



**T. C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL (HEMEN HEMEN) QUASI-
İÇ İDEALLERİ VE ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN QUASI-
İDEALLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATIMA ZEHRA KOCAKAYA

OCAK

**YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL (HEMEN HEMEN) QUASI-İÇ
İDEALLERİ VE ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN QUASI-
İDEALLERİ**

Fatıma Zehra KOCAKAYA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Prof. Dr. Ashhan SEZGİN

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2025

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Fatıma Zehra KOCAKAYA tarafından hazırlanan “Yarıgrupların Esnek Kesişimsel (Hemen Hemen) Quasi-iç İdealleri ve Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Quasi-idealleri” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Matematik Anabilim Dalı, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Gültekin ATALIK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 02/ 01/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Fatıma Zehra KOCAKAYA

02/01/2025

**YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL (HEMEN HEMEN) QUASI-İÇ İDEALLERİ
VE ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN QUASI-İDEALLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Fatıma Zehra KOCAKAYA

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2025

ÖZET

Belirsizliği modellemede kullanılan yeni bir metod olan esnek küme teorisi, ilk olarak Molodtsov tarafından 1999 yılında ortaya konulmuş ve teori birçok matematiksel alana uygulanmıştır. Bu çalışmada, yarıgrupların esnek kesişimsel ideallerin genelleştirilmesi amacıyla, yarıgrupların yeni esnek kesişimsel idealleri ve esnek kesişimsel hemen hemen idealleri tanıtılmıştır. Bu bağlamda, bir yarı grubun “Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Quasi-ideal” ve “Esnek Kesişimsel (Hemen Hemen) Quasi-iç İdeal” yapıları verilmiş, özellikleri ve diğer esnek kesişimsel (hemen hemen) ideallerle olan ilişkileri incelenmiştir. Altı bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde esnek kümeler, esnek küme işlemleri, yarıgruplar ve yarıgrupların idealleri ile ilgili literatürdeki çalışmalara değinilmiştir. İkinci bölümde, bu tez çalışması boyunca kullanılan tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, bir yarı grubun esnek kesişimsel quasi-iç ideal yapısı tanıtılmış, özellikleri verilmiş ve diğer esnek kesişimsel ideallerle olan ilişkileri incelenmiş ve örneklendirilmiştir. Ayrıca, bir yarı grubun bir alt grubunun bir quasi-iç ideal olmasının, o alt yarı grubun esnek karakteristik fonksiyonunun bir esnek kesişimsel quasi-iç ideal olmasına denk olduğu elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, bir yarı grubun esnek kesişimsel hemen hemen quasi-ideal ve onun genellemesi olan esnek kesişimsel zayıf hemen hemen quasi-ideal yapıları, beşinci bölümde, bir yarı grubun esnek kesişimsel hemen hemen quasi-iç ideal ve onun genellemesi olan esnek kesişimsel zayıf hemen hemen quasi-iç ideal yapılarının özellikleri verilmiş ve diğer esnek kesişimsel hemen hemen ideallerle olan ilişkileri gösterilmiştir. Ayrıca, bir yarı grubun hemen hemen quasi (quasi-iç) idealler ile esnek kesişimsel hemen hemen quasi (quasi-iç) idealler arasında minimallik, asallık, yarı asallık ve kuvvetli asallık ilişkileri de elde edilmiş ve bu yapıların karakterizasyonları verilmiştir. Böylece, klasik yarı grup teorisi ile esnek küme teorisi arasındaki ilişkiler bu çalışmada gösterilmiştir. Son bölümde ise bu tez çalışmasından elde edilen sonuçlara, sonuçların önemine ve önerilere yer verilmiştir.

Sayfa Adedi	: 119
Anahtar Kelimeler	: Yarıgrup, Esnek küme, Yarıgrupların esnek kesişimsel (hemen hemen) idealleri
Danışman	: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

SOFT INTERSECTION (ALMOST) QUASI-INTERIOR IDEALS AND SOFT INTERSECTION ALMOST QUASI-IDEALS OF SEMIGROUPS

(M. Sc. Thesis)

Fatıma Zehra KOCAKAYA

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2025

ABSTRACT

The new method used in modeling uncertainty, called fuzzy set theory, was first introduced by Molodtsov in 1999, and the theory has been applied to many mathematical fields. In this study, some new soft intersection ideals and soft intersection almost ideals of semigroups have been proposed for the purpose of generalizing some certain soft intersection ideals of semigroups. In this regard, "Soft Intersection Almost Quasi-ideal" and "Soft Intersection (Almost) Quasi-interior Ideal" of a semigroup have been presented, their properties together with their relationships with other soft intersection (almost) ideals have been explored. This study consists of six chapters. In the first chapter, studies in the literature related to soft sets, soft set operations, semigroups, and ideals of semigroups are discussed. The second chapter introduces the definitions, theorems, and concepts used in this thesis. In the third chapter, the concept of soft intersection quasi-interior ideal of a semigroup is proposed, its properties are provided, and its relationships with other soft intersection ideals of semigroups are given and illustrated with examples. It is also proven that a nonempty subset of a semigroup is a quasi-interior ideal if and only if its soft characteristic function is a soft intersection quasi-interior ideal. In the fourth chapter, the concepts of soft intersection almost quasi-ideal and its generalization, soft intersection weak almost quasi-ideal of a semigroup; in the fifth chapter, soft intersection almost quasi-interior ideal and its generalization, soft intersection weak almost quasi-interior ideal of a semigroup are provided and their relationships with other soft intersection almost ideals are obtained. Additionally, the relationships between minimality, primeness, semiprimeness and strongly primeness between almost quasi (quasi-interior) ideals and soft intersection almost quasi (quasi-interior) ideals of a semigroup are demonstrated, and some characterizations of these structures are obtained. Thus, the relationships between classical semigroup theory and soft set theory are demonstrated in this study. The final chapter presents the conclusions obtained from this thesis, the significance of the results, and the suggestions for future work.

Number of pages : 119
Key Words : Semigroup, Soft set, Soft intersection (almost) ideals of semigroups
Supervisor : Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Akademik çalışmalarımda, tez sürecimde ve tez sürecim dışında bana her daim destek veren, tecrübesi, bilgisi ve deneyimiyle bana yol gösteren, zorlandığımda ve stresli zamanlarımda motivasyonumu artıran, sadece bir danışman olmayıp danışmanın da ötesinde bana bir aile sıcaklığıyla yaklaşan, bu süreci bana kolaylaştıran çok sevdiğim değerli danışmanım Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN hocama katkılarından ötürü çok teşekkür ederim.

Bu süreçte beni hem akademik hem manevi anlamda destekleyen, her zaman yardımcı olan, bu zorlu sürecin üstesinden birlikte geldiğim değerli yüksek lisans arkadaşlarım Aleyna İLGİN, Beyza ONUR ve Zeynep Hare BAŞ'a teşekkür ederim. Ayrıca desteklerini her daim hissettiğim arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Son olarak, benimle streslenip benimle mutlu olan, her anımda beni destekleyen, motive eden, bana güvenip inanan; babam Rıza KOCAKAYA, annem Azime KOCAKAYA ve kardeşim Halil İbrahim KOCAKAYA'ya teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	9
2.1. Yarıgruplar ve Yarıgrup Çeşitleri	9
2.2. Yarıgrupların İdealleri ve Hemen Hemen İdealleri	13
2.3. Esnek Kümeler ve Temel Kavramları	15
2.4. Yarıgrupların Esnek Kesişimsel İdealleri ve Esnek Kesişimsel Hemen Hemen İdealleri	21
3. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL QUASI-İÇ İDEALLERİ	28
4. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN QUASI-İDEALLERİ	63
5. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN QUASI-İÇ İDEALLERİ	84
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	108
KAYNAKLAR	111
ÖZGEÇMİŞ	119

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil

Sayfa

Şekil 3. 1. Bazı esnek kesişimsel idealler arasındaki ilişkileri gösteren diyagram.....	62
---	----



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler

Açıklama

$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^-$	Negatif tam sayılar kümesi
$\emptyset$	Boş küme
$\exists$	Varlıksal niceleyici, en az bir
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\neq$	Eşit değildir
$\subseteq$	Alt kümesidir
$\not\subseteq$	Alt kümesi değildir
$\supseteq$	Kapsar
$\not\supseteq$	Kapsamaz
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Birleşim
$\Rightarrow$	Gerek şart
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter şart
E	Parametre kümesi
U	Evrensel küme
$S_E(U)$	U üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
$\emptyset_S$	S 'ye göre boş esnek küme

S_A	A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu
S_x	x 'in esnek karakteristik fonksiyonu
$\tilde{S}$	Tam esnek küme
$\circ$	Esnek kesişimsel çarpım işlemi
$\subseteq$	Esnek alt küme
$\tilde{\cap}$	Esnek kesişim
$\tilde{\cup}$	Esnek birleşim
$Im(f_S)$	f_S 'nin görüntü kümesi
$\mathcal{U}(f_S; \alpha)$	f_S 'nin üst α -kapsama kümesi
$supp(f_S)$	f_S 'nin destek kümesi

Kısaltmalar

Açıklama

EK	Esnek kesişimsel
----	------------------

1. GİRİŞ

Yaşadığımız dünyada birçok belirsizlik bulunmakta ve bu belirsizlikler kişiden kişiye değişkenlik göstermektedir. Günlük yaşamızda sıklıkla kullandığımız terimler arasında, herkes için farklı anlamlar taşıyan "uygun fiyat", "sağlam", "şık tasarım", ve "ferah" gibi kelimeler bulunmaktadır. Hayatımızın içerisinde belirsizlik içeren pek çok olay bulunmaktadır. Klasik matematiksel mantık, bu belirsizliklerle başa çıkmak için yeterli olmayabilir. Bu sebepten dolayı, belirsizliğin ortadan kaldırılması için yaygın yöntemlerin yanı sıra bazı bilimsel çalışmalara ihtiyaç duyulmuştur. Belirsiz tipteki problemlerin çözümü için farklı teoriler ortaya konmuştur, bu teoriler arasında aralık matematiği, bulanık küme teorisi, yaklaşık kümeler teorisi ve esnek kümeler teorisi yer almaktadır. Bu teorilerden en dikkate değer olanı bulanık küme teorisidir. Bulanık kümeler, Zadeh (1965) tarafından tanımlanmıştır. Ancak bilindiği gibi bir bulanık küme üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. Molodostov'a göre üyelik fonksiyonlarının doğası özellikle bulanık küme teorisinde oldukça bireyseldir. Bu nedenle her durumda üyelik fonksiyonlarını oluşturmak çok zordur. Bu nedenle üyelik fonksiyonlarının oluşturulmasından bağımsız bir küme teorisine ihtiyaç duyulmuştur. Bu sebeple Molodtsov (1999) Esnek Küme Teorisini, üyelik fonksiyonu inşasından bağımsız olarak geliştirmiştir.

Esnek küme teorisi içinde önemli bir kavram olan esnek küme işlemleriyle ilgili araştırmalar 2003 yılından beri devam etmektedir. Molodtsov (1999) tarafından öne sürülen esnek kümeler, temel esnek küme işlemlerini tanıtmış ve daha sonra Maji, Biswas ve Roy (2003), bu tanımlara bazı yeni özellikler eklemiştir. Pei ve Miao (2005), esnek kümeler için kesişim ve alt kümeler gibi önemli kavramları literatüre tanıtmıştır. Aktaş ve Çağman (2007), esnek grup, esnek alt grup ve esnek homomorfizma terimlerini literatüre kazandırarak, esnek cebirsel yapılar üzerine yapılacak pek çok çalışmanın önünü açmıştır. Park, Jun ve Öztürk (2008), esnek cebirsel kavramlar üzerine araştırmalar gerçekleştirmiştir. Ali, Feng, Liu, Min ve Shabir (2009), Maji ve diğer araştırmacıların (2003) ele aldığı esnek küme işlemlerindeki bazı zorlukları ele alarak, esnek kümelerin sınırlı birleşim, sınırlı kesişim, sınırlı fark ve esnek kümelerin genişletilmiş kesişimi gibi yeni işlemlerini tanımlamış ve önemli özelliklerini detaylı bir şekilde incelemiştir. Jiang, Tang, Chen, Wang ve Tang (2010), genişletilmiş esnek kümeler için bazı işlemler tanımlayarak genişletilmiş esnek küme teorisinde belirli De Morgan yasalarının geçerli

olduğunu kanıtlamıştır. Qin ve Hong (2010), detaylı bir şekilde esnek kümelerin cebirsel yapılarını ele almış ve aynı zamanda esnek kümelerin kafes yapılarını incelemiştir. Çağman ve Enginoğlu (2010), esnek küme işlemleri ve kavramlarını değiştirmiştir. Sezgin ve Atagün (2011a), esnek kümeler üzerinde kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim, kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim ile kısıtlanmış fark gibi temel özelliklerin detaylı bir çalışmasını sunarak, bu işlemlerin birbirleriyle ilişkilerini incelemiştir. Ayrıca esnek kümeler için, kısıtlanmış simetrik fark terimini tanımlayıp literatüre kazandırmıştır. Çağman, Çıtak ve Aktaş (2012), esnek cebirsel sistemlere katkıda bulunan esnek kesişim grupları kavramını geliştirmiş ve bu, çeşitli esnek cebrik sistemlerin incelenmesine yol açmıştır. Ayrıca, bu zamana kadar yapılan tüm çalışmalar incelendiğinde, esnek küme teorideki işlemlerin, kısıtlanmış esnek küme işlemleri ve genişletilmiş esnek küme işlemleri olmak suretiyle iki ana başlıkta ilerlemiş ve buna yönelik çalışmalar literatüre kazandırılmıştır. Buna dair ilk kez Eren (2019) tarafından yeni bir form olan esnek kümelerde ikili parçalı fark işlemi tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Sezgin ve Çalışıcı (2024), klasik kümelerde yer alan fark işleminin özelliklerini esnek ikili parçalı fark işlemi özelinde inceleyip ortaya koymuştur. Çağman (2021), iki yeni tümleyen işlemini literatüre kazandırmış ve bu çalışma, Sezgin, Çağman, Atagün ve Aybek (2023c) tarafından yapılan yeni ikili küme işlemleri çalışması için ilham kaynağı olmuştur. Aybek (2024), bu küme işlemlerini, esnek kümelere uyarlamış ve yeni kısıtlı esnek küme işlemleri ile genişletilmiş esnek küme işlemlerini literatüre kazandırmıştır. Yavuz (2024) ve Eren (2019) çalışmalarındaki işlem biçiminden ilham alınarak, yeni esnek ikili parçalı işlemler tanımlanmış, özellikleri ve ilişkileri açıklanmış ve bu işlemlerin esnek kümeler kümesinde hangi cebirsel yapıları oluşturduğu incelenmiştir. Demirci (2024), Sarılioğlu (2024) ve Akbulut (2024), esnek küme yapılarındaki genişletilmiş işlemlerin şeklini değiştirerek, tümleyen genişletilmiş işlemler üzerinde çalışmalarını devam ettirmiştir. Ayrıca, farklı esnek kümelerdeki ikili parçalı işlemlerin formu biraz değiştirilerek, Sezgin ve Demirci (2023), Sezgin ve Sarılioğlu (2024), Sezgin ve Akbulut (2023), Sezgin ve Yavuz (2023b), Sezgin ve Aybek (2023), Sezgin ve Atagün (2023), Sezgin, Aybek ve Atagün (2023a), Sezgin, Aybek ve Güngör (2023b), Sezgin ve Çağman (2024) tarafından tümleyenli ikili parçalı esnek küme işlemleri de araştırılmıştır.

Esnek kümeler kullanan cebirsel yapılar üzerine araştırmalar da yürütülmektedir. Aktaş ve Çağman (2007), esnek kümeler, bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümelerin ilgili

kavramlarını kıyaslamış, gelecekteki esnek cebirsel yapılarla ilgili araştırmalara yol gösteren bir çalışmanın öncülüğünü yapmış ve esnek grup teorisini literatüre kazandırmıştır. Esnek grup yapısının içinde esnek alt grup, standart esnek alt grup ve esnek grup homomorfizmi gibi cebirsel yapıları tanımlamıştır. Jun (2008), BCK/BCI cebirleri ile esnek alt cebirler kavramını sunmuştur. Jun ve Park (2008), BCK/BCI cebirlerinin cebirsel yapısını esnek küme teorisini kullanarak incelemiştir. Bu çalışmada esnek idealler ve idealistik esnek BCK/BCI cebirleri kavramını tanıtarak, çeşitli örneklerle esnek ideallerin ve idealistik esnek BCK/BCI cebirleri üzerinde çeşitli işlemlerin tanımlanmasına odaklanmıştır. Park, Jun ve Öztürk (2008), esnek WS cebirleri, esnek alt cebirler ve esnek tündengelimli sistem kavramlarını tanıtmış ve bunların temel özelliklerini araştırmıştır. Feng, Jun ve Zhao (2008), esnek yarı halkaları, esnek yarı halkaların idealleri ve idealistik yarı halkaları incelemek için esnek küme teorisini kullanmıştır. Jun, Lee ve Zhan (2009), esnek kümeleri kullanarak, BCI-cebirlerindeki p-ideallerinin karakterizasyonları verip esnek p-idealleri ve p-idealistik esnek BCI cebirleri arasındaki ilişkilerine çalışmıştır. Aygünoğlu ve Aygün (2009), bulanık esnek gruplar isminde bir çalışma yapmıştır. Herawan ve Deris (2010), gripten şüphelenilen hastalara karar vermesinde esnek küme teorisinin uygulanabilirliği üstüne çalışmıştır. Gong, Xiao ve Zhang (2010), bijektif esnek küme terimini tanıtmış ve özelliklerini çalışmıştır. Jun ve Zhan (2010), esnek küme teorisini kullanmış ve bu teoriden hareketle esnek BL-cebirleri üstünde çalışmalar yapmıştır. Kazancı, Yılmaz ve Yamak (2010), esnek BCH-cebiri terimini tanıtmış özelliklerini tartışarak incelemiştir. Esnek BCH-cebirleri ve esnek BCH-alt cebirleri ailesinin ikili kesiminden genişletilmiş kesimine, kısıtlı birleşim ve kartezyen çarpımına kadar çeşitli kavramlar oluşturmuştur. Ek olarak, esnek BCH-homomorfizmi teriminin tanımını yapmış ve temel özelliklerini incelemiştir. Sezgin ve Atagün (2011b), normalistik esnek grup ve normalistik esnek grup homomorfizmi kavramlarını tanıtarak bu kavramların özelliklerini detaylı bir şekilde ele almış ve normalistik esnek grup homomorfizimleri altında korunan yapıları araştırmıştır. Sezgin, Atagün ve Aygün (2011), esnek yakın halkaları ve idealistik esnek yakın-halkaları, Acar, Koyuncu ve Tanay (2010), esnek halkaları, Sezgin, Atagün ve Çağman (2013), esnek N-gruplarını ele almıştır. Bu çalışmada esnek N-altgrupları, esnek N-ideal, N-idealistik esnek N-grupları ve esnek N-grup homomorfizimleri kavramları üzerinde araştırmalar yürütmüştür. Türkmen ve Pancar (2013), esnek kümelerde ikili işlemlerin modül yapısı üzerindeki etkisini ve esnek modüllerin özelliklerini incelemiştir. Aktaş (2014), esnek bijektif grupları; Aktaş ve Özlü

(2014), devirli esnek grupları; Sezer, Çağman, Atagün (2014) ile Sezer, Çağman, Atagün, Ali ve Türkmen (2015), esnek kesişimsel yarıgrupları ve ideallerini incelemiştir. Ullah, Ahmad, Hayat, Karaaslan ve Rashad (2018), esnek kesişimsel AG-grubunu tanımlamıştır. Sezgin ve Orbay (2022), yarıbasit yarıgrupları, ikili yarıgrupları, sağ (sol) sıfır yarıgrupları, sağ (sol) basit yarıgrupları, sol (sağ) basit yarıgrupların yarı-kafeslerini, sol (sağ) grupların yarı-kafeslerini ve grupların yarı-kafeslerini tanımlamış ve sınıflandırmıştır. Buna ek olarak, çeşitli cebirsel yapıların esnek formlarını pek çok araştırmacı (Sezer, 2014a, 2014b; Sezer, Çağman ve Atagün, 2015a; Muştuoğlu, Sezgin ve Türk, 2016; Tunçay ve Sezgin, 2016; Sezer ve Atagün, 2016; Sezgin, Çağman ve Atagün, 2017; Mahmood, Rehman ve Sezgin, 2018; Atagün ve Sezgin, 2018; Sezgin, 2018; Jana, Pal, Karaaslan ve Sezgin, 2019; Özlü ve Sezgin, 2020; Sezgin, Atagün, Çağman ve Demir, 2022) inceleyip, esnek teoriye katkıda bulunmuştur.

Matematiğin önemli bir dalı olan soyut cebir, bir küme üzerinde tanımlanan ikili işlemlerle oluşturulan yapıları inceleyerek, bu cebirsel yapıları sınıflandırmayı hedefler. Cebirsel yapılar, matematik ve özellikle fizik, kimya ve bilgisayar bilimi gibi diğer bilim dallarında önemli bir konuma sahiptir. İdeallerin, cebirsel yapılar ve uygulamaların incelenmesinde de önemli rolü vardır. Bu çalışmaların ilerlemesine katkı sağlamak için ideallerin genelleştirilmesi gereklidir. Cebirsel yapılarda ideallerin genelleştirilmesinde birçok matematikçi araştırma yapmış ve genellemeleriyle katkı sağlamıştır. Bu nedenle cebirsel yapılarla ilgili pek çok çalışma gerçekleştirilmiştir.

Resmi olarak yarıgruplar ilk kez 1900'lerin başında incelenmiştir. Yarıgruplar, zamana bağlı sistemler için temel modeller olduğundan çoğu matematik alanında önemli bir etkiye sahiptir. Yarıgrupların, cebirsel yapılarda önemli bir yeri vardır. Örneğin; grup teorisi, halka teorisi ve ızgara teorisinde yarıgrup yapıları kullanılır. Yarıgrup, pratik matematikte doğrusal zaman-invariant (zamanla değişmeyen) sistemler için temel modellerdir. Sonlu yarıgrup kavramı, sonlu otomatalar ile doğrudan ilişkili olduğundan, bunları incelemek teorik bilgisayar bilimi için çok önemlidir. Bu ilişki, 1950'lere kadar gitmektedir. Ayrıca, olasılık teorisinde yarıgruplar ile Markov süreçleri ve stokastik süreçleri arasında bir ilişki vardır. Yarıgruplar, soyut ve uygulamalı matematikte, dinamik süreçlerin ve zamana bağlı sistemlerin modellenmesinde önemli bir yere sahiptir.

İdeallerin, cebirsel yapılar ve uygulamaların incelenmesinde önemli rölü vardır. Bu çalışmaların ilerlemesine katkı sağlamak için ideallerin genelleştirilmesi gereklidir. Cebirsel yapılarda ideallerin genelleştirilmesinde birçok matematikçi araştırma yapmış ve genellemeleriyle katkı sağlamıştır. Dedekind, cebirsel yapıların incelenmesine yardımcı olmak amacıyla ilk kez idealler kavramını ortaya atmıştır. Bu kavram daha sonra Noether tarafından birleşmeli halkalar için genelleştirilmiştir. Bir cebirsel yapının tek taraflı ideal kavramı, ideallerin genelleştirilmiş bir şeklidir ve iki veya tek taraflı idealler hâlâ halkalar teorisinin önemli kavramları arasındadır. Yarıgruplar için bi-idealler ilk kez Good ve Hughes (1952) tarafından ortaya atılmıştır. Steinfeld (1956), ilk olarak yarıgruplar için quasi-ideal kavramını tanıtarak, bu kavramı sağ ve sol ideallerin genelleştirilmiş bir biçimi olarak tanımlamıştır. Bi-idealler ise quasi-ideal kavramının bir genelleştirilmesi olarak kabul edilir. İç ideal kavramı, Lajos (1976) tarafından ilk kez tanıtılmış olup, daha sonra Szasz (1977, 1981) tarafından incelenmiştir. Herhangi bir cebirsel yapının iç idealleri, ideallerin bir genellemesidir.

Farklı ideal türlerinin genel bir kavramı olan "hemen hemen" ideal kavramı ortaya atılmış ve bu ideal türlerin özellikleri ile ilişkileri detaylı bir biçimde araştırılmıştır. Bu çerçevede, Grošek ve Satko (1980) tarafından yarıgruplarla ilgili "hemen hemen ideal" kavramı ilk defa gündeme getirilmiştir. Buradan hareketle, yarıgruplar üzerinde bi-ideal yapısı Bogdanovic (1981) tarafından "hemen hemen bi-ideal" olarak genelleştirilmiştir. Yarıgruplar üzerinde hemen hemen quasi-ideal kavramı ilk olarak Wattanatripop, Chinram ve Changphas (2018) tarafından ortaya koyulmuştur, bununla birlikte yarıgrupların "hemen hemen iç ideal" ve "zayıf-hemen hemen iç ideal" kavramları Kaopusek, Kaewnoi ve Chinram (2020) tarafından incelenmiştir. Hemen hemen alt yarıgrup kavramı, Iampan, Chinram ve Petchkaew (2021) tarafından tanımlanmıştır.

Son yıllarda yarıgruplar için yeni tip idealler literatüre kazandırılmıştır. Rao (2018a, 2018b), yarıgrupların bi-iç idealleri ve bi-quasi-iç ideallerini incelemiş ve tanımlamıştır. Rao (2020a, 2020b), yarıgrupların bi-quasi idealleri ve quasi-iç ideallerini, yarıgrupların zayıf-iç ideallerini tanımlamıştır. Baupradist, Chemat, Palanivel ve Chinram (2021), yarıgrupların büyük ideallerini tanımlamışlardır. Yarıgrupların tri-quasi idealleri, Rao, Kona, Rafi ve Bolineni (2024) tarafından incelenmiştir. Ayrıca, yarıgrupların tri-idealleri ise Rao (2024a) tarafından ortaya koyulmuştur. Ortaya koyulan bu yeni yapıların bir

genellemesi olan “hemen hemen” terimi araştırılmış ve tanımlanmıştır. Chinram ve Nakkhasen (2022), yarıgrupların hemen hemen bi-quasi-iç ideallerini; Gaketem (2022) ve Chinram ve Nakkhasen (2022), yarıgrupların hemen hemen bi-iç ideallerini; Gaketem ve Chinram (2023), yarıgrupların hemen hemen bi-quasi-ideallerini tanımlamış ve özelliklerini vermiştir.

Esnek küme teorisinde yarıgrupların idealleriyle ilgili çalışmalar da literatüre kazandırılmıştır. Klasik teoride var olan çeşitli idealler “esnek kesişimsel hemen hemen” adıyla esnek küme teorisine genellenerek aktarılmıştır. Sezgin ve Kocakaya (Baskıda), esnek kesişimsel hemen hemen quasi-ideal; Sezgin, Kocakaya ve İlgin (2024a), esnek kesişimsel hemen hemen quasi-iç ideal; Sezgin ve Onur (2024), esnek kesişimsel hemen hemen bi-ideal; Sezgin, Onur ve İlgin (2024b), esnek kesişimsel hemen hemen tri-ideal; Sezgin ve Baş (2024), esnek kesişimsel hemen hemen iç ideal; Sezgin, Baş ve İlgin (2025), esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi-iç ideal; Sezgin ve İlgin (2024a, 2024b, 2024c, 2024d, 2024e) esnek kesişimsel hemen hemen alt yarıgrup, esnek kesişimsel hemen hemen ideal, esnek kesişimsel hemen hemen zayıf-iç ideal, esnek kesişimsel hemen hemen bi-iç ideal, esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi ideal ve Sezgin, İlgin ve Atagün (2024c), esnek kesişimsel hemen hemen tri-bi-ideal yapılarını tanımlamış, özelliklerini ve ilişkilerini ortaya koymuşlardır.

Rao (Baskıda), quasi-iç idealler ve bulanık quasi-iç idealleri yarıhalkalarda tanımlayıp incelemiş ve ilişkilerini ortaya koymuştur. Rao (2018c), ayrıca yarıhalkalarda quasi-iç ideal yapısını incelemiştir. Rao (2019a, 2019b), yarıhalkanın quasi-iç idealleri, Γ -yarıhalkalarda quasi-iç idealler ve bulanık quasi-iç idealler yapılarını tanımlayıp ilişkilerini, özelliklerini ortaya koymuştur. Rao (2020b, 2020c), yarıgrupların quasi-iç ideal ve zayıf-iç ideal kavramlarını, yarıgrupların quasi-iç idealler ve bulanık quasi-iç ideal yapılarını tanımlamıştır. Rao (2021), Γ -yarıhalkalarda bulanık esnek quasi-iç idealleri inceleyip özelliklerini ortaya koymuştur. Saeid, Rao, Kona ve Rafi (2022), yarıhalkaların bulanık (esnek) quasi-iç idealleri kavramını tanıtmış ve regüler yarı halkaları, yarı halkaların bulanık (esnek) quasi-iç idealleri açısından karakterize etmiştir. Rao (2023), quasi-iç idealler ve onların özelliklerini Γ -yarıhalkalarda tanımlayıp örneklendirmiş ve teorem, ispat olarak ortaya koymuştur. Srikanth ve Shobhalatha (2024), üçlü yarı halkaların quasi-iç ideallerini ve bulanık esnek quasi-iç ideallerini araştırıp özelliklerini ortaya koymuştur.

Rao (2024b), Γ -yarıgrupların quasi-iç ideallerini ve bulanık quasi-iç ideallerini tanımlayarak literatüre kazandırmıştır. Böylece, klasik ve bulanık cebirde, quasi-iç ideal yapısı ve bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında ise yarıgruplar üzerinde, quasi-ideal ve iç idealin bir genellemesi olan quasi-iç ideal yapısı esnek küme teorisine aktararak, bir yarı grubun esnek kesişimsel quasi-iç ideal kavramı tanıtılarak detaylı bir şekilde incelenmiş, özellikleri ve diğer esnek kesişimsel ideallerle ilişkileri verilmiştir. Bir yarı grubun her esnek kesişimsel iç idealinin bir esnek kesişimsel quasi-iç ideal, her esnek kesişimsel idealin bir esnek kesişimsel quasi-iç ideal, bir grubun esnek kesişimsel quasi-iç idealinin bir esnek kesişimsel bi-ideal, bir regüler grubun esnek kesişimsel quasi-iç idealinin bir esnek kesişimsel quasi-ideal, idempotent bir esnek kesişimsel quasi-iç idealin bir esnek kesişimsel bi-quasi-ideal ve bir esnek kesişimsel bi-iç ideal olduğu gösterilmiş ve bunların karşıtlarının her zaman geçerli olmadığı aksine örnekler ile verilmiştir. Ayrıca, karşıtlarının geçerli olmasının ek şartlara bağlı olduğu ispatlanarak verilmiştir. Bir grubun esnek kesişimsel iç idealinin bir esnek kesişimsel quasi-iç ideal, idempotent bir esnek kümenin her esnek kesişimsel quasi-iç idealinin bir esnek kesişimsel ideal, bir regüler yarı grubun esnek kesişimsel idealinin bir esnek kesişimsel quasi-iç ideal, bir grubun esnek kesişimsel bi-idealinin bir esnek kesişimsel quasi-iç ideal, idempotent bir esnek kümenin her esnek kesişimsel quasi-iç idealinin bir esnek kesişimsel bi-ideal, bir regüler grubun esnek kesişimsel quasi-idealinin bir esnek kesişimsel quasi-iç ideal olduğu elde edilmiştir. Esnek kesişimsel quasi-iç idealin esnek küme işlemleri, esnek görüntü, ters görüntü gibi karakterizasyonlarına da yer verilmiştir. Ayrıca, regüler bir yarı grup ile esnek kesişimsel quasi-iç ideal yapısı arasındaki ilişki de ispatlanarak verilmiştir. Üstelik, yarı grupların esnek kesişimsel (zayıf) hemen hemen quasi-ideal ve yarı grupların esnek kesişimsel (zayıf) hemen hemen quasi-iç ideal yapıları da tanımlanmış, özelliklerine ve diğer esnek kesişimsel hemen hemen idealler ile ilişkilerine de yer verilmiştir.

Tezin ilk bölümünde, esnek kümeler, esnek küme işlemleri, yarı gruplar ve yarı grupların çeşitli (hemen hemen) idealleri ve yarı grupların esnek kesişimsel (hemen hemen) idealleri ile ilgili kapsamlı bir literatür taraması yapılmış; ikinci bölümünde tezde kullanılacak olan tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, bir yarı grubun esnek kesişimsel quasi-iç ideali; dördüncü bölümde esnek kesişimsel hemen hemen quasi-ideali;

beşinci bölümde esnek kesişimsel hemen hemen quasi-iç ideal yapısı detaylı olarak verilmiş, özellikleri incelenmiş, bu yapıların bir yarıgrubun diğer esnek kesişimsel (hemen hemen) idealler ile ilişkileri elde edilmiştir. Altıncı bölümde ise, bu çalışmadan elde edilen sonuçlara ve bu sonuçlardan hareketle gelecek çalışmalara yönelik önerilere yer verilmiştir.



2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez boyunca kullanılan yarıgruplar ve esnek kümeler ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Yarıgruplar ve Yarıgrup Çeşitleri

Bu alt bölümde, yarıgrup tanımı ve yarıgrupların bazı çeşitlerine yer verilmiştir. Clifford ve Preston (1961: 58-62, 1967: 79-83), Petrich (1973: 59-70, 1977: 202-211, 1985), Howie (1995: 103-109), Grillet (1995: 101-108, 2013: 65-77), Nagy (2013: 43-77) kaynaklarından yarıgruplar hakkında detaylı bilgilere ulaşılabilir.

2.1.1. Tanım R boş olmayan bir küme olmak üzere

$$\sigma: R \times R \rightarrow R$$

fonksiyonuna, R kümesi üzerinde bir (ikili) işlem denir (Aydın ve Kandamar, 2013:71).

Bir fonksiyon olan “ σ ” ikili işlemi, her $e, n \in R$ için $e \sigma n \in R$ ve her $e, n, a, \varsigma \in R$ için $(e, n) = (a, \varsigma)$ olduğunda $e \sigma n = a \sigma \varsigma$ şartlarının sağlandığı açıkça görülmektedir. İlk koşul, R kümesinin “ σ ” işlemi altında kapalı olduğunu; ikinci koşul ise “ σ ” işleminin R üzerinde iyi tanımlandığını ifade eder (Aydın ve Kandamar, 2013:71).

Herhangi bir kümede tanımlanmış işlem/işlemler, o küme ile birlikte cebirsel bir yapı (matematiksel sistem) oluşturur (Hacısalıoğlu, 2007:181). Grup, halka ve cisim matematikteki üç temel cebirsel yapıdan olup, grup tek işlemli bir cebirsel yapı, halka ve cisim ise iki işlemli cebirsel yapılardır.

2.1.2. Tanım $\mathcal{H}$ bir küme olmak üzere,

$$\omega: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

$$(\alpha, \mathfrak{r}) \rightarrow \omega(\alpha, \mathfrak{r})$$

dönüşümü tanımlansın. “ $\odot$ ”, $\mathcal{H}$ kümesi üzerinde bir (ikili) işlem olup, her $\alpha, \mathfrak{u}, \mathfrak{r} \in \mathcal{H}$ için, $\alpha \odot (\mathfrak{u} \odot \mathfrak{r}) = (\alpha \odot \mathfrak{u}) \odot \mathfrak{r}$ şartını sağlıyor ise $(\mathcal{H}, \odot)$ cebirsel yapısına bir yarıgrup denir.

Bu çalışma boyunca, aksi belirtilmediği sürece, $\alpha \odot \mathfrak{u}$ yerine $\alpha \mathfrak{u}$ yazılıp, $(\mathcal{H}, \odot)$ yerine de $\mathcal{H}$ kullanılacaktır.

2.1.3. *Örnek* $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere $(\mathbb{N}, \odot)$ işlemi, $\alpha \odot \mathfrak{u} = \max\{\alpha, \mathfrak{u}\}$ şeklinde tanımlansın.

$$\alpha \odot (\mathfrak{u} \odot \mathfrak{r}) = \max\{\alpha, \max\{\mathfrak{u}, \mathfrak{r}\}\} = \max\{\alpha, \mathfrak{u}, \mathfrak{r}\} = \max\{\{\alpha, \mathfrak{u}\}, \mathfrak{r}\} = (\alpha \odot \mathfrak{u}) \odot \mathfrak{r}$$

olduğundan, $(\mathbb{N}, \odot)$ cebirsel yapısı, “ $\odot$ ” işlemi altında bir yarıgruptur.

2.1.4. Tanım Bir S yarıgrubu,

- i. Her $\mathfrak{m}, \rho \in S$ için, $\mathfrak{m}\rho = \rho\mathfrak{m}$ ise değişmeli yarıgrup,
- ii. Her $\eta \in S$ için, $\eta^2 = \eta$ ise band (idempotent yarıgrup),
- iii. Her $\mathfrak{r} \in S$ için, $\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{r}$ ve her $\mathfrak{h}, \mathfrak{c} \in S$ için, $\mathfrak{h}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\mathfrak{h}$ ise yarıkafes (değişmeli band),
- iv. Birim elemana sahip bir yarıkafes ise sınırlı yarıkafes,
- v. Bir band olmak üzere, her $\mathfrak{a}, \mathfrak{x} \in S$ için, $\mathfrak{a}\mathfrak{x}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ veya buna eşdeğer olarak her $\mathfrak{h}, \mathfrak{z}, \mathfrak{y} \in S$ için, $\mathfrak{h}\mathfrak{z}\mathfrak{y} = \mathfrak{h}\mathfrak{y}$ ise dikdörtgensel band,
- vi. Her $\mathfrak{j}, \mathfrak{b} \in S$ için, $\mathfrak{j}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{j}$ ve $\mathfrak{j}^c = \mathfrak{m}\mathfrak{b}$ olacak şekilde en az $\mathfrak{c}, \mathfrak{m} \in S$ var ise arşimedyen değişmeli yarıgrup,
- vii. Her $\mathfrak{u}, \mathfrak{p} \in S$ için, $\mathfrak{u}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\mathfrak{u}$ olması $\mathfrak{u} = \mathfrak{p}$ olmasını gerektiriyor ise hiçbir yerde değişmeli olmayan yarıgrup,
- viii. Her $\mathfrak{x}, \mathfrak{k} \in S$ için, $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^{\mathfrak{v}} = \mathfrak{y}\mathfrak{k}$ olacak şekilde bir $\mathfrak{y} \in S$ ve pozitif bir $\mathfrak{v}$ tamsayısı var ise sol zayıf değişmeli yarıgrup,
- ix. Her $\mathfrak{a}, \mathfrak{r} \in S$ için, $(\mathfrak{a}\mathfrak{r})^{\mathfrak{u}} = \mathfrak{c}\mathfrak{a}$ olacak şekilde bir $\mathfrak{c} \in S$ ve pozitif bir $\mathfrak{u}$ tamsayısı var ise sağ zayıf değişmeli yarıgrup,

- x. Hem sol zayıf değişmeli yarıgrup hem de sağ zayıf değişmeli yarıgrup ise yani her $z, h \in S$ için, $(zh)^\xi = az = hu$ olacak şekilde $u, a \in S$ ve pozitif bir ξ tamsayısı var ise zayıf değişmeli yarıgrup,
- xi. Her $t, y \in S$ için, $ty = yt$ olması en az bir $s \in S$ için, $t sy = yst$ olmasını gerektiriyor ise koşullu değişmeli yarıgrup,
- xii. Her $y, x \in S$ için, $yx = (xy)^k$ olacak şekilde pozitif bir k tam sayısı var ise quasi değişmeli yarıgrup,
- xiii. Her $a, r, h \in S$ için, $arh = ahr$ ise sağ değişmeli yarıgrup,
- xiv. Her $z, b, a \in S$ için, $zba = bza$ ise sol değişmeli yarıgrup,
- xv. Her $u, \hat{w}, \phi \in S$ için, $u\hat{w}\phi = \phi\hat{w}u$ ise dışsal değişmeli yarıgrup,
- xvi. Her $\nu, \nu, z, s \in S$ için, $z\nu\nu s = z\nu\nu s$ ise orta yarıgrup,
- xvii. Her $c, \bar{e}, a \in S$ için, $c\bar{e} = a\bar{e}$ olması $c = a$ olmasını gerektiriyor ise sağ sadeleştirici yarıgrup,
- xviii. Her $r, z, k \in S$ için, $zr = zk$ olması $r = k$ olmasını gerektiriyor ise sol sadeleştirici yarıgrup,
- xix. Hem sol sadeleştirici yarıgrup hem de sağ sadeleştirici yarıgrup ise sadeleştirici yarıgrup,
- xx. Her $\nu \in S$ için, $\nu = \nu x \nu$ olacak şekilde bir $x \in S$ var ise regüler yarıgrup,
- xxi. Her $\nu \in S$ için, $\nu = k\nu^2b$ olacak şekilde $k, b \in S$ var ise iç-regüler yarıgrup,
- xxii. Her $r \in S$ için, $r = hr^2$ olacak şekilde $h \in S$ var ise sol regüler yarıgrup,
- xxiii. Her $y \in S$ için, $y = y^2\nu$ olacak şekilde $\nu \in S$ var ise sağ regüler yarıgrup,
- xxiv. Bir band olmak üzere, her $c, u \in S$ için, $cuc = cu$ ise sol-regüler band,
- xxv. Bir band olmak üzere, her $c, b \in S$ için, $cbc = bc$ ise sağ-regüler band,

- xxvi. Her $z \in S$ için, $z = zbz$ ve $zb = bz$ olacak şekilde bir $b \in S$ var ise tamamen regüler yarıgrup,
- xxvii. Her $b \in S$ için, $b^r = b^r x b^r$ olacak şekilde bir $x \in S$ ve pozitif bir r tamsayısı var ise k -regüler yarıgrup,
- xxviii. $0 \in S$ yani yutan elemana sahip olmak üzere, $j \neq 0$ ve $y = jy = yj$ olması $j = y$ olmasını gerektiriyor ise ilkel yarıgrup,
- xxix. Her $z \in S$ için, $zbz = z$ ve $bzb = b$ olacak şekilde z 'nin tek bir b tersi var ise ters yarıgrup,
- xxx. $0 \in S$ yani yutan elemana sahip olmak üzere, her $n, \xi \in S$ için, $n\xi = 0$ ise boş (sıfır) yarıgrup,
- xxxi. Her $k, c \in S$ için, $k c = k$ ise sol sıfır yarıgrup,
- xxxii. Her $p, r \in S$ için, $p r = r$ ise sağ sıfır yarıgrup,
- xxxiii. Her $\eta, a \in S$ için, $\eta a = \eta^2 = a^2$ olması $\eta = a$ olmasını gerektiriyor ise ayırıcı yarıgrup,
- xxxiv. Kendisi dışında hiçbir sol idealini içermiyor ise sol basit yarıgrup,
- xxxv. Kendisi dışında hiçbir sağ idealini içermiyor ise sağ basit yarıgrup

olarak adlandırılır.

2.1.5. Teorem S yarıgrubu için aşağıdaki durumlar geçerlidir:

- (1) S 'nin bir sol (sağ) basit yarıgrup olması için gerek ve yeter şart her $u \in S$ için, $Su = S$ ($uS = S$) olması yani, her $u, b \in S$ için, $b = xu$ ($b = ux$) olacak şekilde $x \in S$ olmasıdır.
- (2) S 'nin basit yarıgrup olması için gerek ve yeter şart her $u \in S$ için, $SuS = S$ olması yani, her $u, b \in S$ için, $b = xuy$ olacak şekilde $x, y \in S$ olmasıdır.

2.1.6. Teorem S yarıgrubu için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (1) S bir gruptur.
- (2) S hem bir sol basit yarıgrup hem de bir sağ basit yarıgruptur (Huntington, 1902).

2.2. Yarıgrupların İdealleri ve Hemen Hemen İdealleri

Bu alt bölümde, yarıgrupların idealleri ve hemen hemen idealleri ile ilgili tanımlar verilmiştir.

2.2.1. Tanım S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi C ,

- i. $CC \subseteq C$ ise S yarıgrubunun bir alt yarıgrubu,
- ii. $SC \subseteq C$ ($CS \subseteq C$) ise S yarıgrubunun bir sol (sağ) ideali; S yarıgrubunun hem bir sol ideali hem de bir sağ ideali ise S yarıgrubunun bir iki taraflı ideali (ideali),
- iii. Bir alt yarıgrup ve $CSC \subseteq C$ ise S yarıgrubunun bir bi-ideali (Good ve Hughes, 1952),
- iv. $SCS \subseteq C$ ise S yarıgrubunun bir iç ideali (Lajos, 1976),
- v. $SC \cap CS \subseteq C$ ise S yarıgrubunun bir quasi-ideali (Steinfeld, 1956),
- vi. $SCC \subseteq C$ ($CCS \subseteq C$) ise S yarıgrubunun bir sol (sağ) zayıf-iç ideali; S yarıgrubunun hem bir sol zayıf-iç ideali hem de bir sağ zayıf-iç ideali ise S yarıgrubunun bir zayıf-iç ideali (Rao, 2020b),
- vii. $SCS \cap CSC \subseteq C$ ise S yarıgrubunun bir bi-iç ideali (Rao, 2018a),
- viii. $SC \cap CSC \subseteq C$ ($CS \cap CSC \subseteq C$) ise S yarıgrubunun bir sol (sağ) bi-quasi ideali; S yarıgrubunun hem bir sol bi-quasi ideali hem de bir sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir bi-quasi ideali (Rao, 2020a),

- ix. $SCSC \subseteq C$ ($CSCS \subseteq C$) ise S yarıgrubunun bir sol (sağ) quasi-iç ideali; S yarıgrubunun hem bir sol quasi-iç ideali hem de bir sağ quasi-iç ideali ise S yarıgrubunun bir quasi-iç ideali (Rao, 2020b),
- x. $CSCSC \subseteq C$ ise S yarıgrubunun bir bi-quasi-iç ideali (Rao, 2018b),
- xi. $CSCC \subseteq C$ ($CCSC \subseteq C$) ise S yarıgrubunun bir sol (sağ) tri-ideali; S yarıgrubunun hem bir sol tri-ideali hem de bir sağ tri-ideali ise S yarıgrubunun bir tri-ideali (Rao, 2024a),
- xii. $CCSCC \subseteq C$ ise S yarıgrubunun bir tri-quasi-ideali (Rao ve diğerleri, 2024)

olarak adlandırılır.

2.2.2. Tanım S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi P ,

- i. $PP \cap P \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen alt yarıgrubu (Iampan ve diğerleri, 2021),
- ii. Her $m \in S$ için, $mP \cap P \neq \emptyset$ ($Pm \cap P \neq \emptyset$) ise S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) ideali; S yarıgrubunun hem bir hemen hemen sol ideali hem de bir hemen hemen sağ ideali ise S yarıgrubunun bir hemen hemen iki taraflı ideali (hemen hemen ideali) (Grosek ve Satko, 1980),
- iii. Her $m \in S$ için, $PmP \cap P \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-ideali (Bogdanovic, 1981),
- iv. Her $m, n \in S$ için, $mPn \cap P \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen iç ideali; her $m \in S$ için $mPm \cap P \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir zayıf hemen hemen iç ideali (Kaopusek ve diğerleri, 2020),
- v. Her $m \in S$ için, $mP \cap Pm \subseteq P$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-ideali (Wattanatripop ve diğerleri, 2018),

- vi. Her $m, n, u \in S$ için, $(mPn \cap PuP) \cap P \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-iç ideali; her $m \in S$ için, $(mPm \cap PmP) \cap P \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir zayıf hemen hemen bi-iç ideali (Gaketem, 2022)
- vii. Her $m, n \in S$ için, $(mP \cap PnP) \cap P \neq \emptyset$ $((Pm \cap PnP) \cap P \neq \emptyset)$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideali; S yarıgrubunun hem bir hemen hemen sol bi-quasi ideali hem de bir hemen hemen sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi ideali (Gaketem ve Chinram, 2023),
- viii. Her $m, n \in S$ için, $mPnP \cap P \neq \emptyset$ $(PmPn \cap P \neq \emptyset)$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideali; S yarıgrubunun hem bir hemen hemen sol quasi-iç ideali hem de bir hemen hemen sağ quasi-iç ideali ise S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-iç ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024a)
- ix. Her $m, n \in S$ için, $PmPnP \cap P \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen bi-quasi-iç ideali; Her $m \in S$ için $PmPmP \cap P \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir zayıf hemen hemen bi-quasi-iç ideali (Chinram ve Nakkhasen, 2021)
- x. Her $m \in S$ için, $PmPP \cap P \neq \emptyset$ $(PPmP \cap P \neq \emptyset)$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) tri-ideali; S yarıgrubunun hem bir hemen hemen sol tri-ideali hem de bir hemen hemen sağ tri-ideali ise S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024b)
- xi. Her $m \in S$ için, $PPmPP \cap P \neq \emptyset$ ise S yarıgrubunun bir hemen hemen tri-bi-ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024c)

olarak adlandırılır.

2.3. Esnek Kümeler ve Temel Kavramları

Bu alt bölümde, esnek küme teorisiyle ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

2.3.1. Tanım U başlangıç evrensel kümesi, E parametreler kümesi; $P(U)$, U 'nun kuvvet kümesi ve $\beta \subseteq E$ olsun. Her $u \notin \beta$ için $f_\beta(u) = \emptyset$ olacak şekilde $f_\beta: E \rightarrow P(U)$ fonksiyonuna, U üzerinde bir esnek küme denir. O halde bir f_β esnek kümesi,

$$f_B = \{(u, f_B(u)) : u \in E, f_B(u) \in P(U)\}$$

biçimindeki sıralı ikililerin kümesidir. (Çağman ve Enginoğlu, 2010)

Bu tez çalışması boyunca, U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi $S_E(U)$ ile gösterilecektir.

2.3.2. Tanım $f_B \in S_E(U)$ olsun. Eğer her $\xi \in E$ için, $f_B(\xi) = \emptyset$ ise f_B 'ye boş esnek küme denir ve $\emptyset_E$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.3. Tanım $f_B \in S_E(U)$ olsun. Eğer her $\xi \in E$ için, $f_B(\xi) = U$ ise f_B 'ye evrensel esnek küme denir ve U_E ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.4. Tanım S bir yarıgrup olmak üzere her $\xi \in S$ için, $f_B(\xi) = U$ ise f_B 'ye S 'ye göre bir tam esnek küme denir ve $\tilde{S}$ ile gösterilir.

2.3.5. Tanım Her $\xi \in E$ için, $f_C(\xi) = f_D(\xi)$ ise f_C ve f_D esnek kümelerine esnek eşit kümeler denir ve $f_C = f_D$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.6. Tanım $f_C, f_D \in S_E(U)$ olsun. Her $a \in S$ için, $f_C(a) \subseteq f_D(a)$ ise f_C esnek kümesine f_D 'nin esnek alt kümesi denir ve $f_C \subseteq f_D$ şeklinde gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.7. Tanım $f_C, f_D \in S_E(U)$ olsun. f_C ve f_D esnek kümelerinin esnek birleşimi $f_C \tilde{\cup} f_D$, her $d \in E$ için,

$$(f_C \tilde{\cup} f_D)(d) = f_C(d) \cup f_D(d)$$

şeklinde tanımlanır (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.8. Tanım $f_C, f_D \in S_E(U)$ olsun. f_C ve f_D esnek kümelerinin esnek kesişimi $f_C \tilde{\cap} f_D$, her $x \in E$ için,

$$(f_C \tilde{\cap} f_D)(x) = f_C(x) \cap f_D(x)$$

şeklinde tanımlanır (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.3.9. Tanım $\mathfrak{f}_{\mathcal{C}}, \mathfrak{f}_{\mathcal{D}} \in S_E(U)$ olsun. $\mathfrak{f}_{\mathcal{C}}$ ve $\mathfrak{f}_{\mathcal{D}}$ esnek kümelerinin esnek $\wedge$ – çarpımı $\mathfrak{f}_{\mathcal{C}} \wedge \mathfrak{f}_{\mathcal{D}}$, her $(x, y) \in E \times E$ için,

$$(\mathfrak{f}_{\mathcal{C}} \wedge \mathfrak{f}_{\mathcal{D}})(x, y) = \mathfrak{f}_{\mathcal{C}}(x) \cap \mathfrak{f}_{\mathcal{D}}(y)$$

şeklinde tanımlanır (Maji ve diğerleri, 2003).

2.3.10. Tanım $\mathfrak{f}_{\mathcal{C}}, \mathfrak{f}_{\mathcal{D}} \in S_E(U)$ olsun. $\mathfrak{f}_{\mathcal{C}}$ ve $\mathfrak{f}_{\mathcal{D}}$ esnek kümelerinin esnek $\vee$ – çarpımı $\mathfrak{f}_{\mathcal{C}} \vee \mathfrak{f}_{\mathcal{D}}$, her $(x, y) \in E \times E$ için,

$$(\mathfrak{f}_{\mathcal{C}} \vee \mathfrak{f}_{\mathcal{D}})(x, y) = \mathfrak{f}_{\mathcal{C}}(x) \cup \mathfrak{f}_{\mathcal{D}}(y)$$

şeklinde tanımlanır (Maji ve diğerleri, 2003).

2.3.11. Tanım $\mathfrak{f}_{\mathcal{C}}, y_{\mathcal{D}} \in S_E(U)$ olsun. $\mathfrak{f}_{\mathcal{C}}$ ve $y_{\mathcal{D}}$ ’nin kartezyen çarpımı, $\mathfrak{h}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow P(U \times U)$ ve her $(x, z) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{h}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}(x, z) = \mathfrak{f}_{\mathcal{C}}(x) \times y_{\mathcal{D}}(z)$ olmak üzere,

$$\mathfrak{f}_{\mathcal{C}} \times y_{\mathcal{D}} = \mathfrak{h}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}$$

ile tanımlanır (Babitha ve Sunil, 2010).

2.3.12. Tanım $\mathfrak{f}_{\mathcal{C}}, \mathfrak{f}_{\mathcal{D}} \in S_E(U)$ ve $\varphi, \mathcal{C}$ ’den $\mathcal{D}$ ’ye bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\mathfrak{f}_{\mathcal{C}}$ ’nin φ altındaki esnek görüntüsü $\varphi(\mathfrak{f}_{\mathcal{C}})$, her $z \in \mathcal{D}$ için,

$$(\varphi(\mathfrak{f}_{\mathcal{C}}))(z) = \begin{cases} \bigcup \{\mathfrak{f}_{\mathcal{C}}(b) | b \in \mathcal{C} \text{ ve } \varphi(b) = z\}, & z \in \varphi(\mathcal{C}) \text{ ise} \\ \emptyset, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathfrak{f}_{\mathcal{D}}$ ’nin φ altındaki esnek ön görüntüsü (esnek ters görüntüsü) $\varphi^{-1}(\mathfrak{f}_{\mathcal{D}})$, her $b \in \mathcal{C}$ için,

$$(\varphi^{-1}(f_D))(b) = f_D(\varphi(b))$$

şeklinde tanımlanır (Çağman ve diğerleri, 2012).

2.3.11. Tanım $f_\beta \in S_E(U)$ ve $N \subseteq U$ olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{U}(f_\beta; N) = \{x \in \beta \mid f_\beta(x) \supseteq N\}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{U}(f_\beta; N)$ kümesine, f_β 'nin üst N -kapsama kümesi denir (Sezgin, Çağman ve Çıtak, 2019).

2.3.12. Tanım $f_\beta \in S_E(U)$ olsun. Bu durumda,

$$\text{supp}(f_\beta) = \{d \in \beta : f_\beta(d) \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanan $\text{supp}(f_\beta)$ kümesine f_β 'nin destek kümesi denir (Feng ve diğerleri, 2008).

Destek kümesi boş küme olan bir esnek kümenin boş esnek küme olduğu açıktır; aksi durumda, esnek küme boş esnek küme değildir.

2.3.13. Not $f_\beta, y_\beta \in S_E(U)$ olsun. Bu durumda, $f_\beta \cong y_\beta$ ise $\text{supp}(f_\beta) \cong \text{supp}(y_\beta)$ (Sezgin ve İlgin, 2024a).

2.3.14. Tanım β bir yarıgrup ve $f_\beta, y_\beta \in S_E(U)$ olsun. Her $\varphi \in \beta$ için,

$$(f_\beta \circ y_\beta)(d) = \begin{cases} \bigcup_{d=xz} \{f_\beta(x) \cap y_\beta(z)\}, & \text{eğer } d = xz \text{ olacak şekilde } \exists x, z \in \beta \text{ varsa} \\ \emptyset, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $(f_\beta \circ y_\beta)$ işlemine f_β ve y_β 'nin esnek kesişimsel çarpımı denir (Sezgin ve diğerleri, 2015b).

2.3.15. *Örnek* $S = \{\alpha, \gamma\}$ kümesi üzerinde, Tablo 2.1 yardımıyla tanımlanan “*” ikili işlemi ile $(S, *)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

*	α	γ
α	α	γ
γ	γ	α

Tablo 2.1. Örnek 2.3.14’teki “*” ikili işlemi

$U = \mathbb{Z}$ evrensel kümesi üzerinde β_S ve γ_S esnek kümesi,

$$\beta_S = \{(\alpha, \{-28, 5, 43\}), (\gamma, \{-27, 0, 26\})\}$$

$$\gamma_S = \{(\alpha, \{-29, -28, -27\}), (\gamma, \{26, 6, 16\})\}$$

şeklinde tanımlansın.

$\alpha = \alpha\alpha = \gamma\gamma$ ve $\gamma = \alpha\gamma = \gamma\alpha$ olduğundan,

$$(\beta_S \circ \gamma_S)(\alpha) = \{\beta_S(\alpha) \cap \gamma_S(\alpha)\} \cup \{\beta_S(\gamma) \cap \gamma_S(\gamma)\} = \{-28\} \cup \{26\} = \{-28, 26\}$$

$$(\beta_S \circ \gamma_S)(\gamma) = \{\beta_S(\alpha) \cap \gamma_S(\gamma)\} \cup \{\beta_S(\gamma) \cap \gamma_S(\alpha)\} = \emptyset \cup \{-27\} = \{-27\}$$

elde edilir.

2.3.16. Teorem $f_S, g_S, h_S \in S_S(U)$ olsun. O halde,

$$i) (f_S \circ g_S) \circ \rho_S = f_S \circ (g_S \circ \rho_S)$$

$$ii) \text{ Genellikle, } f_S \circ g_S \neq g_S \circ f_S$$

$$iii) f_S \circ (g_S \tilde{\cup} \rho_S) = (f_S \circ g_S) \tilde{\cup} (f_S \circ \rho_S) \text{ ve } (f_S \tilde{\cup} g_S) \circ \rho_S = (f_S \circ \rho_S) \tilde{\cup} (g_S \circ \rho_S)$$

- iv) $f_S \circ (y_S \tilde{\cap} \rho_S) = (f_S \circ y_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \rho_S)$ ve $(f_S \tilde{\cap} y_S) \circ \rho_S = (f_S \circ \rho_S) \tilde{\cap} (y_S \circ \rho_S)$
- v) $f_S \tilde{\subseteq} y_S$ ise $f_S \circ \rho_S \tilde{\subseteq} y_S \circ \rho_S$ ve $\rho_S \circ f_S \tilde{\subseteq} \rho_S \circ y_S$
- vi) $n_S \tilde{\subseteq} f_S$ ve $h_S \tilde{\subseteq} y_S$ olacak şekilde $n_S, h_S \in S_S(U)$ ise $n_S \circ h_S \tilde{\subseteq} f_S \circ y_S$ (Sezer ve diğ erleri, 2015b).

2.3.17. Tanım $\beta \subseteq S$ olsun. Bu durumda,

$$S_\beta(z) = \begin{cases} U, & z \in \beta \text{ ise} \\ \emptyset, & z \in S \setminus \beta \text{ ise} \end{cases}$$

 eklinde tanımlanan S_β esnek kümesine, β 'nin esnek karakteristik fonksiyonu denir.

S_β 'nin, U üzerinde bir esnek küme olduğu açıktır, yani, $S_\beta: S \rightarrow P(U)$ (Sezer ve diğ erleri, 2015b).

S bir yarıgrup olmak üzere, her $z \in S$ için, $g_S(z) = U$ ise g_S esnek kümesinin $\tilde{S}$ ile gösterildiği, yani her $z \in S$ için, $\tilde{S}(z) = U$ olduğu bilinmektedir. O halde, $\tilde{S}$ esnek kümesinin, S 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olan S_S esnek kümesine denk olduğu, yani $\tilde{S} = S_S$ olduğu açıktır.

2.3.18. Sonuç S_β , β 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, $\text{supp}(S_\beta) = \beta$ (Sezgin ve İlgin, 2024a).

2.3.19. Teorem $\beta, R \subseteq S$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i) $\beta \subseteq R$ olması için gerek ve yeter  art $S_\beta \tilde{\subseteq} S_R$ olmasıdır
- ii) $S_\beta \tilde{\cap} S_R = S_{\beta \cap R}$ ve $S_\beta \tilde{\cup} S_R = S_{\beta \cup R}$
- iii) $S_\beta \circ S_R = S_{\beta R}$ (Sezer ve diğ erleri, 2015b; Sezgin ve İlgin, 2024a).

2.3.20. Tanım $c, h \in S$ olsun. Bu durumda,

$$S_c(h) = \begin{cases} U, & h = c \text{ ise} \\ \emptyset, & h \neq c \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan S_c esnek kümesine, c 'nin esnek karakteristik fonksiyonu denir. S_c 'nin, U üzerinde bir esnek küme olduğu açıktır, yani, $S_c: S \rightarrow P(U)$ (Sezgin ve İlgin, 2024b).

2.3.21. Teorem g_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i) $\tilde{S} \circ \tilde{S} \subseteq \tilde{S}$
- ii) $\tilde{S} \circ g_S \subseteq \tilde{S}$ ve $g_S \circ \tilde{S} \subseteq \tilde{S}$
- iii) $g_S \tilde{U} \tilde{S} = \tilde{S}$ ve $g_S \tilde{N} \tilde{S} = g_S$ (Sezer ve diğerleri, 2015b).

Teorem 2.3.21 (Sezer ve diğerleri, 2015b), “ g_S , U üzerinde bir esnek kesişimsel alt yarıgrup olsun” kabulüyle verilmiştir. Ancak bu çalışmada, “ g_S , U üzerinde bir esnek küme olsun” kullanımı tercih edilmiştir.

2.4. Yarıgrupların Esnek Kesişimsel İdealleri ve Esnek Kesişimsel Hemen Hemen İdealleri

Bu alt bölümde yarıgrupların esnek kesişimsel (hemen hemen) idealleri ile ilgili bilgilere yer verilmiştir.

2.4.1. Tanım U üzerinde bir l_S esnek kümesi,

- (i) Her $e, c \in S$ için, $l_S(ec) \supseteq l_S(e) \cap l_S(c)$ ise S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel alt yarı grubu (Sezer ve diğerleri, 2015b),
- (ii) Her $m, s \in S$ için, $l_S(ms) \supseteq l_S(s)$ ($l_S(ms) \supseteq l_S(m)$) ise S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ, iki taraflı) ideali; hem esnek kesişimsel sol ideali hem de esnek kesişimsel sağ ideali ise S yarı grubunun bir esnek kesişimsel ideali (Sezer ve diğerleri, 2015b),

- (iii) l_S , bir esnek kesişimsel alt yarıgrup olmak üzere, her $\delta, \rho, \ddot{u} \in S$ için, $l_S(\delta \rho \ddot{u}) \supseteq l_S(\delta) \cap l_S(\ddot{u})$ ise S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel bi-ideali (Sezer ve diğerleri, 2015b),
- (iv) Her $j, \varsigma, s \in S$ için, $l_S(j s \varsigma) \supseteq l_S(s)$ ise S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel iç ideali (Sezer ve diğerleri, 2014),
- (v) $(l_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ l_S) \subseteq l_S$ ise S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel quasi ideali (Sezer ve diğerleri, 2014),
- (vi) Her $\circ, \tilde{\omega}, z \in S$ için, $l_S(\circ \tilde{\omega} z) \supseteq l_S(\circ) \cap l_S(z)$ ise S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel genelleştirilmiş bi-ideali (Sezer ve diğerleri, 2014),
- (vii) Her $\ell, \varsigma, q \in S$ için, $l_S(\ell \varsigma q) \supseteq l_S(\varsigma) \cap l_S(q)$ ($l_S(\ell \varsigma q) \supseteq l_S(\ell) \cap l_S(\varsigma)$) ise S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ) zayıf-iç ideali; hem esnek kesişimsel sol zayıf-iç ideali hem de esnek kesişimsel sağ zayıf-iç ideali ise S yarı grubunun bir esnek kesişimsel zayıf-iç ideali (İlgin, 2025),
- (viii) $(\tilde{S} \circ l_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (l_S \circ \tilde{S} \circ l_S) \subseteq l_S$ ise S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel bi-iç ideali (İlgin, 2025),
- (ix) $(\tilde{S} \circ l_S) \tilde{\cap} (l_S \circ \tilde{S} \circ l_S) \subseteq l_S$ $((l_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (l_S \circ \tilde{S} \circ l_S) \subseteq l_S)$ ise S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ) bi-quasi ideali; hem esnek kesişimsel sol bi-quasi ideali hem de esnek kesişimsel sağ bi-quasi ideali ise S yarı grubunun bir esnek kesişimsel bi-quasi ideali (Onur, 2025),
- (x) Her $x, \nu, k, g, \vartheta \in S$ için, $l_S(x \nu k g \vartheta) \supseteq l_S(x) \cap l_S(k) \cap l_S(\vartheta)$ ise S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel bi-quasi-iç ideali (Baş, 2025),
- (xi) Her $c, \ddot{e}, \mathfrak{r}, \check{a} \in S$ için, $l_S(c \ddot{e} \mathfrak{r} \check{a}) \supseteq l_S(c) \cap l_S(\mathfrak{r}) \cap l_S(\check{a})$ ($l_S(c \ddot{e} \mathfrak{r} \check{a}) \supseteq l_S(c) \cap l_S(\ddot{e}) \cap l_S(\check{a})$) ise S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ) tri-ideali; hem esnek kesişimsel sol tri-ideali hem de esnek kesişimsel sağ tri-ideali ise S yarı grubunun bir esnek kesişimsel tri-ideali (İlgin ve Sezgin, Baskıda a),

- (xii) Her $\delta, \kappa, r, \sigma, \gamma \in S$ için, $\mathfrak{l}_S(\delta\kappa r\sigma\gamma) \supseteq \mathfrak{l}_S(\delta) \cap \mathfrak{l}_S(\kappa) \cap \mathfrak{l}_S(\sigma) \cap \mathfrak{l}_S(\gamma)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel tri-bi-ideali (İlgin ve Sezgin, Baskıda b),

olarak adlandırılır.

Bundan sonra, S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel alt yarıgrup (sol/sağ ideal, bi-ideal, genelleştirilmiş bi-ideal, iç ideal, quasi-ideal, sol/sağ zayıf-iç ideal, bi-iç ideal, sol/sağ bi-quasi ideal, bi-quasi-iç ideal, sol/sağ tri-ideal, tri-bi-ideal) kısaca EK-alt yarıgrup (sol/sağ ideal, bi-ideal, genelleştirilmiş bi-ideal, iç ideal, quasi-ideal, sol/sağ zayıf-iç ideal, bi-iç ideal, sol/sağ bi-quasi ideal, sol/sağ quasi-iç ideal, bi-quasi-iç ideal, sol/sağ tri-ideal, tri-bi-ideal) olarak gösterilecektir.

2.4.2. Teorem $\mathbb{F}$, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $S_{\mathbb{F}}$, $\mathbb{F}$ kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, $\mathbb{F}$ kümesinin S yarıgrubunun bir alt yarıgrubu (sol ideali, sağ ideali, ideali, bi-ideali, genelleştirilmiş bi-ideali, iç ideali) olması için gerek ve yeter şart $S_{\mathbb{F}}$ esnek kümesinin, bir EK-alt yarıgrup (sol ideal, sağ ideal, ideal, bi-ideal, genelleştirilmiş bi-ideal, iç ideal) olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2015b, Sezer ve diğerleri, 2014).

2.4.3. Önerme $Im(\mathfrak{l}_S)$, $\mathfrak{l}_S$ 'nin görüntü kümesi olmak üzere, $\alpha \in Im(\mathfrak{l}_S)$ olacak şekilde $\alpha \subseteq U$ ve $\mathfrak{l}_S$ bir esnek küme olsun. $\mathfrak{l}_S$, bir EK-alt yarıgrup ise $\mathcal{U}(\mathfrak{l}_S; \alpha)$ bir EK-alt yarıgruptur (Sezer ve diğerleri, 2015b).

2.4.4. Teorem $\mathfrak{l}_S$, U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- i. $\mathfrak{l}_S$ 'nin bir EK-alt yarıgrup olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{l}_S \circ \mathfrak{l}_S \subseteq \mathfrak{l}_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2015b).
- ii. $\mathfrak{l}_S$ 'nin bir EK-sol (sağ) ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{S} \circ \mathfrak{l}_S \subseteq \mathfrak{l}_S$ ($\mathfrak{l}_S \circ \mathbb{S} \subseteq \mathfrak{l}_S$) olması; $\mathfrak{l}_S$ 'nin bir EK-ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{S} \circ \mathfrak{l}_S \subseteq \mathfrak{l}_S$ ve $\mathfrak{l}_S \circ \mathbb{S} \subseteq \mathfrak{l}_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2015b).

- iii. l_S 'nin bir EK-bi-ideal olması için gerek ve yeter şart $l_S \circ l_S \subseteq l_S$ ve $l_S \circ \tilde{S} \circ l_S \subseteq l_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2015b).
- iv. l_S 'nin bir EK-genelleştirilmiş bi-ideal olması için gerek ve yeter şart $l_S \circ \tilde{S} \circ l_S \subseteq l_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2014).
- v. l_S 'nin bir EK-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{S} \circ l_S \circ \tilde{S} \subseteq l_S$ olmasıdır (Sezer ve diğerleri, 2014).
- vi. l_S 'nin bir EK-sol (sağ) zayıf-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{S} \circ l_S \circ l_S \subseteq l_S$ ($l_S \circ l_S \circ \tilde{S} \subseteq l_S$) olması; l_S 'nin bir EK-zayıf-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{S} \circ l_S \circ l_S \subseteq l_S$ ve $l_S \circ l_S \circ \tilde{S} \subseteq l_S$ olmasıdır. (İlgin, 2025).
- vii. l_S 'nin bir EK-bi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $(\tilde{S} \circ l_S \circ \tilde{S}) \cap (l_S \circ \tilde{S} \circ l_S) \subseteq l_S$ olmasıdır (İlgin, 2025).
- viii. l_S 'nin bir EK-bi-quasi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $l_S \circ \tilde{S} \circ l_S \circ \tilde{S} \circ l_S \subseteq l_S$ olmasıdır (Baş, 2025).
- ix. l_S 'nin bir EK-sol (sağ) tri-ideal olması için gerek ve yeter şart $l_S \circ \tilde{S} \circ l_S \circ l_S \subseteq l_S$ ($l_S \circ l_S \circ \tilde{S} \circ l_S \subseteq l_S$) olması; l_S 'nin bir EK-tri-ideal olması için gerek ve yeter şart $l_S \circ \tilde{S} \circ l_S \circ l_S \subseteq l_S$ ve $l_S \circ l_S \circ \tilde{S} \circ l_S \subseteq l_S$ olmasıdır (İlgin ve Sezgin, Baskıda a).
- x. l_S 'nin bir EK-tri-bi-ideal olması için gerek ve yeter şart $l_S \circ l_S \circ \tilde{S} \circ l_S \circ l_S \subseteq l_S$ olmasıdır (İlgin ve Sezgin, Baskıda b).

2.4.5. Teorem Bir S yarıgrubu için aşağıdaki koşullar geçerlidir.

- i. Her EK-sol (sağ/iki-taraflı) ideal bir EK-alt yarıgruptur (Sezer ve diğerleri, 2015b).
- ii. Her EK-sol (sağ/iki-taraflı) ideal bir EK-bi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2015b).
- iii. Her EK-sol (sağ/iki-taraflı) ideal bir EK-genelleştirilmiş bi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).

- iv. Her EK-sol (sağ/iki-taraflı) ideal bir EK-quasi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).
- v. Her EK-ideal bir EK-iç idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).
- vi. Her EK-bi-ideal bir EK-genelleştirilmiş bi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).
- vii. Her EK-quasi-ideal bir EK-alt yarıgruptur (Sezer ve diğerleri, 2014).
- viii. Her EK-quasi-ideal bir EK-bi-idealdir (Sezer ve diğerleri, 2014).

2.4.6. Tanım U üzerinde bir $\mathfrak{h}_S$ esnek kümesi,

- (i) $(\mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{h}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{h}_S \neq \emptyset_S$ ise $\mathfrak{h}_S$ esnek kümesine S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen altarıgrubu (Sezgin ve İlgin, 2024a),
- (ii) Her $c \in S$ için, $(S_c \circ \mathfrak{h}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{h}_S \neq \emptyset_S ((\mathfrak{h}_S \circ S_c) \tilde{\cap} \mathfrak{h}_S \neq \emptyset_S)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) ideali; hem esnek kesişimsel hemen hemen sol ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen ideali (Sezgin ve İlgin, 2024b),
- (iii) Her $x \in S$ için, $(\mathfrak{h}_S \circ S_x \circ \mathfrak{h}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{h}_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-ideali (Sezgin ve Onur, 2024),
- (iv) Her $s, q \in S$ için, $(S_s \circ \mathfrak{h}_S \circ S_q) \tilde{\cap} \mathfrak{h}_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen iç ideali (Sezgin ve Baş, 2024),
- (v) Her $t \in S$ için, $(S_t \circ \mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{h}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{h}_S \neq \emptyset_S ((\mathfrak{h}_S \circ \mathfrak{h}_S \circ S_t) \tilde{\cap} \mathfrak{h}_S \neq \emptyset_S)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) zayıf-iç ideali; hem esnek kesişimsel hemen hemen sol zayıf-iç ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ zayıf-iç ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen zayıf-iç ideali (Sezgin ve İlgin, 2024e),
- (vi) Her $\mu, r, \sigma \in S$ için, $[(S_\mu \circ \mathfrak{h}_S \circ S_r) \tilde{\cap} (\mathfrak{h}_S \circ S_\sigma \circ \mathfrak{h}_S)] \tilde{\cap} \mathfrak{h}_S \neq \emptyset_S ([(S_\mu \circ \mathfrak{h}_S \circ S_\mu) \tilde{\cap} (\mathfrak{h}_S \circ S_\mu \circ \mathfrak{h}_S)] \tilde{\cap} \mathfrak{h}_S \neq \emptyset_S)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir

esnek kesişimsel hemen hemen bi-iç ideali (esnek kesişimsel zayıf hemen hemen bi-iç ideali) (Sezgin ve İlgin, 2024d),

- (vii) Her $\mathfrak{u}, \mathfrak{s} \in S$ için, $[(S_{\mathfrak{u}} \circ \mathfrak{q}_S) \tilde{\cap} (\mathfrak{q}_S \circ S_{\mathfrak{s}} \circ \mathfrak{q}_S)] \tilde{\cap} \mathfrak{q}_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol bi-quasi ideali; $[(\mathfrak{q}_S \circ S_{\mathfrak{u}}) \tilde{\cap} (\mathfrak{q}_S \circ S_{\mathfrak{s}} \circ \mathfrak{q}_S)] \tilde{\cap} \mathfrak{q}_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sağ bi-quasi ideali; hem esnek kesişimsel hemen hemen sol bi-quasi ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi ideali; $[(S_{\mathfrak{u}} \circ \mathfrak{q}_S) \tilde{\cap} (\mathfrak{q}_S \circ S_{\mathfrak{u}} \circ \mathfrak{q}_S)] \tilde{\cap} \mathfrak{q}_S \neq \emptyset_S$ $[(\mathfrak{q}_S \circ S_{\mathfrak{u}}) \tilde{\cap} (\mathfrak{q}_S \circ S_{\mathfrak{u}} \circ \mathfrak{q}_S)] \tilde{\cap} \mathfrak{q}_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sol (sağ) bi-quasi ideali; hem esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sol bi-quasi ideali hem de esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sağ bi-quasi ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen bi-quasi ideali (Sezgin ve İlgin, 2024c),
- (viii) Her $\mathfrak{z}, \mathfrak{e} \in S$ için, $(\mathfrak{q}_S \circ S_{\mathfrak{z}} \circ \mathfrak{q}_S \circ S_{\mathfrak{e}} \circ \mathfrak{q}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{q}_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen bi-quasi-iç ideali (Sezgin ve diğerleri, 2025),
- (ix) Her $\mathfrak{q} \in S$ için, $(\mathfrak{q}_S \circ S_{\mathfrak{q}} \circ \mathfrak{q}_S \circ \mathfrak{q}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{q}_S \neq \emptyset_S$ $((\mathfrak{q}_S \circ \mathfrak{q}_S \circ S_{\mathfrak{q}} \circ \mathfrak{q}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{q}_S \neq \emptyset_S)$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) tri-ideali; hem esnek kesişimsel hemen hemen sol tri-ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ tri-ideali ise S yarıgrubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen tri-ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024b),
- (x) Her $\mathfrak{b} \in S$ için, $(\mathfrak{q}_S \circ \mathfrak{q}_S \circ S_{\mathfrak{b}} \circ \mathfrak{q}_S \circ \mathfrak{q}_S) \tilde{\cap} \mathfrak{q}_S \neq \emptyset_S$ ise S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen tri-bi-ideali (Sezgin ve diğerleri, 2024c)

olarak adlandırılır.

Bundan sonra, S yarıgrubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen alt yarıgrup (sol/sağ ideal, bi-ideal, genelleştirilmiş bi-ideal, iç ideal, sol/sağ zayıf-iç ideali, bi-iç ideali,

sol/sağ bi-quasi ideali, bi-quasi-iç ideali, sol/sağ tri-ideali, tri-bi-ideali) kısaca EK-hemen hemen alt yarıgrup (sol/sağ ideal, bi-ideal, genelleştirilmiş bi-ideal, iç ideal, sol/sağ zayıf-iç ideal, bi-iç ideal, sol/sağ bi-quasi ideal, sol/sağ quasi-iç ideal, bi-quasi-iç ideal, sol/sağ tri-ideal, tri-bi-ideal) olarak gösterilecektir.



3. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL QUASI-İÇ İDEALLERİ

Bu bölümde, yarıgrupların esnek kesişimsel quasi-iç idealleri adı verilen yeni bir ideal biçimi tanıtılmış, örneği verilmiş ve diğer esnek kesişimsel idealler ile olan ilişkisine bakılarak önemli sonuçlar elde edilmiştir.

3.1. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x, y, z, t \in S$ için, $f_S(xyzt) \supseteq f_S(y) \cap f_S(t)$ ($f_S(xyzt) \supseteq f_S(x) \cap f_S(z)$) ise f_S esnek kümesine, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol (sağ) quasi-iç ideali denir. U üzerinde bir esnek küme, S yarı grubunun hem esnek kesişimsel sol quasi-iç ideali hem de esnek kesişimsel sağ quasi-iç ideali ise S yarı grubunun bir esnek kesişimsel quasi-iç idealidir denir.

Bundan sonra, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sol quasi-iç ideali kısaca “EK-sol quasi-iç ideal”; S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel sağ quasi-iç ideali “EK-sağ quasi-iç ideal” ve S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel quasi-iç ideali ise “EK-quasi-iç ideal” olarak gösterilecektir.

3.2. Örnek $S = \{p, r, s\}$ kümesi üzerinde, Tablo 3.1 yardımıyla tanımlanan “ $\cdot$ ” ikili işlemi ile $(S, \cdot)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\cdot$	p	r	s
p	p	p	p
r	p	r	r
s	p	r	r

Tablo 3.1. Örnek 3.2’deki “ $\cdot$ ” ikili işlemi

$U = \mathbb{Z}$ evrensel kümesi üzerinde f_S , h_S ve g_S esnek kümeleri,

$$f_S = \{(p, \{1, 5, 7, 11\}), (r, \{1, 5, 7\}), (s, \{1, 5\})\}$$

$$h_S = \{(p, \{3, 8, 9\}), (r, \{3, 9\}), (s, \{9\})\}$$

$$g_S = \{(p, \{6, 12\}), (r, \{2, 4, 6, 10\}), (s, \{13\})\}$$

şeklinde tanımlansın. f_S ve h_S esnek kümeleri, birer EK-quasi-iç idealdir. Burada, daha anlaşılabilir olabilmek için gösterim kolaylığı açısından birkaç somut eleman örneğinin verilmesi uygun görülmüştür. Gerçekten mesela,

$$f_S(prsp) = f_S(p) \supseteq f_S(r) \cap f_S(p)$$

$$f_S(rsrp) = f_S(p) \supseteq f_S(s) \cap f_S(p)$$

$$f_S(ssss) = f_S(r) \supseteq f_S(s) \cap f_S(s)$$

olup, S kümesinin diğer tüm eleman kombinasyonları için de f_S esnek kümesinin EK-sol quasi-iç ideal şartını sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. Benzer şekilde,

$$f_S(ssrp) = f_S(p) \supseteq f_S(s) \cap f_S(r)$$

$$f_S(pspr) = f_S(p) \supseteq f_S(p) \cap f_S(p)$$

$$f_S(rrsp) = f_S(p) \supseteq f_S(r) \cap f_S(s)$$

olup, S kümesinin diğer tüm eleman kombinasyonları için de f_S esnek kümesinin EK-sağ quasi-iç ideal şartını sağladığı, dolayısıyla bir EK-quasi-iç ideal olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Benzer şekilde,

$$h_S(spssp) = h_S(p) \supseteq h_S(p) \cap h_S(p)$$

$$h_S(pprrr) = h_S(p) \supseteq h_S(p) \cap h_S(r)$$

$$h_S(srrrr) = h_S(r) \supseteq h_S(r) \cap h_S(r)$$

olup, S kümesinin diğer tüm eleman kombinasyonları için de h_S esnek kümesinin EK-sol quasi-iç ideal şartını sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. Benzer şekilde,

$$h_S(rrrr) = h_S(r) \supseteq h_S(r) \cap h_S(r)$$

$$h_S(rprr) = h_S(p) \supseteq h_S(r) \cap h_S(p)$$

$$h_S(psrp) = h_S(p) \supseteq h_S(p) \cap h_S(r)$$

olup, S kümesinin diğer tüm eleman kombinasyonları için de h_S esnek kümesinin EK-sağ quasi-iç ideal şartını sağladığı, dolayısıyla bir EK-quasi-iç ideal olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Fakat,

$$g_S(prpr) = g_S(p) \not\supseteq g_S(r) \cap g_S(r)$$

olduğundan, g_S esnek kümesi bir EK-quasi-iç ideal değildir.

S yarıgrubunun bir A alt yarıgrubunun, $SASA \subseteq A$ ise bir sol quasi-iç ideal, $ASAS \subseteq A$ ise bir sağ quasi-iç ideal, hem sol quasi-iç ideal hem de sağ quasi-iç ideal ise bir quasi-iç ideal olarak adlandırıldığı bilinmektedir. Bu durum, Önerme 3.3, Önerme 3.4 ve Teorem 3.5 ile esnek kesişimsel yarıgruplara da aktarılabilir:

3.3. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. f_S 'nin bir EK-sol quasi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olmasıdır.

İspat: f_S bir EK-sol quasi-iç ideal olsun. $a \in S$ için, $(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(a) = \emptyset$ ise $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olduğu açıktır. Diğer durumlarda, $a \in S$ için $a = xy$, $x = mn$ ve $n = rs$ olacak şekilde $x, y, m, n, r, s \in S$ olsun. f_S , bir EK-sol quasi-iç ideal olduğundan, $f_S(a) = f_S(xy) = f_S((mn)y) = f_S(m(rs)y) \supseteq f_S(r) \cap f_S(y)$. Buradan,

$$\begin{aligned} (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(a) &= [(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \circ f_S](a) \\ &= \bigcup_{a=xy} \{(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(x) \cap f_S(y)\} \\ &= \bigcup_{a=xy} \left\{ \bigcup_{x=mn} \{\tilde{S}(m) \cap (f_S \circ \tilde{S})(n)\} \cap f_S(y) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcup_{a=xy} \left\{ \bigcup_{x=mn} \left\{ \mathbb{S}(m) \cap \bigcup_{n=rs} \{f_S(r) \cap \mathbb{S}(s)\} \right\} \cap f_S(y) \right\} \\
&= \bigcup_{a=mrsy} \{f_S(r) \cap f_S(y)\} \\
&\subseteq \bigcup_{a=mrsy} \{f_S(mrsy)\} \\
&= f_S(xy) \\
&= f_S(a)
\end{aligned}$$

olduğundan, $\mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S \subseteq f_S$ elde edilir. Ayrıca, $a \in S$ için $a = xy$ fakat $x \neq mn$ olduğu durumda ise $(\mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S})(x) = \emptyset$ elde edileceğinden, bu durumda da $\mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S \subseteq f_S$ sağlanacaktır.

Tersine, $\mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olsun. $a \in S$ için $a = xyzt$ olacak şekilde $x, y, z, t \in S$ alalım. Buradan,

$$\begin{aligned}
f_S(xyzt) &= f_S(a) \\
&\supseteq (\mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S)(a) \\
&= [(\mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S}) \circ f_S](a) \\
&= \bigcup_{a=mn} \{(\mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S})(m) \cap f_S(n)\} \\
&\supseteq (\mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S})(xyz) \cap f_S(t) \\
&= \bigcup_{xyz=bc} \{(\mathbb{S} \circ f_S)(b) \cap \mathbb{S}(c)\} \cap f_S(t) \\
&\supseteq [(\mathbb{S} \circ f_S)(xy) \cap \mathbb{S}(z)] \cap f_S(t) \\
&= \left[\bigcup_{xy=pq} \{\mathbb{S}(p) \cap f_S(q)\} \cap \mathbb{S}(z) \right] \cap f_S(t) \\
&\supseteq [\{\mathbb{S}(x) \cap f_S(y)\} \cap \mathbb{S}(z)] \cap f_S(t) \\
&= [\{U \cap f_S(y)\} \cap U] \cap f_S(t) \\
&= f_S(y) \cap f_S(t)
\end{aligned}$$

olduğundan, $f_S(xyzt) \supseteq f_S(y) \cap f_S(t)$ elde edilir. Böylece, f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir.

3.4. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. f_S 'nin bir EK-sağ quasi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ olmasıdır.

İspat: f_S bir EK-sağ quasi-iç ideal olsun. $a \in S$ için, $(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(a) = \emptyset$ ise $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ olduğu açıktır. Diğer durumlarda, $a \in S$ için, $a = xy$, $y = mn$ ve $n = rs$ olacak şekilde $x, y, m, n, r, s \in S$ olsun. f_S , bir EK-sağ quasi-iç ideal olduğundan $f_S(a) = f_S(xy) = f_S(x(mn)) = f_S(xm(rs)) \supseteq f_S(x) \cap f_S(r)$. Buradan,

$$\begin{aligned}
 (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(a) &= [f_S \circ (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})](a) \\
 &= \bigcup_{a=xy} \{f_S(x) \cap (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(y)\} \\
 &= \bigcup_{a=xy} \left\{ f_S(x) \cap \bigcup_{y=mn} \{ \tilde{S}(m) \cap (f_S \circ \tilde{S})(n) \} \right\} \\
 &= \bigcup_{a=xy} \left\{ f_S(x) \cap \bigcup_{y=mn} \left\{ \tilde{S}(m) \cap \bigcup_{n=rs} \{ f_S(r) \cap \tilde{S}(s) \} \right\} \right\} \\
 &= \bigcup_{a=xmrs} \{f_S(x) \cap f_S(r)\} \\
 &\subseteq \bigcup_{a=xmrs} \{f_S(xmrs)\} \\
 &= f_S(xy) \\
 &= f_S(a)
 \end{aligned}$$

olduğundan, $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ elde edilir. Ayrıca $a \in S$ için, $a = xy$ fakat $y \neq mn$ olduğu durumda ise $(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(y) = \emptyset$ elde edileceğinden bu durumda da $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ sağlanacaktır.

Tersine, $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ olsun. $a \in S$ için $a = xyzt$ olacak şekilde $x, y, z, t \in S$ alalım. Buradan,

$$\begin{aligned}
 f_S(xyzt) &= f_S(a) \\
 &\supseteq (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [f_S \circ (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})](a) \\
&= \bigcup_{a=mn} \{f_S(m) \cap (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(n)\} \\
&\supseteq f_S(x) \cap (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(yzt) \\
&= f_S(x) \cap \bigcup_{yzt=de} \{(\tilde{S} \circ f_S)(d) \cap \tilde{S}(e)\} \\
&\supseteq f_S(x) \cap [(\tilde{S} \circ f_S)(yz) \cap \tilde{S}(t)] \\
&= f_S(x) \cap \left[\bigcup_{yz=pq} \{\tilde{S}(p) \cap f_S(q)\} \cap \tilde{S}(t) \right] \\
&\supseteq f_S(x) \cap [\{\tilde{S}(y) \cap f_S(z)\} \cap \tilde{S}(t)] \\
&= f_S(x) \cap [\{U \cap f_S(z)\} \cap U] \\
&= f_S(x) \cap f_S(z)
\end{aligned}$$

olduğundan, $f_S(xyzt) \supseteq f_S(x) \cap f_S(z)$ elde edilir. Böylece, f_S bir EK-sağ quasi-iç idealdir.

3.5. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. f_S 'nin bir EK-quasi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ ve $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ olmasıdır.

İspat: Önerme 3.3 ve Önerme 3.4'ün ispatından açıktır.

3.6. Sonuç $\tilde{S}$ ve $\emptyset_S$ bir EK-quasi-iç idealdir.

3.7. Teorem A , S yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olsun. S_A , A kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir quasi-iç ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-quasi-iç ideal olmasıdır.

İspat: A , S yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olmak üzere bir quasi-iç ideali olsun. O halde, $SASA \subseteq A$ ve $ASAS \subseteq A$. Böylece, Teorem 2.3.19 (i) ve (iii)'ten,

$$\tilde{S} \circ S_A \circ \tilde{S} \circ S_A = S_S \circ S_A \circ S_S \circ S_A = S_{SASA} \subseteq S_A$$

ve

$$S_A \circ \tilde{S} \circ S_A \circ \tilde{S} = S_A \circ S_S \circ S_A \circ S_S = S_{ASAS} \cong S_A$$

elde edilir. Buradan, S_A bir EK-quasi-iç idealdir.

Tersine, S_A bir EK-quasi-iç ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ S_A \circ \tilde{S} \circ S_A \cong S_A$ ve $S_A \circ \tilde{S} \circ S_A \circ \tilde{S} \cong S_A$ sağlanır. $x \in SASA$ olmak üzere, Teorem 2.3.19 (i) ve (iii)'ten,

$$S_A(x) \supseteq (\tilde{S} \circ S_A \circ \tilde{S} \circ S_A)(x) \supseteq S_{SASA}(x) = U$$

olduğundan, $S_A(x) = U$, buradan $x \in A$ elde edilir. Sonuç olarak, $SASA \subseteq A$. Kabul gereği, A, S yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. Böylece, A, S yarıgrubunun bir sol quasi-iç idealidir. Benzer şekilde, $y \in ASAS$ olmak üzere,

$$S_A(y) \supseteq (S_A \circ \tilde{S} \circ S_A \circ \tilde{S})(y) \supseteq S_{ASAS}(y) = U$$

olduğundan, $S_A(y) = U$, buradan $y \in A$ elde edilir. Sonuç olarak, $ASAS \subseteq A$. Kabul gereği, A, S yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. Böylece, A, S yarıgrubunun bir sağ quasi-iç idealidir. O halde, A, S yarı grubunun bir quasi-iç idealidir.

3.8. Örnek Örnek 3.2'de verilen S yarıgrubunu ele alalım. $A = \{p, r\}$, S kümesinin boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir quasi-iç ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Rutin hesaplamalarla, A kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu $S_A = \{(p, U), (r, U), (s, \emptyset)\}$ 'nın bir EK-quasi-iç ideal olduğu gösterilebilir.

Tersine, $K = \{p\}$ kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olan f_S EK-quasi-iç idealini $f_S = \{(p, U), (r, \emptyset), (s, \emptyset)\}$ olarak alırsak, rutin hesaplamalarla, $K = \{p\}$ kümesinin S yarıgrubunun bir quasi-iç ideali olduğu gösterilebilir.

3.9. Önerme Her EK-iç ideal, bir EK-sol quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-iç ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \cong f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \cong \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \cong \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \cong f_S$$

elde edilir. Böylece, f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir.

Önerme 3.9'un karşıtının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.10. Örnek $S = \{k, l, m, n\}$ kümesi üzerinde, Tablo 3.2 yardımıyla tanımlanan “.” ikili işlemi ile $(S, \cdot)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

.	k	l	m	n
k	k	k	k	k
l	k	k	k	k
m	k	k	k	l
n	k	k	l	m

Tablo 3.2. Örnek 3.10'daki “.” ikili işlemi

$U = \mathbb{Z}$ evrensel kümesi üzerinde f_S esnek kümesi,

$$f_S = \{(k, \{-5, -4, -3, -1\}), (l, \{-4, -3\}), (m, \{-5\}), (n, \{-5, -1\})\}$$

şeklinde tanımlansın. f_S esnek kümesi, bir EK-sol quasi-iç idealdir. Gerçekten,

$$(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(k) = \{-5, -4, -3, -1\} \subseteq f_S(k) = \{-5, -4, -3, -1\}$$

$$(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(l) = \emptyset \subseteq f_S(l) = \{-4, -3\}$$

$$(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(m) = \emptyset \subseteq f_S(m) = \{-5\}$$

$$(\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(n) = \emptyset \subseteq f_S(n) = \{-5, -1\}$$

olduğundan, f_S esnek kümesi bir EK-sol quasi-iç idealdir. Fakat,

$$f_S(nnn) = f_S(l) \not\subseteq f_S(n)$$

olduğundan, f_S bir EK-iç ideal değildir.

3.11. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir sol basit yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-iç idealdir.
2. f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.8'in ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-sol quasi-iç ideal ve $a, b, c, d \in S$ olsun. Kabul gereği, her $b, c \in S$ için, $c = xb$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} f_S(abc) &= f_S(ab(xb)) \\ &\supseteq f_S(b) \cap f_S(b) \\ &= f_S(b) \end{aligned}$$

olup, f_S bir EK-iç idealdir. Böylece, (2) ise (1) sağlanır.

3.12. Önerme Her EK-iç ideal, bir EK-sağ quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-iç ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$$

elde edilir. Böylece, f_S bir EK-sağ quasi-iç idealdir.

Önerme 3.12'nin karşınının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.13. Örnek Örnek 3.10'daki f_S esnek kümesini ele alalım. Örnek 3.10'daki f_S esnek kümesi, bir EK-sağ quasi-iç idealdir. Gerçekten,

$$(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(k) = \{-5, -4, -3, -1\} \subseteq f_S(k) = \{-5, -4, -3, -1\}$$

$$(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(l) = \emptyset \subseteq f_S(l) = \{-4, -3\}$$

$$(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(m) = \emptyset \subseteq f_S(m) = \{-5\}$$

$$(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(n) = \emptyset \subseteq f_S(n) = \{-5, -1\}$$

olduğundan, f_S esnek kümesi bir EK-sağ quasi-iç idealdir. Fakat,

$$f_S(nnn) = f_S(l) \not\subseteq f_S(n)$$

olduğundan, f_S bir EK-iç ideal değildir.

3.14. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir sağ basit yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-iç idealdir.
2. f_S bir EK-sağ quasi-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.12'nin ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-sağ quasi-iç ideal ve $a, b, c, d \in S$ olsun. Kabul gereği, her $a, b \in S$ için, $a = by$ olacak şekilde $y \in S$ vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} f_S(abc) &= f_S((by)bc) \\ &\supseteq f_S(b) \cap f_S(b) \\ &= f_S(b) \end{aligned}$$

olup, f_S bir EK-iç idealdir. Böylece, (2) ise (1) sağlanır.

3.15. Teorem Her EK-iç ideal bir EK-quasi-iç idealdir.

İspat: Önerme 3.9 ve Önerme 3.12'nin ispatından açıktır.

Teorem 3.15'in karşıtının her zaman doğru olmadığı Örnek 3.10 ve Örnek 3.13'ten açıktır.

3.16. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir grup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-iç idealdir.
2. f_S bir EK-quasi-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Teorem 3.15'ten açıktır. (2)'yi kabul edelim. Kabul gereği Teorem 2.1.6'dan, S bir sol basit yarıgrup ve bir sağ basit yarıgruptur. İspatın devamı Önerme 3.11 ve Önerme 3.14'ten açıktır.

3.17. Önerme Her EK-sol ideal bir EK-sol quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-sol ideal olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ ve $f_S \circ f_S \subseteq f_S$. Buradan,

$$\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S \circ f_S \subseteq f_S$$

elde edilir. Buradan, f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir.

Önerme 3.17'nin karşıtının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.18. Örnek $S = \{z, h, r, a\}$ kümesi üzerinde, Tablo 3.3 yardımıyla tanımlanan “*” ikili işlemi ile $(S, *)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

*	z	h	r	a
z	z	z	z	z
h	z	z	z	z
r	z	z	h	z
a	z	z	h	h

Tablo 3.3. Örnek 3.18'deki “*” ikili işlemi

$U = \mathbb{Z}_8^*$ evrensel kümesi üzerinde f_S esnek kümesi,

$$f_S = \{(z, \mathbb{Z}_8^*), (h, \{\bar{5}\}), (r, \{\bar{1}, \bar{3}\}), (a, \{\bar{1}, \bar{7}\})\}$$

şeklinde tanımlansın. f_S esnek kümesi, bir EK-sol quasi-iç idealdir. Gerçekten,

$$(\mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S)(z) = \mathbb{Z}_8^* \subseteq f_S(z) = \mathbb{Z}_8^*$$

$$(\mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S)(h) = \emptyset \subseteq f_S(h) = \{\bar{5}\}$$

$$(\mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S)(r) = \emptyset \subseteq f_S(r) = \{\bar{1}, \bar{3}\}$$

$$(\mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S)(a) = \emptyset \subseteq f_S(a) = \{\bar{1}, \bar{7}\}$$

olduğundan, f_S esnek kümesi bir EK-sol quasi-iç idealdir. Fakat,

$$f_S(ar) = f_S(h) \not\subseteq f_S(r)$$

olduğundan, f_S bir EK-sol ideal değildir.

Önerme 3.19, Önerme 3.17'nin karşıtının idempotent esnek kümeler için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.19. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sol idealdir.
2. f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.17'nin ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-sol quasi-iç ideal olsun. f_S , idempotent bir esnek küme olduğundan, $f_S \circ f_S = f_S$ bilinmektedir. Buradan,

$$\tilde{S} \circ f_S = \tilde{S} \circ f_S \circ f_S = \tilde{S} \circ f_S \circ f_S \circ f_S \subseteq \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$$

oldüğundan, f_S bir EK-sol idealdir.

Önerme 3.20, Önerme 3.17'nin karşınının regüler yarıgruplar için de geçerli olduğunu göstermektedir.

3.20. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir regüler yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sol idealdir.
2. f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.17'nin ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-sol quasi-iç ideal ve $a, b, c, d \in S$ olsun. Kabul gereği, her $b \in S$ için, $b = bxb$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(ab) = f_S(a(bxb)) \supseteq f_S(b) \cap f_S(b) = f_S(b)$$

oldüğundan, f_S bir EK-sol idealdir.

3.21. Önerme Her EK-sağ ideal, bir EK-sağ quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-sağ ideal olsun. O halde, $f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ ve $f_S \circ f_S \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S \circ f_S \subseteq f_S$$

elde edilir. Buradan, f_S bir EK-sağ quasi-iç idealdir.

Önerme 3.21'nin karşınının her zaman doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

3.22. *Örnek* Örnek 3.18'de verilen f_S esnek kümesini ele alalım. Örnek 3.18'deki, f_S esnek kümesi, bir EK-sağ quasi-iç idealdir. Gerçekten,

$$(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(z) = \mathbb{Z}_8^* \subseteq f_S(z) = \mathbb{Z}_8^*$$

$$(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(h) = \emptyset \subseteq f_S(h) = \{\bar{5}\}$$

$$(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(r) = \emptyset \subseteq f_S(r) = \{\bar{1}, \bar{3}\}$$

$$(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(a) = \emptyset \subseteq f_S(a) = \{\bar{1}, \bar{7}\}$$

olduğundan, f_S esnek kümesi bir EK-sağ quasi-iç idealdir. Fakat,

$$f_S(ar) = f_S(h) \not\subseteq f_S(a)$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ ideal değildir.

Önerme 3.23, Önerme 3.21'in karşınının idempotent esnek kümeler için geçerli olduğunu göstermektedir.

3.23. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sağ idealdir.

2. f_S bir EK-sağ quasi-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.21'in ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-sağ quasi-iç ideal olsun. f_S , idempotent bir esnek küme olduğundan, $f_S \circ f_S = f_S$ bilinmektedir. Buradan,

$$f_S \circ \tilde{S} = f_S \circ f_S \circ \tilde{S} = f_S \circ f_S \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ idealdir.

Önerme 3.24, Önerme 3.21'in karşınının regüler yarıgruplar için de geçerli olduğunu göstermektedir.

3.24. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir regüler yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-sağ idealdir.
2. f_S bir EK-sağ quasi-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Önerme 3.21'in ispatından açıktır. (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-sağ quasi-iç ideal ve $a, b, c, d \in S$ olsun. Kabul gereği, her $a \in S$ için, $a = axa$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(ab) = f_S((axa)b) \supseteq f_S(a) \cap f_S(a) = f_S(a)$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ idealdir.

3.25. Teorem Her EK-ideal bir EK-quasi-iç idealdir.

İspat: Önerme 3.17 ve Önerme 3.21'in ispatından açıktır.

Teorem 3.25'in karşınının her zaman doğru olmadığı Örnek 3.18 ve Örnek 3.22'den açıktır.

3.26. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-idealdir.
2. f_S bir EK-quasi-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Teorem 3.25'ten açıktır. (2)-nin (1)-i gerektirdiği, Önerme 3.19 ve Önerme 3.23'ten açıktır.

3.27. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir regüler yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-idealdir.
2. f_S bir EK-quasi-iç idealdir.

İspat: (1)-in (2)-yi gerektirdiği Teorem 3.25'ten açıktır. (2)-nin (1)-i gerektirdiği Önerme 3.20 ve Önerme 3.24'ün ispatından açıktır.

3.28. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir grup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-bi-idealdir.
2. f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir.

İspat: (1)'i kabul edelim. f_S bir EK-bi-ideal ve $a, b, c, d \in S$ olsun. Kabul gereği, her $a, b, c \in S$ için, $a = bx$ ve $c = by$ olacak şekilde $x, y \in S$ vardır. Buradan,

$$\begin{aligned}
 f_S(abcd) &= f_S((bx)b(by)d) \\
 &\supseteq f_S(bxb) \cap f_S(byd) \\
 &\supseteq (f_S(b) \cap f_S(b)) \cap (f_S(b) \cap f_S(d)) \\
 &= f_S(b) \cap f_S(d)
 \end{aligned}$$

olup, f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir. Böylece, (1) ise (2) sağlanır.

Tersine, (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-sol quasi-iç ideal ve $a, b \in S$ olsun. Kabul gereği, her $a, b \in S$ için, $a = xb$ ve $b = xa$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(ab) = f_S((xb)(xa)) = f_S(xbxa) \supseteq f_S(b) \cap f_S(a)$$

olduğundan, f_S bir EK-alt yarıgruptur. Ayrıca, f_S bir EK-sol quasi-iç ideal ve $a, b, c \in S$ olsun. Kabul gereği, her $a, b \in S$ için, $b = ax$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(abc) = f_S(a(ax)c) = f_S(aaxc) \supseteq f_S(a) \cap f_S(c)$$

olduğundan, f_S bir EK-bi-idealdir. Böylece, (2) ise (1) sağlanır.

3.29. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir grup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-bi-idealdir.
2. f_S bir EK-sağ quasi-iç idealdir.

İspat: (1)'i kabul edelim. f_S bir EK-bi-ideal ve $a, b, c, d \in S$ olsun. Kabul gereği, her $b, c, d \in S$ için, $b = xc$ ve $d = yc$ olacak şekilde $x, y \in S$ vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} f_S(abcd) &= f_S(a(xc)c(yc)) \\ &\supseteq f_S(axc) \cap f_S(cyc) \\ &\supseteq (f_S(a) \cap f_S(c)) \cap (f_S(c) \cap f_S(c)) \\ &= f_S(a) \cap f_S(c) \end{aligned}$$

olup, f_S bir EK-sağ quasi-iç idealdir. Böylece, (1) ise (2) sağlanır.

Tersine, (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-sağ quasi-iç ideal ve $a, b \in S$ olsun. Kabul gereği, her $a, b \in S$ için, $a = bx$ ve $b = ax$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(ab) = f_S((bx)(ax)) = f_S(bxax) \supseteq f_S(b) \cap f_S(a)$$

olduğundan, f_S bir EK-alt yarıgruptur. Ayrıca, f_S bir EK-sağ quasi-iç ideal ve $a, b, c \in S$ olsun. Kabul gereği, her $b, c \in S$ için, $b = xc$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Buradan,

$$f_S(abc) = f_S(a(xc)c) = f_S(axcc) \supseteq f_S(a) \cap f_S(c)$$

olduğundan, f_S bir EK-bi-idealdir. Böylece, (2) ise (1) sağlanır.

3.30. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir grup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-bi-idealdir.
2. f_S bir EK-quasi-iç idealdir.

İspat: Önerme 3.28 ve Önerme 3.29'un ispatından açıktır.

3.31. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, her EK-sol quasi-iç ideal bir EK-bi-idealdir.

İspat: f_S , idempotent bir esnek küme olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ olduğu bilinmektedir. f_S bir EK-sol quasi-iç ideal olmak üzere,

$$f_S \circ f_S = f_S \cong f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-alt yarıgruptur. Ayrıca,

$$f_S \circ \tilde{f} \circ f_S = f_S \circ f_S \circ \tilde{f} \circ f_S \cong \tilde{f} \circ f_S \circ \tilde{f} \circ f_S \cong f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-bi-idealdir.

3.32. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, her EK-sağ quasi-iç ideal bir EK-bi-idealdir.

İspat: f_S , idempotent bir esnek küme olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ olduğu bilinmektedir. f_S bir EK-sağ quasi-iç ideal olmak üzere,

$$f_S \circ f_S = f_S \cong f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-alt yarıgruptur. Ayrıca,

$$f_S \circ \tilde{S} \circ f_S = f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ f_S \cong f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \cong f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-bi-idealdir.

3.33. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, her EK-quasi-iç ideal, bir EK-bi-idealdir.

İspat: Önerme 3.31 ve Önerme 3.32'nin ispatından açıktır.

3.34. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir regüler sağ basit yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-quasi-idealdir.
2. f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir.

İspat: (1)'i kabul edelim. f_S bir EK-quasi-ideal olsun. O halde, Teorem 2.4.5. (viii)'den, f_S bir EK-bi-idealdir. S bir sağ basit yarıgrup olduğundan, Önerme 3.28'den, f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir. Böylece, (1) ise (2) sağlanır.

Tersine, (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-sol quasi-iç ideal olsun. S bir regüler yarıgrup olduğundan, Önerme 3.20'den, f_S bir EK-sol idealdir. O halde, Teorem 2.4.5. (iv)'ten, f_S bir EK-quasi-idealdir. Böylece, (2) ise (1) sağlanır.

3.35. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir regüler sol basit yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-quasi-idealdir.
2. f_S bir EK-sağ quasi-iç idealdir.

İspat: (1)'i kabul edelim. f_S bir EK-quasi-ideal olsun. O halde, Teorem 2.4.5. (viii)'den, f_S bir EK-bi-idealdir. S bir sol basit yarıgrup olduğundan, Önerme 3.29'dan, f_S bir EK-sağ quasi-iç idealdir. Böylece, (1) ise (2) sağlanır.

Tersine, (2)'yi kabul edelim. f_S bir EK-sağ quasi-iç ideal olsun. S bir regüler yarıgrup olduğundan, Önerme 3.24'ten, f_S bir EK-sağ idealdir. O halde, Teorem 2.4.5. (iv)'ten, f_S bir EK-quasi-idealdir. Böylece, (2) ise (1) sağlanır.

3.36. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve S bir regüler grup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. f_S bir EK-quasi-idealdir.
2. f_S bir EK-quasi-iç idealdir.

İspat: Kabul gereği, Teorem 2.1.6'dan, S bir sol basit yarıgrup ve bir sağ basit yarıgruptur. İspatın devamı, Önerme 3.34 ve Önerme 3.35'ten açıktır.

3.37. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, her EK-sol quasi-iç ideal bir EK-sol bi-quasi idealdir.

İspat: f_S , idempotent bir esnek küme olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ olduğu bilinmektedir. f_S bir EK-sol quasi-iç ideal olmak üzere,

$$(\tilde{S} \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S) \cong f_S \circ \tilde{S} \circ f_S = f_S \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \cong \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \cong f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sol bi-quasi idealdir.

3.38. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, her EK-sağ quasi-iç ideal bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

İspat: f_S , idempotent bir esnek küme olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ olduğu bilinmektedir. f_S bir EK-sağ quasi-iç ideal olmak üzere,

$$(f_S \circ \mathbb{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S) \subseteq f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S = f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S} \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ bi-quasi idealdir.

3.39. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, her EK-quasi-iç ideal bir EK-bi-quasi idealdir.

İspat: Önerme 3.37 ve Önerme 3.38'in ispatından açıktır.

3.40. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, her EK-sol quasi-iç ideal bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: f_S , idempotent bir esnek küme olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ olduğu bilinmektedir. f_S bir EK-sol quasi-iç ideal olmak üzere,

$$(\mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S) \subseteq f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S = f_S \circ f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S \subseteq \mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-bi-iç idealdir.

3.41. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, her EK-sağ quasi-iç ideal bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: f_S , idempotent bir esnek küme olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ olduğu bilinmektedir. f_S bir EK-sağ quasi-iç ideal olmak üzere,

$$(\mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S}) \tilde{\cap} (f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S) \subseteq f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S = f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S \circ f_S \subseteq f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S} \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-bi-iç idealdir.

3.42. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, her EK-quasi-iç ideal bir EK-bi-iç idealdir.

İspat: Önerme 3.40 ve Önerme 3.41'in ispatından açıktır.

3.43. Önerme f_S ve f_T , sırasıyla S ve T yarıgubunun birer EK-sol (sağ) quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \wedge f_T$, $S \times T$ 'nin bir EK-sol (sağ) quasi-iç idealdir.

İspat: İspat, EK-sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. Her $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) \in S \times T$ için,

$$\begin{aligned} f_S \wedge f_T((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)) &= f_S \wedge f_T(x_1 x_2 x_3 x_4, y_1 y_2 y_3 y_4) \\ &= f_S(x_1 x_2 x_3 x_4) \cap f_T(y_1 y_2 y_3 y_4) \\ &\supseteq (f_S(x_2) \cap f_S(x_4)) \cap (f_T(y_2) \cap f_T(y_4)) \\ &= (f_S(x_2) \cap f_T(y_2)) \cap (f_S(x_4) \cap f_T(y_4)) \\ &= f_S \wedge f_T(x_2, y_2) \cap f_S \wedge f_T(x_4, y_4) \end{aligned}$$

olduğundan, $f_S \wedge f_T$, $S \times T$ 'nin bir EK-sol quasi-iç idealdir.

3.44. Teorem f_S ve f_T , sırasıyla S ve T yarıgubunun birer EK-quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \wedge f_T$ bir EK-quasi-iç idealdir.

3.45. *Sonuç* EK-quasi-iç ideallerin sonlu esnek $\wedge$ -çarpımları da bir EK-quasi-iç idealdir.

3.46. Önerme f_S ve f_T , sırasıyla S ve T yarıgubunun U üzerinde birer EK-sol (sağ) quasi-iç ideali olsun. Bu durumda, $f_S \times f_T$, $S \times T$ yarıgubunun $U \times U$ üzerinde bir EK-sol (sağ) quasi-iç idealidir.

İspat: İspat, EK-sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. Her $(x, y) \in S \times T$ için, $f_{S \times T}(x, y) = f_S(x) \times f_T(y)$ olacak şekilde $f_S \times f_T = f_{S \times T}$ alalım. Her $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) \in S \times T$ için,

$$f_{S \times T}((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)) = f_{S \times T}(x_1 x_2 x_3 x_4, y_1 y_2 y_3 y_4)$$

$$\begin{aligned}
&= f_S(x_1x_2x_3x_4) \times f_T(y_1y_2y_3y_4) \\
&\supseteq (f_S(x_2) \cap f_S(x_4)) \times (f_T(y_2) \cap f_T(y_4)) \\
&= (f_S(x_2) \times f_T(y_2)) \cap (f_S(x_4) \times f_T(y_4)) \\
&= f_{S \times T}(x_2, y_2) \cap f_{S \times T}(x_4, y_4)
\end{aligned}$$

olduğundan, $f_S \times f_T = f_{S \times T}$, $S \times T$ yarıgrubunun $U \times U$ üzerinde bir EK-sol quasi-iç idealidir.

3.47. Teorem f_S ve f_T , sırasıyla S ve T yarıgrubunun U üzerinde birer EK-quasi-iç ideali olsun. Bu durumda, $f_S \times f_T$, $S \times T$ yarıgrubunun $U \times U$ üzerinde bir EK-quasi-iç idealidir.

3.48. Sonuç EK-quasi-iç ideallerin sonlu esnek $\times$ -çarpımları da bir EK-quasi-iç idealdir.

3.49. Önerme f_S ve g_S birer EK-sol (sağ) quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cap} g_S$ bir EK-sol (sağ) quasi-iç idealdir.

İspat: İspat, EK-sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S ve g_S birer EK-sol quasi-iç ideal olsun. Buradan, $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ ve $\tilde{S} \circ g_S \circ \tilde{S} \circ g_S \subseteq g_S$ olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$\tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} g_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} g_S) \subseteq \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$$

ve

$$\tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} g_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} g_S) \subseteq \tilde{S} \circ g_S \circ \tilde{S} \circ g_S \subseteq g_S$$

olup,

$$\tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} g_S) \circ \tilde{S} \circ (f_S \tilde{\cap} g_S) \subseteq f_S \tilde{\cap} g_S$$

elde edilir. Böylece, $f_S \tilde{\cap} g_S$ bir EK-sol quasi-iç idealdir.

3.50. Teorem f_S ve g_S birer EK-quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cap} g_S$ bir EK-quasi-iç idealdir.

3.51. Sonuç EK-quasi-iç ideallerin sonlu esnek kesişimleri de bir EK-quasi-iç idealdir.

3.52. Önerme f_S ve g_S birer EK-sol (sağ) ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cap} g_S$ bir EK-sol (sağ) quasi-iç idealdir.

İspat: İspat, EK-sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S ve g_S birer EK-sol ideal olsun. Bu durumda, Önerme 3.17'den, f_S ve g_S birer EK-sol quasi iç idealdir. İspatın devamı, Önerme 3.49'dan açıktır.

3.53. Teorem f_S ve g_S birer EK-ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cap} g_S$ bir EK-quasi-iç idealdir.

3.54. Önerme g_S bir EK-sol quasi-iç ideal, f_S bir EK-sol ideal olsun. Bu durumda, $g_S \tilde{\cap} f_S$ bir EK-sol quasi-iç idealdir.

İspat: g_S bir EK-sol quasi-iç ideal ve f_S bir EK-sol ideal olsun. Önerme 3.17'den, f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir. İspatın devamı, Önerme 3.49'dan açıktır.

3.55. Teorem g_S bir EK-quasi-iç ideal, f_S bir EK-ideal olsun. Bu durumda, $g_S \tilde{\cap} f_S$ bir EK-quasi-iç idealdir.

İspat: g_S bir EK-quasi-iç ideal ve f_S bir EK-ideal olsun. Teorem 3.25'ten, f_S bir EK-quasi-iç idealdir. İspatın devamı, Teorem 3.50'den açıktır.

3.56. Önerme g_S , U üzerinde bir esnek küme ve f_S bir EK-sol quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \circ g_S$ bir EK-sol quasi-iç idealdir.

İspat: g_S , U üzerinde bir esnek küme ve f_S bir EK-sol quasi-iç ideal olsun. O halde, $\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \cong f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \circ g_S) \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ (f_S \circ g_S) \cong \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ (\tilde{\mathbb{S}} \circ \tilde{\mathbb{S}}) \circ f_S \circ g_S \cong (\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S) \circ g_S \cong f_S \circ g_S$$

olduğundan, $f_S \circ g_S$ bir EK-sol quasi-iç idealdir.

3.57. Önerme g_S , U üzerinde bir esnek küme ve f_S bir EK-sağ quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $g_S \circ f_S$ bir EK-sağ quasi-iç idealdir.

İspat: g_S , U üzerinde bir esnek küme ve f_S bir EK-sağ quasi-iç ideal olsun. O halde, $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(g_S \circ f_S) \circ \tilde{S} \circ (g_S \circ f_S) \circ \tilde{S} \subseteq g_S \circ f_S \circ (\tilde{S} \circ \tilde{S}) \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq g_S \circ (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \subseteq g_S \circ f_S$$

olduğundan, $g_S \circ f_S$ bir EK-sağ quasi-iç idealdir.

3.58. Teorem f_S ve g_S birer EK-quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $g_S \circ f_S$ bir EK-quasi-iç idealdir.

İspat: f_S ve g_S birer EK-quasi-iç idealler olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$, $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ ve $\tilde{S} \circ g_S \circ \tilde{S} \circ g_S \subseteq g_S$, $g_S \circ \tilde{S} \circ g_S \circ \tilde{S} \subseteq g_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\tilde{S} \circ (g_S \circ f_S) \circ \tilde{S} \circ (g_S \circ f_S) \subseteq \tilde{S} \circ g_S \circ (\tilde{S} \circ \tilde{S}) \circ g_S \circ f_S \subseteq (\tilde{S} \circ g_S \circ \tilde{S} \circ g_S) \circ f_S \subseteq g_S \circ f_S$$

elde edilip, $g_S \circ f_S$ bir EK-sol quasi-iç idealdir. Benzer şekilde,

$$(g_S \circ f_S) \circ \tilde{S} \circ (g_S \circ f_S) \circ \tilde{S} \subseteq g_S \circ f_S \circ (\tilde{S} \circ \tilde{S}) \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq g_S \circ (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}) \subseteq g_S \circ f_S$$

olduğundan, $g_S \circ f_S$ bir EK-sağ quasi-iç idealdir. Böylece, $g_S \circ f_S$ bir EK-quasi-iç idealdir.

3.59. Önerme g_S , U üzerinde bir esnek küme ve f_S bir EK-sol ideal olsun. Bu durumda, $f_S \circ g_S$ bir EK-sol quasi-iç idealdir.

İspat: g_S , U üzerinde bir esnek küme ve f_S bir EK-sol ideal olsun. O halde, Önerme 3.17'den, f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir. İspatın devamı, Önerme 3.56'dan açıktır.

3.60. Önerme g_S , U üzerinde bir esnek küme ve f_S bir EK-sağ ideal olsun. Bu durumda, $g_S \circ f_S$ bir EK-sağ quasi-iç idealdir.

İspat: g_S , U üzerinde bir esnek küme ve f_S bir EK-sağ ideal olsun. O halde, Önerme 3.21'den, f_S bir EK-sağ quasi-iç idealdir. İspatın devamı, Önerme 3.57'den açıktır.

3.61. Önerme g_S bir EK-sol ideal ve f_S bir EK-sağ ideal olsun. Bu durumda, $g_S \circ f_S$ bir EK-quasi-iç idealdir.

İspat: g_S bir EK-sol ideal ve f_S bir EK-sağ ideal olsun. O halde, Önerme 3.17'den, g_S bir EK-sol quasi-iç idealdir ve Önerme 3.56'dan, $g_S \circ f_S$ bir EK-sol quasi-iç idealdir. Benzer şekilde, Önerme 3.21'den, f_S bir EK-sağ quasi-iç idealdir ve Önerme 3.57'den, $g_S \circ f_S$ bir EK-sağ quasi-iç idealdir. Böylece, $g_S \circ f_S$ bir EK-quasi-iç idealdir.

3.62. *Sonuç* g_S ve f_S birer EK-ideal olsun. Bu durumda, $g_S \circ f_S$ bir EK-quasi-iç idealdir.

3.63. Önerme f_S , U üzerinde boş esnek kümeden farklı bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S 'nin, $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S$ ($f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}$)'yi içeren her bir esnek alt kümesi, bir EK-sol (sağ) quasi-iç idealdir.

İspat: İspat, EK-sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , U üzerinde bir esnek küme ve g_S , f_S 'nin $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S$ 'yi içeren bir alt yarı grubu olsun. Böylece,

$$\tilde{S} \circ g_S \circ \tilde{S} \circ g_S \subseteq \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq g_S$$

olduğundan, g_S bir EK-sol quasi-iç idealdir.

3.64. Teorem f_S , U üzerinde boş esnek kümeden farklı bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S 'nin $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S$ ve $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}$ 'yi içeren her bir esnek alt kümesi, bir EK-quasi-iç idealdir.

3.65. Önerme f_S bir EK-alt yarıgrup, g_S bir EK-sol ideal ve $f_S = g_S \circ g_S$ olsun. Bu durumda, f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-alt yarıgrup ve g_S bir EK-sol ideal olsun. Buradan, $f_S \circ f_S \subseteq f_S$ ve $\tilde{S} \circ g_S \subseteq g_S$ olduğu bilinmektedir. $f_S = g_S \circ g_S$ olmak üzere,

$$\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S = (\tilde{S} \circ g_S) \circ g_S \circ (\tilde{S} \circ g_S) \circ g_S \subseteq (g_S \circ g_S) \circ (g_S \circ g_S) = f_S \circ f_S \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir.

3.66. Önerme f_S bir EK-alt yarıgrup, g_S bir EK-sağ ideal ve $f_S = g_S \circ g_S$ olsun. Bu durumda, f_S bir EK-sağ quasi-iç idealdir.

İspat: f_S bir EK-alt yarıgrup ve g_S bir EK-sağ ideal olsun. Buradan, $f_S \circ f_S \subseteq f_S$ ve $g_S \circ \tilde{S} \subseteq \tilde{S}$ olduğu bilinmektedir. $f_S = g_S \circ g_S$ olmak üzere,

$$f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} = g_S \circ (g_S \circ \tilde{S}) \circ g_S \circ (g_S \circ \tilde{S}) \subseteq (g_S \circ g_S) \circ (g_S \circ g_S) = f_S \circ f_S \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ quasi-iç idealdir.

3.67. Teorem f_S bir EK-alt yarıgrup, g_S bir EK-ideal ve $f_S = g_S \circ g_S$ olsun. Bu durumda, f_S bir EK-quasi-iç idealdir.

3.68. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve $\tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olsun. Bu durumda, f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir.

İspat: f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. $\tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olmak üzere,

$$\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir.

3.69. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve $f_S \circ \mathbb{S} \circ \mathbb{S} \circ \mathbb{S} \subseteq f_S$ olsun. Bu durumda, f_S bir EK-sağ quasi-iç idealdir.

İspat: f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. $f_S \circ \mathbb{S} \circ \mathbb{S} \circ \mathbb{S} \subseteq f_S$ olmak üzere,

$$f_S \circ \mathbb{S} \circ f_S \circ \mathbb{S} \subseteq f_S \circ \mathbb{S} \circ \mathbb{S} \circ \mathbb{S} \subseteq f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ quasi-iç idealdir.

3.70. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme, $\mathbb{S} \circ \mathbb{S} \circ \mathbb{S} \circ f_S \subseteq f_S$ ve $f_S \circ \mathbb{S} \circ \mathbb{S} \circ \mathbb{S} \subseteq f_S$ olsun. Bu durumda, f_S bir EK-quasi-iç idealdir.

3.71. Önerme f_S , bir EK-alt yarıgrup, $Im(f_S)$, f_S 'nin görüntü kümesi, $\alpha \in Im(f_S)$ olmak üzere α , U kümesinin alt kümesi olsun. f_S , bir EK-sol (sağ) quasi-iç ideal ise $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrupunun bir sol (sağ) quasi-iç idealidir.

İspat: İspat, EK-sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. Bazı $x \in S$ için, $f_S(x) = \alpha$ ise $\emptyset \neq \mathcal{U}(f_S; \alpha) \subseteq S$ olur. $k \in [S \cdot \mathcal{U}(f_S; \alpha) \cdot S \cdot \mathcal{U}(f_S; \alpha)]$ olsun. $k = axby$ olacak şekilde $x, y \in \mathcal{U}(f_S; \alpha)$ ve $a, b \in S$ alalım. O halde, $f_S(x) \supseteq \alpha$, ve $f_S(y) \supseteq \alpha$ elde edilir. f_S , bir EK-sol quasi-iç ideal olduğundan,

$$f_S(k) = f_S(axby) \supseteq f_S(x) \cap f_S(y) \supseteq \alpha \cap \alpha = \alpha$$

elde edilir. Buradan, $f_S(k) \supseteq \alpha$ yani, $k \in \mathcal{U}(f_S; \alpha)$. Böylece, $S \cdot \mathcal{U}(f_S; \alpha) \cdot S \cdot \mathcal{U}(f_S; \alpha) \subseteq \mathcal{U}(f_S; \alpha)$ elde edilir. Ayrıca, f_S , bir EK-alt yarıgrup olup, Önerme 2.4.3'ten, $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrupunun bir alt yarıgrupudur. O halde, $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrupunun bir sol quasi-iç idealidir.

3.72. Teorem f_S , bir EK-alt yarıgrup, $Im(f_S)$, f_S 'nin görüntü kümesi, $\alpha \in Im(f_S)$ olmak üzere α , U kümesinin alt kümesi olsun. f_S bir EK-quasi-iç ideal ise $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrupunun bir quasi-iç idealidir.

Teorem 3.72'yi bir örnek ile gösterelim:

3.73. *Örnek* Örnek 3.2'deki f_S esnek kümesini ele alalım. Örnek 3.2'deki, f_S esnek kümesinin bir EK-quasi-iç ideal olduğu açıktır.

$$Im(f_S) = \{\{1,5,7,11\}, \{1,5,7\}, \{1,5\}\}$$

olduğu dikkate alınarak,

$$\mathcal{U}(f_S; \alpha) = \begin{cases} \{p, r, s\}, & \alpha = \{1,5\} \\ \{p, r\}, & \alpha = \{1,5,7\} \\ \{p\}, & \alpha = \{1,5,7,11\} \end{cases}$$

elde edilir.

Burada $\{p, r, s\}$, $\{p, r\}$ ve $\{p\}$ kümeleri S yarıgrubunun birer alt yarıgrubudur. Gerçekten de;

$$\{p, r, s\} \cdot \{p, r, s\} = \{p, r\} \subseteq \{p, r, s\},$$

$$\{p, r\} \cdot \{p, r\} = \{p, r\} \subseteq \{p, r\},$$

$$\{p\} \cdot \{p\} = \{p\} \subseteq \{p\}$$

olduğundan, her bir $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrubunun birer alt yarıgrubudur.

Burada $\{p, r, s\}$, $\{p, r\}$ ve $\{p\}$ kümeleri S yarıgrubunun birer quasi-iç idealidir. Gerçekten de;

$$S \cdot \{p, r, s\} \cdot S \cdot \{p, r, s\} = \{p, r\} \subseteq \{p, r, s\},$$

$$S \cdot \{p, r\} \cdot S \cdot \{p, r\} = \{p, r\} \subseteq \{p, r\},$$

$$S \cdot \{p\} \cdot S \cdot \{p\} = \{p\} \subseteq \{p\}$$

olduğundan her bir $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrubunun birer sol quasi-iç ideali ve benzer şekilde,

$$\{p, r, s\} \cdot S \cdot \{p, r, s\} \cdot S = \{p, r\} \subseteq \{p, r, s\},$$

$$\{p, r\} \cdot S \cdot \{p, r\} \cdot S = \{p, r\} \subseteq \{p, r\},$$

$$\{p\} \cdot S \cdot \{p\} \cdot S = \{p\} \subseteq \{p\}$$

olduğundan her bir $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrubunun birer sağ quasi-iç idealidir. Böylece, her bir $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, S yarıgrubunun birer quasi-iç idealidir.

Şimdi ise Örnek 3.2'deki g_S esnek kümesini ele alalım.

$$Im(g_S) = \{\{6,12\}, \{2,4,6,10\}, \{13\}\}$$

olduğu dikkate alınarak,

$$\mathcal{U}(g_S; \alpha) = \begin{cases} \{s\}, & \alpha = \{13\} \\ \{p\}, & \alpha = \{6,12\} \\ \{r\}, & \alpha = \{2,4,6,10\} \end{cases}$$

elde edilir.

Burada, $\{s\}$ kümesi S yarıgrubunun bir quasi-iç ideali değildir. Gerçekten de;

$$S \cdot \{s\} \cdot S \cdot \{s\} = \{p, r\} \not\subseteq \{s\}$$

olduğundan $\mathcal{U}(g_S; \alpha)$ 'lardan birinin S yarıgrubunun bir sol quasi-iç ideali olmadığı dolayısıyla, her $\mathcal{U}(g_S; \alpha)$ 'nın S yarıgrubunun bir quasi-iç ideali olmadığı görülmektedir. Diğer taraftan g_S esnek kümesinin bir EK-quasi-iç ideal olmadığı Örnek 3.2'den açıktır.

3.74. Tanım f_S , bir EK-sol (sağ) quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$ sol (sağ) quasi-iç ideallerine, f_S 'nin üst α -sol (sağ) quasi-iç idealleri denir.

3.75. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve her $\alpha \subseteq U$ için, $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, f_S 'nin birer üst α -sol (sağ) quasi-iç idealleri ve $Im(f_S)$ bir kapsama altında sıralı küme olsun. Bu durumda, f_S bir EK-sol (sağ) quasi-iç idealdir.

İspat: İspat, EK-sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. $a, b, x, y \in S$ ve $f_S(x) = \alpha_1$ ve $f_S(y) = \alpha_2$. $\alpha_1 \subseteq \alpha_2$ olsun. Buradan, $x \in \mathcal{U}(f_S; \alpha_1)$ ve $y \in \mathcal{U}(f_S; \alpha_2)$ elde edilir. $\alpha_1 \subseteq \alpha_2$ olduğundan, $x, y \in \mathcal{U}(f_S; \alpha_1)$ ve her $\alpha_1 \subseteq U$ için, $\mathcal{U}(f_S; \alpha_1)$ S yarıgrubunun bir quasi-iç ideali olduğundan, $axby \in \mathcal{U}(f_S; \alpha_1)$. Böylece, $f_S(axby) \supseteq \alpha_1 = \alpha_1 \cap \alpha_2 = f_S(x) \cap f_S(y)$. O halde, f_S bir EK-sol quasi-iç idealdir.

3.76. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme ve her $\alpha \subseteq U$ için, $\mathcal{U}(f_S; \alpha)$, f_S 'nin birer üst α -quasi-iç idealleri olsun. Bu durumda, f_S bir EK-quasi-iç idealdir.

3.77. Önerme f_S ve f_T , U üzerinde birer esnek küme ve Ψ , S 'den T 'ye bir yarıgrup izomorfizması olsun. f_S , S yarıgrubunun bir EK-sol (sağ) quasi-iç ideali ise $\Psi(f_S)$, T yarıgrubunun bir EK-sol (sağ) quasi-iç idealidir.

İspat: İspat, EK-sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. $t_1, t_2, t_3, t_4 \in T$ alalım. Ψ örten olduğundan, $\Psi(s_1) = t_1$, $\Psi(s_2) = t_2$, $\Psi(s_3) = t_3$ ve $\Psi(s_4) = t_4$ olacak şekilde $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$ vardır. O halde,

$$\begin{aligned}
 (\Psi(f_S))(t_1 t_2 t_3 t_4) &= \bigcup \{f_S(s) : s \in S, \Psi(f_S) = t_1 t_2 t_3 t_4\} \\
 &= \bigcup \{f_S(s) : s \in S, s = \Psi^{-1}(t_1 t_2 t_3 t_4)\} \\
 &= \bigcup \{f_S(s) : s \in S, s = \Psi^{-1}(\Psi(s_1 s_2 s_3 s_4)) = s_1 s_2 s_3 s_4\} \\
 &= \bigcup \{f_S(s_1 s_2 s_3 s_4) : s_i \in S, \Psi(s_i) = t_i, i = 1, 2, 3, 4\} \\
 &\supseteq \bigcup \{f_S(s_2) \cap f_S(s_4) : s_2, s_4 \in S, \Psi(s_2) = t_2 \text{ ve } \Psi(s_4) = t_4\} \\
 &= (\Psi(f_S))(s_2) \cap (\Psi(f_S))(s_4)
 \end{aligned}$$

oldüğundan, $\Psi(f_S)$, T yarıgrubunun bir EK-sol quasi-iç idealidir.

3.78. Teorem f_S ve f_T , U üzerinde birer esnek küme ve Ψ , S 'den T 'ye bir yarıgrup izomorfizması olsun. f_S , S yarıgrubunun bir EK-quasi-iç ideali ise $\Psi(f_S)$, T yarıgrubunun bir EK-quasi-iç idealidir.

3.79. Önerme f_S ve f_T , U üzerinde birer esnek küme ve Ψ , S 'den T 'ye bir yarıgrup izomorfizması olsun. f_T , T yarıgrubunun bir EK-sol (sağ) quasi-iç ideali ise $\Psi^{-1}(f_T)$, S yarıgrubunun bir EK-sol (sağ) quasi-iç idealidir.

İspat: İspat, EK-sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$ alalım. O halde,

$$\begin{aligned} (\Psi^{-1}(f_T))(s_1 s_2 s_3 s_4) &= f_T(\Psi(s_1 s_2 s_3 s_4)) \\ &= f_T(\Psi(s_1) \Psi(s_2) \Psi(s_3) \Psi(s_4)) \\ &\supseteq f_T(\Psi(s_2)) \cap f_T(\Psi(s_4)) \\ &= (\Psi^{-1}(f_T))(s_2) \cap (\Psi^{-1}(f_T))(s_4) \end{aligned}$$

olduğundan, $\Psi^{-1}(f_T)$, S yarıgrubunun bir EK-sol quasi-iç idealidir.

3.80. Teorem f_S ve f_T , U üzerinde birer esnek küme ve Ψ , S 'den T 'ye bir yarıgrup izomorfizması olsun. f_T , T yarıgrubunun bir EK-quasi-iç ideali ise $\Psi^{-1}(f_T)$, S yarıgrubunun bir EK-quasi-iç idealidir.

3.81. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. S bir regüler yarıgruptur.
2. Her EK-sol quasi-iç ideal için, $f_S = \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S$.

İspat: (1)'i kabul edelim. S regüler, f_S bir EK-sol quasi-iç ideal ve $x \in S$ olsun. O halde, $\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \subseteq f_S$ ve $x = xyx$ olacak şekilde $y \in S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}} \circ f_S)(x) = \bigcup_{x=ab} \{(\tilde{\mathbb{S}} \circ f_S \circ \tilde{\mathbb{S}})(a) \cap f_S(b)\}$$

$$\begin{aligned}
&\supseteq (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(xy) \cap f_S(x) \\
&= \left[\bigcup_{xy=ab} \{(\tilde{S} \circ f_S)(a) \cap \tilde{S}(b)\} \right] \cap f_S(x) \\
&\supseteq \{(\tilde{S} \circ f_S)(x) \cap \tilde{S}(yxy)\} \cap f_S(x) \\
&= \left[\bigcup_{x=pq} \tilde{S}(p) \cap f_S(q) \right] \cap U \cap f_S(x) \\
&\supseteq \{\tilde{S}(xy) \cap f_S(x)\} \cap f_S(x) \\
&= U \cap f_S(x) \cap f_S(x) \\
&= f_S(x)
\end{aligned}$$

olduğundan, $f_S \subseteq \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S$ elde edilir. Böylece, $f_S = \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S$.

Tersine, f_S bir EK-sol quasi-iç ideal olmak üzere, $f_S = \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S$ olsun. S yarıgrubunun regüler olduğunu göstermek için, S yarıgrubunun her sol quasi-iç ideali A için $A = SASA$ sağlandığını göstermek gerekir. A , S yarıgrubunun bir sol quasi-iç ideali olsun. O halde, $SASA \subseteq A$ açıktır. Bu durumda, $A \subseteq SASA$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a \in A$ olsun. A , S yarıgrubunun bir sol quasi-iç ideali olduğundan, Teorem 2.4.2'den S_A bir EK-sol quasi-iç idealdir. Kabul gereği ve Teorem 2.3.19'dan,

$$S_A(a) = (\tilde{S} \circ S_A \circ \tilde{S} \circ S_A)(a) = (S_S \circ S_A \circ S_S \circ S_A)(a) = S_{SASA}(a) = U$$

elde edilir. Buradan $a \in SASA$ olup, $A = SASA$ elde edilir. Böylece, S regüler bir yarıgruptur.

3.82. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. S regülerdir.
2. Her EK-sağ quasi-iç ideal için, $f_S = f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}$.

İspat: (1)'i kabul edelim. S regüler, f_S bir EK-sağ quasi-iç ideal ve $x \in S$ olsun. O halde, $f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \subseteq f_S$ ve $x = xyx$ olacak şekilde $y \in S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\begin{aligned}
(f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(x) &= \bigcup_{x=ab} \{f_S(a) \cap (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(b)\} \\
&\supseteq f_S(x) \cap (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(yx) \\
&= f_S(x) \cap \left[\bigcup_{yx=ab} \{\tilde{S}(a) \cap (f_S \circ \tilde{S})(b)\} \right] \\
&\supseteq f_S(x) \cap \tilde{S}(yxy) \cap (f_S \circ \tilde{S})(x) \\
&= f_S(x) \cap U \cap \left[\bigcup_{x=pq} f_S(p) \cap \tilde{S}(q) \right] \\
&\supseteq f_S(x) \cap \{f_S(x) \cap \tilde{S}(yx)\} \\
&= f_S(x) \cap f_S(x) \cap U \\
&= f_S(x)
\end{aligned}$$

olduğundan, $f_S \subseteq f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}$ elde edilir. Böylece, $f_S = f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}$.

Tersine, f_S bir EK-sağ quasi-iç ideal olmak üzere, $f_S = f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}$ olsun. S yarıgrubunun regüler olduğunu göstermek için, S yarıgrubunun her sağ quasi-iç ideali A için $A = ASAS$ sağlandığını göstermek gerekir. A , S yarıgrubunun bir sağ quasi-iç ideali olsun. O halde, $ASAS \subseteq A$ açıktır. Bu durumda, $A \subseteq ASAS$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a \in A$ olsun. A , S yarıgrubunun bir sağ quasi-iç ideali olduğundan, Teorem 2.4.2'den S_A bir EK-sağ quasi-iç idealdir. Kabul gereği ve Teorem 2.3.19'dan,

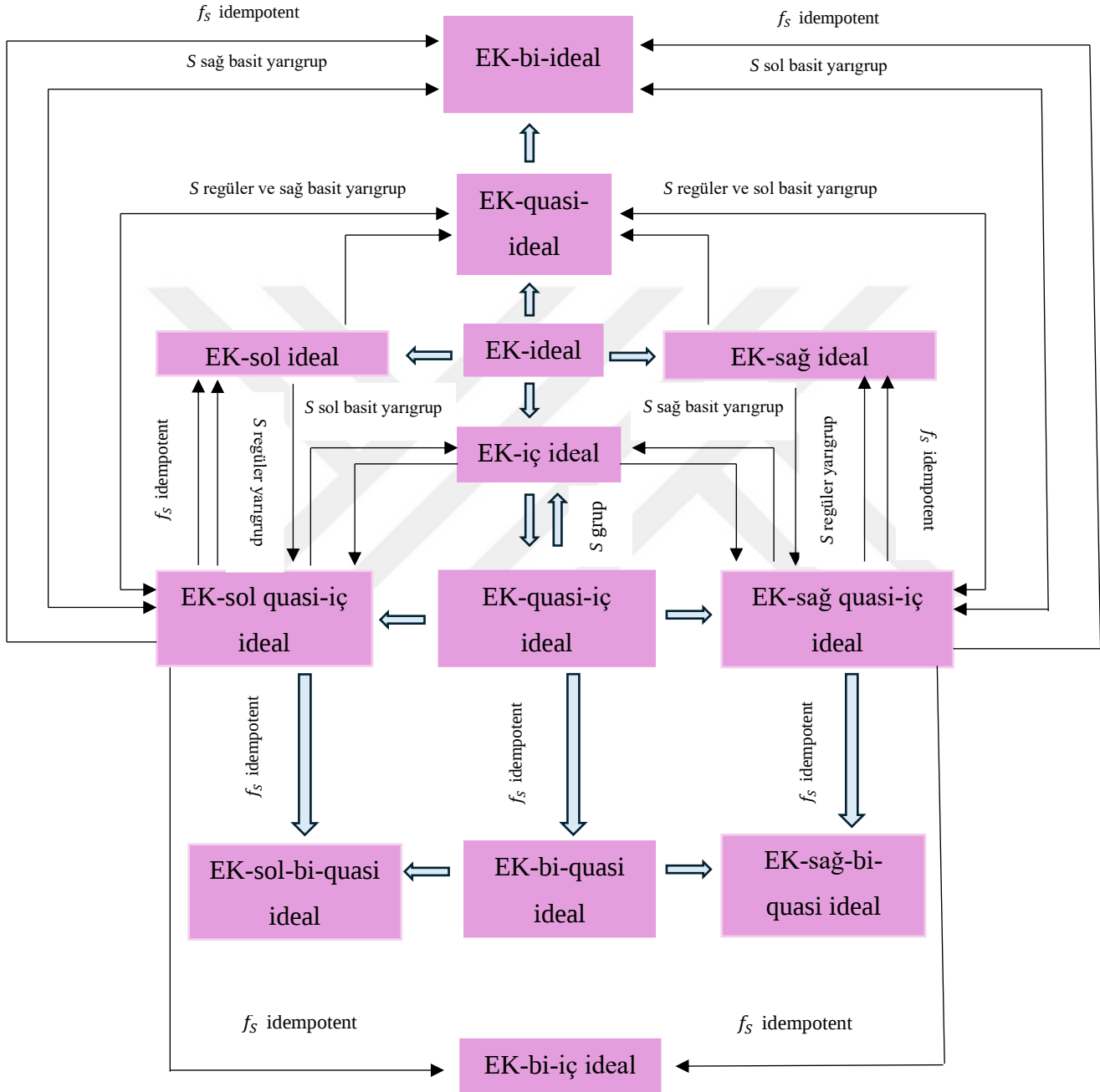
$$S_A(a) = (S_A \circ \tilde{S} \circ S_A \circ \tilde{S})(a) = (S_A \circ S_S \circ S_A \circ S_S)(a) = S_{ASAS}(a) = U$$

elde edilir. Buradan $a \in ASAS$ olup, $A = ASAS$ elde edilir. Böylece, S regüler bir yarıgruptur.

3.83. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

1. S regülerdir.
2. Her EK-quasi-iç ideal için, $f_S = \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S = f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S}$.

Birkaç esnek kesişimsel ideal ile bunların genelleştirilmiş idealleri arasındaki ilişki Şekil 3.1’de gösterilmiştir. Burada $A \rightarrow B$, A ’nın B olduğunu ancak B ’nin her zaman A olmayabileceğini gösterir.



Şekil 3. 1. Bazı esnek kesişimsel idealler arasındaki ilişkileri gösteren diyagram

4. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN QUASI-İDEALLERİ

Bu bölüm, yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen quasi-idealleri üzerine olup, bölümde Sezgin ve Kocakaya (Baskıda) çalışmasından elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

4.1. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x, y \in S$ için, $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ise f_S esnek kümesine, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen quasi-ideali denir.

4.2. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x \in S$ için, $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_x \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ ise f_S esnek kümesine, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen quasi-ideali denir.

Bundan sonra, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen quasi-ideali kısaca “EK-hemen hemen quasi-ideal” ve S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen quasi-ideali kısaca “EK-zayıf hemen hemen quasi-ideal” olarak gösterilecektir.

Ayrıca, esnek kesişim işleminin $S_E(U)$ ’da değişmeli olması nedeniyle, Tanım 4.1’de, her $x, y \in S$ için, $(f_S \circ S_x)$ ve $(S_y \circ f_S)$ ’nin birbiriyle değişebileceği açıktır.

4.3. Örnek $S = \{m, n\}$ kümesi üzerinde, Tablo 4.1 yardımıyla tanımlanan “.” ikili işlemi ile $(S, \cdot)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\cdot$	m	n
m	m	n
n	n	n

Tablo 4.1. Örnek 4.3’teki “.” ikili işlemi

$U = \mathbb{Z}^+$ evrensel kümesi üzerinde, f_S , h_S ve g_S esnek kümeleri,

$$f_S = \{(m, \{2, 3\}), (n, \{4, 5\})\}$$

$$h_S = \{(m, \{6, 7\}), (n, \{1, 8\})\}$$

$$g_S = \{(m, \{9, 12, 15\}), (n, \emptyset)\}$$

şeklinde tanımlansın.

Burada, f_S ve h_S birer EK-hemen hemen quasi-idealdir. Öncelikle, her $x, y \in S$ için, $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim.

S_m, S_m ile başlayacak olursak:

$$\begin{aligned} & [[(f_S \circ S_m) \tilde{\cap} (S_m \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S] (m) = (f_S \circ S_m)(m) \cap (S_m \circ f_S)(m) \cap f_S(m) = \\ & \{(f_S(m) \cap S_m(m)) \cap (S_m(m) \cap f_S(m))\} \cap f_S(m) = f_S(m) \cap f_S(m) \cap f_S(m) = \\ & f_S(m) = \{2, 3\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [[(f_S \circ S_m) \tilde{\cap} (S_m \circ f_S) \tilde{\cap} f_S] (n) = (f_S \circ S_m)(n) \cap (S_m \circ f_S)(n) \cap f_S(n) = \\ & \left[[(f_S(m) \cap S_m(n)) \cup (f_S(n) \cap S_m(m)) \cup (f_S(n) \cap S_m(n))] \cap [(S_m(m) \cap \right. \\ & \left. f_S(n)) \cup (S_m(n) \cap f_S(m)) \cup (S_m(n) \cap f_S(n))] \cap f_S(n) \right] = f_S(n) \cap f_S(n) \cap \\ & f_S(n) = \{4, 5\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan,

$$[(f_S \circ S_m) \tilde{\cap} (S_m \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = \{(m, \{2, 3\}), (n, \{4, 5\})\} \neq \emptyset_S$$

S_n, S_n ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned} & [[(f_S \circ S_n) \tilde{\cap} (S_n \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S] (m) = (f_S \circ S_n)(m) \cap (S_n \circ f_S)(m) \cap f_S(m) = \\ & (f_S(m) \cap S_n(m)) \cap (S_n(m) \cap f_S(m)) \cap f_S(m) = \emptyset \cap \emptyset \cap f_S(m) = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[(f_S \circ S_n) \tilde{\cap} (S_n \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S](n) = (f_S \circ S_n)(n) \cap (S_n \circ f_S)(n) \cap f_S(n) = \\
& \left[[(f_S(m) \cap S_n(n)) \cup (f_S(n) \cap S_n(m)) \cup (f_S(n) \cap S_n(n))] \cap [(S_n(m) \cap f_S(n)) \cup \right. \\
& \left. (S_n(n) \cap f_S(m)) \cup (S_n(n) \cap f_S(n))] \cap f_S(n) \right] = (f_S(m) \cup f_S(n)) \cap (f_S(m) \cup \\
& f_S(n)) \cap f_S(n) = f_S(n) = \{4, 5\} \neq \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$[(f_S \circ S_n) \tilde{\cap} (S_n \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = \{(m, \emptyset), (n, \{4, 5\})\} \neq \emptyset_S$$

Böylece, her $x \in S$ için, $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_x \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ sağlandığından, f_S bir EK-zayıf hemen hemen quasi-idealdir. Ayrıca,

S_m, S_n ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned}
& [[(f_S \circ S_m) \tilde{\cap} (S_n \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S](m) = (f_S \circ S_m)(m) \cap (S_n \circ f_S)(m) \cap f_S(m) = \\
& (f_S(m) \cap S_m(m)) \cap (S_n(m) \cap f_S(m)) \cap f_S(m) = f_S(m) \cap \emptyset \cap f_S(m) = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[(f_S \circ S_m) \tilde{\cap} (S_n \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S](n) = (f_S \circ S_m)(n) \cap (S_n \circ f_S)(n) \cap f_S(n) = \\
& \left[[(f_S(m) \cap S_m(n)) \cup (f_S(n) \cap S_m(m)) \cup (f_S(n) \cap S_m(n))] \cap [(S_n(m) \cap \right. \\
& \left. f_S(n)) \cup (S_n(n) \cap f_S(m)) \cup (S_n(n) \cap f_S(n))] \cap f_S(n) \right] = f_S(n) \cap (f_S(m) \cup \\
& f_S(n)) \cap f_S(n) = f_S(n) = \{4, 5\} \neq \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$[(f_S \circ S_m) \tilde{\cap} (S_n \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = \{(m, \emptyset), (n, \{4, 5\})\} \neq \emptyset_S$$

S_n, S_m ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned}
& [[(f_S \circ S_n) \tilde{\cap} (S_m \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S](m) = (f_S \circ S_n)(m) \cap (S_m \circ f_S)(m) \cap f_S(m) = \\
& (f_S(m) \cap S_n(m)) \cap (S_m(m) \cap f_S(m)) \cap f_S(m) = \emptyset \cap f_S(m) \cap f_S(m) = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[(f_S \circ S_n) \tilde{\cap} (S_m \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S] (n) = (f_S \circ S_n)(n) \cap (S_m \circ f_S)(n) \cap f_S(n) = \\
& \left[[(f_S(m) \cap S_n(n)) \cup (f_S(n) \cap S_n(m)) \cup (f_S(n) \cap S_n(n))] \cap [(S_m(m) \cap \right. \\
& \left. f_S(n)) \cup (S_m(n) \cap f_S(m)) \cup (S_m(n) \cap f_S(n))] \cap f_S(n) \right] = (f_S(m) \cup f_S(n)) \cap \\
& f_S(n) \cap f_S(n) = f_S(n) = \{4, 5\} \neq \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$[(f_S \circ S_n) \tilde{\cap} (S_m \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = \{(m, \emptyset), (n, \{4, 5\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, her $x, y \in S$ için, $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ sağlandığından, f_S bir EK-hemen hemen quasi-idealdir.

Benzer şekilde, h_S bir EK-zayıf hemen hemen quasi-ideal ve EK-hemen hemen quasi-idealdir. Gerçekten,

$$[(h_S \circ S_m) \tilde{\cap} (S_m \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S = \{(m, \{6, 7\}), (n, \{1, 8\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(h_S \circ S_n) \tilde{\cap} (S_n \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S = \{(m, \emptyset), (n, \{1, 8\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, h_S bir EK-zayıf hemen hemen quasi-idealdir. Ayrıca,

$$[(h_S \circ S_m) \tilde{\cap} (S_n \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S = \{(m, \emptyset), (n, \{1, 8\})\} \neq \emptyset_S$$

$$[(h_S \circ S_n) \tilde{\cap} (S_m \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S = \{(m, \emptyset), (n, \{1, 8\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, h_S bir EK-hemen hemen quasi-idealdir. Fakat, g_S ne bir EK-zayıf hemen hemen quasi-idealdir ne de bir EK-hemen hemen quasi-idealdir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
& [[(g_S \circ S_n) \tilde{\cap} (S_n \circ g_S)] \tilde{\cap} g_S] (m) = (g_S \circ S_n)(m) \cap (S_n \circ g_S)(m) \cap g_S(m) = \\
& (g_S(m) \cap S_n(m)) \cap (S_n(m) \cap g_S(m)) \cap g_S(m) = \emptyset \cap \emptyset \cap g_S(m) = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[(g_S \circ S_n) \tilde{\cap} (S_n \circ g_S)] \tilde{\cap} g_S](n) = (g_S \circ S_n)(n) \cap (S_n \circ g_S)(n) \cap g_S(n) = \\
& \left[[(g_S(m) \cap S_n(n)) \cup (g_S(n) \cap S_n(m)) \cup (g_S(n) \cap S_n(n))] \cap [(S_n(m) \cap \right. \\
& \left. g_S(n)) \cup (S_n(n) \cap g_S(m)) \cup (S_n(n) \cap g_S(n))] \cap g_S(n) \right] = (g_S(m) \cup g_S(n)) \cap \\
& (g_S(m) \cup g_S(n)) \cap g_S(n) = g_S(n) = \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan, $n \in S$ için, $[(g_S \circ S_n) \tilde{\cap} (S_n \circ g_S)] \tilde{\cap} g_S = \{(m, \emptyset), (n, \emptyset)\} = \emptyset_S$ elde edilir. O halde, g_S bir EK-zayıf hemen hemen quasi-ideal değildir. Bu durumda, g_S esnek kümesinin bir EK-hemen hemen quasi-ideal olmadığı açıktır.

4.4. Teorem f_S , bir EK-hemen hemen quasi-ideal ise bir EK-zayıf hemen hemen quasi-idealdir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen quasi-ideal olsun. O halde, her $x, y \in S$ için, $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ sağlanır. Buradan,

$$[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_x \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, f_S esnek kümesinin bir EK-zayıf hemen hemen quasi-ideal olduğu açıktır.

EK-zayıf hemen hemen quasi-ideal, EK-hemen hemen quasi-idealın bir genellemesi olduğundan, bundan sonra tüm teoremler ve ispatlar EK-zayıf hemen hemen quasi-ideal yerine EK-hemen hemen quasi-ideal için verilmiştir.

f_S , bir EK-zayıf hemen hemen quasi-ideal ise bir EK-hemen hemen quasi-ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

4.5. Örnek $S = \{k, c, y\}$ kümesi üzerinde, Tablo 4.2 yardımıyla tanımlanan “.” ikili işlemi ile $(S, \cdot)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

.	k	c	y
k	k	c	y
c	c	y	k
y	y	k	c

Tablo 4.2. Örnek 4.5'teki “.” ikili işlemi

$U = \mathbb{Z}^+$ evrensel kümesi üzerinde, f_S esnek kümesi,

$$f_S = \{(k, \{3, 7, 9\}), (c, \{7, 8\}), (y, \{3, 5\})\}$$

şeklinde tanımlansın.

Burada, f_S bir EK-zayıf hemen hemen quasi-idealdir. Öncelikle, her $x \in S$ için, $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_x \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim.

S_k, S_k ile başlayacak olursak:

$$\begin{aligned} & [[(f_S \circ S_k) \tilde{\cap} (S_k \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S](k) = (f_S \circ S_k)(k) \cap (S_k \circ f_S)(k) \cap f_S(k) = \\ & \left[[(f_S(k) \cap S_k(k)) \cup (f_S(c) \cap S_k(y)) \cup (f_S(y) \cap S_k(c))] \cap [(S_k(k) \cap f_S(k)) \cup \right. \\ & \left. (S_k(c) \cap f_S(y)) \cup (S_k(y) \cap f_S(c))] \cap f_S(k) \right] = f_S(k) \cap f_S(k) \cap f_S(k) = \\ & f_S(k) = \{3, 7, 9\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [[(f_S \circ S_k) \tilde{\cap} (S_k \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S](c) = (f_S \circ S_k)(c) \cap (S_k \circ f_S)(c) \cap f_S(c) = \\ & \left[[(f_S(k) \cap S_k(c)) \cup (f_S(c) \cap S_k(k)) \cup (f_S(y) \cap S_k(y))] \cap [(S_k(k) \cap f_S(c)) \cup \right. \\ & \left. (S_k(c) \cap f_S(k)) \cup (S_k(y) \cap f_S(y))] \cap f_S(c) \right] = f_S(c) \cap f_S(c) \cap f_S(c) = \\ & f_S(c) = \{7, 8\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [[(f_S \circ S_k) \tilde{\cap} (S_k \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S](y) = (f_S \circ S_k)(y) \cap (S_k \circ f_S)(y) \cap f_S(y) = \\ & \left[[(f_S(k) \cap S_k(y)) \cup (f_S(c) \cap S_k(c)) \cup (f_S(y) \cap S_k(k))] \cap [(S_k(k) \cap f_S(y)) \cup \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (S_k(c) \cap f_S(c)) \cup (S_k(y) \cap f_S(k)) \cap f_S(y) = f_S(y) \cap f_S(y) \cap f_S(y) = \\ & f_S(y) = \{3, 5\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan,

$$[(f_S \circ S_k) \tilde{\cap} (S_k \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = \{(k, \{3, 7, 9\}), (c, \{7, 8\}), (y, \{3, 5\})\} \neq \emptyset_S$$

S_c, S_c ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned} & [(f_S \circ S_c) \tilde{\cap} (S_c \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S(k) = (f_S \circ S_c)(k) \cap (S_c \circ f_S)(k) \cap f_S(k) = \\ & \left[[(f_S(k) \cap S_c(k)) \cup (f_S(c) \cap S_c(y)) \cup (f_S(y) \cap S_c(c))] \cap [(S_c(k) \cap f_S(k)) \cup \right. \\ & \left. (S_c(c) \cap f_S(y)) \cup (S_c(y) \cap f_S(c))] \cap f_S(k) \right] = f_S(y) \cap f_S(y) \cap f_S(k) = \\ & f_S(y) \cap f_S(k) = \{3\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(f_S \circ S_c) \tilde{\cap} (S_c \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S(c) = (f_S \circ S_c)(c) \cap (S_c \circ f_S)(c) \cap f_S(c) = \\ & \left[[(f_S(k) \cap S_c(c)) \cup (f_S(c) \cap S_c(k)) \cup (f_S(y) \cap S_c(y))] \cap [(S_c(k) \cap f_S(c)) \cup \right. \\ & \left. (S_c(c) \cap f_S(k)) \cup (S_c(y) \cap f_S(y))] \cap f_S(c) \right] = f_S(k) \cap f_S(k) \cap f_S(c) = \\ & f_S(k) \cap f_S(c) = \{7\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(f_S \circ S_c) \tilde{\cap} (S_c \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S(y) = (f_S \circ S_c)(y) \cap (S_c \circ f_S)(y) \cap f_S(y) = \\ & \left[[(f_S(k) \cap S_c(y)) \cup (f_S(c) \cap S_c(c)) \cup (f_S(y) \cap S_c(k))] \cap [(S_c(k) \cap f_S(y)) \cup \right. \\ & \left. (S_c(c) \cap f_S(c)) \cup (S_c(y) \cap f_S(k))] \cap f_S(y) \right] = f_S(c) \cap f_S(c) \cap f_S(y) = f_S(c) \cap \\ & f_S(y) = \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan,

$$[(f_S \circ S_c) \tilde{\cap} (S_c \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = \{(k, \{3\}), (c, \{7\}), (y, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

S_y, S_y ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned}
& [[(f_s \circ S_y) \tilde{\cap} (S_y \circ f_s)] \tilde{\cap} f_s] (k) = (f_s \circ S_y)(k) \cap (S_y \circ f_s)(k) \cap f_s(k) = \\
& \left[\left[(f_s(k) \cap S_y(k)) \cup (f_s(c) \cap S_y(y)) \cup (f_s(y) \cap S_y(c)) \right] \cap \left[(S_y(k) \cap f_s(k)) \cup \right. \right. \\
& \left. \left. (S_y(c) \cap f_s(y)) \cup (S_y(y) \cap f_s(c)) \right] \cap f_s(k) \right] = f_s(c) \cap f_s(c) \cap f_s(k) = \\
& f_s(c) \cap f_s(k) = \{7\} \neq \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[(f_s \circ S_y) \tilde{\cap} (S_y \circ f_s)] \tilde{\cap} f_s] (c) = (f_s \circ S_y)(c) \cap (S_y \circ f_s)(c) \cap f_s(c) = \\
& \left[\left[(f_s(k) \cap S_y(c)) \cup (f_s(c) \cap S_y(k)) \cup (f_s(y) \cap S_y(y)) \right] \cap \left[(S_y(k) \cap f_s(c)) \cup \right. \right. \\
& \left. \left. (S_y(c) \cap f_s(k)) \cup (S_y(y) \cap f_s(y)) \right] \cap f_s(c) \right] = f_s(y) \cap f_s(y) \cap f_s(c) = \\
& f_s(y) \cap f_s(c) = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[(f_s \circ S_y) \tilde{\cap} (S_y \circ f_s)] \tilde{\cap} f_s] (y) = (f_s \circ S_y)(y) \cap (S_y \circ f_s)(y) \cap f_s(y) = \\
& \left[\left[(f_s(k) \cap S_y(y)) \cup (f_s(c) \cap S_y(c)) \cup (f_s(y) \cap S_y(k)) \right] \cap \left[(S_y(k) \cap f_s(y)) \cup \right. \right. \\
& \left. \left. (S_y(c) \cap f_s(c)) \cup (S_y(y) \cap f_s(k)) \right] \cap f_s(y) \right] = f_s(k) \cap f_s(k) \cap f_s(y) = \\
& f_s(k) \cap f_s(y) = \{3\} \neq \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$[(f_s \circ S_y) \tilde{\cap} (S_y \circ f_s)] \tilde{\cap} f_s = \{(k, \{7\}), (c, \emptyset), (y, \{3\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, her $x \in S$ için, $[(f_s \circ S_x) \tilde{\cap} (S_x \circ f_s)] \tilde{\cap} f_s \neq \emptyset_S$ sağlandığından, f_s bir EK-zayıf hemen hemen quasi-idealdir. Fakat, f_s bir EK-hemen hemen quasi-ideal değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
& [[(f_s \circ S_c) \tilde{\cap} (S_y \circ f_s)] \tilde{\cap} f_s] (k) = (f_s \circ S_c)(k) \cap (S_y \circ f_s)(k) \cap f_s(k) = \\
& \left[\left[(f_s(k) \cap S_c(k)) \cup (f_s(c) \cap S_c(y)) \cup (f_s(y) \cap S_c(c)) \right] \cap \left[(S_y(k) \cap f_s(k)) \cup \right. \right. \\
& \left. \left. (S_y(c) \cap f_s(y)) \cup (S_y(y) \cap f_s(c)) \right] \cap f_s(k) \right] = f_s(y) \cap f_s(c) \cap f_s(k) = \\
& \{3, 5\} \cap \{7, 8\} \cap \{3, 7, 9\} = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[(f_S \circ S_c) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S](c) = (f_S \circ S_c)(c) \cap (S_y \circ f_S)(c) \cap f_S(c) = \\
& \left[[(f_S(k) \cap S_c(c)) \cup (f_S(c) \cap S_c(k)) \cup (f_S(y) \cap S_c(y))] \cap [(S_y(k) \cap f_S(c)) \cup \right. \\
& \left. (S_y(c) \cap f_S(k)) \cup (S_y(y) \cap f_S(y))] \cap f_S(c) \right] = f_S(k) \cap f_S(y) \cap f_S(c) = \\
& \{3, 7, 9\} \cap \{3, 5\} \cap \{7, 8\} = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[(f_S \circ S_c) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S](y) = (f_S \circ S_c)(y) \cap (S_y \circ f_S)(y) \cap f_S(y) = \\
& \left[[(f_S(k) \cap S_c(y)) \cup (f_S(c) \cap S_c(c)) \cup (f_S(y) \cap S_c(k))] \cap [(S_y(k) \cap f_S(y)) \cup \right. \\
& \left. (S_y(c) \cap f_S(c)) \cup (S_y(y) \cap f_S(k))] \cap f_S(y) \right] = f_S(c) \cap f_S(k) \cap f_S(y) = \\
& \{7, 8\} \cap \{3, 7, 9\} \cap \{3, 5\} = \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan, $c, y \in S$ için, $[(f_S \circ S_c) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = \{(k, \emptyset), (c, \emptyset), (y, \emptyset)\} = \emptyset_S$ elde edilir. O halde, f_S bir EK-hemen hemen quasi-ideal değildir.

4.6. Teorem f_S , bir EK-quasi-ideal olsun. Her $x, y \in S$ için, ya $(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S) = \emptyset_S$ 'dir ya da f_S , bir EK-hemen hemen quasi-idealdir.

İspat: f_S , bir EK-quasi-ideal olsun. O halde, $(f_S \circ \mathbb{S}) \tilde{\cap} (\mathbb{S} \circ f_S) \subseteq f_S$ sağlanır. $(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S) \neq \emptyset_S$ olsun. Her $x, y \in S$ için, $(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S) \subseteq (f_S \circ \mathbb{S}) \tilde{\cap} (\mathbb{S} \circ f_S) \subseteq f_S$ olup buradan $(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S) \subseteq f_S$. $(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S) \neq \emptyset_S$ olduğundan,

$$[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S = (f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S) \neq \emptyset_S$$

Böylece, $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olup, f_S bir EK-hemen hemen quasi idealdir.

Burada, $(\emptyset_S \circ \mathbb{S}) \tilde{\cap} (\mathbb{S} \circ \emptyset_S) = \emptyset_S \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S \subseteq \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ kümesinin bir EK-quasi-ideal olduğu açıktır. Fakat, her $x, y \in S$ için, $[(\emptyset_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ \emptyset_S)] \tilde{\cap} \emptyset_S = (\emptyset_S \tilde{\cap} \emptyset_S) \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ esnek kümesi bir EK-hemen hemen quasi-ideal değildir.

f_S , bir EK-hemen hemen quasi-ideal ise EK-quasi-ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

4.7. *Örnek* Örnek 4.3'te verilen f_S ve h_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve h_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen quasi-ideal olduğu, Örnek 4.3'te gösterilmiştir. Fakat, f_S ve h_S birer EK-quasi-ideal değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} [(f_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ f_S)](n) &= (f_S \circ \tilde{S})(n) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(n) = \left[\left[(f_S(m) \cap \tilde{S}(n)) \cup \right. \right. \\ &\left. \left. (f_S(n) \cap \tilde{S}(m)) \right) \cup (f_S(n) \cap \tilde{S}(n)) \right] \cap \left[(\tilde{S}(m) \cap f_S(n)) \cup (\tilde{S}(n) \cap f_S(m)) \cup \right. \\ &\left. (\tilde{S}(n) \cap f_S(n)) \right] = [f_S(m) \cup f_S(n)] \cap [f_S(n) \cup f_S(m)] = [f_S(m) \cup f_S(n)] \not\subseteq f_S(n) \end{aligned}$$

olduğundan, f_S bir EK-quasi-ideal değildir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} [(h_S \circ \tilde{S}) \tilde{\cap} (\tilde{S} \circ h_S)](n) &= (h_S \circ \tilde{S})(n) \cap (\tilde{S} \circ h_S)(n) = \left[\left[(h_S(m) \cap \tilde{S}(n)) \cup \right. \right. \\ &\left. \left. (h_S(n) \cap \tilde{S}(m)) \right) \cup (h_S(n) \cap \tilde{S}(n)) \right] \cap \left[(\tilde{S}(m) \cap h_S(n)) \cup (\tilde{S}(n) \cap h_S(m)) \cup \right. \\ &\left. (\tilde{S}(n) \cap h_S(n)) \right] = [h_S(m) \cup h_S(n)] \cap [h_S(n) \cup h_S(m)] = [h_S(m) \cup h_S(n)] \not\subseteq \\ &h_S(n) \end{aligned}$$

olduğundan, h_S bir EK-quasi-ideal değildir.

4.8. *Önerme* f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen quasi-ideal ise bir EK-hemen hemen sol idealdir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen quasi-ideal olsun. O halde, her $x, y \in S$ için, $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y)] \neq \emptyset_S$. Buradan,

$$\emptyset_S \neq [(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y)] \tilde{\cap} f_S \cong (S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olup, $[(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ S_y)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen sol idealdir.

4.9. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen quasi-ideal ise bir EK-hemen hemen sağ idealdir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen quasi-ideal olsun. O halde, her $x, y \in S$ için, $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$. Buradan,

$$\emptyset_S \neq [(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \cong (f_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S$$

olup, $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen sağ idealdir.

4.10. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen quasi-ideal ise bir EK-hemen hemen idealdir.

f_S , bir EK-hemen hemen ideal ise bir EK-hemen hemen quasi-ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

4.11. Örnek Örnek 4.5'te verilen f_S esnek kümesini ele alalım. f_S esnek kümesinin bir EK-hemen hemen quasi-ideal olmadığı, Örnek 4.7'de gösterilmiştir. Fakat, f_S bir EK-hemen hemen idealdir. Öncelikle her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim.

S_k ile başlayacak olursak:

$$[(S_k \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](k) = (S_k \circ f_S)(k) \cap f_S(k) = [(S_k(k) \cap f_S(k)) \cup (S_k(c) \cap f_S(y)) \cup (S_k(y) \cap f_S(c))] \cap f_S(k) = f_S(k) = \{3, 7, 9\}$$

$$[(S_k \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](c) = (S_k \circ f_S)(c) \cap f_S(c) = [(S_k(c) \cap f_S(k)) \cup (S_k(k) \cap f_S(c)) \cup (S_k(y) \cap f_S(y))] \cap f_S(c) = f_S(c) = \{7, 8\}$$

$$[(S_k \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](y) = (S_k \circ f_S)(y) \cap f_S(y) = [(S_k(y) \cap f_S(k)) \cup (S_k(k) \cap f_S(y)) \cup (S_k(c) \cap f_S(c))] \cap f_S(y) = f_S(y) = \{3, 5\}$$

olduğundan,

$$(S_k \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(k, \{3, 7, 9\}), (c, \{7, 8\}), (y, \{3, 5\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. S_c ile devam edecek olursak:

$$[(S_c \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](k) = (S_c \circ f_S)(k) \cap f_S(k) = [(S_c(k) \cap f_S(k)) \cup (S_c(c) \cap f_S(y)) \cup (S_c(y) \cap f_S(c))] \cap f_S(k) = f_S(y) \cap f_S(k) = \{3\}$$

$$[(S_c \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](c) = (S_c \circ f_S)(c) \cap f_S(c) = [(S_c(c) \cap f_S(k)) \cup (S_c(k) \cap f_S(c)) \cup (S_c(y) \cap f_S(y))] \cap f_S(c) = f_S(k) \cap f_S(c) = \{7\}$$

$$[(S_c \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](y) = (S_c \circ f_S)(y) \cap f_S(y) = [(S_c(y) \cap f_S(k)) \cup (S_c(k) \cap f_S(y)) \cup (S_c(c) \cap f_S(c))] \cap f_S(y) = f_S(c) \cap f_S(y) = \emptyset$$

olduğundan,

$$(S_c \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(k, \{3\}), (c, \{7\}), (y, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. S_y ile devam edecek olursak:

$$[(S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](k) = (S_y \circ f_S)(k) \cap f_S(k) = [(S_y(k) \cap f_S(k)) \cup (S_y(c) \cap f_S(y)) \cup (S_y(y) \cap f_S(c))] \cap f_S(k) = f_S(c) \cap f_S(k) = \{7\}$$

$$[(S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](c) = (S_y \circ f_S)(c) \cap f_S(c) = [(S_y(c) \cap f_S(k)) \cup (S_y(k) \cap f_S(c)) \cup (S_y(y) \cap f_S(y))] \cap f_S(c) = f_S(y) \cap f_S(c) = \emptyset$$

$$[(S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](y) = (S_y \circ f_S)(y) \cap f_S(y) = [(S_y(y) \cap f_S(k)) \cup (S_y(k) \cap f_S(y)) \cup (S_y(c) \cap f_S(c))] \cap f_S(y) = f_S(k) \cap f_S(y) = \{3\}$$

olduğundan,

$$(S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(k, \{7\}), (c, \emptyset), (y, \{3\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ sağlandığından, f_S bir EK-hemen hemen sol idealdir. Şimdi, her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim.

S_k ile başlayacak olursak:

$$[(f_S \circ S_k) \tilde{\cap} f_S](k) = (f_S \circ S_k)(k) \cap f_S(k) = [(f_S(k) \cap S_k(k)) \cup (f_S(c) \cap S_k(y)) \cup (f_S(y) \cap S_k(c))] \cap f_S(k) = f_S(k) = \{3, 7, 9\}$$

$$[(f_S \circ S_k) \tilde{\cap} f_S](c) = (f_S \circ S_k)(c) \cap f_S(c) = [(f_S(c) \cap S_k(k)) \cup (f_S(k) \cap S_k(c)) \cup (f_S(y) \cap S_k(y))] \cap f_S(c) = f_S(c) = \{7, 8\}$$

$$[(f_S \circ S_k) \tilde{\cap} f_S](y) = (f_S \circ S_k)(y) \cap f_S(y) = [(f_S(y) \cap S_k(k)) \cup (f_S(k) \cap S_k(y)) \cup (f_S(c) \cap S_k(c))] \cap f_S(y) = f_S(y) = \{3, 5\}$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_k) \tilde{\cap} f_S = \{(k, \{3, 7, 9\}), (c, \{7, 8\}), (y, \{3, 5\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. S_c ile devam edecek olursak:

$$[(f_S \circ S_c) \tilde{\cap} f_S](k) = (f_S \circ S_c)(k) \cap f_S(k) = [(f_S(k) \cap S_c(k)) \cup (f_S(c) \cap S_c(y)) \cup (f_S(y) \cap S_c(c))] \cap f_S(k) = f_S(y) \cap f_S(k) = \{3\}$$

$$[(f_S \circ S_c) \tilde{\cap} f_S](c) = (f_S \circ S_c)(c) \cap f_S(c) = [(f_S(c) \cap S_c(k)) \cup (f_S(k) \cap S_c(c)) \cup (f_S(y) \cap S_c(y))] \cap f_S(c) = f_S(k) \cap f_S(c) = \{7\}$$

$$[(f_S \circ S_c) \tilde{\cap} f_S](y) = (f_S \circ S_c)(y) \cap f_S(y) = [(f_S(y) \cap S_c(k)) \cup (f_S(k) \cap S_c(y)) \cup (f_S(c) \cap S_c(c))] \cap f_S(y) = f_S(c) \cap f_S(y) = \emptyset$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_c) \tilde{\cap} f_S = \{(k, \{3\}), (c, \{7\}), (y, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. S_y ile devam edecek olursak:

$$[(f_S \circ S_y) \tilde{\cap} f_S](k) = (f_S \circ S_y)(k) \cap f_S(k) = [(f_S(k) \cap S_y(k)) \cup (f_S(c) \cap S_y(y)) \cup (f_S(y) \cap S_y(c))] \cap f_S(k) = f_S(c) \cap f_S(k) = \{7\} \neq \emptyset$$

$$[(f_S \circ S_y) \tilde{\cap} f_S](c) = (f_S \circ S_y)(c) \cap f_S(c) = [(f_S(c) \cap S_y(k)) \cup (f_S(k) \cap S_y(c)) \cup (f_S(y) \cap S_y(y))] \cap f_S(c) = f_S(y) \cap f_S(c) = \emptyset$$

$$[(f_S \circ S_y) \tilde{\cap} f_S](y) = (f_S \circ S_y)(y) \cap f_S(y) = [(f_S(y) \cap S_y(k)) \cup (f_S(k) \cap S_y(y)) \cup (f_S(c) \cap S_y(c))] \cap f_S(y) = f_S(k) \cap f_S(y) = \{3\} \neq \emptyset$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_y) \tilde{\cap} f_S = \{(k, \{7\}), (c, \emptyset), (y, \{3\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ sağlandığından, f_S bir EK-hemen hemen sağ idealdir. O halde, f_S bir EK-hemen hemen idealdir.

4.12. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. Bu durumda, f_S bir EK-hemen hemen quasi-ideal ise f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

İspat: f_S , idempotent bir EK-hemen hemen quasi-ideal olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ ve her $x, y \in S$ için, $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$. Buradan,

$$\begin{aligned} [(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S &= [(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S] \tilde{\cap} f_S \\ &= [(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S) \tilde{\cap} (f_S \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \end{aligned}$$

$$\cong (f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olup, $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

4.13. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen quasi-ideal ise f_S bir EK-hemen hemen zayıf-iç idealdir.

İspat: f_S , bir idempotent EK-hemen hemen quasi-ideal olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ ve $x, y \in S$ için, $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Her $x \in S$ için,

$$\emptyset_S \neq [(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \cong (f_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S = (f_S \circ f_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S$$

ve

$$\emptyset_S \neq [(f_S \circ S_y) \tilde{\cap} (S_x \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \cong (S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = (S_x \circ f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S$$

olduğundan, f_S bir EK-hemen hemen zayıf-iç idealdir.

4.14. Teorem f_S ve h_S , $f_S \cong h_S$ olacak şekilde, U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen hemen quasi-ideal ise h_S bir EK-hemen hemen quasi-idealdir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen quasi-ideal olsun. O halde, her $x, y \in S$ için, $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği, $f_S \cong h_S$ olduğundan,

$$[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \cong [(h_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S$$

açıktır. Burada, $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $[(h_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ h_S)] \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, h_S bir EK-hemen hemen quasi-idealdir.

4.15. Teorem f_S ve h_S , birer EK-hemen hemen quasi-ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen quasi-idealdir.

İspat: f_S , bir EK-hemen hemen quasi-ideal olsun. $f_S \subseteq f_S \tilde{\cup} h_S$ olduğundan, Teorem 4.14'ten, $f_S \tilde{\cup} h_S$, bir EK-hemen hemen quasi-idealdir.

4.16. *Sonuç* EK-hemen hemen quasi-ideallerin sonlu esnek birleşimleri de bir EK-hemen hemen quasi-idealdir.

4.17. *Sonuç* f_S ya da h_S bir EK-hemen hemen quasi-ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen quasi-idealdir.

Burada, f_S ve h_S birer EK-hemen hemen quasi-ideal iken $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-hemen hemen quasi-ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

4.18. *Örnek* Örnek 4.3'teki f_S ve h_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve h_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen quasi-ideal olduğu, Örnek 4.3'te gösterilmiştir. Fakat,

$$f_S \tilde{\cap} h_S = \{(m, \emptyset), (n, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

olduğundan, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-hemen hemen quasi-ideal değildir.

Şimdi, S yarıgrubunun hemen hemen quasi-ideali ile EK-hemen hemen quasi-ideali arasındaki ilişki verilecektir. Fakat öncelikle Önerme 4.20'de kullanılmak üzere aşağıdaki lemmayı verelim.

4.19. *Lemma* Y , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $x \in S$ olsun. S_x , x 'in esnek karakteristik fonksiyonu ve S_Y , Y 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, $S_x \circ S_Y = S_{xY}$ (Sezgin ve İlgin, 2024).

4.20. *Teorem A*, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-ideal olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-hemen hemen quasi-ideal olmasıdır.

İspat: A, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-ideali olsun. O halde her $x, y \in S$ için, $(Ax \cap yA) \cap A \neq \emptyset$ yani, $k \in (Ax \cap yA) \cap A$ olacak şekilde en az bir $k \in S$ vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} ([(S_A \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ S_A)] \tilde{\cap} S_A)(k) &= (S_{Ax} \tilde{\cap} S_{yA})(k) \cap S_A(k) \\ &= (S_{Ax \cap yA})(k) \cap S_A(k) \\ &= (S_{(Ax \cap yA) \cap A})(k) \\ &= U \neq \emptyset \end{aligned}$$

olup, $([(S_A \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ S_A)] \tilde{\cap} S_A) \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, S_A bir EK-hemen hemen quasi-idealdir.

Tersine, S_A bir EK-hemen hemen quasi-ideal olsun. O halde, her $x, y \in S$ için, $([(S_A \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ S_A)] \tilde{\cap} S_A) \neq \emptyset_S$. Kabul gereği $A \neq \emptyset$. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \emptyset_S \neq ([(S_A \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ S_A)] \tilde{\cap} S_A) &\Rightarrow \exists k \in S; ([(S_A \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ S_A)] \tilde{\cap} S_A)(k) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists k \in S; (S_{Ax} \tilde{\cap} S_{yA})(k) \cap S_A(k) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists k \in S; (S_{Ax \cap yA})(k) \cap S_A(k) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists k \in S; (S_{(Ax \cap yA) \cap A})(k) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists k \in S; (S_{(Ax \cap yA) \cap A})(k) = U \\ &\Rightarrow k \in (Ax \cap yA) \cap A \end{aligned}$$

olup, $(Ax \cap yA) \cap A \neq \emptyset$ elde edilir. Böylece, A, S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-idealidir.

4.21. Örnek Örnek 3.2’de verilen S yarıgrubunu ele alalım. $A = \{p, r\}$, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Rutin hesaplamalarla, A kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu $S_A = \{(p, U), (r, U), (s, \emptyset)\}$ ’nın bir EK-hemen hemen quasi-ideal olduğu gösterilebilir.

Tersine, $K = \{p, r\}$ kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olan f_S EK-hemen hemen quasi-idealini $f_S = \{(p, U), (r, U), (s, \emptyset)\}$ olarak alırsak, rutin hesaplamalarla, $K = \{p, r\}$ kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-ideali olduğu gösterilebilir.

4.22. Lemma f_S , U üzerinde bir esnek küme ise $f_S \cong S_{\text{supp}(f_S)}$ (Sezgin ve İlgin, 2024).

4.23. Teorem f_S , bir EK-hemen hemen quasi-ideal ise $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-idealidir.

İspat: f_S bir EK-hemen hemen quasi-ideal olsun. O halde, $f_S \neq \emptyset_S$, $\text{supp}(f_S) \neq \emptyset$ ve her $x, y \in S$ için, $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. $\text{supp}(f_S)$ 'nin S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-ideali olduğunu göstermek için, Teorem 4.20'den $S_{\text{supp}(f_S)}$ 'nin bir EK-hemen hemen quasi-ideal olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 4.22'den,

$$[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \cong [(S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ S_{\text{supp}(f_S)})] \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)}$$

ve $[(f_S \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ f_S)] \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $[(S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_x) \tilde{\cap} (S_y \circ S_{\text{supp}(f_S)})] \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)} \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, $S_{\text{supp}(f_S)}$, bir EK-hemen hemen quasi-ideal olup, Teorem 4.20'den, $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-idealidir.

Teorem 4.23'ün karşıtının genellikle doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

4.24. Örnek Örnek 4.5'teki f_S esnek kümesini ele alalım. $\text{supp}(f_S) = \{k, c, y\}$ olup,

$$[\text{supp}(f_S)\{k\} \cap \{k\}\text{supp}(f_S)] \cap \text{supp}(f_S) = [\{k, c, y\}k \cap k\{k, c, y\}] \cap \{k, c, y\} = \{k, c, y\}$$

$$[\text{supp}(f_S)\{k\} \cap \{c\}\text{supp}(f_S)] \cap \text{supp}(f_S) = [\{k, c, y\}k \cap c\{k, c, y\}] \cap \{k, c, y\} = \{k, c, y\}$$

$$[\text{supp}(f_S)\{k\} \cap \{y\}\text{supp}(f_S)] \cap \text{supp}(f_S) = [\{k, c, y\}k \cap y\{k, c, y\}] \cap \{k, c, y\} = \{k, c, y\}$$

$$[\text{supp}(f_S)\{c\} \cap \{k\}\text{supp}(f_S)] \cap \text{supp}(f_S) = [\{k, c, y\}c \cap k\{k, c, y\}] \cap \{k, c, y\} = \{k, c, y\}$$

$$[supp(f_S)\{c\} \cap \{c\}supp(f_S)] \cap supp(f_S) = [\{k, c, y\}c \cap c\{k, c, y\}] \cap \{k, c, y\} = \{k, c, y\}$$

$$[supp(f_S)\{c\} \cap \{y\}supp(f_S)] \cap supp(f_S) = [\{k, c, y\}c \cap y\{k, c, y\}] \cap \{k, c, y\} = \{k, c, y\}$$

$$[supp(f_S)\{y\} \cap \{k\}supp(f_S)] \cap supp(f_S) = [\{k, c, y\}y \cap k\{k, c, y\}] \cap \{k, c, y\} = \{k, c, y\}$$

$$[supp(f_S)\{y\} \cap \{c\}supp(f_S)] \cap supp(f_S) = [\{k, c, y\}y \cap c\{k, c, y\}] \cap \{k, c, y\} = \{k, c, y\}$$

$$[supp(f_S)\{y\} \cap \{y\}supp(f_S)] \cap supp(f_S) = [\{k, c, y\}y \cap y\{k, c, y\}] \cap \{k, c, y\} = \{k, c, y\}$$

olduğundan, $supp(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-idealidir. Fakat, Örnek 4.5'te gösterildiği üzere f_S , bir EK-hemen hemen quasi-ideal değildir.

4.25. Tanım f_S ve h_S , $h_S \cong f_S$ olacak şekilde, birer EK-hemen hemen quasi-ideal olsun. $supp(h_S) = supp(f_S)$ ise f_S esnek kümesine S yarıgrubunun bir minimal EK-hemen hemen quasi-ideali denir.

4.26. Teorem A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen quasi-ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir minimal EK-hemen hemen quasi-ideal olmasıdır.

İspat: A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen quasi-ideali olsun. O halde, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-idealidir ve Teorem 4.20'den S_A bir EK-hemen hemen quasi-idealdir. $f_S \cong S_A$ olacak şekilde f_S bir EK-hemen hemen quasi-ideal olsun. Teorem 4.23'ten, $supp(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-idealidir ve Not 2.3.13'den ve Sonuç 2.3.18'den,

$$supp(f_S) \subseteq supp(S_A) = A$$

elde edilir. A , S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen quasi-ideali olduğundan, $supp(f_S) = supp(S_A) = A$ olup, böylece, Tanım 4.25'ten, S_A bir minimal EK-hemen hemen quasi-idealidir.

Tersine, S_A bir minimal EK-hemen hemen quasi-ideal olsun. O halde, S_A bir EK-hemen hemen quasi-idealdir ve Teorem 4.20'den, A, S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-idealidir. $B \subseteq A$ olacak şekilde B, S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-ideali olsun. Teorem 4.20'den, S_B bir EK-hemen hemen quasi-ideal ve Teorem 2.3.19 (i)'den, $S_B \cong S_A$ olur. S_A bir minimal EK-hemen hemen quasi-ideal olduğundan ve Sonuç 2.3.18'den,

$$B = \text{supp}(S_B) = \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. Böylece, A, S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen quasi-idealidir.

4.27. Tanım f_S, g_S ve h_S birer EK-hemen hemen quasi-ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ g_S \cong f_S$ olması $h_S \cong f_S$ veya $g_S \cong f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-asal hemen hemen quasi-ideal denir.

4.28. Tanım f_S ve h_S birer EK-hemen hemen quasi-ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ h_S \cong f_S$ olması $h_S \cong f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-yarı asal hemen hemen quasi-ideal denir.

4.29. Tanım f_S, g_S ve h_S birer EK-hemen hemen quasi-ideal olsun. Bu durumda, $(h_S \circ g_S) \tilde{\cap} (g_S \circ h_S) \cong f_S$ olması $h_S \cong f_S$ veya $g_S \cong f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-kuvvetli asal hemen hemen quasi-ideal denir.

Her EK-kuvvetli asal hemen hemen quasi-idealın, bir EK-asal hemen hemen quasi-ideal olduğu ve her EK-asal hemen hemen quasi-idealın, bir EK-yarı asal hemen hemen quasi-ideal olduğu açıktır.

4.30. Teorem P, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P, P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-asal hemen hemen quasi-ideal ise, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen quasi-idealidir.

İspat: S_P , bir EK-asal hemen hemen quasi-ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen quasi-idealdir ve Teorem 4.20'den, P, S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-idealidir. $AB \subseteq P$ olacak şekilde A ve B, S yarıgrubunun birer hemen hemen quasi-ideali olsun. Bu

durumda, Teorem 4.20'den, S_A ve S_B , birer EK-hemen hemen quasi-idealdir ve Teorem 2.3.19 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_B = S_{AB} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-asal hemen hemen quasi-ideal ve $S_A \circ S_B \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ veya $S_B \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.19 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen quasi-idealidir.

4.31. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen quasi-ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen quasi-idealidir.

İspat: S_P , bir EK-yarı asal hemen hemen quasi-ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen quasi-idealdir ve Teorem 4.20'den, P , S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-idealidir. $AA \subseteq P$ olacak şekilde A , S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-ideali olsun. Bu durumda, Teorem 4.20'den, S_A , bir EK-hemen hemen quasi-idealdir ve Teorem 2.3.19 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_A = S_{AA} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen quasi-ideal ve $S_A \circ S_A \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.19 (i)'den, $A \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen quasi-idealidir.

4.32. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen quasi-ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen quasi-idealidir.

İspat: S_P , bir EK-kuvvetli asal hemen hemen quasi-ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen quasi-idealdir ve Teorem 4.20'den, P , S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-idealidir. $AB \cap BA \subseteq P$ olmak üzere, A ve B , S yarıgrubunun birer hemen hemen quasi-ideali olsun. Bu durumda, Teorem 4.20'den, S_A ve S_B birer EK-hemen hemen quasi-idealdir ve Teorem 2.3.19'dan, $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) = S_{AB} \tilde{\cap} S_{BA} = S_{AB \cap BA} \cong S_P$ elde edilir. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen quasi-ideal ve $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ veya $S_B \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.19 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen quasi-idealidir.

5. YARIGRUPLARIN ESNEK KESİŞİMSSEL HEMEN HEMEN QUASI-İÇ İDEALLERİ

Bu bölüm, yarıgrupların esnek kesişimsel hemen hemen quasi-iç idealleri üzerine olup, bölümde Sezgin, Kocakaya ve İlgin (2024a) çalışmasından elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

5.1. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x, y \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ $((f_S \circ S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S)$ ise f_S esnek kümesine, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideali denir. U üzerinde bir esnek küme, S yarı grubunun hem esnek kesişimsel hemen hemen sol quasi-iç ideali hem de esnek kesişimsel hemen hemen sağ quasi-iç ideali ise S yarı grubunun bir esnek kesişimsel hemen hemen quasi-iç idealidir denir.

5.2. Tanım f_S , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ $((f_S \circ S_x \circ f_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S)$ ise f_S esnek kümesine, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideali denir. U üzerinde bir esnek küme, S yarı grubunun hem esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sol quasi-iç ideali hem de esnek kesişimsel zayıf hemen hemen sağ quasi-iç ideali ise S yarı grubunun bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen quasi-iç idealidir denir.

Bundan sonra, S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel hemen hemen quasi-iç ideali kısaca “EK-hemen hemen quasi-iç ideal” ve S yarı grubunun U üzerinde bir esnek kesişimsel zayıf hemen hemen quasi-iç ideali kısaca “EK-zayıf hemen hemen quasi-iç ideal” olarak gösterilecektir.

5.3. Örnek $S = \{z, k\}$ kümesi üzerinde, Tablo 5.1 yardımıyla tanımlanan “ $\circ$ ” ikili işlemi ile $(S, \circ)$ cebirsel yapısı bir yarı gruptur.

$\circ$	z	k
z	z	z
k	z	k

Tablo 5.1. Örnek 5.3'teki “ $\circ$ ” ikili işlemi

$U = \mathbb{Z}^-$ evrensel kümesi üzerinde, f_S , h_S ve g_S esnek kümeleri,

$$f_S = \{(z, \{-3, -2\}), (k, \{-5\})\}$$

$$h_S = \{(z, \{-9, -8\}), (k, \{-1\})\}$$

$$g_S = \{(z, \emptyset), (k, \{-7, -4\})\}$$

şeklinde tanımlansın.

Burada, f_S ve h_S birer EK-hemen hemen quasi-iç idealdir. Öncelikle, her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim.

S_k ile başlayacak olursak:

$$\begin{aligned} [(S_k \circ f_S \circ S_k \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](z) &= [(S_k \circ f_S) \circ (S_k \circ f_S)](z) \cap f_S(z) = [((S_k \circ f_S)(z) \cap \\ & (S_k \circ f_S)(z)) \cup ((S_k \circ f_S)(z) \cap (S_k \circ f_S)(k)) \cup ((S_k \circ f_S)(k) \cap (S_k \circ f_S)(z))] \cap f_S(z) = \\ & \left[\left[((S_k(z) \cap f_S(z)) \cup (S_k(z) \cap f_S(k)) \cup (S_k(k) \cap f_S(z))) \cap ((S_k(z) \cap f_S(z)) \cup \right. \right. \\ & \left. \left. (S_k(z) \cap f_S(k)) \cup (S_k(k) \cap f_S(z))) \right] \cup \left[((S_k(z) \cap f_S(z)) \cup (S_k(z) \cap f_S(k)) \cup \right. \right. \\ & \left. \left. (S_k(k) \cap f_S(z))) \cap ((S_k(k) \cap f_S(k))) \right] \cup \left[((S_k(k) \cap f_S(k))) \cap ((S_k(z) \cap f_S(z)) \cup \right. \right. \\ & \left. \left. (S_k(z) \cap f_S(k)) \cup (S_k(k) \cap f_S(z))) \right] \right] \cap f_S(z) = [(f_S(z) \cap f_S(z)) \cup (f_S(z) \cap f_S(k)) \cup \\ & (f_S(k) \cap f_S(z))] \cap f_S(z) = f_S(z) = \{-3, -2\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(S_k \circ f_S \circ S_k \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](k) &= [(S_k \circ f_S) \circ (S_k \circ f_S)](k) \cap f_S(k) = [(S_k \circ f_S)(k) \cap \\
(S_k \circ f_S)(k)] \cap f_S(k) &= [(S_k(k) \cap f_S(k)) \cap (S_k(k) \cap f_S(k))] \cap f_S(k) = f_S(k) \cap f_S(k) \cap \\
f_S(k) &= f_S(k) = \{-5\} \neq \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(S_k \circ f_S \circ S_k \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(z, \{-3, -2\}), (k, \{-5\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. S_z ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned}
[(S_z \circ f_S \circ S_z \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](z) &= [(S_z \circ f_S) \circ (S_z \circ f_S)](z) \cap f_S(z) = [(S_z \circ f_S)(z) \cap \\
(S_z \circ f_S)(z)] \cup ((S_z \circ f_S)(z) \cap (S_z \circ f_S)(k)) \cup ((S_z \circ f_S)(k) \cap (S_z \circ f_S)(z))] \cap f_S(z) &= \\
[[((S_z(z) \cap f_S(z)) \cup (S_z(z) \cap f_S(k)) \cup (S_z(k) \cap f_S(z))) \cap ((S_z(z) \cap f_S(z)) \cup \\
(S_z(z) \cap f_S(k)) \cup (S_z(k) \cap f_S(z)))] \cup [((S_z(z) \cap f_S(z)) \cup (S_z(z) \cap f_S(k)) \cup \\
(S_z(k) \cap f_S(z))) \cap ((S_z(k) \cap f_S(k)))] \cup [((S_z(k) \cap f_S(k)) \cap ((S_z(z) \cap f_S(z)) \cup \\
(S_z(z) \cap f_S(k)) \cup (S_z(k) \cap f_S(z)))] \cap f_S(z) &= [(f_S(z) \cup f_S(k)) \cup \emptyset \cup \emptyset] \cap f_S(z) = \\
f_S(z) &= \{-3, -2\} \neq \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(S_z \circ f_S \circ S_z \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](k) &= [(S_z \circ f_S) \circ (S_z \circ f_S)](k) \cap f_S(k) = [(S_z \circ f_S)(k) \cap \\
(S_z \circ f_S)(k)] \cap f_S(k) &= [(S_z(k) \cap f_S(k)) \cap (S_z(k) \cap f_S(k))] \cap f_S(k) = \emptyset \cap \emptyset \cap f_S(k) = \\
\emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(S_z \circ f_S \circ S_z \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(z, \{-3, -2\}), (k, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ sağlandığından, f_S bir EK-zayıf hemen hemen sol quasi-iç idealdir. Şimdi, her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim.

S_k ile başlayacak olursak:

$$\begin{aligned}
[(f_S \circ S_k \circ f_S \circ S_k) \tilde{\cap} f_S](z) &= [(f_S \circ S_k) \circ (f_S \circ S_k)](z) \cap f_S(z) = [(f_S \circ S_k)(z) \cap \\
&(f_S \circ S_k)(z)) \cup ((f_S \circ S_k)(z) \cap (f_S \circ S_k)(k)) \cup ((f_S \circ S_k)(k) \cap (f_S \circ S_k)(z))] \cap f_S(z) = \\
&\left[\left[((f_S(z) \cap S_k(z)) \cup (f_S(z) \cap S_k(k)) \cup (f_S(k) \cap S_k(z))) \cap ((f_S(z) \cap S_k(z)) \cup \right. \right. \\
&(f_S(z) \cap S_k(k)) \cup (f_S(k) \cap S_k(z))) \left. \right] \cup \left[((f_S(z) \cap S_k(z)) \cup (f_S(z) \cap S_k(k)) \cup \right. \\
&(f_S(k) \cap S_k(z))) \cap ((f_S(k) \cap S_k(k))) \left. \right] \cup \left[((f_S(k) \cap S_k(k))) \cap ((f_S(z) \cap S_k(z)) \cup \right. \\
&(f_S(z) \cap S_k(k)) \cup (f_S(k) \cap S_k(z))) \left. \right] \left. \right] \cap f_S(z) = [(f_S(z) \cap f_S(z)) \cup (f_S(z) \cap f_S(k)) \cup \\
&(f_S(k) \cap f_S(z))] \cap f_S(z) = f_S(z) = \{-3, -2\} \neq \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(f_S \circ S_k \circ f_S \circ S_k) \tilde{\cap} f_S](k) &= [(f_S \circ S_k) \circ (f_S \circ S_k)](k) \cap f_S(k) = [(f_S \circ S_k)(k) \cap \\
&(f_S \circ S_k)(k)] \cap f_S(k) = [(f_S(k) \cap S_k(k)) \cap (f_S(k) \cap S_k(k))] \cap f_S(k) = f_S(k) \cap f_S(k) \cap \\
&f_S(k) = f_S(k) = \{-5\} \neq \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_k \circ f_S \circ S_k) \tilde{\cap} f_S = \{(z, \{-3, -2\}), (k, \{-5\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. S_z ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned}
[(f_S \circ S_z \circ f_S \circ S_z) \tilde{\cap} f_S](z) &= [(f_S \circ S_z) \circ (f_S \circ S_z)](z) \cap f_S(z) = [(f_S \circ S_z)(z) \cap \\
&(f_S \circ S_z)(z)) \cup ((f_S \circ S_z)(z) \cap (f_S \circ S_z)(k)) \cup ((f_S \circ S_z)(k) \cap (f_S \circ S_z)(z))] \cap f_S(z) = \\
&\left[\left[((f_S(z) \cap S_z(z)) \cup (f_S(z) \cap S_z(k)) \cup (f_S(k) \cap S_z(z))) \cap ((f_S(z) \cap S_z(z)) \cup \right. \right. \\
&(f_S(z) \cap S_z(k)) \cup (f_S(k) \cap S_z(z))) \left. \right] \cup \left[((f_S(z) \cap S_z(z)) \cup (f_S(z) \cap S_z(k)) \cup \right. \\
&(f_S(k) \cap S_z(z))) \cap ((f_S(k) \cap S_z(k))) \left. \right] \cup \left[((f_S(k) \cap S_z(k))) \cap ((f_S(z) \cap S_z(z)) \cup \right. \\
&(f_S(z) \cap S_z(k)) \cup (f_S(k) \cap S_z(z))) \left. \right] \left. \right] \cap f_S(z) = [(f_S(z) \cup f_S(k)) \cup \emptyset \cup \emptyset] \cap f_S(z) = \\
&f_S(z) = \{-3, -2\} \neq \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(f_S \circ S_z \circ f_S \circ S_z) \tilde{\cap} f_S](k) &= [(f_S \circ S_z) \circ (f_S \circ S_z)](k) \cap f_S(k) = [(f_S \circ S_z)(k) \cap \\
&(f_S \circ S_z)(k)] \cap f_S(k) = [(f_S(k) \cap S_z(k)) \cap (f_S(k) \cap S_z(k))] \cap f_S(k) = \emptyset \cap \emptyset \cap f_S(k) = \\
&\emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_z \circ f_S \circ S_z) \tilde{\cap} f_S = \{(z, \{-3, -2\}), (k, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, her $x \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ S_x) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ sağlandığından, f_S bir EK-zayıf hemen hemen sağ quasi-iç idealdir. Şimdi, her $x, y \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim.

S_k, S_z ile başlayacak olursak:

$$\begin{aligned} [(S_k \circ f_S \circ S_z \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](z) &= [(S_k \circ f_S) \circ (S_z \circ f_S)](z) \cap f_S(z) = [(S_k \circ f_S)(z) \cap \\ & (S_z \circ f_S)(z)) \cup ((S_k \circ f_S)(z) \cap (S_z \circ f_S)(k)) \cup ((S_k \circ f_S)(k) \cap (S_z \circ f_S)(z))] \cap f_S(z) = \\ & \left[\left[((S_k(z) \cap f_S(z)) \cup (S_k(z) \cap f_S(k)) \cup (S_k(k) \cap f_S(z))) \cap ((S_z(z) \cap f_S(z)) \cup \right. \right. \\ & (S_z(z) \cap f_S(k)) \cup (S_z(k) \cap f_S(z))) \left. \right] \cup \left[((S_k(z) \cap f_S(z)) \cup (S_k(z) \cap f_S(k)) \cup \right. \\ & (S_k(k) \cap f_S(z))) \cap ((S_z(k) \cap f_S(k))) \left. \right] \cup \left[((S_k(k) \cap f_S(k)) \cap ((S_z(z) \cap f_S(z)) \cup \right. \\ & (S_z(z) \cap f_S(k)) \cup (S_z(k) \cap f_S(z))) \left. \right] \left. \right] \cap f_S(z) = [f_S(z) \cup \emptyset \cup f_S(k)] \cap f_S(z) = f_S(z) = \\ & \{-3, -2\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(S_k \circ f_S \circ S_z \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](k) &= [(S_k \circ f_S) \circ (S_z \circ f_S)](k) \cap f_S(k) = [(S_k \circ f_S)(k) \cap \\ & (S_z \circ f_S)(k)] \cap f_S(k) = [(S_k(k) \cap f_S(k)) \cap (S_z(k) \cap f_S(k))] \cap f_S(k) = f_S(k) \cap \emptyset \cap \\ & f_S(k) = \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan,

$$(S_k \circ f_S \circ S_z \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(z, \{-3, -2\}), (k, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

S_z, S_k ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned} [(S_z \circ f_S \circ S_k \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](z) &= [(S_z \circ f_S) \circ (S_k \circ f_S)](z) \cap f_S(z) = [(S_z \circ f_S)(z) \cap \\ & (S_k \circ f_S)(z)) \cup ((S_z \circ f_S)(z) \cap (S_k \circ f_S)(k)) \cup ((S_z \circ f_S)(k) \cap (S_k \circ f_S)(z))] \cap f_S(z) = \\ & \left[\left[((S_z(z) \cap f_S(z)) \cup (S_z(z) \cap f_S(k)) \cup (S_z(k) \cap f_S(z))) \cap ((S_k(z) \cap f_S(z)) \cup \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left((S_k(z) \cap f_S(k)) \cup (S_k(k) \cap f_S(z)) \right) \cup \left[\left((S_z(z) \cap f_S(z)) \cup (S_z(z) \cap f_S(k)) \cup \right. \right. \\
& \left. \left. (S_z(k) \cap f_S(z)) \right) \cap \left((S_k(k) \cap f_S(k)) \right) \right] \cup \left[\left((S_z(k) \cap f_S(k)) \right) \cap \left((S_k(z) \cap f_S(z)) \cup \right. \right. \\
& \left. \left. (S_k(z) \cap f_S(k)) \cup (S_k(k) \cap f_S(z)) \right) \right] \cap f_S(z) = [f_S(z) \cup f_S(k) \cup \emptyset] \cap f_S(z) = f_S(z) = \\
& \{-3, -2\} \neq \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(S_z \circ f_S \circ S_k \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](k) = [(S_z \circ f_S) \circ (S_k \circ f_S)](k) \cap f_S(k) = [(S_z \circ f_S)(k) \cap \\
& (S_k \circ f_S)(k)] \cap f_S(k) = [(S_z(k) \cap f_S(k)) \cap (S_k(k) \cap f_S(k))] \cap f_S(k) = \emptyset \cap f_S(k) \cap \\
& f_S(k) = \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(S_z \circ f_S \circ S_k \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(z, \{-3, -2\}), (k, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

Böylece her $x, y \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ sağlandığından f_S bir EK-hemen hemen sol quasi-iç idealdir. Şimdi, her $x, y \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim.

S_k, S_z ile başlayacak olursak:

$$\begin{aligned}
& [(f_S \circ S_k \circ f_S \circ S_z) \tilde{\cap} f_S](z) = [(f_S \circ S_k) \circ (f_S \circ S_z)](z) \cap f_S(z) = \left[(f_S \circ S_k)(z) \cap \right. \\
& \left. (f_S \circ S_z)(z) \right] \cup \left[(f_S \circ S_k)(z) \cap (f_S \circ S_z)(k) \right] \cup \left[(f_S \circ S_k)(k) \cap (f_S \circ S_z)(z) \right] \cap f_S(z) = \\
& \left[\left[\left((f_S(z) \cap S_k(z)) \cup (f_S(z) \cap S_k(k)) \cup (f_S(k) \cap S_k(z)) \right) \cap \left((f_S(z) \cap S_z(z)) \cup \right. \right. \right. \\
& \left. \left. (f_S(z) \cap S_z(k)) \cup (f_S(k) \cap S_z(z)) \right) \right] \cup \left[\left((f_S(z) \cap S_k(z)) \cup (f_S(z) \cap S_k(k)) \cup \right. \right. \\
& \left. \left. (f_S(k) \cap S_k(z)) \right) \cap \left((f_S(k) \cap S_z(k)) \right) \right] \cup \left[\left((f_S(k) \cap S_k(k)) \right) \cap \left((f_S(z) \cap S_z(z)) \cup \right. \right. \\
& \left. \left. (f_S(z) \cap S_z(k)) \cup (f_S(k) \cap S_z(z)) \right) \right] \cap f_S(z) = [f_S(z) \cup \emptyset \cup f_S(k)] \cap f_S(z) = f_S(z) = \\
& \{-3, -2\} \neq \emptyset
\end{aligned}$$

$$[(f_S \circ S_k \circ f_S \circ S_z) \tilde{\cap} f_S](k) = [(f_S \circ S_k) \circ (f_S \circ S_z)](k) \cap f_S(k) = [(f_S \circ S_k)(k) \cap (f_S \circ S_z)(k)] \cap f_S(k) = [(f_S(k) \cap S_k(k)) \cap (f_S(k) \cap S_z(k))] \cap f_S(k) = f_S(k) \cap \emptyset \cap f_S(k) = \emptyset$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_k \circ f_S \circ S_z) \tilde{\cap} f_S = \{(z, \{-3, -2\}), (k, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

S_z, S_k ile devam edecek olursak:

$$\begin{aligned} [(f_S \circ S_z \circ f_S \circ S_k) \tilde{\cap} f_S](z) &= [(f_S \circ S_z) \circ (f_S \circ S_k)](z) \cap f_S(z) = [(f_S \circ S_z)(z) \cap (f_S \circ S_k)(z)] \cap f_S(z) = \\ &= [(f_S(z) \cap S_z(z)) \cup ((f_S \circ S_z)(z) \cap (f_S \circ S_k)(k)) \cup ((f_S \circ S_z)(k) \cap (f_S \circ S_k)(z))] \cap f_S(z) = \\ &= \left[\left[((f_S(z) \cap S_z(z)) \cup (f_S(z) \cap S_z(k)) \cup (f_S(k) \cap S_z(z))) \cap ((f_S(z) \cap S_k(z)) \cup (f_S(z) \cap S_k(k)) \cup (f_S(k) \cap S_k(z))) \right] \cup \right. \\ &\quad \left. \left[((f_S(z) \cap S_z(z)) \cup (f_S(z) \cap S_z(k)) \cup (f_S(k) \cap S_z(z))) \cap ((f_S(k) \cap S_k(k)) \cup ((f_S(k) \cap S_z(k)) \cap ((f_S(z) \cap S_k(z)) \cup (f_S(z) \cap S_k(k)) \cup (f_S(k) \cap S_k(z))) \right] \right] \cap f_S(z) = \\ &= [f_S(z) \cup f_S(k) \cup \emptyset] \cap f_S(z) = f_S(z) = \{-3, -2\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(f_S \circ S_z \circ f_S \circ S_k) \tilde{\cap} f_S](k) &= [(f_S \circ S_z) \circ (f_S \circ S_k)](k) \cap f_S(k) = [(f_S \circ S_z)(k) \cap (f_S \circ S_k)(k)] \cap f_S(k) = \\ &= [(f_S(k) \cap S_z(k)) \cap (f_S(k) \cap S_k(k))] \cap f_S(k) = \emptyset \cap f_S(k) \cap f_S(k) = \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan,

$$(f_S \circ S_z \circ f_S \circ S_k) \tilde{\cap} f_S = \{(z, \{-3, -2\}), (k, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

Böylece her $x, y \in S$ için, $(f_S \circ S_x \circ f_S \circ S_y) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ sağlandığından f_S bir EK-hemen hemen sağ quasi-iç idealdir. O halde, f_S bir EK-hemen hemen quasi-iç idealdir.

Benzer şekilde, h_S bir EK-zayıf hemen hemen quasi-iç ideal ve EK-hemen hemen quasi-iç idealdir. Gerçekten,

$$(S_k \circ h_S \circ S_k \circ h_S) \tilde{\cap} h_S = \{(z, \{-9, -8\}), (k, \{-1\})\} \neq \emptyset_S$$

$$(S_z \circ h_S \circ S_z \circ h_S) \tilde{\cap} h_S = \{(z, \{-9, -8\}), (k, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, h_S bir EK-zayıf hemen hemen sol quasi-iç idealdir. Ayrıca,

$$(h_S \circ S_k \circ h_S \circ S_k) \tilde{\cap} h_S = \{(z, \{-9, -8\}), (k, \{-1\})\} \neq \emptyset_S$$

$$(h_S \circ S_z \circ h_S \circ S_z) \tilde{\cap} h_S = \{(z, \{-9, -8\}), (k, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, h_S bir EK-zayıf hemen hemen sağ quasi-iç idealdir. Böylece, h_S bir EK-zayıf hemen hemen quasi-iç idealdir. Ayrıca,

$$(S_k \circ h_S \circ S_z \circ h_S) \tilde{\cap} h_S = \{(z, \{-9, -8\}), (k, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

$$(S_z \circ h_S \circ S_k \circ h_S) \tilde{\cap} h_S = \{(z, \{-9, -8\}), (k, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, h_S bir EK-hemen hemen sol quasi-iç idealdir. Ayrıca,

$$(h_S \circ S_k \circ h_S \circ S_z) \tilde{\cap} h_S = \{(z, \{-9, -8\}), (k, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

$$(h_S \circ S_z \circ h_S \circ S_k) \tilde{\cap} h_S = \{(z, \{-9, -8\}), (k, \emptyset)\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, h_S bir EK-hemen hemen sağ quasi-iç idealdir. Böylece, h_S bir EK-hemen hemen quasi-iç idealdir. Fakat, g_S ne bir EK-zayıf hemen hemen quasi-iç idealdir ne de bir EK-hemen hemen quasi-iç idealdir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} [(S_z \circ g_S \circ S_z \circ g_S) \tilde{\cap} g_S](z) &= [(S_z \circ g_S) \circ (S_z \circ g_S)](z) \cap g_S(z) = [(S_z \circ g_S)(z) \cap \\ & (S_z \circ g_S)(z)) \cup ((S_z \circ g_S)(z) \cap (S_z \circ g_S)(k)) \cup ((S_z \circ g_S)(k) \cap (S_z \circ g_S)(z))] \cap \\ g_S(z) &= \left[\left[((S_z(z) \cap g_S(z)) \cup (S_z(z) \cap g_S(k)) \cup (S_z(k) \cap g_S(z))) \cap ((S_z(z) \cap \right. \right. \\ & g_S(z)) \cup (S_z(z) \cap g_S(k)) \cup (S_z(k) \cap g_S(z))) \cup \left[((S_z(z) \cap g_S(z)) \cup (S_z(z) \cap \right. \\ & g_S(k)) \cup (S_z(k) \cap g_S(z))) \cap ((S_z(k) \cap g_S(k))) \cup \left[((S_z(k) \cap g_S(k))) \cap ((S_z(z) \cap \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& g_S(z)) \cup (S_z(z) \cap g_S(k)) \cup (S_z(k) \cap g_S(z))) \Big] \Big] \cap g_S(z) = \Big[[(g_S(z) \cup g_S(k)) \cap \\
& (g_S(z) \cup g_S(k))] \cup [(g_S(z) \cup g_S(k)) \cap \emptyset] \cup [\emptyset \cap (g_S(z) \cup g_S(k))] \Big] \cap g_S(z) = \\
& [(g_S(z) \cup g_S(k)) \cup \emptyset \cup \emptyset] \cap g_S(z) = g_S(z) = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(S_z \circ g_S \circ S_z \circ g_S) \tilde{\cap} g_S](k) = [(S_z \circ g_S) \circ (S_z \circ g_S)](k) \cap g_S(k) = [(S_z \circ g_S)(k) \cap \\
& (S_z \circ g_S)(k)] \cap g_S(k) = [(S_z(k) \cap g_S(k)) \cap (S_z(k) \cap g_S(k))] \cap g_S(k) = \emptyset \cap \emptyset \cap \\
& g_S(k) = \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan, $z \in S$ için, $(S_z \circ g_S \circ S_z \circ g_S) \tilde{\cap} g_S = \{(z, \emptyset), (k, \emptyset)\} = \emptyset_S$ elde edilir. O halde, g_S bir EK-zayıf hemen hemen quasi-iç ideal değildir. Bu durumda, g_S esnek kümesinin bir EK-hemen hemen quasi-iç ideal olmadığı açıktır.

5.4. Önerme f_S , bir EK-hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal ise bir EK-zayıf hemen hemen sol (sağ) quasi-iç idealdir.

İspat: İspat, EK-zayıf hemen hemen sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-zayıf hemen hemen sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal olsun. O halde, her $x, y \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$(S_x \circ f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, f_S esnek kümesinin bir EK-zayıf hemen hemen sol quasi-iç ideal olduğu açıktır.

5.5. Teorem f_S , bir EK-hemen hemen quasi-iç ideal ise bir EK-zayıf hemen hemen quasi-iç idealdir.

EK-zayıf hemen hemen quasi-iç ideal, EK-hemen hemen quasi-iç idealin bir genellemesi olduğundan, bundan sonra tüm teoremler ve ispatlar EK-zayıf hemen hemen quasi-iç ideal yerine EK-hemen hemen quasi-iç ideal için verilmiştir.

f_S , bir EK-zayıf hemen hemen quasi-iç ideal ise bir EK-hemen hemen quasi-iç ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

5.6. *Örnek* $S = \{a, r\}$ kümesi üzerinde, Tablo 5.2 yardımıyla tanımlanan “ $\cdot$ ” ikili işlemi ile $(S, \cdot)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

$\cdot$	a	r
a	r	a
r	a	r

Tablo 5.2. Örnek 5.6'daki “ $\cdot$ ” ikili işlemi

$U = \mathbb{Z}$ evrensel kümesi üzerinde, f_S esnek kümesi,

$$f_S = \{(a, \emptyset), (r, \{-6, 3, 6\})\}$$

şeklinde tanımlansın.

Öncelikle, her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğunu gösterelim.

S_a ile başlayacak olursak:

$$\begin{aligned} [(S_a \circ f_S \circ S_a \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](a) &= [(S_a \circ f_S) \circ (S_a \circ f_S)](a) \cap f_S(a) = [(S_a \circ f_S)(a) \cap \\ &(S_a \circ f_S)(r)) \cup ((S_a \circ f_S)(r) \cap (S_a \circ f_S)(a))] \cap f_S(a) = \left[\left[((S_a(a) \cap f_S(r)) \cup \right. \right. \\ &(S_a(r) \cap f_S(a))) \cap ((S_a(a) \cap f_S(a)) \cup (S_a(r) \cap f_S(r))) \Big] \cup \left[((S_a(a) \cap f_S(a)) \cup \right. \\ &(S_a(r) \cap f_S(r))) \cap ((S_a(a) \cap f_S(r)) \cup (S_a(r) \cap f_S(a))) \Big] \Big] \cap f_S(a) = [(f_S(r) \cap f_S(a)) \cup \\ &(f_S(a) \cap f_S(r))] \cap f_S(a) = (f_S(a) \cap f_S(r)) \cap f_S(a) = f_S(a) \cap f_S(r) = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(S_a \circ f_S \circ S_a \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](r) &= [(S_a \circ f_S) \circ (S_a \circ f_S)](r) \cap f_S(r) = [(S_a \circ f_S)(a) \cap \\ &(S_a \circ f_S)(a)) \cup ((S_a \circ f_S)(r) \cap (S_a \circ f_S)(r))] \cap f_S(r) = \left[\left[((S_a(a) \cap f_S(r)) \cup \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (S_a(r) \cap f_S(a)) \cap \left((S_a(a) \cap f_S(r)) \cup (S_a(r) \cap f_S(a)) \right) \cup \left[\left((S_a(a) \cap f_S(a)) \cup \right. \right. \\ & \left. \left. (S_a(r) \cap f_S(r)) \right) \cap \left((S_a(a) \cap f_S(a)) \cup (S_a(r) \cap f_S(r)) \right) \right] \cap f_S(r) = [(f_S(r) \cap f_S(r)) \cup \\ & (f_S(a) \cap f_S(a))] \cap f_S(r) = (f_S(r) \cup f_S(a)) \cap f_S(r) = f_S(r) = \{-6, 3, 6\} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$(S_a \circ f_S \circ S_a \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(a, \emptyset), (r, \{-6, 3, 6\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$(S_r \circ f_S \circ S_r \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(a, \emptyset), (r, \{-6, 3, 6\})\} \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, her $x \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_x \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ sağlandığından, f_S bir EK-zayıf hemen hemen sol quasi-iç idealdir. Ayrıca,

$$(f_S \circ S_a \circ f_S \circ S_a) \tilde{\cap} f_S = \{(a, \emptyset), (r, \{-6, 3, 6\})\} \neq \emptyset_S$$

$$(f_S \circ S_r \circ f_S \circ S_r) \tilde{\cap} f_S = \{(a, \emptyset), (r, \{-6, 3, 6\})\} \neq \emptyset_S$$

olduğundan, f_S bir EK-zayıf hemen hemen sağ quasi-iç idealdir. Böylece, f_S bir EK-zayıf hemen hemen quasi-iç idealdir. Fakat, f_S bir EK-hemen hemen quasi-iç ideal değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} & [(S_a \circ f_S \circ S_r \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](a) = [(S_a \circ f_S) \circ (S_r \circ f_S)](a) \cap f_S(a) = [(S_a \circ f_S)(a) \cap \\ & (S_r \circ f_S)(r)) \cup ((S_a \circ f_S)(r) \cap (S_r \circ f_S)(a))] \cap f_S(a) = \left[\left[\left((S_a(a) \cap f_S(r)) \cup \right. \right. \right. \\ & \left. \left. (S_a(r) \cap f_S(a)) \right) \cap \left((S_r(a) \cap f_S(a)) \cup (S_r(r) \cap f_S(r)) \right) \right] \cup \left[\left((S_a(a) \cap f_S(a)) \cup \right. \right. \\ & \left. \left. (S_a(r) \cap f_S(r)) \right) \cap \left((S_r(a) \cap f_S(r)) \cup (S_r(r) \cap f_S(a)) \right) \right] \right] \cap f_S(a) = [(f_S(r) \cap f_S(r)) \cup \\ & (f_S(a) \cap f_S(a))] \cap f_S(a) = (f_S(r) \cup f_S(a)) \cap f_S(a) = f_S(a) = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(S_a \circ f_S \circ S_r \circ f_S) \tilde{\cap} f_S](r) &= [(S_a \circ f_S) \circ (S_r \circ f_S)](r) \cap f_S(r) = [((S_a \circ f_S)(a) \cap \\
&(S_r \circ f_S)(a)) \cup ((S_a \circ f_S)(r) \cap (S_r \circ f_S)(r))] \cap f_S(r) = \left[\left[((S_a(a) \cap f_S(r)) \cup \right. \right. \\
&(S_a(r) \cap f_S(a))) \cap ((S_r(a) \cap f_S(r)) \cup (S_r(r) \cap f_S(a))) \left. \right] \cup \left[((S_a(a) \cap f_S(a)) \cup \right. \\
&(S_a(r) \cap f_S(r))) \cap ((S_r(a) \cap f_S(a)) \cup (S_r(r) \cap f_S(r))) \left. \right] \cap f_S(r) = [(f_S(r) \cap f_S(a)) \cup \\
&(f_S(a) \cap f_S(r))] \cap f_S(r) = (f_S(a) \cap f_S(r)) \cap f_S(r) = f_S(a) \cap f_S(r) = \emptyset
\end{aligned}$$

olduğundan, $a, r \in S$ için, $(S_a \circ f_S \circ S_r \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = \{(a, \emptyset), (r, \emptyset)\} = \emptyset_S$ elde edilir. O halde, f_S bir EK-hemen hemen quasi-iç ideal değildir.

5.7. Önerme f_S , U üzerinde bir esnek küme ve $S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S \neq \emptyset_S$ ($f_S \circ S_x \circ f_S \circ S_y \neq \emptyset_S$) olsun. f_S , bir EK-sol (sağ) quasi-iç ideal ise bir EK-hemen hemen sol (sağ) quasi-iç idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-sol quasi-iç ideal ve $S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S \neq \emptyset_S$ olsun. O halde, $\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olduğu bilinmektedir. Her $x, y \in S$ için, $S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S \subseteq \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olup buradan, $S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S \subseteq f_S$ olduğundan,

$$(S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S = S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S \neq \emptyset_S$$

elde edilir. Böylece, $(S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olup, f_S bir EK-hemen hemen sol quasi-iç idealdir.

Burada, $\tilde{S} \circ \emptyset_S \circ \tilde{S} \circ \emptyset_S \subseteq \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ kümesinin bir EK-sol quasi-iç ideal olduğu açıktır. Fakat, her $x, y \in S$ için, $(S_x \circ \emptyset_S \circ S_y \circ \emptyset_S) \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S \tilde{\cap} \emptyset_S = \emptyset_S$ olduğundan, $\emptyset_S$ esnek kümesi bir EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal değildir.

5.8. Teorem f_S , U üzerinde bir esnek küme, $S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S \neq \emptyset_S$ ve $f_S \circ S_x \circ f_S \circ S_y \neq \emptyset_S$ olsun. f_S , bir EK-quasi-iç ideal ise bir EK-hemen hemen quasi-iç idealdir.

f_S , bir EK-hemen hemen quasi-iç ideal ise bir EK-quasi-iç ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

5.9. *Örnek* Örnek 5.3'te verilen f_S ve h_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve h_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen quasi-iç ideal olduğu, Örnek 5.3'te gösterilmiştir. Fakat, f_S ve h_S birer EK-quasi-iç ideal değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
 (\tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S} \circ f_S)(z) &= [(\tilde{S} \circ f_S)(z) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(z)] \cup [(\tilde{S} \circ f_S)(z) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(k)] \cup \\
 &[(\tilde{S} \circ f_S)(k) \cap (\tilde{S} \circ f_S)(z)] = \left[\left[(\tilde{S}(z) \cap f_S(z)) \cup (\tilde{S}(z) \cap f_S(k)) \cup (\tilde{S}(k) \cap f_S(z)) \right] \cap \right. \\
 &\left. \left[(\tilde{S}(z) \cap f_S(z)) \cup (\tilde{S}(z) \cap f_S(k)) \cup (\tilde{S}(k) \cap f_S(z)) \right] \right] \cup \left[\left[(\tilde{S}(z) \cap f_S(z)) \cup \right. \right. \\
 &\left. \left. (\tilde{S}(z) \cap f_S(k)) \cup (\tilde{S}(k) \cap f_S(z)) \right] \cap \left[(\tilde{S}(k) \cap f_S(k)) \right] \right] \cup \left[\left[(\tilde{S}(k) \cap f_S(k)) \right] \cap \right. \\
 &\left. \left[(\tilde{S}(z) \cap f_S(z)) \cup (\tilde{S}(z) \cap f_S(k)) \cup (\tilde{S}(k) \cap f_S(z)) \right] \right] = [(f_S(z) \cup f_S(k) \cup f_S(z)) \cap \\
 &(f_S(z) \cup f_S(k) \cup f_S(z))] \cup [(f_S(z) \cup f_S(k) \cup f_S(z)) \cap f_S(k)] \cup [(f_S(k) \cap (f_S(z) \cup \\
 &f_S(k) \cup f_S(z))] = (f_S(z) \cup f_S(k)) \cup f_S(k) \cup f_S(k) = (f_S(z) \cup f_S(k)) = \{-5, -3, -2\} \neq \\
 &f_S(z) = \{-3, -2\}
 \end{aligned}$$

olduğundan, f_S bir EK-sol quasi-iç ideal değildir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
 (f_S \circ \tilde{S} \circ f_S \circ \tilde{S})(z) &= [(f_S \circ \tilde{S})(z) \cap (f_S \circ \tilde{S})(z)] \cup [(f_S \circ \tilde{S})(z) \cap (f_S \circ \tilde{S})(k)] \cup \\
 &[(f_S \circ \tilde{S})(k) \cap (f_S \circ \tilde{S})(z)] = \left[\left[(f_S(z) \cap \tilde{S}(z)) \cup (f_S(z) \cap \tilde{S}(k)) \cup (f_S(k) \cap \tilde{S}(z)) \right] \cap \right. \\
 &\left. \left[(f_S(z) \cap \tilde{S}(z)) \cup (f_S(z) \cap \tilde{S}(k)) \cup (f_S(k) \cap \tilde{S}(z)) \right] \right] \cup \left[\left[(f_S(z) \cap \tilde{S}(z)) \cup \right. \right. \\
 &\left. \left. (f_S(z) \cap \tilde{S}(k)) \cup (f_S(k) \cap \tilde{S}(z)) \right] \cap \left[(f_S(k) \cap \tilde{S}(k)) \right] \right] \cup \left[\left[(f_S(k) \cap \tilde{S}(k)) \right] \cap \right. \\
 &\left. \left[(f_S(z) \cap \tilde{S}(z)) \cup (f_S(z) \cap \tilde{S}(k)) \cup (f_S(k) \cap \tilde{S}(z)) \right] \right] = [(f_S(z) \cup f_S(z) \cup f_S(k)) \cap \\
 &(f_S(z) \cup f_S(z) \cup f_S(k))] \cup [(f_S(z) \cup f_S(z) \cup f_S(k)) \cap f_S(k)] \cup [(f_S(k) \cap (f_S(z) \cup \\
 &f_S(z) \cup f_S(k))] = (f_S(z) \cup f_S(k)) \cup f_S(k) \cup f_S(k) = (f_S(z) \cup f_S(k)) = \{-5, -3, -2\} \neq \\
 &f_S(z) = \{-3, -2\}
 \end{aligned}$$

olduğundan, f_S bir EK-sağ quasi-iç ideal değildir. Bu durumda, f_S 'nin bir EK-quasi-iç ideal olmadığı açıktır. Benzer şekilde,

$$(\tilde{S} \circ h_S \circ \tilde{S} \circ h_S)(z) = (h_S(z) \cup h_S(k)) = \{-9, -8, -1\} \not\subseteq h_S(z) = \{-9, -8\}$$

olduğundan, h_S bir EK-sol quasi-iç ideal değildir. Ayrıca,

$$(h_S \circ \tilde{S} \circ h_S \circ \tilde{S})(z) = (h_S(z) \cup h_S(k)) = \{-9, -8, -1\} \not\subseteq h_S(z) = \{-9, -8\}$$

olduğundan, h_S bir EK-sağ quasi-iç ideal değildir. Bu durumda, h_S 'nin bir EK-quasi-iç ideal olmadığı açıktır.

5.10. Önerme f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal ise f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , idempotent bir EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal olsun. O halde, $f_S \circ f_S = f_S$ ve her $x, y \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$. Buradan,

$$\begin{aligned} (S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S &= [(S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S] \tilde{\cap} f_S \\ &= [(S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S] \tilde{\cap} (f_S \circ f_S) \\ &\cong (f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \end{aligned}$$

olup, $(S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(f_S \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. Böylece, f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

5.11. Teorem f_S , U üzerinde idempotent bir esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen quasi-iç ideal ise f_S bir EK-hemen hemen alt yarıgruptur.

5.12. Önerme f_S ve h_S , $f_S \cong h_S$ olacak şekilde, U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal ise h_S bir EK-hemen hemen sol (sağ) quasi-iç idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal olsun. O halde, her $x, y \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğu bilinmektedir. Kabul gereği, $f_S \tilde{\subseteq} h_S$ olduğundan,

$$(S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \tilde{\subseteq} (S_x \circ h_S \circ S_y \circ h_S) \tilde{\cap} h_S$$

açıktır. Burada, $(S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(S_x \circ h_S \circ S_y \circ h_S) \tilde{\cap} h_S \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, h_S bir EK-hemen hemen sol quasi-iç idealdir.

5.13. Teorem f_S ve h_S , $f_S \tilde{\subseteq} h_S$ olacak şekilde, U üzerinde birer esnek küme olsun. f_S , bir EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal ise h_S bir EK-hemen hemen sol quasi-iç idealdir.

5.14. Önerme f_S ve h_S , birer EK-hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen sol (sağ) quasi-iç idealdir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S , bir EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal olsun. $f_S \tilde{\subseteq} f_S \tilde{\cup} h_S$ olduğundan, Önerme 5.12'den, $f_S \tilde{\cup} h_S$, bir EK-hemen hemen sol quasi-iç idealdir.

5.15. Teorem f_S ve h_S , birer EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen sol quasi-iç idealdir.

5.16. Sonuç EK-hemen hemen sol quasi-iç ideallerin sonlu esnek birleşimleri de bir EK-hemen hemen sol quasi-iç idealdir.

5.17. Sonuç f_S ya da h_S bir EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $f_S \tilde{\cup} h_S$ bir EK-hemen hemen sol quasi-iç idealdir.

Burada, f_S ve h_S birer EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal iken $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim:

5.18. *Örnek* Örnek 5.3'teki f_S ve h_S esnek kümelerini ele alalım. f_S ve h_S esnek kümelerinin birer EK-hemen hemen quasi-iç ideal olduğu Örnek 5.3'te gösterilmiştir. Fakat,

$$f_S \tilde{\cap} h_S = \{(z, \emptyset), (k, \emptyset)\} = \emptyset_S$$

olduğundan, $f_S \tilde{\cap} h_S$ bir EK-hemen hemen quasi-iç ideal değildir.

Şimdi, S yarıgrupunun hemen hemen quasi-iç ideali ile EK-hemen hemen quasi-iç ideal arasındaki ilişki verilecektir.

5.19. *Önerme* A , S yarıgrupunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrupunun bir hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal olmasıdır.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. A , S kümesinin boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, S yarıgrupunun bir hemen hemen sol quasi-iç ideali olsun. O halde, her $x, y \in S$ için, $xAyA \cap A \neq \emptyset$ yani, $t \in xAyA \cap A$ olacak şekilde en az bir $t \in S$ vardır. Buradan,

$$\left((S_x \circ S_A \circ S_y \circ S_A) \tilde{\cap} S_A \right) (t) = (S_{xAyA} \tilde{\cap} S_A)(t) = (S_{xAyA \cap A})(t) = U \neq \emptyset$$

olup, $(S_x \circ S_A \circ S_y \circ S_A) \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, S_A bir EK-hemen hemen sol quasi-iç idealdir.

Tersine, S_A bir EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal olsun. O halde, her $x, y \in S$ için, $(S_x \circ S_A \circ S_y \circ S_A) \tilde{\cap} S_A \neq \emptyset_S$. Kabul gereği $A \neq \emptyset$. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \emptyset_S \neq (S_x \circ S_A \circ S_y \circ S_A) \tilde{\cap} S_A &\Rightarrow \exists n \in S ; \left((S_x \circ S_A \circ S_y \circ S_A) \tilde{\cap} S_A \right) (n) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists n \in S ; (S_{xAyA} \tilde{\cap} S_A)(n) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists n \in S ; (S_{xAyA \cap A})(n) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists n \in S ; (S_{xAyA \cap A})(n) = U \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n \in xAyA \cap A$$

olup, $xAyA \cap A \neq \emptyset$ elde edilir. Böylece, A , S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-iç idealidir.

5.20. Teorem A , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A , A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-iç ideal olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir EK-hemen hemen quasi-iç ideal olmasıdır.

5.21. *Örnek* Örnek 3.2'de verilen S yarıgrubunu ele alalım. $A = \{p, r\}$, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-iç ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Rutin hesaplamalarla, A kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu $S_A = \{(p, U), (r, U), (s, \emptyset)\}$ 'nin bir EK-hemen hemen quasi-iç ideal olduğu gösterilebilir.

Tersine, $K = \{p, r\}$ kümesinin esnek karakteristik fonksiyonu olan f_S EK-hemen hemen quasi-iç idealini $f_S = \{(p, U), (r, U), (s, \emptyset)\}$ olarak alırsak, rutin hesaplamalarla, $K = \{p, r\}$ kümesinin S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-iç ideali olduğu gösterilebilir.

5.22. Önerme f_S , bir EK-hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal ise $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol (sağ) quasi-iç idealidir.

İspat: İspat, EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. f_S bir EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal olsun. O halde, $f_S \neq \emptyset_S$, $\text{supp}(f_S) \neq \emptyset$ ve her $x, y \in S$ için, $(S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ açıktır. $\text{supp}(f_S)$ 'nin S yarıgrubunun bir hemen hemen sol quasi-iç ideali olduğunu göstermek için, Önerme 5.19'dan, $S_{\text{supp}(f_S)}$ 'nin bir EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 4.22'den,

$$(S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \cong (S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_y \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)}$$

ve $(S_x \circ f_S \circ S_y \circ f_S) \tilde{\cap} f_S \neq \emptyset_S$ olduğundan, $(S_x \circ S_{\text{supp}(f_S)} \circ S_y \circ S_{\text{supp}(f_S)}) \tilde{\cap} S_{\text{supp}(f_S)} \neq \emptyset_S$ elde edilir. Böylece, $S_{\text{supp}(f_S)}$, bir EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal olup, Önerme 5.19'dan, $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol quasi-iç idealidir.

5.23. Teorem f_S , bir EK-hemen hemen quasi-iç ideal ise $\text{supp}(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-iç idealidir.

Teorem 5.23'ün karıştının genellikle doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim:

5.24. Örnek $S = \{h, i, k\}$ kümesi üzerinde, Tablo 5.3 yardımıyla tanımlanan “*” ikili işlemi ile $(S, *)$ cebirsel yapısı bir yarıgruptur.

*	h	i	k
h	k	h	h
i	h	k	k
k	h	k	k

Tablo 5.3. Örnek 5.24'teki “*” ikili işlemi

$U = \mathbb{Z}$ evrensel kümesi üzerinde, f_S esnek kümesi,

$$f_S = \{(h, \{1,9\}), (i, \{0,5\}), (k, \emptyset)\}$$

şeklinde tanımlansın.

Burada, f_S bir EK-hemen hemen quasi-iç ideal değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} [(f_S \circ S_i \circ f_S \circ S_i) \tilde{\cap} f_S](h) &= [(f_S \circ S_i) \circ (f_S \circ S_i)](h) \cap f_S(h) = [(f_S \circ S_i)(h) \cap \\ &(f_S \circ S_i)(i)) \cup ((f_S \circ S_i)(h) \cap (f_S \circ S_i)(k)) \cup ((f_S \circ S_i)(i) \cap (f_S \circ S_i)(h)) \cup \\ &((f_S \circ S_i)(k) \cap (f_S \circ S_i)(h))] \cap f_S(h) = \left[\left[((f_S(h) \cap S_i(i)) \cup (f_S(h) \cap S_i(k)) \cup \right. \right. \\ &\left. \left. (f_S(i) \cap S_i(h)) \cup (f_S(k) \cap S_i(h)) \right) \cap \emptyset \right] \cup \left[((f_S(h) \cap S_i(i)) \cup (f_S(h) \cap S_i(k)) \cup \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (f_S(i) \cap S_i(h)) \cup (f_S(k) \cap S_i(h)) \Big) \cap \Big((f_S(h) \cap S_i(h)) \cup (f_S(i) \cap S_i(i)) \cup (f_S(i) \cap \\
& S_i(k)) \cup (f_S(k) \cap S_i(i)) \cup (f_S(k) \cap S_i(k)) \Big) \Big] \cup \Big[\emptyset \cap \Big((f_S(h) \cap S_i(i)) \cup (f_S(h) \cap \\
& S_i(k)) \cup (f_S(i) \cap S_i(h)) \cup (f_S(k) \cap S_i(h)) \Big) \Big] \cup \Big[\Big((f_S(h) \cap S_i(h)) \cup (f_S(i) \cap S_i(i)) \cup \\
& (f_S(i) \cap S_i(k)) \cup (f_S(k) \cap S_i(i)) \cup (f_S(k) \cap S_i(k)) \Big) \cap \Big((f_S(h) \cap S_i(i)) \cup (f_S(h) \cap \\
& S_i(k)) \cup (f_S(i) \cap S_i(h)) \cup (f_S(k) \cap S_i(h)) \Big) \Big] \Big] \cap f_S(h) = \Big[\emptyset \cup [f_S(h) \cap (f_S(i) \cup \\
& f_S(k))] \cup \emptyset \cup [(f_S(i) \cup f_S(k)) \cap f_S(h)] \Big] \cap f_S(h) = [(f_S(i) \cup f_S(k)) \cap f_S(h)] \cap f_S(h) = \\
& \emptyset
\end{aligned}$$

olup benzer şekilde,

$$[(f_S \circ S_i \circ f_S \circ S_i) \tilde{\cap} f_S](i) = \emptyset$$

$$[(f_S \circ S_i \circ f_S \circ S_i) \tilde{\cap} f_S](k) = \emptyset$$

olduğundan $i \in S$ için, $(f_S \circ S_i \circ f_S \circ S_i) \tilde{\cap} f_S = \{(h, \emptyset), (i, \emptyset), (k, \emptyset)\} = \emptyset_S$ elde edilir. O halde, f_S bir EK-hemen hemen quasi-iç ideal değildir. Şimdi, her $x, y \in S$ için, $[\{x\}supp(f_S)\{y\}supp(f_S)] \cap supp(f_S) \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim. $supp(f_S) = \{h, i\}$ olup,

$$[\{h\}supp(f_S)\{h\}supp(f_S)] \cap supp(f_S) = [\{h\}\{h, i\}\{h\}\{h, i\}] \cap \{h, i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[\{h\}supp(f_S)\{i\}supp(f_S)] \cap supp(f_S) = [\{h\}\{h, i\}\{i\}\{h, i\}] \cap \{h, i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[\{h\}supp(f_S)\{k\}supp(f_S)] \cap supp(f_S) = [\{h\}\{h, i\}\{k\}\{h, i\}] \cap \{h, i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[\{i\}supp(f_S)\{h\}supp(f_S)] \cap supp(f_S) = [\{i\}\{h, i\}\{h\}\{h, i\}] \cap \{h, i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[\{i\}supp(f_S)\{i\}supp(f_S)] \cap supp(f_S) = [\{i\}\{h, i\}\{i\}\{h, i\}] \cap \{h, i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[\{i\}supp(f_S)\{k\}supp(f_S)] \cap supp(f_S) = [\{i\}\{h, i\}\{k\}\{h, i\}] \cap \{h, i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[\{k\}supp(f_S)\{h\}supp(f_S)] \cap supp(f_S) = [\{k\}\{h, i\}\{h\}\{h, i\}] \cap \{h, i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[\{k\}supp(f_S)\{i\}supp(f_S)] \cap supp(f_S) = [\{k\}\{h,i\}\{i\}\{h,i\}] \cap \{h,i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[\{k\}supp(f_S)\{k\}supp(f_S)] \cap supp(f_S) = [\{k\}\{h,i\}\{k\}\{h,i\}] \cap \{h,i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

elde edilir. Böylece $supp(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol quasi-iç idealidir. Benzer şekilde,

$$[supp(f_S)\{h\}supp(f_S)\{h\}] \cap supp(f_S) = [\{h,i\}\{h\}\{h,i\}\{h\}] \cap \{h,i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[supp(f_S)\{h\}supp(f_S)\{i\}] \cap supp(f_S) = [\{h,i\}\{h\}\{h,i\}\{i\}] \cap \{h,i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[supp(f_S)\{h\}supp(f_S)\{k\}] \cap supp(f_S) = [\{h,i\}\{h\}\{h,i\}\{k\}] \cap \{h,i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[supp(f_S)\{i\}supp(f_S)\{h\}] \cap supp(f_S) = [\{h,i\}\{i\}\{h,i\}\{h\}] \cap \{h,i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[supp(f_S)\{i\}supp(f_S)\{i\}] \cap supp(f_S) = [\{h,i\}\{i\}\{h,i\}\{i\}] \cap \{h,i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[supp(f_S)\{i\}supp(f_S)\{k\}] \cap supp(f_S) = [\{h,i\}\{i\}\{h,i\}\{k\}] \cap \{h,i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[supp(f_S)\{k\}supp(f_S)\{h\}] \cap supp(f_S) = [\{h,i\}\{k\}\{h,i\}\{h\}] \cap \{h,i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[supp(f_S)\{k\}supp(f_S)\{i\}] \cap supp(f_S) = [\{h,i\}\{k\}\{h,i\}\{i\}] \cap \{h,i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

$$[supp(f_S)\{k\}supp(f_S)\{k\}] \cap supp(f_S) = [\{h,i\}\{k\}\{h,i\}\{k\}] \cap \{h,i\} = \{h\} \neq \emptyset$$

olduğundan $supp(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen sağ quasi-iç idealidir. O halde $supp(f_S)$, S yarıgrubunun bir hemen hemen quasi-iç idealidir. Fakat, Örnek 5.24'te gösterildiği üzere f_S , bir EK-hemen hemen quasi-iç ideal değildir.

5.25. Tanım f_S ve h_S , $h_S \cong f_S$ olacak şekilde, birer EK-hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal olsun. $supp(h_S) = supp(f_S)$ ise f_S esnek kümesine S yarıgrubunun bir minimal EK-hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideali denir.

5.26. Önerme A, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A, A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir minimal EK-hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal olmasıdır.

İspat: İspat EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. A, S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol quasi-iç ideali olsun. O halde, A, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol quasi-iç idealidir ve Önerme 5.19'dan, S_A bir EK-hemen hemen sol quasi-iç idealidir. $f_S \subseteq S_A$ olacak şekilde, f_S bir EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal olsun. Önerme 5.22'den, $\text{supp}(f_S), S$ yarıgrubunun bir hemen hemen sol quasi-iç idealidir ve Not 2.3.13'den ve Sonuç 2.3.18'den,

$$\text{supp}(f_S) \subseteq \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. A, S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol quasi-iç ideali olduğundan, $\text{supp}(f_S) = \text{supp}(S_A) = A$ olup, böylece, Tanım 5.25'ten, S_A bir minimal EK-hemen hemen sol quasi-iç idealidir.

Tersine, S_A bir minimal EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal olsun. O halde, S_A bir EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal ve Önerme 5.19'dan A, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol quasi-iç idealidir. $B \subseteq A$ olacak şekilde B, S yarıgrubunun bir hemen hemen sol quasi-iç ideali olsun. Önerme 5.19'dan, S_B bir EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal ve Teorem 2.3.19 (i)'den, $S_B \subseteq S_A$ olur. S_A bir minimal EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal olduğundan ve Sonuç 2.3.18'den,

$$B = \text{supp}(S_B) = \text{supp}(S_A) = A$$

elde edilir. Böylece, A, S yarıgrubunun bir minimal hemen hemen sol quasi-iç idealidir.

5.27. Teorem A, S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_A, A 'nın esnek karakteristik fonksiyonu olmak üzere, A kümesinin S yarıgrubunun bir minimal hemen

hemen quasi-iç ideali olması için gerek ve yeter şart S_A 'nın bir minimal EK-hemen hemen quasi-iç ideal olmasıdır.

5.28. Tanım f_S , g_S , ve h_S birer EK-hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ g_S \subseteq f_S$ olması $h_S \subseteq f_S$ veya $g_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-asal hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal denir.

5.29. Tanım f_S ve h_S birer EK-hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $h_S \circ h_S \subseteq f_S$ olması $h_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-yarı asal hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal denir.

5.30. Tanım f_S , g_S , ve h_S birer EK-hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal olsun. Bu durumda, $(h_S \circ g_S) \cap (g_S \circ h_S) \subseteq f_S$ olması $h_S \subseteq f_S$ veya $g_S \subseteq f_S$ olmasını gerektiriyor ise, f_S 'ye bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal denir.

Her EK-kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) quasi-iç idealin, bir EK-asal hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal olduğu ve her EK-asal hemen hemen sol (sağ) quasi-iç idealin, bir EK-yarı asal hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal olduğu açıktır.

5.31. Önerme P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-asal hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal ise, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen sol (sağ) quasi-iç idealidir.

İspat: İspat EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. S_P , bir EK-asal hemen hemen sol quasi-iç ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen sol quasi-iç idealdir ve Önerme 5.19'dan P , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol quasi-iç idealidir. $AB \subseteq P$ olacak şekilde A ve B , S yarıgrubunun birer hemen hemen sol quasi-iç ideali olsun. Bu durumda, Önerme 5.19'dan S_A ve S_B , birer EK-hemen hemen sol quasi-iç idealdir ve Teorem 2.3.19 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_B = S_{AB} \subseteq S_P$ elde edilir. S_P bir EK-asal hemen hemen sol quasi-iç ideal ve $S_A \circ S_B \subseteq S_P$ olduğundan, $S_A \subseteq S_P$ veya $S_B \subseteq S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.19 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir asal hemen hemen sol quasi-iç idealidir.

5.32. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-asal hemen hemen quasi-iç ideal ise, P kümesi S yarıgrubunun asal hemen hemen quasi-iç idealidir.

5.33. Önerme P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen sol (sağ) quasi-iç idealidir.

İspat: İspat EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. S_P , bir EK-yarı asal hemen hemen sol quasi-iç ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen sol quasi-iç idealdir ve Önerme 5.19'dan, P , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol quasi-iç idealidir. $AA \subseteq P$ olacak şekilde A , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol quasi-iç ideali olsun. Bu durumda, Önerme 5.19'dan, S_A , bir EK-hemen hemen sol quasi-iç idealdir ve Teorem 2.3.19 (i) ve (iii)'ten, $S_A \circ S_A = S_{AA} \subseteq S_P$ elde edilir. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen sol quasi-iç ideal ve $S_A \circ S_A \subseteq S_P$ olduğundan, $S_A \subseteq S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.19 (i)'den, $A \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen sol quasi-iç idealidir.

5.34. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-yarı asal hemen hemen quasi-iç ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir yarı asal hemen hemen quasi-iç idealidir.

5.35. Önerme P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) quasi-iç ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen sol (sağ) quasi-iç idealidir.

İspat: İspat EK-hemen hemen sol quasi-iç ideal için verilecek olup, EK-hemen hemen sağ quasi-iç ideal için de benzer şekilde yapılır. S_P , bir EK-kuvvetli asal hemen hemen sol quasi-iç ideal olsun. O halde, S_P bir EK-hemen hemen sol quasi-iç idealdir ve Önerme 5.19'dan, P , S yarıgrubunun bir hemen hemen sol quasi-iç idealidir. $AB \cap BA \subseteq P$ olmak üzere, A ve B , S yarıgrubunun birer hemen hemen sol quasi-iç ideali olsun. Bu durumda, Önerme 5.19'dan, S_A ve S_B birer EK-hemen hemen sol quasi-iç idealdir ve Teorem 2.3.19'dan, $(S_A \circ S_B) \cap (S_B \circ S_A) = S_{AB} \cap S_{BA} = S_{AB \cap BA} \subseteq S_P$ elde edilir. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen

hemen sol quasi-iç ideal ve $(S_A \circ S_B) \tilde{\cap} (S_B \circ S_A) \cong S_P$ olduğundan, $S_A \cong S_P$ veya $S_B \cong S_P$ sağlanır. Böylece, Teorem 2.3.19 (i)'den, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. Sonuç olarak, P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen sol quasi-iç idealidir.

5.36. Teorem P , S yarıgrubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi ve S_P , P 'nin esnek karakteristik fonksiyonu olsun. S_P bir EK-kuvvetli asal hemen hemen quasi-iç ideal ise P kümesi S yarıgrubunun bir kuvvetli asal hemen hemen quasi-iç idealidir.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, yarıgruplarda quasi-idealin ve iç idealin bir genellemesi olan quasi-iç ideal yapısı esnek kümelerle aktararak, “EK-Quasi-iç İdeal” kavramı tanıtılmıştır. Ayrıca “EK-Hemen Hemen Quasi-ideal” ve “EK-Hemen Hemen Quasi-iç İdeal” kavramları literatüre kazandırılmıştır. Bu yapıların tanımı ve örnekleri verilmiş, özellikleri incelenmiş ve bu yapıların diğer literatürde var olan diğer esnek kesişimsel (hemen hemen) ideallerle olan ilişkilerine yer verilmiştir.

Tezin ilk bölümünde, esnek kümeler, esnek küme işlemleri, yarıgrupların çeşitli EK-idealleri ve EK-hemen hemen idealleri ile ilgili kapsamlı bir literatür taraması yapılmıştır. İkinci bölümünde tez boyunca kullanılan esnek kümeler ve yarıgruplar ile ilgili temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde bir yarı grubun EK-quasi-iç ideali, dördüncü bölümde EK-hemen hemen quasi-ideal, beşinci bölümde EK-hemen hemen quasi-iç ideal yapısı detaylı bir şekilde verilmiş, özellikleri incelenmiş, yapılar ile ilgili çeşitli teoremler ortaya konulmuştur.

Daha detaylı ele alınacak olursa, bir yarı grubunun bir alt grubunun bir quasi-iç ideal olması ile bu alt yarı grubun esnek karakteristik fonksiyonunun bir EK-quasi-iç ideal olmasının birbirine denk olduğu ispatlanmıştır. Bir yarı grubun her EK-iç idealin bir EK-quasi-iç ideal, her EK-idealın bir EK-quasi-iç ideal olduğu gösterilmiştir. Bir grubun EK-quasi-iç idealinin bir EK-bi-ideal, bir regüler grubun EK-quasi-iç idealinin bir EK-quasi-ideal, idempotent bir EK-quasi-iç idealin bir EK-bi-quasi-ideal ve bir EK-bi-iç ideal olduğu gösterilmiştir. Bu ifadelerin karşıtlarının her zaman geçerli olmadığını gösteren aksine örnekler verilmiştir. Karşıtlarının geçerli olması için ek şartların gerekli olduğu ve bu şartların neler olduğu verilmiştir. Bir grubun EK-iç idealinin bir EK-quasi-iç ideal, idempotent bir esnek kümenin her EK-quasi-iç idealinin bir EK-ideal, bir regüler yarı grubun EK-idealinin bir EK-quasi-iç ideal, bir grubun EK-bi-idealinin bir EK-quasi-iç ideal, idempotent bir esnek kümenin her EK-quasi-iç idealinin bir EK-bi-ideal, bir regüler grubun EK-quasi-idealinin bir EK-quasi-iç ideal olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, farklı yarı gruplar üzerinde tanımlı iki EK-quasi-iç idealin esnek $\wedge$ -çarpımlarının ve esnek $\times$ -çarpımlarının da bir EK-quasi-iç ideal olduğu, EK-quasi-iç ideallerin sonlu esnek kesişimlerinin de bir EK-quasi-iç ideal olduğu, iki EK-idealın esnek kesişimlerinin bir EK-

quasi-iç ideal olduğu, iki EK-quasi-iç idealin esnek kesişimsel çarpımlarının da bir EK-quasi-iç ideal olduğu gösterilmiştir. EK-quasi-iç idealin esnek küme işlemleri, esnek görüntü, ters görüntü gibi karakterizasyonlarına da yer verilmiştir. Ayrıca, regüler bir yarıgrup ile esnek kesişimsel quasi-iç ideal yapısı arasındaki ilişki ortaya konulmuştur.

Bir yarı grubun EK-hemen hemen quasi-idealini tanımlandığı dördüncü bölümde, bir yarı grubun her EK-hemen hemen quasi-idealini bir EK-zayıf hemen hemen quasi-ideal olduğu, bir EK-quasi-idealini boş esnek kümeye eşit ya da EK-hemen hemen quasi-ideal olduğu, her EK-hemen hemen quasi-idealini bir EK-hemen hemen ideal olduğu gösterilmiştir. Bu ifadelerin karşıtlarının her zaman geçerli olmadığı aksine örnekler ile verilmiştir. Ayrıca, idempotent bir EK-hemen hemen quasi-idealini bir EK-hemen hemen alt yarı grup ve bir EK-hemen hemen zayıf-iç ideal, EK-hemen hemen quasi-ideallerin sonlu esnek birleşimlerinin bir EK-hemen hemen quasi-ideal olduğu fakat EK-hemen hemen quasi-ideallerin esnek kesişimlerinin her zaman bir EK-hemen hemen quasi-ideal olmadığı aksine örnek verilerek gösterilmiştir. Ayrıca, bir yarı grubun boş kümeden farklı bir alt kümesinin hemen hemen quasi-ideal olması ile bu alt kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun bir EK-hemen hemen quasi-ideal olmasının denk olduğu gösterilmiştir. Her EK-hemen hemen quasi idealin destek kümesinin de bir hemen hemen quasi-ideal olduğu fakat karşıtının her zaman geçerli olmadığı aksine örnek verilerek gösterilmiştir. Ayrıca, minimal EK-hemen hemen quasi-ideal tanımı verilmiş ve bir yarı grubun boştan farklı bir A kümesinin minimal hemen hemen quasi-ideal olması ile A 'nın esnek karakteristik fonksiyonunun bir EK-minimal hemen hemen quasi-ideal olmasının denk olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, hemen hemen quasi-idealler ile EK-hemen hemen quasi-idealler arasında asallık, yarı asallık ve kuvvetli asallık ile ilgili geçişler ispatlanarak gösterilmiştir.

Bir yarı grubun EK-hemen hemen quasi-iç idealini tanımlandığı beşinci bölümde, bir yarı grubun her EK-hemen hemen quasi-iç idealini bir EK-zayıf hemen hemen quasi-iç ideal olduğu, boş esnek kümeden farklı bir EK-quasi-iç idealini bir EK-hemen hemen quasi-iç ideal olduğu gösterilmiştir. Bu ifadelerin karşıtlarının her zaman geçerli olmadığı, aksine örnekler ile verilmiştir. Ayrıca, idempotent bir EK-hemen hemen quasi-iç idealini bir EK-hemen hemen alt yarı grup, EK-hemen hemen quasi-iç ideallerin sonlu esnek birleşimlerinin bir EK-hemen hemen quasi-iç ideal olduğu, kesişimlerinin ise her zaman bir EK-hemen hemen quasi-iç ideal olmadığı aksine örnek verilerek gösterilmiştir. Ayrıca,

yarıgrupun boş kümeden farklı bir alt kümesinin hemen hemen quasi-iç ideal olması ile o kümenin esnek karakteristik fonksiyonunun bir esnek kesişimsel hemen hemen quasi-iç ideal olmasının birbirine denk olduğu gösterilmiştir. Her EK-quasi-iç idealin destek kümesinin de bir hemen hemen quasi-iç ideal olduğu fakat karşıtının her zaman geçerli olmadığı aksine örnek verilerek gösterilmiştir. Ayrıca, hemen hemen quasi-iç idealler ile EK-hemen hemen quasi-iç idealler arasında asallık, yarı asallık ve kuvvetli asallık ile ilgili çeşitli geçişler elde edilmiştir.

Gelecek çalışmalarda, yarıgrupların farklı EK-(hemen hemen) idealleri incelenebilir olup ayrıca, bu tez ile literatüre kazandırılan EK-quasi-iç idealler iç regüler, sıfır yarıgruplar ve yarı basit yarıgruplar ile karakterize edilebilir.

KAYNAKLAR

- Acar, U., Koyuncu, F. and Tanay, B. (2010). Soft Sets and Soft Rings. *Computers Mathematics Applications*, 59(11), 3458-3463.
- Akbulut, E. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Difference and Lambda Operations*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University the Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Aktaş, H. and Çağman, N. (2007). Soft Sets and Soft Groups. *Information Sciences*, 177 (13), 2726-2735.
- Aktaş, H. and Özlü, Ş. (2014). Cyclic Soft Groups and Their Applications on Groups. *The Scientific World Journal*, Volume 2014 Article ID 437324, 5 pages.
- Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K. and Shabir, M. (2009). On Some New Operations in Soft Set Theory. *Computers Mathematics with Applications*, 57(9), 1547-1553.
- Atagün, A. O. and Sezgin, A. (2018). Soft Subnear-rings, Soft Ideals and Soft N-subgroups of Near-rings. *Mathematical Science Letter*, 7, 37-42.
- Aybek, F. (2024). *New Restricted and Extended Soft Set Operations*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University the Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Aygünoğlu, A. and Aygün, H. (2009). Introduction to Fuzzy Soft Groups. *Computers Mathematics Applications*, 58(6), 1279-1286.
- Babitha, K. V. and Sunil, J. (2010). Soft Set Relations and Functions. *Computers & Mathematics with Applications*, 60(7), 1840-1849.
- Baş, Z. H. (2025). *Yarıgrupların Esnek Kesişimsel (Hemen Hemen) Bi-quasi-iç İdealleri ve Esnek Kesişimsel Hemen Hemen İç İdealleri*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya.
- Baupradist, S., Chemat, B., Palanivel, K. and Chinram, R. (2021). Essential Ideals and Essential Fuzzy Ideals in Semigroups. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 24(1), 223-233.
- Bogdanovic, S. (1981). Semigroups in Which Some Bi-ideal is a Group. *Zbornik Radova PMF Novi Sad*, 11(81), 261-266.
- Chinram, R. and Nakkhasen, W. (2022). Almost Bi-quasi-interior Ideals And Fuzzy Almost Bi-quasi-interior Ideals of Semigroups. *Journal Mathematical Computer Science*, 26, 128-136.
- Chinram, R. and Nakkhasen, W. (2022). Almost Bi-interior Ideals and Their Fuzzification of Semigroups. *ICIC Express Letters*, 16(9), 933-941.

- Clifford, A. H. and Preston, G. B. (1961). *The Algebraic Theory of Semigroups, Volume I*. Providence: American Mathematical Society, 58-62.
- Clifford, A. H. and Preston, G. B. (1967). *The Algebraic Theory of Semigroups, Volume II*. Providence: American Mathematical Society, 79-83.
- Çağman, N. (2021). Conditional Complements of Sets and Their Application to Group Theory. *Journal of New Results in Science*, 10(3), 67-74.
- Çağman, N., Çıtak, F. and Aktaş, H. (2012). Soft Int-group and Its Applications to Group Theory. *Neural Computing and Applications*, 21, 151-158.
- Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010). Soft Set Theory and Uni-int Decision Making. *European Journal of Operational Research*, 207(2), 848-855.
- Demirci, A. M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended, Union Plus and Theta Operations*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University the Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Eren, Ö. F. (2019). *Esnek Küme Teorisi Üzerine*. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Feng, F., Jun, Y. B. and Zhao, X. (2008). Soft Semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, 56 (10), 2621-2628.
- Gaketem, T. (2022). Almost Bi-interior Ideal in Semigroups and Their Fuzzifications. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 15(1), 281–289.
- Gaketem, T. and Chinram, R. (2023). Almost Bi-quasi-ideals and Their Fuzzifications in Semigroups. *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, 50(2), 342–352.
- Good, R. A. and Hughes, D. R. (1952). Associated Groups for a Semigroup. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 58(6), 624–625.
- Gong, K., Xiao, Z. and Zhang, X. (2010). The Bijective Soft Set with its Operations. *Computers Mathematics Applications*, 60(8), 2270–2278.
- Grillet, P. A. (1995). *Semigroups: An Introduction to the Structure Theory* (First Edition). Routledge, 101-108.
- Grillet, P. A. (2013). *Commutative Semigroups (Vol. 2)*. Springer Science & Business Media, 65-77.
- Grošek, O. and Satko, L. (1980). A New Notion in the Theory of Semigroup. *Semigroup Forum*, 20(1), 233-240.
- Herawan, T. and Deris, M. M. (2010). Soft Decision Making for Patients Suspected Influenza, *Lecture Notes in Computer Science, Springer* 6018, 405–418.

- Howie, J. M. (1995). *Fundamentals of Semigroup Theory*. New York: Oxford University Press, 103-109.
- Huntington, E. V. (1902). Simplified Definition of a Group. *Bulletin of the Mathematical Society*, 8(7), 296-300.
- Iampan, A., Chinram, R. and Petchkaew, P. (2021). A Note on Almost Subsemigroups of Semigroups. *International Journal Mathematical Computer Science*, 16(4), 1623-1629.
- İlgin, A. (2025). *Yarıgrupların Esnek Kesişimsel (Hemen Hemen) Bi-iç İdealleri ve Zayıf-iç İdealleri, Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Alt Yarıgruplar ve İdealleri, Bi-quasi İdealleri ve Tri-bi İdealleri*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya.
- İlgin, A. and Sezgin, A. (Baskıda a). Soft Intersection Tri-ideals of Semigroups. *Acta Scientiarum Technology*.
- İlgin, A. and Sezgin, A. (Baskıda b). Soft Intersection Tri-bi-ideals of Semigroups. *Journal of the Korean Society for Industrial and Applied Mathematics*.
- Jana, C., Pal, M., Karaaslan, F. and Sezgin, A. (2019). (α, β) -Soft Intersectional Rings and Ideals with Their Applications. *New Mathematics and Natural Computation*, 15(02), 333-350.
- Jiang, Y., Tang, Y., Chen, Q., Wang, J. and Tang, S. (2010). Extending Soft Sets with Descriptionlogics. *Computers Mathematics Applications*, 59(6), 2087–2096.
- Jun, Y. B. (2008). Soft BCK-BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(5), 1408-1413.
- Jun, Y. B., Lee, K. J. and Zhan, J. (2009). Soft P-ideals of Soft BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(10), 2060-2068.
- Jun, Y. B. and Park, C. H. (2008). Applications of Soft Sets in Ideal Theory of BCK-BCI-algebras. *Information Sciences:An International Journal*, 178 (11), 2466-2475.
- Jun, Y. B. and Zhan, J. (2010). Soft BL-algebras Based on Fuzzy Sets, *Computers and Mathematics with Applications*, 59(6), 2037–2046.
- Kaopusek, N., Kaewnoi, T. and Chinram, R. (2020). On Almost Interior Ideals and Weakly Almost Interior Ideals of Semigroups. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 23(3), 773-778.
- Kazancı, O., Yılmaz, S. and Yamak, S. (2010). Soft Sets and Soft BCH-algebras. *Hacettepe Journal of Mathematics Statistics*, 39(2), 205-217.
- Lajos S. (1976). $(m;k;n)$ -Ideals In Semigroups. Notes On Semigroups II, *Karl Marx University of Economics Department of Mathematics Budapest*, (1), 12-19.

- Mahmood, T., Rehman, Z.U. and Sezgin, A. (2018). Lattice Ordered Soft Near Rings. *Korean Journal of Mathematics*, 26(3), 503-517.
- Maji, P. K., Biswas, R. and Roy, A. R. (2003). Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 555–562.
- Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory First Results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19–31.
- Muştuoğlu, E., Sezgin, A. and Türk, Z.K. (2016). Some Characterizations on Soft Unigroups and Normal Soft Uni-groups. *International Journal of Computer Applications*, 155(10), 1-8.
- Nagy, A. (2013). *Special Classes of Semigroups (Vol. 1)*. Springer Science & Business Media, 43-77.
- Onur, B. (2025). *Yarıgrupların Esnek Kesişimsel Bi-quasi İdealleri, Esnek Kesişimsel Hemen Hemen Bi-İdealleri ve Tri-idealleri*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya.
- Özlu, Ş. and Sezgin, A. (2020). Soft Covered Ideals in Semigroups. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica*, 12(2), 317-346.
- Park, C. H., Jun, Y. B. and Öztürk, M. A. (2008). Soft WS-algebras. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 23(2), 313-324.
- Pei, D. and Miao, D. (2005). From Soft Sets to Information Systems. In *2005 IEEE International Conference on Granular Computing*, 2, 617-621.
- Petrich, M. (1973). *Introduction to Semigroups*. Merrill Columbus, 59-70.
- Petrich, M. (1977). *Lectures in Semigroups*. Wiley New York, 202-211.
- Petrich, M. (1985). Inverse Semigroups. *Semigroup Forum*, 32, 215-219.
- Qin, K. and Hong, Z. (2010). On Soft Equality. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(5), 1347–1355.
- Rao, M. M. K. (Baskıda). Quasi-interior Ideals and Fuzzy Quasi-interior Ideals of Semirings. *Researchgate*.
- Rao, M. M. K. (2018a). Bi-interior Ideals of Semigroups. *Discussiones Mathematicae general Algebra and Applications*, 38(1), 69–78.
- Rao, M. M. K. (2018b). A Study of A Generalization of Bi-ideal, Quasi ideal and Interior ideal of Semigroup. *Mathematica Moravica*, 22(2), 103–115.
- Rao, M. M. K. (2018c). Quasi-interior Ideals of Semirings. *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institue*, 9(1), 231-242.

- Rao, M. M. K. (2019a). A Study of Quasi-interior Ideal of Semiring. *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*, 2, 287-300.
- Rao, M. M. K. (2019b). Quasi-interior Ideals and Fuzzy Quasi-interior Ideals of Γ -Semirings. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 18(1), 31-43.
- Rao, M. M. K. (2020a). Left Bi-quasi Ideals of Semigroups. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 44, 369–376.
- Rao, M. M. K. (2020b). Quasi-interior Ideals and Weak-interior Ideals. *Asia Pacific Journal Mathematical*, 7, 7–21.
- Rao, M. M. K. (2020c). Quasi-interior Ideals and Fuzzy Quasi-interior Ideals of Semigroups. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 19(2), 199-209.
- Rao, M. M. K. (2021). Fuzzy Soft Quasi-interior Ideals of Γ -semirings. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 22(3), 311-324.
- Rao, M. M. K. (2023). Quasi-interior Ideals and Their Properties. *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*, 13(2), 383-397.
- Rao, M. M. K. (2024a). Tri-ideals of Semigroups. *Bulletin of International Mathematical Virtual Institute*, 14(2), 213-223.
- Rao, M. M. K. (2024b). Quasi-interior Ideals and Fuzzy Quasi-interior Ideals of Γ -semigroups. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 28(2), 181-194.
- Rao, M. M. K., Kona R. K., Rafi, N. and Bolineni, V. (2024). Tri-quasi Ideals and Fuzzy Tri-quasi Ideals of Semigroups. *Annals of Communications in Mathematics*, 7(3), 281-295.
- Saeid, A. B., Rao, M. M. K., Kona R. K. and Rafi, N. (2022). Fuzzy (Soft) Quasi-interior Ideals of Semirings. *Transactions on Fuzzy Sets and Systems*, 1(2), 129-141.
- Sarılioğlu, M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended, Intersection Gamma and Star Operations*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University the Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Sezer, A. S. and Atagün, A. O. (2016). A New Kind of Vector Space: Soft Vector Space. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 40(5), 753-770.
- Sezer, A. S., Çağman, N. and Atagün, A. O. (2014). Soft Intersection Interior Ideals, Quasi-ideals and Generalized Bi-ideals; A New Approach to Semigroup Theory II, *Journal of Multiple Valued Logic and Soft Computing*, 23(1-2), 161-207.
- Sezer, A. S., Çağman, N. and Atagün, A. O. (2015a). Uni-soft Substructures of Groups. *Annals of Fuzzy Mathematics And Informatics*, 9(2), 235-246.

- Sezer, A. S., Çağman, N., Atagün, A. O., Ali, M. I. and Türkmen, E. (2015b). Soft Intersection Semigroups, Ideals and Bi-ideals; A New Application on Semigroup Theory I, *Filomat*, 29(5), 917-946
- Sezgin, A. (2018). A New View on AG-groupoid Theory via Soft Sets for Uncertainty Modeling. *Filomat*, 32(8), 2995-3030.
- Sezgin, A. and Akbulut, E. (2023). A Contribution to Complementary Soft Binary Piecewise Plus and Gamma Operations. *Journal of Amasya University the Institute of Sciences and Technology*, 4(1), 1-19.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011a). On Operations of Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5), 1457- 1467.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011b). Soft Groups and Normalistic Soft Groups. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(2), 685-698.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Plus Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 110-127.
- Sezgin, A., Atagün, A. O. and Aygün, E. (2011). A note on Soft Near-rings and Idealistic Soft Near-rings, *Filomat*, 25(1), 53-68.
- Sezgin, A., Atagün, A. O. and Çağman, N. (2013). A New View to N-group Theory-soft N-groups, *Fasciculi Mathematici*, 51, 123-140.
- Sezgin, A., Atagün, A. O., Çağman, N. and Demir, H. (2022). On Near-rings with Soft Union Ideals and Applications. *New Mathematics and Natural Computation*, 18(2), 495-511.
- Sezgin, A. and Aybek, F. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Gamma Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(1), 27-45.
- Sezgin, A., Aybek, F. and Atagün, A. O. (2023a). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Intersection Operation. *Black Sea Journal of Engineering and Science*, 6(4), 330-346.
- Sezgin, A., Aybek, F. and Güngör N. B. (2023b). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Union Operation. *Acta Informatica Malaysia*, (7)1, 38-53.
- Sezgin, A. and Baş, Z. H. (2024). Soft-int Almost Interior Ideals for Semigroups. *Information Sciences with Applications*, 4, 25-36
- Sezgin, A., Baş, Z. H. and İlgin, A. (2025). Soft Intersection Almost Bi-quasi-interior Ideals of Semigroups. *Journal of Fuzzy Extension and Applications*.
- Sezgin, A. and Çağman, N. (2024). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 7(1), 1-37.

- Sezgin, A., Çağman, N. and Atagün, A.O. (2017). A Completely New View to Soft-int Rings via Soft Uni-int Product. *Applied Soft Computing*, 54, 366-392.
- Sezgin, A., Çağman, N., Atagün, A. O. and Aybek, F. (2023c). Complemental Binary Operations of Sets and Their Application to Group Theory. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 114-121.
- Sezgin, A., Çağman, N. and Çıtak, F. (2019). α -inclusions and Their Applications to Group Theory. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(1), 334-352.
- Sezgin, A. and Çalışıcı, H. (2024). A Comprehensive Study on Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(1), 1-23.
- Sezgin, A. and Demirci, A. M. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Star Operation. *Ikonion Journal of Mathematics*, 5(2), 24-52.
- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024a). Soft Intersection Almost Subsemigroups of Semigroups. *International Journal of Mathematics and Physics*, 15(1), 13-20.
- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024b). Soft Intersection Almost Ideals of Semigroups. *Journal of Innovative Engineering and Natural Science*, 4(2), 466-481.
- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024c). Soft Intersection Almost Bi-quasi Ideals of Semigroups. *Soft Computing Fusion with Applications*, 1(1), 27-42.
- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024d). Soft Intersection Almost Bi-interior Ideals of Semigroups. *Journal of Natural and Applied Science Pakistan*, 6(1), 1619-1638.
- Sezgin, A. and İlgin, A. (2024e). Soft Intersection Almost Weak-interior Ideals of Semigroups: A Theoretical Study. *Journal of Natural Sciences and Mathematics of UT-JNSM* 9(17-18), 372-385.
- Sezgin, A., İlgin, A. and Atagün, A. O. (2024c). Soft Intersection Almost Tri-bi-ideals of Semigroups. *Science & Technology Asia*.
- Sezgin, A. and Kocakaya, F. Z. (Baskıda). Soft Intersection Almost Quasi-ideals of Semigroups. *Songklanakarin Journal of Science and Technology*.
- Sezgin, A., Kocakaya, F. Z. and İlgin, A. (2024a). Soft Intersection Almost Quasi-interior Ideals of Semigroups. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(2), 81-99.
- Sezgin, A. and Onur, B. (2024). Soft Intersection Almost Bi-ideals of Semigroups. *Systemic Analytics*, 2(1), 95-105.
- Sezgin, A., Onur, B. and İlgin, A. (2024b). Soft Intersection Almost Tri-ideals of Semigroups. *SciNexuses*, 1, 126-138.

- Sezgin, A. and Orbay, M. (2022). Analysis of Semigroups with Soft Intersection Ideals. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica*, 14(1), 166-210.
- Sezgin, A. and Sarıalioğlu, M. (2024). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Theta Operation. *Kadirli Uygulamalı Bilimler Fakültesi Dergisi*, 4(1), 1-33.
- Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023b). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Lambda Operation. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 8(2), 101-133.
- Srikanth, M., & Shobhalatha, G. (2024). Optimizing Quasi-interior Ideals and Fuzzy Soft Quasi-interior Ideals of Ternary Semirings. *Journal of Computational Analysis and Applications (JoCAAA)*, 33(06), 271-278.
- Steinfeld, O. (1956). Uher Die Quasi Ideals. *Von Halbgruppenn Publication Mathematical Debrecen*, 4, 262–275.
- Szasz G. (1977). Interior Ideals in Semigroups. Notes on Semigroups IV. *Karl Marx University of Economics Department of Mathematics, Budapest* 5, 1-7.
- Szasz G. (1981). Remark on Interior Ideals of Semigroups. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 16, 61-63.
- Tunçay, M. and Sezgin, A. (2016). Soft Union Ring and Its Applications to Ring Theory. *International Journal of Computer Applications*, 151(9), 7-13.
- Türkmen, E. and Pancar, A. (2013). On Some New Operations in Soft Module Theory. *Neural Computing and Applications*, (22), 1233–1237.
- Ullah, A., Ahmad, I., Hayat, F., Karaaslan, F. and Rashad, M. (2018). Soft Intersection Abel-Grassmann's Groups. *Journal of Hyperstructures*, 7 (2), 149-173.
- Wattanatripop, K., Chinram, R. and Changphas, T. (2018). Quasi-A-ideals and Fuzzy A-ideals in Semigroups. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 21(5), 1131-1138.
- Yavuz, E. (2024). *Soft Binary Piecewise Operations and Their Properties*, Unpublished Master's Thesis, Amasya University the Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Fatıma Zehra KOCAKAYA

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
-----------------	--------------	----------------

Lisans	Amasya Üniversitesi	2022
--------	---------------------	------

Yüksek Lisans	Amasya Üniversitesi	
---------------	---------------------	--

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1. Sezgin, A., Kocakaya, F. Z. and İlgin, A. (2024). Soft Intersection Almost Quasi-interior Ideals of Semigroups. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(2), 81-99.
2. Sezgin, A. and Kocakaya, F. Z. (Baskıda). Soft Intersection Almost Quasi-ideals of Semigroups. *Songklanakarin Journal of Science and Technology*.
3. Sezgin, A., İlgin, A., Kocakaya F. Z., Baş Z.H., Onur, B. and Çıtak, F. (2024). A Remarkable Contribution to Soft Int-group Theory via A Comprehensive View on Soft Cosets. *Journal of Science and Arts*, 24(4), 905-934.
4. Sezgin, A. and Kocakaya F. Z. (Baskıda). Soft Intersection Quasi-interior Ideals of Semigroups. *Communications on Applied Nonlinear Analysis*.