



**YATAY LİFT KONNEKSİYONUNA SAHİP
İKİNCİ MERTEBEDEN TANJANT DEMETLER**

Kübra KARACA

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN
2017
Her hakkı saklıdır**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**YATAY LİFT KONNEKSİYONUNA SAHİP İKİNCİ
MERTEBEDEN TANJANT DEMETLER**

Kübra KARACA

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
Geometri Bilim Dalı**

**ERZURUM
2017**

Her hakkı saklıdır



T. C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

**YATAY LİFT KONNEKSİYONUNA SAHİP İKİNCİ MERTEBEDEN TANJANT
DEMETLER**

Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN danışmanlığında, Kübra KARACA tarafından hazırlanan bu çalışma, 12./06/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Geometri Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği / oy çokluğu (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN

İmza :

Üye : Prof. Dr. Aydın GEZER

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Sibel TURANLI

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 15.06./2017 tarih ve 24./36... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YATAY LİFT KONNEKSİYONUNA SAHİP İKİNCİ MERTEBEDEN TANJANT DEMETLER

Kübra KARACA

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN

Bu tezde, ilk olarak yatay lift konneksiyonuna sahip ikinci mertebeden tanjant demetin yarı-simetri özellikleri incelenmiştir. İkinci olarak yatay lift konneksiyonunun projektif Ricci tensörü tanımlanmış ve onun Ricci yarı-simetri özellikleri çalışılmıştır.

2017, 47 sayfa

Anahtar Kelimeler: Yatay lift konneksiyon, İkinci mertebeden tanjant demet, Yarı-simetri.

ABSTRACT

Master Thesis

ON THE SECOND ORDER TANGENT BUNDLE WITH HORIZONTAL LIFT CONNECTION

Kübra KARACA

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Geometry

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN

In this thesis, firstly, semi-symmetry properties of second-order tangent bundle with respect to the horizontal lift connection was investigated. Secondly, projective Ricci tensor of the horizontal lift connection was defined and its Ricci semi-symmetry properties was studied.

2017, 47 pages

Keywords: Horizontal lift connection, Second-order tangent bundle, Semi-symmetry.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan ve çalışmanın yürütülmesinde değerli bilgileri ve önerileri ile beni yönlendirerek destek olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim gördüğüm süreçte ve çalışmalarım sırasında desteğini her zaman gördüğüm, Sayın Prof. Dr. Aydın GEZER'e ve tezin hazırlanış sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Yrd. Doç. Dr. Çağrı KARAMAN'a ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatımın tüm dönemlerinde kendilerinden görmüş olduğum destek, güven ve sonsuz sevgiden dolayı her zaman yanımda olan aileme gönülden teşekkür ederim.

Kübra KARACA

Mayıs, 2017

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar.....	3
2.2. Tanjant Vektörler ve Vektör Alanları.....	6
2.3. Tensörler.....	8
2.4. Tensör Diferensiyellemesi.....	11
2.5. Lie Operatörü ve Lie Türevi.....	12
2.6. Lineer Konneksiyon ve Kovaryant Türev.....	14
2.7. Eğrilik ve Burulma Tensörleri.....	16
2.8. Riemann Manifoldu.....	20
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	24
3.1. Tanjant Demet.....	24
3.2. Fonksiyon ve Vektör Alanının Dikey Lifti.....	24
3.3. γ Operatörü.....	27
3.4. Fonksiyon ve Vektör Alanının Tam Lifti.....	27
3.5. Fonksiyon ve Vektör Alanının Yatay Lifti.....	28
3.6. Lineer (Afin) Konneksiyonun Tam ve Yatay Liftleri.....	30
3.7. İkinci Mertebeden Tanjant Demet.....	31
3.8. Adapte Olmuş Çatı.....	35
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	37
4.1. ${}^H\nabla$ Yatay Lift Konneksiyonuna Sahip İkinci Mertebeden Tanjant Demetlerin Eğrilik Özellikleri.....	37
5. SONUÇ.....	44
KAYNAKLAR.....	46
ÖZGEÇMİŞ.....	48

SİMGELER DİZİNİ

∇_X	X Vektör Alanı Yönündeki Kovaryant Türevi
Γ_{ij}^k	2. Tür Christoffel sembolleri (Riemann Konneksiyonunun Katsayıları)
$^C X$	X Vektör Alanının Tam Lifti
$^H X$	X Vektör Alanının Yatay Lifti
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
R_{ijk}^l	Eğrilik Tensörü
T_{ij}^k	Burulma Tensörü
$T^2 M$	2. Mertebeden Tanjant Demeti
$T_p(M)$	$p \in M$ Noktasındaki Tanjant Uzayı
$^V X$	X Vektör Alanının Dikey Lifti
$[X, Y]$	X ve Y Vektör Alanlarının Lie Çarpımları
∇	Lineer Konneksiyonu
$\mathcal{C}$	Kontraksiyon Operatörü
TM	M Manifoldunun Tanjant Demeti
g	Riemann Metriği
π	Doğal İzdüşüm Fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Diferensiyellenebilir yapı	5
---	---



1. GİRİŞ

Geometri, fiziksel olayları daha iyi anlamak için insanın görsel algısını zenginleştiren matematiğin bir alanıdır. Tüm fiziksel olaylar, belirli dönüşümlerle tanımlanan ama tek başına bir anlam içermeyen koordinatlar tarafından belirlenen özelliklere sahip uzayda yer alır. Diferensiyel geometri ise eğrilerin, yüzeylerin ve yüzeylerin yüksek boyutlara genellemesi olan manifoldların (İngilizce: many-fold (çok katlı)) özelliklerini analiz ve lineer cebir araçları ile araştıran geometrinin bir alt dalıdır.

Riemann geometrisi, manifoldların özelliklerini, üzerlerinde tanımlı olan Riemann metriklerine göre araştırmayı amaçlayan diferensiyel geometrinin bir konusudur. Riemann geometrisinin gelişimindeki en önemli nokta, 1824 yılında Öklid geometrisindeki paralellik aksiyomunun diğer aksiyomlardan bağımsız olduğunu ve Öklid dışı tutarlı bir geometrinin olabileceğini ilk fark eden Gauss'un 1827'deki yüzeylere dair yaptığı çalışmadır. Ancak, o dönemdeki matematiksel araçların kısıtlı olması Gauss'un fikirlerinin yavaş bir biçimde gelişmesine yol açmıştır. 1854 yılında Gauss'un fikirleri Riemann tarafından yeniden ele alınmış ve Gauss eğriliğinin geliştirilmesi sağlanmıştır. Riemann'ın bu konuda Öklid dışı geometrilerin temel problemini, yani fizik ve geometri arasındaki ilişkiyi belirlemeyi amaçlamıştır. Riemann'ın formüle ettiği bu fikirler, Weyl'in 1913'teki çalışmasında yer almıştır ve bu fikirlerin görecelilik kuramına uygulanması 1916'da Einstein tarafından yapılmıştır. Ancak bu çalışmaların hiçbirinde paralellik konu edilmemiştir. 1917'de bir Riemann manifoldundaki paralellik fikri Levi-Civita tarafından ortaya konmuştur. Buna karşın, “(lineer) konneksiyon” terimine ilk kez Weyl'in 1918'deki çalışmasında rastlanır (De and Shaikh 2009; Freeman 2011).

Bir (düzgün) Riemann manifoldundan yeni bir (düzgün) Riemann manifoldu elde etmenin yöntemlerinden biri, Sasaki (1958)'nin yaptığı gibi, onun her noktasındaki ayrık tanjant uzaylarının birleşimiyle tanjant demeti meydana getirmektir. Tanjant demetlerin tarihçesine bakıldığında, çalışmaların genelde; yatay, dikey ve tam lift adı verilen fonksiyonlar yardımıyla (baz) manifolddaki geometrik nesneleri demete

taşıyarak demet ile (baz) manifoldun geometrisini karşılaştırmak üzerine yoğunlaştığı görülür (Abbassi 2008).

M düzgün manifoldu üzerinde ivme vektör alanları aynı olan eğrilerin denklik sınıfı olan ikinci mertebeden tanjant demetlerin geometrisi 1960'lı yıllarda Yano, Ishihara, Tani ve Morimoto tarafından çalışılmaya başlanmıştır. Tensör alanları ve konneksiyonların ikinci mertebeden tanjant demetlere liftleri Yano ve Ishihara tarafından geliştirilmiştir. Ishikawa, 1980 yılında Riemann manifoldlarının ikinci mertebeden tanjant demetlerinde bir lift metrik tanımlamış ve onun bazı özelliklerini incelemiştir. Djaa ve Gancarzewicz (1985) bir lineer konneksiyonun ikinci mertebeden tanjant demetine yatay liftini tanımlamıştır.

Yarı simetrik uzay ilk Cartan tarafından 1923 yılında incelenmiştir. Daha sonra Szabo 1982 yılında yarı simetrik uzayın yerel ve genel sınıflandırmasını vermiştir.

Sunulan bu tezde ${}^H\nabla$ yatay lift konneksiyona göre T^2M ikinci mertebeden tanjant demetlerin bazı eğrilik özellikleri araştırıldı. Bu sebeple konunun anlaşılabilmesi için ikinci bölümde ilgili özellikler ve tanımlar, kuramsal temeller başlığı altında verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise tanjant demet, fonksiyon ve vektör alanlarının yatay, dikey ve tam liftleri, lineer konneksiyonun tam ve yatay liftleri, ikinci mertebeden tanjant demet hakkında bilgi verilmiştir. Adapte olmuş çatı tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde yatay lift konneksiyonuna göre ikinci mertebeden tanjant demetin yarı-simetrik olma durumu incelenmiştir. Projektif Ricci tensörü tanımlanarak bileşenleri elde edilmiştir ve son olarak projektif Ricci tensörünün yarı-simetrik olması için gerek ve yeter şart verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tez çalışması boyunca ihtiyaç duyulan temel kavramlar konu bütünlüğüne uygun olarak sunulmuştur.

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1: n – boyutlu Öklid uzayında bir açık alt küme U olmak üzere

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun k . mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonu k . mertebeden diferensiyellenebilirdir denir ve $f \in C^k(U, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir (Hacısalıhoğlu 1993).

Tanım 2.1.2: M boş olmayan bir küme olsun ve $\wp(M)$ kuvvet kümesinin yani M nin tüm alt kümeleri ile boş kümenin oluşturduğu kümenin aşağıdaki özellikleri sağlayan bir τ alt kümeler sınıfı verilmiş olsun:

- 1) $M, \emptyset \in \tau$ dir,
- 2) τ sınıfının üyelerinin herhangi sayıda birleşimi τ nin elemanıdır,
- 3) τ sınıfının üyelerinin sonlu sayıda arakesiti τ nin elemanıdır.

Bu koşulları sağlayan bir τ ya M kümesi üzerinde bir topoloji denir. (M, τ) ikilisine ise topolojik uzay adı verilir (Şuhubi 2008).

Tanım 2.1.3: (M, τ) topolojik uzayında her $p, q \in M$, $p \neq q$ nokta çifti için $p \in U$, $q \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V kümeleri bulunabiliyorsa (M, τ) topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir (Şuhubi 2008).

Tanım 2.1.4: Topolojik uzayların sürekli $f: M \rightarrow N$ dönüşümü verilmiş olsun. Eğer f birebir-örten ve f^{-1} ters dönüşümü de sürekli ise f dönüşümüne homeomorfizm denir.

f dönüşümü homeomorfizm olduğu takdirde M ve N topolojik uzaylarına da homeomorf topolojik uzaylar denir (Salimov and Mağden 2008).

Tanım 2.1.5: M bir Hausdorff uzay olmak üzere her $p \in M$ için, $\mathbb{R}^n$ deki bir açık kümeye homeomorf olan bir U açık komşuluğu bulunabiliyorsa M Hausdorff uzayına bir topolojik manifold ya da kısaca manifold denir. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ olduğu için manifoldun boyutu da n dir ve bu manifold M_n ile gösterilir (Şahin 2013).

Tanım 2.1.5 de verilen homeomorfizm $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ise, (U, φ) ikilisine bir harita denir. M_n manifoldunun bütün noktalarının en az bir haritada yer alması için bu açık kümelerinin arakesitlerinin boştan farklı olması gerekir. φ bir homeomorfizm olduğundan, $p \in U$ noktasının koordinatları $x = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ noktasının koordinatları olarak tanımlanabilir. Böylece φ homeomorfizmi M_n manifoldunun bir p noktasına $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ n –lisini karşılık getirir. $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ sayılarına p noktasının φ altındaki yerel koordinatları denir. Bu nedenle manifold, herhangi bir noktasının komşuluğunda n tane bağımsız koordinatla verilen bir küme olarak da düşünülebilir (Şahin 2013).

$U \cap V \neq \emptyset$ olmak üzere (U, φ) ve (V, ψ) iki harita ve $U \cap V$ kümesinde bir noktanın φ altındaki koordinatları $(x^1, \dots, x^n)$ olsun. φ dönüşümünün φ^{-1} tersi olduğundan, $U \cap V$ de bir tek p noktası vardır. p noktasının ψ altındaki koordinatları $(y^1, \dots, y^n)$ olsun. Bu durumda bu koordinatlar arasında,

$$y^i = f^i(x^1, \dots, x^n) = (\psi \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n))^i$$

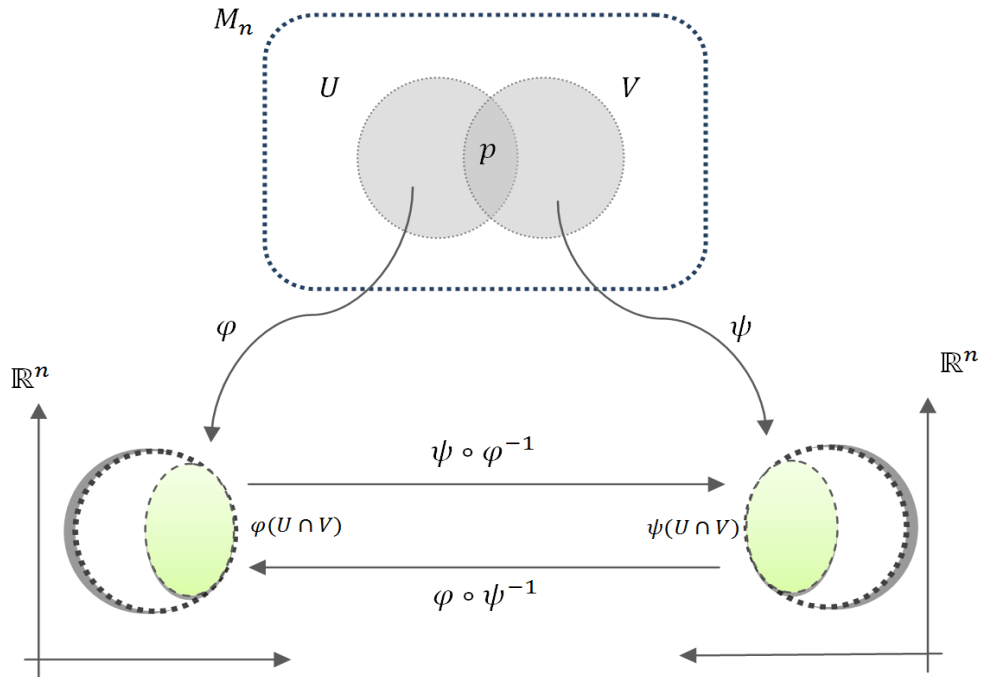
$$x^i = g^i(y^1, \dots, y^n) = (\varphi \circ \psi^{-1}(y^1, \dots, y^n))^i$$

eşitlikleri yazılır, burada $(x^1, \dots, x^n) \in \varphi(U \cap V)$, $(y^1, \dots, y^n) \in \psi(U \cap V)$, $i = 1, \dots, n$ şeklindedir. $\psi \circ \varphi^{-1}$ ve $\varphi \circ \psi^{-1}$ homeomorfizmleri birbirinin tersi olduğundan, f^i ve g^i fonksiyonları süreklidir. $U \cap V \neq \emptyset$ durumunda $f^i(x^1, \dots, x^n)$ ve $g^i(y^1, \dots, y^n)$ fonksiyonları k . mertebeden diferensiyellenebiliyorsa (φ, U) ve (ψ, V) haritaları

k . mertebeden uyumludur denir. Eğer $U \cap V = \emptyset$ ise uyumlu kabul edilir (Şahin 2013).

Tanım 2.1.6: M_n n -boyutlu manifold olmak üzere M_n üzerindeki haritaların bir ailesi olan $\mathbb{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi), (W, \xi), \dots\}$ kümesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\mathbb{A}$ kümesine M_n üzerinde k . mertebeden diferensiyellenebilir yapı veya atlas denir (Şahin 2013).

- 1) $\{U, V, W, \dots\}$ açık kümeleri M_n manifoldunun bir açık örtüsüdür.
- 2) $\mathbb{A}$ daki herhangi iki harita k . mertebeden uyumludur.
- 3) $\mathbb{A}$ maksimaldir, yani eğer bir $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ haritası $\mathbb{A}$ daki bütün koordinat haritaları ile uyumlu ise bu durumda $(\bar{U}, \bar{\varphi}) \in \mathbb{A}$ dır.



Şekil 2.1. Diferensiyellenebilir yapı

Tanım 2.1.7: M_n n -boyutlu manifold olsun. Eğer M_n manifoldu üzerinde k . mertebeden diferensiyellenebilir bir atlas varsa M_n manifolduna k . mertebeden diferensiyellenebilir manifold denir. Diferensiyellenebilir yapının her bir haritasına M_n manifoldunun uyumlu haritası adı verilir.

Eğer atlas her mertebeden diferensiyellenebiliyorsa M_n manifolduna C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold veya kısaca düzgün manifold denir.

2.2. Tanjant Vektörler ve Vektör Alanları

Tanım 2.2.1: M_n n -boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M_n$ noktasındaki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ ve $f \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ olsun. (U, φ) , p noktasındaki bir harita ise $\varphi(p) = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ den $p = \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)$ olur ve $g = f \circ \varphi^{-1}$ olmak üzere,

$$y = f(p) = f(\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)) = g(x^1, \dots, x^n)$$

elde edilir.

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial g}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)}$$

ifadesi alındığında n tane $\zeta^i \in \mathbb{R}$ sayıları için,

$$X_p(f) = \sum_{i=1}^n \zeta^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p$$

biçiminde tanımlanan $X_p: C^\infty(M_n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon,

$$X_p = \sum_{i=1}^n \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

şeklinde ve bu şekildeki tüm fonksiyonların kümesi $T_p(M_n)$ ile gösterilsin. $T_p(M_n)$ kümesi üzerinde $a \in \mathbb{R}$ için,

$$(X_{1p} + X_{2p})(f) = X_{1p}(f) + X_{2p}(f)$$

$$(aX_p)(f) = aX_p(f)$$

şeklinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla tanımlanırsa $T_p(M_n)$ kümesi bu işlemlere göre $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına M_n nin p noktasındaki tanjant uzayı denir. Bu uzayın elemanlarına ise M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörleri adı verilir (Salimov and Mağden 2008).

Tanım 2.2.2: M_n n -boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve $T_p(M_n)$ de manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı olsun. Bu durumda her $p \in M_n$ noktasına $T_p(M_n)$ uzayında yalnız bir tanjant vektörünü karşılık getiren X diferensiyellenebilir dönüşümüne M_n üzerinde vektör alanı denir. Böylece M_n üzerindeki bir vektör alanı,

$$X_p: M_n \longrightarrow \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n)$$

biçiminde diferensiyellenebilir bir dönüşüm olur. Burada vektör alanının diferensiyellenebilir olması demek her $f \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ için,

$$Xf: M_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p \longrightarrow Xf(p) = X_p(f)$$

ile tanımlı fonksiyonun her mertebeden diferensiyellenebilir olmasıdır.

Yerel koordinat sisteminde bir X vektör alanı,

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

biçimindedir (Şahin 2013).

Teorem 2.2.3: M , n -boyutlu bir manifold, $T_p M$ onun p noktasındaki tanjant uzayı ve p nin (U, φ) haritasında koordinatları $(x^1, \dots, x^n)$ olsun. Bu durumda $T_p M$ vektör uzayının bir bazı $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p \right\}$ dir.

Tanım 2.2.4: $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p \right\}$ doğal bazına M nin p noktasındaki doğal çatısı denir.

Bu çatı genellikle nokta vurgusu yapılmaksızın, $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ yazılımı ile $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ şeklinde gösterilir.

2.3. Tensörler

Tanım 2.3.1: B_n , n -boyutlu bir vektör uzayı ve ${}^D B_n$ de B_n vektör uzayının dual uzayı olsun. Bu durumda,

$$t: \overbrace{B_n \times B_n \dots \times B_n}^{q \text{ tane}} \times \overbrace{{}^D B_n \times {}^D B_n \dots \times {}^D B_n}^{p \text{ tane}} \rightarrow \mathbb{R}$$

ile tanımlanan ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, \dots, v_q \in B_n$ ve ${}^D v_1, {}^D v_2, \dots, {}^D v_p \in {}^D B_n$ olmak üzere,

$$t(v_1, \dots, \lambda_1 v_k + \lambda_2 v'_k, \dots) = \lambda_1 t(v_1, \dots, v_k, \dots) + \lambda_2 t(v_1, \dots, v'_k, \dots)$$

şartını sağlayan t fonksiyonuna p . dereceden kontravaryant ve q . dereceden kovaryant tensör denir. Burada $v_k, v'_k \in B_n$ (veya ${}^D B_n$) dir.

Bu tensörlerin kümesi $\mathfrak{S}_q^p(B_n)$ ile gösterilir ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $t_1, t_2 \in \mathfrak{S}_q^p(B_n)$ olmak üzere,

$$(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)(v_1, v_2, \dots) = \lambda_1 t_1(v_1, v_2, \dots) + \lambda_2 t_2(v_1, v_2, \dots)$$

dir. Burada $\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 \in \mathfrak{S}_q^p(B_n)$ olduğundan $\mathfrak{S}_q^p(B_n)$ bir vektör uzayı yapısına sahiptir. Ayrıca (p, q) ifadesi tensörün tipini ifade eder (Şahin 2013).

Tanım 2.3.2: B_n , n -boyutlu bir vektör uzayı ve ${}^D B_n$ de B_n vektör uzayının dual uzayı olsun. $\mathfrak{S}_q^p(B_n)$, (p, q) tipli tensörlerin kümesi olmak üzere,

$$C_j^i: \mathfrak{S}_q^p(B_n) \rightarrow \mathfrak{S}_{q-1}^{p-1}(B_n)$$

$$A \rightarrow (C_j^i A)(e_1, \dots, e_{q-1}, w^1, \dots, w^{p-1}) = C\{A(., e_1, \dots, e_{q-1}, ., w^1, \dots, w^{p-1})\}$$

ve

$$C_j^i A = \sum_m A(e_m, e_1, \dots, e_{q-1}, w^m, w^1, \dots, w^{p-1})$$

ile tanımlanan operatöre kontraksiyon operatörü denir. Burada $e_m, e_1, \dots, e_{q-1}$ ler B_n de baz ve $w^m, w^1, \dots, w^{p-1}$ ler ise ${}^D B_n$ de kobaz vektörleridir. Dolayısıyla bir kontraksiyon operatörü (p, q) tipli bir tensörü $(p-1, q-1)$ tipli bir tensöre dönüştürür (Şahin 2013).

Tanım 2.3.3: $(0,2)$ tipli $t(v_1, v_2)$ tensörü ele alınsın. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için,

$$t'(v_1, v_2) = \lambda t(v_1, v_2) + \mu t(v_2, v_1)$$

biçiminde bir $t'(v_1, v_2)$ tensörü tanımlansın. Böylece λ ve μ reel değerleri için sonsuz sayıda tensör elde edilir. Bunlardan herhangi biri $\lambda = \mu = \frac{1}{2!}$ biçiminde seçilirse buna karşılık gelen yeni tensöre $t(v_1, v_2)$ tensörünün simetrikleşmesi denir ve $Sim(t)$ ile gösterilir. Yani,

$$Sim(t(v_1, v_2)) = \frac{1}{2!} (t(v_1, v_2) + t(v_2, v_1))$$

dir. Eğer değişken sayısı 3 tane olursa $t(v_1, v_2, v_3)$ tensörünün simetrikleşmesi,

$$Sim(t(v_1, v_2, v_3)) = \frac{1}{3!} [t(v_1, v_2, v_3) + t(v_2, v_3, v_1) + t(v_3, v_1, v_2) + t(v_1, v_3, v_2) + t(v_3, v_2, v_1) + t(v_2, v_1, v_3)]$$

biçiminde yazılır. Benzer olarak $t'(v_1, v_2) = \lambda t(v_1, v_2) + \mu t(v_2, v_1)$ tensörlerinden bir diğeri ise $\lambda = -\mu = \frac{1}{2!}$ seçilerek elde edilebilir. O halde yeni elde edilen tensöre $t(v_1, v_2)$ tensörünün antisimetrikleşmesi denir ve $Alt(t)$ ile gösterilir. Yani,

$$Alt(t(v_1, v_2)) = \frac{1}{2!} (t(v_1, v_2) - t(v_2, v_1))$$

olur. Eğer değişken sayısı 3 tane olursa $t(v_1, v_2, v_3)$ tensörünün antisimetrikleşmesi,

$$Alt(t(v_1, v_2, v_3)) = \frac{1}{3!} [t(v_1, v_2, v_3) + t(v_2, v_3, v_1) + t(v_3, v_1, v_2) - t(v_1, v_3, v_2) - t(v_3, v_2, v_1) - t(v_2, v_1, v_3)]$$

biçiminde olur (Salimov and Mağden 2008).

Tanım 2.3.4: Eğer $Sim(t) = t(Alt(t) = t)$ olursa, t tensörüne simetrik (antisimetrik) tensör adı verilir (Salimov and Mağden 2008).

2.4. Tensör Diferensiyellemesi

Tanım 2.4.1: M_n , C^∞ sınıfından bir manifold ve $\mathfrak{S}_q^p(M_n)$ de keyfi $m \in M_n$ noktasındaki (p, q) tipli tensör uzayı olmak üzere M_n manifoldunun her $m \in M_n$ noktasına $\mathfrak{S}_q^p(M_n)$ tensör uzayından yalnız bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren,

$$\begin{aligned} t_p: M_n &\rightarrow \mathfrak{S}_q^p(M_n) \\ m &\rightarrow t_q^p(m) \in \mathfrak{S}_q^p(M_n) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilen t dönüşümüne (p, q) tipli tensör alanı adı verilir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğer $p = 1, q = 0$ alınırsa $(1,0)$ tipli tensör alanı yani bir vektör alanı elde edilir. Vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ile gösterilir.

Eğer $p = 0, q = 1$ alınırsa $(0,1)$ tipli tensör alanı yani kovektör alanı (1-form) elde edilir. Kovektör alanlarının kümesi $\mathfrak{S}_1^0(M_n)$ ile gösterilir.

Eğer $p = 0, q = 0$ alınırsa her $m \in M_n$ noktasına skaler bir değer karşılık gelir. Yani $(0,0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur. Reel değerli fonksiyonlar kümesi ise $\mathfrak{S}_0^0(M_n)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.2: Yerel koordinatlarla (p, q) tipli t tensör alanı,

$$t = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ lere t tensör alanının U koordinat komşuluğunda yerel koordinat sistemindeki koordinatları adı verilir. Eğer $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x)$ fonksiyonları C^∞ sınıfından iseler t tensör alanına C^∞ sınıfındandır denir (Salimov and Mağden 2008).

Tanım 2.4.3: Aşağıdaki şartları sağlayan $D: \mathfrak{S}(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}(M_n)$ dönüşümüne $\mathfrak{S}(M_n)$ cebirinin tensör diferensiyellemesi denir (Salimov and Mağden 2008).

Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $t, s \in \mathfrak{S}(M_n)$ için

- 1) D dönüşümü sabit katsayılarla göre lineerdir, yani $D(at + bs) = aD(t) + bD(s)$ dir.
- 2) Tensörün tipi korunur, yani $D(\mathfrak{S}_q^p(M_n)) \subset \mathfrak{S}_q^p(M_n)$ dir.
- 3) Leibniz kuralını sağlar, yani $D(t \otimes s) = D(t) \otimes s + t \otimes D(s)$ dir.
- 4) D dönüşümü tensörlerin kontraksiyon işlemi ile yer değiştirebilir. Yani C kontraksiyon operatörü olmak üzere $D(Ct) = C(D(t))$ dir.

2.5. Lie Operatörü ve Lie Türevi

Tanım 2.5.1: M_n , C^∞ sınıfından bir manifold, $U \subset M_n$ açık kümesi üzerinde tanımlı $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ vektör alanları ile $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ fonksiyonu verilsin.

$$[X, Y](f) = XY(f) - YX(f)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme X ve Y vektör alanlarının Lie operatörü (parantezi) adı verilir. Burada $X(f)$, f fonksiyonunun X vektör alanı yönündeki türevidir.

$[X, Y]$ vektör alanının ∂_i doğal çatısı cinsinden ifadesi

$$[X, Y] = XY - YX = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j) \partial_j \quad (2.1)$$

biçimindedir. Burada özel olarak $X = \partial_i, Y = \partial_j$ alınırsa

$$[\partial_i, \partial_j] = 0$$

olur.

Lie parantezi aşağıdaki özelliklere sahiptir (Salimov and Mağden 2008)

- 1) $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$ (Lineerlik)
- 2) $[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$ (Leibniz şartı)
- 3) $[X, Y] = -[Y, X]$ (Antisimetriklik)
- 4) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi özdeşliği)

Tanım 2.5.2: $X, Y \in \mathfrak{X}_0^1(M_n)$ ve $f \in \mathfrak{X}_0^0(M_n)$ alınsın. $D = L_X$ diferensiyelleme işlemi

- 1) $L_X f = X(f),$
- 2) $L_X Y = [X, Y],$

şartlarını sağlarsa L_X e X vektör alanı yönündeki Lie diferensiyellemesi denir (Salimov and Mağden 2008).

(2.1) eşitliğine göre $L_X Y$ nin yerel koordinatlardaki ifadesi

$$L_X Y^i = X^k \partial_k Y^i - Y^k \partial_k X^i$$

şeklindedir. Lie diferensiyellenmesi işlemi sonucunda bulunan değere Lie türevi denir (Salimov and Mağden 2008).

Keyfi (p, q) tipli t tensörü için Lie türevi formülü,

$$(L_X t)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = X^k \partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\lambda=1}^q (\partial_{j_\lambda} X^k) t_{j_1 \dots k \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^p (\partial_k X^{i_\mu}) t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots k \dots i_p}$$

şeklindedir (Salimov and Mağden 2008).

2.6. Lineer Konneksiyon ve Kovaryant Türev

Tanım 2.6.1: M_n , C^∞ sınıfından bir manifold, $X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ fonksiyonu için,

$$\nabla: \mathfrak{S}_0^1(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}_0^1(M_n)$$

ile tanımlanan ∇ dönüşümü,

- 1) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,
- 2) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- 3) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,
- 4) $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$,

şartlarını sağlarsa bu dönüşüme lineer ya da afin konneksiyon denir (Şahin 2013).

(M_n, ∇) çiftine lineer konneksiyonlu uzay denir.

Tanım 2.6.2: ∇ , C^∞ sınıfından bir M_n manifoldu üzerinde tanımlı lineer konneksiyon olsun. Her $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, her $f, g \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ ve her $t \in \mathfrak{S}_q^p(M_n)$ için,

$$D = \nabla_X: T(M_n) \rightarrow T(M_n)$$

diferensiyelleme işlemi,

- 1) $\nabla_{fX+gY}t = f\nabla_Xt + g\nabla_Yt,$
- 2) $\nabla_Xf = Xf$

şartlarını sağlıyorsa ∇_X vektör alanına X vektör alanı yönündeki kovaryant türevi adı verilir (Salimov and Mağden 2008).

M_n manifoldun üzerindeki U koordinat komşuluğundaki x^i yerel koordinatları ve bu komşulukta $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ doğal vektör alanı ele alınsın. $\nabla_{\partial_i} = \nabla_i$ olmak üzere ∇_i nin ∂_j vektör alanına uygulanmasıyla elde edilen vektör alanı,

$$\nabla_i \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

şeklindedir. Burada $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(x)$, U komşuluğunda tanımlanan C^∞ sınıfından fonksiyonlardır (Salimov and Mağden 2008). Ayrıca bu Γ_{ij}^k katsayılarına ∇ lineer konneksiyonun katsayıları veya 2. tür Christoffel sembolleri adı verilir.

Keyfi (p, q) tipli t tensörü için kovaryant türev $X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $\overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w} \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ için ∇_Y özelliklerine göre,

$$\begin{aligned} (\nabla_Y t)(X_1, \dots, X_q, \overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w}) &= Y \left(t(X_1, \dots, X_q, \overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w}) \right) \\ &\quad - \sum_{\lambda=1}^q t(X_1, \dots, \nabla_Y X_\lambda, \dots, X_q, \overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w}) \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^p t(X_1, \dots, X_q, \overset{1}{w}, \dots, \nabla_Y \overset{\mu}{w}, \dots, \overset{p}{w}) \end{aligned}$$

biçiminde ve yerel koordinatlarla bu ifade $Y = \partial_k$, $X_\lambda = \partial_{j_\lambda}$, $\lambda = 1, \dots, q$ ve $\overset{\mu}{w} = dx^{i_\mu}$, $\mu = 1, \dots, p$ için,

$$(\nabla_Y t)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{\lambda=1}^q \Gamma_{kj_\lambda}^m t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^p \Gamma_{km}^{i_\lambda} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p}$$

şeklinde olur.

2.7. Eğrilik ve Burulma Tensörleri

$f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ fonksiyonunun tam diferensiyeli $df = \partial_i f dx^i$ şeklindedir. Buradaki $\partial_i f = f_i$ ifadesi f fonksiyonunun tam diferensiyeli yardımıyla elde edilen 1-formdur. Elde edilen 1-formun kovaryant türevi,

$$\begin{aligned} \nabla_i f_j &= \partial_i f_j - \Gamma_{ij}^k f_k \\ &= \partial_i \partial_j f - \Gamma_{ij}^k (\partial_k f) \end{aligned} \quad (2.2)$$

şeklindedir. Schwarz teoremine göre sürekli bir fonksiyonda kısmi türevler yer değiştirebilir. Yani, $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ yazılır. O halde,

$$\nabla_j f_i = \partial_j \partial_i f - \Gamma_{ji}^k f_k \quad (2.3)$$

şeklinde olur.

Tanım 2.7.1: (2.2) ve (2.3) eşitliklerinden,

$$\nabla_j f_i - \nabla_i f_j = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) f_k = T_{ij}^k f_k$$

bulunur. Burada

$$T_{ij}^k = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)$$

biçimindedir ve T_{ij}^k ifadesine ∇ konneksiyonunun burulma tensörü adı verilir (Salimov and Mağden 2008). $T_{ij}^k = -T_{ji}^k$ olduğu açıktır. Burulma tensörünün invaryant (genel) formdaki yazılışı ise her $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için,

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (2.4)$$

şeklindedir. Burada $[X, Y]$, Lie parantezidir.

Tanım 2.7.2: Burulma tensörü sıfır olan uzaylara burulmasız uzaylar denir. Bu tür uzaylarda konneksiyon katsayıları simetrik olur. Yani,

$$\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0 \Leftrightarrow T_{ij}^k = 0$$

biçimindedir (Salimov and Mağden 2008). Bu da ∇ konneksiyonunun simetrik olması anlamına gelir. Burulma tensörünün (2.4) biçimindeki genel formu kullanılırsa burulmasız uzaylarda

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 2.7.3: ∇ , C^∞ sınıfından bir M_n manifoldu üzerinde tanımlı lineer konneksiyon olmak üzere her $X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için,

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanan tensöre ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü denir (Salimov and Mağden 2008).

(2.5) eşitliğinden

$$R(X, Y, Z) = -R(Y, X, Z) \quad (2.6)$$

olduğu açıktır.

$X = \partial_i$, $Y = \partial_j$, $Z = \partial_k$ doğal çatısı için eğrilik tensörünün ifadesi,

$$R_{ijk}{}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m \quad (2.7)$$

şeklinde olur.

(2.6) eşitliği ise koordinatlarla

$$R_{ijk}{}^l = -R_{jik}{}^l$$

ya da

$$R_{(ij)k}{}^l = 0$$

şeklinde yazılır. Yani eğrilik tensörü ilk iki alt indise göre antisimetriktir.

$v = v^i \partial_i \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ vektör alanı için (1,1) –tipli $\nabla_s v^i$ kovaryant türevinin tekrar kovaryant türevi alınır,

$$\begin{aligned}
\nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma_{rm}^i \nabla_s v^m - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \\
&= \partial_r (\partial_s v^i + \Gamma_{sk}^i v^k) + \Gamma_{rm}^i (\partial_s v^m + \Gamma_{sk}^m v^k) - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \\
&= \partial_{rs}^2 v^i + (\partial_r \Gamma_{sk}^i) v^k + \Gamma_{sk}^i (\partial_r v^k) + \Gamma_{rm}^i \partial_s v^m + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sk}^m v^k - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \\
&= \partial_{rs}^2 v^i + (\partial_r \Gamma_{sk}^i + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sk}^m) v^k + \Gamma_{sk}^i (\partial_r v^k) + \Gamma_{rm}^i \partial_s v^m - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \quad (2.8)
\end{aligned}$$

ve benzer olarak

$$\nabla_s \nabla_r v^i = \partial_{sr}^2 v^i + (\partial_s \Gamma_{rk}^i + \Gamma_{sm}^i \Gamma_{rk}^m) v^k + \Gamma_{rk}^i (\partial_s v^k) + \Gamma_{sm}^i \partial_r v^m - \Gamma_{sr}^m \nabla_m v^i \quad (2.9)$$

eşitliği bulunur. (2.9) eşitliğinin (2.8) eşitliğinden çıkarılmasıyla

$$\nabla_r \nabla_s v^i - \nabla_s \nabla_r v^i = (\partial_r \Gamma_{sk}^i - \partial_s \Gamma_{rk}^i + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sk}^m - \Gamma_{sm}^i \Gamma_{rk}^m) v^k - (\Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i)$$

olur. Buradan,

$$\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = R_{rsk}^i v^k - S_{rs}^k \nabla_k v^i \quad (2.10)$$

elde edilir. Bu eşitliğe v^i vektör alanı için Ricci özdeşliği denir. Ayrıca bu özdeşlik içinde bulunan R_{rsk}^i bileşenlerine ise ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörünün bileşenleri denir (Salimov and Mağden 2008; Altunbaş 2014).

Yardımcı Teorem 2.7.4: M_n , C^∞ sınıfından bir manifold ve ∇ ise bu manifold üzerinde burulmasız lineer konneksiyon olsun. R , burulmasız lineer konneksiyonun eğrilik tensörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

- 1) $R_{ijk}^l + R_{kij}^l + R_{jki}^l = 0,$
- 2) $\nabla_t R_{ijk}^l + \nabla_j R_{tik}^l + \nabla_i R_{jtk}^l = 0.$

Ayrıca yukarıdaki ifadelere sırasıyla 1. Bianchi ve 2. Bianchi (Bianchi-Padov) özdeşlikleri denir.

2.8. Riemann Manifoldu

Tanım 2.8.1: M_n , C^∞ sınıfından bir manifold ve $\mathfrak{S}_0^1(M_n)$, M_n üzerinde vektör alanları olmak üzere,

$$g: \mathfrak{S}_0^1(M_n) \times \mathfrak{S}_0^1(M_n) \rightarrow C^\infty(M_n, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan g bilineer formu her $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için,

- 1) $g(X, Y) = g(Y, X)$ (simetriklik)
- 2) $g(X, X) \geq 0$ ve her X için $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ (pozitif tanımlılık)

şartlarını sağlayan g bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör denir. (M_n, g) çiftine ise Riemann manifoldu adı verilir.

Yukarıda pozitif tanımlılık şartı yerine daha zayıf olan, “Her $Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için $g(X, Y) = 0$ olması $X = 0$ olmasını gerektirir.” biçiminde verilen g bilineer formunun regülerlik şartı konulursa (M_n, g) ikilisine yarı-Riemann (pseudo-Riemann) manifoldu denir (Kühnel 2005).

Regülerlik şartının koordinatlarla ifadesi $X = X^i \partial_i$ ve $Y = Y^j \partial_j$ için,

$$g(X, Y) = g(\partial_i, \partial_j) X^i Y^j = g_{ij} X^i Y^j = 0$$

şeklinde olur. Son eşitlik her Y^j için sağlandığından $g_{ij}X^i = 0$ olur. Bu denklem sisteminin $X^i = 0$ çözümüne sahip olması için,

$$\text{Det}(g_{ij}) \neq 0$$

olması gerekir. Burada (g_{ij}) , g_{ij} tensörüne karşılık gelen matristir.

Tanım 2.8.2: (M_n, g) Riemann manifoldu olmak üzere bu manifold üzerinde tanımlı ∇ lineer konneksiyon için eğer

$$\nabla g = 0$$

ise bu konneksiyona g ye göre metrik konneksiyon denir (Yano and Kon 1984).

Teorem 2.8.3: (M_n, g) Riemann manifoldu olmak üzere bu manifold üzerinde tanımlı burulmasız bir tek metrik konneksiyon vardır.

Tanım 2.8.4: Teorem 2.8.3'te verilen metrik konneksiyona Riemann veya Levi-Civita konneksiyonu adı verilir.

Teorem 2.8.5: (M_n, g) Riemann manifoldu ve ∇ bu manifoldun Riemann konneksiyonu olmak üzere her $X, Y, Z \in \mathfrak{X}_0^1(M_n)$ için Kozsul formülü ile bilinen aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$X = \partial_i, Y = \partial_j$ ve $Z = \partial_k$ doğal koordinatları için,

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) \quad (2.12)$$

eşitliği elde edilir. Buradaki Γ_{ij}^h fonksiyonlarına, ∇ Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları denir.

Tanım 2.8.6: (M_n, g) Riemann manifoldu ve ∇ bu manifold üzerinde tanımlı Levi-Civita konneksiyonu olsun. Her $X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için,

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

şeklinde tanımlanan R tensörüne Riemann eğrilik tensörü denir.

∇ Levi-Civita konneksiyonu burulmasız olduğundan Yardımcı Teorem 2.7.4 direkt sağlanır. Ayrıca (1,3) –tipli Riemann eğrilik tensörünün kontravaryant indisi indirilerek (0,4) –tipli kovaryant tensör elde edilir. Yani,

$$R_{ijk}{}^m g_{ml} = R_{ijkl}$$

olur.

Teorem 2.8.7: (M_n, g) Riemann manifoldu ve ∇ , bu manifoldun Riemann konneksiyonu olmak üzere, bu manifoldun Riemann eğriliği R , aşağıdaki şartları sağlar:

- 1) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$
- 2) $R_{ijkl} = R_{klij}$

Yukarıdaki Teorem 2.8.7 de

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}$$

eşitliği

$$R_{ijk}{}^m g_{ml} + R_{ijl}{}^m g_{mk} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu son eşitliğin g^{lk} ile kontraksiyonu sonucunda,

$$R_{ijk}{}^m \delta_m^k + R_{ijl}{}^m \delta_m^l = 0$$

yazılır ve buradan

$$R_{ijk}{}^k = 0$$

olur.

Tanım 2.8.8: $R_{ijk}{}^l$ eğrilik tensörü yardımıyla tanımlanan,

$$C_1^1(R_{ijk}{}^l) = R_{ljk}{}^l = R_{jk}$$

tensörüne Ricci eğrilik tensörü denir. Burada C_1^1 , kontraksiyon işlemi olup (1,3) tipli tensörü (0,2) tipli tensöre taşır. Ayrıca Ricci eğrilik tensörü simetriktir. Yani

$$R_{jk} = R_{kj}$$

dir (Kühnel 2005; Karaman 2016).

Tanım 2.8.9: Ricci eğrilik tensörünün tam kontraksiyonuna skaler eğrilik denir. τ ile gösterilen skaler eğrilik

$$\tau = g^{jk} R_{jk}$$

biçimindedir (Karaman 2016).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tanjant Demet

Tanım 3.1.1: M_n , C^∞ sınıfından n -boyutlu bir manifold ve M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı $T_p(M_n)$ olmak üzere,

$$T(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n) \quad (3.1)$$

ile tanımlanan $T(M_n)$ kümesine M_n manifoldu üzerindeki tanjant demet denir (Yano and Ishihara 1973).

$T(M_n)$ nin keyfi bir $\tilde{p} \in T_p(M_n)$ noktası için $(\tilde{p} \rightarrow p)$ yazılımı, M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ nin doğal demet yapısını tanımlayan

$$\begin{aligned} \pi: T(M_n) &\rightarrow M_n \\ \tilde{p} &\rightarrow \pi(\tilde{p}) = p \end{aligned}$$

demet izdüşümünü belirler. $\pi^{-1}(p) = \tilde{p} \in T_p(M_n)$ kümesine ise M_n baz manifoldunun p noktası üzerindeki fibresi denir (Yano and Ishihara 1973).

3.2. Fonksiyon ve Vektör Alanının Dikey Lifti

Tanım 3.2.1: $f: M_n \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $\pi: T(M_n) \rightarrow M_n$ izdüşümü olmak üzere

$${}^V f = f \circ \pi, {}^V f: T(M_n) \rightarrow R$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun dikey lifti denir.

$\tilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ üzerinde indirgenmiş koordinatlar (x^h, y^h) olmak üzere

$${}^V f(\tilde{p}) = {}^V f(x, y) = (f \circ \pi)(\tilde{p}) = f(p) = f(x)$$

dir. Böylece ${}^V f(\tilde{p})$ değeri her fibre için sabittir ve $p = \pi(\tilde{p}) \in M_n$ deki $f(p)$ değerine eşittir (Yano and Ishihara 1973).

Eğer ω , M_n de 1 –form ise ι operatörü vasıtasıyla $\iota\omega$ tanjant demette bir fonksiyon olarak tanımlanabilir. M_n nin bir U koordinat komşuluğunda ω 1 –formunun yerel ifadesi $\omega = \omega_i dx^i$ ise $\iota\omega \in \mathfrak{S}_0^0(T(M_n))$ fonksiyonunun $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre yerel ifadesi

$$\iota\omega = \omega_i y^i$$

şeklindedir. Benzer şekilde f , M_n de C^∞ sınıfından bir fonksiyon ve $df \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ olduğundan TM de $\iota(df)$ fonksiyonu $\pi^{-1}(U)$ deki indirgenmiş koordinatlara göre,

$$\iota(df) = (\partial_i f) y^i$$

biçiminde ifade edilir (Yano and Ishihara 1973).

Tanım 3.2.2: $\tilde{X} \in \mathfrak{S}_0^1(T(M_n))$ vektör alanı ve $\forall f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ için $\tilde{X} {}^V f = 0$ ise buradaki $\tilde{X}$ e dikey vektör alanı denir.

$\tilde{X}$ nin yerel koordinatlardaki bileşenleri $\begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ gösterilirse bileşenler,

$$\begin{aligned} \tilde{X} {}^V f = 0 &\Rightarrow \tilde{X}^H \partial_H {}^V f = 0 \\ &\Rightarrow \tilde{X}^h \partial_h {}^V f + \tilde{X}^{\bar{h}} \partial_{\bar{h}} {}^V f = 0 \\ &\Rightarrow \tilde{X}^h \partial_h f + \tilde{X}^{\bar{h}} \partial_{\bar{h}} f = 0 \end{aligned}$$

ve buradan da

$$\tilde{X}^h = 0 \quad \tilde{X}^{\bar{h}} \neq 0$$

bulunur. $\tilde{X}$ dikey liftinin indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri $\begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{X}^h \end{pmatrix}$ dir.

Tanım 3.2.3: X, M_n de bir vektör alanı olsun. $T(M_n)$ de $\iota\omega = \omega_i dx^i$ olmak üzere

$${}^vX(\iota\omega) = {}^v(\omega(X)) \quad (3.2)$$

ile tanımlanan vX bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına X vektör alanının dikey lifti denir.

vX dikey liftinin indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri,

$${}^vX(\iota\omega) = {}^v(\omega(X))$$

$${}^vX^j \partial_j(\iota\omega) = {}^v(\omega_j X^j)$$

$${}^vX^j \partial_j(\omega_s y^s) + {}^vX^{\bar{j}} \partial_{\bar{j}}(\omega_s y^s) = \omega_j X^j$$

$${}^vX^j (\partial_j \omega_s (y^s) + \omega_s (\partial_j y^s)) + {}^vX^{\bar{j}} ((\partial_{\bar{j}} \omega_s) y^s + \omega^s (\partial_{\bar{j}} y^s)) = \omega_j X^j$$

$$\Rightarrow {}^vX^j = 0, {}^vX^{\bar{j}} = X^j$$

olur ve böylece

$${}^vX = \begin{pmatrix} {}^vX^j \\ {}^vX^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^j \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

3.3. γ Operatörü

$S \in \mathfrak{S}_{q+1}^p(M_n)$ tensörü alınsın. Bu tensörün koordinatlarla yazılımı

$$S = S_{l,s_1,\dots,s_q}^{i_1,\dots,i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^l \otimes \dots \otimes dx^{s_q}$$

şeklinde olur. X vektör alanı $X^i \partial_i$ şeklinde yazılarak γ operatörü,

$$\gamma_X S = (X^l S_{l,s_1,\dots,s_q}^{i_1,\dots,i_p}) \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{s_1} \otimes \dots \otimes dx^{s_q} \quad (3.4)$$

$$\gamma S = (y^l S_{l,s_1,\dots,s_q}^{i_1,\dots,i_p}) \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{s_1} \otimes \dots \otimes dx^{s_q} \quad (3.5)$$

şeklindedir.

Burada $\gamma_X S$ ve γS , $T(M_n)$ tanjant demette birer tensör alanıdır. (3.4) ve (3.5) den $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $F \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ olmak üzere yerel koordinatlarda

$$\gamma_X F = \begin{pmatrix} 0 \\ X^i F_i^h \end{pmatrix} \quad \gamma F = \begin{pmatrix} 0 \\ y^i F_i^h \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

şeklinde olur. Eğer $S \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ ise $\gamma_X S = \gamma S = 0$ olarak kabul edilir (Yano and Ishihara 1973).

3.4. Fonksiyon ve Vektör Alanının Tam Lifti

Tanım 3.4.1: $f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ fonksiyonu için $T(M_n)$ tanjant demette,

$${}^c f = \iota(df)$$

şeklinde tanımlanan ${}^c f$ fonksiyonu f fonksiyonunun tam lifti olarak adlandırılır. ${}^c f$ fonksiyonu indirgenmiş koordinatlara göre

$${}^c f = \iota(df) = y^s \partial_s f = \partial f \quad (3.7)$$

biçimindedir (Yano and Ishihara 1973).

Tanım 3.4.2: $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için ${}^c X {}^c f = {}^c(Xf)$ ile tanımlanan ${}^c X \in \mathfrak{S}_0^1(T(M_n))$ vektör alanına, X vektör alanının tam lifti denir. ${}^c X$ vektör alanının $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri,

$$\begin{aligned} {}^c X^i \partial_i {}^c f + {}^c X^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}} {}^c f &= y^s \partial_s (X^i \partial_i f) \\ {}^c X^i \partial_i (y^s \partial_s f) + {}^c X^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}} (y^s \partial_s f) &= y^s (\partial_s X^i) \partial_i f + y^s X^i \partial_s \partial_i f \\ {}^c X^i &= X^i \\ {}^c X^{\bar{i}} &= y^s \partial_s X^i \end{aligned}$$

ve buradan da

$${}^c X = \begin{pmatrix} {}^c X^i \\ {}^c X^{\bar{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^i \\ y^s \partial_s X^i \end{pmatrix}$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

3.5. Fonksiyon ve Vektör Alanının Yatay Lifti

Tanım 3.5.1: ∇ , M_n de bir lineer konneksiyon olmak üzere, $f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ fonksiyonunun gradienti ∇f şeklinde yazılabilir. Ayrıca γ operatörü yardımıyla

$$\nabla_\gamma f = \gamma(\nabla f) = \gamma^s \partial_s f \quad (3.8)$$

eşitliği elde edilir.

$f \in \mathfrak{F}_0^0(M_n)$ fonksiyonu için $T(M_n)$ de,

$${}^H f = {}^c f - \gamma(\nabla f)$$

biçiminde tanımlanan ${}^H f$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun yatay lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

${}^c f = y^s \partial_s f$ ve (3.8) eşitliklerinden

$${}^H f = {}^c f - \gamma(\nabla f)$$

$${}^H f = y^s \partial_s f - y^s \partial_s f$$

$${}^H f = 0 \quad (3.9)$$

olur.

Tanım 3.5.2: ∇ , M_n de bir lineer konneksiyon olmak üzere $X \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$ için,

$${}^H X = {}^c X - \gamma(\nabla X) \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanan ${}^H X$ vektör alanına X vektör alanının yatay lifti adı verilir. Ayrıca $\gamma(\nabla X) = \nabla_\gamma X$ eşitliği vardır. X in ve ∇ nın M_n deki yerel koordinatları sırasıyla X^h ve Γ_{ij}^h dir. ${}^c X$ ve $\nabla_\gamma X$ in koordinatları $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlarda

$$\gamma(\nabla X) = \begin{pmatrix} 0 \\ y^s \nabla_s X^h \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad {}^c X = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

şeklindedir. Buradaki $\nabla_s X^h$, X^h in kovaryant türevidir ve

$$\nabla_s X^h = \partial_s X^h + \Gamma_{si}^h X^i$$

şeklindedir. ${}^H X$ in bileşenleri (3.10) ve (3.11) eşitliklerinden

$${}^H X = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ y^s \nabla_s X^h \end{pmatrix}$$

$${}^H X = \begin{pmatrix} X^h \\ -y^s \Gamma_{sm}^h X^m \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

bulunur (Yano and Ishihara 1973).

3.6. Lineer (Afin) Konneksiyonun Tam ve Yatay Liftleri

Tanım 3.6.1: ∇ , M_n manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Bu lineer konneksiyonun tam lifti

$${}^c \nabla_{H_X} {}^H Y = {}^H (\nabla_X Y) + \gamma(R(, X)Y)$$

formülüyle tanımlanır (Yano and Ishihara 1973).

Buradaki $R(, X)Y$ (1,1) tipli tensördür ve koordinatlarla $R_{sjm}^i X^j Y^m$ biçiminde ifade edilir. Ayrıca ${}^c \nabla$ nin katsayıları

$${}^c \Gamma_{ji}^h = \Gamma_{ji}^h, {}^c \Gamma_{ji}^{\bar{h}} = 0, {}^c \Gamma_{ji}^h = 0, {}^c \Gamma_{ji}^{\bar{h}} = 0, {}^c \Gamma_{ji}^{\bar{h}} = \partial \Gamma_{ji}^h, {}^c \Gamma_{ji}^{\bar{h}} = \Gamma_{ji}^h, {}^c \Gamma_{ji}^{\bar{h}} = \Gamma_{ji}^h, {}^c \Gamma_{ji}^{\bar{h}} = 0$$

formundadır.

Tanım 3.6.2: Aşağıdaki şartları sağlayan ${}^H\nabla$ lineer konneksiyonuna ∇ lineer konneksiyonun yatay lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

- 1) ${}^H\nabla_{v_X} v_Y = 0$
- 2) ${}^H\nabla_{v_X} {}^HY = 0$
- 3) ${}^H\nabla_{H_X} v_Y = v(\nabla_X Y)$
- 4) ${}^H\nabla_{H_X} {}^HY = {}^H(\nabla_X Y)$

3.7. İkinci Mertebeden Tanjant Demet

M , n -boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olsun. Aşağıda verilen $F: \mathbb{R} \rightarrow M$ diferensiyellenebilir dönüşümlerin kümesinde $\sim$ denklik bağıntısı tanımlansın. r , 1'den büyük bir tamsayı olmak üzere bir sabit tamsayı olsun. $F: \mathbb{R} \rightarrow M$ ve $G: \mathbb{R} \rightarrow M$ dönüşümleri

$$F^i(0) = G^i(0), \quad \frac{dF^i(0)}{dt} = \frac{dG^i(0)}{dt}, \dots, \frac{d^r F^i(0)}{dt^r} = \frac{d^r G^i(0)}{dt^r},$$

koşullarını sağlarsa F dönüşümü G ye denktir ve $F \sim G$ şeklinde ifade edilir. Burada F ve G dönüşümleri, $P = F(0) = G(0)$ noktasını içeren $\{U, x^i\}$ koordinat komşuluğunda (x^i) yerel koordinatlarına göre sırasıyla $x^i = F^i(t)$ ve $x^i = G^i(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) ile gösterilir. $\sim$ denklik bağıntısı tarafından belirlenen her bir denklik sınıfı, M nin bir r -jet olarak adlandırılır ve $j_P^r(F)$ ile gösterilir. Bu sınıf $F(0) = P$ olacak şekilde bir $F: \mathbb{R} \rightarrow M$ dönüşümüdür. P noktasına r -jet $j_P^r(F)$ in hedefi denir. M nin tüm r -jetlerinin kümesine r . dereceden tanjant demet denir ve $T^r M$ şeklinde gösterilir.

$\{U, x^i\}$ M nin bir koordinat komşuluğu olsun, bir r -jet $j_P^r(F)$ ($P \in U$), $(x^i, y_{(1)}^i, \dots, y_{(r)}^i)$ kümesi tarafından tek bir şekilde ifade edilir. (x^i) , U da P nin koordinatlarıdır ve $y_{(1)}^i, y_{(2)}^i, \dots, y_{(r)}^i$ sırasıyla

$$y_{(1)}^i = \frac{dF^i(0)}{dt}, y_{(2)}^i = \frac{1}{2!} \frac{d^2 F^i(0)}{dt^2}, \dots, y_{(r)}^i = \frac{1}{r!} \frac{d^r F^i(0)}{dt^r}$$

şeklinde tanımlanır. Burada F nin yerel ifadesi $x^h = F^h(t)$, $t \in \mathbb{R}$ ve $P = F(0)$ için $T^r M$ de bir topoloji tanımlanabilir ve $T^r M$ bir diferensiyellenebilir manifold yapısına sahip olur.

Şimdi $r = 1$ ya da $r = 2$ sınırlandırmalarını kabul edildiğinde $r = 1$ için $T^1 M$, M üzerindeki TM tanjant demettir. $\pi_1: TM \rightarrow M$ demet izdüşümü

$$\pi_1(j_P^1(F)) = P$$

ile tanımlanır. M nin her 1 –jetü M nin bir tanjant vektörüdür. İkinci mertebeden tanjant demet $T^2 M$, M üzerinde doğal demet yapısına sahiptir, bunun $\pi_2: T^2 M \rightarrow M$ demet izdüşümü,

$$\pi_2(j_P^2(F)) = P$$

ile gösterilir. Eğer $\pi_{12}(j_P^2(F)) = j_P^1(F)$ ile $\pi_{12}: T^2 M \rightarrow T^1 M$ dönüşümü tanımlanırsa, $T^2 M$, π_{12} izdüşümü ile TM üzerinde bir demet yapısına sahip olur. Burada $F: \mathbb{R} \rightarrow M$ bir keyfi dönüşümdür, öyle ki $P = F(0)$ dır. Buradan

$$\pi_2 = \pi_1 \circ \pi_{12}$$

olduğu aşikârdır.

(M, g) bir n –boyutlu Riemann manifold ve ∇ , g nin Levi-Civita konneksiyonu olsun. M nin ikinci mertebeden tanjant demeti $T^2 M$, $f: \mathbb{R} \rightarrow M$ diferensiyellenebilir eğrisinin $0 \in \mathbb{R}$ de $j^2 f$ 2 –jetlerinin, $3n$ –boyutlu manifoldudur.

$\pi_2: T^2M \rightarrow M$ standart izdüşümü M üzerinde T^2M in doğal demet yapısını tanımlar. Eğer standart izdüşüm $\pi_{12}: T^2M \rightarrow TM$ olarak alınırsa T^2M , π_{12} izdüşümüyle birlikte TM tanjant demetin bir demet yapısına sahip olur.

Tanım 3.7.1: (U, x^i) , M baz manifoldda bir koordinat sistemi ve f , U da $x^i = f^i(t)$ yerel gösterimine sahip bir eğri olsun. Eğer $\pi_2^{-1}(U)$ ya ait bir 2-jetler alınırsa ve $x^i = f^i(0)$, $y^i = \frac{df^i}{dt}(0)$, $z^i = \frac{d^2f^i}{dt^2}(0)$ tanımlanırsa 2-jetler j^2f , (x^i, y^i, z^i) kümesi tarafından tek olarak ifade edilmiş olur. Böylece (x^i, y^i, z^i) , $\pi_2^{-1}(U)$ da (U, x^i) den indirgenmiş koordinat sistemidir. $\pi_2^{-1}(U)$ da (x^i, y^i, z^i) koordinatlarına indirgenmiş koordinatlar denir. (x^i, y^i, z^i) koordinatları

$$\xi^i = x^i, \xi^{\bar{i}} = y^i, \xi^{\bar{\bar{i}}} = z^i$$

olacak şekilde $\{\xi^A\}$ gibi yazılır. $A, B, C, \dots$ indisleri $\{1, 2, \dots, n; n+1, n+2, \dots, 2n; 2n+1, 2n+2, \dots, 3n\}$ aralığında değer alır.

Tanım 3.7.2: ∇ konneksiyonu kullanılarak bir vektör demet izomorfizmi

$$S: T^2M \rightarrow TM \oplus TM$$

$$j^2f \rightarrow (\dot{f}(0), (\nabla_{\dot{f}(0)} \dot{f})(0))$$

şeklindedir. Burada $TM \oplus TM$, TM tanjant demetinin kendisiyle Whitney toplamıdır. $f(0)$ da f nin $\dot{f}(0)$ tanjant vektörü, $f(0)$ da f nin hız vektör alanıdır ve $(\nabla_{\dot{f}(0)} \dot{f})(0)$ kovaryant türev, $f(0)$ da f nin kovaryant ivmesidir.

Demet izomorfizm vasıtasıyla koordinatlar

$$S : (x^i, y^i, z^i) \rightarrow (x^i, y^i, \omega^i)$$

şeklinde dönüşür. Burada $\omega^i = z^i + y^s y^r \Gamma_{sr}^i$ dir.

Tanım 3.7.3: M baz manifoldda bir X vektör alanı alınsın. Bu X vektör alanının tanjant demete yatay ve dikey liftleri sırasıyla ${}^H X$ ve ${}^V X$ şeklinde gösterilsin. Demet izomorfizm vasıtasıyla $T^2 M$ de tanımlanan $0, I$ ve II liftlere kısaca λ – liftler denir.

M de bir X vektör alanının U da yerel ifadesi $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ olsun. $T^2 M$ de ${}^0 X, {}^I X, {}^{II} X$ vektör alanları $\{\xi^A\}$ indirgenmiş koordinatlara göre verilmiştir. $T^2 M$ de $\{\partial_A\} = \{\partial_i, \partial_{\bar{i}}, \partial_{\bar{i}}\}$ doğal çatıya göre

$${}^0 X = X^j \partial_j - y^s \Gamma_{sh}^j X^h \partial_{\bar{j}} - C_h^j X^h \partial_{\bar{j}} \quad (3.13)$$

$${}^I X = X^j \partial_j - 2y^s \Gamma_{sh}^j X^h \partial_{\bar{j}} \quad (3.14)$$

$${}^{II} X = X^j \partial_{\bar{j}} \quad (3.15)$$

dir (de Leon and Vazquez 1985). Burada $C_h^j = z^m \Gamma_{hm}^j + y^s y^r (\partial_h \Gamma_{sr}^j + \Gamma_{hm}^j \Gamma_{sr}^m - 2\Gamma_{sm}^j \Gamma_{hr}^m), \Gamma_{sr}^m$ M baz manifoldda ∇ konneksiyonunun katsayılarıdır ve doğal çatı $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \partial_{\bar{i}} = \frac{\partial}{\partial y^i}, \partial_{\bar{i}} = \frac{\partial}{\partial z^i}$ dir.

Tanım 3.7.4: M baz manifoldda X ve Y vektör alanlarının λ –liftlerinin terimlerinde $T^2 M$ de lie parantezleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} [{}^0 X, {}^0 Y] &= {}^0 [X, Y] - {}^I (R(X, Y)y) - {}^{II} (R(X, Y)\omega) \\ [{}^0 X, {}^I Y] &= {}^I (\nabla_X Y), \quad [{}^0 X, {}^{II} Y] = {}^{II} (\nabla_X Y) \\ [{}^\mu X, {}^\lambda Y] &= 0, \mu, \lambda = I, II \end{aligned} \quad (3.16)$$

Burada R, M baz manifolddaki ∇ Levi-Civita konneksiyonunun eğrilik tensör alanıdır ve $R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$ şeklindedir (Djaa and Gancarzewicz 1985).

3.8. Adapte Olmuş Çatı

Tanım 3.8.1: Her koordinat komşuluğunda (U, x^i) vektör alanları yerine, $X^i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ bazları alınır (3.13)-(3.15) den T^2M de $\{\partial x\}$ doğal çatıya göre

$$\begin{aligned} E_i &= {}^0(X_i) = {}^0\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \partial_i - y^s \Gamma_{is}^k \partial_{\bar{k}} - C_i^k \partial_{\bar{k}}, \\ E_{\bar{i}} &= {}^I(X_i) = {}^I\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \partial_{\bar{k}} - 2y^s \Gamma_{is}^k \partial_{\bar{k}}, \\ E_{\bar{i}} &= {}^{II}(X_i) = {}^{II}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \partial_{\bar{i}} \end{aligned}$$

olmak üzere $\{E_i, E_{\bar{i}}, E_{\bar{i}}\}$ çatısına $\pi_2^{-1}(U)$ adapte olmuş çatı denir (de Leon and Vazquez 1985). Adapte olmuş çatı $\{E_\beta\} = \{E_i, E_{\bar{i}}, E_{\bar{i}}\}$ şeklinde gösterilir. Burada $\alpha, \beta, \gamma \dots$ indisleri $\{1, 2, \dots, n; n+1, n+2, \dots, 2n; 2n+1, 2n+2, \dots, 3n\}$ aralığında değer alır.

Doğal çatı ile adapte olmuş çatı arasındaki bağıntı $E_\beta = A_\beta^B \partial_B$ şeklindedir. Burada

$$A_\beta^B = \begin{pmatrix} \delta_i^k & 0 & 0 \\ -y^s \Gamma_{is}^k & \delta_i^k & 0 \\ -C_i^k & -2y^s \Gamma_{is}^k & \delta_i^k \end{pmatrix}$$

dir. Ters matrisi de aşağıda verilmiştir:

$$\tilde{A}^\alpha_B = \begin{pmatrix} \delta_i^k & 0 & 0 \\ y^s \Gamma_{is}^k & \delta_i^k & 0 \\ C_i^k + 2y^s y^r \Gamma_{sm}^k \Gamma_{ri}^m & 2y^s \Gamma_{is}^k & \delta_i^k \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0, I, II$ için ${}^\lambda X^\alpha = \tilde{A}^\alpha{}_B {}^\lambda X^B$ kullanılarak (3.13)-(3.15) den $\{E_\beta\}$ adapte olmuş çatıya göre

$${}^0X = X^i E_i, {}^IX = X^i E_{\bar{i}}, {}^{II}X = X^i E_{\bar{i}} \quad (3.17)$$

elde edilir.



4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölüm (Gezer *et al.* 2016) makalesinde yayımlanan bulgulardan oluşmaktadır.

4.1. ${}^H\nabla$ Yatay Lift Konneksiyonuna Sahip İkinci Mertebeden Tanjant Demetlerin Eğrilik Özellikleri

Önerme 4.1.1: M manifoldu üzerindeki ∇ burulmasız bir lineer konneksiyonun T^2M deki ${}^H\nabla$ yatay lifti aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$${}^H\nabla_{\circ_X} \lambda Y = \lambda(\nabla_X Y), \quad {}^H\nabla_{\mu_X} \lambda Y = 0$$

Burada X ve Y , M üzerinde vektör alanlarıdır ve $\mu = I, II, \lambda = 0, I, II$ dir (Djaa and Gancarzewicz 1985).

${}^H\nabla$ yatay liftin koordinatlarla ifadesi $\{E_\beta\}$ adapte olmuş çatıya göre,

$$\begin{aligned} {}^H\nabla_{E_i} E_j &= \Gamma_{ij}^k E_k, \\ {}^H\nabla_{E_i} E_{\bar{j}} &= \Gamma_{ij}^k E_{\bar{k}}, \\ {}^H\nabla_{E_i} E_{\bar{j}} &= \Gamma_{ij}^k E_{\bar{k}}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklindedir. Bu konneksiyonun eğrilik tensörü,

$$\begin{aligned} {}^H R(E_h, E_i) E_j &= R_{hij}^k E_k, \\ {}^H R(E_h, E_i) E_{\bar{j}} &= R_{hij}^k E_{\bar{k}}, \\ {}^H R(E_h, E_i) E_{\bar{j}} &= R_{hij}^k E_{\bar{k}} \end{aligned} \tag{4.2}$$

şeklindedir (Gezer and Mağden 2017).

R eğrilik tensörü ile birlikte ∇ lineer konneksiyona sahip bir M ($\dim(M) \geq 3$) manifoldu verildiğinde, $k \geq 1$ olmak üzere $(0, k)$ tipli herhangi bir tensör alanı için $R(X, Y).S$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(R(X, Y).S)(X_1, X_2, \dots, X_k) = -S(R(X, Y)X_1, X_2, \dots, X_k) \\ - \dots - S(X_1, X_2, \dots, X_{k-1}, R(X, Y)X_k)$$

Burada $X_1, X_2, \dots, X_k, X$ ve Y , M manifoldu üzerinde vektör alanları ve $R(X, Y)$, S üzerinde bir türevleme gibidir.

Tanım 4.1.2: (M, g) , R eğrilik tensörüne sahip bir Riemann (yarı-Riemann) manifoldu olsun. Eğer R ,

$$R(X, Y).R = 0$$

şartını sağlarsa bu uzaya yarı-simetrik uzay denir.

Adapte olmuş çatıda T^2M deki tüm $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ vektör alanları için ${}^H R(\tilde{X}, \tilde{Y}).{}^H R$ tensörünün yerel olarak ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$({}^H R(\tilde{X}, \tilde{Y}).{}^H R)_{\alpha\beta\gamma\theta\sigma}^{\varepsilon} = {}^H R_{\alpha\beta\tau}^{\varepsilon} {}^H R_{\gamma\theta\sigma}^{\tau} - {}^H R_{\alpha\beta\gamma}^{\tau} {}^H R_{\tau\theta\sigma}^{\varepsilon} \\ - {}^H R_{\alpha\beta\theta}^{\tau} {}^H R_{\gamma\tau\sigma}^{\varepsilon} - {}^H R_{\alpha\beta\sigma}^{\tau} {}^H R_{\gamma\theta\tau}^{\varepsilon} \quad (4.3)$$

Benzer şekilde yerel koordinatlarla ifadesi,

$$R(X, Y).R)_{ijklm}^n = R_{ijp}^n R_{klm}^p - R_{ijk}^p R_{plm}^n - R_{ijl}^p R_{kpm}^n - R_{ijm}^p R_{klp}^n$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.3: ∇ , M üzerinde burulmasız lineer konneksiyon ve T^2M , ikinci mertebeden tanjant demet olsun. T^2M , ${}^H\nabla$ yatay lift konneksiyona göre yarı-simetriktir ancak ve ancak M baz manifoldu ∇ ya göre yarı-simetriktir.

İspat: (4.3) denkleminde $\alpha = (i, \bar{i}, \bar{\bar{i}}), \beta = (j, \bar{j}, \bar{\bar{j}}), \gamma = (k, \bar{k}, \bar{\bar{k}}), \theta = (l, \bar{l}, \bar{\bar{l}}), \sigma = (m, \bar{m}, \bar{\bar{m}})$ ve $\varepsilon = (h, \bar{h}, \bar{\bar{h}})$ ifadeleri yazıldığında (4.2) denkleminde ${}^H R(\tilde{X}, \tilde{Y}). {}^H R$ tensörünün bileşenleri,

$$\begin{aligned}
 1) \quad ({}^H R(\tilde{X}, \tilde{Y}). {}^H R)_{ijklm}{}^h &= {}^H R_{ijp}{}^h {}^H R_{klm}{}^h + {}^H R_{ij\bar{p}}{}^h {}^H R_{klm}{}^{\bar{p}} + {}^H R_{ij\bar{\bar{p}}}{}^h {}^H R_{klm}{}^{\bar{\bar{p}}} \\
 &\quad - {}^H R_{ijk}{}^p {}^H R_{plm}{}^h - {}^H R_{ijk}{}^{\bar{p}} {}^H R_{\bar{p}lm}{}^h - {}^H R_{ijk}{}^{\bar{\bar{p}}} {}^H R_{\bar{\bar{p}}lm}{}^h \\
 &\quad - {}^H R_{ijl}{}^p {}^H R_{kpm}{}^h - {}^H R_{ijl}{}^{\bar{p}} {}^H R_{k\bar{p}m}{}^h - {}^H R_{ijl}{}^{\bar{\bar{p}}} {}^H R_{k\bar{\bar{p}}m}{}^h \\
 &\quad - {}^H R_{ijm}{}^p {}^H R_{klp}{}^h - {}^H R_{ijm}{}^{\bar{p}} {}^H R_{kl\bar{p}}{}^h - {}^H R_{ijm}{}^{\bar{\bar{p}}} {}^H R_{kl\bar{\bar{p}}}{}^h \\
 &= R_{ijp}{}^h R_{klm}{}^p - R_{ijk}{}^p R_{plm}{}^h - R_{ijl}{}^p R_{kpm}{}^h - R_{ijm}{}^p R_{klp}{}^m
 \end{aligned}$$

ve buradan

$$({}^H R(\tilde{X}, \tilde{Y}). {}^H R)_{ijklm}{}^h = (R(X, Y). R)_{ijklm}{}^h$$

dir. Benzer şekilde diğer bileşenler

$$2) \quad ({}^H R(\tilde{X}, \tilde{Y}). {}^H R)_{ijkl\bar{m}}{}^{\bar{h}} = (R(X, Y). R)_{ijklm}{}^h$$

$$3) \quad ({}^H R(\tilde{X}, \tilde{Y}). {}^H R)_{ijkl\bar{\bar{m}}}{}^{\bar{\bar{h}}} = (R(X, Y). R)_{ijklm}{}^h$$

bulunur.

Bu denklemlerden görülür ki $({}^H R(\tilde{X}, \tilde{Y}). {}^H R) = 0$ ancak ve ancak $(R(X, Y). R) = 0$ dır.

${}^H\nabla$ yatay lift konneksiyonun HT burulma tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri, $\{E_\beta\}$ adapte olmuş çatıya göre

$${}^HT_{ij}^{\bar{h}} = y^p R_{ijp}^h, \quad {}^HT_{ij}^{\bar{\bar{h}}} = \omega^s R_{ijs}^h \quad (4.4)$$

şeklindedir (Djaa and Gancarzewicz 1985).

${}^H\nabla$ yatay lift konneksiyonun HT burulma tensörüne ${}^HR(\tilde{X}, \tilde{Y})$ türev operatörü uygulanırsa aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.1.4: ∇ , M de bir burulmasız lineer konneksiyon ve T^2M , ikinci mertebeden tanjant demet olsun. T^2M de tüm $\tilde{X}, \tilde{Y}$ vektör alanları olmak üzere ${}^HR(\tilde{X}, \tilde{Y}) \cdot {}^HT = 0$ olması için gerek ve yeter şart HT nin ${}^H\nabla$ yatay lift konneksiyonun burulma tensörü olduğu yerlerde M baz manifoldunun ∇ ya göre yarı-simetrik olmasıdır.

İspat: ${}^H\nabla$ yatay lift konneksiyonun HT burulma tensörüne uygulanan ${}^HR(\tilde{X}, \tilde{Y})$ türev operatörü, $\{E_\beta\}$ adapte olmuş çatıya göre aşağıdaki formdadır:

$$({}^HR(\tilde{X}, \tilde{Y}) \cdot {}^HT)_{\alpha\beta\gamma\theta}{}^\varepsilon = {}^HR_{\alpha\beta\tau}{}^\varepsilon {}^HT_{\gamma\theta}{}^\tau - {}^HR_{\alpha\beta\gamma}{}^\tau {}^HT_{\tau\theta}{}^\varepsilon - {}^HR_{\alpha\beta\theta}{}^\tau {}^HT_{\gamma\tau}{}^\varepsilon$$

(4.2) ve (4.3) denklemlerinden aşağıdaki eşitlikler elde edilebilir:

$$({}^HR(\tilde{X}, \tilde{Y}) \cdot {}^HT)_{ijkl}^{\bar{h}} = y^p ((R(X, Y) \cdot R)_{ijklp})^h$$

$$({}^HR(\tilde{X}, \tilde{Y}) \cdot {}^HT)_{ijkl}^{\bar{\bar{h}}} = \omega^s ((R(X, Y) \cdot R)_{ijkl s})^h$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.5: ∇ , M baz manifold üzerinde bir burulmasız lineer konneksiyon ve T^2M , ikinci mertebeden tanjant demet olsun. T^2M de tüm $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ vektör alanları için

$${}_{\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}}^{\sigma} {}^H T ({}^H T (\tilde{X}, \tilde{Y}) \tilde{Z}) = 0$$

dır. Burada σ , $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ vektör alanlarına göre dairesel toplamı ve ${}^H T$, ${}^H \nabla$ yatay lift konneksiyonun burulma tensörüdür.

İspat: $\{E_\beta\}$ adapte olmuş çatıda (4.4) denkleminde direkt hesaplamalarla

$${}_{\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}}^{\sigma} {}^H T ({}^H T (\tilde{X}, \tilde{Y}) \tilde{Z}) = {}^H T_{\alpha\beta}^{\varepsilon} {}^H T_{\varepsilon\gamma}^{\sigma} + {}^H T_{\gamma\alpha}^{\varepsilon} {}^H T_{\varepsilon\beta}^{\sigma} + {}^H T_{\beta\gamma}^{\varepsilon} {}^H T_{\varepsilon\alpha}^{\sigma}$$

yazılır.

M baz manifold üzerinde bir g Riemann metriği verilsin. T^2M üzerinde tanımlanan bir $\tilde{g}$ Riemann metriği, $\{E_\beta\}$ adapte olmuş çatıya göre aşağıdaki gibi tanımlanır (Ishikawa 1980):

$$\tilde{g}_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & g_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & g_{ij} \end{pmatrix}$$

${}^H \nabla$ yatay lift konneksiyonun Ricci eğrilik tensörü ${}^H R_{\alpha\beta} = {}^H R_{\sigma\alpha\beta}{}^{\sigma}$ şeklinde ifade edilir. ${}^H R_{\alpha\beta}$ nin sıfırdan farklı bileşenleri ${}^H R_{ij} = R_{ij}$ şeklindedir. Burada R_{ij} , M üzerindeki ∇ burulmasız lineer konneksiyonun Ricci tensörüdür. $\tilde{g}$ metriğine göre ${}^H \nabla$ yatay lift konneksiyonun ${}^H r$ skaler eğriliği aşağıdaki gibidir (Gezer and Magden 2016):

$${}^H r = \tilde{g}^{\gamma\beta} {}^H R_{\gamma\beta} = g^{ij} R_{ij} = r$$

(M, g) n -boyutlu Riemann manifoldu üzerindeki projektif Ricci tensörü, projektif eğrilik tensörünün kontraksiyonu ile elde edilir ve aşağıdaki gibidir:

$$P(X, Y) = \frac{n}{n-1} (Ric(X, Y) - \frac{r}{n} g(X, Y))$$

Burada X ve Y , M üzerinde vektör alanlarıdır. Bu tanıma benzer olarak, ${}^H\nabla$ yatay lift konneksiyona göre $(T^2M, \tilde{g})$ da yerel olarak projektif Ricci tensörü

$$\tilde{P}_{\alpha\beta} = \frac{3n}{3n-1} ({}^HR_{\alpha\beta} - \frac{{}^Hr}{3n} \tilde{g}_{\alpha\beta})$$

şeklindedir. Yukarıdaki eşitlikte ${}^HR_{\alpha\beta}$ ve $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ değerleri yazılırsa, projektif Ricci tensörünün sıfırdan farklı olan bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{ij} &= \frac{3n}{3n-1} \left(R_{ij} - \frac{S}{3n} g_{ij} \right), \\ \tilde{P}_{\bar{i}\bar{j}} &= \tilde{P}_{\bar{i}\bar{j}} = -\frac{S}{3n} g_{ij}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Teorem 4.1.6: ∇ , M baz manifold üzerinde bir burulmasız lineer konneksiyon ve T^2M ikinci mertebeden tanjant demet olsun. ${}^H\nabla$ yatay lift konneksiyonun projektif Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter şart ∇ nın Ricci tensörünün simetrik olmasıdır.

İspat: Projektif Ricci tensörünün (4.5) ile verilen bileşenleri ele alınırsa g_{ij} Riemann metriği ve R_{ij} Ricci tensörünün simetrik olmasından dolayı projektif Ricci tensörü de simetriktir.

Teorem 4.1.7: ∇_g (M, g) Riemann manifoldda Levi-Civita konneksiyon ve T^2M ikinci mertebeden tanjant demet olsun. T^2M nin ${}^H\nabla_g$ yatay lift konneksiyona göre projektif

Ricci yarı-simetrik olması için gerek ve yeter şart M Riemann manifoldunun ∇_g e göre Ricci yarı-simetrik olmasıdır.

İspat: ${}^H R(\tilde{X}, \tilde{Y}).\tilde{P}$ tensörü, $\{E_\beta\}$ adapte olmuş çatıya göre

$$({}^H R(\tilde{X}, \tilde{Y}).\tilde{P})_{\alpha\beta\gamma\theta} = {}^H R_{\alpha\beta\gamma}{}^\varepsilon \tilde{P}_{\varepsilon\theta} + {}^H R_{\alpha\beta\theta}{}^\varepsilon \tilde{P}_{\gamma\varepsilon}$$

bileşenlerine sahiptir.

(4.6) eşitliğinde $\alpha = (i, \bar{i}, \bar{\bar{i}}), \beta = (j, \bar{j}, \bar{\bar{j}}), \gamma = (k, \bar{k}, \bar{\bar{k}})$ ve $\theta = (l, \bar{l}, \bar{\bar{l}})$ yazılarak (4.2) ve (4.5) in yardımıyla sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$({}^H R(\tilde{X}, \tilde{Y}).\tilde{P})_{ijkl} = \frac{3n}{3n-1} (R(X, Y) Ric)_{ijkl}$$

Son eşitlikten sonuç açıktır.

5. SONUÇ

Sunulan bu tezde ilk olarak ${}^H\nabla$ yatay lift konneksiyonuna sahip T^2M ikinci mertebeden tanjant demetin yarı simetrik olması için gerek ve yeter şartın M baz manifoldunun ∇ burulmasız lineer konneksiyona göre yarı-simetrik olduğu elde edilmiştir.

İkinci olarak ${}^H\nabla$ yatay lift konneksiyonun HT burulma tensörüne ${}^HR(\tilde{X}, \tilde{Y})$ türev operatörü uygulanmış ve

$${}^HR(\tilde{X}, \tilde{Y}). {}^HT = 0$$

olması için gerek ve yeter şartın M baz manifoldunun ∇ burulmasız lineer konneksiyona göre yarı-simetrik olduğu gösterilmiştir. Ayrıca $\tilde{X}, \tilde{Y}$ ve $\tilde{Z}$ vektör alanlarına göre

$$\sigma_{\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}} {}^HT({}^HT(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}) = 0$$

olduğu sonucu elde edilmiştir.

Üçüncü olarak yatay lift konneksiyonuna göre projektif Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenlerinin

$$\tilde{P}_{ij} = \frac{3n}{3n-1} \left(R_{ij} - \frac{S}{3n} g_{ij} \right),$$

$$\tilde{P}_{ij} = \tilde{P}_{\bar{i}\bar{j}} = -\frac{S}{3n} g_{ij}$$

olduğu bulunmuş ve projektif Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter şart elde edilmiştir.

Son olarak T^2M nin ${}^H\nabla_g$ yatay lift konneksiyona göre projektif Ricci yarı-simetrik olması için gerek ve yeter şart bulunmuştur.



KAYNAKLAR

- Abbassi, M. T. K., 2008. “ g –natural metrics: new horizons in the geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds”, *Note di Matematica*, 1, 6-35.
- Altunbaş, M., 2014. Keyfi Tipli Tensör Demetlerinin Geometrisi. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Bishop, R.L. and Goldberg S.I., 1968. *Tensor Analysis on Manifolds*. The Mcmillan Company, New York, p. 19-135.
- Chaki, M. C., Saha S. K., 1994. On pseudo-projective Ricci symmetric manifolds. *Bulgar. J. Phys.* 21 (1-2), 1-7.
- De, Leon M., Vazquez E., 1985. On the geometry of the tangent bundles of order 2. *An. Univ. Bucureşti Mat.* 34, 40-48.
- De, U.C. and Shakikh A.A., 2009. *Differential geometry of manifolds*, Alpha Science, New York.
- Djaa, M., Gancarzewicz J., 1985. The geometry of tangent bundles of order r . *Boletin Academia, Galea de Ciencias* 4, 147-165.
- Dodson, C. T.J., Radivoiović M.S., 1982. Tangent and frame bundles of order two. *Analele stiintice ale Universitatii Al. I. Cuza* 28, 63-71.
- Freeman, K., 2011. A historical overview of connections in geometry. Master thesis, Wichita State University, Kansas.
- Gezer, A., Magden A., 2017. Geometry of the second-order tangent bundles of Riemannian manifolds. *Chin. Ann. Math. Ser. B.* 38B(4), 1-14.
- Gezer, A., Magden A., Karaca K., 2016. On the second-order tangent bundle with horizontal lift connection. *AIP Conference Proceedings*, 1726, 1-5.
- Hacısalıhoğlu, H. H., 1993. *Diferensiyel Geometri*, A. Ü. Fen Fakültesi.
- Ishikawa, S., 1980. On Riemannian metrics of tangent bundles of order 2 of Riemannian manifolds. *Tensor (N.S.)* 34 (2), 173-178.
- Karaman, Ç., 2016. Riemann Manifoldları Üzerindeki Bazı Özel Yapılar ve F-Konneksiyonlar. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Kühnel, W., 2005. *Differential geometry curves- surfaces- manifolds*. Amer. Mat. Soc., New York.
- Morimoto, A., 1970. Liftings of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles of Higher Order, *Nagoya Math. Jour.*, 40, 99-120.
- Salimov, A. A. and Mağden A., 2008. *Diferensiyel Geometri*, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Sasaki, S., 1958. “On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian Manifolds” *Tohoku Math. J.*, 10, 338-358.
- Szabo, Z. I., 1982. Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X, Y).R = 0$. I. The local version, *J. Differential Geom.* 17, 531-582.
- Szabo, Z.I., 1985. Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X, Y).R = 0$. II. *Global Geom. Dedicata* 19, 65-108.
- Şahin, B., 2013. *Manifoldların diferensiyel geometrisi.*, Nobel yayıncılık, Ankara.
- Şuhubi, E. S., 2008. *Dış Form Analizi TÜBA*, 646 s, Ankara.

- Tani, M., 1969. Tensor Fields and Connections in Cross-sections in the Tangent Bundles of Order 2, Kodai Math. Sem. Rep., 21 310-325.
- Yano K., Ishihara S., 1973. Tangent and cotangent bundles: differential geometry. Pure and Applied Mathematics, No. 16. Marcel Dekker, Inc., New York.
- Yano, K. and Kon M., 1984. Structures on manifolds. Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore.



ÖZGEÇMİŞ

Kübra KARACA 1991 yılında Erzurum'un Oltu ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Oltu'da tamamladı. 2008 yılında girdiği Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2013 yılında mezun oldu. 2012 yılında Farabi Değişim Programı ile bir dönem Gazi Üniversitesi'nde ders aldı. 2015 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalında ve Zootekni Anabilim Dalı Biyometri ve Genetik Bilim Dalında yüksek lisans öğrenimlerine başladı. Halen lisansüstü öğrenimlerine devam etmektedir.