



**T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL (HEMEN HEMEN) Bİ-
QUASİ-İÇ İDEALLERİ VE ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN İÇ
İDEALLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEYNEP HARE BAŞ

OCAK

**YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSEL (HEMEN HEMEN) Bİ-QUASI-İÇ
İDEALLERİ VE ESNEK KESİŞİMSEL HEMEN HEMEN İÇ İDEALLERİ**

Zeynep Hare BAŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Prof. Dr. Ashhan SEZGİN

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2025

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Zeynep Hare BAŞ tarafından hazırlanan “Yarıgrupların Esnek Kesişimsel (Hemen Hemen) Bi-quasi-iç İdealleri ve Esnek Kesişimsel Hemen Hemen İç İdealleri” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir

Danışman: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK

Matematik Anabilim Dalı, Tokat Gaziosmanpaşa Üniveristesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 02/01/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Zeynep Hare BAŞ

02/01/2025

YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL (HEMEN HEMEN) Bİ-QUASI-İÇ İDEALLERİ VE ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN İÇ İDEALLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Zeynep Hare BAŞ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2025

ÖZET

Bu tez, Molodstov tarafından belirsizlikleri içeren problemleri modellemek için ortaya atılan esnek küme teorisi alanında yapılan bir çalışmadır. Bu çalışmada esnek küme teorisine katkıda bulunmak amacıyla, yarıgrupların üç farklı esnek kesişimsel (hemen hemen) ideali tanımlanmış, klasik yarıgruptaki ideallerden yola çıkarak idealler arasındaki geçişlerin esnek küme teorisindeki yansımaları incelenip elde edilen sonuçlar sistemli bir şekilde sunulmuştur. Altı bölümden oluşan bu çalışmada birinci bölümde, yarıgruplar, esnek kümeler, yarıgruplar, yarıgrupların idealleri ile ilgili literatürde yer alan çalışmalara yer verilmiştir. İkinci bölümde, bu tez çalışmasında kullanılan yarıgruplar, yarıgrupların idealleri ve hemen hemen idealleri, esnek kümeler, yarıgrupların esnek (hemen hemen) kesişimsel idealleri ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, yarıgrupların esnek kesişimsel bi-quasi-iç idealleri tanımlanmış, örneklendirilmiş ve yarıgrupların diğer esnek kesişimsel ideallerle arasındaki ilişkiler keşfedilmiştir. Bir yarıgrubun her esnek kesişimsel bi-idealinin, esnek kesişimsel iç idealinin, esnek kesişimsel sol (sağ) idealinin, esnek kesişimsel quasi-idealinin, esnek kesişimsel bi-iç idealinin, esnek kesişimsel sol (sağ) bi-quasi idealinin ve esnek kesişimsel sol (sağ) quasi-iç idealinin bir esnek kesişimsel bi-quasi-iç ideal olduğu, gerekli şartlar sağlandığında karşıtlarının da doğru olabileceği teoremlerle ispatlanmıştır. Ayrıca bi-quasi-iç ideal olan bir altarıgrubun esnek karakteristik fonksiyonunun esnek kesişimsel bi-quasi-iç ideal olduğu ve karşıtının da doğru olduğu ispatlanmıştır. Böylece klasik yarıgrup teorisi ile esnek küme teorisi arasında önemli bir bağlantı bulunmuştur. Dördüncü bölümde, yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen iç idealleri, beşinci bölümde yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi-iç idealleri tanımlanmış, örneklendirilmiştir ve özellikleri incelenmiştir. Bir yarıgrubun boştan farklı bir alt kümesi hemen hemen iç ideal (bi-quasi-iç ideal) ise bu kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun esnek kesişimsel hemen hemen iç ideal (bi-quasi-iç ideal) olduğu gösterilmiştir. Ayrıca klasik yarıgrup teorisindeki bir hemen hemen idealin minimallığı, asallığı, yarı asallığı, kuvvetli asallığı ile ilgili tanımlar ve teoremler esnek küme teorideki esnek kesişimsel hemen hemen ideallere de aktararak önemli geçişler elde edilmiştir. Son bölüm olan altıncı bölümde elde edilen sonuçlar ve çalışmanın sonuçlarının önemi tartışılmıştır.

Sayfa Adedi	: 97
Anahtar Kelimeler	: Yarıgrup, Esnek küme, Yarıgrupların esnek kesişimsel (Hemen hemen) idealleri
Danışman	: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

SOFT INTERSECTION (ALMOST) BI-QUASI-INTERIOR IDEALS AND SOFT INTERSECTION ALMOST INTERIOR IDEALS OF SEMIGROUPS

(M. Sc. Thesis)

Zeynep Hare BAŞ

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2025

ABSTRACT

This thesis is a study in the field of soft set theory, which was proposed by Molodstov to model problems involving uncertainty. In this study, in order to contribute to soft set theory, we introduce three different soft intersection (almost) ideals of semigroups, examine the reflections of transitions between ideals in classical semigroup theory, and present the findings in a systematic manner. This thesis consists of six chapters. In the first chapter, literature related to semigroups, soft sets, semigroups, and the ideals of semigroups are reviewed. The second chapter covers the fundamental concepts related to the semigroups, the ideals and almost ideals of semigroups, soft sets, and soft intersection (almost) ideals of semigroups used in this thesis. In the third chapter, the concept of soft intersection bi-quasi-interior ideals of semigroups are defined, illustrated with examples, and the significant relationships of these soft intersection ideals between other soft intersection ideals of semigroup are explored. It is proven with theorems that every soft intersection bi-ideal, soft intersection interior ideal, soft intersection left (right) ideal, soft intersection quasi-ideal, soft intersection bi-interior ideal, soft intersection left (right) bi-quasi ideal, and the soft intersection left (right) quasi-interior ideal is a soft intersection bi-quasi-interior ideal of a semigroup, and that the converses may hold under certain conditions. Additionally, it is shown that the soft characteristic function of a subgroup of a semigroup, which is a bi-quasi-interior ideal, is a soft intersection bi-quasi-interior ideal of a semigroup and vice versa. Thus, an important connection between classical semigroup theory and soft set theory is established. In the fourth chapter, the concept of soft intersection almost interior ideals of semigroups are defined. The fifth chapter introduces and illustrates the soft intersection almost bi-quasi-interior ideals of semigroups. It is demonstrated that the soft characteristic functions of a nonempty subset of a semigroup that is almost interior (bi-quasi-interior) ideal is a soft intersection almost interior (bi-quasi-interior) ideal of a semigroup, respectively. Furthermore, the definitions and theorems regarding the minimality, primeness, semiprimeness, and strongly primeness of an almost ideal of a semigroup are generalized to soft intersection almost ideals of semigroups. The sixth and final chapter discusses the results obtained and the significance of the findings of this study.

Number of pages : 97

Keywords : Semigroup, Soft set, Soft intersection (almost) ideals of semigroups

Supervisor : Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yürüttüğüm bu süreçte engin bilgilerini, yüksek enerjisini, cesaret veren, motive eden sözlerini, güler yüzünü ve her türlü yardımını benden esirgemeyip bu başarıya ulaşmada en büyük destekçim olan çok değerli hocam Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN'e,

Başta lisans eğitimim olmak üzere tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca bu günlere gelmemde üzerimde sonsuz emekleri olan tüm öğretmenlerime,

Bu çalışma boyunca her türlü zorluğu da başarmanın verdiği sevinci ve gururu da birlikte yaşamaktan büyük zevk aldığım çok sevgili çalışma arkadaşlarım Aleyna İLGİN, Fatıma Zehra KOCAKAYA ve Beyza ONUR'a,

Son olarak her koşulda desteklerini yanımda hissettiğim, varlıklarına daima şükrettiğim çok kıymetli anneme, babama ve kardeşlerime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	9
2.1. Yarıgruplar ve Yarıgrup Çeşitleri	9
2.2. Yarıgrupların İdealleri ve Hemen Hemen İdealleri	12
2.3. Esnek Kümeler ve Temel Kavramları.....	15
2.4. Esnek Kesişimsel İdealler ve Esnek Kesişimsel Hemen Hemen İdealler.....	20
3. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL Bİ-QUASI-İÇ İDEALLERİ	27
4. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN İÇ İDEALLERİ.....	56
5. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN Bİ-QUASI-İÇ İDEALLERİ.....	70
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	86
KAYNAKLAR	89
ÖZGEÇMİŞ	97

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3. 1. Bazı esnek kesişimsel idealler arasındaki ilişkileri gösteren diyagram.....	55



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\emptyset$	Boş küme
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\exists$	Varlıksal niceleyici, en az bir
$\neq$	Eşit değildir
$\Rightarrow$	Gerek şart
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter şart
E	Parametre kümesi
U	Evrensel küme
$\cap$	Kesişim işlemi
$\cup$	Birleşim işlemi
$\supseteq$	Kapsar
$\not\supseteq$	Kapsamaz
$\subseteq$	Alt küme
$\not\subseteq$	Alt küme değil
$\cong$	Esnek alt küme
$\S$	Tüm EK-yarıgrupların kümesi
$\emptyset_S$	S 'nin boş esnek kümesi
S_A	A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu
$\tilde{\cap}$	Esnek kesişim işlemi

$\wedge$	Ve işlemi
$\vee$	Veya işlemi
$\times$	Kartezyen çarpım işlemi
$\circ$	Esnek kesişimsel çarpım işlemi
$Im(f_S)$	f_S 'nin görüntü kümesi
$\mathcal{U}(f_S; \alpha)$	f_S 'nin üst α - kapsama kümesi
$\Psi(f_S)$	f_S 'nin izomorfizması
$supp(f_S)$	f_S 'nin destek kümesi

Kısaltmalar

Açıklama

EK

Esnek kesişimsel

1. GİRİŞ

Günlük yaşamda karşılaştığımız birçok durum, kesinlikten uzaktır ve bu tür belirsizlikleri açıklamak ve tanımlamak zordur. Özellikle, "dar ev", "büyük çanta", "pahalı araba" gibi ifadeler, kişisel algılara dayalı subjektif tanımlamalardır ve her birey için farklı anlamlar taşıyabilir. Bu belirsizlikleri modellemek, klasik matematiksel yaklaşımlarla, yani Aristoteles mantığıyla, oldukça karmaşıktır. Belirsiz konuları anlamak ve çözmek amacıyla farklı bilim dallarından birçok araştırma yapılmış ve yeni teoriler geliştirilmiştir. Olasılık teorisi, bulanık küme teorisi, kaba küme teorisi ve aralık matematiği gibi matematiksel teoriler, bu belirsizlikleri modellemek için ortaya çıkmıştır. Bu teoriler arasında, en yaygın kullanılan yöntemlerden biri, Zadeh (1965) tarafından 1965'te geliştirilen bulanık küme teorisidir. Ancak, bulanık küme işlemleri farklı matematikçiler tarafından farklı şekillerde tanımlandığından, aynı problemler için farklı sonuçlar elde edilebilmektedir. Bu yapısal zorluklar ve belirsizliğin kişisel algılardan bağımsız bir şekilde modellenmesi gerekliliği, yeni küme teorilerinin geliştirilmesine yol açmıştır. 1999 yılında Molodtsov (1999), bu belirsizliklerle başa çıkmak için daha objektif bir yaklaşım olan esnek küme teorisini önermiştir. Esnek küme teorisi, belirsizlikleri daha etkili ve tutarlı bir şekilde modellemek için matematiksel bir araç sunmaktadır.

Molodtsov'un esnek küme teorisini geliştirmesi, birçok farklı alanda bu teoriye dayalı araştırmaların yapılmasına olanak sağlamıştır ve bu çalışmalar literatüre önemli katkılarda bulunmuştur. 1999 yılında esnek kümeleri tanıtan Molodtsov, esnek küme işlemleriyle ilgili ilk çalışmaları başlatmıştır. Bu çalışmasında, özellikle kartezyen çarpım kümeleri için temel esnek küme işlemlerini tanıtarak, esnek küme teorisinin temellerini atmıştır. Bu adım, esnek küme teorisinin gelişimi ve uygulama alanlarının genişlemesi açısından önemli bir dönüm noktası olmuştur. Maji, Biswas ve Roy (2003), esnek küme literatürüne önemli katkılarda bulunarak, esnek alt kümeler, esnek kümelerin eşitliği, esnek tümleyen, boş esnek küme ve evrensel esnek küme kavramlarını tanıtmışlardır. Ayrıca, esnek "ve" ve "veya" işlemleri ile esnek birleşim ve esnek kesişim işlemlerini de incelemişlerdir. Pei ve Miao (2005), esnek tabanlı bilgi sistemleri üzerine yaptıkları araştırmalarda, Maji ve diğerlerinin (2003) esnek kümeler için önerdiği kesişim ve alt küme kavramlarından farklı bir yaklaşım geliştirmiştir. Aktaş ve Çağman (2007), esnek grup, esnek alt grup ve esnek homomorfizma kavramları üzerine çalışmalar yaparak, esnek cebirsel yapılar konusundaki ilerleyen araştırmalara zemin

hazırlamıştır. Özellikle Park, Jun ve Öztürk'ün (2008) esnek cebirsel kavramlar üzerine yaptıkları çalışmalar, bu alandaki önemli katkılardan biri olmuştur. Ali, Feng, Liu, Min ve Shabir (2009), Maji ve diğerlerinin (2003) esnek küme işlemlerine ilişkin bazı problemli durumları düzelterek literatüre yeni ve önemli esnek küme işlemleri kazandırmıştır. Bu işlemler arasında kısıtlı birleşim, kısıtlı kesişim, kısıtlı fark ve esnek kümelerin genişletilmiş kesişimi yer almaktadır. Çağman ve Enginoğlu (2010), Molodtsov'un 1999 yılında ortaya koyduğu esnek küme tanımını ve işlemlerini, yapılacak çalışmalara daha sağlam bir temel oluşturmak ve kolaylaştırmak amacıyla yeniden tanımlamıştır. Sezgin ve Atagün (2011b), temel esnek küme işlemlerini derinlemesine incelemiş ve esnek kümeler için daha önce ele alınmamış olan kısıtlı simetrik fark işlemini tanıtarak, bu işlemin özelliklerini ayrıntılı bir şekilde araştırmıştır. Zhu ve Wen (2013), klasik cebirdeki kümelerin temel özelliklerinin esnek küme teorisinde de geçerli olduğunu göstermiştir. Sezgin, Shahzad ve Mehmood (2019), esnek küme işlemlerine bir yenisini ekleyerek genişletilmiş fark işlemini tanımlamış ve bu işlemin özelliklerini ile diğer esnek küme işlemleriyle olan ilişkisini incelemiştir. Stojanovic (2021), genişletilmiş simetrik fark işlemlerini tanıtarak, bu işlemlerin özelliklerini detaylı bir şekilde araştırmış ve literatürdeki boşluğu doldurmuştur. Yapılan araştırmalara bakıldığında, esnek küme işlemlerinin kısıtlanmış ve genişletilmiş işlemler olarak iki ana kategoriye ayrıldığı görülmektedir. Çağman (2021), kümelerin koşullu tümleyenlerini ve bu kavramların grup teorisine uygulamalarını açıklamış, bu çalışmadan ilham alarak Sezgin, Çağman, Atagün ve Aybek (2023c), yeni ikili küme işlemleri üzerinde araştırmalar yapmıştır. Aybek (2024) ise, yeni ikili küme işlemlerini esnek kümeye entegre ederek, kısıtlanmış ve genişletilmiş esnek küme işlemlerini tanımlamış, bu işlemlerin özelliklerini incelemiş ve diğer esnek küme işlemleriyle olan ilişkilerini araştırmıştır. Akbulut (2024), Demirci (2024) ve Sarıalioğlu (2024), yeni bir esnek küme işlemi olan tümleyenli esnek ikili parçalanış işlemleri üzerinde çalışmalar yapmıştır. Yavuz (2024) ise, esnek küme teorisine katkı sağlayarak, esnek ikili parçalı birleşim, kesişim, gama, lamda, teta, yıldız ve artı gibi yeni işlemleri tanımlamış ve bu işlemlerin özelliklerini ayrıntılı bir şekilde incelemiştir. Bu işlemler ve özellikleri üzerine birçok araştırma gerçekleştirilmiş olup, Sezgin ve Demirci (2023), Sezgin ve Sarıalioğlu (2024), Sezgin ve Yavuz (2023a, 2023b), Sezgin ve Aybek (2023), Sezgin ve Atagün (2023), Sezgin, Aybek ve Atagün (2023a), Sezgin, Aybek ve Güngör (2023b), Sezgin ve Çalışıcı (2024) ile Sezgin ve Çağman (2024) gibi yazarlar, bu işlemler ve kavramlar üzerine kapsamlı ve derinlemesine çalışmalar yapmışlardır.

Literatürde, esnek cebirsel yapılarla ilgili olarak esnek kümeler ve işlemler kullanılarak birçok çalışma yapılmıştır. Aktaş ve Çağman (2007), esnek kümeler, bulanık kümeler ve yaklaşık kümeler arasındaki ilişkileri karşılaştırmış ve esnek grup teorisinin temel kavramlarını literatüre kazandırmıştır. Esnek grup yapısına ait esnek alt gruplar, normal esnek alt gruplar ve esnek grup homomorfizması gibi cebirsel yapıların ayrıntılı tanımlarını sunmuşlar ve aynı zamanda esnek kümeler ile bulanık ve kaba kümeler arasındaki bağlantıları incelemiştir. Jun (2008), esnek BCK/BCI cebirleri ve esnek alt cebirler kavramlarını tanımlayarak bu yapılar üzerinde çalışmalar yapmıştır. Jun ve Park (2008), BCK/BCI cebirlerinin cebirsel yapısını esnek küme teorisine uygulayarak, bu cebirlerdeki esnek kümelerin cebirsel özelliklerini incelemiştir. Feng, Jun ve Zhao (2008) ise esnek yarım halka kavramını tanıtarak, esnek kümelerdeki özellikleri yarım halka yapılarına uyarlamıştır. Sun, Zhang ve Liu (2008), modüller ve Molodtsov'un esnek küme tanımını kullanarak esnek modüller kavramını geliştirmiştir. Acar, Koyuncu ve Tanay (2010), esnek halka kavramını tanımlamış, esnek halka ideallerini ve bu yapıların temel özelliklerini incelemiştir. Sezgin ve Atagün (2011a), esnek gruplar ve normalist esnek gruplar üzerine çalışmalar yaparak bu alana katkı sağlamıştır. Aynı yıl, Sezgin, Atagün ve Aygün (2011) esnek yakın halkalar üzerine araştırmalar yapmıştır. Çağman, Çıtak ve Aktaş (2012), çeşitli esnek cebirsel yapıların incelenmesine katkı sağlayan esnek-int gruplar kavramını tanıtmıştır. Devirli esnek gruplar konusunda ise Aktaş ve Özlü (2014) önemli çalışmalar yapmıştır. Çağman ve Enginoğlu'nun (2010) geliştirdiği yeni esnek küme tanımını temel alarak, Sezer, Çağman ve Atagün (2014), yarıgrupların esnek kesişimsel ideallerini ele almış ve iç ideal, quasi-ideal ve genelleştirilmiş bi-ideal kavramlarını tanımlayarak, bu yapılar arasındaki ilişkileri ve özellikleri incelemiştir. Sezer, Çağman, Atagün, Ali ve Türkmen (2015b) ise, yarıgrupların esnek kesişimsel yarıgruplarını, esnek kesişimsel ideallerini ve esnek kesişimsel bi-ideallerini tanımlayarak, bu yapıların özelliklerini ve birbirleriyle olan bağlantılarını ayrıntılı bir şekilde araştırmıştır. Ayrıca, regüler, iç-regüler, tamamen regüler, zayıf regüler ve quasi-regüler gibi kavramları da bu ideallerle ilişkilendirerek karakterize etmiştir. Ullah, Ahmad, Karaaslan, Hayat ve Rashad (2018a), esnek kesişimsel AG gruplarının tanımını yapmıştır. Ullah, Karaaslan ve Ahmad (2018b), esnek birleşimsel grup kavramını, esnek birleşimsel AG-grubunu da içine alacak şekilde genişletmiştir. Karaaslan (2019) ise AG-Groupoid, AG*-Groupoid ve AG-Band yapıları için esnek küme ailelerinin tanımını sunmuş, bu yapıların bazı özelliklerini inceleyerek esnek idempotent eleman, esnek kesişimli AG-bandı, sol (sağ) bağlantılı esnek küme, esnek kesişimsel ideal ve esnek kesişimsel AG-groupoidinin

esnek asal ideali gibi yeni kavramlar önermiştir. Karaaslan, Ullah ve Ahmed (2021) ise normal bipolar esnek alt grup kavramı üzerinde çalışmalar yaparak, bu grupların özelliklerini tanımlamış ve elde ettikleri sonuçları literatüre kazandırmıştır. Sezgin ve Orbay (2022), yarı basit yarıgruplar, duo yarıgruplar, sağ (sol) sıfır yarıgruplar, sağ (sol) basit yarıgruplar ve sol (sağ) basit yarıgrupların yarı kafesi, sol (sağ) grupların yarı kafesi ve grupların yarı kafesi gibi yarıgrup sınıflarını bazı esnek kesişimsel idealler açısından inceleyerek bu yapıların yarı kafesler ve gruplar üzerindeki özellikleriyle birlikte karakterize etmiştir. Ayrıca, cebirsel yapıların esnek küme formları üzerine pek çok önemli çalışma, Sezer (2014a, 2014b), Sezer, Çağman ve Atagün (2015a), Muştuoğlu, Sezgin ve Türk (2016), Tunçay ve Sezgin (2016), Sezer ve Atagün (2016), Sezgin, Çağman ve Atagün (2017), Mahmood, Rehman ve Sezgin (2018), Atagün ve Sezgin (2018), Sezgin (2018), Jana, Pal, Karaaslan ve Sezgin (2019), Özlü ve Sezgin (2020) ve Sezgin, Atagün, Çağman ve Demir (2022) gibi matematikçiler tarafından literatüre kazandırılmıştır. Bu çalışmalar, cebirsel yapıların farklı türleri ve bu yapıların esnek küme teorisiyle olan ilişkilerini derinlemesine inceleyerek, alana önemli katkılarda bulunmuşlardır.

Yarıgruplar, cebirsel yapılar arasında yer alıp, bilgisayar bilimleri, kodlama teorisi, otomata teorisi ve matematiğin birçok farklı dalında önemli bir rol oynayarak, cebirsel yapıların temel taşlarını oluşturur. 1900'lerin başlarından itibaren araştırılmaya başlanan yarıgruplar, doğrusal zamanla değişmeyen sistemler ve sonlu otomata teorisi ile bağlantılıdır, bu nedenle bu yapıların incelenmesi teorik bilgisayar bilimi açısından büyük önem taşımaktadır. Cebirsel yapıların daha derinlemesine incelenmesi ve uygulanabilirliğinin artırılması için, bu yapılardaki ideallerin genelleştirilmesi kritik bir adım olarak öne çıkmaktadır. Pek çok matematikçi, ideal kavramının cebirsel yapılardaki farklı uzantılarını geliştirmiş, bu alanda önemli sonuçlar elde etmiş ve cebirsel yapıların özelliklerini daha iyi anlamamıza katkı sağlamıştır. Dedekind, ilk olarak cebirsel yapıların incelenmesini kolaylaştırmak için ideal kavramını ortaya atmıştır. Bu kavram daha sonra Noether tarafından birleşmeli halkalara genelleştirilmiştir.

Yarıgrupların bi-ideali ilk olarak Good ve Hughes (1952) tarafından önerilmiştir. Quasi-ideal fikri ise ilk olarak Steinfeld (1956) tarafından yarıgruplar için ve daha sonra halkalar için geliştirilmiştir. Yapılan çalışmalar sonucunda, sol ve sağ ideallerin bir genellemesi olarak kabul edilen quasi-ideallerin, aslında bi-idealler olarak genellenebileceği

gösterilmiştir. Ardından yarıgrupların iç idealleri kavramı Lajos (1976) tarafından ortaya atılmış ve Szasz (1977, 1981) tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu çalışmalar sonucunda herhangi bir cebirsel yapının iç idealinin, idealinin bir genellemesi olduğu görülmüştür.

Yarıgrupların ideallerinin geliştirilmesi daha ileri araştırmalar için gereklidir. Bu nedenle “hemen hemen” idealler kavramı ortaya atılmıştır. Hemen hemen idealler ile ilgili ilk çalışmalar Grosek ve Satko (1980) tarafından yarıgrupların hemen hemen sol (sağ) idealleri kavramı araştırılarak başlamıştır. Daha sonra Bogdanovic (1981) hemen hemen bi-ideal ve hemen hemen ideal kavramlarını tanıtmıştır. Son yıllarda bu konuda yapılan çalışmalar ivme kazanmıştır. Wattanatripop, Chinram ve Changphas (2018) hemen hemen quasi-ideal; Kaopusek, Kaewnoi ve Chinram (2020) hemen hemen iç ve zayıf hemen hemen iç ideal; Iampan, Chinram ve Petchkaew (2021) hemen hemen alt yarıgrup kavramları üzerine yaptıkları çalışmalarla literatüre büyük katkılar sağlamışlardır.

Son yıllarda Rao (2018a, 2018b, 2020a, 2020b) klasik yarıgrup teoride bi-iç ideal, bi-quasi-iç ideal, bi-quasi ideal ve quasi-iç ve zayıf-iç ideal kavramlarını ortaya atmış ve özelliklerini araştırmıştır. Baupradist, Chemat, Palanivel ve Chinram (2021) klasik yarıgrup teorisinde ve bulanık küme teorisinde büyük idealler kavramını tanıtmış ve özellikleriyle ilgili araştırmalar yapmıştır. Ayrıca, Rao, Kona, Rafi ve Bolineni (2024) tarafından yarıgrupların tri-quasi idealleri ve Rao (2024a) tarafından tri-idealleri üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Son dönemde tanımlanan bu yeni ideallerin "hemen hemen" idealleri üzerine de çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Kaopusek ve diğerleri (2020) tarafından yarıgruplarda hemen hemen iç ideal, Chinram ve Nakkhasen (2022a), hemen hemen bi-quasi-iç ideal kavramını tanımlamış ve özelliklerini incelemişlerdir. Gaketem (2022) ve Chinram ile Nakkhasen (2022b), hemen hemen bi-iç ideal kavramını literatüre kazandırmış ve bu idealin özelliklerini detaylı bir şekilde araştırmıştır. Ayrıca, Gaketem ve Chinram (2023) hemen hemen bi-quasi ideal kavramını tanıtarak, bu yapının özelliklerini incelemiştir. Bu çalışmalar, ilgili alanda önemli katkılar sağlamıştır.

Yapılan çalışmaları takip eden süreçte esnek küme teorisindeki yarıgrupların esnek kesişimsel idealleri ve bu ideallerin “esnek kesişimsel hemen hemen” genellemesi üzerinde

de çalışmalar yoğunlaşmıştır. Sezgin ve İlgin (2024a, 2024b, 2024e, 2024d, 2024c) sırasıyla yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen alt yarıgrup, esnek kesişimsel hemen hemen ideal, esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi ideal, esnek kesişimsel hemen hemen bi-iç ideal, esnek kesişimsel hemen hemen zayıf-iç ideal kavramlarını literatüre kazandırmıştır. Sezgin ve Onur (2024) yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen bi-idealleri, Sezgin ve Baş (2024) yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen iç idealleri üzerine çalışmalar yapmıştır. Sezgin ve Kocakaya (Baskıda) yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen quasi ideallerini ve Sezgin, Baş ve İlgin (2025) yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi-iç ideallerini ortaya koymuştur. Sezgin, İlgin ve Atagün (2024a) yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen tri-bi-ideali kavramını; Sezgin, Kocakaya ve İlgin (2024b) yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen quasi-iç ideali kavramını, Sezgin, Onur ve İlgin (2024c) de yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen tri-ideali kavramlarını tanımlayıp özelliklerini detaylıca incelemiştir.

Bir yarıgrupun bi-ideal, quasi-ideal, iç ideal, bi-quasi ideal ve bi-iç idealinin genellemesinin bi-quasi-iç ideal olduğu Rao (2018b) tarafından ortaya konulmuştur. Yarıgruplarda bi-quasi-iç idealin özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiş ve diğer ideallerle ilişkilerine bakılmıştır. Ayrıca bir yarıgrupun bi-quasi-iç idealleri ile regüler yarıgrupları ve basit yarıgrupları karakterize edilip, bir yarıgrupun regüler veya basit olabilmesi için bi-quasi-iç idealleri ile bağlantılar kurulmuştur. Rao (2019), bi-quasi-iç ideal kavramını Γ -yarihalkalarda bi-ideal, quasi-ideal, iç ideal, bi-quasi ideal ve bi-iç idealinin genellemesi olarak özelliklerini ve diğer ideallerle ilişkilerini çalışmıştır. Regüler Γ -yarihalkaları ve basit Γ -yarihalkaları karakterize etmiş ve Γ -yarihalkaların regüler veya basit olabilmesi için gerekli olan şartları incelemiştir. Aynı zamanda Rao (2024b, 2024c), Γ -yarihalkalarda ve yarihalkalarda da bi-quasi-iç idealin özelliklerini incelemiş ve diğer ideallerle ilişkilerini araştırmıştır. Regülerlik ve basitlik özelliklerine göre Γ -yarihalkaları ve yarihalkaları karakterize etmiş ve Γ -yarihalkaların ve yarihalkaların regüler veya basit olabilmesi için gereken şartları ortaya koymuştur.

Bu tezde, yapılan literatür taramasından esinlenip var olan çalışmalar geliştirilerek esnek küme teorisi için bir yarıgrupun “Esnek Kesişimsel Bi-quasi-iç İdeal” kavramı tanımlanmış, örneklendirilmiş, özellikleri ve diğer esnek kesişimsel idealler ile olan ilişkileri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bir yarıgrupun bir altgrupunun bi-quasi-iç ideal olması halinde bu altgrupun esnek karakteristik fonksiyonunun da esnek kesişimsel bi-quasi-iç ideal

olduğu ve karşınının da doğru olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu sayede klasik yarıgrup teorisi ve esnek küme teorisi arasında önemli bir bağlantı kurulmuştur. Bunların yanı sıra bir yarıgrupun esnek kesişimsel bi-quasi-iç idealinin diğer esnek kesişimsel ideallerle ilişkilerinin incelenmesi ile yarıgrupun her esnek kesişimsel bi-idealinin, esnek kesişimsel idealinin, esnek kesişimsel iç idealinin, esnek kesişimsel quasi-idealinin, esnek kesişimsel bi-iç idealinin, esnek kesişimsel bi-quasi idealinin ve esnek kesişimsel quasi-iç idealinin bir esnek kesişimsel bi-quasi-iç ideal olduğu teoremlerle gösterilmiş ve karşıtlarının olmadığı aksine örneklerle sunulmuştur. Ayrıca bir yarıgrupun esnek kesişimsel bi-quasi-iç ideallerinin esnek kesişimsel çarpım, esnek kesişim, esnek birleşim gibi küme işlemleri, esnek görüntü ve esnek ters görüntü gibi kavramlar ile ilişkileri ve bir yarıgrupun regülerliği ile esnek kesişimsel bi-quasi-iç idealliği arasındaki karşılıklı ilişkisi incelenmiştir.

Bu tezde ayrıca, Kaopusek ve diğerleri (2020) tarafından yarıgrupların hemen hemen iç ideal ve Chinram ve Nakkhasen (2021) tarafından yarıgruplarda hemen hemen bi-quasi-iç ideal üzerine çalışmalar göz önünde bulundurularak esnek küme teorisinde yarıgrupların “Esnek Kesişimsel Hemen Hemen İç İdealleri” ve “Yarıgrupların Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Bi-quasi-iç İdealleri” kavramları üzerine de çalışılmıştır.

Tezin ilk bölümünde, yarıgruplar ve yarıgrupların hemen hemen idealleri, esnek kümeler, yarıgruplarının esnek kesişimsel idealleri ve esnek kesişimsel hemen hemen idealleri hakkında detaylı bir literatür taraması gerçekleştirilmiştir. Bu tez boyunca kullanılan yarıgrupların idealleri ve esnek kesişimsel (hemen hemen) idealleri ile alakalı temel kavramlar ikinci bölümde sunulmuştur. Tezin özgün bölümü olan üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerinde sırasıyla, sırasıyla yarıgrupların esnek kesişimsel bi-quasi-iç ideal, esnek kesişimsel hemen hemen iç ideal ve esnek kesişimsel bi-quasi-iç ideal tanımları yapılmış, bu tanımlanan esnek kesişimsel ideallere örnekler verilmiş, bu esnek kesişimsel ideallerin birbirleriyle ve daha önceden çalışılan diğer çeşitli esnek kesişimsel ideallerle arasındaki ilişkiler ortaya konulmuştur. Birçok çalışmaya konu olan ideallerin klasik yarıgrup teorisindeki özelliklerinin esnek küme teorisi üzerindeki sonuçları araştırılmıştır. Esnek küme işlemlerinin ve esnek görüntü, esnek ters görüntü kavramlarının esnek kesişimsel idealler üzerine yansımaları incelenmiştir. Ayrıca yarıgrupların farklı hemen hemen idealleri ile esnek kesişimsel hemen hemen idealler arasında, minimalite, asallık yarı asallık ve kuvvetli asallık gibi önemli kavramlar açısından anlamlı ilişkiler kurulmuştur.

Altıncı bölümde, elde edilen bulgular ve bu bulguların taşıdığı önemin tartışılması yapılmıştır.



2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez boyunca kullanılan yarıgruplar ve esnek kümeler ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Yarıgruplar ve Yarıgrup Çeşitleri

Bu alt bölümde, yarıgrup tanımı ve yarıgrupların bazı çeşitlerine yer verilmiştir. Clifford ve Preston (1961: 58-62, 1967: 79-83), Petrich (1973: 59-70, 1977: 202-211, 1985), Howie (1995: 103-109), Nagy (2013: 43-77), Grillet (1995: 101-108, 2013: 65-77), Aydın ve Kandamar (2013: 3-71), Hacısalihoğlu (2007: 163-204) kaynaklarından yarıgruplar hakkında daha detaylı bilgilere ulaşılabilir.

2.1.1 Tanım $\mathbb{R}$ boş olmayan bir küme olmak üzere

$$\bowtie: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna, $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir (ikili) işlem denir. Cebirde ikili işlemler olduğu gibi, birli işlemler de tanımlanabilir. $\mathbb{R}$ boş olmayan bir küme olmak üzere, $\mathbb{R}$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye tanımlı bir fonksiyona birli işlem denir. Birli işlemler tek değişkenli fonksiyonlar iken, ikili işlemler iki değişkenli fonksiyonlardır. Bir küme üzerinde tanımlanan işlem veya işlemler, o küme ile birlikte bir cebirsel yapı oluşturur. Cebirsel yapılar, aynı zamanda matematiksel yapılar ya da matematiksel sistemler olarak da adlandırılmaktadır.

2.1.2. Tanım $\mathbb{R}$ boş olmayan bir küme ve $\diamond$ bu küme üzerinde bir ikili işlem olmak üzere her $n, d, t \in \mathbb{R}$ için $(n \diamond d) \diamond t = n \diamond (d \diamond t)$ şartını sağlayan $(\mathbb{R}, \diamond)$ cebirsel yapısına yarı grup denir.

Bu tez boyunca aksi belirtilmediği sürece, $n \diamond d$ yerine $n \cdot d$ yazılıp, $(\mathbb{R}, \diamond)$ yerine de $\mathbb{R}$ kullanılacaktır.

2.1.3. Örnek $\mathbb{Z}$ tam sayılar olmak üzere $(\mathbb{Z}, \circ)$ işlemi $x \circ y = \min\{x, y\}$ şeklinde tanımlansın.

$$(x \circ y) \circ z = \min\{\min\{x, y\}, z\} = \min\{x, y, z\} = \min\{x, \{y, z\}\} = x \circ (y \circ z)$$

olduğundan $(\mathbb{Z}, \circ)$ cebirsel yapısı bir yarıgrup oluşturur.

2.1.4. Tanım Bir S yarıgrubu,

- Her $l, n \in S$ için, $ln = nl$ ise değişmeli yarıgrup,
- Her $l \in S$ için, $l^2 = l$ ise band (idempotent yarıgrup),
- Her $l \in S$ için, $l^2 = l$ ve her $n, t \in S$ için $nt = tn$ ise yarıkafes (değişmeli band),
- Birim elemana sahip bir yarıkafes ise sınırlı yarıkafes,
- Bir band olmak üzere, her $l, n \in S$ için, $lnl = l$ veya buna eşdeğer olarak her $t, \vartheta, z \in S$ için, $t\vartheta z = tz$ ise dikdörtgensel band,
- Her $l, n \in S$ için, $ln = nl$ ve $l^t = \vartheta n$ olacak şekilde en az $t, \vartheta \in S$ varsa arşimedyan değişmeli yarıgrup,
- Her $l, n \in S$ için, $ln = nl$ olması $l = n$ olmasını gerektiriyor ise hiçbir yerde değişmeli olmayan yarıgrup,
- Her $l, n \in S$ için, $(lt)^m = tn$ olacak şekilde bir $t \in S$ ve pozitif bir m tamsayısı var ise sol zayıf değişmeli yarıgrup,
- Her $l, n \in S$ için, $(ln)^m = tl$ olacak şekilde bir $t \in S$ ve pozitif bir m tamsayısı var ise sağ zayıf değişmeli yarıgrup,
- Hem sol zayıf değişmeli yarıgrup hem de sağ zayıf değişmeli yarıgrup ise yani, her $l, n \in S$ için, $(ln)^m = tl = n\vartheta$ olacak şekilde $t, \vartheta \in S$ ve pozitif bir m tamsayısı var ise zayıf değişmeli yarıgrup,
- Her $l, n \in S$ için, $ln = nl$ olması en az bir $t \in S$ için, $ltn = ntl$ olmasını gerektiriyor ise koşullu değişmeli yarıgrup,

- Her $l, n \in S$ için, $nl = (ln)^m$ olacak şekilde pozitif bir m tamsayısı var ise quasi değişmeli yarıgrup,
- Her $l, n, t \in S$ için, $ln t = l t n$ ise sağ değişmeli yarıgrup,
- Her $l, n, t \in S$ için, $ln t = n l t$ ise sol değişmeli yarıgrup,
- Her $l, n, t \in S$ için, $ln t = t n l$ ise dışsal değişmeli yarıgrup,
- Her $l, n, t, \vartheta \in S$ için, $ln t \vartheta = l t n \vartheta$ ise orta yarıgrup,
- Her $l, n, t \in S$ için, $ln = t n$ olması $l = t$ olmasını gerektiriyor ise sağ sadeleştirici yarıgrup,
- Her $l, n, t \in S$ için $ln = l t$ olması $n = t$ olmasını gerektiriyor ise sol sadeleştirici yarıgrup,
- Hem sol sadeleştirici yarıgrup hem de sağ sadeleştirici yarıgrup ise sadeleştirici yarıgrup,
- Her $l \in S$ için, $l = l x l$ olacak şekilde bir $x \in S$ var ise regüler yarıgrup,
- Her $l \in S$ için, $l = n l^2 t$ olacak şekilde $n, t \in S$ var ise i-regüler yarıgrup,
- Her $l \in S$ için, $l = n l^2$ olacak şekilde $n \in S$ var ise sol regüler yarıgrup,
- Her $l \in S$ için, $l = l^2 n$ olacak şekilde $n \in S$ var ise sağ regüler yarıgrup,
- Bir band olmak üzere, her $l, n \in S$ için, $ln l = l n$ ise sol-regüler band,
- Bir band olmak üzere, her $l, n \in S$ için, $ln l = n l$ ise sağ-regüler band,
- Her $l \in S$ için, $l = l n l$ ve $l n = n l$ olacak şekilde bir $n \in S$ var ise tamamen regüler yarıgrup,
- Her $l \in S$ için, $l^m = l^m x l^m$ olacak şekilde bir $x \in S$ ve pozitif bir m tamsayısı var ise k-regüler yarıgrup,

- $0 \in S$ yani yutan elemana sahip olmak üzere, $l \neq 0$ ve $x = ln = nl$ olması $l = n$ olmasını gerektiriyor ise ilkel yarıgrup,
- Her $l \in S$ için, $lnl = l$ ve $nln = n$ olacak şekilde l 'nin tek bir n tersi var ise ters yarıgrup,
- $0 \in S$ yani yutan elemana sahip olmak üzere, her $l, n \in S$ için, $ln = 0$ ise boş (sıfır) yarıgrup,
- Her $l, n \in S$ için, $ln = l$ ise sol sıfır yarıgrup,
- Her $l, n \in S$ için, $ln = n$ ise sağ sıfır yarıgrup,
- Kendisi dışında hiçbir sol idealini içermiyor ise sol basit yarıgrup,
- Kendisi dışında hiçbir sağ idealini içermiyorsa sağ basit yarıgrup

olarak adlandırılır.

2.1.5. Teorem S yarıgrubu için aşağıdaki durumlar geçerlidir:

- (1) S 'nin bir sol (sağ) basit yarıgrup olması için gerek ve yeter şart her $\beta \in S$ için, $S\beta = S$ ($\beta S = S$) olması yani, her $\alpha, \beta \in S$ için, $\beta = x\alpha$ ($\beta = \alpha x$) olacak şekilde $x \in S$ olmasıdır.
- (2) S 'nin basit yarıgrup olması için gerek ve yeter şart her $\beta \in S$ için, $S\beta S = S$ olması yani, her $\alpha, \beta \in S$ için, $\beta = x\alpha y$ olacak şekilde $x, y \in S$ olmasıdır.

2.1.6 Teorem S yarıgrubu için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (1) S bir gruptur.
- (2) S hem bir sol basit yarıgrup hem de bir sağ basit yarıgruptur (Huntington, 1902).

2.2. Yarıgrupların İdealleri ve Hemen Hemen İdealleri

2.2.1. Tanım S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi $\mathcal{R}$,

- $\bar{R}\bar{R} \subseteq \bar{R}$ ise S yarıgrubunun bir alt yarıgrubu,
- $S\bar{R} \subseteq \bar{R}$ ($\bar{R}S \subseteq \bar{R}$) ise S yarıgrubunun bir sol (sağ) ideali; S yarıgrubunun hem bir sol ideali hem de bir sağ ideali ise S yarıgrubunun bir iki taraflı ideali (ideali),
- Bir alt yarıgrup ve $\bar{R}S\bar{R} \subseteq \bar{R}$ ise S yarıgrubunun bir bi-ideali (Good ve Hughes, 1952),
- $S\bar{R}S \subseteq \bar{R}$ ise S yarıgrubunun bir iç ideali (Lajos, 1976),
- $S\bar{R} \cap \bar{R}S \subseteq \bar{R}$ ise S yarıgrubunun bir quasi-ideali (Steinfeld, 1956),
- $S\bar{R}\bar{R} \subseteq \bar{R}$ ($\bar{R}\bar{R}S \subseteq \bar{R}$) ise S yarıgrubunun bir sol (sağ) zayıf-iç ideali; S yarıgrubunun hem bir sol zayıf-iç ideali hem de bir sağ zayıf-iç ideali ise S yarıgrubunun bir zayıf-iç ideali (Rao, 2020b),
- $S\bar{R}S \cap \bar{R}S\bar{R} \subseteq \bar{R}$ ise S yarıgrubunun bir bi-iç ideali (Rao, 2018a),
- $S\bar{R} \cap \bar{R}S\bar{R} \subseteq \bar{R}$ ($\bar{R}S \cap \bar{R}S\bar{R} \subseteq \bar{R}$) ise S yarıgrubunun bir sol (sağ) bi-quasi ideali; S yarıgrubunun hem bir sol bi-quasi ideali hem de bir sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir bi-quasi ideali (Rao, 2020a),
- $S\bar{R}S\bar{R} \subseteq \bar{R}$ ($\bar{R}S\bar{R}S \subseteq \bar{R}$) ise S yarıgrubunun bir sol (sağ) quasi-iç ideali; S yarıgrubunun hem bir sol quasi-iç ideali hem de bir sağ quasi-iç ideali ise S yarıgrubunun bir quasi-iç ideali (Rao, 2020b),
- $\bar{R}S\bar{R}S\bar{R} \subseteq \bar{R}$ ise S yarıgrubunun bir bi-quasi-iç ideali (Rao, 2024b),
- $\bar{R}S\bar{R}\bar{R} \subseteq \bar{R}$ ($\bar{R}\bar{R}S\bar{R} \subseteq \bar{R}$) ise S yarıgrubunun bir sol (sağ) tri-ideali; S yarıgrubunun hem bir sol tri-ideali hem de bir sağ tri-ideali ise S yarıgrubunun bir tri-ideali (Rao, 2024a),
- $\bar{R}\bar{R}S\bar{R}\bar{R} \subseteq \bar{R}$ ise S yarıgrubunun bir tri-bi-ideali (Rao, Kona, Rafi ve Bolineni, 2024)

olarak adlandırılır.

2.2.2. Tanım S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi K ,

- $KK \cap K \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen alt yarıgrubu (Iampan ve diğerleri, 2021),
- Her $\mathfrak{l} \in S$ için, $\mathfrak{l}K \cap K \neq \emptyset$ ($K\mathfrak{l} \cap K \neq \emptyset$) ise S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) ideali; S yarıgrubunun hem bir hemen hemen sol ideali hem de bir hemen hemen sağ ideali ise S yarıgrubunun bir hemen hemen iki taraflı ideali (hemen hemen ideali) (Grosek ve Satko, 1980),
- Her $\mathfrak{l} \in S$ için, $K\mathfrak{l}K \cap K \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-ideali (Bogdanovic, 1981),
- Her $\mathfrak{l}, \mathfrak{n} \in S$ için, $\mathfrak{l}K\mathfrak{n} \cap K \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen iç ideali; her $\mathfrak{l} \in S$ için $\mathfrak{l}K\mathfrak{l} \cap K \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir zayıf hemen hemen iç ideali (Kaopusek ve diğerleri, 2020),
- Her $\mathfrak{l} \in S$ için, $(\mathfrak{l}K \cap K\mathfrak{l}) \cap K \subseteq K$ ise S yarıgrubunun bir quasi-ideali (Suebsung, Chinram, Yonthanthum, Hila ve Iampan, 2022),
- Her $\mathfrak{l}, \mathfrak{n}, \mathfrak{t} \in S$ için, $(\mathfrak{l}K\mathfrak{n} \cap K\mathfrak{t}K) \cap K \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç ideali; her $\mathfrak{l} \in S$ için, $(\mathfrak{l}K\mathfrak{l} \cap K\mathfrak{l}K) \cap K \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir zayıf hemen hemen bi-iç ideali (Gaketem, 2022),
- Her $\mathfrak{l}, \mathfrak{n} \in S$ için, $(\mathfrak{l}K \cap K\mathfrak{n}K) \cap K \neq \emptyset$ ($(K\mathfrak{l} \cap K\mathfrak{n}K) \cap K \neq \emptyset$) ise S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideali; S yarıgrubunun hem bir hemen hemen sol bi-quasi ideali hem de bir hemen hemen sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi ideali (Gaketem ve Chinram, 2023),
- Her $\mathfrak{l}, \mathfrak{n} \in S$ için, $\mathfrak{l}K\mathfrak{n}K \cap K \neq \emptyset$ ($K\mathfrak{l}K\mathfrak{n} \cap K \neq \emptyset$) ise S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideali; S yarıgrubunun hem bir hemen hemen sol quasi-iç ideali hem de bir hemen hemen sağ quasi-iç ideali ise S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-iç ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024b),
- Her $\mathfrak{l}, \mathfrak{n} \in S$ için, $K\mathfrak{l}K\mathfrak{n}K \cap K \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç ideali; Her $\mathfrak{l} \in S$ için $K\mathfrak{l}K\mathfrak{l}K \cap K \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir zayıf hemen hemen bi-quasi-iç ideali (Chinram ve Nakkhasen, 2022a),

- Her $\mathfrak{L} \in S$ için, $\mathfrak{KSKK} \cap \mathfrak{K} \neq \emptyset$ ($\mathfrak{KKSK} \cap \mathfrak{K} \neq \emptyset$) ise S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) tri-ideali; S yarıgrubunun hem bir hemen hemen sol tri-ideali hem de bir hemen hemen sağ tri-ideali ise S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024c),
- Her $\mathfrak{L} \in S$ için, $\mathfrak{KKSKK} \cap \mathfrak{K} \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024b)

olarak adlandırılır.

2.3. Esnek Kümeler ve Temel Kavramları

2.3.1. Tanım U başlangıç evrensel kümesi, E parametreler kümesi; $P(U)$, U 'nun kuvvet kümesi ve $\mathfrak{K} \subseteq E$ olsun. Her $\mathfrak{y} \notin \mathfrak{K}$ için $\mathfrak{f}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{y}) = \emptyset$ olacak şekilde $\mathfrak{f}_{\mathfrak{K}}: E \rightarrow P(U)$ fonksiyonuna, U üzerinde bir esnek küme denir. O halde bir $\mathfrak{f}_{\mathfrak{K}}$ esnek kümesi,

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{K}} = \{(\mathfrak{y}, \mathfrak{f}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{y})): \mathfrak{y} \in E, \mathfrak{f}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{y}) \in P(U)\}$$

biçiminde sıralı ikililerin kümesidir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Bu tez boyunca, U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi $S_E(U)$ ile gösterilecektir.

2.3.2. Tanım $\mathfrak{f}_{\mathfrak{K}} \in S_E(U)$ olsun. Eğer her $\mathfrak{y} \in E$ için $\mathfrak{f}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{y}) = \emptyset$ ise $\mathfrak{f}_{\mathfrak{K}}$ 'ya boş esnek küme denir ve $\emptyset_E$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.3. Tanım $\mathfrak{f}_{\mathfrak{K}} \in S_E(U)$ olsun. Eğer her $\mathfrak{y} \in E$ için $\mathfrak{f}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{y}) = U$ ise $\mathfrak{f}_{\mathfrak{K}}$ 'ya evrensel esnek küme denir ve U_E ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.4. Tanım S bir yarıgrup olmak üzere her $\mathfrak{y} \in S$ için $\mathfrak{f}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{y}) = U$ ise $\mathfrak{f}_{\mathfrak{K}}$ 'ye S 'ye göre bir tam esnek küme denir ve $\tilde{S}$ ile gösterilir.

2.3.5. Tanım $\mathfrak{f}_A, \mathfrak{f}_B \in S_E(U)$ olsun. Her $\mathfrak{y} \in S$ için $\mathfrak{f}_A(\mathfrak{y}) \subseteq \mathfrak{f}_B(\mathfrak{y})$ ise $\mathfrak{f}_A$ esnek kümesine $\mathfrak{f}_B$ 'nin esnek alt kümesi denir ve $\mathfrak{f}_A \subseteq \mathfrak{f}_B$ şeklinde gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.6. Tanım Her $y \in S$ için, $f_A(y) = f_B(y)$ ise f_A ve f_B esnek kümelerine esnek eşit kümeler denir ve $f_A = f_B$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.7. Tanım $f_A, f_B \in S_E(U)$ olsun. f_A ve f_B esnek kümelerinin esnek birleşimi $f_A \tilde{\cup} f_B$, her $l \in E$ için

$$(f_A \tilde{\cup} f_B)(l) = f_A(l) \cup f_B(l)$$

şeklinde tanımlanır (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.8. Tanım $f_A, f_B \in S_E(U)$ olsun. f_A ve f_B esnek kümelerinin esnek kesişimi $f_A \tilde{\cap} f_B$, her $l \in E$ için

$$(f_A \tilde{\cap} f_B)(l) = f_A(l) \cap f_B(l)$$

şeklinde tanımlanır (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.9. Tanım $f_A, f_B \in S_E(U)$ olsun. f_A ve f_B esnek kümelerinin esnek $\wedge$ – çarpımı $f_A \wedge f_B$, her $(x, y) \in E \times E$ için

$$(f_A \wedge f_B)(x, y) = f_A(x) \cap f_B(y)$$

şeklinde tanımlanır (Maji ve diğeleri, 2003).

2.3.10. Tanım $f_A, f_B \in S_E(U)$ olsun. f_A ve f_B esnek kümelerinin esnek $\vee$ – çarpımı $f_A \vee f_B$, her $(x, y) \in E \times E$ için

$$(f_A \vee f_B)(x, y) = f_A(x) \cup f_B(y)$$

şeklinde tanımlanır (Maji ve diğeleri, 2003).

2.3.11. Tanım $\mathbb{f}_A$ ve $\mathbb{f}_B$ U üzerinde iki esnek küme olsun. $\mathbb{f}_A$ ve $\mathbb{f}_B$ 'nin esnek kartezyen çarpımı işlemi $s_{A \times B}: A \times B \rightarrow P(U \times U)$ fonksiyonu üzerinde her $(a, b) \in A \times B$ için $s_{A \times B}(a, b) = \mathbb{f}_A(a) \times \mathbb{f}_B(b)$ olacak şekilde $\mathbb{f}_A \times \mathbb{f}_B = s_{A \times B}$ olarak tanımlanır (Babitha ve Sunil, 2010).

2.3.12. Tanım $\mathbb{f}_A, \mathbb{f}_B \in S_E(U)$ ve ψ, A 'den B 'ye bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\mathbb{f}_A$ 'nin ψ altındaki esnek görüntüsü $\psi(\mathbb{f}_A)$, her $x \in B$ için,

$$(\psi(\mathbb{f}_A))(x) = \begin{cases} \bigcup \{\mathbb{f}_A(k) \mid k \in A \text{ ve } \psi(k) = x\}, & x \in \psi(A) \text{ ise} \\ \emptyset, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{f}_B$ 'nin ψ altındaki esnek ön görüntüsü (ya da esnek ters görüntüsü) $\psi^{-1}(\mathbb{f}_B)$, her $k \in A$ için,

$$(\psi^{-1}(\mathbb{f}_B))(k) = \mathbb{f}_B(\psi(k))$$

şeklinde tanımlanır (Çağman ve diğerleri, 2012).

2.3.13. Tanım $\mathbb{f}_A$ U üzerinde bir esnek küme ve $\alpha \subseteq U$ olsun. $\mathbb{f}_A$ 'nın üst α – kapsama kümesi $U(\mathbb{f}_A: \alpha)$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır (Sezgin, Çağman ve Çıtak, 2019).

$$U(\mathbb{f}_A: \alpha) = \{x \in A \mid \mathbb{f}_A(x) \supseteq \alpha\}$$

2.3.14. Tanım $\mathbb{f}_K \in S_E(U)$ olsun. Bu durumda,

$$\text{supp}(\mathbb{f}_K) = \{y \in K: \mathbb{f}_K(y) \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanan $\text{supp}(\mathbb{f}_K)$ kümesine $\mathbb{f}_K$ 'nin destek kümesi denir (Feng ve diğerleri, 2008).

Destek kümesi boş küme olan bir esnek kümenin boş esnek küme olduğu açıktır; aksi takdirde, esnek küme boş esnek küme değildir.

2.3.15. Not $f_K, t_K \in S_E(U)$ olsun. Bu durumda, $f_K \subseteq t_K$ ise $\text{supp}(f_K) \subseteq \text{supp}(t_K)$ (Sezgin ve İlgin, 2024a).

2.3.16. Tanım K bir yarıgrup ve $f_K, t_K \in S_E(U)$ olsun. Her $y \in K$ için

$$(f_K \circ t_K)(y) = \begin{cases} \bigcup_{y=xy} \{f_K(x) \cap t_K(y)\}, & \text{eğer } y = xy \text{ olacak şekilde } \exists x, y \in K \text{ varsa} \\ \emptyset, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $(f_K \circ t_K)$ işlemine f_K ve t_K 'nin esnek kesişimsel çarpımı denir (Sezer ve diğerleri, 2015b).

2.3.17. Örnek $S = \{\tilde{t}, \tilde{u}\}$ kümesi üzerinde Tablo 2.1 yardımıyla tanımlanan “ $::$ ” ikili işlemi ile $(S, ::)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$::$	$\tilde{t}$	$\tilde{u}$
$\tilde{t}$	$\tilde{t}$	$\tilde{u}$
$\tilde{u}$	$\tilde{u}$	$\tilde{u}$

Tablo 2.1. Örnek 2.3.15'teki “ $::$ ” ikili işlemi

$U = D_2 = \{e, x, y, yx\}$ evrensel kümesi üzerinde f_S ve t_S esnek kümesi,

$$f_S = \{(\tilde{t}, \{e, x\}), (\tilde{u}, \{e, x, y\})\}$$

$$t_S = \{(\tilde{t}, \{x, yx\}), (\tilde{u}, \{y\})\}$$

şeklinde tanımlansın.

$\tilde{t} = \tilde{t}\tilde{t}$ ve $\tilde{u} = \tilde{t}\tilde{u} = \tilde{u}\tilde{t} = \tilde{u}\tilde{u}$ olduğundan,

$$(f_S \circ t_S)(\tilde{t}) = f_S(\tilde{t}) \cap t_S(\tilde{t}) = \{e, x\} \cap \{x, yx\} = \{x\}$$

$$(\mathfrak{f}_S \circ \mathfrak{t}_S)(\tilde{v}) = \{\mathfrak{f}_S(\tilde{v}) \cap \mathfrak{t}_S(\tilde{v})\} \cup \{\mathfrak{f}_S(\tilde{v}) \cap \mathfrak{t}_S(\tilde{v})\} \cup \{\mathfrak{f}_S(\tilde{v}) \cap \mathfrak{t}_S(\tilde{v})\} = \emptyset \cup \{x\} \cup \{y\} = \{x, y\}$$

elde edilir.

2.3.18. Teorem $\mathfrak{f}_K, \mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K \in S_K(U)$ olsun. O halde,

- $(\mathfrak{f}_K \circ \mathfrak{t}_K) \circ \mathfrak{p}_K = \mathfrak{f}_K \circ (\mathfrak{t}_K \circ \mathfrak{p}_K)$
- $(\mathfrak{f}_K \circ \mathfrak{t}_K) \neq (\mathfrak{t}_K \circ \mathfrak{f}_K)$
- $\mathfrak{f}_K \circ (\mathfrak{t}_K \tilde{\cup} \mathfrak{p}_K) = (\mathfrak{f}_K \circ \mathfrak{t}_K) \tilde{\cup} (\mathfrak{f}_K \circ \mathfrak{p}_K)$ ve $(\mathfrak{f}_K \tilde{\cup} \mathfrak{t}_K) \circ \mathfrak{p}_K = (\mathfrak{f}_K \circ \mathfrak{p}_K) \tilde{\cup} (\mathfrak{t}_K \circ \mathfrak{p}_K)$
- $\mathfrak{f}_K \circ (\mathfrak{t}_K \tilde{\cap} \mathfrak{p}_K) = (\mathfrak{f}_K \circ \mathfrak{t}_K) \tilde{\cap} (\mathfrak{f}_K \circ \mathfrak{p}_K)$ ve $(\mathfrak{f}_K \tilde{\cap} \mathfrak{t}_K) \circ \mathfrak{p}_K = (\mathfrak{f}_K \circ \mathfrak{p}_K) \tilde{\cap} (\mathfrak{t}_K \circ \mathfrak{p}_K)$
- $\mathfrak{f}_K \subseteq \mathfrak{t}_K$ ise $\mathfrak{f}_K \circ \mathfrak{p}_K \subseteq \mathfrak{t}_K \circ \mathfrak{p}_K$ ve $\mathfrak{p}_K \circ \mathfrak{f}_K \subseteq \mathfrak{p}_K \circ \mathfrak{t}_K$
- $\mathfrak{z}_K \subseteq \mathfrak{f}_K$ ve $\mathfrak{s}_K \subseteq \mathfrak{t}_K$ olacak şekilde $\mathfrak{z}_K, \mathfrak{s}_K \in S_K(U)$ ise $\mathfrak{z}_K \circ \mathfrak{s}_K \subseteq \mathfrak{f}_K \circ \mathfrak{t}_K$ (Sezer ve diğerleri, 2015b).

2.3.19. Tanım $K \subseteq S$ olsun. Bu durumda,

$$S_K(x) = \begin{cases} U, & x \in K \text{ ise} \\ \emptyset, & x \in S \setminus K \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan S_K esnek kümesine, K 'nın esnek karakteristik fonksiyonu denir.

S_K 'nın, U üzerinde bir esnek küme olduğu açıktır, yani, $S_K: S \rightarrow P(U)$ (Sezer ve diğerleri, 2015b).

S bir yarıgrup olmak üzere, her $x \in S$ için, $f_S(x) = U$ ise f_S esnek kümesinin $\tilde{S}$ ile gösterildiği, yani her $x \in S$ için, $\tilde{S}(x) = U$ olduğu bilinmektedir. O halde, $\tilde{S}$ esnek kümesinin, S 'nin esnek karakteristik fonksiyonu S_S esnek kümesine denk olduğu, yani $\tilde{S} = S_S$ olduğu açıktır.

2.3.20. *Sonuç* S_{n_0} , n_0 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, $\text{supp}(S_{n_0}) = n_0$ (Sezgin ve İlgin, 2024a).

2.3.21. Teorem $G, B \subseteq S$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i) $G \subseteq B$ olması için gerek ve yeter şart $S_G \subseteq S_B$ olmasıdır.
- ii) $S_G \cap S_B = S_{G \cap B}$ ve $S_G \cup S_B = S_{G \cup B}$.
- iii) $S_G \circ S_B = S_{GB}$ (Sezer ve diğerleri, 2015b; Sezgin ve İlgin, 2024a).

2.3.22. Tanım $x, y \in S$ olsun. Bu durumda,

$$S_x(y) = \begin{cases} U, & y = x \text{ ise} \\ \emptyset, & y \neq x \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan S_x esnek kümesine, x 'in esnek karakteristik fonksiyonu denir. S_x 'in, U üzerinde bir esnek küme olduğu açıktır, yani, $S_x: S \rightarrow P(U)$ (Sezgin ve İlgin, 2024b).

2.3.23. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i) $\mathbb{S} \circ \mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}$.
- ii) $\mathbb{S} \circ f_S \subseteq \mathbb{S}$ ve $f_S \circ \mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}$.
- iii) $f_S \cup \mathbb{S} = \mathbb{S}$ ve $f_S \cap \mathbb{S} = f_S$ (Sezer ve diğerleri, 2015b).

Teorem 2.3.23 (Sezer ve diğerleri, 2015), “ f_S , U üzerinde bir esnek kesişimsel alt yarıgrup olsun” kabulüyle verilmiştir. Ancak bu çalışmada, “ f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun” kabulü kullanılmıştır.

2.4. Esnek Kesişimsel İdealler ve Esnek Kesişimsel Hemen Hemen İdealler

2.4.1. Tanım U üzerinde bir f_K esnek kümesi,

- Her $l, n \in S$ için, $f_K(ln) \supseteq f_K(l) \cap f_K(n)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel alt yarıgrubu (Sezer ve diğerleri, 2015b),
- Her $l, n \in S$ için, $f_K(ln) \supseteq f_K(n)$ ($f_K(ln) \supseteq f_K(l)$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ, iki taraflı) ideali; hem esnek kesişimsel sol ideali hem de esnek kesişimsel sağ ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel ideali (Sezer ve diğerleri, 2015b),
- f_K , bir esnek kesişimsel alt yarıgrup olmak üzere, her $l, n, t \in S$ için $f_K(lnt) \supseteq f_K(l) \cap f_K(t)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel bi-ideali (Sezer ve diğerleri, 2015b),
- Her $l, n, t \in S$ için, $f_K(lnt) \supseteq f_K(n)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel iç ideali (Sezer ve diğerleri, 2014),
- $(f_K \circ \tilde{S}) \cap (\tilde{S} \circ f_K) \subseteq f_K$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel quasi ideali (Sezer ve diğerleri, 2014),
- Her $l, n, t \in S$ için, $f_K(lnt) \supseteq f_K(l) \cap f_K(t)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel genelleştirilmiş bi-ideali (Sezer ve diğerleri, 2014),
- Her $l, n, t \in S$ için, $f_K(lnt) \supseteq f_K(n) \cap f_K(t)$ ($f_K(lnt) \supseteq f_K(l) \cap f_K(n)$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ) zayıf-iç ideali; hem esnek kesişimsel sol zayıf-iç ideali hem de esnek kesişimsel sağ zayıf-iç ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel zayıf-iç ideali (İlgin, 2025),
- $(\tilde{S} \circ f_K \circ \tilde{S}) \cap (f_K \circ \tilde{S} \circ f_K) \subseteq f_K$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel bi-iç ideali (İlgin, 2025),
- $(\tilde{S} \circ f_K) \cap (f_K \circ \tilde{S} \circ f_K) \subseteq f_K$ ($(f_K \circ \tilde{S}) \cap (f_K \circ \tilde{S} \circ f_K) \subseteq f_K$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ) bi-quasi ideali; hem esnek kesişimsel sol bi-quasi ideali hem de esnek kesişimsel sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel bi-quasi ideali (Onur, 2025),
- Her $l, n, t, \vartheta \in S$ için, $f_K(lnt\vartheta) \supseteq f_K(n) \cap f_K(\vartheta)$ ($f_K(lnt\vartheta) \supseteq f_K(l) \cap f_K(t)$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ) quasi-iç ideali; hem esnek

kesişimsel sol quasi-iç ideali hem de esnek kesişimsel sağ quasi-iç ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel quasi-iç ideali (Kocakaya, 2025),

- Her $l, n, t, \vartheta \in S$ için, $f_K(lnt\vartheta) \supseteq f_K(l) \cap f_K(t) \cap f_K(\vartheta)$ ($f_K(lnt\vartheta) \supseteq f_K(l) \cap f_K(n) \cap f_K(\vartheta)$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ) tri-ideali; hem esnek kesişimsel sol tri-ideali hem de esnek kesişimsel sağ tri-ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel tri-ideali (İlgin ve Sezgin, Baskıda a),
- Her $l, n, t, \vartheta, z \in S$ için, $f_K(lnt\vartheta z) \supseteq f_K(l) \cap f_K(n) \cap f_K(\vartheta) \cap f_K(z)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel tri-bi-ideali (İlgin ve Sezgin, Baskıda b)

olarak adlandırılır.

Bundan sonra S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel alt yarıgrubu (sol/sağ ideali, bi-ideali, genelleştirilmiş bi-ideali, iç ideali, quasi-ideali, sol/sağ zayıf-iç ideali, bi-iç ideali, sol/sağ bi-quasi ideali, sol/sağ quasi-iç ideali, sol/sağ tri-ideali, tri-bi-ideali) kısaca EK-alt yarıgrubu (sol/sağ ideali, bi-ideali, genelleştirilmiş bi-ideali, iç ideali, quasi-ideali, sol/sağ zayıf-iç ideali, bi-iç ideali, sol/sağ bi-quasi ideali, sol/sağ quasi-iç ideali, sol/sağ tri-ideali, tri-bi-ideali) olarak gösterilecektir.

2.4.2. Teorem K , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_K , K kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, K kümesinin S yarıgrubunun bir alt yarıgrubu (sol ideali, sağ ideali, ideali, bi-ideali, genelleştirilmiş bi-ideali, iç ideali) olması için gerek ve yeter şart S_K esnek kümesinin, bir EK-alt yarıgrup (sol ideal, sağ ideal, ideal, bi-ideal, genelleştirilmiş bi-ideal, iç ideal) olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2015b, Sezer ve diğerleri, 2014).

2.4.3. Önerme $Im(f_S)$, f_S 'nin görüntü kümesi olmak üzere, $\alpha \in Im(f_S)$ olacak şekilde $\alpha \subseteq U$ ve f_S bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-alt yarıgrup ise $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$ bir EK-alt yarıgruptur (Sezer ve diğerleri, 2015b).

2.4.4. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- $\mathbb{F}_S$ 'nin bir EK-alt yarıgrup olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{F}_S \circ \mathbb{F}_S \subseteq \mathbb{F}_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2015b).
- $\mathbb{F}_S$ 'nin bir EK-sol (sağ) ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \subseteq \mathbb{F}_S$ ($\mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{F}_S$) olması; $\mathbb{F}_S$ 'nin bir EK-ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \subseteq \mathbb{F}_S$ ve $\mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{F}_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2015b).
- $\mathbb{F}_S$ 'nin bir EK-bi-ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{F}_S \circ \mathbb{F}_S \subseteq \mathbb{F}_S$ ve $\mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \subseteq \mathbb{F}_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2015b).
- $\mathbb{F}_S$ 'nin bir EK-genelleştirilmiş bi-ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \subseteq \mathbb{F}_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2014).
- $\mathbb{F}_S$ 'nin bir EK-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{F}_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2014).
- $\mathbb{F}_S$ 'nin bir EK-sol (sağ) zayıf-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \circ \mathbb{F}_S \subseteq \mathbb{F}_S$ ($\mathbb{F}_S \circ \mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{F}_S$) olması; $\mathbb{F}_S$ 'nin bir EK-zayıf-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \circ \mathbb{F}_S \subseteq \mathbb{F}_S$ ve $\mathbb{F}_S \circ \mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{F}_S$ olmasıdır (Sezgin ve İlgin, 2024c).
- $\mathbb{F}_S$ 'nin bir EK-bi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $(\tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}}) \cap (\mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S) \subseteq \mathbb{F}_S$ olmasıdır (Sezgin ve İlgin, 2024d).
- $\mathbb{F}_S$ 'nin bir EK-sol (sağ) quasi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \subseteq \mathbb{F}_S$ ($\mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{F}_S$) olması; $\mathbb{F}_S$ 'nin bir EK-quasi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \subseteq \mathbb{F}_S$ ve $\mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{F}_S$ olmasıdır (Kocakaya, 2025).
- $\mathbb{F}_S$ 'nin bir EK-sol (sağ) tri-ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \circ \mathbb{F}_S \subseteq \mathbb{F}_S$ ($\mathbb{F}_S \circ \mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \subseteq \mathbb{F}_S$) olması; $\mathbb{F}_S$ 'nin bir EK-tri-ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \circ \mathbb{F}_S \subseteq \mathbb{F}_S$ ve $\mathbb{F}_S \circ \mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \subseteq \mathbb{F}_S$ olmasıdır (İlgin ve Sezgin, Baskıda a).
- $\mathbb{F}_S$ 'nin bir EK-tri-bi-ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{F}_S \circ \mathbb{F}_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ \mathbb{F}_S \circ \mathbb{F}_S \subseteq \mathbb{F}_S$ olmasıdır (İlgin ve Sezgin, Baskıda b).

2.4.5. Teorem Bir S yarıgrubu için aşağıdaki koşullar geçerlidir.

- Her EK-sol (sağ/iki-taraflı) ideal bir EK-alt yarıgruptur (Sezer ve diğerleri, 2015b).
- Her EK-sol (sağ/iki-taraflı) ideal bir EK-bi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2015b).
- Her EK-sol (sağ/iki-taraflı) ideal bir EK-genelleştirilmiş bi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).
- Her EK-sol (sağ/iki-taraflı) ideal bir EK-quasi-idealdir. (Sezer ve diğerleri, 2014)
- Her EK-ideal bir EK-iç idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).
- Her EK-ideal bir EK-quasi idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).
- Her EK-bi-ideal bir EK-genelleştirilmiş bi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).
- Her EK-quasi-ideal bir EK-alt yarıgruptur (Sezer ve diğerleri, 2014).
- Her EK-quasi-ideal bir EK-bi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).

2.4.6. Tanım U üzerinde bir $\mathfrak{f}_S$ esnek kümesi ,

- $(\mathfrak{f}_S \circ \mathfrak{f}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{f}_S \neq \emptyset_S$ ise $\mathfrak{f}_S$ esnek kümesine S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen alt yarıgrubu (Sezgin ve İlgin, 2024a),
- Her $n \in S$ için, $(S_n \circ \mathfrak{f}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{f}_S \neq \emptyset_S$ $((\mathfrak{f}_S \circ S_n) \tilde{\cap} \mathfrak{f}_S \neq \emptyset_S)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) ideali; hem esnek kesişimsel hemen hemen sol ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen ideali (Sezgin ve İlgin, 2024b),
- Her $n \in S$ için, $(\mathfrak{f}_S \circ S_n \circ \mathfrak{f}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{f}_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-ideali (Sezgin ve Onur, 2024),
- Her $n, z \in S$ için, $(S_n \circ \mathfrak{f}_S \circ S_z) \tilde{\cap} \mathfrak{f}_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen iç ideali (Sezgin ve Baş, 2024),

- Her $n, z \in S$ için, $[(f_S \circ S_n) \tilde{\cap} (S_z \circ f_S)] \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen quasi-ideali (Sezgin ve Kocakaya, Baskıda)
- Her $n \in S$ için, $(S_n \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ($(f_S \circ f_S \circ S_n) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideali; hem esnek kesişimsel hemen hemen sol zayıf-iç ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ zayıf-iç ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen zayıf-iç ideali (Sezgin ve İlgin, 2024c),
- Her $n, z, t \in S$ için, $[(S_n \circ f_S \circ S_z) \tilde{\cap} (f_S \circ S_t \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ($[(S_n \circ f_S \circ S_z) \tilde{\cap} (f_S \circ S_t \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-iç ideali (esnek kesişimsel zayıf hemen hemen bi-iç ideali) (Sezgin ve İlgin, 2024d),
- Her $n, z \in S$ için, $[(S_n \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ($[(f_S \circ S_n) \tilde{\cap} (f_S \circ S_z \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideali; hem esnek kesişimsel hemen hemen sol bi-quasi ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi ideali; $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_x \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ($[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (f_S \circ S_x \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideali; hem esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sol bi-quasi ideali hem de esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen bi-quasi ideali (Sezgin ve İlgin, 2024e),
- Her $n, z \in S$ için, $(S_n \circ f_S \circ S_z \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ($f_S \circ S_n \circ f_S \circ S_z) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideali; hem esnek kesişimsel hemen hemen sol quasi-iç ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ quasi-iç ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen quasi-iç ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024b),
- Her $n, z \in S$ için, $(f_S \circ S_n \circ f_S \circ S_z \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi-iç ideali (Sezgin ve diğerleri, 2025),
- Her $n \in S$ için, $(f_S \circ S_n \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ($(f_S \circ f_S \circ S_n \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$) ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) tri-ideali; hem esnek kesişimsel hemen hemen sol tri-ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ

tri-ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen tri-ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024c),

- Her $n \in S$ için, $(f_S \circ f_S \circ S_n \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen tri-bi-ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024a)

olarak adlandırılır.



3. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL Bİ-QUASI-İÇ İDEALLERİ

Bu bölümde, esnek kesişimsel bi-quasi-iç ideal adı verilen yeni bir esnek kesişimsel ideal tanıtılmış, örneği verilmiş ve diğer esnek kesişimsel idealler ile olan ilişkileri incelenmiştir.

3.1. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x, y, z, t, w \in S$ için, $f_S(xyztw) \supseteq f_S(x) \cap f_S(z) \cap f_S(w)$ ise f_S esnek kümesine, S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel bi-quasi-iç ideali denir.

Bundan sonra S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel bi-quasi-iç ideali kısaca “EK-bi-quasi-iç ideal” olarak gösterilecektir.

3.2. Örnek $S = \{z, m, r\}$ kümesi üzerinde Tablo 3.1 yardımıyla tanımlanan “ $::$ ” ikili işlemi ile $(S, ::)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$::$	z	m	r
z	r	r	r
m	z	m	r
r	r	r	r

Tablo 3.1. Örnek 3.2’deki “ $::$ ” ikili işlemi

$U = Z_8^*$ evrensel kümesi üzerinde f_S ve g_S esnek kümeleri

$$f_S = \{(z, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}), (m, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}\}), (r, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\})\}$$

$$g_S = \{(z, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}), (m, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}\}), (r, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\})\}$$

şeklinde tanımlansın. f_S esnek kümesi bir EK-bi-quasi-iç idealdir. Burada daha anlaşılır olabilmek adına gösterim kolaylığı açısından birkaç somut eleman örneği vermeyi uygun görüyoruz. Gerçekten mesela,

$$f_S(zzmmr) = f_S(r) \supseteq f_S(z) \cap f_S(m) \cap f_S(r)$$

$$f_S(mmmmr) = f_S(r) \supseteq f_S(m) \cap f_S(m) \cap f_S(r)$$

$$f_S(zzzmz) = f_S(r) \supseteq f_S(z) \cap f_S(z) \cap f_S(z)$$

olup, S kümesinin diğer tüm eleman kombinasyonları için de f_S esnek kümesinin EK-bi-quasi-iç ideal şartını sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. Fakat,

$$g_S(mmmrm) = g_S(r) \not\supseteq g_S(m) \cap g_S(m) \cap g_S(m)$$

olduğundan, g_S esnek kümesi bir EK-bi-quasi-iç ideal değildir.

A, S yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olmak üzere, $ASASA \subseteq A$ ise bi-quasi-iç ideal olarak adlandırıldığı bilinmektedir. Bu durum, Teorem 3.3 ile esnek kesişimsel yarıgruplara da aktarılabilir:

3.3. Teorem f_S, U üzerinde bir esnek küme olsun. f_S 'nin bir EK-bi-quasi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olmasıdır.

İspat: f_S , bir EK-bi-quasi-iç ideal olsun. $x \in S$ için $(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(x) = \emptyset$ ise $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olduğu açıktır. Diğer durumlarda, $x \in S$ için, $x = ab$, $a = cd$, $c = ef$ ve $e = km$ olacak şekilde $a, b, c, d, e, f, k, m \in S$ olsun. f_S , bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğundan, $f_S(x) = f_S(ab) = f_S(kmfdb) \supseteq f_S(k) \cap f_S(f) \cap f_S(b)$. Buradan,

$$\begin{aligned} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(x) &= [(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \circ f_S](x) \\ &= \bigcup_{x=ab} \{(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(a) \cap (f_S)(b)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcup_{x=ab} \left\{ \bigcup_{a=cd} \{ (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(c) \cap \tilde{S}(d) \} \cap f_S(b) \right\} \\
&= \bigcup_{x=ab} \left\{ \bigcup_{a=cd} \left\{ \bigcup_{c=ef} \{ (f_S \circ \tilde{S})(e) \cap (f_S)(f) \} \cap \tilde{S}(d) \cap f_S(b) \right\} \right\} \\
&= \bigcup_{x=ab} \left\{ \bigcup_{a=cd} \left\{ \bigcup_{c=ef} \left\{ \bigcup_{e=km} \{ (f_S)(k) \cap \tilde{S}(m) \} \cap (f_S)(f) \cap \tilde{S}(d) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \cap f_S(b) \right\} \right\} \right\} \\
&= \bigcup_{x=kmfdb} \{ f_S(k) \cap f_S(f) \cap f_S(b) \} \\
&\subseteq \bigcup_{x=kmfdb} \{ f_S(kmfdb) \} \\
&= f_S(ab) \\
&= f_S(x)
\end{aligned}$$

olduğundan $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ elde edilir. Ayrıca, $x \in S$ için $x = ab$ fakat $a \neq kmfdb$ olduğu durumda ise $(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(a) = \emptyset$ elde edileceğinden bu durumda da $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ sağlanacaktır.

Tersine, $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olsun. $x \in S$ için, $x = apcde$ olacak şekilde $a, p, c, d, e \in S$ alalım. Buradan,

$$\begin{aligned}
f_S(apcde) &= f_S(x) \\
&\supseteq (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(x) \\
&= [(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \circ f_S](x) \\
&= \bigcup_{x=me} \{ (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(m) \cap f_S(e) \} \\
&= \bigcup_{x=me} \left\{ \bigcup_{m=kd} \{ (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(k) \cap \tilde{S}(d) \} \cap f_S(e) \right\} \\
&= \bigcup_{x=me} \left\{ \bigcup_{m=kd} \left\{ \bigcup_{k=bc} \{ (f_S \circ \tilde{S})(b) \cap f_S(c) \} \cap \tilde{S}(d) \cap f_S(e) \right\} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcup_{x=me} \left\{ \bigcup_{m=kd} \left\{ \bigcup_{k=bc} \left\{ \bigcup_{b=ap} f_S(a) \cap \tilde{S}(p) \cap f_S(c) \cap \tilde{S}(d) \cap f_S(e) \right\} \right\} \right\} \\
&\supseteq (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(apcd) \cap f_S(e) \\
&= \bigcup_{x=apcde} \{f_S(a) \cap \tilde{S}(p) \cap f_S(c) \cap \tilde{S}(d) \cap f_S(e)\} \\
&\supseteq f_S(a) \cap \tilde{S}(p) \cap f_S(c) \cap \tilde{S}(d) \cap f_S(e) \\
&= f_S(a) \cap U \cap f_S(c) \cap U \cap f_S(e) \\
&= f_S(a) \cap f_S(c) \cap f_S(e)
\end{aligned}$$

olduğundan, $f_S(apcde) \supseteq f_S(a) \cap f_S(c) \cap f_S(e)$ elde edilir. Böylece, f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.4. Sonuç $\emptyset_S$ ve $\tilde{S}$ bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.5. Teorem A, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt yarıgrubu olsun. S_A , A kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir bi-quasi-iç ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-bi-quasi-iç ideal olmasıdır.

İspat: A , S kümesinin boş kümeden farklı bir alt yarıgrubu olmak üzere S yarıgrubunun bir bi-quasi-iç ideali olsun. O halde $ASASA \subseteq A$. Böylece Teorem 2.4.2'den,

$$S_A \circ \tilde{S} \circ S_A \circ \tilde{S} \circ S_A = S_A \circ S_S \circ S_A \circ S_S \circ S_A = S_{ASASA} \subseteq S_A$$

elde edilir. Buradan, S_A bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

Tersine, S_A bir EK-bi-quasi-iç ideal olsun. O halde, $S_A \circ \tilde{S} \circ S_A \circ \tilde{S} \circ S_A \subseteq S_A$ sağlanır. $x \in ASASA$ olmak üzere, Teorem 2.4.2'den,

$$S_A(x) \supseteq (S_A \circ \tilde{S} \circ S_A \circ \tilde{S} \circ S_A)(x) = (S_A \circ S_S \circ S_A \circ S_S \circ S_A)(x) = S_{ASASA}(x) = U$$

olduğundan, $S_A(x) = U$, buradan $x \in A$ elde edilir. Sonuç olarak $ASASA \subseteq A$. Kabul gereği, A , S yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. Böylece A , S yarıgrubunun bir bi-quasi-iç idealidir.

3.6. *Örnek* Örnek 3.2’de verilen S yarıgrubunu ele alalım. $A = \{z, r\}$, S kümesinin boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir bi-quasi-iç ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Rutin hesaplamalarla, A kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu $S_A = \{(z, U), (m, \emptyset)(r, U)\}$ ’nin bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu gösterilir.

Tersine X ’in esnek karakteristik fonksiyonu $f_S = \{(z, U), (m, \emptyset)(r, U)\}$ olarak seçilerek, rutin hesaplamalarla hem S_X ’in bir EK-bi-quasi-iç ideal hem de $X = \{z, r\}$ ’nin S yarıgrubunun bir bi-quasi-iç ideali olduğu gösterilebilir.

Şimdi EK-bi-quasi-iç idealler ile diğer EK-idealler arasındaki ilişkilere bakılacaktır.

3.7. Teorem Her EK-bi-ideal, bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-bi-ideal olsun. O halde $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$. Buradan,

$$(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$$

elde edilir. Böylece, f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

Teorem 3.7’nin karşıtının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.8. *Örnek* $S = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde Tablo 3.2 yardımıyla tanımlanan “ $\otimes$ ” ikili işlemi ile $(S, \otimes)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\otimes$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	a	b
d	a	a	b	c

Tablo 3.2. Örnek 3.8’deki “ $\otimes$ ” ikili işlemi

$U = \mathbb{Z}$ evrensel kümesi üzerinde f_S esnek kümesi,

$$f_S = \{(a, \{1,2,3,4,5\}), (b, \{2,3\}), (c, \{4,5\}), (d, \{1\})\}$$

şeklinde tanımlansın. f_S esnek kümesi bir EK-bi-quasi-iç idealdir. Gerçekten,

$$(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(a) = f_S(a) \cup f_S(b) \cup f_S(c) \cup f_S(d) \subseteq f_S(a)$$

$$(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(b) = \emptyset \subseteq f_S(b)$$

$$(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(c) = \emptyset \subseteq f_S(c)$$

$$(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(d) = \emptyset \subseteq f_S(d)$$

olduğundan, f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir. Fakat,

$$(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(b) = f_S(d) \not\subseteq f_S(b)$$

olduğundan, f_S bir EK-bi-ideal değildir.

3.9. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir regüler yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-bi-idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Teorem 3.7'nin ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-bi-quasi-iç ideal ve $a, b, c \in S$ olsun. Kabul gereği, her $a \in S$ için, $a = axa$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(abc) = f_S((axa)bc) = f_S(axabc) \supseteq f_S(a) \cap f_S(a) \cap f_S(c) = f_S(a) \cap f_S(c)$$

olduğundan, f_S bir EK-bi-idealdir. Böylece (2) ise (1) sağlanır.

3.10. Teorem Her EK-sol ideal, bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-sol ideal olsun. O halde Teorem 2.4.5'ten, her EK-sol idealin bir EK-bi-ideal olduğu ve Teorem 3.7'den, her EK-bi-idealın bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu bilinmektedir. Buradan, f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

Teorem 3.10'un karşıtının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.11. Örnek $S = \{1,2\}$ kümesi üzerinde Tablo 3.3 yardımıyla tanımlanan “ $\star$ ” ikili işlemi ile $(S, \star)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\star$	1	2
1	1	1
2	2	2

Tablo 3.3. Örnek 3.11'deki “ $\star$ ” ikili işlemi

$U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$ evrensel kümesi üzerinde f_S esnek kümesi,

$$f_S = \left\{ \left(1, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right), \left(2, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right) \right\}$$

şeklinde tanımlansın. f_S esnek kümesi bir EK-bi-quasi-iç idealdir. Gerçekten,

$$(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(1) = f_S(1) \subseteq f_S(1)$$

$$(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(2) = f_S(2) \subseteq f_S(2)$$

olup, f_S esnek kümesinin EK-bi-quasi-iç ideal şartını sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. Fakat,

$$f_S(21) = f_S(2) \not\subseteq f_S(1)$$

olduğundan f_S esnek kümesi bir EK-sol ideal değildir.

Teorem 3.12, Teorem 3.10'un karşıtının regüler ve sağ basit yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.12. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir regüler ve sağ basit yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sol idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Teorem 3.10'un ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-bi-quasi-iç ideal ve $a, b \in S$ olsun. Kabul gereği, her $a, b \in S$ için, $a = bx$ ve $b = byb$ olacak şekilde $x, y \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(ab) = f_S((bx)(byb)) = f_S(bxbyb) \supseteq f_S(b) \cap f_S(b) \cap f_S(b) = f_S(b)$$

olduğundan, f_S bir EK-sol idealdir.

3.13. Teorem Her EK-sağ ideal, bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-sağ ideal olsun. O halde Teorem 2.4.5'ten, her EK-sağ idealin bir EK-bi-ideal olduğu ve Teorem 3.7'den, her EK-bi-idealın bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu bilinmektedir. Buradan, f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

Teorem 3.13'ün karşıtının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.14. *Örnek* Örnek 3.2'de verilen f_S esnek kümesini ele alalım. f_S 'nin bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu, Örnek 3.2'de gösterilmiştir. Fakat,

$$f_S(mz) = f_S(z) \not\supseteq f_S(m)$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ ideal değildir.

Teorem 3.15, Teorem 3.13'ün karşıtının regüler ve sol basit yarıgruplar için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.15. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir regüler ve sol basit yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sağ idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Teorem 3.13'ün ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-bi-quasi-iç ideal ve $a, b \in S$ olsun. Kabul gereği, her $a, b \in S$ için, $b = xa$ ve $a = aya$ olacak şekilde $x, y \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(ab) = f_S((aya)(xa)) = f_S(ayaxa) \supseteq f_S(a) \cap f_S(a) \cap f_S(a) = f_S(a)$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ idealdir.

3.16. Sonuç Her EK-ideal, bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

Sonuç 3.16'nın karşıtının her zaman doğru olmadığı Örnek 3.11 ve Örnek 3.14'ten açıktır.

3.17. Sonuç f_S , U üzerinde bir esnek küme, S bir regüler ve basit grup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: (1) ise (2) olduğu Teorem 3.10 ve Teorem 3.13'ün ispatından açıktır. S bir grup olsun. İspatın devamı Teorem 3.12 ve Teorem 3.15'ten açıktır.

3.18. Teorem Her EK-iç ideal, bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-iç ideal olsun. Buradan $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \cong f_S$ olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$f_S \circ (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \circ f_S \cong f_S \circ f_S \circ f_S \cong \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \cong f_S$$

elde edilip, f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

Teorem 3.18'in karışının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.19. *Örnek* Örnek 3.2'de verilen f_S esnek kümesini ele alalım. f_S 'nin bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu, Örnek 3.2'de gösterilmiştir. Fakat,

$$f_S(mmz) = f_S(z) \not\subseteq f_S(m)$$

olduğundan, f_S bir EK-iç ideal değildir.

Teorem 3.18'in karışının gruplar için geçerli olduğunu Teorem 3.20 ile gösterelim.

3.20. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir grup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-iç idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: (1) ise (2) olduğu Teorem 3.18'in ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-bi-quasi-iç ideal ve $a, b, c \in S$ olsun. Kabul gereği, her $a, b, c \in S$ için, $a = bx$ ve $c = yb$ olacak şekilde $x, y \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(abc) = f_S((bx)b(yb)) = f_S(bxb yb) \supseteq f_S(b) \cap f_S(b) \cap f_S(b) = f_S(b)$$

olup, f_S bir EK-iç idealdir.

3.21. Teorem Her EK-quasi-ideal, bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-quasi-ideal olsun. O halde Teorem 2.4.5'ten her EK-quasi-idealın EK-bi-ideal olduğu ve Teorem 3.7'den her EK-bi-idealın EK-bi-quasi-iç ideal olduğu bilinmektedir. Buradan, f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

Teorem 3.21'in karıştının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.22. *Örnek* Örnek 3.8'de verilen f_S esnek kümesini ele alalım. f_S 'nin bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu, Örnek 3.8'de gösterilmiştir. Fakat,

$$(f_S \circ \tilde{S})(b) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(b) = f_S(d) \cup f_S(c) \not\subseteq f_S(b)$$

olduğundan, f_S bir EK-quasi ideal değildir.

3.23. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir regüler grup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-quasi-idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: (1) ise (2) olduğu Teorem 3.20'nin ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-bi-quasi-iç ideal olsun. S bir regüler grup olduğundan, Sonuç 3.17'den, f_S bir EK-idealdir. Teorem 2.4.5'ten f_S bir EK-quasi-idealdir. Böylece (2) ise (1) sağlanır.

3.24. Teorem Her EK-bi-iç-ideal, bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-bi-iç ideal olsun. O halde, $(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(f_S \circ \tilde{S}) \circ f_S \circ (\tilde{S} \circ f_S) \subseteq \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}$$

ve

$$f_S \circ (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \circ f_S \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S$$

olup,

$$f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \cong (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong f_S$$

elde edilir. Böylece, f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.25. *Örnek* Örnek 3.8’de verilen f_S esnek kümesini ele alalım. f_S ’nin bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu, Örnek 3.8’de gösterilmiştir. Fakat,

$$(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(b) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(b) = f_S(d) \not\subseteq f_S(b)$$

olduğundan, f_S bir EK-bi-iç ideal değildir.

3.26. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir regüler grup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-bi-iç idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: (1) ise (2) olduğu Teorem 3.24’ün ispatından açıktır. (2)’yi kabul edelim. f_S bir EK-bi-quasi-iç ideal olsun. S bir regüler grup olduğundan, Teorem 3.9’dan f_S bir EK-bi-idealdir. Buradan,

$$(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong f_S$$

olduğundan f_S bir EK-bi-iç idealdir. Böylece (2) ise (1) sağlanır.

3.27. Teorem Her EK-sol bi-quasi ideal, bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-sol bi-quasi ideal olsun. Buradan $(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong f_S$ olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \circ f_S \subseteq \tilde{S} \circ f_S$$

ve

$$f_S \circ (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \circ f_S \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S$$

olup,

$$f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq (\tilde{S} \circ f_S) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$$

elde edilir. Böylece f_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.

Teorem 3.27'nin karışının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.28. *Örnek* Örnek 3.8'de verilen f_S esnek kümesini ele alalım. f_S 'nin bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu, Örnek 3.8'de gösterilmiştir. Fakat,

$$(\tilde{S} \circ f_S)(b) \cap (f_S \circ \tilde{S})(b) = f_S(d) \not\subseteq f_S(b)$$

olduğundan, f_S bir EK-sol bi-quasi ideal değildir.

3.29. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S regüler ve sağ basit yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: (1) ise (2) olduğu Teorem 3.27'nin ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-bi-quasi-iç ideal olsun. S bir regüler ve sağ basit yarıgrup olduğundan, Teorem 3.9'den, f_S bir EK-bi-idealdir ve Teorem 3.12'den, f_S bir EK-sol idealdir. O halde, $(\tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$ ve $(f_S \circ \tilde{S}) \subseteq f_S$ olup buradan $(\tilde{S} \circ f_S) \cap (f_S \circ \tilde{S}) \subseteq f_S$ elde edilir. Böylece, (2) ise (1) sağlanır.

3.30. Teorem Her EK-sağ bi-quasi ideal, bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-sağ bi-quasi ideal olsun. O halde, $(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$f_S \circ (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S \circ \tilde{S}$$

ve

$$f_S \circ (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \circ f_S \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S$$

olup,

$$f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq (f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S$$

elde edilir. Böylece, f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

3.31. *Örnek* Örnek 3.8’de verilen f_S esnek kümesini ele alalım. f_S ’nin bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu, Örnek 3.8’de gösterilmiştir. Fakat,

$$(f_S \circ \tilde{S})(b) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(b) = f_S(d) \not\subseteq f_S(b)$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ bi-quasi ideal değildir.

3.32. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir regüler ve sol basit yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: (1) ise (2) olduğu Teorem 3.28’nin ispatından açıktır. (2)’yi kabul edelim. f_S bir EK-bi-quasi-iç ideal olsun. S bir regüler ve sol basit yarıgrup olduğundan, Teorem 3.15’ten, f_S

bir EK-sağ idealdir ve Teorem 3.9'dan f_S bir EK-bi-idealdir. O halde, $(f_S \circ \tilde{S}) \cong f_S$ ve $(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong f_S$ olup buradan, $(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong f_S$ elde edilir. Böylece, (2) ise (1) sağlanır.

3.33. *Sonuç* Her EK-bi-quasi ideal, bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

Sonuç 3.33'ün karşınının her zaman doğru olmadığı Örnek 3.28 ve Örnek 3.31'den açıktır.

3.34. *Sonuç* f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir regüler grup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-bi-quasi idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.35. *Teorem* Her EK-sol quasi-iç ideal, bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-sol quasi-iç ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \cong f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(f_S \circ \tilde{S}) \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \cong \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \cong f_S$$

elde edilip, f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.36. *Teorem* f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir sağ basit yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: (1) ise (2) olduğu Teorem 3.35'in ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-bi-quasi-iç ideal ve $a, b, c, d \in S$ olsun. Kabul gereği her $a, b \in S$ için $a = bx$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(abcd) = f_S((bx)bcd) = f_S(bxbcd) \supseteq f_S(b) \cap f_S(b) \cap f_S(d) = f_S(b) \cap f_S(d)$$

elde edilir. Böylece, (2) ise (1) sağlanır.

3.37. Teorem Her EK-sağ quasi-iç ideal, bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-sağ quasi-iç ideal olsun. O halde, $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ (\tilde{S} \circ f_S) \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$$

elde edilip, f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

Teorem 3.37'nin karşınının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.38. Örnek $S = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde Tablo 3.4 yardımıyla tanımlanan “ $**$ ” ikili işlemi ile $(S, **)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$**$	a	b	c	d	e
a	a	d	a	d	d
b	a	b	a	d	d
c	a	d	c	d	e
d	a	d	a	d	d
e	a	d	c	d	e

Tablo 3.4. Örnek 3.38'deki “ $**$ ” ikili işlemi

U evrensel kümesi üzerinde f_S esnek kümesi,

$$f_S = \{(a, U), (b, \emptyset), (c, U), (d, \emptyset), (e, \emptyset)\}$$

şeklinde tanımlansın. f_S esnek kümesi bir EK-bi-quasi-iç idealdir. Fakat,

$$f_S(cbcb) = f_S(d) \not\supseteq f_S(c)$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ quasi-iç ideal değildir.

3.39. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir sol basit yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sağ quasi-iç idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: (1) ise (2) olduğu Teorem 3.37'nin ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim f_S bir EK-bi-quasi-iç ideal ve $a, b, c, d \in S$ olsun. Kabul gereği her $d, c \in S$ için $d = xc$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(abcd) = f_S(abc(xc)) = f_S(abcxc) \supseteq f_S(a) \cap f_S(c) \cap f_S(c) = f_S(a) \cap f_S(c)$$

elde edilir. Böylece, (2) ise (1) sağlanır.

3.40. Sonuç Her EK-quasi-iç ideal, bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

Sonuç 3.40'ın karşınının her zaman doğru olmadığı Örnek 3.38'den açıktır.

3.41. Sonuç f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir grup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-quasi-iç idealdir.
2. f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: (1) ise (2) olduğu Teorem 3.35 ve Teorem 3.37'nin ispatından açıktır. S bir grup olsun. İspatın devamı Teorem 3.36 ve Teorem 3.39'dan açıktır.

3.42. Önerme f_S ve f_T , sırasıyla S ve T nin birer EK-bi-quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \wedge f_T$, $S \times T$ 'nin bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: Her $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5) \in S \times T$ için,

$$\begin{aligned}
 f_{S \wedge T}((x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3)(x_4, y_4)(x_5, y_5)) &= f_{S \wedge T}(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5, y_1 y_2 y_3 y_4 y_5) \\
 &= f_S(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \cap f_T(y_1 y_2 y_3 y_4 y_5) \\
 &\supseteq (f_S(x_1) \cap f_S(x_3) \cap f_S(x_5)) \\
 &\quad \cap (f_T(y_1) \cap f_T(y_3) \cap f_T(y_5)) \\
 &= (f_S(x_1) \cap f_T(y_1)) \cap (f_S(x_3) \cap f_T(y_3)) \\
 &\quad \cap (f_S(x_5) \cap f_T(y_5)) \\
 &= f_{S \wedge T}(x_1, y_1) \cap f_{S \wedge T}(x_3, y_3) \cap f_{S \wedge T}(x_5, y_5)
 \end{aligned}$$

olduğundan, $f_S \wedge f_T$, $S \times T$ 'nin bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.43. *Sonuç* EK-bi-quasi-iç ideallerin sonlu esnek $\wedge$ -çarpımları da bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

Burada, $f_S \vee f_T$, $S \times T$ 'nin her zaman bir EK-bi-quasi-iç ideal değildir. Bunu, Örnek 3.44 ile gösterelim.

3.44. *Örnek* Örnek 3.2'deki ve Örnek 3.11'deki yarıgrupları ele alalım. $U = Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ evrensel kümesi üzerinde birer EK-bi-quasi-iç ideal olan f_S ve f_T esnek kümeleri,

$$f_S = \{(z, \{1, 3\}), (m, \{2, 4, 5\}), (r, \{1, 2, 3, 4, 5\})\}$$

$$f_T = \{(1, \{1, 3, 4, 5\}), (2, \{2\})\}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan,

$$f_{S \vee T}((m, 1)(m, 1)(m, 1)(m, 1)(z, 2)) \not\supseteq f_{S \vee T}(m, 1) \cap f_{S \vee T}(m, 1) \cap f_{S \vee T}(z, 2)$$

olup, $f_S \vee f_T$ bir EK-bi-quasi-iç ideal değildir.

3.45. Önerme f_S ve f_T , sırasıyla S yarıgrubunun ve T yarıgrubunun U üzerinde birer EK-bi-quasi-iç ideali olsun. Bu durumda, $f_S \times f_T$, $S \times T$ yarıgrubunun $U \times U$ üzerinde bir EK-bi-quasi-iç idealidir.

İspat: Her $(x, y) \in S \times T$ için, $f_{S \times T}(x, y) = f_S(x) \times f_T(y)$ olacak şekilde, $f_S \times f_T = f_{S \times T}$ alalım. Her $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5) \in S \times T$ için,

$$\begin{aligned}
 f_{S \times T}((x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3)(x_4, y_4)(x_5, y_5)) &= f_{S \times T}(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5, y_1 y_2 y_3 y_4 y_5) \\
 &= f_S(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \times f_T(y_1 y_2 y_3 y_4 y_5) \\
 &\supseteq (f_S(x_1) \cap f_S(x_3) \cap f_S(x_5)) \\
 &\quad \times (f_T(y_1) \cap f_T(y_3) \cap f_T(y_5)) \\
 &= (f_S(x_1) \times f_T(y_1)) \cap (f_S(x_3) \times f_T(y_3)) \\
 &\quad \cap (f_S(x_5) \times f_T(y_5)) \\
 &= f_{S \times T}(x_1, y_1) \cap f_{S \times T}(x_3, y_3) \\
 &\quad \cap f_{S \times T}(x_5, y_5)
 \end{aligned}$$

olduğundan, $f_S \times f_T = f_{S \times T}$, $S \times T$ yarıgrubunun $U \times U$ üzerinde bir EK-bi-quasi-iç idealidir.

3.46. Sonuç EK-bi-quasi-iç ideallerin sonlu esnek $\times$ -çarpımları da bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.47. Teorem f_S ve h_S birer EK-bi-quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S ve h_S birer EK-bi-quasi-iç ideal olsun. O halde, $f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \subseteq f_S$ ve $h_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ h_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ h_S \subseteq h_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \subseteq f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \subseteq f_S$$

ve,

$$(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \cong h_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ h_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ h_S \cong h_S$$

olup,

$$(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \cong f_S \tilde{\cap} h_S$$

elde edilir. Böylece, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.48. *Sonuç* EK-bi-quasi-iç ideallerin sonlu esnek kesişimleri de bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

Burada, $f_S \tilde{\cap} h_S$ her zaman bir EK-bi-quasi-iç ideal değildir.

3.49. *Sonuç* f_S ve h_S sırasıyla EK-sağ ve EK-sol ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S , EK-sağ ideal ise Teorem 3.13'ten f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir. h_S , EK-sol ideal ise Teorem 3.10'dan h_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir. Teorem 3.47'den $f_S \tilde{\cap} h_S$ EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.50. *Sonuç* f_S , bir EK-bi-quasi-iç ideal ve h_S , bir EK-sağ ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-bi-quasi-iç ideal ve h_S , bir EK-sağ ideal olsun. O halde, $f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \cong f_S$ ve $h_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \cong h_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \cong f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \cong f_S$$

ve

$$(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \cong h_S \circ (\tilde{\mathbb{S}} \circ h_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ h_S) \cong h_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \cong h_S$$

olup,

$$(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \cong f_S \tilde{\cap} h_S$$

elde edilir. Böylece, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.51. *Sonuç* f_S , bir EK-bi-ideal ve h_S , bir EK-iç ideal olsun. Bu takdirde, $f_S \tilde{\cap} h_S$ EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S , bir EK-bi-ideal ve h_S , bir EK-iç ideal olsun. O halde, Teorem 3.7'den, $f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \cong f_S$ ve Teorem 3.18'den, $h_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ h_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ h_S \cong h_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \cong f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \cong f_S$$

ve

$$(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \cong h_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ h_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ h_S \cong h_S$$

olup,

$$(f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \tilde{\cap} h_S) \cong f_S \tilde{\cap} h_S$$

elde edilir. Böylece, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.52. *Önerme* f_S , bir EK-sol ideal olsun. Bu durumda, $f_S \circ h_S$ bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-sol ideal olsun. Buradan, $\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \cong f_S$ ve $f_S \circ f_S \cong f_S$ olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$\begin{aligned} (f_S \circ h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \circ h_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \circ h_S) &= f_S \circ h_S \circ (\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S) \circ h_S \circ (\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S) \circ h_S \\ &\cong f_S \circ h_S \circ f_S \circ h_S \circ f_S \circ h_S \cong f_S \circ (\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S) \circ (\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S) \circ h_S \cong (f_S \circ f_S) \circ f_S \circ h_S \\ &\cong (f_S \circ f_S) \circ h_S \cong f_S \circ h_S \end{aligned}$$

elde edilip, $f_S \circ h_S$ bir EK- bi-quasi-iç idealdir.

3.53. Önerme f_S , bir EK-sağ ideal olsun. Bu durumda, $f_S \circ h_S$ bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-sağ ideal olsun. Buradan, $f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ ve $f_S \circ f_S \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$\begin{aligned} (f_S \circ h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \circ h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \circ h_S) &\subseteq f_S \circ (\tilde{S} \circ \tilde{S}) \circ f_S \circ (\tilde{S} \circ \tilde{S}) \circ f_S \circ h_S \subseteq (f_S \circ \tilde{S}) \\ &\circ (f_S \circ \tilde{S}) \circ f_S \circ h_S \subseteq (f_S \circ f_S) \circ f_S \circ h_S \subseteq (f_S \circ f_S) \circ h_S \subseteq f_S \circ h_S \end{aligned}$$

elde edilip, $f_S \circ h_S$ bir EK- bi-quasi-iç idealdir.

3.54. Teorem f_S , bir EK-ideal olsun. Bu durumda, $f_S \circ h_S$ bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.55. Önerme h_S , bir EK-sol ideal olsun. Bu durumda, $f_S \circ h_S$ bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: h_S , bir EK-sol ideal olsun. Buradan, $\tilde{S} \circ h_S \subseteq h_S$ ve $h_S \circ h_S \subseteq h_S$ olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$\begin{aligned} (f_S \circ h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \circ h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \circ h_S) &\subseteq f_S \circ h_S \circ (\tilde{S} \circ \tilde{S}) \circ h_S \circ (\tilde{S} \circ \tilde{S}) \circ h_S \subseteq f_S \circ h_S \\ &\circ (\tilde{S} \circ h_S) \circ (\tilde{S} \circ h_S) \subseteq f_S \circ (h_S \circ h_S) \circ h_S \subseteq f_S \circ (h_S \circ h_S) \subseteq f_S \circ h_S \end{aligned}$$

elde edilip, $f_S \circ h_S$ bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.56. Önerme h_S , bir EK-sağ ideal olsun. Bu durumda, $f_S \circ h_S$ bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: h_S , bir EK-sağ ideal olsun. Buradan, $h_S \circ \tilde{S} \subseteq h_S$ ve $h_S \circ h_S \subseteq h_S$ olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$\begin{aligned} (f_S \circ h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \circ h_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \circ h_S) &\subseteq f_S \circ (h_S \circ \tilde{S}) \circ f_S \circ (h_S \circ \tilde{S}) \circ f_S \circ h_S \subseteq f_S \circ h_S \\ &\circ f_S \circ h_S \circ f_S \circ h_S \subseteq f_S \circ (h_S \circ \tilde{S}) \circ (h_S \circ \tilde{S}) \circ h_S \subseteq f_S \circ (h_S \circ h_S) \circ h_S \subseteq f_S \\ &\circ (h_S \circ h_S) \subseteq f_S \circ h_S \end{aligned}$$

elde edilip, $f_S \circ h_S$ bir EK- bi-quasi-iç idealdir.

3.57. Teorem h_S , bir EK-ideal olsun. Bu durumda, $f_S \circ h_S$ bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.58. Önerme f_S ve g_S U üzerinde birer esnek küme olsun. $f_S \circ g_S$ bir EK-alt yarıgrup ise bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: $f_S \circ g_S$, bir EK-alt yarıgrup olsun. Buradan, $(f_S \circ g_S) \circ (f_S \circ g_S) \subseteq f_S \circ g_S$ olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$(f_S \circ g_S) \circ (f_S \circ g_S) \subseteq \tilde{S} \circ (f_S \circ g_S) \subseteq (f_S \circ g_S)$$

olduğundan, $f_S \circ g_S$ bir EK-sol idealdir. Buradan,

$$(f_S \circ g_S) \circ [\tilde{S} \circ (f_S \circ g_S)] \circ [\tilde{S} \circ (f_S \circ g_S)] \subseteq [(f_S \circ g_S) \circ (f_S \circ g_S)] \circ (f_S \circ g_S) \subseteq (f_S \circ g_S) \circ (f_S \circ g_S) \subseteq (f_S \circ g_S)$$

elde edilip, $f_S \circ g_S$ bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.59. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. $f_S \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ ifadesini sağlayan f_S esnek kümesi bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir yarıgrup olsun.

$$f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$$

elde edilip, f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.60. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. $\tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ f_S \cap f_S \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ ifadesini sağlayan f_S esnek kümesi bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun.

$$f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ f_S$$

ve

$$f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \tilde{S}$$

olup, buradan $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ f_S \cap f_S \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ elde edilir. Böylece, f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.61. Önerme f_S, U üzerinde bir EK-alt yarıgrup, $Im(f_S), f_S$ 'nin görüntü kümesi, $\alpha \in Im(f_S)$ olmak üzere α, U kümesinin alt kümesi olsun. f_S bir EK-bi-quasi-iç ideal ise $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrupunun bir bi-quasi-iç idealidir.

İspat: Bazı $x \in S$ için, $f_S(x) = \alpha$ ise $\emptyset \neq \mathcal{U}(f_S; \alpha) \subseteq S$ olur. $k \in \mathcal{U}(f_S; \alpha) \cdot S \cdot \mathcal{U}(f_S; \alpha) \cdot S \cdot \mathcal{U}(f_S; \alpha)$ olsun. $k = xbybz$ olacak şekilde $x, y, z \in \mathcal{U}(f_S; \alpha)$ ve $b \in S$ alalım. O halde, $f_S(x) \supseteq \alpha$, $f_S(y) \supseteq \alpha$ ve $f_S(z) \supseteq \alpha$ elde edilir. f_S , bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğundan,

$$f_S(k) = f_S(xbybz) \supseteq f_S(x) \cap f_S(y) \cap f_S(z) \supseteq \alpha \cap \alpha \cap \alpha \supseteq \alpha$$

elde edilir. Buradan $f_S(k) \supseteq \alpha$ yani $k \in \mathcal{U}(f_S; \alpha)$. Böylece $\mathcal{U}(f_S; \alpha) \cdot S \cdot \mathcal{U}(f_S; \alpha) \cdot S \cdot \mathcal{U}(f_S; \alpha) \subseteq \mathcal{U}(f_S; \alpha)$ elde edilir. Ayrıca f_S bir EK-alt yarıgrup olup Teorem 2.4.3'ten $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$ S yarıgrupunun bir alt yarıgrupudur. O halde, $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrupunun bir bi-quasi-iç idealidir.

Önerme 3.61'i bir örnek ile gösterelim:

3.62. Örnek Örnek 3.2'deki f_S esnek kümesini ele alalım. Örnek 3.2'de, f_S esnek kümesinin bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu açıktır.

$$Im(f_S) = \{\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}\}, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}\}$$

olduğu dikkate alınarak,

$$\mathcal{U}(f_S; \alpha) = \begin{cases} \{z, r\}, & \alpha = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} \\ \{m, r\}, & \alpha = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}\} \\ \{r\}, & \alpha = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\} \end{cases}$$

elde edilir.

Burada, $\{z, r\}$, $\{m, r\}$ ve $\{r\}$ kümeleri S yarıgrubunun birer bi-quasi-iç idealleridir.

$$\begin{aligned} \{z, r\} \cdot \{z, r\} &\subseteq \{z, r\} \\ \{m, r\} \cdot \{m, r\} &\subseteq \{m, r\} \\ \{r\} \cdot \{r\} &\subseteq \{r\} \end{aligned}$$

olduğundan $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$ S yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur.

Gerçekten de;

$$\begin{aligned} \{z, r\} \cdot S \cdot \{z, r\} \cdot S \cdot \{z, r\} &= \{r\} \subseteq \{z, r\} \\ \{m, r\} \cdot S \cdot \{m, r\} \cdot S \cdot \{m, r\} &= \{m, r\} \subseteq \{m, r\} \\ \{r\} \cdot S \cdot \{r\} \cdot S \cdot \{r\} &= \{r\} \subseteq \{r\} \end{aligned}$$

olduğundan, her bir $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrubunun birer bi-quasi-iç idealidir.

Şimdi ise Örnek 3.2'deki g_S esnek kümesini ele alalım.

$$Im(g_S) = \{\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}\}\}$$

olduğu dikkate alınarak,

$$\mathcal{U}(g_S; \alpha) = \begin{cases} \{z, r\} & \alpha = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} \\ \{m\} & \alpha = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}\} \end{cases}$$

elde edilir.

Burada $\{m\}$ kümesi S yarıgrubunun bir bi-quasi-iç ideali değildir. Gerçekten de;

$$\{m\} \cdot S \cdot \{m\} \cdot S \cdot \{m\} = \{z, m, r\} \not\subseteq \{m\}$$

olduğundan, $\mathcal{U}(g_S; \alpha)$ 'lardan birinin S yarıgrubunun bir bi-quasi-iç ideali olmadığı dolayısıyla, her $\mathcal{U}(g_S; \alpha)$ 'nın S yarıgrubunun bir bi-quasi-iç ideali olmadığı görülmektedir. Diğer taraftan g_S , esnek kümesinin bir EK-bi-quasi-iç ideal olmadığı Örnek 3.2'den açıktır.

3.63. Tanım f_S bir EK-alt yarıgrup olmak üzere EK-bi-quasi-iç ideal olsun. Bu durumda $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$ bi-quasi-iç ideallerine, f_S 'nin üst α -bi-quasi-iç idealleri denir.

3.64. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve her $\alpha \subseteq U$ için, $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, f_S 'nin birer üst α -bi-quasi-iç idealleri olsun. Bu durumda, f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

İspat: $x, y, z, b, c \in S$ için, $f_S(x) = \alpha_1$, $f_S(y) = \alpha_2$ ve $f_S(z) = \alpha_3$ alalım. Buradan, $x \in \mathcal{U}(f_S; \alpha_1)$, $y \in \mathcal{U}(f_S; \alpha_2)$ ve $z \in \mathcal{U}(f_S; \alpha_3)$ olduğu bilinmektedir. $\alpha_1 \subseteq \alpha_2 \subseteq \alpha_3$ ve $x, y, z \in \mathcal{U}(f_S; \alpha_1)$ olsun. Her $\alpha \subseteq U$ için, Teorem 2.4.3'ten $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrubunun bir bi-quasi-iç ideali olduğundan, $xbycz \in \mathcal{U}(f_S; \alpha_1)$ olur. Buradan $f_S(xbycz) \supseteq \alpha_1 = \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3$ elde edilir. Böylece, f_S bir EK-bi-quasi-iç idealdir.

3.65. Önerme f_S ve f_T , U üzerinde birer esnek küme ve Ψ , S 'den T 'ye bir yarıgrup izomorfizması olsun. f_S , S yarıgrubunun bir EK-bi-quasi-iç ideali ise $\Psi(s)$, T yarıgrubunun bir EK-bi-quasi-iç idealidir.

İspat: $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 \in T$ alalım. Ψ örten olduğundan, $\Psi(s_1) = t_1$, $\Psi(s_2) = t_2$, $\Psi(s_3) = t_3$, $\Psi(s_4) = t_4$ ve $\Psi(s_5) = t_5$ olacak şekilde $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \in S$ vardır. O halde,

$$\begin{aligned} (\Psi(f_S))(t_1 t_2 t_3 t_4 t_5) &= \bigcup \{f_S(s) : s \in S, \Psi(f_S) = t_1 t_2 t_3 t_4 t_5\} \\ &= \bigcup \{f_S(s) : s \in S, s = \Psi^{-1}(t_1 t_2 t_3 t_4 t_5)\} \\ &= \bigcup \{f_S(s) : s \in S, s = \Psi^{-1}(\Psi(s_1 s_2 s_3 s_4 s_5)) = s_1 s_2 s_3 s_4 s_5\} \\ &= \bigcup \{f_S(s_1 s_2 s_3 s_4 s_5) : s_i \in S, \Psi(s_i) = t_i, i = 1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\supseteq \bigcup \{f_S(s_1) \cap f_S(s_3) \cap f_S(s_5) : s_1, s_3, s_5 \in S, \Psi(s_1) = t_1, \Psi(s_3) \\
&= t_3 \text{ ve } \Psi(s_5) = t_5\} \\
&= (\Psi(f_S))(s_1) \cap (\Psi(f_S))(s_3) \cap (\Psi(f_S))(s_5)
\end{aligned}$$

olduğundan, $\Psi(f_S)$, T yarıgrubunun bir EK-bi-quasi-iç idealidir.

3.66. Önerme f_S ve f_T , U üzerinde birer esnek küme ve Ψ , S 'den T 'ye bir yarıgrup izomorfizması olsun. f_T , T yarıgrubunun bir EK-bi-quasi-iç ideali ise $\Psi^{-1}(f_T)$, S yarıgrubunun bir EK-bi-quasi-iç idealidir.

İspat: $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \in S$ alalım. O halde,

$$\begin{aligned}
(\Psi^{-1}(f_T))(s_1 s_2 s_3 s_4 s_5) &= f_T(\Psi(s_1 s_2 s_3 s_4 s_5)) \\
&= f_T(\Psi(s_1) \Psi(s_2) \Psi(s_3) \Psi(s_4) \Psi(s_5)) \\
&\supseteq f_T(\Psi(s_1)) \cap f_T(\Psi(s_3)) \cap f_T(\Psi(s_5)) \\
&= (\Psi^{-1}(f_T))(s_1) \cap (\Psi^{-1}(f_T))(s_3) \cap (\Psi^{-1}(f_T))(s_5)
\end{aligned}$$

olduğundan, $\Psi^{-1}(f_T)$, S yarıgrubunun bir EK-bi-quasi-iç idealidir.

3.67. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. S , regüler yarıgruptur.
2. f_S , EK-bi-quasi-iç ideali için, $f_S = f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S$.

İspat: (1)'i kabul edelim. S regüler yarıgrup olsun. O halde, her $x \in S$ için $x = xyx$ olacak şekilde bir $y \in S$ vardır. f_S bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğundan, $f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \subseteq f_S$ olduğu açıktır. Buradan,

$$\begin{aligned}
(f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S)(x) &= \bigcup_{x=ab} \{(f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(a) \cap f_S(b)\} \\
&\supseteq (f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(xy) \cap f_S(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcup_{xy=pq} \{(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(p) \cap \tilde{S}(q)\} \cap f_S(x) \\
&\supseteq (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(x) \cap \tilde{S}(yxy) \cap f_S(x) \\
&= \bigcup_{x=ab} \{(f_S \circ \tilde{S})(a) \cap f_S(b)\} \cap f_S(x) \\
&\supseteq (f_S \circ \tilde{S})(xy) \cap f_S(x) \cap f_S(x) \\
&= \bigcup_{xy=pq} \{f_S(p) \cap \tilde{S}(q)\} \cap f_S(x) \\
&\supseteq f_S(x) \cap \tilde{S}(yxy) \cap f_S(x) \\
&= f_S(x)
\end{aligned}$$

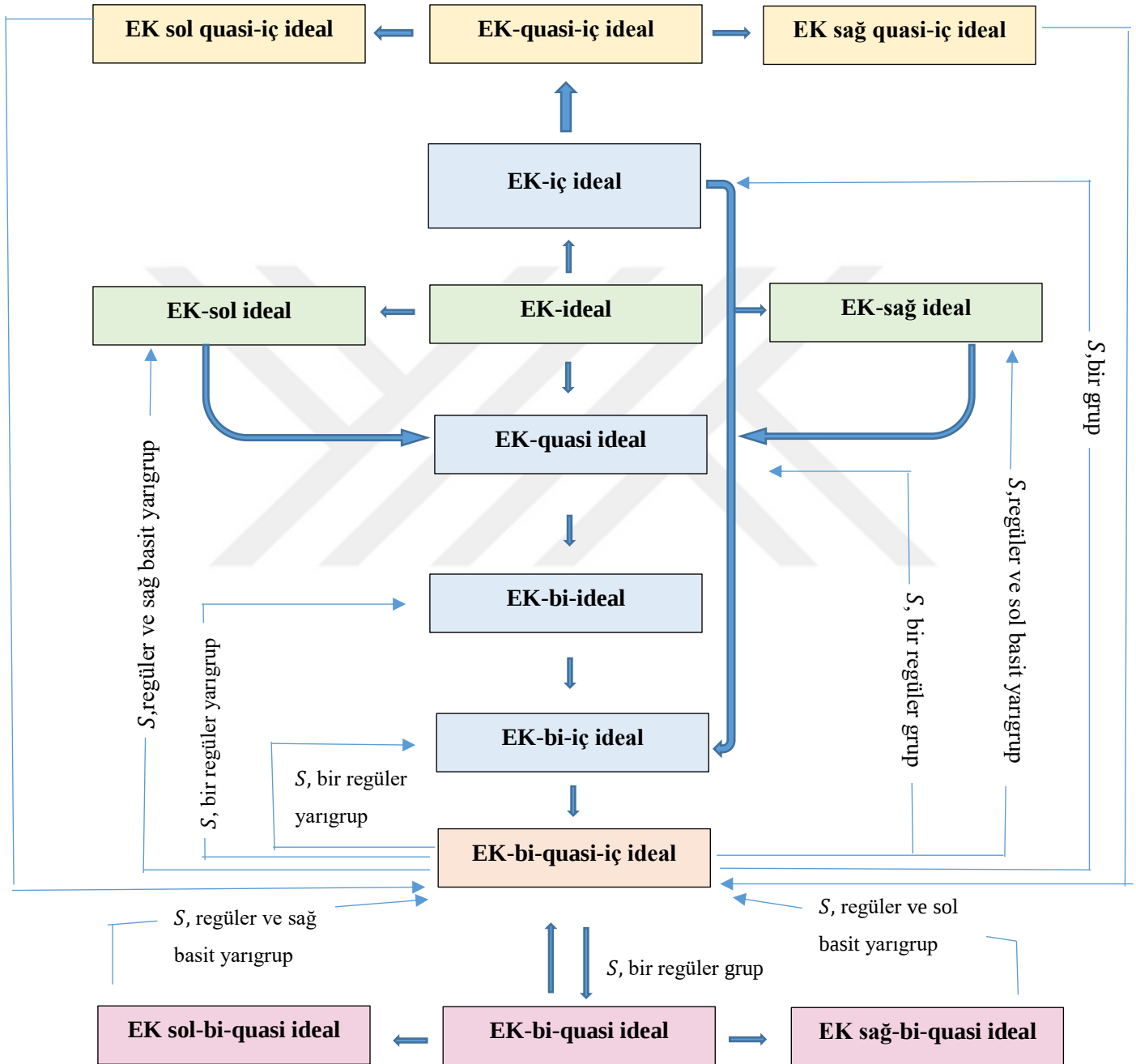
olup, $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \cong f_S$ elde edilir. Böylece, $f_S = f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S$.

Tersine, f_S bir EK-bi-quasi-iç ideal olmak üzere, $f_S = f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S$ olsun. S yarıgrubunun regüler olduğunu göstermek için, S yarıgrubunun her bi-quasi-iç ideali A için $A = ASASA$ sağlandığını göstermek gerekir. A, S yarıgrubunun bir bi-quasi-iç ideali olsun. O halde, $ASASA \subseteq A$ açıktır. Bu durumda, $A \subseteq ASASA$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a \in A$ olsun. A, S yarıgrubunun bir bi-quasi-iç ideali olduğundan, Teorem 2.4.2'den S_A bir EK-bi-quasi-iç idealdir. Kabul gereği ve Teorem 2.3.21'den,

$$S_A(a) = (S_A \circ \tilde{S} \circ S_A \circ \tilde{S} \circ S_A)(a) = (S_A \circ S_S \circ S_A \circ S_S \circ S_A)(a) = S_{ASASA}(a) = U$$

elde edilir. Buradan $a \in ASASA$ olup, $A = ASASA$ elde edilir. Böylece, S regüler bir yarıgruptur.

Birkaç esnek kesişimsel ideal ile bunların genelleştirilmiş idealleri arasındaki ilişki Şekil 3.1’de gösterilmiştir. Burada $A \rightarrow B$, A ’nın B olduğunu ancak B ’nin her zaman A olmayabileceğini gösterir.



Şekil 3.1. Bazı esnek kesişimsel idealler arasındaki ilişkileri gösteren diyagram

4. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN İÇ İDEALLERİ

Bu bölüm, yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen iç idealleri üzerine olup, bölümde Sezgin ve Baş (2024) çalışmasından elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

4.1. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x, y \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ise f_S esnek kümesine, S yarıgrupunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen iç ideali denir.

4.2. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ise f_S esnek kümesine, S yarıgrupunun U üzerinde bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen iç ideali denir.

Bundan sonra, S yarıgrupunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen iç ideali kısaca “EK-hemen hemen iç ideal” olarak, esnek kesişimsel zayıf hemen hemen iç ideali kısaca “EK-zayıf hemen hemen iç ideal” olarak gösterilecektir.

4.3. Örnek $S = \{a, b\}$ kümesi üzerinde Tablo 4.1 yardımıyla tanımlanan “ $\bowtie$ ” ikili işlemi ile $(S, \bowtie)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\bowtie$	a	b
a	a	b
b	b	a

Tablo 4.1. Örnek 4.3'teki “ $\bowtie$ ” ikili işlemi

$U = \{\bar{k} \mid k \in Z_{10}^*\}$ evrensel kümesi üzerinde f_S , g_S ve h_S esnek kümeleri,

$$f_S = \{(a, \{\bar{1}, \bar{3}\}), (b, \{\bar{1}, \bar{9}\})\}$$

$$g_S = \{(a, \{\bar{7}, \bar{9}\}), (b, \{\bar{3}, \bar{7}\})\}$$

$$h_s = \{(a, \{\bar{1}, \bar{3}\}), (b, \{\bar{7}, \bar{9}\})\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada, f_s ve g_s birer EK-hemen hemen iç idealdir.

Öncelikle, her $x, y \in S$ için, $(S_x \circ f_s \circ S_y) \tilde{\cap} f_s \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim:

$S_a - S_a$ ile başlayacak olursak:

$$\begin{aligned} [(S_a \circ f_s \circ S_a) \tilde{\cap} f_s](a) &= (S_a \circ f_s \circ S_a)(a) \cap f_s(a) \\ &= [(S_a \circ f_s)(a) \cap S_a(a)] \cup [(S_a \circ f_s)(b) \cap S_a(b)] \cap f_s(a) \\ &= [((S_a(a) \cap f_s(a)) \cup ((S_a(b) \cap f_s(b))) \cap S_a(a)] \\ &\cup [((S_a(b) \cap f_s(a)) \cup ((S_a(a) \cap f_s(b))) \cap S_a(b)] \cap f_s(a) \\ &= f_s(a) \\ &= \{\bar{1}, \bar{3}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(S_a \circ f_s \circ S_a) \tilde{\cap} f_s](b) &= (S_a \circ f_s \circ S_a)(b) \cap f_s(b) \\ &= [(S_a \circ f_s)(b) \cap S_a(a)] \cup [(S_a \circ f_s)(a) \cap S_a(b)] \cap f_s(b) \\ &= [((S_a(b) \cap f_s(a)) \cup ((S_a(a) \cap f_s(b))) \cap S_a(a)] \\ &\cup [((S_a(a) \cap f_s(a)) \cup ((S_a(b) \cap f_s(b))) \cap S_a(b)] \cap f_s(b) \\ &= f_s(b) \\ &= \{\bar{1}, \bar{9}\} \end{aligned}$$

olduğundan, $(S_a \circ f_s \circ S_a) \tilde{\cap} f_s = \{(a, \{\bar{1}, \bar{3}\}), (b, \{\bar{1}, \bar{9}\})\} \neq \emptyset$

$S_b - S_b$ ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned} [(S_b \circ f_s \circ S_b) \tilde{\cap} f_s](a) &= (S_b \circ f_s \circ S_b)(a) \cap f_s(a) \\ &= [(S_b \circ f_s)(a) \cap S_b(a)] \cup [(S_b \circ f_s)(b) \cap S_b(b)] \cap f_s(a) \\ &= [((S_b(a) \cap f_s(a)) \cup ((S_b(b) \cap f_s(b))) \cap S_b(a)] \\ &\cup [((S_b(b) \cap f_s(a)) \cup ((S_b(a) \cap f_s(b))) \cap S_b(b)] \cap f_s(a) \\ &= f_s(a) \\ &= \{\bar{1}, \bar{3}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(S_b \circ f_s \circ S_b) \tilde{\cap} f_s](b) &= (S_b \circ f_s \circ S_b)(b) \cap f_s(b) \\
&= [(S_b \circ f_s)(b) \cap S_b(a)] \cup [(S_b \circ f_s)(a) \cap S_b(b)] \cap f_s(b) \\
&= [((S_b(b) \cap f_s(a)) \cup ((S_b(a) \cap f_s(b))) \cap S_b(a) \cup [((S_b(a) \\
&\quad \cap f_s(a)) \cup ((S_b(b) \cap f_s(b))) \cap S_b(b)] \cap f_s(b) \\
&= f_s(b) \\
&= \{\bar{1}, \bar{9}\}
\end{aligned}$$

olduğundan, $(S_b \circ f_s \circ S_b) \tilde{\cap} f_s = \{(a, \{\bar{1}, \bar{3}\}), (b, \{\bar{1}, \bar{9}\})\} \neq \emptyset$

$S_a - S_b$ ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned}
[(S_a \circ f_s \circ S_b) \tilde{\cap} f_s](a) &= (S_a \circ f_s \circ S_b)(a) \cap f_s(a) \\
&= [(S_a \circ f_s)(a) \cap S_b(a)] \cup [(S_a \circ f_s)(b) \cap S_b(b)] \cap f_s(a) \\
&= [((S_a(a) \cap f_s(a)) \cup ((S_a(b) \cap f_s(b))) \cap S_b(a) \cup [((S_a(b) \\
&\quad \cap f_s(a)) \cup ((S_a(a) \cap f_s(b))) \cap S_b(b)] \cap f_s(a) \\
&= f_s(b) \cap f_s(a) \\
&= \{\bar{1}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(S_a \circ f_s \circ S_b) \tilde{\cap} f_s](b) &= (S_a \circ f_s \circ S_b)(b) \cap f_s(b) \\
&= [(S_a \circ f_s)(b) \cap S_b(a)] \cup [(S_a \circ f_s)(a) \cap S_b(b)] \cap f_s(b) \\
&= [((S_a(b) \cap f_s(a)) \cup ((S_a(a) \cap f_s(b))) \cap S_b(a) \cup [((S_a(a) \\
&\quad \cap f_s(a)) \cup ((S_a(b) \cap f_s(b))) \cap S_b(b)] \cap f_s(b) \\
&= f_s(a) \cap f_s(b) \\
&= \{\bar{1}\}
\end{aligned}$$

olduğundan, $(S_a \circ f_s \circ S_b) \tilde{\cap} f_s = \{(a, \{\bar{1}\}), (b, \{\bar{1}\})\} \neq \emptyset$

$S_b - S_a$ ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned}
[(S_b \circ f_s \circ S_a) \tilde{\cap} f_s](a) &= (S_b \circ f_s \circ S_a)(a) \cap f_s(a) \\
&= [(S_b \circ f_s)(a) \cap S_a(a)] \cup [(S_b \circ f_s)(b) \cap S_a(b)] \cap f_s(a) \\
&= [((S_b(a) \cap f_s(a)) \cup ((S_b(b) \cap f_s(b))) \cap S_a(a) \cup [((S_b(b) \\
&\quad \cap f_s(a)) \cup ((S_b(a) \cap f_s(b))) \cap S_a(b)] \cap f_s(a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_s(b) \cap f_s(a) \\
&= \{\bar{1}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(S_b \circ f_s \circ S_a) \tilde{\cap} f_s](b) &= (S_b \circ f_s \circ S_a)(b) \cap f_s(b) \\
&= [(S_b \circ f_s)(b) \cap S_a(a)] \cup [(S_b \circ f_s)(a) \cap S_a(b)] \cap f_s(b) \\
&= [((S_b(b) \cap f_s(a)) \cup ((S_b(a) \cap f_s(b))) \cap S_a(a) \cup [((S_b(a) \\
&\cap f_s(a)) \cup ((S_b(b) \cap f_s(b))) \cap S_a(b)] \cap f_s(b) \\
&= f_s(a) \cap f_s(b) \\
&= \{\bar{1}\}
\end{aligned}$$

olduğundan, $(S_b \circ f_s \circ S_a) \tilde{\cap} f_s = \{(a, \{\bar{1}\}), (b, \{\bar{1}\})\} \neq \emptyset$

Böylece, f_s bir EK-hemen hemen iç idealdir. Benzer şekilde,

$$(S_a \circ g_s \circ S_a) \tilde{\cap} g_s = \{(a, \{\bar{7}, \bar{9}\}), (b, \{\bar{3}, \bar{7}\})\} \neq \emptyset$$

$$(S_a \circ g_s \circ S_b) \tilde{\cap} g_s = \{(a, \{\bar{7}\}), (b, \{\bar{7}\})\} \neq \emptyset$$

$$(S_b \circ g_s \circ S_b) \tilde{\cap} g_s = \{(a, \{\bar{7}, \bar{9}\}), (b, \{\bar{3}, \bar{7}\})\} \neq \emptyset$$

$$(S_b \circ g_s \circ S_a) \tilde{\cap} g_s = \{(a, \{\bar{7}\}), (b, \{\bar{7}\})\} \neq \emptyset$$

olduğundan, g_s bir EK-hemen hemen iç idealdir. Fakat, h_s bir EK-hemen hemen iç ideal değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
[(S_a \circ h_s \circ S_b) \tilde{\cap} h_s](a) &= (S_a \circ h_s \circ S_b)(a) \cap h_s(a) \\
&= [(S_a \circ h_s)(a) \cap S_b(a)] \cup [(S_a \circ h_s)(b) \cap S_b(b)] \cap h_s(a) \\
&= [((S_a(a) \cap h_s(a)) \cup ((S_a(b) \cap h_s(b))) \cap S_b(a) \cup [((S_a(b) \\
&\cap h_s(a)) \cup ((S_a(a) \cap h_s(b))) \cap S_b(b)] \cap h_s(a) \\
&= h_s(b) \cap h_s(a) \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(S_a \circ h_s \circ S_b) \tilde{\cap} h_s](b) &= (S_a \circ h_s \circ S_b)(b) \cap h_s(b) \\
&= [(S_a \circ h_s)(b) \cap S_b(a)] \cup [(S_a \circ h_s)(a) \cap S_b(b)] \cap h_s(b) \\
&= [((S_a(b) \cap h_s(a)) \cup ((S_a(a) \cap h_s(b)))) \cap S_b(a) \cup [((S_a(a) \\
&\quad \cap h_s(a)) \cup ((S_a(b) \cap h_s(b))) \cap S_b(b)] \cap h_s(b) \\
&= h_s(a) \cap h_s(b) \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan, $(S_a \circ h_s \circ S_b) \tilde{\cap} h_s = \{(a, \emptyset), (b, \emptyset)\} = \emptyset$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
[(S_b \circ h_s \circ S_a) \tilde{\cap} h_s](a) &= (S_b \circ h_s \circ S_a)(a) \cap h_s(a) \\
&= [(S_b \circ h_s)(a) \cap S_a(a)] \cup [(S_b \circ h_s)(b) \cap S_a(b)] \cap h_s(a) \\
&= [((S_b(a) \cap h_s(a)) \cup ((S_b(b) \cap h_s(b)))) \cap S_a(a) \cup [((S_b(b) \\
&\quad \cap h_s(a)) \cup ((S_b(a) \cap h_s(b))) \cap S_a(b)] \cap h_s(a) \\
&= h_s(b) \cap h_s(a) \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(S_b \circ h_s \circ S_a) \tilde{\cap} h_s](b) &= (S_b \circ h_s \circ S_a)(b) \cap h_s(b) \\
&= [(S_b \circ h_s)(b) \cap S_a(a)] \cup [(S_b \circ h_s)(a) \cap S_a(b)] \cap h_s(b) \\
&= [((S_b(b) \cap h_s(a)) \cup ((S_b(a) \cap h_s(b)))) \cap S_a(a) \cup [((S_b(a) \\
&\quad \cap h_s(a)) \cup ((S_b(b) \cap h_s(b))) \cap S_a(b)] \cap h_s(b) \\
&= h_s(a) \cap h_s(b) \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan, $(S_b \circ h_s \circ S_a) \tilde{\cap} h_s = \{(a, \emptyset), (b, \emptyset)\} = \emptyset$

Böylece, bazı $x, y \in S$ için, $(S_x \circ h_s \circ S_y) \tilde{\cap} h_s = \emptyset_s$ olup, h_s bir EK-hemen hemen iç ideal değildir.

4.4. Teorem Her EK-hemen hemen iç ideal, bir EK-zayıf hemen hemen iç idealdir.

İspat: t_S , bir EK-hemen hemen iç ideal olsun. Her $x, y \in S$ için, $(S_x \circ t_S \circ S_y) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$. O halde, her $x \in S$ için, $(S_x \circ t_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olur. Böylece, t_S bir EK-zayıf hemen hemen iç idealdir.

Teorem 4.4'ün karşıtının doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

4.5. *Örnek* Örnek 4.3'te verilen h_S esnek kümesini ele alalım. h_S esnek kümesinin bir EK-hemen hemen iç ideal olmadığı Örnek 4.3'te görülmektedir. Fakat,

$$\begin{aligned}
 [(S_a \circ h_S \circ S_a) \tilde{\cap} h_S](a) &= (S_a \circ h_S \circ S_a)(a) \cap h_S(a) \\
 &= [(S_a \circ h_S)(a) \cap S_a(a)] \cup [(S_a \circ h_S)(b) \cap S_a(b)] \cap h_S(a) \\
 &= [((S_a(a) \cap h_S(a)) \cup ((S_a(b) \cap h_S(b)))) \cap S_a(a) \cup [((S_a(b) \\
 &\quad \cap h_S(a)) \cup ((S_a(a) \cap h_S(b))) \cap S_a(b)] \cap h_S(a) \\
 &= h_S(a) \\
 &= \{\bar{1}, \bar{3}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [(S_a \circ h_S \circ S_a) \tilde{\cap} h_S](b) &= (S_a \circ h_S \circ S_a)(b) \cap h_S(b) \\
 &= [(S_a \circ h_S)(b) \cap S_a(a)] \cup [(S_a \circ h_S)(a) \cap S_a(b)] \cap h_S(b) \\
 &= [((S_a(b) \cap h_S(a)) \cup ((S_a(a) \cap h_S(b)))) \cap S_a(a) \cup [((S_a(a) \\
 &\quad \cap h_S(a)) \cup ((S_a(b) \cap h_S(b))) \cap S_a(b)] \cap h_S(b) \\
 &= h_S(b) \\
 &= \{\bar{9}, \bar{7}\}
 \end{aligned}$$

olduğundan, $(S_a \circ h_S \circ S_a) \tilde{\cap} h_S = \{(a, \{\bar{1}, \bar{3}\}), (b, \{\bar{9}, \bar{7}\})\} = \emptyset$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
 [(S_b \circ h_S \circ S_b) \tilde{\cap} h_S](a) &= (S_b \circ h_S \circ S_b)(a) \cap h_S(a) \\
 &= [(S_b \circ h_S)(a) \cap S_b(a)] \cup [(S_b \circ h_S)(b) \cap S_b(b)] \cap h_S(a) \\
 &= [((S_b(a) \cap h_S(a)) \cup ((S_b(b) \cap h_S(b)))) \cap S_b(a) \cup [((S_b(b) \\
 &\quad \cap h_S(a)) \cup ((S_b(a) \cap h_S(b))) \cap S_b(b)] \cap h_S(a) \\
 &= h_S(a) \\
 &= \{\bar{1}, \bar{3}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(S_b \circ h_s \circ S_b) \tilde{\cap} h_s](b) &= (S_b \circ h_s \circ S_b)(b) \cap h_s(b) \\
&= [(S_b \circ h_s)(b) \cap S_b(a)] \cup [(S_b \circ h_s)(a) \cap S_b(b)] \cap h_s(b) \\
&= [((S_b(b) \cap h_s(a)) \cup ((S_b(a) \cap h_s(b))) \cap S_b(a) \cup [((S_b(a) \\
&\cap h_s(a)) \cup ((S_b(b) \cap h_s(b))) \cap S_b(b)] \cap h_s(b) \\
&= h_s(b) \\
&= \{\bar{9}, \bar{7}\}
\end{aligned}$$

olduğundan, $(S_b \circ h_s \circ S_b) \tilde{\cap} h_s = \{(a, \{\bar{1}, \bar{3}\}), (b, \{\bar{9}, \bar{7}\})\} \neq \emptyset$. Böylece, h_s bir EK-zayıf hemen hemen iç idealdir.

4.6. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve her $x, y \in S$ için, $S_x \circ f_S \circ S_y \neq \emptyset_S$ olsun. f_S , bir EK-iç ideal ise bir EK-hemen hemen iç idealdir.

İspat: f_S esnek kümesi $S_x \circ f_S \circ S_y \neq \emptyset_S$ olmak şartıyla bir EK-iç ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ sağlanır. Her $x, y \in S$ için, $S_x \circ f_S \circ S_y \subseteq \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ olduğundan,

$$(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} f_S = S_x \circ f_S \circ S_y \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, $(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olup, f_S bir EK-hemen hemen iç idealdir.

Burada, $\tilde{S} \circ \emptyset_S \circ \tilde{S} \subseteq \emptyset_S$ olduğundan $\emptyset_S$ esnek kümesinin bir EK-iç ideal olduğu açıktır. Fakat $(\tilde{S} \circ \emptyset_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ esnek kümesi bir EK-hemen hemen iç ideal değildir.

f_S , bir EK-hemen hemen iç ideal ise bir EK-iç ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

4.7. Örnek Örnek 4.3'te verilen f_S ve g_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve g_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen iç ideal olduğu, Örnek 4.3'te gösterilmiştir. Fakat,

$$\begin{aligned}
(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(a) &= [(\tilde{S} \circ f_S)(a) \cap \tilde{S}(a)] \cup [(\tilde{S} \circ f_S)(b) \cap \tilde{S}(b)] \\
&= [\tilde{S}(a) \cap f_S(a)] \cup [\tilde{S}(b) \cap f_S(b)] \cup [\tilde{S}(b) \cap f_S(a)] \cup [\tilde{S}(a) \cap f_S(b)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_s(a) \cup f_s(b) \cup f_s(a) \cup f_s(b) \\
&= f_s(a) \cup f_s(b) \not\subseteq f_s(a)
\end{aligned}$$

olduğundan, f_s bir EK-iç ideal değildir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
(\tilde{S} \circ g_s \circ \tilde{S})(a) &= [(\tilde{S} \circ g_s)(a) \cap \tilde{S}(a)] \cup [(\tilde{S} \circ g_s)(b) \cap \tilde{S}(b)] \\
&= [\tilde{S}(a) \cap g_s(a)] \cup [\tilde{S}(b) \cap g_s(b)] \cup [\tilde{S}(b) \cap g_s(a)] \cup [\tilde{S}(a) \cap g_s(b)] \\
&= g_s(a) \cup g_s(b) \cup g_s(a) \cup g_s(b) \\
&= g_s(a) \cup g_s(b) \not\subseteq g_s(a)
\end{aligned}$$

olduğundan, g_s bir EK-iç ideal değildir.

4.8. Teorem f_s ve h_s , $f_s \cong h_s$ olacak şekilde, U üzerinde birer esnek küme olsun. f_s , bir EK-hemen hemen iç ideal ise h_s bir EK-hemen hemen iç idealdir.

İspat: f_s , bir EK-hemen iç ideal olsun. O halde her $x, y \in S$ için, $(S_x \circ f_s \circ S_y) \tilde{\cap} f_s \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği $f_s \cong h_s$ olduğundan,

$$(S_x \circ f_s \circ S_y) \tilde{\cap} f_s \cong (S_x \circ h_s \circ S_y) \tilde{\cap} h_s$$

açıktır. Burada $(S_x \circ f_s \circ S_y) \tilde{\cap} f_s \neq \emptyset_S$ olduğundan $(S_x \circ h_s \circ S_y) \tilde{\cap} h_s \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece h_s bir EK-hemen hemen iç idealdir.

4.9. Teorem f_s ve h_s , birer EK-hemen hemen iç ideal olsun. Bu durumda, $f_s \tilde{\cup} h_s$ bir EK-hemen hemen iç idealdir.

İspat: f_s bir EK-hemen hemen iç ideal olsun. $f_s \cong f_s \tilde{\cup} h_s$ olduğundan, Teorem 4.8'den, $f_s \tilde{\cup} h_s$, bir EK-hemen hemen iç idealdir.

4.10. *Sonuç* EK-hemen hemen iç ideallerin sonlu esnek birleşimleri de bir EK-hemen hemen iç idealdir.

4.11. *Sonuç* f_S ya da h_S , EK-hemen hemen iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen iç idealdir.

Burada f_S ve g_S , EK-hemen hemen iç ideal iken $f_S \tilde{\cap} g_S$ esnek kümesinin bir EK-hemen hemen iç ideal olmasına gerek yoktur.

4.12. *Örnek* Örnek 4.3'te verilen f_S ve g_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve g_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen iç ideal olduğu, Örnek 4.3'te gösterilmiştir. Fakat,

$$f_S \tilde{\cap} g_S = \{(a, \emptyset), (b, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

olduğundan, $f_S \tilde{\cap} g_S$ bir EK-hemen hemen iç ideal değildir.

Şimdi, S yarıgrubunun hemen hemen iç ideali ile EK-hemen hemen iç ideali arasındaki ilişki verilecektir.

4.13. Lemma Y , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $x \in S$ olsun. S_x , x 'in esnek karakteristik fonksiyonu ve S_Y , Y 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, $S_x \circ S_Y = S_{xY}$ (Sezgin ve İlgin, 2024)

4.14. Teorem A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen iç ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK- hemen hemen iç ideal olmasıdır.

İspat: A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere S yarıgrubunun bir hemen hemen iç ideali olsun. O halde her $x, y \in S$ için, $xAy \cap A \neq \emptyset$ yani, $k \in xAy \cap A$ olacak şekilde en az bir $k \in S$ vardır. Buradan,

$$\left((S_x \circ S_A \circ S_y) \tilde{\cap} S_A \right) (k) = (S_{xAy} \tilde{\cap} S_A)(k) = (S_{xAy \cap A})(k) = U \neq \emptyset$$

olup, $(S_x \circ S_A \circ S_y) \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, S_A bir EK-hemen hemen iç idealdir.

Tersine, S_A bir EK-hemen hemen iç ideal olsun. O halde, $(S_x \circ S_A \circ S_y) \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$

Kabul gereği, $A \neq \emptyset$. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \emptyset_S \neq (S_x \circ S_A \circ S_y) \tilde{\cap} S_A &\Rightarrow \exists k \in S; ((S_x \circ S_A \circ S_y) \tilde{\cap} S_A)(k) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists k \in S; (S_{xAy} \tilde{\cap} S_A)(k) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists k \in S; (S_{xAy \cap A})(k) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists k \in S; (S_{xAy \cap A})(k) = U \\ &\Rightarrow k \in xAy \cap A \end{aligned}$$

olup, her $x, y \in S$ için $xAy \cap A \neq \emptyset$ elde edilir. Böylece A, S yarıgrubunun bir hemen hemen iç idealidir.

4.15. Örnek $S = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde, Tablo 4.2 Yardımıyla tanımlanan “ $\mathfrak{K}$ ” ikili işlemi ile $(S, \mathfrak{K})$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\mathfrak{K}$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	b	b	c

Tablo 4.2. Örnek 4.15’teki “ $\mathfrak{K}$ ” ikili işlemi

$A = \{b, c\}$ S kümesinin boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen iç ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Rutin hesaplamalarla, A kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu $S_A = \{(a, \emptyset), (b, U), (c, U)\}$ ’nın bir EK-hemen hemen iç ideal olduğu gösterilebilir.

Tersine, X ’in esnek karakteristik fonksiyonu $f_S = \{(a, \emptyset), (b, U), (c, U)\}$ olarak seçilerek rutin hesaplamalarla hem S_X ’in bir EK-hemen hemen iç ideal hem de $X = \{b, c\}$ ’nin S yarıgrubunun bir hemen hemen iç ideali olduğu gösterilebilir.

4.16. Lemma f_S , U üzerinde bir esnek küme olmak üzere, $f_S \cong S_{supp(f_S)}$ (Sezgin ve İlgin, 2024).

4.17. Teorem f_S , bir EK-hemen hemen iç ideal ise $supp(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen iç idealidir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen iç ideal olsun. O halde her $x, y \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu açıktır. $supp(f_S)$ 'nin S yarıgrubunun bir hemen hemen iç ideali olduğunu göstermek için Teorem 4.14'ten $S_{supp(f_S)}$ 'nin bir EK-hemen hemen iç ideal olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 4.16'dan,

$$(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} f_S \cong (S_x \circ S_{supp(f_S)} \circ S_y) \tilde{\cap} S_{supp(f_S)}$$

ve $(S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(S_x \circ S_{supp(f_S)} \circ S_y) \tilde{\cap} S_{supp(f_S)} \neq \emptyset_S$ elde edilir.

Böylece, $S_{supp(f_S)}$ bir EK-hemen hemen iç ideal olup Teorem 4.14'ten $supp(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen iç idealidir.

Teorem 4.17'nin karşıtının genellikle doğru olmadığını bir örnekle gösterelim:

4.18. Örnek Örnek 4.3'teki h_S esnek kümesini ele alalım. $supp(h_S) = \{a, b\}$ olup,

$$[asupp(h_S)a] \cap supp(h_S) = a\{a, b\}a \cap \{a, b\} = \{a, b\} \neq \emptyset_S$$

$$[asupp(h_S)b] \cap supp(h_S) = a\{a, b\}b \cap \{a, b\} = \{a, b\} \neq \emptyset_S$$

$$[bsupp(h_S)b] \cap supp(h_S) = b\{a, b\}b \cap \{a, b\} = \{a, b\} \neq \emptyset_S$$

$$[bsupp(h_S)a] \cap supp(h_S) = b\{a, b\}a \cap \{a, b\} = \{a, b\} \neq \emptyset_S$$

Böylece, her $x, y \in S$ için, $[\{x\}supp(h_S)\{y\}] \cap supp(h_S) \neq \emptyset$ elde edilir. Buradan $supp(h_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen iç idealidir; fakat Örnek 4.3'te gösterildiği üzere h_S , bir EK- hemen hemen iç ideal değildir.

4.19. Tanım f_S ve h_S , $h_S \cong f_S$ olacak şekilde, birer EK-hemen hemen iç ideal olsun. $supp(h_S) = supp(f_S)$ ise f_S esnek kümesine bir minimal EK-hemen hemen iç ideal denir.

4.20. Teorem A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen iç ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir minimal EK-hemen hemen iç ideali olmasıdır.

İspat: A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen iç ideali olsun. O halde, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen iç idealidir ve Teorem 4.14'ten S_A bir EK-hemen hemen iç idealdir. $f_S \cong S_A$ olacak şekilde f_S bir EK-hemen hemen iç ideal olsun. Teorem 4.17'den $supp(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen iç idealidir ve Not 2.3.15'ten ve Sonuç 2.3.20'den,

$$supp(f_S) \subseteq supp(S_A) = A$$

elde edilir. A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen iç ideali olduğundan $supp(f_S) = supp(S_A) = A$ olup, böylece, Tanım 4.19'dan S_A bir minimal EK-hemen hemen iç idealdir.

Tersine, S_A bir minimal EK-hemen hemen iç ideal olsun. O halde, S_A bir EK-hemen hemen iç idealdir ve Teorem 4.14'ten, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen iç idealidir. $B \subseteq A$ olacak şekilde B , S yarıgrubun bir hemen hemen iç ideali olsun. Teorem 4.14'ten, S_B bir EK-hemen hemen iç ideal ve Teorem 2.3.21'den $S_B \subseteq S_A$ olur. S_A bir minimal EK-hemen hemen iç ideal olduğundan ve Sonuç 2.3.20'den ,

$$B = supp(S_B) = supp(S_A) = A$$

elde edilir. Böylece A, S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen iç idealidir.

4.21. Tanım f_S, g_S ve h_S birer EK-hemen hemen iç ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ g_S \subseteq f_S$ olması $h_S \subseteq f_S$ veya $g_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise f_S 'ye bir EK-asal hemen hemen iç ideal denir.

4.22. Tanım f_S ve h_S birer EK-hemen hemen iç ideal olsun. Bu durumda $h_S \circ h_S \subseteq f_S$ olması $h_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise f_S 'ye bir EK-yarı asal hemen hemen iç ideal denir.

4.23. Tanım f_S, g_S ve h_S birer EK-hemen hemen iç ideal olsun. Bu durumda, $(h_S \circ g_S) \cap (g_S \circ h_S) \subseteq f_S$ olması $h_S \subseteq f_S$ veya $g_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise f_S 'ye bir EK-kuvvetli asal hemen hemen iç ideal denir.

Her EK-kuvvetli asal hemen hemen iç idealin, bir EK-asal hemen hemen iç ideal olduğu ve her EK-asal hemen hemen iç idealin EK-yarı asal hemen hemen iç ideal olduğu açıktır.

4.24. Teorem P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-asal hemen hemen iç ideali ise P kümesi S yarıgrubunun asal hemen hemen iç idealidir.

İspat: S_P , bir EK-asal hemen hemen iç ideal olsun. O halde S_P bir EK-hemen hemen iç idealdir. Teorem 4.14'ten P, S yarıgrubunun bir hemen hemen iç idealidir. $AB \subseteq P$ olacak şekilde A ve B, S yarıgrubunun birer hemen hemen iç ideali olsun. Bu durumda Teorem 4.14'ten S_A ve S_B birer EK-hemen hemen iç idealdir ve Teorem 2.3.21'den $S_A \circ S_B = S_{AB} \subseteq S_P$ elde edilir. S_P bir EK-asal hemen hemen iç ideal ve $S_A \circ S_B \subseteq S_P$ olduğundan, $S_A \subseteq S_P$ veya $S_B \subseteq S_P$ sağlanır. Böylece Teorem 2.3.21'den $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak P kümesi S yarıgrubunun asal hemen hemen iç idealidir.

4.25. Teorem P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK- yarı asal hemen hemen iç ideali ise P kümesi S yarıgrubunun yarı asal hemen hemen iç idealidir.

İspat: S_P , bir EK-yarı asal hemen hemen iç ideal olsun. O halde S_P bir EK-hemen hemen iç idealdir ve Teorem 4.14'ten P, S yarıgrubunun bir hemen hemen iç idealidir. $AA \subseteq P$ olacak şekilde A, S yarıgrubunun birer hemen hemen iç ideali olsun. Bu durumda, Teorem 4.14'ten, S_A bir EK-hemen hemen iç idealdir ve Teorem 2.3.21'den, $S_A \circ S_A = S_{AA} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK- asal hemen hemen iç ideal ve $S_A \circ S_A \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ sağlanır. Böylece Teorem 2.3.21'den, $A \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen iç idealidir.

4.26. Teorem P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen iç ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen iç idealidir.

İspat: S_P , bir EK-kuvvetli asal hemen hemen iç ideal olsun. O halde S_P bir EK-hemen hemen iç idealdir. Teorem 4.14'ten, P, S yarıgrubunun bir hemen hemen iç idealidir. $AB \cap BA \subseteq P$ olmak üzere, A ve B, S yarıgrubunun birer hemen hemen iç ideali olsun. Bu durumda Teorem 4.14'ten, S_A ve S_B birer EK-hemen hemen iç idealdir ve Teorem 2.3.21'den, $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) = S_{AB} \tilde{\cap} S_{BA} = S_{AB \cap BA} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen iç ideal ve $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ veya $S_B \cong S_P$ sağlanır. Böylece Teorem 2.3.21'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen iç idealidir.

5. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN Bİ-QUASI-İÇ İDEALLERİ

Bu bölüm, yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi-iç idealleri üzerine olup, bölümde Sezgin ve diğerleri (2025) çalışmasından elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

5.1. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x, y \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ise f_S esnek kümesine, S yarıgrupunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi-iç ideali denir.

5.2. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ise f_S esnek kümesine, S yarıgrupunun U üzerinde bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen bi-quasi-iç ideali denir.

Bundan sonra, S yarıgrupunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi-iç ideali kısaca “EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal” olarak, esnek kesişimsel zayıf hemen hemen bi-quasi-iç ideali kısaca “EK-zayıf hemen hemen bi-quasi-iç ideal” olarak gösterilecektir.

5.3. Örnek $S = \{\varrho, \varkappa\}$ kümesi üzerinde Tablo 5.1 yardımıyla tanımlanan “ $\star$ ” ikili işlemi ile $(S, \star)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\star$	ϱ	$\varkappa$
ϱ	ϱ	$\varkappa$
$\varkappa$	$\varkappa$	ϱ

Tablo 5.1. Örnek 5.3’teki “ $\star$ ” ikili işlemi

$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \right\}$ evrensel kümesi üzerinde f_S , l_S ve g_S esnek kümeleri,

$$f_S = \left\{ \left(\varrho, \left\{ \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} \right\} \right), \left(\varkappa, \left\{ \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix} \right\} \right) \right\}$$

$$l_s = \left\{ \left(\varrho, \left\{ \begin{bmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix} \right\} \right), \left(\varkappa, \left\{ \begin{bmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} \right\} \right) \right\}$$

$$g_s = \left\{ \left(\varrho, \left\{ \begin{bmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix} \right\} \right), \left(\varkappa, \left\{ \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \right\} \right) \right\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada, f_s ve l_s birer EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir.

Öncelikle her $x, y \in S$ için, $(f_s \circ S_x \circ f_s \circ S_y \circ f_s) \tilde{\cap} f_s \neq \emptyset_S$ olduğunu göstereyim:

$S_\varrho - S_\varrho$ ile başlayacak olursak:

$$\begin{aligned} [(f_s \circ S_\varrho \circ f_s \circ S_\varrho \circ f_s) \tilde{\cap} f_s](\varrho) &= \left[\left((f_s \circ S_\varrho)(\varrho) \cap (f_s \circ S_\varrho \circ f_s)(\varrho) \right) \cup \left((f_s \circ S_\varrho)(\varkappa) \cap (f_s \circ S_\varrho \circ f_s)(\varkappa) \right) \right] \cap f_s(\varrho) \\ &= \left[\left(\left((f_s(\varrho) \cap S_\varrho(\varrho)) \cup (f_s(\varkappa) \cap S_\varrho(\varkappa)) \right) \cap \left((f_s \circ S_\varrho)(\varrho) \cap f_s(\varrho) \right) \cup \left((f_s \circ S_\varrho)(\varkappa) \cap f_s(\varkappa) \right) \right) \right] \cap f_s(\varrho) \\ &= \left[\left[f_s(\varrho) \cap \left(\left((f_s(\varrho) \cap S_\varrho(\varrho)) \cup (f_s(\varkappa) \cap S_\varrho(\varkappa)) \right) \cap f_s(\varrho) \right) \cup \left(\left((f_s(\varrho) \cap S_\varrho(\varkappa)) \cup (f_s(\varkappa) \cap S_\varrho(\varrho)) \right) \cap f_s(\varkappa) \right) \right] \right] \cap f_s(\varrho) \\ &= \left[\left[f_s(\varrho) \cap \left(\left((f_s(\varrho) \cap S_\varrho(\varrho)) \cup (f_s(\varkappa) \cap S_\varrho(\varkappa)) \right) \cap f_s(\varrho) \right) \right] \cup \left[f_s(\varkappa) \cap \left(\left((f_s(\varrho) \cap S_\varrho(\varkappa)) \cup (f_s(\varkappa) \cap S_\varrho(\varrho)) \right) \cap f_s(\varkappa) \right) \right] \right] \cap f_s(\varrho) \\ &= \left[f_s(\varrho) \cap \left((f_s(\varrho) \cap f_s(\varrho)) \cup (f_s(\varkappa) \cap f_s(\varkappa)) \right) \right] \cup \left[f_s(\varkappa) \cap \left((f_s(\varrho) \cap f_s(\varkappa)) \cup (f_s(\varkappa) \cap f_s(\varrho)) \right) \right] \cap f_s(\varrho) \\ &= f_s(\varrho) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(f_S \circ S_2 \circ f_S \circ S_2 \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](\mathfrak{X}) \\
&= \left[\left((f_S \circ S_2)(\mathfrak{Y}) \cap (f_S \circ S_2 \circ f_S)(\mathfrak{X}) \right) \cup \left((f_S \circ S_2)(\mathfrak{X}) \cap (f_S \circ S_2 \circ f_S)(\mathfrak{Y}) \right) \right] \\
&\cap f_S(\mathfrak{X}) \\
&= \left[\left(f_S(\mathfrak{Y}) \cap (f_S(\mathfrak{Y}) \cap f_S(\mathfrak{X})) \right) \cup \left(f_S(\mathfrak{X}) \cap (f_S(\mathfrak{Y}) \cup f_S(\mathfrak{X})) \right) \right] \cap f_S(\mathfrak{X}) \\
&= \left[(f_S(\mathfrak{Y}) \cap f_S(\mathfrak{X})) \cup f_S(\mathfrak{X}) \right] \cap f_S(\mathfrak{X}) \\
&= f_S(\mathfrak{X}) \cap f_S(\mathfrak{X}) \\
&= f_S(\mathfrak{X})
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_2 \circ f_S \circ S_2 \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \left\{ (\mathfrak{Y}, \left\{ \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} \right\}), (\mathfrak{X}, \left\{ \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix} \right\}) \right\} \neq \emptyset_S$$

$S_{\mathfrak{X}} - S_{\mathfrak{X}}$ ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned}
& [(f_S \circ S_{\mathfrak{X}} \circ f_S \circ S_{\mathfrak{X}} \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](\mathfrak{Y}) \\
&= \left[\left((f_S \circ S_{\mathfrak{X}})(\mathfrak{Y}) \cap (f_S \circ S_{\mathfrak{X}} \circ f_S)(\mathfrak{Y}) \right) \cup \left((f_S \circ S_{\mathfrak{X}})(\mathfrak{X}) \cap (f_S \circ S_{\mathfrak{X}} \circ f_S)(\mathfrak{X}) \right) \right] \\
&\cap f_S(\mathfrak{Y}) \\
&= \left[\left(f_S(\mathfrak{X}) \cap (f_S(\mathfrak{Y}) \cap f_S(\mathfrak{X})) \right) \cup \left(f_S(\mathfrak{Y}) \cap (f_S(\mathfrak{Y}) \cup f_S(\mathfrak{X})) \right) \right] \cap f_S(\mathfrak{Y}) \\
&= \left[(f_S(\mathfrak{Y}) \cap f_S(\mathfrak{X})) \cup f_S(\mathfrak{Y}) \right] \cap f_S(\mathfrak{Y}) \\
&= f_S(\mathfrak{Y}) \cap f_S(\mathfrak{Y}) \\
&= f_S(\mathfrak{Y})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(f_S \circ S_{\mathfrak{X}} \circ f_S \circ S_{\mathfrak{X}} \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](\mathfrak{X}) \\
&= \left[\left((f_S \circ S_{\mathfrak{X}})(\mathfrak{Y}) \cap (f_S \circ S_{\mathfrak{X}} \circ f_S)(\mathfrak{X}) \right) \cup \left((f_S \circ S_{\mathfrak{X}})(\mathfrak{X}) \cap (f_S \circ S_{\mathfrak{X}} \circ f_S)(\mathfrak{Y}) \right) \right] \\
&\cap f_S(\mathfrak{X}) \\
&= \left[\left(f_S(\mathfrak{X}) \cap (f_S(\mathfrak{Y}) \cup f_S(\mathfrak{X})) \right) \cup \left(f_S(\mathfrak{Y}) \cap (f_S(\mathfrak{Y}) \cap f_S(\mathfrak{X})) \right) \right] \cap f_S(\mathfrak{X}) \\
&= [f_S(\mathfrak{X}) \cup (f_S(\mathfrak{Y}) \cap f_S(\mathfrak{X}))] \cap f_S(\mathfrak{X}) \\
&= f_S(\mathfrak{X}) \cap f_S(\mathfrak{X}) \\
&= f_S(\mathfrak{X})
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_{\mathfrak{x}} \circ f_S \circ S_{\mathfrak{x}} \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \left\{ \left(\mathfrak{Q}, \left\{ \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} \right\} \right), \left(\mathfrak{X}, \left\{ \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix} \right\} \right) \right\} \neq \emptyset_S$$

$S_{\mathfrak{Q}} - S_{\mathfrak{x}}$ ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned} & [(f_S \circ S_{\mathfrak{Q}} \circ f_S \circ S_{\mathfrak{x}} \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](\mathfrak{Q}) \\ &= \left[\left((f_S \circ S_{\mathfrak{Q}})(\mathfrak{Q}) \cap (f_S \circ S_{\mathfrak{x}} \circ f_S)(\mathfrak{Q}) \right) \cup \left((f_S \circ S_{\mathfrak{Q}})(\mathfrak{X}) \cap (f_S \circ S_{\mathfrak{x}} \circ f_S)(\mathfrak{X}) \right) \right] \\ &\quad \cap f_S(\mathfrak{Q}) \\ &= \left[\left(f_S(\mathfrak{Q}) \cap (f_S(\mathfrak{Q}) \cap f_S(\mathfrak{X})) \right) \cup \left(f_S(\mathfrak{X}) \cap (f_S(\mathfrak{Q}) \cup f_S(\mathfrak{X})) \right) \right] \cap f_S(\mathfrak{Q}) \\ &= \left[(f_S(\mathfrak{Q}) \cap f_S(\mathfrak{X})) \cup f_S(\mathfrak{X}) \right] \cap f_S(\mathfrak{Q}) \\ &= f_S(\mathfrak{X}) \cap f_S(\mathfrak{Q}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(f_S \circ S_{\mathfrak{Q}} \circ f_S \circ S_{\mathfrak{x}} \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](\mathfrak{X}) \\ &= \left[\left((f_S \circ S_{\mathfrak{Q}})(\mathfrak{Q}) \cap (f_S \circ S_{\mathfrak{x}} \circ f_S)(\mathfrak{X}) \right) \cup \left((f_S \circ S_{\mathfrak{Q}})(\mathfrak{X}) \cap (f_S \circ S_{\mathfrak{x}} \circ f_S)(\mathfrak{Q}) \right) \right] \\ &\quad \cap f_S(\mathfrak{X}) \\ &= \left[\left(f_S(\mathfrak{Q}) \cap (f_S(\mathfrak{Q}) \cup f_S(\mathfrak{X})) \right) \cup \left(f_S(\mathfrak{X}) \cap (f_S(\mathfrak{Q}) \cap f_S(\mathfrak{X})) \right) \right] \cap f_S(\mathfrak{X}) \\ &= [f_S(\mathfrak{Q}) \cup (f_S(\mathfrak{X}) \cap f_S(\mathfrak{Q}))] \cap f_S(\mathfrak{X}) \\ &= f_S(\mathfrak{Q}) \cap f_S(\mathfrak{X}) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_{\mathfrak{Q}} \circ f_S \circ S_{\mathfrak{x}} \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \left\{ \left(\mathfrak{Q}, \left\{ \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \right\} \right), \left(\mathfrak{X}, \left\{ \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \right\} \right) \right\} \neq \emptyset_S$$

$S_{\mathfrak{x}} - S_{\mathfrak{z}}$ ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned}
 & [(f_S \circ S_{\mathfrak{x}} \circ f_S \circ S_{\mathfrak{z}} \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](\mathfrak{z}) \\
 &= \left[\left((f_S \circ S_{\mathfrak{x}})(\mathfrak{z}) \cap (f_S \circ S_{\mathfrak{z}} \circ f_S)(\mathfrak{z}) \right) \cup \left((f_S \circ S_{\mathfrak{x}})(\mathfrak{x}) \cap (f_S \circ S_{\mathfrak{z}} \circ f_S)(\mathfrak{x}) \right) \right] \\
 &\cap f_S(\mathfrak{z}) \\
 &= \left[\left(f_S(\mathfrak{x}) \cap (f_S(\mathfrak{z}) \cup f_S(\mathfrak{x})) \right) \cup \left(f_S(\mathfrak{z}) \cap (f_S(\mathfrak{z}) \cap f_S(\mathfrak{x})) \right) \right] \cap f_S(\mathfrak{z}) \\
 &= [f_S(\mathfrak{x}) \cup (f_S(\mathfrak{z}) \cap f_S(\mathfrak{x}))] \cap f_S(\mathfrak{z}) \\
 &= f_S(\mathfrak{x}) \cap f_S(\mathfrak{z})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [(f_S \circ S_{\mathfrak{x}} \circ f_S \circ S_{\mathfrak{z}} \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](\mathfrak{x}) \\
 &= \left[\left((f_S \circ S_{\mathfrak{x}})(\mathfrak{z}) \cap (f_S \circ S_{\mathfrak{z}} \circ f_S)(\mathfrak{x}) \right) \cup \left((f_S \circ S_{\mathfrak{x}})(\mathfrak{x}) \cap (f_S \circ S_{\mathfrak{z}} \circ f_S)(\mathfrak{z}) \right) \right] \\
 &\cap f_S(\mathfrak{x}) \\
 &= \left[\left(f_S(\mathfrak{x}) \cap (f_S(\mathfrak{z}) \cap f_S(\mathfrak{x})) \right) \cup \left(f_S(\mathfrak{z}) \cap (f_S(\mathfrak{z}) \cup f_S(\mathfrak{x})) \right) \right] \cap f_S(\mathfrak{x}) \\
 &= [(f_S(\mathfrak{x}) \cap f_S(\mathfrak{z})) \cup f_S(\mathfrak{z})] \cap f_S(\mathfrak{x}) \\
 &= f_S(\mathfrak{z}) \cap f_S(\mathfrak{x})
 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_{\mathfrak{x}} \circ f_S \circ S_{\mathfrak{z}} \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \left\{ (\mathfrak{z}, \left\{ \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \right\}), (\mathfrak{x}, \left\{ \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \right\}) \right\} \neq \emptyset_S$$

Böylece, f_S bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir. Benzer şekilde,

$$(l_S \circ S_{\mathfrak{z}} \circ l_S \circ S_{\mathfrak{z}} \circ l_S) \tilde{\cap} l_S = \left\{ (\mathfrak{z}, \left\{ \begin{bmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix} \right\}), (\mathfrak{x}, \left\{ \begin{bmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} \right\}) \right\} \neq \emptyset_S$$

$$(l_S \circ S_{\mathfrak{z}} \circ l_S \circ S_{\mathfrak{x}} \circ l_S) \tilde{\cap} l_S = \left\{ (\mathfrak{z}, \left\{ \begin{bmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix} \right\}), (\mathfrak{x}, \left\{ \begin{bmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix} \right\}) \right\} \neq \emptyset_S$$

$$(l_S \circ S_{\mathfrak{x}} \circ l_S \circ S_{\mathfrak{z}} \circ l_S) \tilde{\cap} l_S = \left\{ (\mathfrak{z}, \left\{ \begin{bmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix} \right\}), (\mathfrak{x}, \left\{ \begin{bmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix} \right\}) \right\} \neq \emptyset_S$$

$$(l_s \circ S_{\mathfrak{x}} \circ l_s \circ S_{\mathfrak{x}} \circ l_s) \tilde{\cap} l_s = \left\{ \left(\varrho, \left\{ \begin{bmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix} \right\} \right), \left(\mathfrak{x}, \left\{ \begin{bmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} \right\} \right) \right\} \neq \emptyset_s$$

olduğundan, l_s bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir. Fakat, g_s bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} & [(g_s \circ S_{\varrho} \circ g_s \circ S_{\mathfrak{x}} \circ g_s) \tilde{\cap} g_s](\varrho) \\ &= \left[\left((g_s \circ S_{\varrho})(\varrho) \cap (g_s \circ S_{\mathfrak{x}} \circ g_s)(\varrho) \right) \right. \\ &\quad \left. \cup \left((g_s \circ S_{\varrho})(\mathfrak{x}) \cap (g_s \circ S_{\mathfrak{x}} \circ g_s)(\mathfrak{x}) \right) \right] \cap g_s(\varrho) \\ &= \left[\left(g_s(\varrho) \cap (g_s(\varrho) \cap g_s(\mathfrak{x})) \right) \cup \left(g_s(\mathfrak{x}) \cap (g_s(\varrho) \cup g_s(\mathfrak{x})) \right) \right] \cap g_s(\varrho) \\ &= \left[(g_s(\varrho) \cap g_s(\mathfrak{x})) \cup g_s(\mathfrak{x}) \right] \cap g_s(\varrho) \\ &= g_s(\mathfrak{x}) \cap g_s(\varrho) = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(g_s \circ S_{\varrho} \circ g_s \circ S_{\mathfrak{x}} \circ g_s) \tilde{\cap} g_s](\mathfrak{x}) \\ &= \left[\left((g_s \circ S_{\varrho})(\varrho) \cap (g_s \circ S_{\mathfrak{x}} \circ g_s)(\mathfrak{x}) \right) \right. \\ &\quad \left. \cup \left((g_s \circ S_{\varrho})(\mathfrak{x}) \cap (g_s \circ S_{\mathfrak{x}} \circ g_s)(\varrho) \right) \right] \cap g_s(\mathfrak{x}) \\ &= \left[\left(g_s(\varrho) \cap (g_s(\varrho) \cup g_s(\mathfrak{x})) \right) \cup \left(g_s(\mathfrak{x}) \cap (g_s(\varrho) \cap g_s(\mathfrak{x})) \right) \right] \cap g_s(\mathfrak{x}) \\ &= [g_s(\varrho) \cup (g_s(\mathfrak{x}) \cap g_s(\varrho))] \cap g_s(\mathfrak{x}) \\ &= g_s(\varrho) \cap g_s(\mathfrak{x}) = \emptyset \end{aligned}$$

olup, benzer şekilde,

$$\begin{aligned} & [(g_s \circ S_{\mathfrak{x}} \circ g_s \circ S_{\varrho} \circ g_s) \tilde{\cap} g_s](\varrho) \\ &= \left[\left((g_s \circ S_{\mathfrak{x}})(\varrho) \cap (g_s \circ S_{\varrho} \circ g_s)(\varrho) \right) \right. \\ &\quad \left. \cup \left((g_s \circ S_{\mathfrak{x}})(\mathfrak{x}) \cap (g_s \circ S_{\varrho} \circ g_s)(\mathfrak{x}) \right) \right] \cap g_s(\varrho) \\ &= \left[\left(g_s(\mathfrak{x}) \cap (g_s(\varrho) \cup g_s(\mathfrak{x})) \right) \cup \left(g_s(\varrho) \cap (g_s(\varrho) \cap g_s(\mathfrak{x})) \right) \right] \cap g_s(\varrho) \\ &= [g_s(\mathfrak{x}) \cup (g_s(\varrho) \cap g_s(\mathfrak{x}))] \cap g_s(\varrho) \\ &= g_s(\mathfrak{x}) \cap g_s(\varrho) = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(g_s \circ S_x \circ g_s \circ S_y \circ g_s) \tilde{\cap} g_s](x) \\
&= \left[\left((g_s \circ S_x)(y) \cap (g_s \circ S_y \circ g_s)(x) \right) \right. \\
&\quad \left. \cup \left((g_s \circ S_x)(x) \cap (g_s \circ S_y \circ g_s)(y) \right) \right] \cap g_s(x) \\
&= \left[\left(g_s(x) \cap (g_s(y) \cap g_s(x)) \right) \cup \left(g_s(y) \cap (g_s(y) \cup g_s(x)) \right) \right] \cap g_s(x) \\
&= \left[(g_s(x) \cap g_s(y)) \cup g_s(y) \right] \cap g_s(x) \\
&= g_s(y) \cap g_s(x) = \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan, bazı $x, y \in S$ için, $(g_s \circ S_x \circ g_s \circ S_y \circ g_s) \tilde{\cap} g_s = \emptyset_s$

Böylece, g_s bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal değildir.

5.4. Teorem Her EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal, bir EK-zayıf hemen hemen bi-quasi-iç idealdir.

İspat: t_s bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olsun. Her $x, y \in S$ için, $(t_s \circ S_x \circ t_s \circ S_y \circ t_s) \tilde{\cap} t_s \neq \emptyset_s$. O halde, her $x \in S$ için, $(t_s \circ S_x \circ t_s \circ S_x \circ t_s) \tilde{\cap} t_s \neq \emptyset_s$ olur. Böylece, t_s bir EK-zayıf hemen hemen bi-quasi-iç idealdir.

Teorem 5.4'ün karışının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

5.5. Örnek Örnek 5.3'te verilen g_s esnek kümesini ele alalım. g_s esnek kümesinin bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olmadığı, Örnek 5.3'te görülmektedir. Fakat,

$$\begin{aligned}
& [(g_s \circ S_y \circ g_s \circ S_x \circ g_s) \tilde{\cap} g_s](y) \\
&= \left[\left((g_s \circ S_y)(y) \cap (g_s \circ S_x \circ g_s)(y) \right) \right. \\
&\quad \left. \cup \left((g_s \circ S_y)(x) \cap (g_s \circ S_x \circ g_s)(x) \right) \right] \cap g_s(y) \\
&= \left[\left(g_s(y) \cap (g_s(y) \cup g_s(x)) \right) \cup \left(g_s(x) \cap (g_s(x) \cap g_s(y)) \right) \right] \cap g_s(y) \\
&= [g_s(y) \cup (g_s(x) \cap g_s(y))] \cap g_s(y) \\
&= g_s(y) \cap g_s(y) = g_s(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(g_s \circ S_{\mathfrak{z}} \circ g_s \circ S_{\mathfrak{z}} \circ g_s) \tilde{\cap} g_s](\mathfrak{x}) \\
&= \left[\left((g_s \circ S_{\mathfrak{z}})(\mathfrak{z}) \cap (g_s \circ S_{\mathfrak{z}} \circ g_s)(\mathfrak{x}) \right) \right. \\
&\quad \left. \cup \left((g_s \circ S_{\mathfrak{z}})(\mathfrak{x}) \cap (g_s \circ S_{\mathfrak{z}} \circ g_s)(\mathfrak{z}) \right) \right] \cap g_s(\mathfrak{x}) \\
&= \left[\left(g_s(\mathfrak{z}) \cap (g_s(\mathfrak{z}) \cap g_s(\mathfrak{x})) \right) \cup \left(g_s(\mathfrak{x}) \cap (g_s(\mathfrak{z}) \cup g_s(\mathfrak{x})) \right) \right] \cap g_s(\mathfrak{x}) \\
&= \left[(g_s(\mathfrak{z}) \cap g_s(\mathfrak{x})) \cup g_s(\mathfrak{x}) \right] \cap g_s(\mathfrak{x}) \\
&= g_s(\mathfrak{x}) \cap g_s(\mathfrak{x}) = g_s(\mathfrak{x})
\end{aligned}$$

olup, benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
& [(g_s \circ S_{\mathfrak{x}} \circ g_s \circ S_{\mathfrak{x}} \circ g_s) \tilde{\cap} g_s](\mathfrak{z}) \\
&= \left[\left((g_s \circ S_{\mathfrak{x}})(\mathfrak{z}) \cap (g_s \circ S_{\mathfrak{x}} \circ g_s)(\mathfrak{z}) \right) \cup \left((g_s \circ S_{\mathfrak{x}})(\mathfrak{x}) \cap (g_s \circ S_{\mathfrak{x}} \circ g_s)(\mathfrak{x}) \right) \right] \\
&\quad \cap g_s(\mathfrak{z}) \\
&= \left[\left(g_s(\mathfrak{x}) \cap (g_s(\mathfrak{z}) \cap g_s(\mathfrak{x})) \right) \cup \left(g_s(\mathfrak{z}) \cap (g_s(\mathfrak{z}) \cup g_s(\mathfrak{x})) \right) \right] \cap g_s(\mathfrak{z}) \\
&= \left[(g_s(\mathfrak{z}) \cap g_s(\mathfrak{x})) \cup g_s(\mathfrak{z}) \right] \cap g_s(\mathfrak{z}) \\
&= g_s(\mathfrak{z}) \cap g_s(\mathfrak{z}) = g_s(\mathfrak{z})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(g_s \circ S_{\mathfrak{x}} \circ g_s \circ S_{\mathfrak{x}} \circ g_s) \tilde{\cap} g_s](\mathfrak{x}) \\
&= \left[\left((g_s \circ S_{\mathfrak{x}})(\mathfrak{z}) \cap (g_s \circ S_{\mathfrak{x}} \circ g_s)(\mathfrak{x}) \right) \cup \left((g_s \circ S_{\mathfrak{x}})(\mathfrak{x}) \cap (g_s \circ S_{\mathfrak{x}} \circ g_s)(\mathfrak{z}) \right) \right] \\
&\quad \cap g_s(\mathfrak{x}) \\
&= \left[\left(g_s(\mathfrak{x}) \cap (g_s(\mathfrak{z}) \cup g_s(\mathfrak{x})) \right) \cup \left(g_s(\mathfrak{z}) \cap (g_s(\mathfrak{z}) \cap g_s(\mathfrak{x})) \right) \right] \cap g_s(\mathfrak{x}) \\
&= \left[g_s(\mathfrak{x}) \cup (g_s(\mathfrak{z}) \cap g_s(\mathfrak{x})) \right] \cap g_s(\mathfrak{x}) \\
&= g_s(\mathfrak{x}) \cap g_s(\mathfrak{x}) = g_s(\mathfrak{x})
\end{aligned}$$

olduğundan, g_s bir EK-zayıf hemen hemen bi-quasi-iç idealdir.

5.6. Teorem κ_S , U üzerinde bir esnek küme ve $\kappa_S \circ S_x \circ \kappa_S \circ S_y \circ \kappa_S \neq \emptyset_S$ olsun. κ_S , bir EK-bi-quasi-iç ideal ise bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir.

İspat: κ_S esnek kümesi, $\kappa_S \circ S_x \circ \kappa_S \circ S_y \circ \kappa_S \neq \emptyset_S$ olmak şartıyla bir EK-bi-quasi-iç ideal olsun. O halde, $\kappa_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \kappa_S \circ \tilde{\mathfrak{S}} \circ \kappa_S \subseteq \kappa_S$ sağlanır. Her $x, y \in S$ için,

$$\kappa_S \circ S_x \circ \kappa_S \circ S_y \circ \kappa_S \subseteq \kappa_S \circ \tilde{S} \circ \kappa_S \circ \tilde{S} \circ \kappa_S \subseteq \kappa_S$$

olduğundan, $(\kappa_S \circ S_x \circ \kappa_S \circ S_y \circ \kappa_S) \tilde{\cap} \kappa_S = \kappa_S \circ S_x \circ \kappa_S \circ S_y \circ \kappa_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, $(\kappa_S \circ S_x \circ \kappa_S \circ S_y \circ \kappa_S) \tilde{\cap} \kappa_S \neq \emptyset_S$ olup, κ_S bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir.

Burada, $\emptyset_S \circ \tilde{S} \circ \emptyset_S \circ \tilde{S} \circ \emptyset_S \subseteq \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ esnek kümesinin bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu açıktır. Fakat, $(\emptyset_S \circ S_x \circ \emptyset_S \circ S_y \circ \emptyset_S) \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ esnek kümesi bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal değildir.

κ_S , bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal ise bir EK-bi-quasi-iç ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

5.7. *Örnek* Örnek 5.3'te verilen f_S ve l_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve l_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olduğu, Örnek 5.3'te gösterilmiştir. Fakat,

$$\begin{aligned} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(\varrho) &= [(f_S \circ \tilde{S})(\varrho) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(\varrho)] \cup [(f_S \circ \tilde{S})(\varkappa) \cap (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(\varkappa)] \\ &= [(f_S(\varrho) \cup f_S(\varkappa)) \cap (f_S(\varrho) \cup f_S(\varkappa))] \\ &\cup [(f_S(\varrho) \cup f_S(\varkappa)) \cap (f_S(\varrho) \cup f_S(\varkappa))] \\ &= f_S(\varrho) \cup f_S(\varkappa) \not\subseteq f_S(\varrho) \end{aligned}$$

olduğundan, f_S bir EK-bi-quasi-iç ideal değildir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} (l_S \circ \tilde{S} \circ l_S \circ \tilde{S} \circ l_S)(\varrho) &= [(l_S \circ \tilde{S})(\varrho) \cap (l_S \circ \tilde{S} \circ l_S)(\varrho)] \cup [(l_S \circ \tilde{S})(\varkappa) \cap (l_S \circ \tilde{S} \circ l_S)(\varkappa)] \\ &= [(l_S(\varrho) \cup l_S(\varkappa)) \cap (l_S(\varrho) \cup l_S(\varkappa))] \\ &\cup [(l_S(\varrho) \cup l_S(\varkappa)) \cap (l_S(\varrho) \cup l_S(\varkappa))] \\ &= l_S(\varrho) \cup l_S(\varkappa) \not\subseteq l_S(\varrho) \end{aligned}$$

olduğundan, l_S bir EK-bi-quasi-iç ideal değildir.

5.8. Teorem κ_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. κ_S , bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal ise bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

İspat: κ_S , idempotent bir esnek küme olsun. O halde, $\kappa_S \circ \kappa_S = \kappa_S$ ve her $x, y \in S$ için, $(\kappa_S \circ S_x \circ \kappa_S \circ S_y \circ \kappa_S) \tilde{\cap} \kappa_S \neq \emptyset_S$ sağlanır.

Buradan,

$$\begin{aligned} \emptyset_S \neq (\kappa_S \circ S_x \circ \kappa_S \circ S_y \circ \kappa_S) \tilde{\cap} \kappa_S &= [(\kappa_S \circ S_x \circ \kappa_S \circ S_y \circ \kappa_S) \tilde{\cap} \kappa_S] \tilde{\cap} \kappa_S \\ &= [(\kappa_S \circ S_x \circ \kappa_S \circ S_y \circ \kappa_S) \tilde{\cap} (\kappa_S \circ \kappa_S)] \tilde{\cap} \kappa_S \cong (\kappa_S \circ \kappa_S) \tilde{\cap} \kappa_S \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $(\kappa_S \circ \kappa_S) \tilde{\cap} \kappa_S \neq \emptyset_S$ olup, κ_S bir EK- hemen hemen alt yarıgruptur.

5.9. Teorem f_S ve q_S , $f_S \cong q_S$ olacak şekilde, U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal ise q_S , bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olsun. O halde her $x, y \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği $f_S \cong q_S$ olduğundan,

$$(f_S \circ S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \cong (q_S \circ S_x \circ q_S \circ S_y \circ q_S) \tilde{\cap} q_S$$

açıktır. Burada $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(q_S \circ S_x \circ q_S \circ S_y \circ q_S) \tilde{\cap} q_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, q_S bir EK- hemen hemen bi-quasi-iç idealdir.

5.10. Teorem f_S ve q_S birer EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} q_S$ bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olsun. $f_S \cong f_S \tilde{\cup} q_S$ olduğundan, Teorem 5.9'dan, $f_S \tilde{\cup} q_S$ bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir.

5.11. *Sonuç* EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideallerin sonlu esnek birleşimleri de bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir.

5.12. *Sonuç* f_S ya da q_S , bir EK- hemen hemen bi-quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} q_S$ bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir.

Burada, f_S ve q_S birer EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal iken $f_S \tilde{\cap} l_S$ bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olmak zorunda değildir.

5.13. *Örnek* Örnek 5.3'te verilen f_S ve l_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve l_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olduğu, Örnek 5.3'te gösterilmiştir. Fakat,

$$f_S \tilde{\cap} l_S = \{(\varrho, \emptyset), (\varsigma, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

olduğundan, $f_S \tilde{\cap} l_S$ bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal değildir.

Şimdi, S yarıgrubunun hemen hemen bi-quasi-iç ideali ile EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideali arasındaki ilişki verilecektir.

5.14. Teorem $\mathcal{H}$, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $S_{\mathcal{H}}$, $\mathcal{H}$ kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, $\mathcal{H}$ kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç ideali olması için gerek ve yeter şart $S_{\mathcal{H}}$ 'nin bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olmasıdır.

İspat: $\mathcal{H}$, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç ideali olsun. O halde her $x, y \in S$ için, $\mathcal{H}x\mathcal{H}y\mathcal{H} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ yani, $t \in \mathcal{H}x\mathcal{H}y\mathcal{H} \cap \mathcal{H}$ olacak şekilde en az bir $t \in S$ vardır. Buradan,

$$\left((S_{\mathcal{H}} \circ S_x \circ S_{\mathcal{H}} \circ S_y \circ S_{\mathcal{H}}) \tilde{\cap} S_{\mathcal{H}} \right)(t) = (S_{\mathcal{H}x\mathcal{H}y\mathcal{H}} \tilde{\cap} S_{\mathcal{H}})(t) = (S_{\mathcal{H}x\mathcal{H}y\mathcal{H} \cap \mathcal{H}})(t) = U \neq \emptyset$$

olup, $(S_{\mathcal{H}} \circ S_x \circ S_{\mathcal{H}} \circ S_y \circ S_{\mathcal{H}}) \tilde{\cap} S_{\mathcal{H}} \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, $S_{\mathcal{H}}$ bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir.

Tersine, $S_{\mathcal{H}}$ bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olsun. O halde, $(S_{\mathcal{H}} \circ S_x \circ S_{\mathcal{H}} \circ S_y \circ S_{\mathcal{H}}) \tilde{\cap} S_{\mathcal{H}} \neq \emptyset_S$

Kabul gereği, $\mathcal{H} \neq \emptyset$. Ayrıca,

$$\emptyset_S \neq (S_{\mathcal{H}} \circ S_x \circ S_{\mathcal{H}} \circ S_y \circ S_{\mathcal{H}}) \tilde{\cap} S_{\mathcal{H}} \Rightarrow \exists n \in S ; ((S_{\mathcal{H}} \circ S_x \circ S_{\mathcal{H}} \circ S_y \circ S_{\mathcal{H}}) \tilde{\cap} S_{\mathcal{H}})(n) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists n \in S ; ((S_{\mathcal{H}x\mathcal{H}y\mathcal{H}}) \tilde{\cap} S_A)(n) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists n \in S ; (S_{\mathcal{H}x\mathcal{H}y\mathcal{H} \cap \mathcal{H}})(n) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists n \in S ; (S_{\mathcal{H}x\mathcal{H}y\mathcal{H} \cap \mathcal{H}})(n) = U$$

$$\Rightarrow n \in \mathcal{H}x\mathcal{H}y\mathcal{H} \cap \mathcal{H}$$

olup, her $x, y \in S$ için, $\mathcal{H}x\mathcal{H}y\mathcal{H} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ elde edilir. Böylece $\mathcal{H}, S$ yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç idealidir.

5.15. Örnek $S = \{\varrho, \gamma, \delta\}$ kümesi üzerinde, Tablo 5.2 yardımıyla tanımlanan “ $\heartsuit$ ” ikili işlemi ile $(S, \heartsuit)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\heartsuit$	ϱ	γ	δ
ϱ	ϱ	γ	δ
γ	γ	γ	δ
δ	γ	γ	δ

Tablo 5.2. Örnek 5.15’teki Tablo “ $\heartsuit$ ” İkili işlemi

$\mathcal{H} = \{\varrho, \delta\}$, S kümesinin boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, $\mathcal{H}$ kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Rutin hesaplamalarla, $\mathcal{H}$ kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu $S_{\mathcal{H}} = \{(\varrho, U), (\gamma, \emptyset), (\delta, U)\}$ ’nin bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olduğu gösterilebilir.

Tersine, X 'in esnek karakteristik fonksiyonu $f_S = \{(\varrho, U), (\mathfrak{x}, \emptyset), (\mathfrak{y}, U)\}$ olarak seçilerek rutin hesaplamalarla hem f_S 'in bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal hem de $X = \{\varrho, \mathfrak{y}\}$ 'in S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç ideali olduğu gösterilebilir.

5.16. Teorem f_S , bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal ise $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç idealidir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olsun. O halde, $f_S \neq \emptyset_S$, $\text{supp}(f_S) \neq \emptyset$ ve $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu açıktır. $\text{supp}(f_S)$ 'nin S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç ideali olduğunu göstermek için, Teorem 4.15'ten, $S_{\text{supp}(f_S)}$ 'nin bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 4.16'dan,

$$(f_S \circ S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \cong (S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_y \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)}$$

ve

$$(f_S \circ S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$$

olduğundan, $(S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_y \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)} \neq \emptyset_S$ elde edilir.

Böylece, $S_{\text{supp}(f_S)}$ bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olup, Teorem 5.14'ten, $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç idealidir.

Teorem 5.16'nın karşınının genellikle doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

5.17. Örnek Örnek 5.3'teki g_S esnek kümesini ele alalım. $\text{supp}(g_S) = \{\varrho, \mathfrak{x}\}$ olup,

$$[\text{supp}(g_S)\{\varrho\}\text{supp}(g_S)\{\varrho\}\text{supp}(g_S)] \cap \text{supp}(g_S) = \{\varrho, \mathfrak{x}\}\varrho\{\varrho, \mathfrak{x}\}\varrho\{\varrho, \mathfrak{x}\} \cap \{\varrho, \mathfrak{x}\} = \{\varrho, \mathfrak{x}\}$$

$$[\text{supp}(g_S)\{\varrho\}\text{supp}(g_S)\{\mathfrak{x}\}\text{supp}(g_S)] \cap \text{supp}(g_S) = \{\varrho, \mathfrak{x}\}\varrho\{\varrho, \mathfrak{x}\}\mathfrak{x}\{\varrho, \mathfrak{x}\} \cap \{\varrho, \mathfrak{x}\} = \{\varrho, \mathfrak{x}\}$$

$$[\text{supp}(g_S)\{\mathfrak{x}\}\text{supp}(g_S)\{\varrho\}\text{supp}(g_S)] \cap \text{supp}(g_S) = \{\varrho, \mathfrak{x}\}\mathfrak{x}\{\varrho, \mathfrak{x}\}\varrho\{\varrho, \mathfrak{x}\} \cap \{\varrho, \mathfrak{x}\} = \{\varrho, \mathfrak{x}\}$$

$$[supp(g_S)\{\tau\}supp(g_S)\{\tau\}supp(g_S)] \cap supp(g_S) = \{\varnothing, \tau\}\tau\{\varnothing, \tau\}\tau\{\varnothing, \tau\} \cap \{\varnothing, \tau\} = \{\varnothing, \tau\}$$

elde edilir. Böylece, her $x, y \in S$ için, $[supp(g_S)\{x\}supp(g_S)\{y\}supp(g_S)] \cap supp(g_S) \neq \emptyset$

Buradan, $supp(g_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç idealidir; fakat Örnek 5.3'te gösterildiği üzere g_S , bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal değildir.

5.18. Tanım f_S ve h_S , $h_S \cong f_S$ olacak şekilde, birer EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olsun. $supp(h_S) = supp(f_S)$ ise f_S esnek kümesine S yarıgrubunun bir minimal EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideali denir.

5.19. Teorem A, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen bi-quasi-iç ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir minimal EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideali olmasıdır.

İspat: A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen bi-quasi-iç ideali olsun. O halde, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç idealidir ve Teorem 5.14'ten, S_A bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir. $f_S \cong S_A$ olacak şekilde f_S bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olsun. Teorem 5.16'dan, $supp(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç idealidir ve Not 2.3.15'den ve Sonuç 2.3.20'den,

$$supp(f_S) \subseteq supp(S_A) = A$$

elde edilir. A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen bi-quasi-iç ideali olduğundan, $supp(f_S) = supp(S_A) = A$ olup, böylece, Tanım 5.18'den, S_A bir minimal EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir.

Tersine, S_A bir minimal EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olsun. O halde, S_A bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal ve Teorem 5.14'ten, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç idealidir. $B \subseteq A$ olacak şekilde B , S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç ideali olsun.

Teorem 5.14'ten, S_B bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal ve Teorem 2.3.21'den, $S_B \cong S_A$ olur. S_A bir minimal EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olduğundan ve Sonuç 2.3.20'den,

$$B = \text{supp}(S_B) = \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. Böylece A, S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen bi-quasi-iç idealidir.

5.20. Tanım f_S, g_S ve h_S birer EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ g_S \cong f_S$ olması $h_S \cong f_S$ veya $g_S \cong f_S$ olmasını gerektiriyor ise f_S 'ye bir EK-asal hemen hemen bi-quasi-iç ideal denir.

5.21. Tanım f_S ve h_S birer EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ h_S \cong f_S$ olması $h_S \cong f_S$ olmasını gerektiriyor ise f_S 'ye bir EK-yarı asal hemen hemen bi-quasi-iç ideal denir.

5.22. Tanım f_S, g_S ve h_S birer EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $(h_S \circ g_S) \tilde{\cap} (g_S \circ h_S) \cong f_S$ olması $h_S \cong f_S$ veya $g_S \cong f_S$ olmasını gerektiriyor ise f_S 'ye bir EK-kuvvetli asal hemen hemen bi-quasi-iç ideal denir.

Her EK-kuvvetli asal hemen hemen bi-quasi-iç idealin, bir EK-asal hemen hemen bi-quasi-iç ideal olduğu ve her EK-asal hemen hemen bi-quasi-iç idealin EK-yarı asal hemen hemen bi-quasi-iç ideal olduğu açıktır.

5.23. Teorem P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-asal hemen hemen bi-quasi-iç ideal ise P kümesi S yarıgrubunun asal hemen hemen bi-quasi-iç idealidir.

İspat: S_P , bir EK-asal hemen hemen bi-quasi-iç ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir. Teorem 5.14'ten, P, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç idealidir. $AB \subseteq P$ olacak şekilde A ve B, S yarıgrubunun birer hemen hemen bi-quasi-iç ideali olsun. Bu durumda, Teorem 5.14'ten, S_A ve S_B birer EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir ve Teorem 2.3.21'den, $S_A \circ S_B = S_{AB} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-asal hemen hemen bi-quasi-iç ideal ve $S_A \circ S_B \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ veya $S_B \cong S_P$ sağlanır. Böylece,

Teorem 2.3.21'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen bi-quasi-iç idealidir.

5.24. Teorem P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen bi-quasi-iç ideali ise P kümesi S yarıgrubunun yarı asal hemen hemen bi-quasi-iç idealidir.

İspat: S_P , bir EK-yarı asal hemen hemen bi-quasi-iç ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir ve Teorem 5.14'ten, P, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç idealidir. $AA \subseteq P$ olacak şekilde A, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç ideali olsun. Bu durumda, Teorem 5.14'ten, S_A bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir ve Teorem 2.3.21'den, $S_A \circ S_A = S_{AA} \subseteq S_P$ elde edilir. S_P , bir EK-asal hemen hemen bi-quasi-iç ideal ve $S_A \circ S_A \subseteq S_P$ olduğundan, $S_A \subseteq S_P$ sağlanır. Böylece Teorem 2.3.21'den, $A \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak P kümesi, S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen bi-quasi-iç idealidir.

5.25. Teorem P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen bi-quasi-iç ideali ise P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen bi-quasi-iç idealidir.

İspat: S_P , bir EK-kuvvetli asal hemen hemen bi-quasi-iç ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir. Teorem 5.14'ten, P, S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç idealidir. $AB \cap BA \subseteq P$ olmak üzere, A ve B, S yarıgrubunun birer hemen hemen bi-quasi-iç ideali olsun. Bu durumda, Teorem 5.14'ten, S_A ve S_B birer EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealdir ve Teorem 2.3.21'den, $(S_A \circ S_B) \cap (S_B \circ S_A) = S_{AB} \cap S_{BA} = S_{AB \cap BA} \subseteq S_P$ elde edilir. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen bi-quasi-iç ideal ve $(S_A \circ S_B) \cap (S_B \circ S_A) \subseteq S_P$ olduğundan, $S_A \subseteq S_P$ veya $S_B \subseteq S_P$ sağlanır. Böylece Teorem 2.3.21'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen bi-quasi-iç idealidir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, esnek küme teorisi literatürüne katkı sağlaması amacıyla, yarıgruplarda EK-bi-quasi-iç ideal, EK-hemen hemen iç ideal ve EK-hemen hemen bi-quasi-iç ideal tanıtılmış, bu ideallere örnekler verilmiş, bu ideallerin birbirleri ve diğer idealler ile olan ilişkilerine bakılmıştır. Klasik yarıgrup teorisindeki yarıgrupların idealleri ile esnek küme teorisindeki esnek kesişimsel idealleri arasındaki önemli bağlantılar detaylı bir şekilde sunulmuştur.

Tezin ilk bölümünde, yarıgruplar, esnek kümeler, esnek kesişimsel idealler ve yarıgrupların idealleri ile ilgili detaylı literatür taraması yapılmıştır. İkinci bölümde, tez boyunca kullanılan yarıgruplar, yarıgrupların idealleri ve hemen hemen idealleri, esnek kümeler ve yarıgrupların esnek kesişimsel (hemen hemen) idealleri ile ilgili temel kavramlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde, yarıgrupların EK-bi-quasi-iç idealleri, dördüncü bölümde yarıgrupların EK-hemen hemen iç idealleri, beşinci bölümde EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealleri tanımlanmış, örneklendirilmiş, birbirleri ve diğer idealler ile ilişkilerini içeren teoremler ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Yarıgrupların klasik cebirdeki ideallerinden yola çıkarak klasik cebirdeki teoremlerin ve idealler arasındaki geçişlerin esnek küme teorisindeki yansımasının nasıl olacağı sorusu çalışmanın ilhamı olmuş ve yapılan çalışmalarda bunlar göz önünde bulundurulmuştur. Pek çok yeni ilişkiler içeren teoremler, ispatları ve örnekleri ile gösterilmiştir.

Daha detaylı çerçevede bakılacak olursa, tezin üçüncü bölümünde yarıgrupların EK-bi-quasi-iç ideal kavramı tanımlanmış, örneği verilmiş, tanıma denk bir teorem oluşturulmuş ve ispatlanmıştır. Bir yarıgrubun bir altarıgrubu bir bi-quasi-iç ideal ise bu altarıgrubun esnek karakteristik fonksiyonun da EK-bi-quasi-iç ideal olduğunu ve karşıtının da doğru olduğu gösterilmiştir. Böylece klasik cebir ve esnek küme teorisi arasında önemli bir ilişki ortaya koyulmuştur. Bir yarıgrubun her EK-bi-idealinin bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu ispatlanmış, seçilen yarıgrubun regüler olması halinde teoremin karşıtının da doğru olduğu gösterilmiştir. Her EK-sol idealin ve EK-sağ idealin bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu sunulup karşıtının doğru olabilmesi için seçilen yarıgrubun sırasıyla regüler ve sağ basit yarıgrup ve seçilen yarıgrubun regüler ve sol basit yarıgrup olması şartını sağlaması gerektiği gösterilmiştir. Bunlar sonucunda her EK-idealın bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu, karşıtının

doğru olabilmesi için yarıgrubun bir regüler grup olması gerektiği gösterilmiştir. Her EK-iç idealin bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu, ancak karşıtının seçilen yarıgrubun bir grup olması şartıyla sağlanabileceği sonucuna ulaşılmıştır. Her EK-quasi-idealın, bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu ispatlanmış, karşıtının doğru olabilmesi için seçilen kümenin bir regüler yarıgrup olması gerektiği görülmüştür. Her EK-bi-iç idealin aynı zamanda bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu ispatlanıp, karşıtının doğru olabilmesi için seçilen yarıgrubun bir regüler yarıgrup olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Her EK-sol bi-quasi idealin ve EK-sağ bi-quasi idealin aynı zamanda bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu ispatlanmış, karşıtlarının doğru olabilmesi için sırasıyla seçilen yarıgrubun regüler ve sağ basit yarıgrup ve regüler ve sol basit yarıgrup olması gerektiği gösterilmiştir. Bunlardan yola çıkarak her EK-bi-quasi idealin bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu gösterilip karşıtının doğru olabilmesi için seçilen yarıgrubun bir regüler yarıgrup olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Her EK-sol quasi-iç ve EK-sağ quasi-iç ideallerin aynı zamanda bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu ispatlanmış, karşıtlarının doğru olabilmesi için seçilen yarıgrubun sırasıyla sağ basit yarıgrup ve sol basit yarıgrup olması gerektiği verilmiştir. Bu ikisinin sonucunda, her EK-quasi-iç ideallerin bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu ispatlanmış, karşıtının doğru olabilmesi için seçilen yarıgrubun bir grup olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. EK-bi-quasi-iç ideallerin sonlu esnek $\wedge$ -çarpımlarının, sonlu esnek $\times$ -çarpımlarının ve sonlu esnek kesişimlerinin de EK-bi-quasi-iç ideal olduğu, ancak sonlu esnek $\vee$ - çarpımlarının ve sonlu esnek birleşimlerinin bir EK-bi-quasi-iç ideal olmadığı gösterilmiştir. Bir EK-bi-quasi-iç idealin yarıgrup izomorfizmasının ve tersinin de bir EK-bi-quasi-iç ideal olduğu ispatlanmıştır. Regüler bir yarıgrubun EK-bi-quasi-iç ideal ile ilişkisi gösterilmiş böylece klasik cebirdeki regüler yarıgrup ile esnek küme teorisindeki EK-bi-quasi-iç idealin ilişkisi ortaya koyulmuştur.

Tezin dördüncü ve beşinci bölümünde, yarıgrupların EK-hemen hemen iç idealleri ve EK-hemen hemen bi-quasi-iç idealleri tanımlanmış ve örneklendirilmiştir. Bir esnek küme EK-hemen hemen iç ideal (bi-quasi-iç ideal) ise alt esnek kümesinin de EK-hemen hemen iç ideal (bi-quasi-iç ideal) olduğu gösterilmiştir. EK-hemen hemen iç ideallerin (bi-quasi-iç ideallerin) sonlu birleşimlerinin de bir EK-hemen hemen iç ideal (bi-quasi-iç idealler) olduğu fakat sonlu kesişimleri için benzer durumun geçerli olmadığı aksine örneklerle gösterilmiştir. Bir yarıgrubun boş kümeden farklı bir alt kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun EK-hemen hemen iç ideal (bi-quasi-iç ideal) olmasının bu altkümenin kendisinin bir hemen hemen iç ideal (bi-quasi-iç ideal) olmasını çift gerektirdiği

ispatlanmıştır. Böylece klasik yarıgrup teorisindeki bir yarıgrupun altkümesinin hemen hemen iç idealliği (bi-quasi-iç idealliği) ile esnek küme teorisindeki EK-hemen hemen iç idealliği (bi-quasi-iç idealliği) arasındaki ilişki ortaya koyulmuştur. EK-hemen hemen iç ideal (bi-quasi-iç ideal) olan bir esnek kümenin destek kümesinin de EK-hemen hemen iç ideal (bi-quasi-iç ideal) olduğu ispatlanmış ve örneklendirilmiştir. Klasik cebirdeki minimal hemen hemen iç ideal (bi-quasi-iç ideal) tanımları esnek kesişimsel hemen hemen ideallerde de tanımlanmış olup, bir yarıgrupun boşan farklı bir alt kümesinin bir minimal hemen hemen iç ideal (bi-quasi-iç ideal) olması durumunda, o kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun da EK-minimal hemen hemen iç ideal (bi-quasi-iç ideal) olduğu çift gerektirmeli olarak gösterilmiştir. Böylece uklasik yarıgrup teori ve esnek küme teori arasında önemli bir bağlantı daha kurulmuş olmuştur. Ayrıca bir yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesinin asal (yarı asal/kuvvetli asal) hemen hemen iç ideali (bi-quasi-iç ideal) ile bu kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun EK-asal (yarı asal/kuvvetli asal) hemen hemen iç ideal (quasi-iç ideal) kavramları arasında önemli geçişler bulunmuştur.

Bu tez klasik yarıgrup teorisindeki bi-quasi-iç ideal, hemen hemen iç ideal ve hemen hemen bi-quasi-iç ideal kavramlarının esnek küme teorisindeki yansımalarının incelendiği, esnek küme teorisinde var olan EK-ideallerle ile birbirleriyle olan ilişkilerinin sistemli bir şekilde sunulduğu kapsamlı bir çalışma olup, gelecek çalışmalarda, yarı asal yarıgruplar ve iç regüler yarıgrupların EK-bi-quasi-iç idealler ile karakterizasyonu yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Acar, U., Koyuncu, F. and Tanay, B. (2010). Soft Sets and Soft Rings. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(11), 3458-3463.
- Akbulut, E. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Difference and Lambda Operations*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Aktaş, H. and Çağman, N. (2007). Soft Sets and Soft Groups. *Information Science*, 177(13), 2726-2735.
- Aktaş, H. and Özlü, Ş. (2014). Cyclic Soft Groups and Their Applications on Groups. *The Scientific World Journal*, Volume 2014 Article ID 437324, 5 pages.
- Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K. and Shabir, M. (2009). On Some New Operations in Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 57(9), 1547-1553.
- Atagün, A. O. and Sezgin, A. (2018). Soft Subnear-rings, Soft Ideals and Soft N-subgroups of Near-rings. *Mathematical Science Letter*, 7, 37-42.
- Aybek, F. (2024). *New Restricted and Extended Soft Set Operations*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Aydın, N. ve Kandamar, H. (2013). *Soyut Cebir* (Birinci Baskı). İstanbul: Kriter Yayınevi, 3-71.
- Babitha, K. V. and Sunil J. J. (2010). Soft Set Relations and Functions. *Computers and Mathematics with Applications*, 60(7), 1840-1849.
- Baupradist, S., Chemat, B., Palanivel, K. and Chinram, R. (2021). Essential Ideals and Essential Fuzzy Ideals in Semigroups. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 24(1), 223-233.
- Bogdanovic, S. (1981). Semigroups in Which Some Bi-ideal is a Group. *Review of Research Faculty of Science-University of Novi Sad*, 11, 261-266.
- Chinram, R. and Nakkhasen, W. (2022a). Almost Bi-quasi-interior Ideals and Fuzzy Almost Bi-quasi-interior Ideals of Semigroups. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 26, 128-136.
- Chinram, R. and Nakkhasen, W. (2022b). Almost Bi-interior Ideals and Their Fuzzification of Semigroups. *ICIC Express Letters*, 16(9), 933-941.
- Clifford, A. H. and Preston, G. B. (1961). *The Algebraic Theory of Semigroups*, Volume I. Providence: American Mathematical Society, 58-62.

- Clifford, A. H. and Preston, G. B. (1967). *The Algebraic Theory of Semigroups*, Volume II. Providence: American Mathematical Society, 79-83.
- Çağman, N. (2021). Conditional Complements of Sets and Their Application to Group Theory. *Journal of New Results in Science*, 10(3), 67-74.
- Çağman, N., Çıtak, F. and Aktaş, H. (2012). Soft Int-group and Its Applications to Group Theory. *Neural Computing and Applications*, 21, 151-158.
- Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010). Soft Set Theory and Uni-int Decision Making. *European Journal of Operational Research*, 207(2), 848-855.
- Demirci, A. M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Union, Plus and Theta Operations*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Feng, F., Jun, Y. B. and Zhao, X. (2008). Soft Semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(10), 2621-2628.
- Gaketem, T. (2022). Almost Bi-interior Ideal in Semigroups and Their Fuzzifications. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 15(1), 281-289.
- Gaketem, T., and Chinram, R. (2023). Almost Bi-quasi Ideals and Their Fuzzifications in Semigroups. *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 50(2), 342-352.
- Good, R. A. and Hughes, D. R. (1952). Associated Groups for a Semigroup. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 58, 624-625.
- Grillet, P. A. (1995). *Semigroups: An Introduction to the Structure Theory* (First Edition). New York: Routledge, 101-108.
- Grillet, P. A. (2013). *Commutative Semigroups* (Vol. 2). Springer Science and Business Media, 65-77.
- Grosek, O. and Satko, L. (1980). A New Notion in the Theory of Semigroup. *Semigroup Forum* 20, 233-240.
- Hacısalıhoğlu, H. (2007). *Soyut Matematik* (İkinci Baskı). Türkiye: Üniversite Yayınevi, 163-204.
- Howie, J. M. (1995). *Fundamentals of Semigroup Theory*. New York: Oxford University Press, 103-109.
- Huntington, E. V. (1902). Simplified Definition of a Group. *Bulletin of the Mathematical Society*, 8(7), 296-300.
- Iampan, A., Chinram, R. and Petchkaew, P. (2021). A Note on Almost Subsemigroups of Semigroups. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 16, 1623-1629.

- İlgin, A. (2025). *Yarıgrupların Esnek Kesişimsel (Hemen Hemen) Bi-iç İdealleri ve Zayıf-iç İdealleri, Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Altıyarıgruplar ve İdealleri, Bi-quasi İdealleri ve Tri-bi-idealleri*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya.
- İlgin, A. and Sezgin, A. (Baskıda a). Soft Intersection Tri-ideals of Semigroups. *Acta Scientiarum Technology*.
- İlgin, A. and Sezgin, A. (Baskıda b). Soft Intersection Tri-bi-ideals of Semigroups. *Journal of the Korean Society for Industrial and Applied Mathematics*.
- Jana, C., Pal, M., Karaaslan, F. and Sezgin, A. (2019). (α, β) -Soft Intersectional Rings and Ideals with Their Applications. *New Mathematics and Natural Computation*, 15(02), 333-350
- Jun, Y. B. (2008). Soft BCK/BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(5), 1408-1413.
- Jun, Y. B. and Park, C. H. (2008). Applications of Soft Sets in Ideal Theory of BCK/BCI-algebras. *Information Sciences*, 178(11), 2466-2475.
- Kaopusek, N., Kawewnoi, T. and Chinram, R. (2020). On Almost Interior Ideals and Weakly Almost Interior Ideals of Semigroups. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 23(3), 773-778.
- Karaaslan, F. (2019). Some Properties of AG*-groupoids and AG-bands Under SI-product Operation. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(1), 231-239.
- Karaaslan, F., Ullah, A. and Ahmad, I. (2021). Normal Bipolar Soft Subgroups. *Fuzzy Information and Engineering*, 13(1), 79-98.
- Kocakaya, F. Z. (2025). *Yarıgrupların Esnek Kesişimsel (Hemen Hemen) Quasi-iç-idealleri, ve Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Quasi-idealleri*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya.
- Lajos S. (1976). $(m; k; n)$ -ideals in Semigroups. Notes on Semigroups II, *Karl Marx University of Economics Department of Mathematics Budapest*, (1), 12-19.
- Mahmood, T., Rehman Z. U. and Sezgin, A. (2018). Lattice Ordered Soft Near Rings. *Korean Journal of Mathematics*, 26(3), 503-517.
- Maji, P. K., Biswas, R. and Roy, A. R. (2003). Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Application*, 45(1), 555-562.
- Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(1), 19-31.
- Muştuoğlu, E., Sezgin, A. and Türk, Z. K. (2016). Some Characterizations on Soft Unigroups and Normal Soft Uni-groups. *International Journal of Computer Applications*, 155(10), 1-8.

- Nagy, A. (2013). *Special Classes of Semigroups* (Vol. 1). Springer Science and Business Media, 43-77.
- Onur, B. (2025). *Yarıgrupların Esnek Kesişimsel Bi-quasi İdealleri, Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Bi-idealleri ve Tri-idealleri*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya
- Özlü, Ş. and Sezgin, A. (2020). Soft Covered Ideals in Semigroups. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica*, 12(2), 317-346.
- Park, C. H., Jun, Y. B. and Öztürk, M. A. (2008). Soft WS-algebras. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 23(2), 313-324.
- Pei, D. and Miao, D. (2005). From Soft Sets to Information Systems. In *2005 IEEE International Conference on Granular Computing*, 2, 617-621.
- Petrich, M. (1973). *Introduction to Semigroups*. Merrill Columbus, 59-70.
- Petrich, M. (1977). *Lectures in Semigroups*. Wiley New York, 202-211.
- Petrich, M. (1985). Inverse Semigroups. *Semigroup Forum*, 32, 215-219.
- Rao, M. M. K. (2018a). Bi-interior Ideals of Semigroups. *Discussiones Mathematicae General Algebra and Applications*, 38(1), 69-78.
- Rao, M. M. K. (2018b). A Study of a Generalization of Bi-ideal, Quasi-ideal and Interior Ideal of Semigroup. *Mathematica Moravica*, 22, 103-115.
- Rao, M. M. K. (2019). A Study of Bi-quasi-interior Ideal As a New Generalization of Ideal of Generalization of Semiring. *Journal of International Mathematical Virtual Institute*, 9, 19-35.
- Rao, M. M. K. (2020a). Left Bi-quasi Ideals of Semigroups. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 44(3), 369-376.
- Rao, M. M. K. (2020b). Quasi-interior Ideals and Weak-interior Ideals. *Asia Pacific Journal of Mathematics*, 7(21), 1-20.
- Rao, M. M. K. (2024a). Tri-ideals of Semigroups. *Bulletin of International Mathematical Virtual Institute*, 14(2), 213-223.
- Rao, M. M. K. (2024b). Bi-quasi-interior Ideals. *Annals of Communications in Mathematics*, 7(3), 296-309
- Rao, M. M. K. (2024c). Bi-quasi-interior Ideals of Semiring. *Journal of International Mathematical Virtual Institute*, 14(1), 17-31.
- Rao, M. M. K., Kona R. K., Rafi, N. and Bolineni, V. (2024). Tri-quasi Ideals and Fuzzy Tri-quasi Ideals of Semigroups. *Annals of Communications in Mathematics*, 7(3), 281-295.

- Sarılioğlu, M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Intersection, Gamma and Star Operations*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Sezer, A. S. (2014a). A New Approach to LA-semigroup Theory via the Soft Sets. *Journal of Intelligent & Fuzzy System*, 26(5), 2483-2495.
- Sezer, A. S. (2014b). Certain Characterizations of LA-semigroups by Soft Sets. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 27(2), 1035-1046.
- Sezer, A. S. and Atagün, A. O. (2016). A New Kind of Vector Space: Soft Vector Space. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 40(5), 753-770.
- Sezer, A. S., Çağman, N. and Atagün, A. O. (2014). Soft Intersection Interior Ideals, Quasi-ideals and Generalized Bi-Ideals; A New Approach to Semigroup Theory II. *J. Multiple Valued Logic and Soft Computing*, 23(1-2), 161-207.
- Sezer, A. S., Çağman, N. and Atagün, A. O. (2015a). Uni-soft Substructures of Groups. *Annals of Fuzzy Mathematics And Informatics*, 9(2), 235-246.
- Sezer, A. S., Çağman, N., Atagün, A. O., Ali, M. I. and Türkmen, E. (2015b). Soft Intersection Semigroups, Ideals and Bi-Ideals; A New Application on Semigroup Theory I. *Filomat*, 29(5), 917-946.
- Sezgin, A. (2018). A New View on AG-groupoid Theory via Soft Sets for Uncertainty Modeling. *Filomat*, 32(8), 2995-3030.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011a). Soft Groups and Normalistic Soft Groups. *Computers and Mathematics with Applications*, 62(2), 685-698.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011b). On Operations of Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5), 1457-1467.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Plus Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 110-127.
- Sezgin, A., Atagün, A. O. and Aygün, E. (2011). A Note on Soft Near-rings and Idealistic Soft Near-rings. *Filomat*, 25(1), 53-68.
- Sezgin, A., Atagün, A. O., Çağman, N. and Demir, H. (2022). On Near-rings with Soft Union Ideals and Applications. *New Mathematics and Natural Computation*, 18(2), 495-511.
- Sezgin, A. and Aybek, F. (2023). A New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Gamma Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(1), 27-45.
- Sezgin, A., Aybek, F. and Atagün, A. O. (2023a). A New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Intersection Operation. *Black Sea Journal of Engineering and Science*, 6(4), 330-346.

- Sezgin, A., Aybek, F. and Güngör, N. B. (2023b). A New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Union Operation. *Acta Informatica Malaysia*, 7(1), 38-53.
- Sezgin, A., and Baş, Z. H. (2024). Soft-int Almost Interior Ideals for Semigroups. *Information Sciences with Applications*, 4, 25-36.
- Sezgin, A., Baş, Z. H. and İlgin, A. (2025). Soft Intersection Almost Bi-quasi-interior Ideals of Semigroups. *Journal of Fuzzy Extension and Application*, 6(1), 43-58.
- Sezgin, A. and Çağman, N. (2024). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Osmaniye Korkut Ata University Journal of the Institute of Science and Technology*. 7(1), 1-37.
- Sezgin, A., Çağman, N. and Atagün, A. O. (2017). A Completely New View to Soft-int Rings via Soft Uni-int Product. *Applied Soft Computing*, 54, 366-392.
- Sezgin, A., Çağman, N., Atagün, A. O. and Aybek, F. (2023c). Complemental Binary Operations of Sets and Their Application to Group Theory. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 99-106.
- Sezgin, A., Çağman, N. and Çıtak, F. (2019). α –inclusions applied to group theory via soft set and logic. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(1), 334-352.
- Sezgin A. and Çalışıcı, H. (2024). Comprehensive Study on Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(1), 1-23.
- Sezgin, A. and Demirci, A. M. (2023). A New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Star Operation. *Ikonion Journal of Mathematics*, 5(2), 24-52.
- Sezgin, A., and İlgin, A. (2024a). Soft Intersection Almost Subsemigroups of Semigroups. *International Journal of Mathematics and Physics*, 15(1), 13-20.
- Sezgin, A., and İlgin, A. (2024b). Soft Intersection Almost Ideals of Semigroups. *Journal of Innovative Engineering and Natural Science*, 4(2), 466-481.
- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024c). Soft Intersection Almost Weak-interior Ideals of Semigroups: A Theoretical Study. *Journal of Natural Sciences& Mathematics of UT-JNSM*, 9(17-18), 372-385.
- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024d). Soft Intersection Almost Bi-interior Ideals of Semigroups. *Journal of Natural and Applied Sciences Pakistan*, 6(1), 1619-1938.
- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024e). Soft Intersection Almost Bi-quasi Ideals of Semigroups. *Soft Computing Fusion with Applications*, 1(1), 27-42.
- Sezgin, A., İlgin, A. and Atagün, A. O. (2024a). Soft Intersection Almost Tri-bi-ideals of Semigroups. *Science and Technology Asia*, 29(4), 1-13.

- Sezgin, A. and Kocakaya F. Z. (Baskıda). Soft Intersection Almost Quasi-ideals of Semigroups. *Songklanakarin Journal of Science and Technology*.
- Sezgin, A., Kocakaya F. Z. and İlgin, A. (2024b). Soft Intersection Almost Quasi-interior Ideals of Semigroups. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(2), 81-99.
- Sezgin, A. and Onur, B. (2024) Soft Intersection Almost Bi-ideals of Semigroups. *Systemic analytics* 2(1), 95-105.
- Sezgin, A., Onur, B. and İlgin, A. (2024c). Soft Intersection Almost Tri-ideals of Semigroups. *SciNexuses*, 1, 126-138.
- Sezgin, A., and Orbay, M. (2022). Analysis of Semigroups With Soft Intersection Ideals. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica*, 14(1), 166-210.
- Sezgin, A. and Sarıalioğlu, M. (2024). A New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Theta Operation. *Journal of Kadirli Faculty of Applied Sciences*, 4(1), 1-33.
- Sezgin, A., Shahzad, A. and Mehmood, A. (2019). New Operation on Soft Sets: Extended Difference of Soft Sets. *Journal of NewTheory*, 27, 33-42.
- Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023a). A New Soft Set Operation: Soft Binary Piecewise Symmetric Difference Operation. *Necmettin Erbakan University Journal of Science and Engineering*, 5(2), 150-168.
- Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023b). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Lambda Operation. *Sinop University Journal of Natural Sciences*, 8(2), 101-133.
- Steinfeld, O. (1956). Uher Die Quasi Ideals. *Von Halbgruppenn Publication Mathematical Debrecen*, 4(262), 464.
- Stojanovic, N. S. (2021). A New Operation on Soft Sets: Extended Symmetric Sifference of Soft Sets. *Military Technical Courier*, 69(4), 779-791.
- Suebsung, S., Chinram, R., Yonthanthum, W., Hila, K. and Iampan, A. (2022). On Almost Bi-ideals and Almost Quasi-ideals of Ordered Semigroups and Their Fuzzifications. *ICIC Express Lett*, 16(2), 127-135.
- Sun, Q. M., Zhang, Z. L. and Liu, J. (2008). Soft Sets and Soft Modules. *In Rough Sets and Knowledge Technology: Third International Conference, RSKT 2008, Chengdu, China, May 17-19, 2008. Proceedings* 3 (pp. 403-409). Springer Berlin Heidelberg.
- Szasz, G. (1977). Interior Ideals in Semigroups. *Notes on Semigroups IV, Karl Marx University of Economics, Department of. Mathematics, Budapest*, 5, 1-7.

- Szasz, G. (1981). Remark on Interior Ideals of Semigroups. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 16, 61-63.
- Tunçay, M. and Sezgin, A. (2016). Soft Union Ring and Its Applications to Ring Theory. *International Journal of Computer Applications*, 151(9), 7-13.
- Ullah, A., Ahmad, I., Hayat, F., Karaaslan, F. and Rashad, M. (2018a). Soft Intersection Abel-Grassmann's Groups. *Journal of Hyperstructures*, 7(2), 149-173.
- Ullah, A., Karaaslan, F. and Ahmad, I. (2018b). Soft Uni-Abel-Grassmann's Groups. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 11(2), 517-536.
- Wattanatripop, K., Chinram, R. and Changphas, T. (2018). Quasi-A-Ideals and Fuzzy A-Ideals in Semigroups. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 21(5), 1131-1138.
- Yavuz, E. (2024). *Soft Binary Piecewise Operations and Their Properties*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(1), 338-353.
- Zhu, P. and Wen, Q. (2013). Operations on Soft Sets Revisited. *Journal of Applied Mathematics*, 2013(5), 1-7.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı: Zeynep Hare BAŞ

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Amasya Üniversitesi	2022
Yüksek Lisans	Amasya Üniversitesi	
İş Deneyimi/Yıl	Çalıştığı Yer	Görevi
2023	Amasya/Gümüşhacıköy	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

- Sezgin, A. and Baş, Z. H. (2024). Soft-int Almost Interior Ideals for Semigroups. *Information Sciences with Applications*, 4, 25-36.
- Sezgin, A., Baş, Z. H. and İlgin, A. (2025). Soft Intersection Almost Bi-quasi-interior Ideals of Semigroups. *Journal of Fuzzy Extension and Application*, 6(1), 43-58.
- Sezgin, A. and Baş, Z. H. (Baskıda) Soft Intersection Bi-quasi-interior Ideals of Semigroups. *International Journal of Mathematics and Physics*.
- Sezgin, A., İlgin, A., Kocakaya, F. Z., Baş, Z. H., Onur, B. and Çıtak, F. (2024). A Remarkable Contribution to Soft Int-group Theory via A Comprehensive View on Soft Cosets. *Journal of Science and Arts*. 24(4), 905-934.