d_S esnek kümesinin bir EK-bi-iç ideal olduğu fakat bir EK-bi-ideal olmadığı, Örnek 4.14'te gösterilmiştir. d_S bir EK-bi-ideal olmadığından, bir EK-quasi-ideal değildir.

Teorem 4.21, Teorem 4.19'un karşıtının esnek basit* yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

4.21. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir esnek basit* yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-quasi-idealdir.
2. f_S bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Teorem 4.19'un ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S , bir EK-bi-iç ideal olsun. Kabul gereği, $\tilde{S} = \tilde{S} \circ f_S = f_S \circ \tilde{S}$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S}) = (\tilde{S} \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-quasi-idealdir.

4.22. Teorem A , S yarı grubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarı grubunun bir bi-iç ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-bi-iç ideal olmasıdır.

İspat: A , S yarı grubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere S yarı grubunun bir bi-iç ideali olsun. O halde, $SAS \cap ASA \subseteq A$. Böylece, Teorem 2.3.18'den,

$$\begin{aligned} (\tilde{S} \circ S_A \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (S_A \circ \tilde{S} \circ S_A) &= (S_S \circ S_A \circ S_S) \tilde{\cap} (S_A \circ S_S \circ S_A) = S_{SAS} \tilde{\cap} S_{ASA} \\ &= S_{SAS \cap ASA} \subseteq S_A \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, S_A bir EK-bi-iç idealdir.

Tersine, S_A bir EK-bi-iç ideal olsun. O halde, $(\tilde{S} \circ S_A \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (S_A \circ \tilde{S} \circ S_A) \subseteq S_A$ olduğu bilinmektedir. $w \in SAS \cap ASA$ olmak üzere, Teorem 2.3.18'den,

$$\begin{aligned} S_A(w) &\supseteq [(\tilde{S} \circ S_A \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (S_A \circ \tilde{S} \circ S_A)](w) = (\tilde{S} \circ S_A \circ \tilde{S})(w) \cap (S_A \circ \tilde{S} \circ S_A)(w) \\ &= (S_S \circ S_A \circ S_S)(w) \cap (S_A \circ S_S \circ S_A)(w) = S_{SAS}(w) \cap S_{ASA}(w) \\ &= S_{SAS \cap ASA}(w) = U \end{aligned}$$

olduğundan, $S_A(w) = U$, buradan $w \in A$ elde edilir. Sonuç olarak, $SAS \cap ASA \subseteq A$. Böylece, A, S yarıgrubunun bir bi-iç idealidir.

4.23. Örnek $S = \{x, y, z\}$ kümesi üzerinde, Tablo 4.5 yardımıyla tanımlanan “ $\diamond$ ” ikili işlemi ile $(S, \diamond)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\diamond$	x	y	z
x	z	z	z
y	z	z	z
z	z	z	z

Tablo 4.5. Örnek 4.23'teki “ $\diamond$ ” ikili işlemi

$C = \{y, z\}$, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, C kümesinin S yarıgrubunun bir bi-iç ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Rutin hesaplamalarla, C kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu $S_C = \{(x, \emptyset), (y, U), (z, U)\}$ 'nin bir EK-bi-iç ideal olduğu gösterilebilir.

Tersine, $D = \{x, z\}$ kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olan f_S EK-bi-iç idealini $f_S = \{(x, U), (y, \emptyset), (z, U)\}$ olarak alırsak, rutin hesaplamalarla, $D = \{x, z\}$ kümesinin S yarıgrubunun bir bi-iç ideali olduğu gösterilebilir.

4.24. Teorem f_S ve h_S , U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S veya h_S bir EK-sol ideal ise $f_S \circ h_S$ bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-sol ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ ve $f_S \circ f_S \subseteq f_S$. Buradan,

$$\begin{aligned}
 (\tilde{S} \circ (f_S \circ h_S) \circ \tilde{S}) \cap ((f_S \circ h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \circ h_S)) &\subseteq (f_S \circ h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \circ h_S) \\
 &= f_S \circ h_S \circ (\tilde{S} \circ f_S) \circ h_S \subseteq f_S \circ h_S \circ f_S \circ h_S \subseteq f_S \circ (\tilde{S} \circ f_S) \circ h_S \subseteq f_S \circ f_S \\
 &\circ h_S \subseteq f_S \circ h_S
 \end{aligned}$$

olduğundan, $f_S \circ h_S$ bir EK-bi-iç idealdir. İspat, benzer şekilde h_S için de verilebilir. h_S , bir EK-sol ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ h_S \subseteq h_S$. Buradan,

$$\begin{aligned} (\tilde{S} \circ (f_S \circ h_S) \circ \tilde{S}) \cap ((f_S \circ h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \circ h_S)) &\subseteq (f_S \circ h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \circ h_S) \subseteq f_S \circ (\tilde{S} \circ \tilde{S}) \\ &\circ \tilde{S} \circ h_S \subseteq f_S \circ (\tilde{S} \circ \tilde{S}) \circ h_S \subseteq f_S \circ (\tilde{S} \circ h_S) \subseteq f_S \circ h_S \end{aligned}$$

olduğundan, $f_S \circ h_S$ bir EK-bi-iç idealdir.

4.25. Teorem f_S ve h_S , U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S veya h_S bir EK-sağ ideal ise $f_S \circ h_S$ bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: h_S , bir EK-sağ ideal olsun. O halde, $h_S \circ \tilde{S} \subseteq h_S$ ve $h_S \circ h_S \subseteq h_S$. Buradan,

$$\begin{aligned} (\tilde{S} \circ (f_S \circ h_S) \circ \tilde{S}) \cap ((f_S \circ h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \circ h_S)) &\subseteq (f_S \circ h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \circ h_S) \\ &= f_S \circ (h_S \circ \tilde{S}) \circ f_S \circ h_S \subseteq f_S \circ h_S \circ f_S \circ h_S \subseteq f_S \circ (h_S \circ \tilde{S}) \circ h_S \subseteq f_S \circ h_S \\ &\circ h_S \subseteq f_S \circ h_S \end{aligned}$$

olduğundan, $f_S \circ h_S$ bir EK-bi-iç idealdir. İspat, benzer şekilde f_S için de verilebilir. f_S , bir EK-sağ ideal olsun. O halde, $f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$. Buradan,

$$\begin{aligned} (\tilde{S} \circ (f_S \circ h_S) \circ \tilde{S}) \cap ((f_S \circ h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \circ h_S)) &\subseteq (f_S \circ h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \circ h_S) \subseteq f_S \circ (\tilde{S} \circ \tilde{S}) \\ &\circ \tilde{S} \circ h_S \subseteq f_S \circ (\tilde{S} \circ \tilde{S}) \circ h_S \subseteq (f_S \circ \tilde{S}) \circ h_S \subseteq f_S \circ h_S \end{aligned}$$

olduğundan, $f_S \circ h_S$ bir EK-bi-iç idealdir.

4.26. Teorem f_S , g_S ve h_S , U üzerinde birer esnek küme olsun. g_S , bir EK-ideal ise $f_S \circ g_S \circ h_S$ bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: g_S , bir EK-ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ g_S \subseteq g_S$, $g_S \circ \tilde{S} \subseteq g_S$ ve $g_S \circ g_S \subseteq g_S$. Buradan,

$$\begin{aligned}
& (\tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \circ g_S \circ h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}}) \tilde{\cap} \left((f_S \circ g_S \circ h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \circ g_S \circ h_S) \right) \cong (f_S \circ g_S \circ h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \\
& \quad \circ (f_S \circ g_S \circ h_S) \cong f_S \circ (g_S \circ \tilde{\mathbb{S}}) \circ (\tilde{\mathbb{S}} \circ \tilde{\mathbb{S}}) \circ g_S \circ h_S \cong f_S \circ (g_S \circ \tilde{\mathbb{S}}) \circ g_S \\
& \quad \circ h_S \cong f_S \circ g_S \circ g_S \circ h_S \cong f_S \circ g_S \circ h_S
\end{aligned}$$

olduğundan, $f_S \circ g_S \circ h_S$ bir EK-bi-iç idealdir.

4.27. Teorem f_S ve h_S birer EK-bi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: f_S ve h_S birer EK-bi-iç ideal olsun. O halde, $(\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S) \cong f_S$ ve $(\tilde{\mathbb{S}} \circ h_S \circ \tilde{\mathbb{S}}) \tilde{\cap} (h_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ h_S) \cong h_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(\tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}}) \tilde{\cap} \left((f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \right) \cong (\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S) \cong f_S$$

ve

$$(\tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}}) \tilde{\cap} \left((f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \right) \cong (\tilde{\mathbb{S}} \circ h_S \circ \tilde{\mathbb{S}}) \tilde{\cap} (h_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ h_S) \cong h_S$$

olduğundan,

$$(\tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}}) \tilde{\cap} \left((f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \right) \cong f_S \tilde{\cap} h_S$$

elde edilir. Böylece, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-bi-iç idealdir.

4.28. *Sonuç* EK-bi-iç ideallerin sonlu esnek kesişimleri de bir EK-bi-iç idealdir.

4.29. *Sonuç* Bir EK-sol (sağ/ iki taraflı/ bi/ iç/ quasi) ideal ile bir EK-sol (sağ/ iki taraflı/ bi/ iç/ quasi) idealin esnek kesişimi bir EK-bi-iç idealdir.

4.30. Teorem f_S , U üzerinde boş esnek kümeden farklı bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S 'nin $(\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S)$ esnek kümesini kapsayan her esnek alt kümesi bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: h_S, f_S 'nin $(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$ esnek kümesini kapsayan bir esnek alt kümesi olsun. Buradan,

$$(\tilde{S} \circ h_S \circ \tilde{S}) \cap (h_S \circ \tilde{S} \circ h_S) \subseteq (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq h_S$$

olduğundan, h_S bir EK-bi-iç idealdir.

4.31. Teorem f_S, U üzerinde boş esnek kümeden farklı bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S 'nin $(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \cup (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$ esnek kümesini kapsayan her esnek alt kümesi bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: h_S, f_S 'nin $(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \cup (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$ esnek kümesini kapsayan bir esnek alt kümesi olsun. Buradan,

$$(\tilde{S} \circ h_S \circ \tilde{S}) \subseteq (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \subseteq (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \cup (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq h_S$$

olduğundan, $(\tilde{S} \circ h_S \circ \tilde{S}) \subseteq h_S$. Ayrıca,

$$(h_S \circ \tilde{S} \circ h_S) \subseteq (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \cup (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq h_S$$

olduğundan, $(h_S \circ \tilde{S} \circ h_S) \subseteq h_S$. Böylece, $(\tilde{S} \circ h_S \circ \tilde{S}) \cap (h_S \circ \tilde{S} \circ h_S) \subseteq h_S$ elde edilir. O halde, h_S bir EK-bi-iç idealdir.

4.32. Önerme f_S, U üzerinde bir esnek küme, $Im(f_S)$, f_S 'nin görüntü kümesi, $\alpha \in Im(f_S)$ olmak üzere α, U kümesinin alt kümesi olsun. f_S , bir EK-bi-iç ideal ise $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrubunun bir bi-iç idealidir.

İspat: Bazı $x \in S$ için, $f_S(x) = \alpha$ ise $\emptyset \neq \mathcal{U}(f_S; \alpha) \subseteq S$ olur. $k \in [S \cdot \mathcal{U}(f_S; \alpha) \cdot S] \cap [\mathcal{U}(f_S; \alpha) \cdot S \cdot \mathcal{U}(f_S; \alpha)]$ olsun. $k = xay = bzc$ olacak şekilde $x, y, z \in \mathcal{U}(f_S; \alpha)$ ve $a, b, c \in S$ alalım. O halde, $f_S(x) \supseteq \alpha, f_S(y) \supseteq \alpha$ ve $f_S(z) \supseteq \alpha$. Buradan,

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(k) &= \bigcup_{k=mn} \{\tilde{\mathbb{S}}(m) \cap (f_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(n)\} \\
&\supseteq \tilde{\mathbb{S}}(b) \cap (f_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(zc) \\
&= U \cap \left[\bigcup_{zc=sr} \{f_S(s) \cap \tilde{\mathbb{S}}(r)\} \right] \\
&\supseteq f_S(z) \cap \tilde{\mathbb{S}}(c) \\
&= f_S(z) \cap U \\
&= f_S(z) \\
&\supseteq \alpha
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S)(k) &= \bigcup_{k=mn} \{f_S(m) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S)(n)\} \\
&\supseteq f_S(x) \cap (\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S)(ay) \\
&= f_S(x) \cap \left[\bigcup_{ay=pq} \{\tilde{\mathbb{S}}(p) \cap f_S(q)\} \right] \\
&\supseteq f_S(x) \cap \tilde{\mathbb{S}}(a) \cap f_S(y) \\
&= f_S(x) \cap U \cap f_S(y) \\
&= f_S(x) \cap f_S(y) \\
&\supseteq \alpha \cap \alpha \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $(\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(k) \cap (f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S)(k) \supseteq \alpha$. f_S , bir EK-bi-iç ideal olduğundan,

$$f_S(k) \supseteq (\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(k) \cap (f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S)(k) \supseteq \alpha$$

olup, $k \in \mathcal{U}(f_S; \alpha)$ elde edilir. O halde, $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrubunun bir bi-iç idealidir.

Önerme 4.32'yi bir örnek ile gösterelim:

4.33. *Örnek* Örnek 4.2'deki k_S esnek kümesini ele alalım. Örnek 4.2'de, k_S esnek kümesinin bir EK-bi-iç ideal olduğu açıktır.

$$Im(k_S) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \mathbb{Z}^+\}$$

olduğu dikkate alınarak,

$$\mathcal{U}(k_S; \alpha) \begin{cases} \{\ell, p, w\}, & \alpha = \{1,2\} \\ \{p, t, w\}, & \alpha = \{2,3\} \\ \{p, w\}, & \alpha = \{1,2,3\} \\ \{w\}, & \alpha = \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

elde edilir. Burada, $\{\ell, p, w\}$, $\{p, t, w\}$, $\{p, w\}$ ve $\{w\}$ kümeleri S yarıgrubunun birer bi-iç idealleridir. Gerçekten de;

$$(S \cdot \{\ell, p, w\} \cdot S) \cap (\{\ell, p, w\} \cdot S \cdot \{\ell, p, w\}) = \{\ell, p, w\} \subseteq \{\ell, p, w\}$$

$$(S \cdot \{p, t, w\} \cdot S) \cap (\{p, t, w\} \cdot S \cdot \{p, t, w\}) = \{p, w\} \subseteq \{p, t, w\}$$

$$(S \cdot \{p, w\} \cdot S) \cap (\{p, w\} \cdot S \cdot \{p, w\}) = \{p, w\} \subseteq \{p, w\}$$

$$(S \cdot \{w\} \cdot S) \cap (\{w\} \cdot S \cdot \{w\}) = \{w\} \subseteq \{w\}$$

olduğundan, her bir $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrubunun birer bi-iç idealidir.

Şimdi ise Örnek 4.2'deki q_S esnek kümesini ele alalım.

$$Im(q_S) = \{\{3,5\}, \{5,8\}, \{3,5,7\}, \{3,5,7,8\}\}$$

olduğu dikkate alınarak,

$$\mathcal{U}(q_S; \alpha) \begin{cases} \{\ell, p, w\}, & \alpha = \{3,5\} \\ \{p, t\}, & \alpha = \{5,8\} \\ \{p, w\}, & \alpha = \{3,5,7\} \\ \{p\}, & \alpha = \{3,5,7,8\} \end{cases}$$

elde edilir. Burada, $\{p, t\}$ kümesi S yarıgrubunun bir bi-iç ideali değildir. Gerçekten de;

$$(S \bullet \{p, t\} \bullet S) \cap (\{p, t\} \bullet S \bullet \{p, t\}) = \{p, w\} \not\subseteq \{p, t\}$$

olduğundan, $\mathcal{U}(q_S; \alpha)$ 'lardan birinin S yarıgrubunun bir bi-iç ideali olmadığı, dolayısıyla, $\mathcal{U}(q_S; \alpha)$ 'nın S yarıgrubunun bir bi-iç ideali olmadığı görülmektedir. Diğer taraftan, q_S esnek kümesinin bir EK-bi-iç ideal olmadığı Örnek 4.2'den açıktır.

4.34. Tanım f_S , bir EK-bi-iç ideal olsun. Bu durumda, $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$ bi-iç ideallerine, f_S 'nin üst α -bi-iç idealleri denir.

4.35. Teorem S bir yarıgrup ve f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. S regülerdir.
2. f_S bir EK-bi-iç ideal olmak üzere, $f_S = (\tilde{\mathcal{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathcal{S}}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{\mathcal{S}} \circ f_S)$.

İspat: (1)'i kabul edelim. S regüler, f_S bir EK-bi-iç ideal ve $x \in S$ olsun. O halde, $(\tilde{\mathcal{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathcal{S}}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{\mathcal{S}} \circ f_S) \subseteq f_S$ ve her $x \in S$ için, $x = xyx$ olacak şekilde bir $y \in S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathcal{S}})(x) &= \bigcup_{x=ab} \{(\tilde{\mathcal{S}} \circ f_S)(a) \cap \tilde{\mathcal{S}}(b)\} \\ &\supseteq (\tilde{\mathcal{S}} \circ f_S)(x) \cap \tilde{\mathcal{S}}(yx) \\ &= \left[\bigcup_{x=ab} \{\tilde{\mathcal{S}}(a) \cap f_S(b)\} \right] \cap U \\ &\supseteq \tilde{\mathcal{S}}(xy) \cap f_S(x) \\ &= U \cap f_S(x) \\ &= f_S(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(x) &= \bigcup_{x=ab} \{(f_S \circ \tilde{S})(a) \cap f_S(b)\} \\
&\supseteq (f_S \circ \tilde{S})(xy) \cap f_S(x) \\
&= \left[\bigcup_{xy=mn} \{f_S(m) \cap \tilde{S}(n)\} \right] \cap f_S(x) \\
&\supseteq [f_S(x) \cap \tilde{S}(yxy)] \cap f_S(x) \\
&= [f_S(x) \cap U] \cap f_S(x) \\
&= f_S(x)
\end{aligned}$$

olduğundan, $(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(x) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(x) \supseteq f_S(x)$ elde edilir. Böylece, $f_S \subseteq (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$. O halde, $f_S = (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$.

Tersine, (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-bi-iç ideal olmak üzere, $f_S = (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$ olsun. S yarıgrubunun regüler olduğunu göstermek için, S yarıgrubunun her bir bi-iç ideali A için $A = SAS \cap ASA$ sağlandığını göstermek gerekir. A , S yarıgrubunun bir bi-iç ideali olsun. O halde, $SAS \cap ASA \subseteq A$ açıktır. Bu durumda, $A \subseteq SAS \cap ASA$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a \in A$ olsun. A , S yarıgrubunun bir bi-iç ideali olduğundan, Teorem 4.22'den, S_A bir EK-bi-iç idealdir. Kabul gereği ve Teorem 2.3.18'den,

$$\begin{aligned}
S_A(a) &= (\tilde{S} \circ S_A \circ \tilde{S})(a) \cap (S_A \circ \tilde{S} \circ S_A)(a) = (S_S \circ S_A \circ S_S)(a) \cap (S_A \circ S_S \circ S_A)(a) \\
&= S_{SAS \cap ASA}(a) = U
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $a \in SAS \cap ASA$ olup, $A = SAS \cap ASA$ elde edilir. Böylece, S bir regüler yarıgruptur.

4.36. Teorem S bir yarıgrup, f_S ve h_S , U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. S regülerdir.
2. f_S bir EK-bi-iç ideal ve h_S bir EK-ideal olmak üzere, $f_S \cap h_S \subseteq (h_S \circ f_S \circ h_S) \cap (f_S \circ h_S \circ f_S)$.

İspat: (1)'i kabul edelim. S regüler, f_S bir EK-bi-iç ideal, h_S bir EK-ideal ve $x \in S$ olsun. O halde, $(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong f_S$, $p, q \in S$ için, $h_S(pq) \supseteq h_S(p)$ ve $h_S(pq) \supseteq h_S(q)$, ve her $x \in S$ için, $x = xyx$ olacak şekilde bir $y \in S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\begin{aligned}
 (h_S \circ f_S \circ h_S)(x) &= \bigcup_{x=ab} \{h_S(a) \cap (f_S \circ h_S)(b)\} \\
 &\supseteq h_S(xy) \cap (f_S \circ h_S)(x) \\
 &= h_S(xy) \cap \left[\bigcup_{x=ab} \{f_S(a) \cap h_S(b)\} \right] \\
 &\supseteq h_S(xy) \cap [f_S(x) \cap h_S(yx)] \\
 &\supseteq h_S(x) \cap [f_S(x) \cap h_S(x)] \\
 &= f_S(x) \cap h_S(x) \\
 &= (f_S \tilde{\cap} h_S)(x)
 \end{aligned}$$

ve

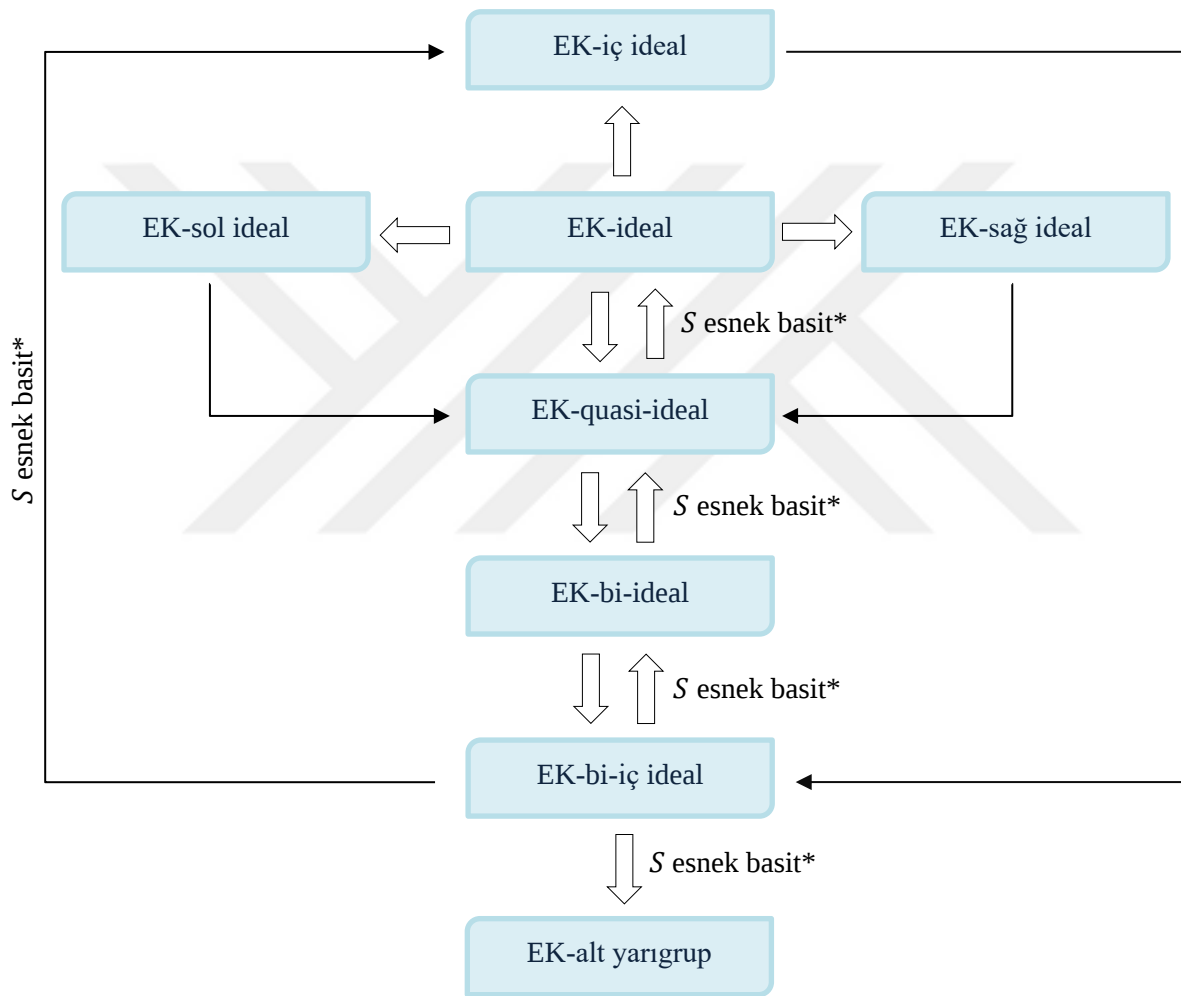
$$\begin{aligned}
 (f_S \circ h_S \circ f_S)(x) &= \bigcup_{x=ab} \{(f_S \circ h_S)(a) \cap f_S(b)\} \\
 &\supseteq (f_S \circ h_S)(xy) \cap f_S(x) \\
 &= \left[\bigcup_{xy=mn} \{f_S(m) \cap h_S(n)\} \right] \cap f_S(x) \\
 &\supseteq [f_S(x) \cap h_S(yxy)] \cap f_S(x) \\
 &\supseteq [f_S(x) \cap h_S(x)] \cap f_S(x) \\
 &= f_S(x) \cap h_S(x) \\
 &= (f_S \tilde{\cap} h_S)(x)
 \end{aligned}$$

olduğundan, $(h_S \circ f_S \circ h_S)(x) \cap (f_S \circ h_S \circ f_S)(x) \supseteq (f_S \tilde{\cap} h_S)(x)$ elde edilir. Böylece, $f_S \tilde{\cap} h_S \cong (h_S \circ f_S \circ h_S) \tilde{\cap} (f_S \circ h_S \circ f_S)$.

Tersine, (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-bi-iç ideal ve h_S bir EK-ideal olmak üzere, $f_S \tilde{\cap} h_S \cong (h_S \circ f_S \circ h_S) \tilde{\cap} (f_S \circ h_S \circ f_S)$ olsun. Bir EK-ideal olarak h_S yerine $\tilde{S}$ esnek kümesini ele alalım. O halde, $f_S \tilde{\cap} \tilde{S} \cong (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$ elde edilir. Buradan,

$f_S \subseteq (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$. Kabul gereği, $(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$. Böylece, $f_S = (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)$ elde edilir. İspatın devamı, Teorem 4.35'ten açıktır.

Birkaç esnek kesişimsel ideal ile bunların genelleştirilmiş idealleri arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Burada, $A \rightarrow B$, A'nın B olduğunu ancak B'nin her zaman A olmadığını gösterir.



Şekil 4.1. Bazı esnek kesişimsel idealler arasındaki ilişkileri gösteren diyagram

5. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN ALT YARIGRUPLARI

Bu bölüm, esnek kesişimsel hemen hemen alt yarıgruplar üzerine olup, bölümde Sezgin ve İlgin (2024a) çalışmasından elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

5.1. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. $(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ise f_S esnek kümesine, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen alt yarı grubu denir.

Bundan sonra, S yarı grubunun U üzerinde esnek kesişimsel hemen hemen alt yarı grubu kısaca “EK-hemen hemen alt yarı grup” olarak gösterilecektir.

5.2. Örnek $S = \{s, n, v, j\}$ kümesi üzerinde, Tablo 5.1 yardımıyla tanımlanan “ $\square$ ” ikili işlemi ile $(S, \square)$ cebirsel yapısı bir yarı gruptur.

$\square$	s	n	v	j
s	s	n	v	j
n	n	s	v	j
v	j	v	j	v
j	v	j	v	j

Tablo 5.1. Örnek 5.2’deki “ $\square$ ” ikili işlemi

$U = \mathbb{N}$ evrensel kümesi üzerinde d_S , r_S ve t_S esnek kümeleri,

$$d_S = \{(s, \{0,1,2\}), (n, \{1,5\}), (v, \{2,4,6,8\}), (j, \{7,9\})\}$$

$$r_S = \{(s, \{3,5,7\}), (n, \{3,6,9\}), (v, \{12,13\}), (j, \{2,8\})\}$$

$$t_S = \{(s, \emptyset), (n, \{0\}), (v, \{1\}), (j, \emptyset)\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada, d_S ve r_S birer EK-hemen hemen alt yarı gruptur. Öncelikle, $(d_S \circ d_S) \tilde{\cap} d_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} [(d_S \circ d_S) \tilde{\cap} d_S](s) &= (d_S \circ d_S)(s) \cap d_S(s) \\ &= [(d_S(s) \cap d_S(s)) \cup (d_S(n) \cap d_S(n))] \cap d_S(s) = \{0,1,2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(d_S \circ d_S) \tilde{\cap} d_S](n) &= (d_S \circ d_S)(n) \cap d_S(n) \\ &= [(d_S(s) \cap d_S(n)) \cup (d_S(n) \cap d_S(s))] \cap d_S(n) = \{1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(d_S \circ d_S) \tilde{\cap} d_S](v) &= (d_S \circ d_S)(v) \cap d_S(v) \\ &= [(d_S(s) \cap d_S(v)) \cup (d_S(n) \cap d_S(v)) \cup (d_S(v) \cap d_S(n)) \\ &\quad \cup (d_S(v) \cap d_S(j)) \cup (d_S(j) \cap d_S(s)) \cup (d_S(j) \cap d_S(v))] \cap d_S(v) \\ &= \{2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(d_S \circ d_S) \tilde{\cap} d_S](j) &= (d_S \circ d_S)(j) \cap d_S(j) \\ &= [(d_S(s) \cap d_S(j)) \cup (d_S(n) \cap d_S(j)) \cup (d_S(v) \cap d_S(s)) \\ &\quad \cup (d_S(v) \cap d_S(v)) \cup (d_S(j) \cap d_S(n)) \cup (d_S(j) \cap d_S(j))] \cap d_S(j) \\ &= \{7,9\} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$(d_S \circ d_S) \tilde{\cap} d_S = \{(s, \{0,1,2\}), (n, \{1\}), (v, \{2\}), (j, \{7,9\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, d_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur. Benzer şekilde,

$$(r_S \circ r_S) \tilde{\cap} r_S = \{(s, \{3,5,7\}), (n, \{3\}), (v, \emptyset), (j, \{2,8\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, r_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur. Fakat, t_S bir EK-hemen hemen alt yarıgrup değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} [(t_S \circ t_S) \tilde{\cap} t_S](s) &= (t_S \circ t_S)(s) \cap t_S(s) \\ &= [(t_S(s) \cap t_S(s)) \cup (t_S(n) \cap t_S(n))] \cap t_S(s) = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(t_S \circ t_S) \tilde{\cap} t_S](n) &= (t_S \circ t_S)(n) \cap t_S(n) \\ &= [(t_S(s) \cap t_S(n)) \cup (t_S(n) \cap t_S(s))] \cap t_S(n) = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(t_S \circ t_S) \tilde{\cap} t_S](v) &= (t_S \circ t_S)(v) \cap t_S(v) \\
&= (t_S(s) \cap t_S(v)) \cup (t_S(n) \cap t_S(v)) \cup (t_S(v) \cap t_S(n)) \\
&\cup (t_S(v) \cap t_S(j)) \cup (t_S(j) \cap t_S(s)) \cup (t_S(j) \cap t_S(v))] \cap t_S(v) = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(t_S \circ t_S) \tilde{\cap} t_S](j) &= (t_S \circ t_S)(j) \cap t_S(j) \\
&= [(t_S(s) \cap t_S(j)) \cup (t_S(n) \cap t_S(j)) \cup (t_S(v) \cap t_S(s)) \\
&\cup (t_S(v) \cap t_S(v)) \cup (t_S(j) \cap t_S(n)) \cup (t_S(j) \cap t_S(j))] \cap t_S(j) = \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(t_S \circ t_S) \tilde{\cap} t_S = \{(s, \emptyset), (n, \emptyset), (v, \emptyset), (j, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, t_S bir EK-hemen hemen alt yarıgrup değildir.

5.3. Önerme f_S , U üzerinde boş esnek kümeden farklı bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-alt yarıgrup ise bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

İspat: f_S , boş esnek kümeden farklı bir EK-alt yarıgrup olsun. O halde, $f_S \circ f_S \subseteq f_S$ sağlanır. $f_S \neq \emptyset_S$ olmak üzere Lemma 2.3.21'den, $f_S \circ f_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. $f_S \circ f_S \subseteq f_S$ olduğundan,

$$(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = f_S \circ f_S \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, $(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olup, f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

Burada, $\emptyset_S \circ \emptyset_S \subseteq \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ esnek kümesinin bir EK-alt yarıgrup olduğu açıktır. Fakat, $(\emptyset_S \circ \emptyset_S) \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ esnek kümesi bir EK-hemen hemen alt yarıgrup değildir.

f_S , bir EK-hemen hemen alt yarıgrup ise bir EK-alt yarıgrup olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

5.4. Örnek Örnek 5.2'de verilen d_S ve r_S esnek kümelerini ele alalım. d_S ve r_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen alt yarıgrup olduğu, Örnek 5.2'de gösterilmiştir. Fakat,

$$d_S(vs) = d_S(j) \not\subseteq d_S(v) \cap d_S(s)$$

olduğundan, d_S bir EK-alt yarıgrup değildir. Benzer şekilde,

$$r_S(vv) = r_S(j) \not\subseteq r_S(v) \cap r_S(v)$$

olduğundan, r_S bir EK-alt yarıgrup değildir.

5.5. Teorem f_S ve h_S , $f_S \cong h_S$ olacak şekilde, U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen alt yarıgrup ise h_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olsun. O halde, $(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği $f_S \cong h_S$ olduğundan,

$$(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \cong (h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S$$

açıktır. Burada, $(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, h_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

5.6. Teorem f_S ve h_S , birer EK-hemen hemen alt yarıgrup olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olsun. $f_S \cong f_S \tilde{\cup} h_S$ olup, Teorem 5.5'ten, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

5.7. *Sonuç* EK-hemen hemen alt yarıgrupların sonlu esnek birleşimleri de bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

5.8. *Sonuç* f_S ya da h_S bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

Burada, f_S ve h_S birer EK-hemen hemen alt yarıgrup iken, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

5.9. *Örnek* Örnek 5.2'deki d_S ve r_S esnek kümelerini ele alalım. d_S ve r_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen alt yarıgrup olduğu, Örnek 5.2'de gösterilmiştir. Fakat,

$$d_S \tilde{\cap} r_S = \{(s, \emptyset), (n, \emptyset), (v, \emptyset), (j, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

olduğundan, $d_S \tilde{\cap} r_S$ bir EK-hemen hemen alt yarıgrup değildir.

5.10. *Önerme* f_S , U üzerinde boş esnek kümeden farklı idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

İspat: f_S , U üzerinde boş esnek kümeden farklı idempotent bir esnek küme olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$. Buradan,

$$(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = f_S \tilde{\cap} f_S = f_S \neq \emptyset_S$$

olduğundan, f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

Şimdi, S yarı grubunun hemen hemen alt yarı grubu ile EK-hemen hemen alt yarı grubu arasındaki ilişki verilecektir.

5.11. *Teorem* A , S yarı grubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarı grubunun bir hemen hemen alt yarı grubu olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-hemen hemen alt yarı grup olmasıdır.

İspat: A , S yarı grubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, S yarı grubunun bir hemen hemen alt yarı grubu olsun. O halde, $AA \cap A \neq \emptyset$ yani, $k \in AA \cap A$ olacak şekilde en az bir $k \in S$ vardır. Buradan,

$$((S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A)(k) = (S_{AA} \tilde{\cap} S_A)(k) = S_{AA \cap A}(k) = U \neq \emptyset$$

olup, $(S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, S_A bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

Tersine, S_A bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olsun. O halde, $(S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$. Kabul gereği, $A \neq \emptyset$. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \emptyset_S \neq (S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A &\Rightarrow \exists q \in S; ((S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A)(q) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists q \in S; (S_{AA} \tilde{\cap} S_A)(q) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists q \in S; (S_{AA \cap A})(q) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists q \in S; (S_{AA \cap A})(q) = U \\ &\Rightarrow q \in AA \cap A \end{aligned}$$

olup, $AA \cap A \neq \emptyset$ elde edilir. Böylece, A, S yarıgrupunun bir hemen hemen alt yarıgrupudur.

5.12. *Örnek* Örnek 5.2’de verilen S yarıgrupunu ele alalım. $F = \{s, n\}$, S yarıgrupunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, F kümesinin S yarıgrupunun bir hemen hemen alt yarıgrubu olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Rutin hesaplamalarla, F kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu $S_F = \{(s, U), (n, U), (v, \emptyset), (j, \emptyset)\}$ ’nin bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olduğu gösterilebilir.

Tersine, $H = \{s, v, j\}$ kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olan f_S EK-hemen hemen alt yarıgrupunu $f_S = \{(s, U), (n, \emptyset), (v, U), (j, U)\}$ olarak alırsak, rutin hesaplamalarla $H = \{s, v, j\}$ kümesinin S yarıgrupunun bir hemen hemen alt yarıgrubu olduğu gösterilebilir.

5.13. Lemma f_S, U üzerinde bir esnek küme ve $S_{\text{supp}(f_S)}, \text{supp}(f_S)$ ’nin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, $f_S \cong S_{\text{supp}(f_S)}$.

İspat: f_S, U üzerinde bir esnek küme olsun. $\text{supp}(f_S)$ ’nin esnek karakteristik fonksiyonu,

$$S_{\text{supp}(f_S)}(x) = \begin{cases} \emptyset, & x \notin \text{supp}(f_S) \\ U, & x \in \text{supp}(f_S) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Öncelikle, $x \in \text{supp}(f_S)$ olsun. Buradan, $S_{\text{supp}(f_S)}(x) = U$ ve $f_S(x) \neq \emptyset$ olur. Böylece,

$$\emptyset \neq f_S(x) \subseteq S_{\text{supp}(f_S)}(x) = U$$

olup, $f_S \cong S_{\text{supp}(f_S)}$ elde edilir.

Şimdi, $x \notin \text{supp}(f_S)$ olsun. Bu durumda, $S_{\text{supp}(f_S)}(x) = \emptyset$ ve $f_S(x) = \emptyset$ olur. Buradan,

$$\emptyset = f_S(x) \subseteq S_{\text{supp}(f_S)}(x) = \emptyset$$

olup, $f_S \cong S_{\text{supp}(f_S)}$ elde edilir. Sonuç olarak, tüm durumlarda, $f_S \cong S_{\text{supp}(f_S)}$ sağlanır.

5.14. Teorem f_S , bir EK-hemen hemen alt yarıgrup ise $\text{supp}(f_S)$, S yarı grubunun bir hemen hemen alt yarı grubudur.

İspat: f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olsun. O halde, $(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. $\text{supp}(f_S)$ 'nin S yarı grubunun bir hemen hemen alt yarı grubu olduğunu göstermek için, Teorem 5.11'den, $S_{\text{supp}(f_S)}$ 'nin bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 5.13'ten,

$$(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \cong (S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)}$$

ve $(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)} \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, $S_{\text{supp}(f_S)}$, bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olup, Teorem 5.11'den, $\text{supp}(f_S)$, S yarı grubunun bir hemen hemen alt yarı grubudur.

Teorem 5.14'ün karşıtının genellikle doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

5.15. Örnek Örnek 5.2'deki t_S esnek kümesini ele alalım. $\text{supp}(t_S) = \{n, v\}$ olup,

$$\begin{aligned} [(\text{supp}(t_S))(\text{supp}(t_S))] \cap \text{supp}(t_S) &= [\{n, v\}\{n, v\}] \cap \{n, v\} = \{s, v, j\} \cap \{n, v\} \\ &= \{v\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\text{supp}(t_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen alt yarıgrubudur; fakat Örnek 5.2’de gösterildiği üzere t_S , bir EK-hemen hemen alt yarıgrup değildir.

5.16. Tanım f_S ve h_S , $h_S \cong f_S$ olacak şekilde, birer EK-hemen hemen alt yarıgrup olsun. $\text{supp}(h_S) = \text{supp}(f_S)$ ise f_S esnek kümesine, bir minimal EK-hemen hemen alt yarıgrup denir.

5.17. Teorem A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A ’nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen alt yarıgrubu olması için gerek ve yeter şart S_A ’nın bir minimal EK-hemen hemen alt yarıgrup olmasıdır.

İspat: A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen alt yarıgrubu olsun. O halde, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen alt yarıgrubudur ve Teorem 5.11’den, S_A bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur. $f_S \cong S_A$ olacak şekilde f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olsun. Teorem 5.14’ten, $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen alt yarıgrubudur ve Not 2.3.12’den ve Sonuç 2.3.17’den,

$$\text{supp}(f_S) \subseteq \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen alt yarıgrubu olduğundan, $\text{supp}(f_S) = \text{supp}(S_A) = A$ olup, böylece, Tanım 5.16’dan, S_A bir minimal EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

Tersine, S_A bir minimal EK-hemen hemen alt yarıgrup olsun. O halde, S_A bir EK-hemen hemen alt yarıgrup ve Teorem 5.11’den, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen alt yarıgrubudur. $B \subseteq A$ olacak şekilde B , S yarıgrubunun bir hemen hemen alt yarıgrubu olsun. Teorem 5.11’den, S_B bir EK-hemen hemen alt yarıgrup ve Teorem 2.3.18 (i)’den, $S_B \cong S_A$ olur. S_A bir minimal EK-hemen hemen alt yarıgrup olduğundan ve Sonuç 2.3.17’den,

$$B = \text{supp}(S_B) = \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. Böylece, A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen alt yarıgrubudur.

5.18. Tanım f_S , g_S ve h_S birer EK-hemen hemen alt yarıgrup olsun. Bu durumda, $h_S \circ g_S \cong f_S$ olması, $h_S \cong f_S$ veya $g_S \cong f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-asal hemen hemen alt yarıgrup denir.

5.19. Tanım f_S ve h_S birer EK-hemen hemen alt yarıgrup olsun. Bu durumda, $h_S \circ h_S \cong f_S$ olması, $h_S \cong f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-yarı asal hemen hemen alt yarıgrup denir.

5.20. Tanım f_S , g_S ve h_S birer EK-hemen hemen alt yarıgrup olsun. Bu durumda, $(h_S \circ g_S) \tilde{\cap} (g_S \circ h_S) \cong f_S$ olması, $h_S \cong f_S$ veya $g_S \cong f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-kuvvetli asal hemen hemen alt yarıgrup denir.

Her EK-kuvvetli asal hemen hemen alt yarıgrupun, bir EK-asal hemen hemen alt yarıgrup olduğu ve her EK-asal hemen hemen alt yarıgrupun, bir EK-yarı asal hemen hemen alt yarıgrup olduğu açıktır.

5.21. Teorem P , S yarıgrupunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-asal hemen hemen alt yarıgrup ise, P kümesi S yarıgrupunun bir asal hemen hemen alt yarıgrupudur.

İspat: S_P , bir EK-asal hemen hemen alt yarıgrup olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur ve Teorem 5.11'den, P , S yarıgrupunun bir hemen hemen alt yarıgrupudur. $AB \subseteq P$ olacak şekilde, A ve B , S yarıgrupunun birer hemen hemen alt yarıgrubu olsun. Bu durumda, Teorem 5.11'den, S_A ve S_B , birer EK-hemen hemen alt yarıgruptur ve Teorem 2.3.18 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_B = S_{AB} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-asal hemen hemen alt yarıgrup ve $S_A \circ S_B \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ veya $S_B \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrupunun bir asal hemen hemen alt yarıgrupudur.

5.22. Teorem P , S yarıgrupunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen alt yarıgrup ise P kümesi S yarıgrupunun bir yarı asal hemen hemen alt yarıgrupudur.

İspat: S_P , bir EK-yarı asal hemen hemen alt yarıgrup olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur ve Teorem 5.11'den, P, S yarı grubunun bir hemen hemen alt yarı grubudur. $AA \subseteq P$ olacak şekilde, A, S yarı grubunun bir hemen hemen alt yarı grubu olsun. Bu durumda, Teorem 5.11'den, S_A bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur ve Teorem 2.3.18 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_A = S_{AA} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen alt yarıgrup ve $S_A \circ S_A \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18 (i)'den, $A \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarı grubunun bir yarı asal hemen hemen alt yarı grubudur.

5.23. Teorem P, S yarı grubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen alt yarıgrup ise P kümesi S yarı grubunun bir kuvvetli asal hemen hemen alt yarı grubudur.

İspat: S_P , bir EK-kuvvetli asal hemen hemen alt yarıgrup olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur ve Teorem 5.11'den, P, S yarı grubunun bir hemen hemen alt yarı grubudur. $AB \cap BA \subseteq P$ olmak üzere, A ve B, S yarı grubunun birer hemen hemen alt yarı grubu olsun. Bu durumda, Teorem 5.11'den, S_A ve S_B birer EK-hemen hemen alt yarıgruptur ve Teorem 2.3.18'den, $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) = S_{AB} \tilde{\cap} S_{BA} = S_{AB \cap BA} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen alt yarıgrup ve $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ veya $S_B \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarı grubunun bir kuvvetli asal hemen hemen alt yarı grubudur.

6. YARIGRUBLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN İDEALLERİ

Bu bölüm, esnek kesişimsel hemen hemen idealler üzerine olup, bölümde Sezgin ve İlgin (2024b) çalışmasından elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

6.1. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S) \cap f_S \neq \emptyset_S$ ($(f_S \circ S_x) \cap f_S \neq \emptyset_S$) ise f_S esnek kümesine, S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) ideali denir. U üzerinde bir esnek küme, S yarıgrubunun hem esnek kesişimsel hemen hemen sol ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen idealidir denir.

Bundan sonra, S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol ideali kısaca “EK-hemen hemen sol ideal”; S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sağ ideali “EK-hemen hemen sağ ideal” ve S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen idealisi ise “EK-hemen hemen ideal” olarak gösterilecektir.

6.2. Örnek $S = \{\ell, g, n\}$ kümesi üzerinde, Tablo 6.1 yardımıyla tanımlanan “ $\diamond$ ” ikili işlemi ile $(S, \diamond)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\diamond$	ℓ	g	n
ℓ	ℓ	g	n
g	g	n	ℓ
n	n	ℓ	g

Tablo 6.1. Örnek 6.2’deki “ $\diamond$ ” ikili işlemi

$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}_4 \right\}$ evrensel kümesi üzerinde f_S ve h_S esnek kümeleri,

$$f_S = \left\{ \left(\ell, \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\} \right), \left(g, \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\} \right), \left(n, \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\} \right) \right\}$$

$$h_S = \{(\ell, \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right\}), (\varphi, \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}), (n, \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\})\}$$

şeklinde ve $U = D_3 = \{< x, y > : x^3 = y^2 = e, xy = yx^2\} = \{e, x, x^2, y, yx, yx^2\}$ evrensel kümesi üzerinde g_S esnek kümesi,

$$g_S = \{(\ell, \{e\}), (\varphi, \{x, x^2\}), (n, \{y, yx, yx^2\})\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada, f_S ve h_S birer EK-hemen hemen idealdir. Öncelikle, her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim.

S_ℓ ile başlayacak olursak:

$$\begin{aligned} [(S_\ell \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](\ell) &= (S_\ell \circ f_S)(\ell) \cap f_S(\ell) \\ &= [(S_\ell(\ell) \cap f_S(\ell)) \cup (S_\ell(\varphi) \cap f_S(n)) \cup (S_\ell(n) \cap f_S(\varphi))] \cap f_S(\ell) \\ &= f_S(\ell) = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(S_\ell \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](\varphi) &= (S_\ell \circ f_S)(\varphi) \cap f_S(\varphi) \\ &= [(S_\ell(\ell) \cap f_S(\varphi)) \cup (S_\ell(\varphi) \cap f_S(\ell)) \cup (S_\ell(n) \cap f_S(n))] \cap f_S(\varphi) \\ &= f_S(\varphi) = \left\{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(S_\ell \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](n) &= (S_\ell \circ f_S)(n) \cap f_S(n) \\ &= [(S_\ell(\ell) \cap f_S(n)) \cup (S_\ell(\varphi) \cap f_S(\varphi)) \cup (S_\ell(n) \cap f_S(\ell))] \cap f_S(n) \\ &= f_S(n) = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right\} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} (S_\ell \circ f_S) \tilde{\cap} f_S &= \{(\ell, \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}), (\varphi, \left\{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right\}), (n, \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right\})\} \\ &\neq \emptyset_S \end{aligned}$$

elde edilir. S_φ ile devam edecek olursak:

$$[(S_g \circ f_s) \tilde{\cap} f_s](\ell) = (S_g \circ f_s)(\ell) \cap f_s(\ell) = [(S_g(\ell) \cap f_s(\ell)) \cup (S_g(g) \cap f_s(n)) \cup (S_g(n) \cap f_s(g))] \cap f_s(\ell) = f_s(n) \cap f_s(\ell) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[(S_g \circ f_s) \tilde{\cap} f_s](g) = (S_g \circ f_s)(g) \cap f_s(g) = [(S_g(\ell) \cap f_s(g)) \cup (S_g(g) \cap f_s(\ell)) \cup (S_g(n) \cap f_s(n))] \cap f_s(g) = f_s(\ell) \cap f_s(g) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[(S_g \circ f_s) \tilde{\cap} f_s](n) = (S_g \circ f_s)(n) \cap f_s(n) = [(S_g(\ell) \cap f_s(n)) \cup (S_g(g) \cap f_s(g)) \cup (S_g(n) \cap f_s(\ell))] \cap f_s(n) = f_s(g) \cap f_s(n) = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

olduğundan,

$$(S_g \circ f_s) \tilde{\cap} f_s = \{(\ell, \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}), (g, \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}), (n, \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\})\} \neq \emptyset_s$$

elde edilir. S_n ile devam edecek olursak:

$$[(S_n \circ f_s) \tilde{\cap} f_s](\ell) = (S_n \circ f_s)(\ell) \cap f_s(\ell) = [(S_n(\ell) \cap f_s(\ell)) \cup (S_n(g) \cap f_s(n)) \cup (S_n(n) \cap f_s(g))] \cap f_s(\ell) = f_s(g) \cap f_s(\ell) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[(S_n \circ f_s) \tilde{\cap} f_s](g) = (S_n \circ f_s)(g) \cap f_s(g) = [(S_n(\ell) \cap f_s(g)) \cup (S_n(g) \cap f_s(\ell)) \cup (S_n(n) \cap f_s(n))] \cap f_s(g) = f_s(n) \cap f_s(g) = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[(S_n \circ f_s) \tilde{\cap} f_s](n) = (S_n \circ f_s)(n) \cap f_s(n) = [(S_n(\ell) \cap f_s(n)) \cup (S_n(g) \cap f_s(g)) \cup (S_n(n) \cap f_s(\ell))] \cap f_s(n) = f_s(\ell) \cap f_s(n) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

olduğundan,

$$(S_n \circ f_s) \tilde{\cap} f_s = \{(\ell, \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}), (g, \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}), (n, \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\})\} \neq \emptyset_s$$

elde edilir. Böylece, her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ sağlandığından, f_S bir EK-hemen hemen sol idealdir. Şimdi, her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim.

S_ℓ ile başlayacak olursak:

$$[(f_S \circ S_\ell) \tilde{\cap} f_S](\ell) = (f_S \circ S_\ell)(\ell) \cap f_S(\ell) = [(f_S(\ell) \cap S_\ell(\ell)) \cup (f_S(\varnothing) \cap S_\ell(n)) \cup (f_S(n) \cap S_\ell(\varnothing))] \cap f_S(\ell) = f_S(\ell) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[(f_S \circ S_\ell) \tilde{\cap} f_S](\varnothing) = (f_S \circ S_\ell)(\varnothing) \cap f_S(\varnothing) = [(f_S(\ell) \cap S_\ell(\varnothing)) \cup (f_S(\varnothing) \cap S_\ell(\ell)) \cup (f_S(n) \cap S_\ell(n))] \cap f_S(\varnothing) = f_S(\varnothing) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[(f_S \circ S_\ell) \tilde{\cap} f_S](n) = (f_S \circ S_\ell)(n) \cap f_S(n) = [(f_S(\ell) \cap S_\ell(n)) \cup (f_S(\varnothing) \cap S_\ell(\varnothing)) \cup (f_S(n) \cap S_\ell(\ell))] \cap f_S(n) = f_S(n) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_\ell) \tilde{\cap} f_S = \left\{ (\ell, \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}), (\varnothing, \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}), (n, \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}) \right\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. $S_\varnothing$ ile devam edecek olursak:

$$[(f_S \circ S_\varnothing) \tilde{\cap} f_S](\ell) = (f_S \circ S_\varnothing)(\ell) \cap f_S(\ell) = [(f_S(\ell) \cap S_\varnothing(\ell)) \cup (f_S(\varnothing) \cap S_\varnothing(n)) \cup (f_S(n) \cap S_\varnothing(\varnothing))] \cap f_S(\ell) = f_S(n) \cap f_S(\ell) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[(f_S \circ S_\varnothing) \tilde{\cap} f_S](\varnothing) = (f_S \circ S_\varnothing)(\varnothing) \cap f_S(\varnothing) = [(f_S(\ell) \cap S_\varnothing(\varnothing)) \cup (f_S(\varnothing) \cap S_\varnothing(\ell)) \cup (f_S(n) \cap S_\varnothing(n))] \cap f_S(\varnothing) = f_S(\ell) \cap f_S(\varnothing) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[(f_S \circ S_g) \tilde{\cap} f_S](n) = (f_S \circ S_g)(n) \cap f_S(n) = [(f_S(\ell) \cap S_g(n)) \cup (f_S(g) \cap S_g(g)) \cup (f_S(n) \cap S_g(\ell))] \cap f_S(n) = f_S(g) \cap f_S(n) = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_g) \tilde{\cap} f_S = \left\{ (\ell, \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}), (g, \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}), (n, \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}) \right\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. S_n ile devam edecek olursak:

$$[(f_S \circ S_n) \tilde{\cap} f_S](\ell) = (f_S \circ S_n)(\ell) \cap f_S(\ell) = [(f_S(\ell) \cap S_n(\ell)) \cup (f_S(g) \cap S_n(n)) \cup (f_S(n) \cap S_n(g))] \cap f_S(\ell) = f_S(g) \cap f_S(\ell) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\} \neq \emptyset$$

$$[(f_S \circ S_n) \tilde{\cap} f_S](g) = (f_S \circ S_n)(g) \cap f_S(g) = [(f_S(\ell) \cap S_n(g)) \cup (f_S(g) \cap S_n(\ell)) \cup (f_S(n) \cap S_n(n))] \cap f_S(g) = f_S(n) \cap f_S(g) = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\} \neq \emptyset$$

$$[(f_S \circ S_n) \tilde{\cap} f_S](n) = (f_S \circ S_n)(n) \cap f_S(n) = [(f_S(\ell) \cap S_n(n)) \cup (f_S(g) \cap S_n(g)) \cup (f_S(n) \cap S_n(\ell))] \cap f_S(n) = f_S(\ell) \cap f_S(n) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \neq \emptyset$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_n) \tilde{\cap} f_S = \left\{ (\ell, \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}), (g, \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}), (n, \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}) \right\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ sağlandığından, f_S bir EK-hemen hemen sağ idealdir. O halde, f_S bir EK-hemen hemen idealdir.

Benzer şekilde, h_S bir EK-hemen hemen idealdir. Gerçekten,

$$(S_\ell \circ h_S) \tilde{\cap} h_S = \left\{ (\ell, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}), (g, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}), (n, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}) \right\} \neq \emptyset_S$$

$$(S_{\varnothing} \circ h_S) \tilde{\cap} h_S = \{(\ell, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}), (\varnothing, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}), (n, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})\} \neq \emptyset_S$$

$$(S_n \circ h_S) \tilde{\cap} h_S = \{(\ell, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}), (\varnothing, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}), (n, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, h_S bir EK-hemen hemen sol idealdir. Ayrıca,

$$(h_S \circ S_{\ell}) \tilde{\cap} h_S = \{(\ell, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}), (\varnothing, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}), (n, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix})\} \\ \neq \emptyset_S$$

$$(h_S \circ S_{\varnothing}) \tilde{\cap} h_S = \{(\ell, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}), (\varnothing, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}), (n, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})\} \neq \emptyset_S$$

$$(h_S \circ S_n) \tilde{\cap} h_S = \{(\ell, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}), (\varnothing, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}), (n, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, h_S bir EK-hemen hemen sağ idealdir. Böylece, h_S bir EK-hemen hemen idealdir. Fakat, g_S ne bir EK-hemen hemen sol idealdir ne de bir EK-hemen hemen sağ idealdir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} [(S_{\varnothing} \circ g_S) \tilde{\cap} g_S](\ell) &= (S_{\varnothing} \circ g_S)(\ell) \cap g_S(\ell) \\ &= [(S_{\varnothing}(\ell) \cap g_S(\ell)) \cup (S_{\varnothing}(\varnothing) \cap g_S(n)) \cup (S_{\varnothing}(n) \cap g_S(\varnothing))] \cap g_S(\ell) \\ &= g_S(n) \cap g_S(\ell) = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(S_{\varnothing} \circ g_S) \tilde{\cap} g_S](\varnothing) &= (S_{\varnothing} \circ g_S)(\varnothing) \cap g_S(\varnothing) \\ &= [(S_{\varnothing}(\ell) \cap g_S(\varnothing)) \cup (S_{\varnothing}(\varnothing) \cap g_S(\ell)) \cup (S_{\varnothing}(n) \cap g_S(n))] \cap g_S(\varnothing) \\ &= g_S(\ell) \cap g_S(\varnothing) = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(S_{\varnothing} \circ g_S) \tilde{\cap} g_S](n) &= (S_{\varnothing} \circ g_S)(n) \cap g_S(n) \\ &= [(S_{\varnothing}(\ell) \cap g_S(n)) \cup (S_{\varnothing}(\varnothing) \cap g_S(\varnothing)) \cup (S_{\varnothing}(n) \cap g_S(\ell))] \cap g_S(n) \\ &= g_S(\varnothing) \cap g_S(n) = \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan, $g \in S$ için, $(S_g \circ g_S) \tilde{\cap} g_S = \{(\ell, \emptyset), (g, \emptyset), (n, \emptyset)\} = \emptyset_S$ elde edilir. O halde, g_S bir EK-hemen hemen sol ideal değildir. Benzer şekilde $n \in S$ için, $(g_S \circ S_n) \tilde{\cap} g_S = \{(\ell, \emptyset), (g, \emptyset), (n, \emptyset)\} = \emptyset_S$ elde edilir. O halde, g_S bir EK-hemen hemen sağ ideal değildir. Bu durumda, g_S esnek kümesinin bir EK-hemen hemen ideal olmadığı açıktır.

6.3. Önerme f_S , U üzerinde boş esnek kümeden farklı bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-sol (sağ) ideal ise bir EK-hemen hemen sol (sağ) idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , boş esnek kümeden farklı bir EK-sol ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ sağlanır. $f_S \neq \emptyset_S$ olmak üzere Lemma 2.3.22'den, $S_x \circ f_S \neq \emptyset_S$. Her $x \in S$ için, $S_x \circ f_S \subseteq \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olup buradan $S_x \circ f_S \subseteq f_S$ olduğundan,

$$(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = S_x \circ f_S \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, $(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olup, f_S bir EK-hemen hemen sol idealdir.

Burada, $\tilde{S} \circ \emptyset_S \subseteq \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ esnek kümesinin bir EK-sol ideal olduğu açıktır. Fakat, $(S_x \circ \emptyset_S) \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ esnek kümesi bir EK-hemen hemen sol ideal değildir.

6.4. Teorem f_S , U üzerinde boş esnek kümeden farklı bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-ideal ise bir EK-hemen hemen idealdir.

f_S , bir EK-hemen hemen ideal ise bir EK-ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

6.5. Örnek Örnek 6.2'de verilen f_S ve h_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve h_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen ideal olduğu, Örnek 6.2'de gösterilmiştir. Fakat, f_S ve h_S birer EK-ideal değildir. Gerçekten,

$$f_S(gg) = f_S(n) \not\subseteq f_S(g)$$

olduğundan, f_S ne bir EK-sol idealdir ne de bir EK-sağ idealdir. Bu durumda, f_S 'nin bir EK-ideal olmadığı açıktır. Benzer şekilde,

$$h_S(nn) = h_S(\varnothing) \not\subseteq h_S(n)$$

olduğundan, h_S ne bir EK-sol idealdir ne de bir EK-sağ idealdir. Bu durumda, h_S 'nin bir EK-ideal olmadığı açıktır.

6.6. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen sol (sağ) ideal ise f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir idempotent EK-hemen hemen sol ideal olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ ve her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \varnothing_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = [(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S] \tilde{\cap} f_S = [(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \subseteq (f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olup, $(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \varnothing_S$ olduğundan, $(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \varnothing_S$ elde edilir. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

6.7. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen ideal ise f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

6.8. Önerme f_S ve h_S , $f_S \subseteq h_S$ olacak şekilde, U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen sol (sağ) ideal ise h_S bir EK-hemen hemen sol (sağ) idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-hemen hemen sol ideal olsun. O halde, her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \varnothing_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği $f_S \subseteq h_S$ olduğundan,

$$(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \subseteq (S_x \circ h_S) \tilde{\cap} h_S$$

açıktır. Burada, $(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(S_x \circ h_S) \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, h_S bir EK-hemen hemen sol idealdir.

6.9. Teorem f_S ve h_S , $f_S \subseteq h_S$ olacak şekilde, U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen ideal ise h_S bir EK-hemen hemen idealdir.

6.10. Önerme f_S ve h_S , birer EK-hemen hemen sol (sağ) ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen sol (sağ) idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-hemen hemen sol ideal olsun. $f_S \subseteq f_S \tilde{\cup} h_S$ olup, Önerme 6.8'den, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen sol idealdir.

6.11. Teorem f_S ve h_S , birer EK-hemen hemen ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen idealdir.

6.12. Sonuç EK-hemen hemen ideallerin sonlu esnek birleşimleri de bir EK-hemen hemen idealdir.

6.13. Sonuç f_S ya da h_S bir EK-hemen hemen ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen idealdir.

Burada, f_S ve h_S birer EK-hemen hemen ideal iken, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-hemen hemen ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

6.14. Örnek Örnek 6.2'deki f_S ve h_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve h_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen ideal olduğu, Örnek 6.2'de gösterilmiştir. Fakat,

$$f_S \tilde{\cap} h_S = \{(\ell, \emptyset), (\varnothing, \emptyset), (n, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

olduğundan, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-hemen hemen ideal değildir.

Şimdi, S yarigrubunun hemen hemen ideali ile EK-hemen hemen ideali arasındaki ilişki verilecektir. Fakat öncelikle, Önerme 6.16'da kullanılmak üzere Lemma 6.15'i verelim.

6.15. Lemma Y , S yarigrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $x \in S$ olsun. S_x , x 'in esnek karakteristik fonksiyonu ve S_Y , Y 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, $S_x \circ S_Y = S_{xY}$.

İspat: $s \in xY$ olacak şekilde $s \in S$ olsun. Bu durumda, bazı $n \in Y$ için, $s = xn$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} (S_x \circ S_Y)(s) &= \bigcup_{s=xq} \{S_x(x) \cap S_Y(q)\} \\ &\supseteq S_x(x) \cap S_Y(n) \\ &= U \cap U \\ &= U \end{aligned}$$

olduğundan, $(S_x \circ S_Y)(s) = U$ elde edilir. $s = xn \in xY$ olduğundan, $S_{xY}(s) = U$. Böylece, $S_x \circ S_Y = S_{xY}$.

Diğer bir durumda, $s \notin xY$ olmak üzere $s \in S$ olsun. Bu durumda, bazı $m, n \in S$ için, $s = mn$ ise $m \neq x$ veya $n \notin Y$ olduğu bilinmektedir. Aşağıdaki denklemi göz önünde bulundurarak,

$$(S_x \circ S_Y)(s) = \bigcup_{s=mn} \{S_x(m) \cap S_Y(n)\};$$

Durum 1: $m \neq x$ ve $n \in Y$ olsun. O halde,

$$\bigcup_{s=mn} \{S_x(m) \cap S_Y(n)\} = \bigcup_{s=mn} \{\emptyset \cap U\} = \emptyset.$$

Durum 2: $m = x$ ve $n \notin Y$ olsun. O halde,

$$\bigcup_{s=mn} \{S_x(m) \cap S_Y(n)\} = \bigcup_{s=xn} \{U \cap \emptyset\} = \emptyset.$$

Durum 3: $m \neq x$ ve $n \notin Y$ olsun. O halde,

$$\bigcup_{s=mn} \{S_x(m) \cap S_Y(n)\} = \bigcup_{s=mn} \{\emptyset \cap \emptyset\} = \emptyset.$$

Tüm durumlarda, $s \notin xY$ olduğunda, $(S_x \circ S_Y)(s) = \emptyset$ elde edilir. Ayrıca, $s \notin xY$ olduğundan, $S_{xY}(s) = \emptyset$. Böylece, $S_x \circ S_Y = S_{xY}$.

Ayrıca, X, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $y \in S$ olduğunda, $S_X \circ S_Y = S_{XY}$ elde edileceği açıktır.

6.16. Önerme A, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A, A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-hemen hemen sol (sağ) ideal olmasıdır.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ ideal için de benzer şekilde yapılır. A, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol ideali olsun. O halde, her $x \in S$ için, $xA \cap A \neq \emptyset$ yani, $k \in xA \cap A$ olacak şekilde en az bir $k \in S$ vardır. Buradan,

$$((S_x \circ S_A) \tilde{\cap} S_A)(k) = (S_{xA} \tilde{\cap} S_A)(k) = (S_{xA \cap A})(k) = U \neq \emptyset$$

olup, $(S_x \circ S_A) \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, S_A bir EK-hemen hemen sol idealdir.

Tersine, S_A bir EK-hemen hemen sol ideal olsun. O halde her $x \in S$ için, $(S_x \circ S_A) \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği, $A \neq \emptyset$. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \emptyset_S \neq (S_x \circ S_A) \tilde{\cap} S_A &\Rightarrow \exists k \in S; ((S_x \circ S_A) \tilde{\cap} S_A)(k) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists k \in S; (S_{xA} \tilde{\cap} S_A)(k) \neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \exists k \in S; (S_{xA \cap A})(k) \neq \emptyset \\
&\Rightarrow \exists k \in S; (S_{xA \cap A})(k) = U \\
&\Rightarrow k \in xA \cap A
\end{aligned}$$

olup, $xA \cap A \neq \emptyset$ elde edilir. Böylece, A, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol idealidir.

6.17. Teorem A, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A, A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-hemen hemen ideal olmasıdır.

6.18. Örnek Örnek 6.2'de verilen S yarıgrubunu ele alalım. $J = \{\emptyset, n\}$, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, J kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Rutin hesaplamalarla, J kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu $S_J = \{(\ell, \emptyset), (\emptyset, U), (n, U)\}$ 'nin bir EK-hemen hemen ideal olduğu gösterilebilir.

Tersine, $K = \{\ell, \emptyset\}$ kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olan f_S EK-hemen hemen idealini $f_S = \{(\ell, U), (\emptyset, U), (n, \emptyset)\}$ olarak alırsak, rutin hesaplamalarla, $K = \{\ell, \emptyset\}$ kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen ideali olduğu gösterilebilir.

6.19. Önerme f_S , bir EK-hemen hemen sol (sağ) ideal ise $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) idealidir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-hemen hemen sol ideal olsun. O halde, $f_S \neq \emptyset_S$, $\text{supp}(f_S) \neq \emptyset$ ve her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. $\text{supp}(f_S)$ 'nin S yarıgrubunun bir hemen hemen sol ideali olduğunu göstermek için, Önerme 6.16'dan, $S_{\text{supp}(f_S)}$ 'nin bir EK-hemen hemen sol ideal olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 5.13'ten,

$$(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \subseteq (S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)}$$

ve $(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)} \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, $S_{\text{supp}(f_S)}$, bir EK-hemen hemen sol ideal olup, Önerme 6.16'dan, $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol idealidir.

6.20. Teorem f_S , bir EK-hemen hemen ideal ise $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen idealidir.

Teorem 6.20'nin karıştının genellikle doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

6.21. Örnek Örnek 6.2'deki g_S esnek kümesini ele alalım. $\text{supp}(g_S) = \{\ell, g, n\}$ olup,

$$[\{\ell\}\text{supp}(g_S)] \cap \text{supp}(g_S) = [\{\ell\}\{\ell, g, n\}] \cap \{\ell, g, n\} = \{\ell, g, n\} \neq \emptyset$$

$$[\{g\}\text{supp}(g_S)] \cap \text{supp}(g_S) = [\{g\}\{\ell, g, n\}] \cap \{\ell, g, n\} = \{\ell, g, n\} \neq \emptyset$$

$$[\{n\}\text{supp}(g_S)] \cap \text{supp}(g_S) = [\{n\}\{\ell, g, n\}] \cap \{\ell, g, n\} = \{\ell, g, n\} \neq \emptyset$$

elde edilir. Böylece, $\text{supp}(g_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol idealidir. Benzer şekilde,

$$[\text{supp}(g_S)\{\ell\}] \cap \text{supp}(g_S) = [\{\ell, g, n\}\{\ell\}] \cap \{\ell, g, n\} = \{\ell, g, n\} \neq \emptyset$$

$$[\text{supp}(g_S)\{g\}] \cap \text{supp}(g_S) = [\{\ell, g, n\}\{g\}] \cap \{\ell, g, n\} = \{\ell, g, n\} \neq \emptyset$$

$$[\text{supp}(g_S)\{n\}] \cap \text{supp}(g_S) = [\{\ell, g, n\}\{n\}] \cap \{\ell, g, n\} = \{\ell, g, n\} \neq \emptyset$$

olduğundan, $\text{supp}(g_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sağ idealidir. O halde $\text{supp}(g_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen idealidir. Fakat, Örnek 6.2'de gösterildiği üzere g_S , bir EK-hemen hemen ideal değildir.

6.22. Tanım f_S ve h_S , $h_S \cong f_S$ olacak şekilde, birer EK-hemen hemen sol (sağ) ideal olsun. $\text{supp}(h_S) = \text{supp}(f_S)$ ise f_S esnek kümesine, bir minimal EK-hemen hemen sol (sağ) ideal denir.

6.23. Önerme A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol (sağ) ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir minimal EK-hemen hemen sol (sağ) ideal olmasıdır.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ ideal için de benzer şekilde yapılır. A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol ideali olsun. O halde A , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol idealidir ve Önerme 6.16'dan, S_A bir EK-hemen hemen sol idealidir. $f_S \cong S_A$ olacak şekilde f_S bir EK-hemen hemen sol ideal olsun. Önerme 6.19'dan, $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol idealidir ve Not 2.3.12'den ve Sonuç 2.3.17'den,

$$\text{supp}(f_S) \subseteq \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol ideali olduğundan, $\text{supp}(f_S) = \text{supp}(S_A) = A$ olup, böylece, Tanım 6.22'den, S_A bir minimal EK-hemen hemen sol idealidir.

Tersine, S_A bir minimal EK-hemen hemen sol ideal olsun. O halde, S_A bir EK-hemen hemen sol ideal ve Önerme 6.16'dan, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol idealidir. $B \subseteq A$ olacak şekilde B , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol ideali olsun. Önerme 6.16'dan, S_B bir EK-hemen hemen sol idealidir ve Teorem 2.3.18 (i)'den, $S_B \cong S_A$ olur. S_A bir minimal EK-hemen hemen sol ideal olduğundan ve Sonuç 2.3.17'den,

$$B = \text{supp}(S_B) = \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. Böylece A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol idealidir.

6.24. Teorem A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir minimal EK-hemen hemen ideal olmasıdır.

6.25. Tanım f_S , g_S ve h_S birer EK-hemen hemen sol (sağ) ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ g_S \subseteq f_S$ olması, $h_S \subseteq f_S$ veya $g_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-asal hemen hemen sol (sağ) ideal denir.

6.26. Tanım f_S ve h_S birer EK-hemen hemen sol (sağ) ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ h_S \subseteq f_S$ olması, $h_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-yarı asal hemen hemen sol (sağ) ideal denir.

6.27. Tanım f_S , g_S ve h_S birer EK-hemen hemen sol (sağ) ideal olsun. Bu durumda, $(h_S \circ g_S) \cap (g_S \circ h_S) \subseteq f_S$ olması, $h_S \subseteq f_S$ veya $g_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) ideal denir.

Her EK-kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) idealin, bir EK-asal hemen hemen sol (sağ) ideal olduğu ve her EK-asal hemen hemen sol (sağ) idealin, bir EK-yarı asal hemen hemen sol (sağ) ideal olduğu açıktır.

6.28. Önerme P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-asal hemen hemen sol (sağ) ideal ise, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen sol (sağ) idealidir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ ideal için de benzer şekilde yapılır. S_P , bir EK-asal hemen hemen sol ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen sol idealdir ve Önerme 6.16'dan, P , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol idealidir. $AB \subseteq P$ olacak şekilde, A ve B , S yarıgrubunun birer hemen hemen sol ideali olsun. Bu durumda, Önerme 6.16'dan, S_A ve S_B , birer EK-hemen hemen sol idealdir ve Teorem 2.3.18 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_B = S_{AB} \subseteq S_P$ elde edilir. S_P bir EK-asal hemen hemen sol ideal ve $S_A \circ S_B \subseteq S_P$ olduğundan, $S_A \subseteq S_P$ veya $S_B \subseteq S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen sol idealidir.

6.29. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-asal hemen hemen ideal ise, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen idealidir.

6.30. Önerme P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen sol (sağ) ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen sol (sağ) idealidir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ ideal için de benzer şekilde yapılır. S_P , bir EK-yarı asal hemen hemen sol ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen sol idealdir ve Önerme 6.16'dan, P , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol idealidir. $AA \subseteq P$ olacak şekilde, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol ideali olsun. Bu durumda, Önerme 6.16'dan, S_A bir EK-hemen hemen sol idealdir ve Teorem 2.3.18 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_A = S_{AA} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen sol ideal ve $S_A \circ S_A \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18 (i)'den, $A \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen sol idealidir.

6.31. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen idealidir.

6.32. Önerme P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) idealidir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ ideal için de benzer şekilde yapılır. S_P , bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen sol idealdir ve Önerme 6.16'dan, P , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol idealidir. $AB \cap BA \subseteq P$ olmak üzere, A ve B , S yarıgrubunun birer hemen hemen sol ideali olsun. Bu durumda, Önerme 6.16'dan, S_A ve S_B birer EK-hemen hemen sol idealdir ve Teorem 2.3.18'den, $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) = S_{AB} \tilde{\cap} S_{BA} = S_{AB \cap BA} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol ideal ve $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ veya $S_B \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen sol idealidir.

6.33. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen idealidir.



7. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN ZAYIF-İÇ İDEALLERİ

Bu bölüm, esnek kesişimsel hemen hemen zayıf-iç idealler üzerine olup, bölümde Sezgin ve İlgin (2024c) çalışmasından elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

7.1. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S ((f_S \circ f_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S)$ ise f_S esnek kümesine, S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideali denir. U üzerinde bir esnek küme, S yarıgrubunun hem esnek kesişimsel hemen hemen sol zayıf-iç ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ zayıf-iç ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen zayıf-iç idealidir denir.

Bundan sonra, S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol zayıf-iç ideali kısaca “EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal”; S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sağ zayıf-iç ideali “EK-hemen hemen sağ zayıf-iç ideal” ve S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen zayıf-iç ideali ise “EK-hemen hemen zayıf-iç ideal” olarak gösterilecektir.

7.2. Örnek $S = \{h, y, t\}$ kümesi üzerinde, Tablo 7.1 yardımıyla tanımlanan “ $\odot$ ” ikili işlemi ile $(S, \odot)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\odot$	h	y	t
h	t	h	h
y	h	y	t
t	h	t	t

Tablo 7.1. Örnek 7.2’deki “ $\odot$ ” ikili işlemi

$U = S_3$ evrensel kümesi üzerinde f_S , h_S ve g_S esnek kümeleri,

$$f_S = \{(h, \{(1), (23)\}), (y, \{(23), (123)\}), (t, \{(12), (13), (132)\})\}$$

$$h_S = \{(\hbar, \{(12), (13)\}), (\psi, \{(13), (132)\}), (t, \{(1), (23), (123)\})\}$$

$$g_S = \{(\hbar, \{(13), (123), (132)\}), (\psi, \{(1), (12), (23)\}), (t, \emptyset)\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada, f_S ve h_S birer EK-hemen hemen zayıf-iç idealdir. Öncelikle, her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim.

$S_{\hbar}$ ile başlayacak olursak:

$$\begin{aligned} [(S_{\hbar} \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](\hbar) &= (S_{\hbar} \circ f_S \circ f_S)(\hbar) \cap f_S(\hbar) \\ &= [(S_{\hbar}(\hbar) \cap (f_S \circ f_S)(\psi)) \cup (S_{\hbar}(\hbar) \cap (f_S \circ f_S)(t))] \\ &\quad \cup (S_{\hbar}(\psi) \cap (f_S \circ f_S)(\hbar)) \cap (S_{\hbar}(t) \cap (f_S \circ f_S)(\hbar))] \cap f_S(\hbar) \\ &= [(f_S \circ f_S)(\psi) \cup (f_S \circ f_S)(t) \cup \emptyset \cup \emptyset] \cap f_S(\hbar) \\ &= [f_S(\psi) \cap f_S(\psi)] \\ &\quad \cup [(f_S(\hbar) \cap f_S(\hbar)) \cup (f_S(\psi) \cap f_S(t)) \cup (f_S(t) \cap f_S(\psi)) \\ &\quad \cup (f_S(t) \cap f_S(t))] \cap f_S(\hbar) = [f_S(\psi) \cup [f_S(\hbar) \cup f_S(t)]] \cap f_S(\hbar) \\ &= f_S(\hbar) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(S_{\hbar} \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](\psi) &= (S_{\hbar} \circ f_S \circ f_S)(\psi) \cap f_S(\psi) = [S_{\hbar}(\psi) \cap (f_S \circ f_S)(\psi)] \cap f_S(\psi) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(S_{\hbar} \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](t) &= (S_{\hbar} \circ f_S \circ f_S)(t) \cap f_S(t) \\ &= [(S_{\hbar}(\hbar) \cap (f_S \circ f_S)(\hbar)) \cup (S_{\hbar}(\psi) \cap (f_S \circ f_S)(t))] \\ &\quad \cup (S_{\hbar}(t) \cap (f_S \circ f_S)(\psi)) \cup (S_{\hbar}(t) \cap (f_S \circ f_S)(t))] \cap f_S(t) \\ &= [(f_S \circ f_S)(\hbar) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset] \cap f_S(t) \\ &= [(f_S(\hbar) \cap f_S(\psi)) \cup (f_S(\hbar) \cap f_S(t)) \cup (f_S(\psi) \cap f_S(\hbar)) \\ &\quad \cup (f_S(t) \cap f_S(\hbar))] \cap f_S(t) \\ &= [(f_S(\hbar) \cap f_S(\psi)) \cup (f_S(\hbar) \cap f_S(t))] \cap f_S(t) = \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan,

$$(S_h \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(\hbar, \{(1), (23)\}), (\psi, \emptyset), (t, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$(S_\psi \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(\hbar, \{(23)\}), (\psi, \{(23), (123)\}), (t, \{(12), (13), (132)\})\} \neq \emptyset_S$$

$$(S_t \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(\hbar, \{(23)\}), (\psi, \emptyset), (t, \{(12), (13), (132)\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ sağlandığından, f_S bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç idealdir. Şimdi, her $x \in S$ için, $(f_S \circ f_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim:

$$(f_S \circ f_S \circ S_h) \tilde{\cap} f_S = \{(\hbar, \{(1), (23)\}), (\psi, \emptyset), (t, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

$$(f_S \circ f_S \circ S_\psi) \tilde{\cap} f_S = \{(\hbar, \{(23)\}), (\psi, \{(23), (123)\}), (t, \{(12), (13), (132)\})\} \neq \emptyset_S$$

$$(f_S \circ f_S \circ S_t) \tilde{\cap} f_S = \{(\hbar, \{(23)\}), (\psi, \emptyset), (t, \{(12), (13), (132)\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, her $x \in S$ için, $(f_S \circ f_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ sağlanır. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen sağ zayıf-iç idealdir. O halde, f_S bir EK-hemen hemen zayıf-iç idealdir. Benzer şekilde, h_S bir EK-hemen hemen idealdir. Gerçekten,

$$(S_h \circ h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S = \{(\hbar, \{(12), (13)\}), (\psi, \emptyset), (t, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

$$(S_\psi \circ h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S = \{(\hbar, \{(13)\}), (\psi, \{(13), (132)\}), (t, \{(1), (23), (123)\})\} \neq \emptyset_S$$

$$(S_t \circ h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S = \{(\hbar, \{(13)\}), (\psi, \emptyset), (t, \{(1), (23), (123)\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, h_S bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç idealdir. Ayrıca,

$$(h_S \circ h_S \circ S_h) \tilde{\cap} h_S = \{(\hbar, \{(12), (13)\}), (\psi, \emptyset), (t, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

$$(h_S \circ h_S \circ S_\psi) \tilde{\cap} h_S = \{(\hbar, \{(13)\}), (\psi, \{(13), (132)\}), (t, \{(1), (23), (123)\})\} \neq \emptyset_S$$

$$(h_S \circ h_S \circ S_t) \tilde{\cap} h_S = \{(\hbar, \{(13)\}), (\psi, \emptyset), (t, \{(1), (23), (123)\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, h_S bir EK-hemen hemen sağ zayıf-iç idealdir. Böylece, h_S bir EK-hemen hemen zayıf-iç idealdir. Fakat, g_S ne bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç idealdir ne de bir EK-hemen hemen sağ zayıf-iç idealdir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} [(S_t \circ g_S \circ g_S) \tilde{\cap} g_S](\hbar) &= (S_t \circ g_S \circ g_S)(\hbar) \cap g_S(\hbar) \\ &= [S_t(\hbar) \cap (g_S \circ g_S)(\psi)] \cup [S_t(\hbar) \cap (g_S \circ g_S)(t)] \\ &\cup [S_t(\psi) \cap (g_S \circ g_S)(\hbar)] \cup [S_t(t) \cap (g_S \circ g_S)(\hbar)] \cap g_S(\hbar) \\ &= [\emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (g_S \circ g_S)(\hbar)] \cap g_S(\hbar) \\ &= [(g_S(\hbar) \cap g_S(\psi)) \cup (g_S(\hbar) \cap g_S(t)) \cup (g_S(\psi) \cap g_S(\hbar)) \\ &\cup (g_S(t) \cap g_S(\hbar))] \cap g_S(\hbar) \\ &= [(g_S(\hbar) \cap g_S(\psi)) \cup (g_S(\hbar) \cap g_S(t))] \cap g_S(\hbar) = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(S_t \circ g_S \circ g_S) \tilde{\cap} g_S](\psi) &= (S_t \circ g_S \circ g_S)(\psi) \cap g_S(\psi) \\ &= [S_t(\psi) \cap (g_S \circ g_S)(\psi)] \cap g_S(\psi) = \emptyset \end{aligned}$$

$$[(S_t \circ g_S \circ g_S) \tilde{\cap} g_S](t) = (S_t \circ g_S \circ g_S)(t) \cap g_S(t) = \emptyset$$

olduğundan, $t \in S$ için, $(S_t \circ g_S \circ g_S) \tilde{\cap} g_S = \{(\hbar, \emptyset), (\psi, \emptyset), (t, \emptyset)\} = \emptyset_S$ elde edilir. O halde, g_S bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal değildir. Benzer şekilde $t \in S$ için, $(g_S \circ g_S \circ S_t) \tilde{\cap} g_S = \{(\hbar, \emptyset), (\psi, \emptyset), (t, \emptyset)\} = \emptyset_S$ elde edilir. O halde, g_S bir EK-hemen hemen sağ zayıf-iç ideal değildir. Bu durumda, g_S esnek kümesinin bir EK-hemen hemen zayıf-iç ideal olmadığı açıktır.

7.3. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve $S_x \circ f_S \circ f_S \neq \emptyset_S$ ($f_S \circ f_S \circ S_x \neq \emptyset_S$) olsun. f_S , bir EK-sol (sağ) zayıf-iç ideal ise bir EK-hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ zayıf-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. $S_x \circ f_S \circ f_S \neq \emptyset_S$ ve f_S bir EK-sol zayıf-iç ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Her $x \in S$ için, $S_x \circ f_S \circ f_S \subseteq \tilde{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S$ olup, buradan, $S_x \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S$ olduğundan,

$$(S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = S_x \circ f_S \circ f_S \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, $(S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olup, f_S bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç idealdir.

Burada, $\tilde{S} \circ \emptyset_S \circ \emptyset_S \cong \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ esnek kümesinin bir EK-sol zayıf-iç ideal olduğu açıktır. Fakat, $(S_x \circ \emptyset_S \circ \emptyset_S) \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ esnek kümesi bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal değildir.

7.4. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme, $S_x \circ f_S \circ f_S \neq \emptyset_S$ ve $f_S \circ f_S \circ S_x \neq \emptyset_S$ olsun. f_S , bir EK-zayıf-iç ideal ise bir EK-hemen hemen zayıf-iç idealdir.

f_S , bir EK-hemen hemen zayıf-iç ideal ise bir EK-zayıf-iç ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

7.5. Örnek Örnek 7.2’de verilen f_S ve h_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve h_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen zayıf-iç ideal olduğu, Örnek 7.2’de gösterilmiştir. Fakat, f_S ve h_S birer EK-zayıf-iç ideal değildir. Gerçekten,

$$f_S(hhy) = f_S(t) \not\supseteq f_S(h) \cap f_S(y)$$

olduğundan, f_S bir EK-sol zayıf-iç ideal değildir. Ayrıca,

$$f_S(hhy) = f_S(t) \not\supseteq f_S(h) \cap f_S(h) = f_S(h)$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ zayıf-iç ideal değildir. Bu durumda, f_S ’nin bir EK-zayıf-iç ideal olmadığı açıktır. Benzer şekilde,

$$h_S(yhh) = h_S(t) \not\supseteq h_S(h) \cap h_S(h) = h_S(h)$$

olduğundan, h_S bir EK-sol zayıf-iç ideal değildir. Ayrıca,

$$h_S(yhh) = h_S(t) \not\supseteq h_S(y) \cap h_S(h)$$

olduğundan, h_S bir EK-sağ zayıf-iç ideal değildir. Bu durumda, h_S 'nin bir EK-zayıf-iç ideal olmadığı açıktır.

7.6. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal ise bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ zayıf-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir idempotent EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ ve her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\begin{aligned} (S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S &= [(S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S] \tilde{\cap} f_S \\ &= [(S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \cong (f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \end{aligned}$$

olup, $(S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

7.7. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen zayıf-iç ideal ise bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

7.8. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S 'nin bir EK-hemen hemen ideal olması için gerek ve yeter şart f_S 'nin bir EK-hemen hemen zayıf-iç ideal olmasıdır.

İspat: f_S , idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, $f_S \circ f_S = f_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği ve her $x \in S$ için,

$$\emptyset_S \neq (S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = (S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \text{ ve } \emptyset_S \neq (f_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S = (f_S \circ f_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S$$

olduğundan, ispat açıktır.

7.9. Önerme f_S ve h_S , $f_S \cong h_S$ olacak şekilde, U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal ise h_S bir EK-hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ zayıf-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal olsun. O halde, her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği $f_S \subseteq h_S$ olduğundan,

$$(S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \subseteq (S_x \circ h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S$$

açıktır. Burada, $(S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(S_x \circ h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, h_S bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç idealdir.

7.10. Teorem f_S ve h_S , $f_S \subseteq h_S$ olacak şekilde, U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen zayıf-iç ideal ise h_S bir EK-hemen hemen zayıf-iç idealdir.

7.11. Önerme f_S ve h_S , birer EK-hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ zayıf-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal olsun. $f_S \subseteq f_S \tilde{\cup} h_S$ olup, Önerme 7.9'dan, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç idealdir.

7.12. Teorem f_S ve h_S , birer EK-hemen hemen zayıf-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen zayıf-iç idealdir.

7.13. Sonuç EK-hemen hemen zayıf-iç ideallerin sonlu esnek birleşimleri de bir EK-hemen hemen zayıf-iç idealdir.

7.14. Sonuç f_S ya da h_S bir EK-hemen hemen zayıf-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen zayıf-iç idealdir.

Burada, f_S ve h_S birer EK-hemen hemen zayıf-iç ideal iken, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-hemen hemen zayıf-iç ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

7.15. *Örnek* Örnek 7.2'deki f_S ve h_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve h_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen zayıf-iç ideal olduğu, Örnek 7.2'de gösterilmiştir. Fakat,

$$f_S \tilde{\cap} h_S = \{(\kappa, \emptyset), (\psi, \emptyset), (\tau, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

olduğundan, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-hemen hemen zayıf-iç ideal değildir.

Şimdi, S yarıgrubunun hemen hemen zayıf-iç ideali ile EK-hemen hemen zayıf-iç ideali arasındaki ilişki verilecektir.

7.16. *Önerme* A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal olmasıdır.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ zayıf-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol zayıf-iç ideali olsun. O halde, her $x \in S$ için, $xAA \cap A \neq \emptyset$ yani, $j \in xAA \cap A$ olacak şekilde en az bir $j \in S$ vardır. Buradan,

$$((S_x \circ S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A)(j) = (S_{xAA} \tilde{\cap} S_A)(j) = (S_{xAA \cap A})(j) = U \neq \emptyset$$

olup, $(S_x \circ S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, S_A bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç idealdir.

Tersine, S_A bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal olsun. O halde, her $x \in S$ için, $(S_x \circ S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği, $A \neq \emptyset$. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \emptyset_S \neq (S_x \circ S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A &\Rightarrow \exists n \in S ; ((S_x \circ S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A)(n) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists n \in S ; (S_{xAA} \tilde{\cap} S_A)(n) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists n \in S ; (S_{xAA \cap A})(n) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists n \in S ; (S_{xAA \cap A})(n) = U \\ &\Rightarrow n \in xAA \cap A \end{aligned}$$

olup, $xAA \cap A \neq \emptyset$ elde edilir. Böylece, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol zayıf-iç idealidir.

7.17. Teorem A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen zayıf-iç ideal olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-hemen hemen zayıf-iç ideal olmasıdır.

7.18. Örnek Örnek 7.2'de verilen S yarıgrubunu ele alalım. $L = \{\hbar, \tau\}$, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, L kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen zayıf-iç ideal olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Rutin hesaplamalarla, L kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu $S_L = \{(\hbar, U), (\psi, \emptyset), (\tau, U)\}$ 'nin bir EK-hemen hemen zayıf-iç ideal olduğu gösterilebilir.

Tersine, $M = \{\hbar, \psi\}$ kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olan f_S EK-hemen hemen zayıf-iç idealini $f_S = \{(\hbar, U), (\psi, U), (\tau, \emptyset)\}$ olarak alırsak, rutin hesaplamalarla, $M = \{\hbar, \psi\}$ kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen zayıf-iç ideal olduğu gösterilebilir.

7.19. Önerme f_S , bir EK-hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal ise $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç idealidir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ zayıf-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal olsun. O halde, $f_S \neq \emptyset_S$, $\text{supp}(f_S) \neq \emptyset$ ve her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. $\text{supp}(f_S)$ 'nin S yarıgrubunun bir hemen hemen sol zayıf-iç ideal olduğunu göstermek için, Önerme 7.16'dan, $S_{\text{supp}(f_S)}$ 'nin bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 5.13'ten,

$$(S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \tilde{\subseteq} (S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)}$$

ve $(S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)} \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, $S_{\text{supp}(f_S)}$, bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal olup, Önerme 7.16'dan, $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol zayıf-iç idealidir.

7.20. Teorem f_S , bir EK-hemen hemen zayıf-iç ideal ise $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen zayıf-iç idealidir.

Teorem 7.20'nin karşısının genellikle doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

7.21. Örnek Örnek 7.2'deki g_S esnek kümesini ele alalım. $\text{supp}(g_S) = \{h, y\}$ olup,

$$[\{h\}\text{supp}(g_S)\text{supp}(g_S)] \cap \text{supp}(g_S) = [\{h\}\{h, y\}\{h, y\}] \cap \{h, y\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[\{y\}\text{supp}(g_S)\text{supp}(g_S)] \cap \text{supp}(g_S) = [\{y\}\{h, y\}\{h, y\}] \cap \{h, y\} = \{h, y\} \neq \emptyset$$

$$[\{t\}\text{supp}(g_S)\text{supp}(g_S)] \cap \text{supp}(g_S) = [\{t\}\{h, y\}\{h, y\}] \cap \{h, y\} = \{h\} \neq \emptyset$$

elde edilir. Böylece, $\text{supp}(g_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol zayıf-iç idealidir. Benzer şekilde,

$$[\text{supp}(g_S)\text{supp}(g_S)\{h\}] \cap \text{supp}(g_S) = [\{h, y\}\{h, y\}\{h\}] \cap \{h, y\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[\text{supp}(g_S)\text{supp}(g_S)\{y\}] \cap \text{supp}(g_S) = [\{h, y\}\{h, y\}\{y\}] \cap \{h, y\} = \{h, y\} \neq \emptyset$$

$$[\text{supp}(g_S)\text{supp}(g_S)\{t\}] \cap \text{supp}(g_S) = [\{h, y\}\{h, y\}\{t\}] \cap \{h, y\} = \{h\} \neq \emptyset$$

olduğundan, $\text{supp}(g_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sağ zayıf-iç idealidir. O halde, $\text{supp}(g_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen zayıf-iç idealidir. Fakat, Örnek 7.2'de gösterildiği üzere g_S , bir EK-hemen hemen zayıf-iç ideal değildir.

7.22. Tanım f_S ve h_S , $h_S \subseteq f_S$ olacak şekilde, birer EK-hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal olsun. $\text{supp}(h_S) = \text{supp}(f_S)$ ise f_S esnek kümesine, bir minimal EK-hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal denir.

7.23. Önerme A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir minimal hemen

hemen sol (sağ) zayıf-iç ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir minimal EK-hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal olmasıdır.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ zayıf-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. A, S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol zayıf-iç ideali olsun. O halde, A, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol zayıf-iç idealidir ve Önerme 7.16'dan, S_A bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç idealidir. $f_S \cong S_A$ olacak şekilde f_S bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal olsun. Önerme 7.19'dan, $\text{supp}(f_S), S$ yarıgrubunun bir hemen hemen sol zayıf-iç idealidir ve Not 2.3.12'den ve Sonuç 2.3.17'den,

$$\text{supp}(f_S) \subseteq \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. A, S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol zayıf-iç ideali olduğundan, $\text{supp}(f_S) = \text{supp}(S_A) = A$ olup, böylece, Tanım 7.22'den, S_A bir minimal EK-hemen hemen sol zayıf-iç idealidir.

Tersine, S_A bir minimal EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal olsun. O halde, S_A bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal ve Önerme 7.16'dan A, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol zayıf-iç idealidir. $B \subseteq A$ olacak şekilde B, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol zayıf-iç ideali olsun. Önerme 7.16'dan, S_B bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç idealidir ve Teorem 2.3.18 (i)'den, $S_B \cong S_A$ olur. S_A bir minimal EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal olduğundan ve Sonuç 2.3.17'den,

$$B = \text{supp}(S_B) = \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. Böylece, A, S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol zayıf-iç idealidir.

7.24. Teorem A, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A, A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen zayıf-iç ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir minimal EK-hemen hemen zayıf-iç ideal olmasıdır.

7.25. Tanım f_S, g_S ve h_S birer EK-hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ g_S \subseteq f_S$ olması, $h_S \subseteq f_S$ veya $g_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-asal hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal denir.

7.26. Tanım f_S ve h_S birer EK-hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ h_S \subseteq f_S$ olması, $h_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-yarı asal hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal denir.

7.27. Tanım f_S, g_S ve h_S birer EK-hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal olsun. Bu durumda, $(h_S \circ g_S) \cap (g_S \circ h_S) \subseteq f_S$ olması, $h_S \subseteq f_S$ veya $g_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal denir.

Her EK-kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç idealin, bir EK-asal hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal olduğu ve her EK-asal hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç idealin, bir EK-yarı asal hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal olduğu açıktır.

7.28. Önerme P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-asal hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal ise, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç idealidir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ zayıf-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. S_P , bir EK-asal hemen hemen sol zayıf-iç ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç idealdir ve Önerme 7.16'dan P, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol zayıf-iç idealidir. $AB \subseteq P$ olacak şekilde, A ve B, S yarıgrubunun birer hemen hemen sol zayıf-iç ideali olsun. Bu durumda, Önerme 7.16'dan, S_A ve S_B , birer EK-hemen hemen sol zayıf-iç idealdir ve Teorem 2.3.18 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_B = S_{AB} \subseteq S_P$ elde edilir. S_P bir EK-asal hemen hemen sol zayıf-iç ideal ve $S_A \circ S_B \subseteq S_P$ olduğundan, $S_A \subseteq S_P$ veya $S_B \subseteq S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen sol zayıf-iç idealidir.

7.29. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-asal hemen hemen zayıf-iç ideal ise, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen zayıf-iç idealidir.

7.30. Önerme P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç idealidir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ zayıf-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. S_P , bir EK-yarı asal hemen hemen sol zayıf-iç ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç idealdir ve Önerme 7.16'dan, P , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol zayıf-iç idealidir. $AA \subseteq P$ olacak şekilde, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol zayıf-iç ideali olsun. Bu durumda, Önerme 7.16'dan, S_A bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç idealdir ve Teorem 2.3.18 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_A = S_{AA} \subseteq S_P$ elde edilir. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen sol zayıf-iç ideal ve $S_A \circ S_A \subseteq S_P$ olduğundan, $S_A \subseteq S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18 (i)'den, $A \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen sol zayıf-iç idealidir.

7.31. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen zayıf-iç ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen zayıf-iç idealidir.

7.32. Önerme P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç idealidir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol zayıf-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ zayıf-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. S_P , bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol zayıf-iç ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç idealdir ve Önerme 7.16'dan, P , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol zayıf-iç idealidir. $AB \cap BA \subseteq P$ olmak üzere, A ve B , S yarıgrubunun birer hemen hemen sol zayıf-iç ideali olsun. Bu durumda, Önerme 7.16'dan, S_A ve S_B birer EK-hemen hemen sol zayıf-iç idealdir ve Teorem 2.3.18'den, $(S_A \circ S_B) \cap (S_B \circ S_A) = S_{AB} \cap S_{BA} = S_{AB \cap BA} \subseteq S_P$ elde edilir. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol zayıf-iç ideal ve $(S_A \circ S_B) \cap (S_B \circ S_A) \subseteq S_P$ olduğundan, $S_A \subseteq S_P$ veya

$S_B \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen sol zayıf-iç idealidir.

7.33. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen zayıf-iç ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen zayıf-iç idealidir.



8. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN Bİ-İÇ İDEALLERİ

Bu bölüm, esnek kesişimsel hemen hemen bi-iç idealler üzerine olup, bölümde Sezgin ve İlgin (2024d) çalışmasından elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

8.1. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x, y, z \in S$ için,

(1) $[(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ise f_S esnek kümesine, S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-iç ideali denir.

(2) $[(S_x \circ f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (f_S \circ S_x \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ise f_S esnek kümesine, S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen bi-iç ideali denir.

Bundan sonra, S yarıgrubunun U üzerinde esnek kesişimsel hemen hemen bi-iç ideali kısaca “EK-hemen hemen bi-iç ideal” ve S yarıgrubunun U üzerinde esnek kesişimsel zayıf hemen hemen bi-iç ideali kısaca “EK-zayıf hemen hemen bi-iç ideal” olarak gösterilecektir.

Ayrıca, esnek kesişim işleminin $S_E(U)$ ’da değişmeli olması nedeniyle, Tanım 8.1’de her $x, y, z \in S$ için $(S_x \circ f_S \circ S_y)$ ve $(f_S \circ S_z \circ f_S)$ ’nin birbiriyle değişebileceği açıktır.

8.2. Örnek $S = \{i, a\}$ kümesi üzerinde Tablo 8.1 yardımıyla tanımlanan ‘ $\oplus$ ’ ikili işlemi ile $(S, \oplus)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\oplus$	i	a
i	a	i
a	i	a

Tablo 8.1 Örnek 8.2’deki ‘ $\oplus$ ’ ikili işlemi

$U = \mathbb{Q}'$ evrensel kümesi üzerinde $\mathcal{B}_S$, $\mathcal{L}_S$ ve $\mathcal{G}_S$ esnek kümeleri,

$$\mathcal{B}_S = \{(i, \{e, \pi, \varphi\}), (a, \{\sqrt{2}, \log 2, e\})\}$$

$$\ell_S = \{(i, \{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \log 2\}), (a, \{\pi, \sqrt{3}, \sqrt{5}\})\}$$

$$\vartheta_S = \{(i, \emptyset), (a, \{e, \pi, \varphi\})\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada, ℓ_S ve ℓ_S birer EK-hemen hemen bi-iç idealdir. Öncelikle, her $x, y, z \in S$ için, $[(S_x \circ \ell_S \circ S_y) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_z \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim:

$[(S_i \circ \ell_S \circ S_i) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_i \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S$ ile başlayacak olursak:

$$\begin{aligned} [(S_i \circ \ell_S \circ S_i) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_i \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S(i) &= [(S_i \circ \ell_S \circ S_i) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_i \circ \ell_S)](i) \cap \ell_S(i) \\ &= (S_i \circ \ell_S \circ S_i)(i) \cap (\ell_S \circ S_i \circ \ell_S)(i) \cap \ell_S(i) \\ &= \ell_S(i) \cap [\ell_S(i) \cup \ell_S(a)] \cap \ell_S(i) = \ell_S(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(S_i \circ \ell_S \circ S_i) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_i \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S(a) &= [(S_i \circ \ell_S \circ S_i) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_i \circ \ell_S)](a) \cap \ell_S(a) \\ &= (S_i \circ \ell_S \circ S_i)(a) \cap (\ell_S \circ S_i \circ \ell_S)(a) \cap \ell_S(a) \\ &= \ell_S(a) \cap [\ell_S(a) \cap \ell_S(i)] \cap \ell_S(a) = \ell_S(a) \cap \ell_S(i) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$[(S_i \circ \ell_S \circ S_i) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_i \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S = \{(i, \{e, \pi, \varphi\}), (a, \{e\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$[(S_i \circ \ell_S \circ S_i) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_a \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S = \{(i, \{e\}), (a, \{\sqrt{2}, \log 2, e\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_i \circ \ell_S \circ S_a) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_i \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S = \{(i, \{e\}), (a, \{e\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_i \circ \ell_S \circ S_a) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_a \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S = \{(i, \{e\}), (a, \{e\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_a \circ \ell_S \circ S_a) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_a \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S = \{(i, \{e\}), (a, \{\sqrt{2}, \log 2, e\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_a \circ \mathcal{L}_S \circ S_a) \tilde{\cap} (\mathcal{L}_S \circ S_i \circ \mathcal{L}_S)] \tilde{\cap} \mathcal{L}_S = \{(i, \{e, \pi, \varphi\}), (a, \{e\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_a \circ \mathcal{L}_S \circ S_i) \tilde{\cap} (\mathcal{L}_S \circ S_a \circ \mathcal{L}_S)] \tilde{\cap} \mathcal{L}_S = \{(i, \{e\}), (a, \{e\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_a \circ \mathcal{L}_S \circ S_i) \tilde{\cap} (\mathcal{L}_S \circ S_i \circ \mathcal{L}_S)] \tilde{\cap} \mathcal{L}_S = \{(i, \{e\}), (a, \{e\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. O halde, her $x, y, z \in S$ için, $[(S_x \circ \mathcal{L}_S \circ S_y) \tilde{\cap} (\mathcal{L}_S \circ S_z \circ \mathcal{L}_S)] \tilde{\cap} \mathcal{L}_S \neq \emptyset_S$. Böylece, $\mathcal{L}_S$ bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir. Benzer şekilde, ℓ_S bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir. Gerçekten,

$$[(S_i \circ \ell_S \circ S_i) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_i \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S = \{(i, \{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \log 2\}), (a, \{\sqrt{5}\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_i \circ \ell_S \circ S_i) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_a \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S = \{(i, \{\sqrt{5}\}), (a, \{\pi, \sqrt{3}, \sqrt{5}\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_i \circ \ell_S \circ S_a) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_i \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S = \{(i, \{\sqrt{5}\}), (a, \{\sqrt{5}\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_i \circ \ell_S \circ S_a) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_a \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S = \{(i, \{\sqrt{5}\}), (a, \{\sqrt{5}\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_a \circ \ell_S \circ S_a) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_a \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S = \{(i, \{\sqrt{5}\}), (a, \{\pi, \sqrt{3}, \sqrt{5}\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_a \circ \ell_S \circ S_a) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_i \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S = \{(i, \{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \log 2\}), (a, \{\sqrt{5}\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_a \circ \ell_S \circ S_i) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_a \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S = \{(i, \{\sqrt{5}\}), (a, \{\sqrt{5}\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_a \circ \ell_S \circ S_i) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_i \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S = \{(i, \{\sqrt{5}\}), (a, \{\sqrt{5}\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, her $x, y, z \in S$ için, $[(S_x \circ \ell_S \circ S_y) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_z \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S \neq \emptyset_S$. Böylece, ℓ_S bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir. Fakat, $\mathcal{L}_S$ bir EK-hemen hemen bi-iç ideal değildir. Gerçekten,

$$[(S_i \circ \vartheta_S \circ S_a) \tilde{\cap} (\vartheta_S \circ S_i \circ \vartheta_S)] \tilde{\cap} \vartheta_S(i) = [(S_i \circ \vartheta_S \circ S_a) \tilde{\cap} (\vartheta_S \circ S_i \circ \vartheta_S)](i) \cap \vartheta_S(i) \\ = \emptyset$$

$$[(S_i \circ \vartheta_S \circ S_a) \tilde{\cap} (\vartheta_S \circ S_i \circ \vartheta_S)] \tilde{\cap} \vartheta_S(a) \\ = [(S_i \circ \vartheta_S \circ S_a) \tilde{\cap} (\vartheta_S \circ S_i \circ \vartheta_S)](a) \cap \vartheta_S(a) \\ = (S_i \circ \vartheta_S \circ S_a)(a) \cap (\vartheta_S \circ S_i \circ \vartheta_S)(a) \cap \vartheta_S(a) \\ = \vartheta_S(i) \cap [\vartheta_S(i) \cap \vartheta_S(a)] \cap \vartheta_S(a) = \emptyset$$

olduğundan,

$$[(S_i \circ \vartheta_S \circ S_a) \tilde{\cap} (\vartheta_S \circ S_i \circ \vartheta_S)] \tilde{\cap} \vartheta_S = \{(i, \emptyset), (a, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

elde edilir. O halde, ϑ_S bir EK-hemen hemen bi-iç ideal değildir.

Burada ayrıca, ϑ_S ve ℓ_S birer EK-zayıf hemen hemen bi-iç idealdir. Öncelikle, ϑ_S 'nin bir EK-zayıf hemen hemen bi-iç ideal olduğunu, yani her $x \in S$ için, $[(S_x \circ \vartheta_S \circ S_x) \tilde{\cap} (\vartheta_S \circ S_x \circ \vartheta_S)] \tilde{\cap} \vartheta_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim:

$$[(S_i \circ \vartheta_S \circ S_i) \tilde{\cap} (\vartheta_S \circ S_i \circ \vartheta_S)] \tilde{\cap} \vartheta_S = \{(i, \{e, \pi, \varphi\}), (a, \{e\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_a \circ \vartheta_S \circ S_a) \tilde{\cap} (\vartheta_S \circ S_a \circ \vartheta_S)] \tilde{\cap} \vartheta_S = \{(i, \{e\}), (a, \{\sqrt{2}, \log 2, e\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, ϑ_S bir EK-zayıf hemen hemen bi-iç idealdir. Benzer şekilde, ℓ_S bir EK-zayıf hemen hemen bi-iç idealdir. Gerçekten,

$$[(S_i \circ \ell_S \circ S_i) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_i \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S = \{(i, \{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \log 2\}), (a, \{\sqrt{5}\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_a \circ \ell_S \circ S_a) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_a \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S = \{(i, \{\sqrt{5}\}), (a, \{\pi, \sqrt{3}, \sqrt{5}\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, her $x \in S$ için $[(S_x \circ \ell_S \circ S_x) \tilde{\cap} (\ell_S \circ S_x \circ \ell_S)] \tilde{\cap} \ell_S \neq \emptyset_S$. Böylece, ℓ_S bir EK-zayıf hemen hemen bi-iç idealdir. Fakat, ϑ_S bir EK-zayıf hemen hemen bi-iç ideal değildir. Gerçekten,

$$[(S_i \circ g_S \circ S_i) \tilde{\cap} (g_S \circ S_i \circ g_S)] \tilde{\cap} g_S(i) = [(S_i \circ g_S \circ S_i) \tilde{\cap} (g_S \circ S_i \circ g_S)](i) \cap g_S(i) \\ = \emptyset$$

$$[(S_i \circ g_S \circ S_i) \tilde{\cap} (g_S \circ S_i \circ g_S)] \tilde{\cap} g_S(a) \\ = [(S_i \circ g_S \circ S_i) \tilde{\cap} (g_S \circ S_i \circ g_S)](a) \cap g_S(a) \\ = (S_i \circ g_S \circ S_i)(a) \cap (g_S \circ S_i \circ g_S)(a) \cap g_S(a) \\ = g_S(a) \cap [g_S(i) \cap g_S(a)] \cap g_S(a) = \emptyset$$

olduğundan,

$$[(S_i \circ g_S \circ S_i) \tilde{\cap} (g_S \circ S_i \circ g_S)] \tilde{\cap} g_S = \{(i, \emptyset), (a, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

elde edilir. O halde, g_S bir EK-zayıf hemen hemen bi-iç ideal değildir.

8.3. Önerme Her EK-hemen hemen bi-iç ideal, bir EK-zayıf hemen hemen bi-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. O halde, her $x, y, z \in S$ için, $[(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan, her $x \in S$ için,

$$[(S_x \circ f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (f_S \circ S_x \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$$

açıktır. Böylece, f_S bir EK-zayıf hemen hemen bi-iç idealdir.

EK-zayıf hemen hemen bi-iç ideal, EK-hemen hemen bi-iç idealin genellemesi olduğundan, bundan sonra tüm teoremler ve ispatlar EK-zayıf hemen hemen bi-iç ideal yerine EK-hemen hemen bi-iç ideal için verilecektir.

Önerme 8.3'ün karşıtının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

8.4. Örnek Örnek 8.2'de verilen S yarıgrubunu ele alalım. $U = \mathbb{Z}^+$ evrensel kümesi üzerinde q_S esnek kümesi, $q_S = \{(i, \{1\}), (a, \{4\})\}$ şeklinde tanımlansın. Burada, q_S esnek kümesi bir EK-zayıf hemen hemen bi-iç idealdir. Gerçekten,

$$[(S_i \circ q_S \circ S_i) \tilde{\cap} (q_S \circ S_i \circ q_S)] \tilde{\cap} q_S = \{(i, \{1\}), (a, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_a \circ q_S \circ S_a) \tilde{\cap} (q_S \circ S_a \circ q_S)] \tilde{\cap} q_S = \{(i, \emptyset), (a, \{4\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, q_S bir EK-zayıf hemen hemen bi-iç idealdir. Fakat,

$$[(S_i \circ q_S \circ S_a) \tilde{\cap} (q_S \circ S_i \circ q_S)] \tilde{\cap} q_S = \{(i, \emptyset), (a, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

olduğundan, q_S bir EK-hemen hemen bi-iç ideal değildir.

8.5. Önerme f_S , bir EK-bi-iç ideal olsun. Bu durumda, ya bazı $x, y, z \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S) = \emptyset_S$ ya da f_S bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-bi-iç ideal ve $x, y, z \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S) \neq \emptyset_S$ olsun. Bu durumda, $(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S) \cong (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong f_S$$

olduğundan, $(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S) \cong f_S$ elde edilir. Kabul gereği, $(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S) \neq \emptyset_S$. O halde,

$$[(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = (S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S) \neq \emptyset_S$$

olduğundan, f_S bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir.

Ayrıca, f_S bir EK-bi-iç ideal ve bazı $x, y \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S) = \emptyset_S$ olsun. Bu durumda,

$$[(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = \emptyset_S \tilde{\cap} f_S = \emptyset_S$$

olduğundan, f_S 'nin bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olmadığı açıktır.

Burada, $(\tilde{S} \circ \emptyset_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\emptyset_S \circ \tilde{S} \circ \emptyset_S) \subseteq \emptyset_S \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S \subseteq \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ bir EK-bi-iç idealdir. Fakat, $[(S_x \circ \emptyset_S \circ S_y) \tilde{\cap} (\emptyset_S \circ S_z \circ \emptyset_S)] \tilde{\cap} \emptyset_S = [\emptyset_S \tilde{\cap} \emptyset_S] \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ bir EK-hemen hemen bi-iç ideal değildir.

8.6. *Sonuç* f_S bir EK-hemen hemen bi-iç ideal ise bir EK-bi-iç ideal olmak zorunda değildir.

8.7. *Örnek* Örnek 8.2’de verilen $\mathcal{B}_S$ ve $\mathcal{L}_S$ esnek kümelerini ele alalım. $\mathcal{B}_S$ ve $\mathcal{L}_S$ esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen bi-iç ideal olduğu Örnek 8.2’de gösterilmiştir. Fakat $\mathcal{B}_S$ ve $\mathcal{L}_S$ birer EK-bi-iç ideal değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} & [(\tilde{S} \circ \mathcal{B}_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\mathcal{B}_S \circ \tilde{S} \circ \mathcal{B}_S)](i) \\ &= [(\tilde{S}(i) \cap (\mathcal{B}_S \circ \tilde{S})(a)) \cup (\tilde{S}(a) \cap (\mathcal{B}_S \circ \tilde{S})(i))] \\ & \cap [(\mathcal{B}_S(i) \cap (\tilde{S} \circ \mathcal{B}_S)(a)) \cup (\mathcal{B}_S(a) \cap (\tilde{S} \circ \mathcal{B}_S)(i))] \\ &= [\mathcal{B}_S(i) \cup \mathcal{B}_S(a)] \cap [\mathcal{B}_S(i) \cup \mathcal{B}_S(a)] = \mathcal{B}_S(i) \cup \mathcal{B}_S(a) \not\subseteq \mathcal{B}_S(i) \end{aligned}$$

olduğundan, $\mathcal{B}_S$ bir EK-bi-iç ideal değildir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} & [(\tilde{S} \circ \mathcal{L}_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\mathcal{L}_S \circ \tilde{S} \circ \mathcal{L}_S)](a) \\ &= [(\tilde{S}(i) \cap (\mathcal{L}_S \circ \tilde{S})(i)) \cup (\tilde{S}(a) \cap (\mathcal{L}_S \circ \tilde{S})(a))] \\ & \cap [(\mathcal{L}_S(i) \cap (\tilde{S} \circ \mathcal{L}_S)(i)) \cup (\mathcal{L}_S(a) \cap (\tilde{S} \circ \mathcal{L}_S)(a))] \\ &= [\mathcal{L}_S(i) \cup \mathcal{L}_S(a)] \cap [\mathcal{L}_S(i) \cup \mathcal{L}_S(a)] = \mathcal{L}_S(i) \cup \mathcal{L}_S(a) \not\subseteq \mathcal{L}_S(a) \end{aligned}$$

olduğundan, $\mathcal{L}_S$ bir EK-bi-iç ideal değildir.

8.8. *Teorem* Her EK-hemen hemen bi-iç ideal, bir EK-hemen hemen bi-idealdir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. O halde, her $x, y, z \in S$ için, $[(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S \circ S_z)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$[(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S \circ S_z)] \tilde{\cap} f_S \subseteq (f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olup, $[(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S \circ S_z)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen bi-idealdir.

Teorem 8.8'in karışının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

8.9. *Örnek* Örnek 8.4'te verilen q_S esnek kümesini ele alalım. q_S bir EK-hemen hemen bi-idealdir, yani, her $x \in S$ için, $(q_S \circ S_x \circ q_S) \tilde{\cap} q_S \neq \emptyset_S$. Gerçekten,

$$\begin{aligned} [(q_S \circ S_i \circ q_S) \tilde{\cap} q_S](i) &= (q_S \circ S_i \circ q_S)(i) \cap q_S(i) \\ &= [(q_S(i) \cap (S_i \circ q_S)(a)) \cup (q_S(a) \cap (S_i \circ q_S)(i))] \cap q_S(i) \\ &= [q_S(i) \cup q_S(a)] \cap q_S(i) = q_S(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(q_S \circ S_i \circ q_S) \tilde{\cap} q_S](a) &= (q_S \circ S_i \circ q_S)(a) \cap q_S(a) \\ &= [(q_S(i) \cap (S_i \circ q_S)(i)) \cup (q_S(a) \cap (S_i \circ q_S)(a))] \cap q_S(a) \\ &= [q_S(i) \cap q_S(a)] \cap q_S(a) = q_S(i) \cap q_S(a) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$(q_S \circ S_i \circ q_S) \tilde{\cap} q_S = \{(i, \{1\}), (a, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$(q_S \circ S_a \circ q_S) \tilde{\cap} q_S = \{(i, \emptyset), (a, \{4\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, q_S bir EK-hemen hemen bi-idealdir. Fakat, Örnek 8.4'te gösterildiği üzere q_S bir EK-hemen hemen bi-iç ideal değildir.

8.10. Teorem Her EK-hemen hemen bi-iç ideal, bir EK-hemen hemen iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. Bu durumda, her $x, y, z \in S$ için, $[(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$[(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \subseteq (S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} f_S$$

olup, $[(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. O halde, f_S bir EK-hemen hemen iç idealdir.

Burada, her EK-zayıf hemen hemen bi-iç idealin bir EK-zayıf hemen hemen iç ideal olduğu açıktır. Fakat, her EK-zayıf hemen hemen iç ideal, bir EK-zayıf hemen hemen bi-iç ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

8.11. *Örnek* Örnek 8.2’de verilen g_S esnek kümesini ele alalım. Örnek 8.2’de, g_S esnek kümesinin bir EK-zayıf hemen hemen bi-iç ideal olmadığı gösterilmiştir. Fakat, g_S bir EK-zayıf hemen hemen iç idealdir, yani, her $x \in S$ için, $(S_x \circ g_S \circ S_x) \tilde{\cap} g_S \neq \emptyset_S$. Gerçekten,

$$[(S_i \circ g_S \circ S_i) \tilde{\cap} g_S](i) = (S_i \circ g_S \circ S_i)(i) \cap g_S(i) = \emptyset$$

$$\begin{aligned} [(S_i \circ g_S \circ S_i) \tilde{\cap} g_S](a) &= (S_i \circ g_S \circ S_i)(a) \cap g_S(a) \\ &= [(S_i(i) \cap (g_S \circ S_i)(i)) \cup (S_i(a) \cap (g_S \circ S_i)(a))] \cap g_S(a) \\ &= g_S(a) \cap g_S(a) = g_S(a) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$(S_i \circ g_S \circ S_i) \tilde{\cap} g_S = \{(i, \emptyset), (a, \{e, \pi, \varphi\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$(S_a \circ g_S \circ S_a) \tilde{\cap} g_S = \{(i, \emptyset), (a, \{e, \pi, \varphi\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, g_S bir EK-zayıf hemen hemen iç idealdir. Fakat, Örnek 8.4’te gösterildiği üzere g_S bir EK-hemen hemen bi-iç ideal değildir.

Burada, g_S bir EK-zayıf hemen hemen bi-iç ideal olmadığında, bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olmayacağı açıktır.

8.12. *Önerme* f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S bir EK-hemen hemen bi-iç ideal ise bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

İspat: f_S , bir idempotent EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \circ f_S = f_S$ ve her $x, y, z \in S$ için, $[(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\begin{aligned} \emptyset_S \neq [(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S &= [(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S) \tilde{\cap} f_S] \tilde{\cap} f_S \\ &= [(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \subseteq (f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \end{aligned}$$

olduğundan, $(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

8.13. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S bir EK-hemen hemen bi-iç ideal ise bir EK-hemen hemen tri-idealdir.

İspat: f_S , bir idempotent EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \circ f_S = f_S$ ve her $x, y, z \in S$ için, $[(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$[(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S \circ S_z)] \tilde{\cap} f_S \subseteq (f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = (f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-hemen hemen sol tri-idealdir. Benzer şekilde,

$$[(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S \circ S_z)] \tilde{\cap} f_S \subseteq (f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = (f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-hemen hemen sağ tri-idealdir. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen tri-idealdir.

8.14. Teorem f_S ve h_S , $f_S \subseteq h_S$ olacak şekilde, U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen bi-iç ideal ise h_S bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. O halde, her $x, y, z \in S$ için, $[(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği $f_S \subseteq h_S$ olduğundan,

$$[(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \subseteq [(S_x \circ h_S \circ S_y) \tilde{\cap} (h_S \circ S_z \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S$$

açıktır. Burada, $[(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $[(S_x \circ h_S \circ S_y) \tilde{\cap} (h_S \circ S_z \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, h_S bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir.

8.15. Teorem f_S ve h_S , birer EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. $f_S \subseteq f_S \tilde{\cup} h_S$ olup, Teorem 8.14'ten, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir.

8.16. *Sonuç* EK-hemen hemen bi-iç ideallerin sonlu esnek birleşimleri de bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir.

8.17. *Sonuç* f_S ya da h_S bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir.

Burada, f_S ve h_S birer EK-hemen hemen bi-iç ideal iken, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

8.18. *Örnek* Örnek 8.2'deki f_S ve h_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve h_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen bi-iç ideal olduğu, Örnek 8.2'de gösterilmiştir. Fakat,

$$f_S \tilde{\cap} h_S = \{(i, \emptyset), (a, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

oldüğünden, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-hemen hemen bi-iç ideal değildir.

Şimdi, S yarıgrubunun hemen hemen bi-iç ideali ile EK-hemen hemen bi-iç ideali arasındaki ilişki verilecektir.

8.19. Teorem A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olmasıdır.

İspat: A, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç ideali olsun. O halde, her $x, y, z \in S$ için, $(xAy \cap AzA) \cap A \neq \emptyset$ yani, $k \in (xAy \cap AzA) \cap A$ olacak şekilde en az bir $k \in S$ vardır. Buradan,

$$\begin{aligned}
 \left[\left((S_x \circ S_A \circ S_y) \tilde{\cap} (S_A \circ S_z \circ S_A) \right) \tilde{\cap} S_A \right] (k) &= \left((S_{xAy} \tilde{\cap} S_{AzA}) \tilde{\cap} S_A \right) (k) \\
 &= \left((S_{xAy \cap AzA}) \tilde{\cap} S_A \right) (k) \\
 &= S_{(xAy \cap AzA) \cap A} (k) \\
 &= U \\
 &\neq \emptyset
 \end{aligned}$$

olup, $\left[(S_x \circ S_A \circ S_y) \tilde{\cap} (S_A \circ S_z \circ S_A) \right] \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, S_A bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir.

Tersine, S_A bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. O halde, her $x, y, z \in S$ için, $\left[(S_x \circ S_A \circ S_y) \tilde{\cap} (S_A \circ S_z \circ S_A) \right] \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği, $A \neq \emptyset$. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
 \emptyset_S &\neq \left[(S_x \circ S_A \circ S_y) \tilde{\cap} (S_A \circ S_z \circ S_A) \right] \tilde{\cap} S_A \\
 &\Rightarrow \exists c \in S; \left(\left[(S_x \circ S_A \circ S_y) \tilde{\cap} (S_A \circ S_z \circ S_A) \right] \tilde{\cap} S_A \right) (c) \neq \emptyset \\
 &\Rightarrow \exists c \in S; \left((S_{xAy} \tilde{\cap} S_{AzA}) \tilde{\cap} S_A \right) (c) \neq \emptyset \\
 &\Rightarrow \exists c \in S; (S_{xAy \cap AzA} \tilde{\cap} S_A) (c) \neq \emptyset \\
 &\Rightarrow \exists c \in S; S_{(xAy \cap AzA) \cap A} (c) = U \\
 &\Rightarrow c \in (xAy \cap AzA) \cap A
 \end{aligned}$$

olup, $(xAy \cap AzA) \cap A \neq \emptyset$ elde edilir. Böylece, A, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç idealidir.

8.20. *Örnek* $S = \{g, s\}$ kümesi üzerinde, Tablo 8.2 yardımıyla tanımlanan “ $\ast$ ” ikili işlemi ile $(S, \ast)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$*$	g	s
g	g	g
s	g	g

Tablo 8.2. Örnek 8.20'deki “ $*$ ” ikili işlemi

$N = \{g\}$, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, N kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Rutin hesaplamalarla, N kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu $S_N = \{(g, U), (s, \emptyset)\}$ 'nin bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olduğu gösterilebilir.

Tersine, $R = \{g\}$ kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olan f_S EK-hemen hemen bi-iç idealini $f_S = \{(g, U), (s, \emptyset)\}$ olarak alırsak, rutin hesaplamalarla, $R = \{g\}$ kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç ideali olduğu gösterilebilir.

8.21. Teorem f_S , bir EK-hemen hemen bi-iç ideal ise $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç idealidir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. O halde, her $x, y, z \in S$ için, $[(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. $\text{supp}(f_S)$ 'nin S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç ideali olduğunu göstermek için, Teorem 8.19'dan, $S_{\text{supp}(f_S)}$ 'nin bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 5.13'ten,

$$[(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \cong [(S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_y) \tilde{\cap} (S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_z \circ S_{\text{supp}(f_S)})] \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)}$$

ve

$$[(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$$

olduğundan,

$$[(S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_y) \tilde{\cap} (S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_z \circ S_{\text{supp}(f_S)})] \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, $S_{\text{supp}(f_S)}$, bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olup, Teorem 8.19'dan, $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç idealidir.

Teorem 8.21'in karşının genellikle doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

8.22. *Örnek* Örnek 8.4'teki q_S esnek kümesini ele alalım. $\text{supp}(q_S) = \{i, a\}$ olup, her $x, y, z \in S$ için, $[(\{x\}\text{supp}(q_S)\{y\}) \cap (\text{supp}(q_S)\{z\}\text{supp}(q_S))] \cap \text{supp}(q_S) \neq \emptyset$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Böylece, $\text{supp}(q_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç idealidir. Fakat, Örnek 8.4'te gösterildiği üzere q_S , bir EK-hemen hemen bi-iç ideal değildir.

8.23. Tanım f_S ve h_S , $h_S \subseteq f_S$ olacak şekilde, birer EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. $\text{supp}(h_S) = \text{supp}(f_S)$ ise f_S esnek kümesine, bir minimal EK-hemen hemen bi-iç ideal denir.

8.24. Teorem A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen bi-iç ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir minimal EK-hemen hemen bi-iç ideal olmasıdır.

İspat: A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen bi-iç ideali olsun. O halde, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç idealidir ve Teorem 8.19'dan, S_A bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir. $f_S \subseteq S_A$ olacak şekilde f_S bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. Teorem 8.21'den, $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç idealidir ve Not 2.3.12'den ve Sonuç 2.3.17'den,

$$\text{supp}(f_S) \subseteq \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen bi-iç ideali olduğundan, $\text{supp}(f_S) = \text{supp}(S_A) = A$ olup, böylece, Tanım 8.23'ten, S_A bir minimal EK-hemen hemen bi-iç idealdir.

Tersine, S_A bir minimal EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. O halde, S_A bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir ve Teorem 8.19'dan, A, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç idealidir. $B \subseteq A$ olacak şekilde B, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç ideali olsun. Teorem 8.19'dan, S_B bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir ve Teorem 2.3.18 (i)'den, $S_B \subseteq S_A$ olur. S_A bir minimal EK-hemen hemen bi-iç ideal olduğundan ve Sonuç 2.3.17'den,

$$B = \text{supp}(S_B) = \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. Böylece, A, S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen bi-iç idealidir.

8.25. Tanım f_S, g_S ve h_S birer EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ g_S \subseteq f_S$ olması, $h_S \subseteq f_S$ veya $g_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-asal hemen hemen bi-iç ideal denir.

8.26. Tanım f_S ve h_S birer EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ h_S \subseteq f_S$ olması, $h_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-yarı asal hemen hemen bi-iç ideal denir.

8.27. Tanım f_S, g_S ve h_S birer EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. Bu durumda, $(h_S \circ g_S) \cap (g_S \circ h_S) \subseteq f_S$ olması, $h_S \subseteq f_S$ veya $g_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-kuvvetli asal hemen hemen bi-iç ideal denir.

Her EK-kuvvetli asal hemen hemen bi-iç idealin, bir EK-asal hemen hemen bi-iç ideal olduğu ve her EK-asal hemen hemen bi-iç idealin, bir EK-yarı asal hemen hemen bi-iç ideal olduğu açıktır.

8.28. Teorem P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-asal hemen hemen bi-iç ideal ise, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen bi-iç idealidir.

İspat: S_P , bir EK-asal hemen hemen bi-iç ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir ve Teorem 8.19'dan, P, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç idealidir. $AB \subseteq P$ olacak şekilde, A ve B, S yarıgrubunun birer hemen hemen bi-iç ideali olsun. Bu durumda,

Teorem 8.19'dan, S_A ve S_B , birer EK-hemen hemen bi-iç idealdir ve Teorem 2.3.18 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_B = S_{AB} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-asal hemen hemen bi-iç ideal ve $S_A \circ S_B \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ veya $S_B \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen bi-iç idealidir.

8.29. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen bi-iç ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen bi-iç idealidir.

İspat: S_P , bir EK-yarı asal hemen hemen bi-iç ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir ve Teorem 8.19'dan, P , S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç idealidir. $AA \subseteq P$ olacak şekilde, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç ideali olsun. Bu durumda, Teorem 8.19'dan, S_A bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir ve Teorem 2.3.18 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_A = S_{AA} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen bi-iç ideal ve $S_A \circ S_A \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18 (i)'den, $A \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen bi-iç idealidir.

8.30. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen bi-iç ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen bi-iç idealidir.

İspat: S_P , bir EK-kuvvetli asal hemen hemen bi-iç ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen bi-iç idealdir ve Teorem 8.19'dan, P , S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç idealidir. $AB \cap BA \subseteq P$ olmak üzere, A ve B , S yarıgrubunun birer hemen hemen bi-iç ideali olsun. Bu durumda, Teorem 8.19'dan, S_A ve S_B birer EK-hemen hemen bi-iç idealdir ve Teorem 2.3.18'den, $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) = S_{AB} \tilde{\cap} S_{BA} = S_{AB \cap BA} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen bi-iç ideal ve $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ veya $S_B \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen bi-iç idealidir.

9. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN Bİ-QUASI İDEALLERİ

Bu bölüm, esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi idealler üzerine olup, bölümde Sezgin ve İlgin (2024e) çalışmasından elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

9.1. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x, y \in S$ için,

- (1) $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ($[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$) ise f_S esnek kümesine, S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideali denir.

U üzerinde bir esnek küme, S yarıgrubunun hem esnek kesişimsel hemen hemen sol bi-quasi ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi idealidir denir.

- (2) $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_x \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ($[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (f_S \circ S_x \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$) ise f_S esnek kümesine, S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideali denir.

U üzerinde bir esnek küme, S yarıgrubunun hem esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sol bi-quasi ideali hem de esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen bi-quasi idealidir denir.

Bundan sonra, S yarıgrubunun U üzerinde esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideali kısaca “EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal” ve S yarıgrubunun U üzerinde esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideali kısaca “EK-zayıf hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal” olarak gösterilecektir.

Ayrıca, esnek kesişim işleminin $S_E(U)$ ’da değişmeli olması nedeniyle, Tanım 9.1’de her $x, y \in S$ için, $(S_x \circ f_S)$ ve $(f_S \circ S_y \circ f_S)$ (benzer şekilde, $(f_S \circ S_x)$ ve $(f_S \circ S_y \circ f_S)$)’nin birbiriyle değişebileceği açıktır.

9.2. Örnek $S = \{m, j\}$ kümesi üzerinde, Tablo 9.1 yardımıyla tanımlanan “ $\mathbf{\Sigma}$ ” ikili işlemi ile $(S, \mathbf{\Sigma})$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\mathbf{\Sigma}$	m	j
m	m	j
j	j	m

Tablo 9.1. Örnek 9.2’deki “ $\mathbf{\Sigma}$ ” ikili işlemi

$U = D_2 = \{\langle x, y \rangle : x^2 = y^2 = e, xy = yx\} = \{e, x, y, yx\}$ evrensel kümesi üzerinde f_S , h_S ve g_S esnek kümeleri,

$$f_S = \{(m, \{e, x\}), (j, \{e\})\}$$

$$h_S = \{(m, \{yx\}), (j, \{y, yx\})\}$$

$$g_S = \{(m, \{x, y\}), (j, \{e, yx\})\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada, f_S ve h_S birer EK-(zayıf) hemen hemen bi-quasi idealdir. Öncelikle, her $x, y \in S$ için, $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim.

$[(S_m \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_m \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S$ ile başlayacak olursak:

$$\begin{aligned} [(S_m \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_m \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S (m) &= [(S_m \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_m \circ f_S)](m) \cap f_S(m) \\ &= (S_m \circ f_S)(m) \cap (f_S \circ S_m \circ f_S)(m) \cap f_S(m) \\ &= f_S(m) \cap [f_S(m) \cup f_S(j)] \cap f_S(m) = f_S(m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(S_m \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_m \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S (j) &= [(S_m \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_m \circ f_S)](j) \cap f_S(j) \\ &= (S_m \circ f_S)(j) \cap (f_S \circ S_m \circ f_S)(j) \cap f_S(j) \\ &= f_S(j) \cap [f_S(m) \cap f_S(j)] \cap f_S(j) = f_S(m) \cap f_S(j) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$[(S_m \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_m \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = \{(m, \{e, x\}), (j, \{e\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$[(S_m \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_j \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = \{(m, \{e\}), (j, \{e\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_j \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_m \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = \{(m, \{e\}), (j, \{e\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_j \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_j \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = \{(m, \{e\}), (j, \{e\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, her $x, y \in S$ için, $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, f_S bir EK-(zayıf) hemen hemen sol bi-quasi idealdir. Ayrıca,

$$[(f_S \circ S_m) \tilde{\cap} (f_S \circ S_m \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = \{(m, \{e, x\}), (j, \{e\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(f_S \circ S_m) \tilde{\cap} (f_S \circ S_j \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = \{(m, \{e\}), (j, \{e\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(f_S \circ S_j) \tilde{\cap} (f_S \circ S_m \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = \{(m, \{e\}), (j, \{e\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(f_S \circ S_j) \tilde{\cap} (f_S \circ S_j \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = \{(m, \{e\}), (j, \{e\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, her $x, y \in S$ için, $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, f_S bir EK-(zayıf) hemen hemen sağ bi-quasi idealdir. O halde, f_S bir EK-(zayıf) hemen hemen bi-quasi idealdir. Benzer şekilde, h_S bir EK-(zayıf) hemen hemen bi-quasi idealdir. Gerçekten,

$$[(S_m \circ h_S) \tilde{\cap} (h_S \circ S_m \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S = \{(m, \{yx\}), (j, \{yx\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_m \circ h_S) \tilde{\cap} (h_S \circ S_j \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S = \{(m, \{yx\}), (j, \{y, yx\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_j \circ h_S) \tilde{\cap} (h_S \circ S_m \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S = \{(m, \{yx\}), (j, \{yx\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(S_j \circ h_S) \tilde{\cap} (h_S \circ S_j \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S = \{(m, \{yx\}), (j, \{yx\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, h_S bir EK-(zayıf) hemen hemen sol bi-quasi idealdir. Ayrıca,

$$[(h_S \circ S_m) \tilde{\cap} (h_S \circ S_m \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S = \{(m, \{yx\}), (j, \{yx\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(h_S \circ S_m) \tilde{\cap} (h_S \circ S_j \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S = \{(m, \{yx\}), (j, \{y, yx\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(h_S \circ S_j) \tilde{\cap} (h_S \circ S_m \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S = \{(m, \{yx\}), (j, \{yx\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(h_S \circ S_j) \tilde{\cap} (h_S \circ S_j \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S = \{(m, \{yx\}), (j, \{yx\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, h_S bir EK-(zayıf) hemen hemen sağ bi-quasi idealdir. Böylece, h_S bir EK-(zayıf) hemen hemen bi-quasi idealdir.

Fakat, g_S bir EK-(zayıf) hemen hemen bi-quasi ideal değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} [[(S_j \circ g_S) \tilde{\cap} (g_S \circ S_j \circ g_S)] \tilde{\cap} g_S](m) &= [(S_j \circ g_S) \tilde{\cap} (g_S \circ S_j \circ g_S)](m) \cap g_S(m) \\ &= (S_j \circ g_S)(m) \cap (g_S \circ S_j \circ g_S)(m) \cap g_S(m) \\ &= g_S(j) \cap [g_S(m) \cap g_S(j)] \cap g_S(m) = g_S(j) \cap g_S(m) = \emptyset_S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [[(S_j \circ g_S) \tilde{\cap} (g_S \circ S_j \circ g_S)] \tilde{\cap} g_S](j) &= [(S_j \circ g_S) \tilde{\cap} (g_S \circ S_j \circ g_S)](j) \cap g_S(j) \\ &= (S_j \circ g_S)(j) \cap (g_S \circ S_j \circ g_S)(j) \cap g_S(j) \\ &= g_S(m) \cap [g_S(m) \cup g_S(j)] \cap g_S(j) = g_S(m) \cap g_S(j) = \emptyset_S \end{aligned}$$

olup,

$$[(S_j \circ g_S) \tilde{\cap} (g_S \circ S_j \circ g_S)] \tilde{\cap} g_S = \{(m, \emptyset), (j, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

olduğundan, g_S bir EK-(zayıf) hemen hemen sol bi-quasi ideal değildir. Benzer şekilde,

$$[(g_S \circ S_j) \tilde{\cap} (g_S \circ S_j \circ g_S)] \tilde{\cap} g_S = \{(m, \emptyset), (j, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

olduğundan, g_S bir EK-(zayıf) hemen hemen sağ bi-quasi ideal değildir. Bu durumda, g_S esnek kümesinin bir EK-(zayıf) hemen hemen bi-quasi ideal olmadığı açıktır.

9.3. Önerme Her EK-hemen hemen bi-quasi ideal, bir EK-zayıf hemen hemen bi-quasi idealdir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen bi-quasi ideal olsun. O halde, her $x, y \in S$ için, $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ve $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan, her $x \in S$ için,

$$[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_x \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S \text{ ve } [(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (f_S \circ S_x \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$$

açıktır. Böylece, f_S bir EK-zayıf hemen hemen bi-quasi idealdir.

EK-zayıf hemen hemen bi-quasi ideal, EK-hemen hemen bi-quasi idealin genellemesi olduğundan, bundan sonra tüm teoremler ve ispatlar EK-zayıf hemen hemen bi-quasi ideal yerine EK-hemen hemen bi-quasi ideal için verilecektir.

9.4. Önerme f_S , bir EK-sol (sağ) bi-quasi ideal olsun. Bu durumda, ya bazı $x, y \in S$ için, $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ($[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$) ya da f_S bir EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ bi-quasi ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-sol bi-quasi ideal olsun. O halde, $(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. $x, y \in S$ için, $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olsun. Buradan,

$$(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S) \subseteq (\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$$

olduğundan, $(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S) \subseteq f_S$ elde edilir. Kabul gereği, $(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S) \neq \emptyset_S$ olduğu açıktır. O halde,

$$[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = (S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S) \neq \emptyset_S$$

olduğundan, f_S bir EK-hemen hemen sol bi-quasi idealdir.

Ayrıca, f_S bir EK-sol bi-quasi ideal ve bazı $x, y \in S$ için, $(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S) = \emptyset_S$ olsun. Bu durumda,

$$[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = \emptyset_S \tilde{\cap} f_S = \emptyset_S$$

olduğundan, f_S 'nin bir EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal olmadığı açıktır.

Burada, $(\tilde{S} \circ \emptyset_S) \tilde{\cap} (\emptyset_S \circ \tilde{S} \circ \emptyset_S) \subseteq \emptyset_S \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S \subseteq \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ bir EK-sol bi-quasi idealdir. Fakat, $[(S_x \circ \emptyset_S) \tilde{\cap} (\emptyset_S \circ S_y \circ \emptyset_S)] \tilde{\cap} \emptyset_S = [\emptyset_S \tilde{\cap} \emptyset_S] \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ bir EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal değildir.

9.5. Teorem f_S , bir EK-bi-quasi ideal olsun. Bu durumda, ya bazı $x, y \in S$ için $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ve $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ya da f_S bir EK-hemen hemen bi-quasi idealdir.

9.6. Sonuç f_S , bir EK-hemen hemen bi-quasi ideal ise bir EK-bi-quasi ideal olmak zorunda değildir.

9.7. Örnek Örnek 9.2'de verilen h_S esnek kümesini ele alalım. h_S esnek kümesinin bir EK-hemen hemen bi-quasi ideal olduğu, Örnek 9.2'de gösterilmiştir. Fakat, h_S bir EK-bi-quasi ideal değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} [(\tilde{S} \circ h_S) \tilde{\cap} (h_S \circ \tilde{S} \circ h_S)](m) &= (\tilde{S} \circ h_S)(m) \cap (h_S \circ \tilde{S} \circ h_S)(m) \\ &= [h_S(m) \cup h_S(j)] \cap [h_S(m) \cup h_S(j)] = h_S(m) \cup h_S(j) \not\subseteq h_S(m) \end{aligned}$$

olduğundan, h_S bir EK-sol bi-quasi ideal değildir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} [(h_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (h_S \circ \tilde{S} \circ h_S)](j) &= (h_S \circ \tilde{S})(j) \cap (h_S \circ \tilde{S} \circ h_S)(j) \\ &= [h_S(m) \cup h_S(j)] \cap [h_S(m) \cup h_S(j)] = h_S(m) \cup h_S(j) \not\subseteq h_S(j) \end{aligned}$$

olduğundan, h_S bir EK-sağ bi-quasi ideal değildir. Bu durumda, h_S 'nin bir EK-bi-quasi ideal olmadığı açıktır.

9.8. Önerme Her EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal, bir EK-hemen hemen sol (sağ) idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ bi-quasi ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal olsun. O halde, her $x, y \in S$ için, $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \cong (S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olup, $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen sol idealdir.

9.9. Teorem Her EK-hemen hemen bi-quasi ideal, bir EK-hemen hemen idealdir.

9.10. Önerme Her EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal, bir EK-hemen hemen bi-idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ bi-quasi ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal olsun. O halde, her $x, y \in S$ için, $[(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$[(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \cong (f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olup, $[(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen bi-idealdir.

9.11. Teorem Her EK-hemen hemen bi-quasi ideal, bir EK-hemen hemen bi-idealdir.

Teorem 9.11'in karşıtının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

9.12. Örnek Örnek 8.2'de verilen g_S esnek kümesini ele alalım. g_S , bir EK-hemen hemen bi-idealdir, yani, her $x \in S$ için, $(g_S \circ S_x \circ g_S) \tilde{\cap} g_S \neq \emptyset_S$. Gerçekten,

$$\begin{aligned} [(g_S \circ S_m \circ g_S) \tilde{\cap} g_S](m) &= (g_S \circ S_m \circ g_S)(m) \cap g_S(m) \\ &= [(g_S(m) \cap (S_m \circ g_S)(m)) \cup (g_S(j) \cap (S_m \circ g_S)(j))] \cap g_S(m) \\ &= [g_S(m) \cup g_S(j)] \cap g_S(m) = g_S(m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(g_S \circ S_m \circ g_S) \tilde{\cap} g_S](j) &= (g_S \circ S_m \circ g_S)(j) \cap g_S(j) \\ &= [(g_S(m) \cap (S_m \circ g_S)(j)) \cup (g_S(j) \cap (S_m \circ g_S)(m))] \cap g_S(j) \\ &= [g_S(m) \cap g_S(j)] \cap g_S(j) = g_S(m) \cap g_S(j) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$(g_S \circ S_m \circ g_S) \tilde{\cap} g_S = \{(m, \{x, y\}), (j, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$(g_S \circ S_j \circ g_S) \tilde{\cap} g_S = \{(m, \emptyset), (j, \{e, yx\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, g_S bir EK-hemen hemen bi-idealdir. Fakat, Örnek 9.2'de gösterildiği üzere g_S bir EK-hemen hemen bi-quasi ideal değildir.

9.13. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S bir EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal ise bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ bi-quasi ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir idempotent EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ ve her $x, y \in S$ için, $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\begin{aligned} [(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S &= [(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S] \tilde{\cap} f_S \\ &= [(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \subseteq (f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \end{aligned}$$

olup, $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

9.14. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S bir EK-hemen hemen bi-quasi ideal ise bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

9.15. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S bir EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal ise f_S bir EK-hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ bi-quasi ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir idempotent EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ ve her $x, y \in S$ için, $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \subseteq (S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = (S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olup, $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen sol zayıf-iç idealdir.

9.16. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S bir EK-hemen hemen bi-quasi ideal ise bir EK-hemen hemen zayıf-iç idealdir.

9.17. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S bir EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal ise bir EK-hemen hemen tri-idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ bi-quasi ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir idempotent EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ ve her $x, y \in S$ için, $[(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$[(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \subseteq (f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = (f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olup, $[(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen sol tri-idealdir. Benzer şekilde,

$$[(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \subseteq (f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = (f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olup, $[(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen sağ tri-idealdir. O halde, f_S bir EK-hemen hemen tri-idealdir.

9.18. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S bir EK-hemen hemen bi-quasi ideal ise bir EK-hemen hemen tri-idealdir.

9.19. Önerme f_S ve h_S , $f_S \subseteq h_S$ olacak şekilde, U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal ise h_S bir EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ bi-quasi ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal olsun. O halde, her $x, y \in S$ için, $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği $f_S \subseteq h_S$ olduğundan,

$$[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \subseteq [(S_x \circ h_S) \tilde{\cap} (h_S \circ S_y \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S$$

açıktır. Burada, $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $[(S_x \circ h_S) \tilde{\cap} (h_S \circ S_y \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, h_S bir EK-hemen hemen sol bi-quasi idealdir.

9.20. Teorem f_S ve h_S , $f_S \cong h_S$ olacak şekilde, U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen bi-quasi ideal ise h_S bir EK-hemen hemen bi-quasi idealdir.

9.21. Önerme f_S ve h_S , birer EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ bi-quasi ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal olsun. $f_S \cong f_S \tilde{\cup} h_S$ olup, Önerme 9.19'dan, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen sol bi-quasi idealdir.

9.22. Teorem f_S ve h_S , birer EK-hemen hemen bi-quasi ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen bi-quasi idealdir.

9.23. Sonuç EK-hemen hemen bi-quasi ideallerin sonlu esnek birleşimleri de bir EK-hemen hemen bi-quasi idealdir.

9.24. Sonuç f_S ya da h_S bir EK-hemen hemen bi-quasi ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen bi-quasi idealdir.

Burada, f_S ve h_S birer EK-hemen hemen bi-quasi ideal iken, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-hemen hemen bi-quasi ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

9.25. Örnek Örnek 9.2'deki f_S ve h_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve h_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen bi-quasi ideal olduğu, Örnek 9.2'de gösterilmiştir. Fakat,

$$f_S \tilde{\cap} h_S = \{(m, \emptyset), (j, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

olduğundan, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-hemen hemen bi-quasi ideal değildir.

Şimdi, S yarıgrubunun hemen hemen bi-quasi ideali ile EK-hemen hemen bi-quasi ideali arasındaki ilişki verilecektir.

9.26. Önerme A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen sol

(sağ) bi-quasi ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal olmasıdır.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ bi-quasi ideal için de benzer şekilde yapılır. A, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol bi-quasi ideali olsun. O halde, her $x, y \in S$ için, $(xA \cap AyA) \cap A \neq \emptyset$ yani, $j \in (xA \cap AyA) \cap A$ olacak şekilde en az bir $j \in S$ vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} [(S_x \circ S_A) \tilde{\cap} (S_A \circ S_y \circ S_A)] \tilde{\cap} S_A(j) &= ((S_{xA} \tilde{\cap} S_{AyA}) \tilde{\cap} S_A)(j) \\ &= ((S_{xA \cap AyA}) \tilde{\cap} S_A)(j) \\ &= S_{(xA \cap AyA) \cap A}(j) \\ &= U \\ &\neq \emptyset \end{aligned}$$

olup, $[(S_x \circ S_A) \tilde{\cap} (S_A \circ S_y \circ S_A)] \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, S_A bir EK-hemen hemen sol bi-quasi idealdir.

Tersine, S_A bir EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal olsun. O halde, her $x, y \in S$ için, $[(S_x \circ S_A) \tilde{\cap} (S_A \circ S_y \circ S_A)] \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği, $A \neq \emptyset$. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \emptyset_S &\neq [(S_x \circ S_A) \tilde{\cap} (S_A \circ S_y \circ S_A)] \tilde{\cap} S_A \\ &\Rightarrow \exists s \in S; [(S_x \circ S_A) \tilde{\cap} (S_A \circ S_y \circ S_A)] \tilde{\cap} S_A(s) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists s \in S; ((S_{xA} \tilde{\cap} S_{AyA}) \tilde{\cap} S_A)(s) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists s \in S; (S_{xA \cap AyA} \tilde{\cap} S_A)(s) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists s \in S; S_{(xA \cap AyA) \cap A}(s) = U \\ &\Rightarrow s \in (xA \cap AyA) \cap A \end{aligned}$$

olup, $xA \cap AyA \neq \emptyset$ elde edilir. Böylece, A, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol bi-quasi idealidir.

9.27. Teorem A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-hemen hemen bi-quasi ideal olmasıdır.

9.28. Örnek Örnek 8.20'de verilen S yarıgrubunu ele alalım. $T = \{g\}$, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, T kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Rutin hesaplamalarla, T kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu $S_T = \{(g, U), (s, \emptyset)\}$ 'nin bir EK-hemen hemen bi-quasi ideal olduğu gösterilebilir.

Tersine, $V = \{g\}$ kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olan f_S EK-hemen hemen bi-quasi idealini $f_S = \{(g, U), (s, \emptyset)\}$ olarak alırsak, rutin hesaplamalarla $V = \{g\}$ kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi ideali olduğu gösterilebilir.

9.29. Önerme f_S , bir EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal ise $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) bi-quasi idealidir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ bi-quasi ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal olsun. O halde, $f_S \neq \emptyset_S$, $\text{supp}(f_S) \neq \emptyset$ ve her $x, y \in S$ için, $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. $\text{supp}(f_S)$ 'nin S yarıgrubunun bir hemen hemen sol bi-quasi ideali olduğunu göstermek için, Önerme 9.26'dan, $S_{\text{supp}(f_S)}$ 'nin bir EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 5.13'ten,

$$[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \cong [(S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} (S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_y \circ S_{\text{supp}(f_S)})] \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)}$$

ve

$$[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$$

olduğundan,

$$[(S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} (S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_y \circ S_{\text{supp}(f_S)})] \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, $S_{\text{supp}(f_S)}$, bir EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal olup, Önerme 9.26'dan, $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol bi-quasi idealidir.

9.30. Teorem f_S , bir EK-hemen hemen bi-quasi ideal ise $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi idealidir.

Teorem 9.30'un karşıtının genellikle doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

9.31. Örnek Örnek 9.2'deki g_S esnek kümesini ele alalım. $\text{supp}(g_S) = \{m, j\}$ olup,

$$[(m\{m, j\}) \cap (\{m, j\}m\{m, j\})] \cap \{m, j\} = \{m, j\} \neq \emptyset$$

$$[(m\{m, j\}) \cap (\{m, j\}j\{m, j\})] \cap \{m, j\} = \{m, j\} \neq \emptyset$$

$$[(j\{m, j\}) \cap (\{m, j\}m\{e, j\}\{m, j\})] \cap \{m, j\} = \{m, j\} \neq \emptyset$$

$$[(j\{m, j\}) \cap (\{m, j\}j\{m, j\})] \cap \{m, j\} = \{m, j\} \neq \emptyset$$

elde edilir. Böylece, $\text{supp}(g_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol bi-quasi idealidir.

Benzer şekilde,

$$[(\{m, j\}m) \cap (\{m, j\}m\{m, j\})] \cap \{m, j\} = \{m, j\} \neq \emptyset$$

$$[(\{m, j\}m) \cap (\{m, j\}j\{m, j\})] \cap \{m, j\} = \{m, j\} \neq \emptyset$$

$$[(\{m, j\}j) \cap (\{m, j\}m\{m, j\})] \cap \{m, j\} = \{m, j\} \neq \emptyset$$

$$[(\{m, j\}j) \cap (\{m, j\}j\{m, j\})] \cap \{m, j\} = \{m, j\} \neq \emptyset$$

olduğundan, $\text{supp}(g_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sağ bi-quasi idealidir. O halde, $\text{supp}(g_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi idealidir. Fakat, Örnek 9.2’de gösterildiği üzere g_S , bir EK-hemen hemen bi-quasi ideal değildir.

9.32. Tanım f_S ve h_S , $h_S \cong f_S$ olacak şekilde, birer EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal olsun. $\text{supp}(h_S) = \text{supp}(f_S)$ ise f_S esnek kümesine, bir minimal EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal denir.

9.33. Önerme A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A ’nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideali olması için gerek ve yeter şart S_A ’nın bir minimal EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal olmasıdır.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ bi-quasi ideal için de benzer şekilde yapılır. A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol bi-quasi ideali olsun. O halde, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol bi-quasi idealidir ve Önerme 9.26’dan, S_A bir EK-hemen hemen sol bi-quasi idealdir. $f_S \cong S_A$ olacak şekilde f_S bir EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal olsun. Önerme 9.29’dan, $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol bi-quasi idealidir ve Not 2.3.12’den ve Sonuç 2.3.17’den,

$$\text{supp}(f_S) \subseteq \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol bi-quasi ideali olduğundan, $\text{supp}(f_S) = \text{supp}(S_A) = A$ olup, böylece, Tanım 9.32’den, S_A bir minimal EK-hemen hemen sol bi-quasi idealdir.

Tersine, S_A bir minimal EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal olsun. O halde, S_A bir EK-hemen hemen sol bi-quasi idealdir ve Önerme 9.26’dan, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol bi-quasi idealidir. $B \subseteq A$ olacak şekilde B , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol bi-quasi ideali olsun. Önerme 9.26’dan, S_B bir EK-hemen hemen sol bi-quasi idealdir ve Teorem 2.3.18 (i)’den, $S_B \cong S_A$ olur. S_A bir minimal EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal olduğundan ve Sonuç 2.3.17’den,

$$B = \text{supp}(S_B) = \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. Böylece A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol bi-quasi idealidir.

9.34. Teorem A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen bi-quasi ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir minimal EK-hemen hemen bi-quasi ideal olmasıdır.

9.35. Tanım f_S , g_S ve h_S birer EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ g_S \subseteq f_S$ olması, $h_S \subseteq f_S$ veya $g_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-asal hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal denir.

9.36. Tanım f_S ve h_S birer EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ h_S \subseteq f_S$ olması, $h_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-yarı asal hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal denir.

9.37. Tanım f_S , g_S ve h_S birer EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal olsun. Bu durumda, $(h_S \circ g_S) \cap (g_S \circ h_S) \subseteq f_S$ olması, $h_S \subseteq f_S$ veya $g_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal denir.

Her EK-kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) bi-quasi idealin, bir EK-asal hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal olduğu ve her EK-asal hemen hemen sol (sağ) bi-quasi idealin, bir EK-yarı asal hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal olduğu açıktır.

9.38. Önerme P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-asal hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal ise, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen sol (sağ) bi-quasi idealidir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ bi-quasi ideal için de benzer şekilde yapılır. S_P , bir EK-asal hemen hemen sol bi-quasi ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen sol bi-quasi idealdir ve Önerme 9.26'dan, P , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol bi-quasi idealidir. $AB \subseteq P$ olacak şekilde, A ve B , S

yarıgrubunun birer hemen hemen sol bi-quasi ideali olsun. Bu durumda, Önerme 9.26'dan, S_A ve S_B , birer EK-hemen hemen sol bi-quasi idealdir ve Teorem 2.3.18 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_B = S_{AB} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-asal hemen hemen sol bi-quasi ideal ve $S_A \circ S_B \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ veya $S_B \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen sol bi-quasi idealidir.

9.39. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-asal hemen hemen bi-quasi ideal ise, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen bi-quasi idealidir.

9.40. Önerme P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen sol (sağ) bi-quasi idealidir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ bi-quasi ideal için de benzer şekilde yapılır. S_P , bir EK-yarı asal hemen hemen sol bi-quasi ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen sol bi-quasi idealdir ve Önerme 9.26'dan, P , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol bi-quasi idealidir. $AA \subseteq P$ olacak şekilde, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol bi-quasi ideali olsun. Bu durumda, Önerme 9.26'dan, S_A bir EK-hemen hemen sol bi-quasi idealdir ve Teorem 2.3.18 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_A = S_{AA} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen sol bi-quasi ideal ve $S_A \circ S_A \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18 (i)'den, $A \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen sol bi-quasi idealidir.

9.41. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen bi-quasi ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen bi-quasi idealidir.

9.42. Önerme P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) bi-quasi idealidir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol bi-quasi ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ bi-quasi ideal için de benzer şekilde yapılır. S_P , bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol bi-quasi ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen sol bi-quasi idealdir ve Önerme 9.26'dan, P , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol bi-quasi idealidir. $AB \cap BA \subseteq P$ olmak üzere, A ve B , S yarıgrubunun birer hemen hemen sol bi-quasi ideali olsun. Bu durumda, Önerme 9.26'dan, S_A ve S_B birer EK-hemen hemen sol bi-quasi idealdir ve Teorem 2.3.18'den, $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) = S_{AB} \tilde{\cap} S_{BA} = S_{AB \cap BA} \tilde{\subseteq} S_P$ elde edilir. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol bi-quasi ideal ve $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) \tilde{\subseteq} S_P$ olduğundan, $S_A \tilde{\subseteq} S_P$ veya $S_B \tilde{\subseteq} S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen sol bi-quasi idealidir.

9.43. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen bi-quasi ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen bi-quasi idealidir.

10. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN TRI-Bİ-İDEALLERİ

Bu bölüm, esnek kesişimsel hemen hemen tri-bi-idealler üzerine olup, bölümde Sezgin ve diğerleri (2024a) çalışmasından elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

10.1. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x \in S$ için, $(f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ise f_S esnek kümesine, S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen tri-bi-ideali denir.

Bundan sonra, S yarıgrubunun U üzerinde esnek kesişimsel hemen hemen tri-bi-ideali kısaca “EK-hemen hemen tri-bi-ideal” olarak gösterilecektir.

10.2. Örnek $S = \{q, w\}$ kümesi üzerinde Tablo 10.1 yardımıyla tanımlanan ‘ $\heartsuit$ ’ ikili işlemi ile $(S, \heartsuit)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\heartsuit$	q	w
q	q	w
w	w	w

Tablo 10.1 Örnek 10.2’deki ‘ $\heartsuit$ ’ ikili işlemi

$U = \mathbb{Q}$ evrensel kümesi üzerinde f_S , h_S ve g_S esnek kümeleri,

$$f_S = \{(q, \{1, 2\}), (w, \{0, 4\})\}$$

$$h_S = \{(q, \{-2, -1\}), (w, \{-1, 1\})\}$$

$$g_S = \{(q, \{-5, -3\}), (w, \emptyset)\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada, f_S ve h_S birer EK-hemen hemen tri-bi-idealdir. Öncelikle, her $x \in S$ için, $(f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim:

$(f_S \circ f_S \circ S_q \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$ ile başlayacak olursak:

$$\begin{aligned}
 [(f_S \circ f_S \circ S_q \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](q) &= (f_S \circ f_S \circ S_q \circ f_S \circ f_S)(q) \cap f_S(q) \\
 &= [(f_S \circ f_S)(q) \cap (S_q \circ f_S \circ f_S)(q)] \cap f_S(q) \\
 &= [(f_S(q) \cap f_S(q)) \cap (S_q(q) \cap (f_S \circ f_S)(q))] \cap f_S(q) \\
 &= [f_S(q) \cap (f_S \circ f_S)(q)] \cap f_S(q) = [f_S(q) \cap [f_S(q) \cap f_S(q)]] \cap f_S(q) \\
 &= f_S(q)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [(f_S \circ f_S \circ S_q \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](w) &= (f_S \circ f_S \circ S_q \circ f_S \circ f_S)(w) \cap f_S(w) \\
 &= [(f_S \circ f_S)(q) \cap (S_q \circ f_S \circ f_S)(w)] \\
 &\cup [(f_S \circ f_S)(w) \cap (S_q \circ f_S \circ f_S)(q)] \\
 &\cup [(f_S \circ f_S)(w) \cap (S_q \circ f_S \circ f_S)(w)] \cap f_S(w) \\
 &= [(f_S(q) \cap f_S(w)) \cup (f_S(w) \cap f_S(q)) \cup (f_S(w) \cap f_S(w))] \cap f_S(w) \\
 &= f_S(w) \cap f_S(w) = f_S(w)
 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$(f_S \circ f_S \circ S_q \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(q, \{1,2\}), (w, \{0,4\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$(f_S \circ f_S \circ S_w \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(q, \emptyset), (w, \{0,4\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, f_S bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir. Benzer şekilde,

$$(h_S \circ h_S \circ S_q \circ h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S = \{(q, \{-2, -1\}), (w, \{-1,1\})\} \neq \emptyset_S$$

$$(h_S \circ h_S \circ S_w \circ h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S = \{(q, \emptyset), (w, \{-1,1\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, h_S bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir. Fakat, g_S bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
[(g_S \circ g_S \circ S_w \circ g_S \circ g_S) \tilde{\cap} g_S](q) &= (g_S \circ g_S \circ S_w \circ g_S \circ g_S)(q) \cap g_S(q) \\
&= [(g_S \circ g_S)(q) \cap (S_w \circ g_S \circ g_S)(q)] \cap g_S(q) \\
&= [(g_S(q) \cap g_S(q)) \cap (S_w(q) \cap (g_S \circ g_S)(q))] \cap g_S(q) = \emptyset \cap g_S(q) \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(g_S \circ g_S \circ S_w \circ g_S \circ g_S) \tilde{\cap} g_S](w) &= (g_S \circ g_S \circ S_w \circ g_S \circ g_S)(w) \cap g_S(w) \\
&= [(g_S \circ g_S)(q) \cap (S_w \circ g_S \circ g_S)(w)) \\
&\quad \cup ((g_S \circ g_S)(w) \cap (S_w \circ g_S \circ g_S)(q)) \\
&\quad \cup ((g_S \circ g_S)(w) \cap (S_w \circ g_S \circ g_S)(w))] \cap g_S(w) \\
&= [(g_S(q) \cap (g_S(q) \cup g_S(w))) \cup (g_S(w) \cap \emptyset) \\
&\quad \cup (g_S(w) \cap (g_S(q) \cup g_S(w)))] \cap g_S(w) \\
&= (g_S(q) \cup g_S(w)) \cap g_S(w) = g_S(w) = \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(g_S \circ g_S \circ S_w \circ g_S \circ g_S) \tilde{\cap} g_S = \{(q, \emptyset), (w, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, $w \in S$ için, $(g_S \circ g_S \circ S_w \circ g_S \circ g_S) \tilde{\cap} g_S = \emptyset_S$ olduğundan, g_S bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal değildir.

10.3. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve $f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S \neq \emptyset_S$ olsun. f_S , bir EK-tri-bi-ideal ise bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir.

İspat: $f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S \neq \emptyset_S$ ve f_S , bir EK-tri-bi-ideal olsun. O halde, $f_S \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ f_S \cong f_S$ olduğu bilinmektedir. Her $x \in S$ için,

$$f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S \cong f_S \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ f_S \cong f_S$$

olduğundan,

$$(f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, $(f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olup, f_S bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir.

Burada, $\emptyset_S \circ \emptyset_S \circ \tilde{S} \circ \emptyset_S \circ \emptyset_S = \emptyset_S \subseteq \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ esnek kümesinin bir EK-tri-bi-ideal olduğu açıktır. Fakat, $(\emptyset_S \circ \emptyset_S \circ S_x \circ \emptyset_S \circ \emptyset_S) \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ esnek kümesi bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal değildir.

f_S , bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal ise bir EK-tri-bi-ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

10.4. Örnek Örnek 10.2’de verilen f_S ve h_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve h_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen tri-bi-ideal olduğu, Örnek 10.2’de gösterilmiştir. Fakat,

$$\begin{aligned} (f_S \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ f_S)(w) &= [(f_S \circ f_S)(q) \cap (\tilde{S} \circ f_S \circ f_S)(w)] \cup [(f_S \circ f_S)(w) \cap (\tilde{S} \circ f_S \circ f_S)(q)] \\ &\cup [(f_S \circ f_S)(w) \cap (\tilde{S} \circ f_S \circ f_S)(w)] \\ &= (f_S \circ f_S)(q) \cup ((f_S \circ f_S)(w) \cap (f_S \circ f_S)(q)) \cup (f_S \circ f_S)(w) \\ &= (f_S \circ f_S)(q) \cup (f_S \circ f_S)(w) = f_S(q) \cup f_S(w) \not\subseteq f_S(w) \end{aligned}$$

olduğundan, f_S bir EK-tri-bi-ideal değildir. Benzer şekilde,

$$(h_S \circ h_S \circ \tilde{S} \circ h_S \circ h_S)(w) = h_S(q) \cup h_S(w) \not\subseteq h_S(w)$$

olduğundan, h_S bir EK-tri-bi-ideal değildir.

10.5. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal ise f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

İspat: f_S , bir idempotent EK-hemen hemen tri-bi-ideal olsun. Bu durumda, $f_S \circ f_S = f_S$ ve her $x \in S$ için, $(f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\emptyset_S \neq (f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = [(f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S] \tilde{\cap} f_S$$

$$\begin{aligned}
&= [(f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \\
&\cong (f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S
\end{aligned}$$

olduğundan, f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

10.6. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S 'nin bir EK-hemen hemen bi-ideal olması için gerek ve yeter şart f_S 'nin bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olmasıdır.

İspat: f_S , idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, $f_S \circ f_S = f_S$. Kabul gereği ve her $x \in S$ için,

$$\emptyset_S \neq (f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = (f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olduğundan, ispat açıktır.

10.7. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S 'nin bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olması için gerek ve yeter şart f_S 'nin bir EK-hemen hemen tri-ideal olmasıdır.

İspat: f_S , idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, $f_S \circ f_S = f_S$. Kabul gereği ve her $x \in S$ için,

$$\emptyset_S \neq (f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = (f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-hemen hemen sol tri-idealdir. Benzer şekilde, her $x \in S$ için,

$$\emptyset_S \neq (f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = (f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-hemen hemen sağ tri-idealdir. O halde, f_S bir EK-hemen hemen tri-idealdir.

10.8. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S bir EK-hemen hemen bi-iç ideal ise bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir.

İspat: f_S , bir idempotent EK-hemen hemen bi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \circ f_S = f_S$ ve her $x, y, z \in S$ için, $[(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S \circ S_z)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$[(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S \circ S_z)] \tilde{\cap} f_S \cong (f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = (f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir.

10.9. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S bir EK-hemen hemen sol (sağ) bi-quasi-ideal ise bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol bi-quasi-ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ bi-quasi-ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir idempotent EK-hemen hemen sol bi-quasi-ideal olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ ve her $x, y \in S$ için, $[(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$[(f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \cong (f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = (f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olup, $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir.

10.10. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S bir EK-hemen hemen bi-quasi-ideal ise bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir.

10.11. Teorem f_S ve h_S , $f_S \cong h_S$ olacak şekilde, U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal ise h_S bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olsun. O halde, her $x \in S$ için, $(f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği $f_S \cong h_S$ olduğundan,

$$(f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \cong (h_S \circ h_S \circ S_x \circ h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S$$

açıktır. Burada, $(f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(h_S \circ h_S \circ S_x \circ h_S \circ h_S) \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, h_S bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir.

10.12. Teorem f_S ve h_S , birer EK-hemen hemen tri-bi-ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olsun. $f_S \cong f_S \tilde{\cup} h_S$ olup, Teorem 10.11'den, $f_S \tilde{\cup} h_S$, bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir.

10.13. *Sonuç* EK-hemen hemen tri-bi-ideallerin sonlu esnek birleşimleri de bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir.

10.14. *Sonuç* f_S ya da h_S bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir.

Burada, f_S ve h_S birer EK-hemen hemen tri-bi-ideal iken $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

10.15. *Örnek* Örnek 10.2'deki f_S ve h_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve h_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen tri-bi-ideal olduğu, Örnek 10.2'de gösterilmiştir. Fakat,

$$f_S \tilde{\cap} h_S = \{(q, \emptyset), (w, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

olduğundan, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal değildir.

Şimdi, S yarıgrubunun hemen hemen tri-bi-ideali ile EK-hemen hemen tri-bi-ideali arasındaki ilişki verilecektir.

10.16. Teorem A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olmasıdır.

İspat: A, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-ideali olsun. O halde, her $x \in S$ için, $AAxAA \cap A \neq \emptyset$ yani, $z \in AAxAA \cap A$ olacak şekilde en az bir $z \in S$ vardır. Buradan,

$$((S_A \circ S_A \circ S_x \circ S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A)(z) = (S_{AAxAA} \tilde{\cap} S_A)(z) = (S_{AAxAA \cap A})(z) = U \neq \emptyset$$

olup, $(S_A \circ S_A \circ S_x \circ S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, S_A bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir.

Tersine, S_A bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olsun. O halde, $(S_A \circ S_A \circ S_x \circ S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$. Kabul gereği, $A \neq \emptyset$. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \emptyset_S \neq (S_A \circ S_A \circ S_x \circ S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A &\Rightarrow \exists i \in S; ((S_A \circ S_A \circ S_x \circ S_A \circ S_A) \tilde{\cap} S_A)(i) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists i \in S; ((S_{AAxAA} \tilde{\cap} S_A)(i) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists i \in S; (S_{(AAxAA) \cap A})(i) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists i \in S; (S_{(AAxAA) \cap A})(i) = U \\ &\Rightarrow i \in AAxAA \cap A \end{aligned}$$

olup, $AAxAA \cap A \neq \emptyset$ elde edilir. Böylece, A, S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-idealidir.

10.17. Örnek $S = \{\ell, \ell, v\}$ kümesi üzerinde, Tablo 10.2 yardımıyla tanımlanan “ $\boxtimes$ ” ikili işlemi ile $(S, \boxtimes)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\boxtimes$	ℓ	ℓ	v
ℓ	v	ℓ	ℓ
ℓ	ℓ	v	v
v	ℓ	v	v

Tablo 10.2. Örnek 10.17’deki “ $\boxtimes$ ” ikili işlemi

$W = \{\ell, \nu\}$, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, W kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Rutin hesaplamalarla, W kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu $S_W = \{(\ell, U), (\ell, \emptyset), (\nu, U)\}$ 'nin bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olduğu gösterilebilir.

Tersine, $X = \{\ell, \nu\}$ kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olan f_S EK-hemen hemen tri-bi-idealini $f_S = \{(\ell, U), (\ell, \emptyset), (\nu, U)\}$ olarak alırsak, rutin hesaplamalarla, $X = \{\ell, \nu\}$ kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-ideali olduğu gösterilebilir.

10.18. Teorem f_S , bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal ise $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-idealidir.

İspat: f_S bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olsun. O halde, $f_S \neq \emptyset_S$, $\text{supp}(f_S) \neq \emptyset$ ve her $x \in S$ için, $(f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. $\text{supp}(f_S)$ 'nin S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-ideali olduğunu göstermek için, Teorem 10.16'dan, $S_{\text{supp}(f_S)}$ 'nin bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 5.13'ten,

$$(f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \subseteq (S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)}$$

ve

$$(f_S \circ f_S \circ S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$$

olduğundan, $(S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)} \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, $S_{\text{supp}(f_S)}$, bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olup, Teorem 10.16'dan, $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-idealidir.

Teorem 10.18'in karşınının genellikle doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

10.19. Örnek Örnek 10.17'de verilen S yarıgrubunu ele alalım. $U = \mathbb{Z}^-$ evrensel kümesi üzerinde l_S esnek kümesi, $l_S = \{(\ell, \{-1\}), (\ell, \{-2\}), (\nu, \emptyset)\}$ şeklinde tanımlansın. Burada, l_S esnek kümesi bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
[(l_S \circ l_S \circ S_\ell \circ l_S \circ l_S) \tilde{\cap} l_S](\mathcal{B}) &= (l_S \circ l_S \circ S_\ell \circ l_S \circ l_S)(\mathcal{B}) \cap l_S(\mathcal{B}) \\
&= [((l_S \circ l_S)(\mathcal{B}) \cap (S_\ell \circ l_S \circ l_S)(\mathcal{B})) \cup ((l_S \circ l_S)(\mathcal{B}) \cap (S_\ell \circ l_S \circ l_S)(\mathcal{V})) \\
&\quad \cup ((l_S \circ l_S)(\mathcal{L}) \cap (S_\ell \circ l_S \circ l_S)(\mathcal{B})) \cup ((l_S \circ l_S)(\mathcal{V}) \cap (S_\ell \circ l_S \circ l_S)(\mathcal{B}))] \\
&\quad \cap l_S(\mathcal{B}) \\
&= [\emptyset \cup ((l_S \circ l_S)(\mathcal{B}) \cap (l_S \circ l_S)(\mathcal{V})) \cup \emptyset \cup ((l_S \circ l_S)(\mathcal{V}) \cap (l_S \circ l_S)(\mathcal{B}))] \\
&\quad \cap l_S(\mathcal{B}) = [(l_S \circ l_S)(\mathcal{B}) \cap (l_S \circ l_S)(\mathcal{V})] \cap l_S(\mathcal{B}) \\
&= [(l_S(\mathcal{B}) \cap l_S(\mathcal{L})) \cup (l_S(\mathcal{B}) \cap l_S(\mathcal{V}))] \cap l_S(\mathcal{B}) \\
&= l_S(\mathcal{B}) \cap (l_S(\mathcal{L}) \cup l_S(\mathcal{V})) = \emptyset
\end{aligned}$$

$$[(l_S \circ l_S \circ S_\ell \circ l_S \circ l_S) \tilde{\cap} l_S](\mathcal{L}) = (l_S \circ l_S \circ S_\ell \circ l_S \circ l_S)(\mathcal{L}) \cap l_S(\mathcal{L}) = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
[(l_S \circ l_S \circ S_\ell \circ l_S \circ l_S) \tilde{\cap} l_S](\mathcal{V}) &= (l_S \circ l_S \circ S_\ell \circ l_S \circ l_S)(\mathcal{V}) \cap l_S(\mathcal{V}) \\
&= [((l_S \circ l_S)(\mathcal{B}) \cap (S_\ell \circ l_S \circ l_S)(\mathcal{B})) \cup ((l_S \circ l_S)(\mathcal{L}) \cap (S_\ell \circ l_S \circ l_S)(\mathcal{L})) \\
&\quad \cup ((l_S \circ l_S)(\mathcal{L}) \cap (S_\ell \circ l_S \circ l_S)(\mathcal{V})) \cup ((l_S \circ l_S)(\mathcal{V}) \cap (S_\ell \circ l_S \circ l_S)(\mathcal{L})) \\
&\quad \cup ((l_S \circ l_S)(\mathcal{V}) \cap (S_\ell \circ l_S \circ l_S)(\mathcal{V}))] \cap l_S(\mathcal{V}) \\
&= [((l_S \circ l_S)(\mathcal{B}) \cap (l_S \circ l_S)(\mathcal{B})) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \\
&\quad \cup ((l_S \circ l_S)(\mathcal{V}) \cap ((l_S \circ l_S)(\mathcal{L}) \cup (l_S \circ l_S)(\mathcal{V})))] \cap l_S(\mathcal{V}) \\
&= [(l_S \circ l_S)(\mathcal{B}) \cup (l_S \circ l_S)(\mathcal{V})] \cap l_S(\mathcal{V}) = [l_S(\mathcal{B}) \cup l_S(\mathcal{L}) \cup l_S(\mathcal{V})] \cap l_S(\mathcal{V}) \\
&= l_S(\mathcal{V}) = \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(l_S \circ l_S \circ S_\ell \circ l_S \circ l_S) \tilde{\cap} l_S = \{(\mathcal{B}, \emptyset), (\mathcal{L}, \emptyset), (\mathcal{V}, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, l_S bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal değildir. Fakat, $\text{supp}(l_S) = \{\mathcal{B}, \mathcal{L}\}$, S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-idealidir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
&(\text{supp}(l_S) \text{supp}(l_S) \{\mathcal{B}\} \text{supp}(l_S)) \text{supp}(l_S) \cap \text{supp}(l_S) \\
&= (\{\mathcal{B}, \mathcal{L}\} \{\mathcal{B}, \mathcal{L}\} \{\mathcal{B}\} \{\mathcal{B}, \mathcal{L}\}) \cap \{\mathcal{B}, \mathcal{L}\} = \{\mathcal{B}\} \neq \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (supp(l_S)supp(l_S)\{\ell\}supp(l_S)supp(l_S)) \cap supp(l_S) \\ & = (\{\ell, \ell\}\{\ell, \ell\}\{\ell\}\{\ell, \ell\}\{\ell, \ell\}) \cap \{\ell, \ell\} = \{\ell\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (supp(l_S)supp(l_S)\{v\}supp(l_S)supp(l_S)) \cap supp(l_S) \\ & = (\{\ell, \ell\}\{\ell, \ell\}\{v\}\{\ell, \ell\}\{\ell, \ell\}) \cap \{\ell, \ell\} = \{\ell\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

olup, her $x \in S$ için, $(supp(l_S)supp(l_S)\{x\}supp(l_S)supp(l_S)) \cap supp(l_S) \neq \emptyset$ elde edilir. O halde, $supp(l_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-idealdir.

10.20. Tanım f_S ve h_S , $h_S \cong f_S$ olacak şekilde, birer EK-hemen hemen tri-bi-ideal olsun. $supp(h_S) = supp(f_S)$ ise f_S esnek kümesine, bir minimal EK-hemen hemen tri-bi-ideal denir.

10.21. Teorem A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere A kümesinin S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen tri-bi-ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir minimal EK-hemen hemen tri-bi-ideal olmasıdır.

İspat: A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen tri-bi-ideali olsun. O halde, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-idealidir ve Teorem 10.16'dan, S_A bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir. $f_S \cong S_A$ olacak şekilde f_S bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olsun. Teorem 10.18'den, $supp(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-idealidir ve Not 2.3.12'den ve Sonuç 2.3.17'den,

$$supp(f_S) \subseteq supp(S_A) = A$$

elde edilir. A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen tri-bi-ideali olduğundan, $supp(f_S) = supp(S_A) = A$ olup, böylece, Tanım 10.20'den, S_A bir minimal EK-hemen hemen tri-bi-idealdir.

Tersine, S_A bir minimal EK-hemen hemen tri-bi-ideal olsun. O halde, S_A bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal ve Teorem 10.16'dan, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-idealidir. $B \subseteq A$ olacak şekilde B , S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-ideali olsun. Teorem

10.16'dan, S_B bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal ve Teorem 2.3.18 (i)'den, $S_B \cong S_A$ olur. S_A bir minimal EK-hemen hemen tri-bi-ideal olduğundan ve Sonuç 2.3.17'den,

$$B = \text{supp}(S_B) = \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. Böylece, A, S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen tri-bi-idealidir.

10.22. Tanım f_S, g_S ve h_S birer EK-hemen hemen tri-bi-ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ g_S \cong f_S$ olması, $h_S \cong f_S$ veya $g_S \cong f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-asal hemen hemen tri-bi-ideal denir.

10.23. Tanım f_S ve h_S birer EK-hemen hemen tri-bi-ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ h_S \cong f_S$ olması, $h_S \cong f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-yarı asal hemen hemen tri-bi-ideal denir.

10.24. Tanım f_S, g_S ve h_S birer EK-hemen hemen tri-bi-ideal olsun. Bu durumda, $(h_S \circ g_S) \tilde{\cap} (g_S \circ h_S) \cong f_S$ olması, $h_S \cong f_S$ veya $g_S \cong f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-kuvvetli asal hemen hemen tri-bi-ideal denir.

Her EK-kuvvetli asal hemen hemen tri-bi-idealın, bir EK-asal hemen hemen tri-bi-ideal olduğu ve her EK-asal hemen hemen tri-bi-idealın, bir EK-yarı asal hemen hemen tri-bi-ideal olduğu açıktır.

10.25. Teorem P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-asal hemen hemen tri-bi-ideal ise, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen tri-bi-idealidir.

İspat: S_P , bir EK-asal hemen hemen tri-bi-ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir ve Teorem 10.16'dan, P, S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-idealidir. $AB \subseteq P$ olacak şekilde, A ve B, S yarıgrubunun birer hemen hemen tri-bi-ideali olsun. Bu durumda, Teorem 10.16'dan, S_A ve S_B , birer EK-hemen hemen tri-bi-idealdir ve Teorem 2.3.18 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_B = S_{AB} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-asal hemen hemen tri-bi-ideal ve $S_A \circ S_B \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ veya $S_B \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18

(i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen tri-bi-idealidir.

10.26. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen tri-bi-ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen tri-bi-idealidir.

İspat: S_P , bir EK-yarı asal hemen hemen tri-bi-ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir ve Teorem 10.16'dan, P , S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-idealidir. $AA \subseteq P$ olacak şekilde, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-ideali olsun. Bu durumda, Teorem 10.16'dan, S_A bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir ve Teorem 2.3.18 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_A = S_{AA} \subseteq S_P$ elde edilir. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen tri-bi-ideal ve $S_A \circ S_A \subseteq S_P$ olduğundan, $S_A \subseteq S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18 (i)'den, $A \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen tri-bi-idealidir.

10.27. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen tri-bi-ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen tri-bi-idealidir.

İspat: S_P , bir EK-kuvvetli asal hemen hemen tri-bi-ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen tri-bi-idealdir ve Teorem 10.16'dan, P , S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-idealidir. $AB \cap BA \subseteq P$ olmak üzere, A ve B , S yarıgrubunun birer hemen hemen tri-bi-ideali olsun. Bu durumda, Teorem 10.16'dan, S_A ve S_B birer EK-hemen hemen tri-bi-idealdir ve Teorem 2.3.18'den, $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) = S_{AB} \tilde{\cap} S_{BA} = S_{AB \cap BA} \subseteq S_P$ elde edilir. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen tri-bi-ideal ve $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) \subseteq S_P$ olduğundan, $S_A \subseteq S_P$ veya $S_B \subseteq S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.18 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen tri-bi-idealidir.

11. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yarıgrupların zayıf-iç idealleri, bi-iç idealleri, hemen hemen alt yarıgrupları, hemen hemen idealleri, hemen hemen bi-iç idealleri, hemen hemen bi-quasi idealleri çeşitli araştırmacılar tarafından çalışılmıştır. Bu tez çalışmasında ise klasik yarıgrup teorisinde çalışılan bu idealler esnek küme teorisine uygulanmış, yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen zayıf-iç idealleri ve esnek kesişimsel hemen hemen tri-bi-idealleri tanıtılmıştır. Yarıgruplarda esnek küme teorisinde tanıtılan bu birçok esnek kesişimsel ideal örneklendirilip tüm özellikleri ayrıntılı şekilde incelenmiş, birbirleri ve önceden tanımlanmış diğer esnek kesişimsel idealler ile olan ilişkilerine bakılmış ve bu amaçla sol (sağ) esnek basit* yarıgrup kavramı tanıtılmıştır. Ayrıca, klasik yarıgrup teorisi ve esnek küme teorisi arasındaki önemli bağlantılar, bazı ana teoremler ve örneklerle sunulmuştur.

On bir bölümden oluşan tezin birinci bölümünde, yarıgruplar ve (hemen hemen) idealleri, esnek kümeler ve yarıgrupların çeşitli esnek kesişimsel (hemen hemen) idealleri ile ilgili kaynak taraması yapılmış; ikinci bölümde, bu tez çalışmasında kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiş, esnek sol (sağ) basit* yarıgrup kavramı tanıtılmış ve örneklendirilmiştir.

Üçüncü bölümde, EK-zayıf-iç idealler tanıtılmış, sağlayan ve sağlamayan örnekleri verilmiş, esnek küme teorisinde var olan tüm özellikler bu idealler üzerinde ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Bu bağlamda, bazı dikkate değer sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin, regüler bir yarı grubun her EK-sol (sağ) zayıf-iç idealinin bir EK-alt yarı grup olduğu gösterilmiştir. Her EK-sol (sağ) idealin bir EK-sol (sağ) zayıf-iç ideal olduğu, fakat karşıtının geçerli olabilmesi için yarı grubun sol (sağ) basit yarı grup veya esnek kümenin idempotent olması gerektiği; her EK-idealın bir EK-zayıf-iç ideal olduğu, fakat karşıtının geçerli olabilmesi için yarı grubun bir grup veya esnek kümenin idempotent olması gerektiği gösterilmiştir. Buradan, idempotent bir EK-(sol/sağ) zayıf-iç idealin, EK-(sol/sağ) ideal ile çakışık olduğu ve böylece EK-(sol/sağ) idealin tüm özelliklerini sağladığı sonucuna ulaşılmıştır. Her EK-iç idealin bir EK-sol (sağ) zayıf-iç ideal olduğu, fakat karşıtının geçerli olabilmesi için yarı grubun sol (sağ) basit yarı grup olması gerektiği; her EK-iç idealin bir EK-zayıf-iç ideal olduğu, fakat karşıtının geçerli olabilmesi için yarı grubun bir grup olması gerektiği gösterilmiştir. Bir EK-bi-ideal ile EK-zayıf-iç ideal arasındaki ilişkiler ve bir EK-quasi-ideal

ile EK-zayıf-iç ideal arasındaki ilişkiler birbirinin aynısı olup bir EK-bi-idealın (EK-quasi-idealın), bir EK-sağ zayıf-iç ideal olabilmesi için yarıgrubun sol basit yarıgrup olması gerektiği; karşıtının geçerli olabilmesi için ise yarıgrubun sağ basit yarıgrup olması gerektiği gözlemlenmiştir. Benzer şekilde, bir EK-bi-idealın (EK-quasi-idealın), bir EK-sol zayıf-iç ideal olabilmesi için yarıgrubun sağ basit yarıgrup olması gerektiği; karşıtının geçerli olabilmesi için ise yarıgrubun sol basit yarıgrup olması gerektiği görülmüştür. Böylece, bir grubun EK-zayıf-iç ideali ile EK-bi-ideali (EK-quasi-ideali) denk olduğu sonucuna varılmıştır. Bir alt yarıgrup, bir zayıf-iç ideal ise bu alt yarıgrubun esnek karakteristik fonksiyonunun bir EK-zayıf-iç ideal olduğu ve bunun karşıtının da geçerli olduğu, bir teorem ile gösterilmiştir ve örneklendirilmiştir. Böylece, klasik yarıgrup teorisi ile esnek küme teorisi arasında önemli bir ilişki kurulmuştur. EK-zayıf-iç ideallerin sonlu esnek kesişimlerinin de bir EK-zayıf-iç ideal olduğu gösterilmiş; esnek kesişimsel çarpım işleminin EK-zayıf-iç idealler üzerinde gösterdiği sonuçlar incelenmiştir. Bir EK-alt yarıgrup, bir EK-sol (sağ) zayıf-iç ideal ise onun üst α -kapsama kümesinin de bir sol (sağ) zayıf-iç ideal olduğu bir teorem ile kanıtlanmış ve örneklendirilmiştir. Farklı yarıgrupların iki EK-sol (sağ) zayıf-iç idealinin, $\wedge$ -çarpım, kartezyen çarpım işlemleri ile esnek görüntü ve esnek ters görüntü kavramları ile ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca, idempotentlik şartı altında, bir yarıgrubun regülerliği ile esnek kümenin EK-sol (sağ) zayıf-iç idealliği arasında çift gerektirme ilişkisi kurularak, klasik yarıgrup teorisi ile esnek küme teorisi arasındaki bağlantı pekiştirilmiştir.

Dördüncü bölümde, EK-bi-iç idealler tanıtılmış, sağlayan ve sağlamayan örnekleri verilmiş, esnek küme teorisinde var olan tüm özellikler bu idealler üzerinde ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Bu kapsamda, bazı kayda değer sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin, esnek basit* bir yarıgrubun her EK-bi-iç idealinin bir EK-alt yarıgrup olduğu gösterilmiştir. Her EK-sol (sağ/iki taraflı) ideal, EK-bi-ideal, EK-iç ideal ve EK-quasi-idealın bir EK-bi-iç ideal olduğu, fakat karşıtlarının geçerli olabilmesi için yarıgrubun esnek basit* yarıgrup olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Bir yarıgrubun boş kümeden farklı bir alt kümesi bir bi-iç ideal ise bu alt kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun bir EK-bi-iç ideal olduğu ve bunun karşıtının da geçerli olduğu, bir teorem ile gösterilmiştir ve örneklendirilmiştir. Böylece, klasik yarıgrup teorisi ile esnek küme teorisi arasında önemli bir ilişki kurulmuştur. Esnek kesişimsel çarpım işlemi ile EK-bi-iç idealler arasındaki ilişki incelenmiş; EK-bi-iç ideallerin sonlu esnek kesişimlerinin de bir EK-bi-iç ideal olduğu gösterilmiştir. Bir esnek

küme, bir EK-bi-iç ideal ise onun üst α -kapsama kümesinin de bir bi-iç ideal olduğu bir teorem ile kanıtlanmış ve örneklendirilmiştir. Ayrıca, bir yarıgrupun regülerliği ile esnek kümenin EK-bi-iç ideallliği arasında çift gerektirme ilişkisi kurularak, klasik yarıgrup teorisi ile esnek küme teorisi arasındaki bağlantı pekiştirilmiştir.

Beşinci bölümde, EK-hemen hemen alt yarıgruplar tanıtılmış, sağlayan ve sağlamayan örnekleri verilmiş, esnek küme teorisinde var olan tüm özellikler bu idealler üzerinde ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Bu doğrultuda, bazı dikkate değer sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin, boş esnek kümeden farklı bir EK-alt yarıgrupun, bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olduğu ispatlanmış; ancak karşıtının her zaman doğru olmadığı bir aksi örnek ile gösterilmiştir. EK-hemen hemen alt yarıgrupların sonlu esnek birleşimlerinin de bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olduğu gösterilmiş; ancak esnek kesişimlerinin her zaman bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olmadığını gösteren aksine bir örnek verilmiştir. Bir yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesi bir hemen hemen alt yarıgrup ise bu alt kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun da bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olduğu ve bunun karşıtının da geçerli olduğu bir teorem ile gösterilmiştir ve örneklendirilmiştir. Bir EK-hemen hemen alt yarıgrupun destek kümesinin de bir hemen hemen alt yarıgrup olduğu gösterilmiştir. Boş kümeden farklı bir kümenin bir minimal hemen hemen alt yarıgrup olması ile bu kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun bir minimal EK-hemen hemen alt yarıgrup olması arasında çift gerektirme ilişkisi elde edilmiştir. Ayrıca, bir yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu bir EK-hemen hemen asal (yarı asal, kuvvetli asal) alt yarıgrup ise bu kümenin bir hemen hemen asal (yarı asal, kuvvetli asal) alt yarıgrup olduğu teoremler ile kanıtlanmıştır.

Altıncı bölümde, EK-hemen hemen idealler tanıtılmış, sağlayan ve sağlamayan örnekleri verilmiş, esnek küme teorisinde var olan tüm özellikler bu idealler üzerinde ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Bu kapsamda, bazı çarpıcı sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin, boş esnek kümeden farklı bir EK-sol (sağ/iki taraflı) idealin, bir EK-hemen hemen sol (sağ/iki taraflı) ideal olduğu ispatlanmış; ancak karşıtının her zaman doğru olmadığı aksine bir örnek ile gösterilmiştir. Her idempotent EK-hemen hemen sol (sağ/iki taraflı) idealin bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olduğu kanıtlanmıştır. EK-hemen hemen sol (sağ/iki taraflı) ideallerin sonlu esnek birleşimlerinin de bir EK-hemen hemen sol (sağ/iki taraflı) ideal olduğu gösterilmiş; ancak esnek kesişimlerinin her zaman bir EK-hemen hemen sol (sağ/iki taraflı)

ideal olmadığını gösteren bir örnek verilmiştir. Bir yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesi bir hemen hemen (sol/sağ) ideal ise bu alt kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun da bir EK-hemen hemen (sol/sağ) ideal olduğu ve bunun karşıtının da geçerli olduğu bir teorem ile gösterilmiştir ve örneklendirilmiştir. Bir EK-hemen hemen sol (sağ/iki taraflı) idealin destek kümesinin de bir hemen hemen sol (sağ/iki taraflı) ideal olduğu gösterilmiştir. Bir yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesi bir minimal hemen hemen sol (sağ/iki taraflı) ideal olması ile bu kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun bir minimal EK-hemen hemen sol (sağ/iki taraflı) ideal olması arasında çift gerektirme ilişkisi elde edilmiştir. Ayrıca, bir yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu bir EK-asal (yarı asal, kuvvetli asal) hemen hemen sol (sağ/iki taraflı) ideal ise o kümenin bir asal (yarı asal, kuvvetli asal) hemen hemen sol (sağ/iki taraflı) ideal olduğu teoremler ile kanıtlanmıştır.

Yedinci bölümde, EK-hemen hemen zayıf-iç idealler tanıtılmış, sağlayan ve sağlamayan örnekleri verilmiş, esnek küme teorisinde var olan tüm özellikler bu idealler üzerinde ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Bu bağlamda, bazı dikkat çekici sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin, bir EK-(sol/sağ) zayıf-iç idealin, gerekli şartlar altında bir EK-hemen hemen (sol/sağ) zayıf-iç ideal olduğu ispatlanmış; ancak karşıtının her zaman doğru olmadığı bir aksi örnek ile gösterilmiştir. Her idempotent EK-hemen hemen (sol/sağ) zayıf-iç idealin bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca, esnek kümenin idempotent olduğu durumda, EK-hemen hemen (sol/sağ) zayıf-iç ideal ile EK-hemen hemen (sol/sağ) idealin birbirine denk olduğu gösterilmiştir. EK-hemen hemen (sol/sağ) zayıf-iç ideallerin sonlu esnek birleşimlerinin de bir EK-hemen hemen (sol/sağ) zayıf-iç ideal olduğu gösterilmiş; ancak esnek kesişimlerinin her zaman bir EK-hemen hemen (sol/sağ) zayıf-iç ideal olmadığını gösteren bir örnek verilmiştir. Bir yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesi bir hemen hemen (sol/sağ) zayıf-iç ideal ise bu kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun da bir EK-hemen hemen (sol/sağ) zayıf-iç ideal olduğu ve bunun karşıtının da geçerli olduğu bir teorem ile gösterilmiştir ve örneklendirilmiştir. Bir EK-hemen hemen (sol/sağ) zayıf-iç idealin destek kümesinin de bir hemen hemen (sol/sağ) zayıf-iç ideal olduğu gösterilmiştir. Boş kümeden farklı bir kümenin bir minimal hemen hemen (sol/sağ) zayıf-iç ideal olması ile bu kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun bir minimal EK-hemen hemen (sol/sağ) zayıf-iç ideal olması arasında çift gerektirme ilişkisi elde edilmiştir. Ayrıca, bir yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu

bir EK-asal (yarı asal, kuvvetli asal) hemen hemen (sol/sağ) zayıf-iç ideal ise o kümenin bir asal (yarı asal, kuvvetli asal) hemen hemen (sol/sağ) zayıf-iç ideal olduğu teoremler ile kanıtlanmıştır.

Sekizinci bölümde, EK-hemen hemen bi-iç idealler ve EK-zayıf hemen hemen bi-iç idealler tanıtılmış, sağlayan ve sağlamayan örnekleri verilmiş, esnek küme teorisinde var olan tüm özellikler bu idealler üzerinde ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Bu doğrultuda, bazı kayda değer sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin, bir EK-zayıf hemen hemen bi-iç idealin, EK-hemen hemen bi-iç idealin genellemesi olduğu sonucuna ulaşılmış; ancak karşıtının her zaman doğru olmadığı bir aksi örnek ile gösterilmiştir. Bir EK-bi-iç idealin, gerekli şartlar altında bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olduğu gözlemlenmiş; ancak karşıtının her zaman doğru olmadığı bir aksi örnek ile gösterilmiştir. Bir EK-hemen hemen bi-iç idealin, bir EK-hemen hemen bi-ideal ve EK-hemen hemen iç ideal olduğu ispatlanmış; fakat karşıtlarının her zaman doğru olmadığı birer aksi örnek ile gösterilmiştir. İdempotent bir EK-hemen hemen bi-iç idealin, hem bir EK-hemen hemen alt yarıgrup hem bir EK-hemen hemen tri-ideal hem de bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olduğu kanıtlanmıştır. EK-hemen hemen bi-iç ideallerin sonlu esnek birleşimlerinin de bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olduğu gösterilmiş; ancak esnek kesişimlerinin her zaman bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olmadığını gösteren bir örnek verilmiştir. Boş kümeden farklı bir küme bir hemen hemen bi-iç ideal ise bu kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun da bir EK-hemen hemen bi-iç ideal olduğu ve bunun karşıtının da geçerli olduğu bir teorem ile gösterilmiştir ve örneklendirilmiştir. Bir EK-hemen hemen bi-iç idealin destek kümesinin de bir hemen hemen bi-iç ideal olduğu gösterilmiştir. Bir yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesinin bir minimal hemen hemen bi-iç ideal olması ile bu kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun bir minimal EK-hemen hemen bi-iç ideal olması arasında çift gerektirme ilişkisi elde edilmiştir. Ayrıca, bir yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu bir EK-asal (yarı asal, kuvvetli asal) hemen hemen asal bi-iç ideal ise o kümenin bir hemen asal (yarı asal, kuvvetli asal) hemen bi-iç ideal olduğu teoremler ile kanıtlanmıştır.

Dokuzuncu bölümde, EK-hemen hemen bi-quasi idealler ve EK-zayıf hemen hemen bi-quasi idealler tanıtılmış, sağlayan ve sağlamayan örnekleri verilmiş, esnek küme teorisinde var olan tüm özellikler bu idealler üzerinde ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Bu kapsamda, bazı dikkate değer sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin, bir EK-zayıf hemen hemen bi-quasi idealin,

EK-hemen hemen bi-quasi idealin genellemesi olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bir EK-bi-quasi idealin, gerekli şartlar altında bir EK-hemen hemen bi-quasi ideal olduğu gözlemlenmiş; ancak karşıtının her zaman doğru olmadığı bir aksi örnek ile gösterilmiştir. Bir EK-hemen hemen (sol/sağ) bi-quasi idealin, bir EK-hemen hemen (sol/sağ) ideal olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, bir EK-hemen hemen (sol/sağ) bi-quasi idealin, bir EK-hemen hemen bi-ideal olduğu ispatlanmış; fakat karşıtının her zaman doğru olmadığı bir aksi örnek ile gösterilmiştir. İdempotent bir EK-hemen hemen (sol/sağ) bi-quasi idealin; bir EK-hemen hemen alt yarıgrup, bir EK-hemen hemen (sol/sağ) zayıf-iç ideal, bir EK-hemen hemen tri-ideal ve bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olduğu kanıtlanmıştır. EK-hemen hemen (sol/sağ) bi-quasi ideallerin sonlu esnek birleşimlerinin de bir EK-hemen hemen (sol/sağ) bi-quasi ideal olduğu gösterilmiş; ancak esnek kesişimlerinin her zaman bir EK-hemen hemen (sol/sağ) bi-quasi ideal olmadığını gösteren bir örnek verilmiştir. Boş kümeden farklı bir küme bir hemen hemen (sol/sağ) bi-quasi ideal ise bu kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun da bir EK-hemen hemen (sol/sağ) bi-quasi ideal olduğu ve bunun karşıtının da geçerli olduğu bir teorem ile gösterilmiştir ve örneklendirilmiştir. Bir EK-hemen hemen (sol/sağ) bi-quasi idealin destek kümesinin de bir hemen hemen (sol/sağ) bi-quasi ideal olduğu gösterilmiştir. Bir yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesinin bir minimal hemen hemen (sol/sağ) bi-quasi ideal olması ile bu kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun bir minimal EK-hemen hemen (sol/sağ) bi-quasi ideal olması arasında çift gerektirme ilişkisi elde edilmiştir. Ayrıca, bir yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu bir EK- asal (yarı asal, kuvvetli asal) hemen hemen (sol/sağ) bi-quasi ideal ise o kümenin bir asal (yarı asal, kuvvetli asal) hemen hemen (sol/sağ) bi-quasi ideal olduğu teoremler ile kanıtlanmıştır.

Onuncu bölümde, EK-hemen hemen tri-bi-idealler tanıtılmış, sağlayan ve sağlamayan örnekleri verilmiş, esnek küme teorisinde var olan tüm özellikler bu idealler üzerinde ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Bu bağlamda, bazı dikkat çekici sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin, bir EK-tri-bi-idealın, gerekli şartlar altında bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olduğu ispatlanmış; ancak karşıtının her zaman doğru olmadığı bir aksi örnek ile gösterilmiştir. Her idempotent EK-hemen hemen tri-bi-idealın bir EK-hemen hemen alt yarıgrup olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca, esnek kümenin idempotent olduğu durumda, EK-hemen hemen tri-bi-ideal ile EK-hemen hemen bi-idealın birbirine denk olduğu ve EK-hemen hemen tri-bi-ideal ile EK-hemen hemen tri-idealın birbirine denk olduğu

gösterilmiştir. EK-hemen hemen tri-bi-ideallerin sonlu esnek birleşimlerinin de bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olduğu gösterilmiş; ancak esnek kesişimlerinin her zaman bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olmadığını gösteren bir örnek verilmiştir. Boş kümeden farklı bir küme bir hemen hemen tri-bi-ideal ise bu kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun da bir EK-hemen hemen tri-bi-ideal olduğu ve bunun karşınının da geçerli olduğu bir teorem ile gösterilmiştir ve örneklendirilmiştir. Bir EK-hemen hemen tri-bi-idealın destek kümesinin de bir hemen hemen tri-bi-ideal olduğu gösterilmiştir. Bir yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesi bir minimal hemen hemen tri-bi-ideal olması ile bu kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun bir minimal EK-hemen hemen tri-bi-ideal olması arasında çift gerektirme ilişkisi elde edilmiştir. Ayrıca, bir yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu bir EK asal (yarı asal, kuvvetli asal) hemen hemen tri-bi-ideal ise o kümenin bir asal (yarı asal, kuvvetli asal) hemen hemen bi-ideal olduğu teoremler ile kanıtlanmıştır.

Yarıgruplar, matematiksel yapılar olarak birçok alanda temel rol oynamaktadır ve bu yapıların analizinde ideallerin rolü oldukça önemlidir. Bu bağlamda, yarıgrupların esnek kesişimsel idealleri, klasik yarıgrup teorisi ile esnek küme teorisi arasındaki ilişkileri keşfetmemize yardımcı olur ve dikkate değer bir inceleme alanı sunar. Bu açıdan, yarıgrupların çeşitli esnek kesişimsel idealleri ve esnek kesişimsel hemen hemen ideallerinin tanımlandığı bu çalışmanın, yarıgrup teorisi ve esnek küme teorisine önemli katkılar sağladığını düşünüyor; gelecek çalışmaların önünü açmasını ve araştırmalara yol göstermesini umuyoruz. İlerleyen zamanlarda, yarıgrupların esnek kesişimsel tri-idealleri, tri-bi-idealleri, esas idealleri gibi çeşitli esnek kesişimsel idealleri ve bu ideallerin regüler, iç-regüler, sol (sağ) basit yarıgruplar, sol (sağ) sıfır yarıgruplar, yarı basit yarıgruplar gibi bazı yarıgrup türleri üzerindeki karakterizasyonları ile ilgili bazı çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Acar, U., Koyuncu, F. and Tanay, B. (2010). Soft Sets and Soft Rings. *Computers Mathematics Applications*, 59(11), 3458-3463.
- Aktaş, H. and Çağman, N. (2007). Soft Sets and Soft Groups. *Information Sciences*, 177(13), 2726-2735.
- Aktaş, H. and Özlü, Ş. (2014). Cyclic Soft Groups and Their Applications on Groups. *The Scientific World Journal*, Volume 2014, Article ID 437324, 5 pages.
- Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K. and Shabir, M. (2009). On Some New Operations in Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 57(9), 1547-1553.
- Ali, M. I., Shabir, M. and Naz, M. (2011). Algebraic Structures of Soft Sets Associated with New Operations. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(9), 2647-2654.
- Atagün, A. O. and Sezgin, A. (2018). Soft Subnear-rings, Soft Ideals and Soft N-subgroups of Near-rings. *Mathematical Science Letter*, 7, 37-42.
- Aydın, N. ve Kandamar, H. (2013). *Soyut Cebir* (Birinci Baskı). İstanbul: Kriter Yayınevi, 3-71.
- Babitha, K. V. and Sunil, J. J. (2010). Soft Set Relations and Functions. *Computers and Mathematics with Applications*, 60(7), 1840-1849.
- Baş, Z. H. (2025). Yarıgrupların Esnek Kesişimsel (Hemen Hemen) Bi-quasi-iç İdealleri ve Esnek Kesişimsel Hemen Hemen İç İdealleri. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya.
- Baupradist, S., Chemat, B., Palanivel, K. and Chinram, R. (2021). Essential Ideals and Essential Fuzzy Ideals in Semigroups. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 24(1), 223-233.
- Bogdanovic, S. (1981). Semigroups in Which Some Bi-ideal is a Group. *Zbornik Radova PMF Novi Sad*, 11, 261-266.
- Chinram, R. and Nakkhasen, W. (2022a). Almost Bi-interior Ideals and Their Fuzzification of Semigroups. *ICIC Express Letters*, 16(9), 933-941.
- Chinram, R. and Nakkhasen, W. (2022b). Almost Bi-quasi-interior Ideals and Fuzzy Almost Bi-quasi-interior Ideals of Semigroups. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 26, 128-136.
- Clifford, A. H. and Preston, G. B. (1961). *The Algebraic Theory of Semigroups, Volume I*. Providence: American Mathematical Society, 58-62.
- Clifford, A. H. and Preston, G. B. (1967). *The Algebraic Theory of Semigroups, Volume II*. Providence: American Mathematical Society, 79-83.

- Çağman, N., Çıtak, F. and Aktaş, H. (2012). Soft Int-group and Its Applications to Group Theory. *Neural Computing and Applications*, 21, 151-158.
- Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010). Soft Set Theory and Uni-int Decision Making. *European Journal of Operational Research*, 207(2), 848-855.
- Feng, F., Jun, Y. B. and Zhao, X. (2008). Soft Semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(10), 2621-2628.
- Gaketem, T. (2022). Almost Bi-interior Ideal in Semigroups and Their Fuzzifications. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 15(1), 281-289.
- Gaketem, T. and Chinram, R. (2023). Almost Bi-quasi Ideals and Their Fuzzifications in Semigroups. *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, 50(2), 342-352.
- Good, R. A. and Hughes, D. R. (1952). Associated Groups for a Semigroup. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 58(6), 624-625.
- Grillet, P. A. (1995). *Semigroups: An Introduction to the Structure Theory* (First Edition). Routledge, 101-108.
- Grillet, P. A. (2013). *Commutative Semigroups* (Vol. 2). Springer Science & Business Media, 65-77.
- Grosek, O. and Satko, L. (1980). A New Notion in the Theory of Semigroup. *Semigroup Forum*, 20, 233-240.
- Hacısalıhoğlu, H. (2007). *Soyut Matematik* (İkinci Baskı). Türkiye: Üniversite Yayınevi, 163-181.
- Howie, J. M. (1995). *Fundamentals of Semigroup Theory*. New York: Oxford University Press, 103-109.
- Huntington, E. V. (1902). Simplified Definition of a Group. *Bulletin of the Mathematical Society*, 8(7), 296-300.
- Iampan, A., Chinram, R. and Petchkaew, P. (2021). A Note on Almost Subsemigroups of Semigroups. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 16(4), 1623-1629.
- İlgin, A. and Sezgin, A. (Baskıda a). Soft Intersection Tri-ideals of Semigroups. *Acta Scientiarum Technology*.
- İlgin, A. and Sezgin, A. (Baskıda b). Soft Intersection Tri-bi-ideals of Semigroups. *Journal of the Korean Society for Industrial and Applied Mathematics*.
- James, T. C. (2003). *Fizikte Felsefi Kavramlar 1: Felsefe ve Bilimsel Kuramlar Arasındaki Tarihsel İlişki*. B.Ö. Sarıoğlu (çev.). İstanbul: Sabancı Üniversitesi Yayınları.

- Jana, C., Pal, M., Karaaslan, F. and Sezgin, A. (2019). (α, β) -Soft Intersectional Rings and Ideals with Their Applications. *New Mathematics and Natural Computation*, 15(02), 333-350.
- Jun, Y. B. (2008). Soft BCK-BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(5), 1408-1413.
- Jun, Y. B., Lee, K. J. and Khan, A. (2010). Soft Ordered Semigroups. *Mathematical Logic Quarterly*, 56(1), 42-50.
- Jun, Y. B., Lee, K. J. and Zhan, J. (2009). Soft P-ideals of Soft BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(10), 2060-2068.
- Jun, Y. B. and Park, C. H. (2008). Applications of Soft Sets in Ideal Theory of BCK-BCI-algebras. *Information Sciences: An International Journal*, 178(11), 2466-2475.
- Jun, Y. B., Song, S. Z. and So, K. S. (2011). Soft Set Theory Applied to P-ideals of BCI-algebras Related to Fuzzy Points. *Neural Computing and Applications*, 20(8), 1313-1320.
- Kaopusek, N., Kaewnoi, T. and Chinram, R. (2020). On Almost Interior Ideals and Weakly Almost Interior Ideals of Semigroups. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptograph*, 23(3), 773-778.
- Karaaslan, F. (2019). Some Properties of AG*-groupoids and AG-bands Under SI-product Operation. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(1), 231-239.
- Karaaslan, F., Ullah, A. and Ahmad, I. (2021). Normal Bipolar Soft Subgroups. *Fuzzy Information and Engineering*, 13(1), 79-98.
- Kazancı, O., Yılmaz, S. and Yamak, S. (2010). Soft Sets and Soft BCH-algebras. *Hacettepe Journal of Mathematics Statistics*, 39(2), 205-217.
- Kharal, A. (2014). Soft Approximations and Uni-Int Decision Making. *The Scientific World Journal*, Volume 2014, Article ID 327408, 7 pages.
- Kocakaya, F. Z. (2025). *Yarıgrupların Esnek Kesişimsel (Hemen Hemen) Quasi-iç İdealleri ve Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Quasi-idealleri*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya.
- Lajos, S. (1976). $(m; k; n)$ -ideals in Semigroups. Notes on Semigroups II, *Karl Marx University of Economics Department of Mathematics Budapest*, (1), 12-19.
- Mahmood, T., Rehman, Z. U. and Sezgin, A. (2018). Lattice Ordered Soft Near Rings. *Korean Journal of Mathematics*, 26(3), 503-517.
- Maji, P. K., Biswas, R. and Roy, A. R. (2003). Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45(4-5), 555-562.

- Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory-First Results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19-31.
- Muştuoğlu, E., Sezgin, A. and Türk, Z. K. (2016). Some Characterizations on Soft Uni-groups and Normal Soft Uni-groups. *International Journal of Computer Applications*, 155(10), 1-8.
- Nagy, A. (2013). *Special Classes of Semigroups (Vol. 1)*. Springer Science & Business Media, 43-77.
- Neog, T. J. and Sut, D. K. (2011). A New Approach to the Theory of Soft Set. *International Journal of Computer Applications*, 32(2), 1-6.
- Onur, B. (2025). *Yarıgrupların Esnek Kesişimsel Bi-quasi İdealleri, Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Bi-idealleri ve Tri-idealleri*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya.
- Özlü, Ş. and Sezgin, A. (2020). Soft Covered Ideals in Semigroups. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica*, 12(2), 317-346.
- Park, C. H., Jun, Y. B. and Öztürk, M. A. (2008). Soft WS-algebras. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 23(3), 313-324.
- Pei, D. and Miao, D. (2005). From Soft Sets to Information Systems. *2005 IEEE International Conference on Granular Computing*, 2, 617-621.
- Petrich, M. (1973). *Introduction to Semigroups*. Merrill Columbus, 59-70.
- Petrich, M. (1977). *Lectures in Semigroups*. Wiley New York, 202-211.
- Petrich, M. (1985). Inverse Semigroups. *Semigroup Forum*, 32, 215-219.
- Rao, M. M. K. (2018a). Bi-interior Ideals of Semigroups. *Discussiones Mathematicae General Algebra and Applications*, 38(1), 69-78.
- Rao, M. M. K. (2018b). A Study of a Generalization of Bi-ideal, Quasi-ideal and Interior Ideal of Semigroup. *Mathematica Moravica*, 22(2), 103-115.
- Rao, M. M. K. (2020a). Left Bi-quasi Ideals of Semigroups. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 44, 369-376.
- Rao, M. M. K. (2020b). Quasi-interior Ideals and Weak-interior Ideals. *Asia Pacific Journal of Mathematics*, 7(21), 1-20.
- Rao, M. M. K. (2020c). Weak-interior Ideals and Fuzzy Weak-interior Ideals of Γ -semirings. *Journal of the International Mathematical Virtual Institute*, 10(1), 75-91.
- Rao, M. M. K. (2022a). Bi-interior Ideals and Fuzzy Bi-interior Ideals of Γ -semigroups. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 24(1), 85-100.

- Rao, M. M. K. (2022b). Weak-interior Ideals. *Bulletin of International Mathematical Virtual Institute*, 12(2), 273-285.
- Rao, M. M. K. (2024). Tri-ideals of Semigroups. *Bulletin of International Mathematical Virtual Institute*, 14(2), 213-223.
- Rao, M. M. K., Kona R. K., Rafi, N. and Bolineni, V. (2024). Tri-quasi Ideals and Fuzzy Tri-quasi Ideals of Semigroups. *Annals of Communications in Mathematics*, 7(3), 281-295.
- Rao, M. M. K. and Rao, D. P. R. V. S. (2021). Weak-interior Ideals of Γ -semigroups. *Bulletin of International Mathematical Virtual Institute*, 11(1), 15-24.
- Rao, M. M. K. and Venkateswarlu, B. (2018). Bi-interior Ideals of Γ -semirings. *Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications*, 38(2), 239-254.
- Sezer, A. S. (2014a). A New Approach to LA-semigroup Theory via the Soft Sets. *Journal of Intelligent and Fuzzy System*, 26(5), 2483-2495.
- Sezer, A. S. (2014b). Certain Characterizations of LA-semigroups by Soft Sets. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 27(2), 1035-1046.
- Sezer, A. S. and Atagün, A. O. (2016). A New Kind of Vector Space: Soft Vector Space. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 40(5), 753-770.
- Sezer, A. S., Çağman, N. and Atagün, A. O. (2014). Soft Intersection Interior Ideals, Quasi-ideals and Generalized Bi-ideals; A New Approach to Semigroup Theory II. *Journal of Multiple-valued Logic and Soft Computing*, 23(1-2), 161-207.
- Sezer, A. S., Çağman, N. and Atagün, A. O. (2015a). Uni-soft Substructures of Groups. *Annals of Fuzzy Mathematics And Informatics*, 9(2), 235-246.
- Sezer, A. S., Çağman, N., Atagün, A. O., Ali, M. I. and Türkmen, E. (2015b). Soft Intersection Semigroups, Ideals and Bi-ideals; A New Application on Semigroup Theory I. *Filomat*, 29(5), 917-946.
- Sezgin, A. (2018). A New View on AG-groupoid Theory via Soft Sets for Uncertainty Modeling. *Filomat*, 32(8), 2995-3030.
- Sezgin, A., Ahmad, S. and Mehmood, A. (2019). A New Operation on Soft Sets: Extended Difference of Soft Sets. *Journal of New Theory*, (27), 33-42.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011a). On Operations of Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5), 1457-1467.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011b). Soft Groups and Normalistic Soft Groups. *Computers and Mathematics with Applications*, 62(2), 685-698.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2023). A New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Plus Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 125-142.

- Sezgin, A., Atagün, A. O. and Aygün, E. (2011). A Note on Soft Near-rings and Idealistic Soft Near-rings, *Filomat*, 25(1), 53-68.
- Sezgin, A., Atagün, A. O., Çağman, N. and Demir, H. (2022). On Near-rings with Soft Union Ideals and Applications. *New Mathematics and Natural Computation*, 18(02), 495-511.
- Sezgin, A. and Aybek, F. (2023). A New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Gamma Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(1), 27-45.
- Sezgin, A., Aybek, F. and Atagün, A. O. (2023). A New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Intersection Operation. *Black Sea Journal of Engineering and Science*, 6(4), 330-346.
- Sezgin, A., Aybek, F. and Güngör, N. B. (2023). A New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Union Operation. *Acta Informatica Malaysia*, 7(1), 38-53.
- Sezgin, A. and Baş, Z. H. (2024). Soft-int Almost Interior Ideals for Semigroups. *Information Sciences with Applications*, 4, 25-36.
- Sezgin, A., Baş, Z. H. and İlgin, A. (2025). Soft Intersection Almost Bi-quasi-interior Ideals of Semigroup. *Journal of Fuzzy Extension and Applications*, 6(1), 43-58.
- Sezgin, A. and Çağman, N. (2024). A New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Osmaniye Korkut Ata University Journal of The Institute of Science and Technology*, 7(1), 58-94.
- Sezgin, A., Çağman, N. and Atagün, A. O. (2017). A Completely New View to Soft-int Rings via Soft Uni-int Product. *Applied Soft Computing*, 54, 366-392.
- Sezgin, A., Çağman, N. and Çıtak, F. (2019). α -inclusions Applied to Group Theory via Soft Set and Logic. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(1), 334-352.
- Sezgin, A. and Çalışıcı, H. (2024). A Comprehensive Study on Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(1), 32-54.
- Sezgin, A. and Demirci, A. M. (2023). A New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Star Operation. *Ikonion Journal of Mathematics*, 5(2), 24-52.
- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024a). Soft Intersection Almost Subsemigroups of Semigroups. *International Journal of Mathematics and Physics*, 15(1), 13-20.
- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024b). Soft Intersection Almost Ideals of Semigroups. *Journal of Innovative Engineering and Natural Science*, 4(2), 466-481.
- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024c). Soft Intersection Almost Weak-interior Ideals of Semigroups: A Theoretical Study. *Journal of Natural Sciences and Mathematics of UT-JNSM*, 9(17-18), 372-385.

- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024d). Soft Intersection Almost Bi-interior Ideals of Semigroups. *Journal of Natural and Applied Sciences Pakistan*, 6(1), 1619-1638.
- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024e). Soft Intersection Almost Bi-quasi Ideals of Semigroups. *Soft Computing Fusion with Applications*, 1(1), 27-42.
- Sezgin, A., İlgin, A. and Atagün, A. O. (2024a). Soft Intersection Almost Tri-bi-ideals of Semigroups. *Science and Technology Asia*, 29(4), 1-13.
- Sezgin, A. and Kocakaya F. Z. (Baskıda). Soft Intersection Almost Quasi-ideals of Semigroups. *Songklanakarin Journal of Science and Technology*.
- Sezgin, A., Kocakaya, F. Z. and İlgin, A. (2024b). Soft Intersection Almost Quasi-interior Ideals of Semigroups. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(2), 81-99.
- Sezgin, A. and Onur, B. (2024). Soft Intersection Almost Bi-ideals of Semigroups. *Systemic Analytics*, 2(1), 95-105.
- Sezgin, A., Onur, B. and İlgin, A. (2024c). Soft Intersection Almost Tri-ideals of Semigroups. *SciNexuses*, 1, 126-138.
- Sezgin, A. and Orbay, M. (2022). Analysis of Semigroups with Soft Intersection Ideals. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica*, 14(1), 166-210.
- Sezgin, A. and Sarıalioğlu, M. (2024). A New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Theta Operation. *Kadirli Uygulamalı Bilimler Fakültesi Dergisi*, 4(2), 325-357.
- Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023a). A New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Lambda Operation. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 8(2), 101-133.
- Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023b). A New Soft Set Operation: Soft Binary Piecewise Symmetric Difference Operation. *Necmettin Erbakan University Journal of Science and Engineering*, 5(2), 189-208.
- Steinfeld, O. (1956). Uher Die Quasi Ideals. *Von halbgruppenn Publication Mathematical Debrecen*, 4, 262-275.
- Stojanovic, N. S. (2021). A New Operation on Soft Sets: Extended Symmetric Difference of Soft Sets. *Vojnotehnički glasnik/Military Technical Courier*, 69(4), 779-791.
- Szasz, G. (1977). Interior Ideals in Semigroups. Notes on Semigroups IV. *Karl Marx University of Economics Department of Mathematics Budapest*, 5, 1-7.
- Szasz, G. (1981). Remark on Interior Ideals of Semigroups. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 16, 61-63.
- Tunçay, M. and Sezgin, A. (2016). Soft Union Ring and Its Applications to Ring Theory. *International Journal of Computer Applications*, 151(9), 7-13.

- Ullah, A., Ahmad, I., Hayat, F., Karaaslan, F. and Rashad, M. (2018). Soft Intersection Abel-Grassmann's Groups. *Journal of Hyperstructures*, 7(2), 149-173.
- Ullah, A., Karaaslan, F. and Ahmad, I. (2018). Soft Uni-Abel-Grassmann's Groups. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 11(2), 517-536.
- Wattanatripop, K., Chinram, R. and Changphas, T. (2018). Quasi-A-ideals and Fuzzy A-ideals in Semigroups. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptograph*, 21(5), 1131-1138.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.
- Zhan, J. and Jun, Y. B. (2010). Soft BL-algebras Based on Fuzzy Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(6), 2037-2046.
- Zhu, P. and Wen, Q. (2013). Operations on Soft Sets Revisited. *Journal of Applied Mathematics*, 2013(1), 1-7.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı: Aleyna İLGİN

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Amasya Üniversitesi	2022
Yüksek Lisans	Amasya Üniversitesi	

Yabancı Dili

İngilizce

Korece

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1. Sezgin, A. and İlgin, A. (2024). Soft Intersection Almost Subsemigroups of Semigroups. *International Journal of Mathematics and Physics*, 15(1), 13-20.
2. Sezgin, A. and İlgin, A. (2024). Soft Intersection Almost Ideals of Semigroups. *Journal of Innovative Engineering and Natural Science*, 4(2), 466-481.
3. Sezgin, A. and İlgin, A. (2024). Soft Intersection Almost Weak-interior Ideals of Semigroups: A Theoretical Study. *Journal of Natural Sciences and Mathematics of UT-JNSM*, 9(17-18), 372-385.
4. Sezgin, A. and İlgin, A. (2024). Soft Intersection Almost Bi-interior Ideals of Semigroups. *Journal of Natural and Applied Sciences Pakistan*, 6(1), 1619-1638.
5. Sezgin, A. and İlgin, A. (2024). Soft Intersection Almost Bi-quasi Ideals of Semigroups. *Soft Computing Fusion with Applications*, 1(1), 27-42.
6. Sezgin, A., Kocakaya, F. Z. and İlgin, A. (2024). Soft Intersection Almost Quasi-interior Ideals of Semigroups. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(2), 81-99.

7. Sezgin, A., Baş, Z. H. and İlgin, A. (2025). Soft Intersection Almost Bi-quasi-interior Ideals of Semigroups. *Journal of Fuzzy Extension and Application*, 6(1), 43-58.
8. Sezgin, A., Onur, B. and İlgin, A. (2024). Soft Intersection Almost Tri-ideals of Semigroups. *SciNexuses*, 1, 126-138.
9. Sezgin, A., İlgin, A. and Atagün, A. O. (2024). Soft Intersection Almost Tri-bi-ideals of Semigroups. *Science and Technology Asia*, 29(4), 1-13.
10. Sezgin, A., İlgin, A. and Rao, M. M. K. (Baskıda). Soft Intersection Weak-interior Ideals of Semigroups. *Journal of Science and Arts*.
11. Sezgin, A. and İlgin, A. (Baskıda). Soft Intersection Bi-interior Ideals of Semigroups. *Journal of Innovative Science and Engineering*.
12. İlgin, A. and Sezgin, A. (Baskıda). Soft Intersection Tri-ideals of Semigroups. *Acta Scientiarum Technology*.
13. İlgin, A. and Sezgin, A. (Baskıda). Soft Intersection Tri-bi-ideals of Semigroups. *Journal of the Korean Society for Industrial and Applied Mathematics*.
14. Sezgin, A., İlgin, A., Kocakaya, F. Z., Baş Z. H., Onur, B. and Çıtak, F. (2024). A Remarkable Contribution to Soft Int-group Theory via A Comprehensive View on Soft Cosets. *Journal of Science and Arts*, 24(4), 905-934.