

YENİ BANACH DİZİ UZAYLARI VE BAZI MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ**USKAN DEVLETLİ****YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI****DANIŞMAN
DOÇ. DR. MERVE İLKHAN KARA****DÜZCE, 2023**

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YENİ BANACH DİZİ UZAYLARI VE BAZI MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Uskan DEVLETLİ tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Merve İLKHAN KARA
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Merve İLKHAN KARA
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Önder Gökmen YILDIZ
Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Pınar ZENGİN ALP
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 27/07/2023

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

27 Temmuz 2023

Uskan DEVLETLİ

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Merve İlkhan KARA'ya en içten dileklerle teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca değerli katkılarını esirgemeyen hocam Prof. Dr. Evren KARA'ya da şükranlarımı sunarım.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

27 Temmuz 2023

Uskan DEVLETLİ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÇİZELGE LİSTESİ.....	vi
SİMGELER	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER.....	3
2.1. BAZI TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.2. DİZİ UZAYLARI, MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ.....	6
2.3. EULER TOTIENT FONKSİYONU VE JORDAN TOTIENT FONKSİYONU.....	9
3. $\ell_{\infty}(R_{Y^r}), \ell_p(R_{Y^r}), \ell(R_{Y^r})$ UZAYLARI	15
4. UZAYLARIN α -, β - VE γ -DUALLERİ.....	22
5. BELLİ MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ.....	25
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	33
7. KAYNAKLAR.....	34
ÖZGEÇMİŞ.....	37

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Çizelge 3.1. $U, V \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_p, \ell\}$ için (U, V) sınıfının karakterizasyonu.....	19



SİMGELER

bs	Sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı
$B(X, Y)$	X uzayından Y uzayına sınırlı ve lineer operatörlerin uzayı
c_0	Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
c	Yakınsak dizilerin uzayı
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
cs	Yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
$\text{Çek}L$	L operatörünün sıfır uzayı (çekirdeği)
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ cismi
ℓ	Mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
ℓ_p	Mutlak p -yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
ℓ_∞	Sınırlı dizilerin uzayı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Gerçek sayılar kümesi
ω	Reel veya karmaşık terimli dizilerin uzayı
μ	Möbius fonksiyonu
φ	Euler totient fonksiyonu

ÖZET

YENİ BANACH DİZİ UZAYLARI VE BAZI MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Uskan DEVLETLİ

Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Merve İLKHAN KARA

Temmuz 2023, 36 sayfa

Bu tez çalışmasının amacı yeni tipte dizi uzayları tanımlayıp bu uzayların bazı topolojik özelliklerini verdikten sonra çeşitli kapsama bağıntıları incelemektir. Bu yeni uzaylar ile klasik uzaylar arasında tanımlı bazı matris sınıfları karakterize edildikten sonra özel bazı matrisler için operatör normları hesaplanacaktır.

Anahtar sözcükler: Dizi Uzayı, Matris Dönüşümü, Operatör Normu.

ABSTRACT

NEW BANACH SEQUENCE SPACES AND SOME MATRIX TRANSFORMATIONS

Uskan DEVLETLİ

Düzce University

Graduate School, Department of Mathematics

Master Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Merve İLKHAN KARA

July 2023, 36 pages

The aim of this thesis is to define new types of sequence spaces and to examine various inclusion relations after giving some topological properties of these spaces. Operator norms will be calculated for some special matrices after characterizing some matrix classes defined between these new spaces and classical spaces.

Keywords: Matrix Operator, Operator Norm, Sequence Space.

1. GİRİŞ

Reel veya karmaşık terimli tüm dizilerden oluşan uzayın bir alt vektör uzayına dizi uzayı denir. Dizi uzayları toplanabilme teorisinde önemli bir yere sahiptir. Toplanabilme teorisi fonksiyonel analizde çok fazla uygulaması bulunan geniş bir teoridir. Toplanabilme teorisini oluşturan metodları geliştirmek adına matris dönüşümü teorisi kullanılmıştır. Klasik toplanabilme teorisinde amaç yakınsak olmayan dizilere ya da serilere özel bir dönüşüm uygulayarak yakınsak dizilere ya da serilere dönüştürmektir. Bu amaçla dizi uzayları arasında en genel lineer operatör bir sonsuz matris yardımı ile verilebildiğinden genel bir lineer operatör kullanmak yerine sonsuz matrisler kullanılmıştır.

Türev operatörü, diferansiyel operatörü gibi operatörler birer özel lineer operatör olup matematiğin günlük hayatta en çok uygulamaya sahip kavramlarıdır. Bu yüzden lineer operatörler matematik ve uygulamalı bilimlerde sıkça çalışılan ve karşılaşılan operatörlerdir. Dizi uzayları arasındaki matris dönüşümlerinin taşıması gereken şartları belirlemek aslında bu uzaylar arasındaki lineer dönüşümleri sınıflandırmak anlamına gelmektedir. Bu tezin en önemli amacı, yeni tanımlanmış olan dizi uzayları üzerinde tanımlanan matris dönüşümlerini sınıflandırmak olacaktır.

Literatürde matris etki alanı tanımı kullanılarak klasik dizi uzaylarından birçok yeni dizi uzayları elde edilmiştir (bkz. [1]-[11]). Bu uzayların birçoğu yeni birer normlu uzay olduğundan bu uzaylar Fonksiyonel Analizde büyük bir öneme sahiptir. Çünkü normlu uzaylar birer özel topolojik uzay olup günlük hayatta ve fizikte birçok uygulama alanına sahiptir.

Son zamanlarda [12] ve [13] nolu çalışmalarda Euler totient matrisini kullanarak çeşitli dizi uzayları tanımlanmıştır. Daha sonrasında [14]'de bu matris yardımıyla paranormlu dizi uzayları tanımlanıp bu uzayların bazı özellikleri incelenmiştir. Kısa bir süre önce [15]-[21]'de bu matris kullanılarak birçok yeni dizi ve seri uzayı tanımlanmıştır.

Yakın zamanda İlkhan ve ark. [22], Jordan totient matrisini kullanarak yeni dizi uzayları tanımladılar. Jordan totient matrisi, Jordan totient fonksiyonu yardımıyla tanımlanan regüler bir matris olduğundan bu çalışma, sayılar teorisindeki bazı kuramların Fonksiyonel Analiz Anabilim Dalında uygulanması açısından önem arz etmektedir.

Bu çalışmada, Jordan totient matrisinin daha genel bir hali olan Reisz-Jordan totient sonsuz üçgensel matrisi tanımlanıp bu matrisin ℓ_∞ , ℓ_p , ℓ dizi uzaylarındaki matris etki alanı oluşturularak yeni dizi uzayları tanımlanacaktır. Daha sonra bu uzayların birer normlu uzay olduğu gösterilecek ve bu uzayların klasik dizi uzayları ile olan ilişkileri incelenecektir. Aralarında lineer izomorfizm ve kapsama bağıntıları olup olmadığı araştırılacaktır. Son olarak bu uzayların dualleri bulunup bu uzaylardan klasik dizi uzaylarına tanımlı çeşitli matris dönüşümlerinin sınıfları karakterize edilecektir.

Bu matris özel durumlarda Euler totient, Reisz-Euler totient ve Jordan totient matrisine dönüşmektedir. Dolayısıyla tanımlanacak yeni dizi uzayları literatürde var olan çeşitli dizi uzaylarından daha genel ve daha kapsamlı olacaktır. Özel hallerde literatürde mevcut dizi uzayları elde edilecektir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde çalışma boyunca ihtiyaç duyulan tüm temel bilgilere yer verilmiştir.

2.1. BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. $U \neq \emptyset$ olmak üzere $\mathbb{F}$ reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$\begin{aligned} + : U \times U &\rightarrow U \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times U &\rightarrow U \\ (\alpha, u) &\mapsto \alpha u \end{aligned} \tag{2.2}$$

işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlasın.

$\forall u, v, t \in U$ için,

$$A1) u + v \in U,$$

$$A2) u + (v + t) = (u + v) + t,$$

$$A3) u + \theta = \theta + u = u \text{ olacak şekilde } \theta \in X \text{ vardır,}$$

$$A4) u + (-u) = (-u) + u = \theta \text{ olacak şekilde } (-x) \in X \text{ vardır,}$$

$$A5) u + v = v + u.$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için

$$B1) \alpha u \in U,$$

$$B2) \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v,$$

$$B3) (\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta v,$$

$$B4) \alpha (\beta u) = (\alpha \beta)u ,$$

$$B5) 1u = u, 1 \in \mathbb{F} .$$

Bu durumda U kümesine $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı denir [23].

Tanım 2.2. U bir vektör uzayı ve N de U 'nun bir alt kümesi olsun. Her $u, v \in N$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için $\alpha u + \beta v \in N$ oluyorsa N kümesine U 'nun alt vektör uzayı denir [23].

Tanım 2.3. U , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\| : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyona U üzerinde bir norm denir. $(U, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu uzay denir.

$$\forall u, v \in U \text{ ve } \forall \alpha \in \mathbb{F} \text{ için,}$$

$$N1) \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta$$

$$N3) \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$$

$$N4) \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ [23].}$$

Örnek 2.4. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $u = (u_n) \in \ell_p$ için $\|u\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p)^{1/p}$ olsun. $(\ell_p, \|\cdot\|)$ bir normlu uzaydır [23].

Tanım 2.5. $(U, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere U uzayında bir (u_n) dizisi verilsin ve $u_0 \in U$ olsun. Eğer verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n > n_0$ için $\|u_n - u_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (u_n) dizisi u_0 noktasına yakınsaktır denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0 \tag{2.3}$$

şeklinde yazılır [23].

Tanım 2.6. $(U, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere (u_n) U uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m > n_0$ olduğunda $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı bulunuyorsa (u_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir [23].

Tanım 2.7. $(U, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya Banach uzayı denir [23].

Tanım 2.8. $U, \mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\langle ., . \rangle : U \times U \rightarrow \mathbb{F}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım, $(U, \langle ., . \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir.

1) $\forall u, v, t \in U$ için $\langle u + v, t \rangle = \langle u, t \rangle + \langle v, t \rangle$ dir.

2) $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall u, v \in U$ için $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ dir.

3) $\forall u, v \in U$ için $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ dir.

4) $\forall u \in U$ için $\langle u, u \rangle \geq 0$ dır.

5) $\forall u \in U$ için $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \theta$ dır [23].

Tanım 2.9. $(U, \langle ., . \rangle)$ bir iç çarpım uzayı ve $u \in U$ olsun.

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlı $\|.\|$ fonksiyonu bir normdur ve iç çarpımın ürettiği norm olarak adlandırılır [23].

Tanım 2.10. U bir iç çarpım uzayı olmak üzere U üzerindeki iç çarpımın ürettiği norm $\forall u, v \in U$ için

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad (2.5)$$

eşitliğini sağlar. Buna Paralelkenar Kuralı denir [23].

Teorem 2.11. $(U, \|\cdot\|)$ normlu uzayının bir iç çarpım uzayı olması için gerek ve yeter şart $\forall u, v \in U$ için Paralelkenar kuralının sağlanmasıdır [23].

Tanım 2.12. $(U, \langle ., . \rangle)$ iç çarpım uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya Hilbert uzayı veya tam iç çarpım uzayı denir [23].

Tanım 2.13. U ve U' aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $L: U \rightarrow U'$ operatörü her $u, v \in U$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için

$$L(u + v) = L(u) + L(v) \quad (2.6)$$

$$L(\alpha u) = \alpha L(u) \quad (2.7)$$

aksiyomlarını sağlıyorsa L operatörüne U uzayından U' uzayına bir lineer operatör denir [23].

Tanım 2.14. $L : U \rightarrow U'$ bir lineer operatör olsun.

$$\text{Çek}L = \{u \in U : Lu = \theta'\} \quad (2.8)$$

kümesine L operatörünün çekirdeği veya sıfır uzayı denir. Burada θ' , U' uzayının sıfır vektörüdür [23].

Teorem 2.15. L lineer operatörünün bire-bir olması için gerek ve yeter şart $\text{Çek}L = \{\theta\}$ olmasıdır [23].

Tanım 2.16. U ve V normlu uzaylar olmak üzere $L : U \rightarrow V$ lineer bir operatör olsun. Her $u \in U$ için

$$\|L(u)\| \leq c\|u\| \quad (2.9)$$

olacak şekilde $c > 0$ reel sayısı varsa L operatörüne sınırlı lineer operatör denir [23].

Tanım 2.17. U ve V normlu uzaylar olmak üzere, $L : U \rightarrow V$ lineer operatör olsun.

$$\|L\| = \sup\left\{\frac{\|L(u)\|}{\|u\|} : u \in U, u \neq \theta\right\} = \sup\{\|L(u)\| : u \in U, \|u\| \leq 1\} \quad (2.10)$$

olmak üzere $\|L\|$ değerine L operatörünün normu denir [23].

Tanım 2.18. U normlu uzayından V normlu uzayına lineer bir izometrik izomorfizm, normu koruyan yani her $u \in U$ için,

$$\|L(u)\|_V = \|u\|_U \quad (2.11)$$

olan bire-bir ve örten $L : U \rightarrow V$ lineer operatörüdür. Bu durumda U ve V uzaylarına lineer izomorfiktirler denir ve $U \cong V$ ile gösterilir [23].

2.2. DİZİ UZAYLARI, MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Tanım 2.19. Reel ve kompleks terimli tüm dizilerinin kümesi

$$\omega = \{u = (u_n) : u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}, n \rightarrow u(n) = u_n\} \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır.

$u = (u_n), v = (v_n) \in \omega$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ olsun.

$$((u_n), (v_n)) \rightarrow (u_n + v_n) \quad (2.13)$$

$$(\alpha, (u_n)) \rightarrow (\alpha u_n) \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlı işlemlere göre ω bir vektör uzayıdır [24].

Tanım 2.20. ω uzayının herhangi bir alt vektör uzayına dizi uzayı denir [24].

Aşağıda çalışma boyunca kullanılacak klasik dizi uzaylarına yer verilmiştir.

$$\ell_p = \{u = (u_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p < \infty\}, p > 1$$

(p . dereceden mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı)

$$\ell = \{u = (u_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty\}$$

(Mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı)

$$\ell_{\infty} = \{u = (u_k) \in \omega : \sup_k |u_k| < \infty\}$$

(Sınırlı dizilerin uzayı)

$$c_0 = \{u = (u_k) \in \omega : \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0\}$$

(Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı)

$$c = \{u = (u_k) \in \omega : \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = l, l \in \mathbb{F}\}$$

(Yakınsak dizilerin uzayı)

$$bs = \{u = (u_k) \in \omega : (\sum_{k=1}^n u_k) \in \ell_{\infty}\}$$

(Sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı)

$$cs = \{u = (u_k) \in \omega : (\sum_{k=1}^n u_k) \in c\}$$

(Yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı)

$$cs_0 = \{u = (u_k) \in \omega : (\sum_{k=1}^n u_k) \in c_0\}$$

(Sıfıra yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı)

Tanım 2.21. U bir lineer topolojik dizi uzayı olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n : U \rightarrow \mathbb{F}$, $u \mapsto p_n(u) = u_n$ biçiminde tanımlı koordinat dönüşümleri sürekli ise U dizi uzayına K -uzayı denir.

U bir K -uzayı olsun. U tam lineer metrik uzay ise U dizi uzayına FK -uzayı denir.

U bir FK -uzayı olsun. U uzayının metriği normlanabiliyorsa bu uzaya BK -uzayı denir [24].

Teorem 2.22. (Silverman Toeplitz Teoremi) Bir $\Lambda = (\lambda_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar:

- 1) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{nk}| < \infty$
- 2) Her bir k için $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{nk} = 0$ dır.
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{nk} = 1$ dir [24].

Örnek 2.23. (q_k) pozitif sayıların bir dizisi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $Q_n = \sum_{k=1}^n q_k$ olsun. Riesz matrisi $E = (e_{nk})$

$$e_{nk} = \begin{cases} \frac{q_k}{Q_n} & , \quad 1 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0 & , \quad k > n \text{ ise} \end{cases} \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanmıştır. $Q_n \rightarrow \infty$ için bu matris regülerdir. [24].

Tanım 2.24. $\Lambda = (\lambda_{nk})$ sonsuz bir matris ve U, V herhangi dizi uzayları olsun. U bir vektör uzayı olduğundan herhangi $u = (u_n) \in U$ dizisi sütun vektör olarak ifade edilebilir. Klasik matris çarpımı kullanılarak

$$\Lambda u = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1k} & \cdots \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{1k} u_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{2k} u_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{nk} u_k \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

elde edilir. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{nk} u_k$ serisinin yakınsak olduğu kabul edilir. Eğer $v = (v_n) = (\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{nk} u_k) \in V$ oluyorsa Λ matrisine U dizi uzayından V dizi uzayına bir matris dönüşümü denir. Bu matris dönüşümü lineer bir dönüşümdür. $\Lambda u = v$ dizisine u dizisinin Λ -dönüşümü denir [24].

Λ_n ile Λ matrisinin n . satırındaki dizi gösterilmektedir.

Tanım 2.25. $\Lambda = (\lambda_{nk})$ sonsuz bir matris ve U bir dizi uzayı olsun. $\Lambda = (\lambda_{nk})$ matrisinin U dizi uzayı üzerindeki etki alanı U_{Λ} ile gösterilir ve

$$U_{\Lambda} = \{u = (u_n) \in \omega : \Lambda u \in U\} \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanır [24].

(U, V) ile U uzayından V uzayına tanımlı tüm matrislerin sınıfı gösterilecektir. $B(U, V)$ ile U uzayından V uzayına tanımlı tüm sınırlı (sürekli) lineer operatörlerin sınıfı gösterilecektir.

Tanım 2.26.

$$U^{\alpha} = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \forall u = (u_k) \in U, \sum_{k=1}^{\infty} |t_k u_k| < \infty \right\}, \quad (2.18)$$

$$U^{\beta} = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \forall u = (u_k) \in U, \sum_{k=1}^{\infty} t_k u_k \text{ yakınsaktır} \right\}, \quad (2.19)$$

$$U^{\gamma} = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \forall u = (u_k) \in U, \sup_n \left| \sum_{k=1}^n t_k u_k \right| < \infty \right\}, \quad (2.20)$$

uzayları sırasıyla U dizi uzayının α -, β -, γ -dualleri olarak adlandırılır [24].

2.3. EULER TOTIENT FONKSİYONU VE JORDAN TOTIENT FONKSİYONU

Bu tez çalışması boyunca φ , J_r ve μ sırasıyla Euler totient fonksiyonunu, Jordan totient fonksiyonunu ve Möbius fonksiyonunu gösterecektir. Bu fonksiyonlar ve özellikleri için bakınız [25].

Euler totient fonksiyonu $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\varphi(n) = \sum_{k=1, (k,n)=1}^n 1$$

şeklinde tanımlanır. Burada (k, n) ifadesi k ve n sayılarının en büyük ortak bölenini göstermektedir. Yani $\varphi(n)$ değeri n ile aralarında asal olan n sayısının küçük pozitif tam sayıların sayısını vermektedir.

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 1, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2, \varphi(5) = 4, \\ \varphi(6) &= 2, \varphi(7) = 6, \varphi(8) = 4, \varphi(9) = 6, \varphi(10) = 4, \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

Aşağıda Euler totient fonksiyonunun sağladığı bazı özellikler görülmektedir.

1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n = \sum_{k|n} \varphi(k)$ dır.
2. $n > 1$ ve p asal bölen olmak üzere $\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$ dir.
3. $(m, n) = 1$ için $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ dir.

Jordan totient fonksiyonu $J_r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ Euler totient fonksiyonunu genelleleyen aritmetik bir fonksiyodur. Burada r pozitif bir tam sayıdır. Bu fonksiyonun ilginç özellikleri ve birçok uygulaması bulunmaktadır (bkz. [26]). $r = 1$ için bu fonksiyon Euler totient fonksiyonunu vermektedir.

Jordan fonksiyonu J_r çarpımsaldır, yani $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sayılarının en büyük ortak böleni 1 olmak üzere $J_r(n_1 n_2) = J_r(n_1) J_r(n_2)$ dir.

$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_i^{a_i}$ ifadesi $n \in \mathbb{N}$ sayısının tek asal ayrışımı ise

$$J_r(n) = n^r (1 - \frac{1}{p_1^r}) (1 - \frac{1}{p_2^r}) \dots (1 - \frac{1}{p_i^r})$$

olur.

Ayrıca aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\sum_{k|n} J_r(k) = n^r.$$

$$\sum_{k|n} \frac{\mu(k)}{k^r} = \frac{J_r(n)}{n^r}.$$

Möbius fonksiyonu $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$

$$\mu(1) = 1$$

ve $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_l^{\alpha_l}$ için

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_l = 1 \text{ ise } \mu(n) = (-1)^l$$

en az bir $k \in \{1, 2, \dots, l\}$ için $\alpha_k \neq 1$ ise $\mu(n) = 0$

şeklinde tanımlanır. Burada $p_1, p_2, \dots, p_l$ farklı asal sayılar ve $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_l^{\alpha_l}$ değeri $n > 1$ sayısının asal çarpanlara ayrılmış halidir. Yani $\mu(n) = 0$ ancak ve ancak n sayısının 1 den büyük kare çarpanı vardır.

$$\begin{aligned} \mu(1) = 1, \mu(2) = -1, \mu(3) = -1, \mu(4) = 0, \mu(5) = -1, \\ \mu(6) = 1, \mu(7) = -1, \mu(8) = 0, \mu(9) = 0, \mu(10) = 1, \dots \end{aligned} \quad (2.22)$$

Bir doğal sayının birden büyük pozitif bölenlerinin Möbius fonksiyon değerleri toplamı sıfırdır. Yani

$$\sum_{k|n} \mu(k) = 0 (n \neq 1) \quad (2.23)$$

dır.

Φ -toplanabilme olarak adlandırılan özel tipte toplanabilme methodu Schoenberg [27] tarafından $[0, 1]$ aralığında genelleştirilmiş Dirichlet fonksiyonunun Riemann integralini çalışmak amacıyla tanıtılmıştır. Bu metoda alışılmış yakınsama kavramından daha zayıf bir özellik olarak φ -yakınsama adı verilmiştir. Her $i \in \mathbb{N}$ için

$$v_i = \frac{1}{i} \sum_{j|i} \varphi(j) u_j \quad (2.24)$$

olmak üzere $\lim_{i \rightarrow \infty} v_i = L$ oluyorsa (u_i) dizisi L sayısına φ -yakınsaktır denir. $\Phi - \lim_{i \rightarrow \infty} u_i = L$ ile gösterilir.

$\Phi = (\phi_{ij})$ sonsuz matrisi (2.24) dönüşümü yardımıyla

$$\phi_{ij} = \begin{cases} \frac{\varphi(j)}{i} & , \quad j \mid i \text{ ise} \\ 0 & , \quad j \nmid i \text{ ise} \end{cases} \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu matris [12] nolu çalışmada *Euler Totient matris operatörü* olarak adlandırılmıştır.

[27] nolu çalışmada bu dönüşümün regüler olduğu gösterilmiştir. Bu Φ matrisi aşağıdaki üç koşulu sağlar:

1. $\sup_{i \in \mathbb{N}} (\sum_{j=1}^{\infty} |\phi_{ij}|) < \infty$,
2. Her bir sabit $j \in \mathbb{N}$ için $\lim_{i \rightarrow \infty} \phi_{ij} = 0$,
3. $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_{ij} = 1$.

Gerçekten her $i, j \in \mathbb{N}$ için $\phi_{ij} \geq 0$, her bir sabit $i \in \mathbb{N}$ için $\sum_{j=1}^{\infty} \phi_{ij} = 1$ ve her bir sabit $j \in \mathbb{N}$ için $i \rightarrow \infty$ iken $\phi_{ij} \rightarrow 0$ dır. Bir regüler matris c uzayından c uzayı içine limiti koruyan bir dönüşümdür.

Eğer $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = L$ ise $\Phi - \lim_{i \rightarrow \infty} u_i = L$ dir. φ -yakınsak olup yakınsak olmayan dizi Erdős [28] tarafından bulunmuştur.

Örnek 2.27. p_l ardışık asal sayı olmak üzere (u_i) dizisi

$$u_i = \begin{cases} 1 & , \quad i = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_l \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu dizinin alışılmış anlamda yakınsak olmadığı açıktır. Fakat

$$\lim_{i \rightarrow \infty} v_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \sum_{j \mid i} \varphi(j) u_j = 0$$

dır.

$i = (2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_l) d_i$ ve $(p_{l+1} \nmid d_i)$ olsun.

$$v_i = \frac{1}{d_i} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_l} \sum_{j|2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_l} \varphi(j) u_j$$

yazılır. $\lim_{i \rightarrow \infty} (d_i + p_l) = \infty$ olduğundan,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_l} \sum_{j|2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_l} \varphi(j) u_j = 0$$

olduğunu görmek yeterlidir. Ayrıca her bir $k > 1$ için

$$\begin{aligned} \sum_{j|2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k} \varphi(j) u_j &= \varphi(2) + \varphi(2 \cdot 3) + \dots + \varphi(2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_{k-1}) + \varphi(2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k) \\ &\leq \sum_{j|2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_{k-1}} \varphi(j) + \varphi(2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k) \\ &= 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_{k-1} + \varphi(2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k) \\ &= 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k \left(\frac{1}{p_k} + \prod_{l=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_l} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

eşitsizliği sağlanır. $\mathbb{P}$ asal sayılar kümesi olmak üzere

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p} \right) = 0 \quad (2.27)$$

dır. (2.27) ve (2.26) den

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k} \sum_{j|2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k} \varphi(j) u_j \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p_k} + \prod_{l=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_l} \right) \right) = 0$$

elde edilir [28].

(2.24) dönüşümünün tersi

$$u_i = \frac{1}{\varphi(i)} \sum_{j|i} \mu\left(\frac{i}{j}\right) j v_j \quad (2.28)$$

olarak verilir. Bu durumda $\Phi^{-1} = (\phi_{ij}^{-1})$ ters matrisi (2.28) yardımıyla

$$\phi_{ij}^{-1} = \begin{cases} \frac{\mu(\frac{i}{j})}{\varphi(i)} j & , \quad j \mid i \text{ ise} \\ 0 & , \quad j \nmid i \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde formüle edilebilir. [27] nolu çalışmada bu ters matrisin regüler olmadığı gösterilmiştir.

İlkhan ve Kara [12] Φ matrisinin klasik uzaylarda etki alanı olarak $\ell_p(\Phi)$ ve $\ell_\infty(\Phi)$ uzaylarını tanımlamışlardır.



3. $\ell_\infty(R_{Y^r}), \ell_p(R_{Y^r}), \ell(R_{Y^r})$ UZAYLARI

Bu bölümde R_{Y^r} matrisi kullanılarak $\ell_\infty(R_{Y^r}), \ell_p(R_{Y^r})$ ($p > 1$), $\ell(R_{Y^r})$ uzayları tanımlanacaktır.

$Q_n = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ olmak üzere $R_{Y^r} = (v_{nk})$ matrisi

$$v_{nk} = \begin{cases} \frac{q_k J_r(k)}{Q_n^r} & , \quad k \mid n \text{ ise} \\ 0 & , \quad k \nmid n \text{ ise} , \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu matris Riesz Jordan totient matrisi olarak adlandırılacaktır.

$r = 1$ ve her k için $q_k = 1$ ise bu matris (2.25) ile tanımlı $\Phi = (\phi_{nk})$ Euler totient matrisine dönüşmektedir.

$r = 1$ ise [29] nolu çalışmada

$$r_{nk} = \begin{cases} \frac{q_k \phi(k)}{Q_n} & , \quad k \mid n \text{ ise} \\ 0 & , \quad k \nmid n \text{ ise} \end{cases} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan $R_\Phi = (r_{nk})$ Riesz Euler totient matrisine dönüşmektedir.

Her k için $q_k = 1$ ise [22] nolu çalışmada her bir $r \in \mathbb{N}$ için

$$v_{nk}^r = \begin{cases} \frac{J_r(k)}{n^r} & , \quad k \mid n \text{ ise} \\ 0 & , \quad k \nmid n \text{ ise} \end{cases} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanan $Y^r = (v_{nk}^r)$ Jordan totient matrisine dönüşmektedir.

R_{Y^r} matrisinin $R_{Y^r}^{-1} = (v_{nk}^{-1})$ ters matrisi $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$v_{nk}^{-1} = \begin{cases} \frac{\mu(\frac{n}{k})}{J_r(n)} \frac{Q_k^r}{q_n} & , \quad k \mid n \text{ ise} \\ 0 & , \quad k \nmid n \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

$\ell_\infty(R_{Y^r}), \ell_p(R_{Y^r}), \ell(R_{Y^r})$ dizi uzayları

$$\ell_\infty(R_{Y^r}^r) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \sup_n \left| \frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} q_k J_r(k) u_k \right| < \infty \right\},$$

$$\ell_p(R_{Y^r}) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \sum_n \left| \frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} q_k J_r(k) u_k \right|^p < \infty \right\} \quad (1 < p < \infty),$$

$$\ell(R_{Y^r}) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \sum_n \left| \frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} q_k J_r(k) u_k \right| < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır.

$r = 1$ ve her k için $q_k = 1$ ise $\ell_\infty(R_{Y^r}), \ell_p(R_{Y^r}), \ell(R_{Y^r})$ uzayları sırasıyla [12] nolu çalışmada tanımlanan

$$\ell_\infty(\Phi) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k|n} \varphi(k) u_k \right| < \infty \right\},$$

$$\ell_p(\Phi) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \sum_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k|n} \varphi(k) u_k \right|^p < \infty \right\} \quad (1 < p < \infty),$$

$$\ell(\Phi) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \sum_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k|n} \varphi(k) u_k \right| < \infty \right\}$$

uzaylarına dönüşmektedir.

$r = 1$ ise $\ell_\infty(R_{Y^r}), \ell_p(R_{Y^r}), \ell(R_{Y^r})$ uzayları sırasıyla [29] nolu çalışmada tanımlanan

$$\ell_\infty(R_\Phi) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \sup_n \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{k|n} q_k \varphi(k) u_k \right| < \infty \right\},$$

$$\ell_p(R_\Phi) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \sum_n \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{k|n} q_k \varphi(k) u_k \right|^p < \infty \right\} \quad (1 < p < \infty),$$

$$\ell(R_\Phi) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \sum_n \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{k|n} q_k \varphi(k) u_k \right| < \infty \right\}$$

uzaylarına dönüşmektedir.

Her k için $q_k = 1$ ise $\ell_\infty(R_{\Upsilon^r})$, $\ell_p(R_{\Upsilon^r})$, $\ell(R_{\Upsilon^r})$ uzayları sırasıyla [22] nolu çalışmada tanımlanan

$$\ell_\infty(\Upsilon^r) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \sup_n \left| \frac{1}{n^r} \sum_{k|n} J_r(k) u_k \right| < \infty \right\},$$

$$\ell_p(\Upsilon^r) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \sum_n \left| \frac{1}{n^r} \sum_{k|n} J_r(k) u_k \right|^p < \infty \right\} \quad (1 < p < \infty),$$

$$\ell(\Upsilon^r) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \sum_n \left| \frac{1}{n^r} \sum_{k|n} J_r(k) u_k \right| < \infty \right\}$$

uzaylarına dönüşmektedir.

Aksi belirtilmediği sürece $v = (v_n)$ dizisi bir $u = (u_n)$ dizisinin R_{Υ^r} -dönüşümü, yani her $n \in \mathbb{N}$ için

$$v_n = (R_{\Upsilon^r} u)_n = \frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} q_k J_r(k) u_k \quad (3.3)$$

olacaktır.

Teorem 3.1. $\ell_\infty(R_{\Upsilon^r})$, $\ell_p(R_{\Upsilon^r})$, $\ell(R_{\Upsilon^r})$ uzayları aşağıda verilen normlara göre birer Banach uzayıdır.

$$\|u\|_{\ell_\infty(R_{\Upsilon^r})} = \sup_n \left| \frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} q_k J_r(k) u_k \right|,$$

$$\|u\|_{\ell_p(R_{\Upsilon^r})} = \left(\sum_n \left| \frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} q_k J_r(k) u_k \right|^p \right)^{1/p} \quad (1 < p < \infty),$$

$$\|u\|_{\ell(R_{\Upsilon^r})} = \sum_n \left| \frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} q_k J_r(k) u_k \right|.$$

İspat. Bu ispa literatürde var olan ispatlara benzer teknikler uygulanarak yapıldığından burada yer verilmemiştir. □

Sonuç 3.2. $\ell_\infty(R_{\Upsilon^r})$, $\ell_p(R_{\Upsilon^r})$, $\ell(R_{\Upsilon^r})$ uzayları birer BK-uzayıdır.

Teorem 3.3. $U \in \{\ell_\infty, \ell_p, \ell\}$ olmak üzere $U(R_{Y^r})$ uzayı U uzayına lineer olarak izomorfiktir.

İspat. f dönüşümü $U(R_{Y^r})$ uzayından U uzayına her $u \in U(R_{Y^r})$ için $f(u) = R_{Y^r}u$ şeklinde tanımlansın. f dönüşümünün lineer olduğu açıktır. Ayrıca bu f dönüşümünün çekirdeği sadece sıfır vektöründen oluştuğu için bire-bir bir dönüşümdür. f dönüşümünün örten olduğunu ispat etmek için $v = (v_k)$ dizisi U uzayında herhangi bir dizi olmak üzere

$$u_n = \sum_{k|n} \frac{\mu(\frac{n}{k})}{J_r(n)} \frac{Q_k^r}{q_n} v_k$$

ile tanımlı $u = (u_n)$ dizisi ele alınsın. (3.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} (R_{Y^r}u)_n &= \frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} q_k J_r(k) u_k = \frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} q_k J_r(k) \sum_{j|k} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} v_j \\ &= \frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} \sum_{j|k} \mu(\frac{k}{j}) Q_j^r v_j = \frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} \left(\sum_{j|k} \mu(j) \right) Q_k^r v_k = \frac{1}{Q_n^r} \mu(1) Q_n^r v_n = v_n \end{aligned}$$

ve böylece $u = (u_n) \in U(R_{Y^r})$ olur. $\|u\|_{\Lambda(R_{Y^r})} = \|f(u)\|_{\Lambda}$ olduğundan f dönüşümü normu korur. $\square$

Not 3.4. $\ell_2(R_{Y^r})$ uzayı bir iç çarpım uzayıdır. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell_2}$ ℓ_2 uzayı üzerinde $\|\cdot\|_{\ell_2}$ normunu üreten iç çarpım olmak üzere $\langle u, \tilde{u} \rangle_{\ell_2(R_{Y^r})} = \langle R_{Y^r}u, R_{Y^r}\tilde{u} \rangle_{\ell_2}$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.5. $p \neq 2$ için $\ell_p(R_{Y^r})$ uzayı iç çarpım uzayı değildir.

İspat. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$u_n = \begin{cases} \frac{\mu(n)}{J_r(n)} \frac{Q_1^r}{q_n} + \frac{\mu(\frac{n}{2})}{J_r(n)} \frac{Q_2^r}{q_n} & , \quad n \text{ çift ise} \\ \frac{\mu(n)}{J_r(n)} \frac{Q_1^r}{q_n} & , \quad n \text{ tek ise} \end{cases}$$

ve

$$\tilde{u}_n = \begin{cases} \frac{\mu(n)}{J_r(n)} \frac{Q_1^r}{q_n} - \frac{\mu(\frac{n}{2})}{J_r(n)} \frac{Q_2^r}{q_n} & , \quad n \text{ çift ise} \\ \frac{\mu(n)}{J_r(n)} \frac{Q_1^r}{q_n} & , \quad n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $u = (u_n)$ ve $\tilde{u} = (\tilde{u}_n)$ dizileri alınsın. Bu durumda $R_{Y^r}u = (1, 1, 0, \dots, 0, \dots) \in \ell_p$ ve $R_{Y^r}\tilde{u} = (1, -1, 0, \dots, 0, \dots) \in \ell_p$ olur. Böylece

$$\|u + \tilde{u}\|_{\ell_p(R_{Y^r})} + \|u - \tilde{u}\|_{\ell_p(R_{Y^r})} \neq 2 \left(\|u\|_{\ell_p(R_{Y^r})} + \|\tilde{u}\|_{\ell_p(R_{Y^r})} \right)$$

elde edilir. □

Teorem 3.6. $1 \leq p < q < \infty$ için $\ell_p(R_{\Upsilon^r}) \subset \ell_q(R_{\Upsilon^r})$ kapsama bağıntısı kesin olarak sağlanır.

İspat. $1 \leq p < q < \infty$ için $\ell_p \subset \ell_q$ olduğundan $\ell_p(R_{\Upsilon^r}) \subset \ell_q(R_{\Upsilon^r})$ sağlanır. Ayrıca, $\ell_p \subset \ell_q$ kesin olarak sağlandığından bir $t = (t_n) \in \ell_q \setminus \ell_p$ dizisi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$u_n = \sum_{k|n} \frac{\mu(\frac{n}{k})}{J_r(n)} \frac{Q_k^r}{q_n} t_k$$

ile tanımlı $u = (u_n)$ dizisi $\ell_q(R_{\Upsilon^r}) \setminus \ell_p(R_{\Upsilon^r})$ uzayına ait olur. Bu ise istenen kapsamın kesin olduğunu gösterir. □

Teorem 3.7. $1 \leq p < \infty$ için $\ell_p(R_{\Upsilon^r}) \subset \ell_\infty(R_{\Upsilon^r})$ kapsama bağıntısı kesin olarak sağlanır.

İspat. $1 \leq p < \infty$ için $\ell_p \subset \ell_\infty$ olduğundan $\ell_p(R_{\Upsilon^r}) \subset \ell_\infty(R_{\Upsilon^r})$ sağlanır. $u = (u_n)$ dizisi $u_n = \sum_{k|n} (-1)^k \frac{\mu(\frac{n}{k})}{J_r(n)} \frac{Q_k^r}{q_n}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $R_{\Upsilon^r} u = \left(\frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} q_k J_r(k) \sum_{j|k} (-1)^j \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right) = ((-1)^n) \in \ell_\infty \setminus \ell_p$ elde edilir. Dolayısıyla $u \in \ell_\infty(R_{\Upsilon^r}) \setminus \ell_p(R_{\Upsilon^r})$ dir. □

Aşağıda çalışmanın diğer bölümlerinde elde edilen esas sonuçları ispat etmek için kullanılacak temel bir teoreme yer verilmiştir.

Yardımcı Teorem 3.8. $U, V \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_p, \ell\}$ ve $p > 1$ için $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (U, V)$ olması için gerek ve yeter koşullar Tablo 3.1 den görülür. Burada ve bundan sonra $\mathcal{N}$ ile $\mathbb{N}$ kümesinin tüm sonlu alt kümelerinin ailesi gösterilecektir.

Çizelge 3.1. $U, V \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_p, \ell\}$ için (U, V) sınıfının karakterizasyonu

V	ℓ_∞	c	c_0	ℓ_p	ℓ
U					
ℓ_∞	1.	4.	9.	14.	16.
c	1.	5.	10.	14.	16.
c_0	1.	6.	11.	14.	16.
ℓ_p	2.	7.	12.	-	17.
ℓ	3.	8.	13.	15	18.

1.

$$\sup_i \sum_j |\lambda_{ij}| < \infty \tag{3.4}$$

2.

$$\sup_i \sum_j |\lambda_{ij}|^q < \infty \quad (3.5)$$

3.

$$\sup_{i,j} |\lambda_{ij}| < \infty \quad (3.6)$$

4.

$$\text{her bir } j \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_i \lambda_{ij} \text{ mevcuttur} \quad (3.7)$$

$$\lim_i \sum_j |\lambda_{ij}| = \sum_j \left| \lim_i \lambda_{ij} \right|$$

5. (3.4), (3.7) ve

$$\lim_i \sum_j \lambda_{ij} \text{ mevcuttur.}$$

6. (3.4) ve (3.7)

7. (3.5) ve (3.7)

8. (3.6) ve (3.7)

9.

$$\lim_i \sum_j |\lambda_{ij}| = 0$$

10. (3.4) ve

$$\text{her bir } j \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_i \lambda_{ij} = 0, \quad (3.8)$$

$$\lim_i \sum_j \lambda_{ij} = 0$$

11. (3.4) ve (3.8)

12. (3.5) ve (3.8)

13. (3.6) ve (3.8)

14.

$$\sup_{K \in \mathcal{N}} \sum_i \left| \sum_{j \in K} \lambda_{ij} \right|^p < \infty$$

15.

$$\sup_j \sum_i |\lambda_{ij}|^p < \infty$$

16.

$$\sup_{N, K \in \mathcal{N}} \left| \sum_{i \in N} \sum_{j \in K} \lambda_{ij} \right| < \infty \Leftrightarrow \sup_{N \in \mathcal{N}} \sum_j \left| \sum_{i \in N} \lambda_{ij} \right| < \infty \Leftrightarrow \sup_{K \in \mathcal{N}} \sum_i \left| \sum_{j \in K} \lambda_{ij} \right| < \infty$$

17.

$$\sup_{N \in \mathcal{N}} \sum_j \left| \sum_{i \in N} \lambda_{ij} \right|^q < \infty$$

18.

$$\sup_j \sum_i |\lambda_{ij}| < \infty$$

[30].

4. UZAYLARIN α -, β - VE γ -DUALLERİ

Bu bölümde bir önceki bölümde tanımlanmış olan $\ell_\infty(R_{\Upsilon^r})$, $\ell_p(R_{\Upsilon^r})$, $\ell(R_{\Upsilon^r})$ uzaylarının α -, β - ve γ -dualleri hesaplanacaktır.

İlk olarak uzayların α -dualleri belirlenmiştir.

Teorem 4.1. $\ell_\infty(R_{\Upsilon^r})$, $\ell_p(R_{\Upsilon^r})$, $\ell(R_{\Upsilon^r})$ uzaylarının α -dualleri:

$$(\ell_\infty(R_{\Upsilon^r}))^\alpha = \left\{ t = (t_n) \in \omega : \sup_{F \in \mathcal{K}} \sum_k \left| \sum_{n \in F, k|n} \frac{\mu(\frac{n}{k})}{J_r(k)} \frac{Q_k^r}{q_n} t_n \right| < \infty \right\},$$

$$(\ell_p(R_{\Upsilon^r}))^\alpha = \left\{ t = (t_n) \in \omega : \sup_{F \in \mathcal{K}} \sum_k \left| \sum_{n \in F, k|n} \frac{\mu(\frac{n}{k})}{J_r(k)} \frac{Q_k^r}{q_n} t_n \right|^q < \infty \right\},$$

$$(\ell(R_{\Upsilon^r}))^\alpha = \left\{ t = (t_n) \in \omega : \sup_k \sum_{n \in \mathbb{N}, k|n} \left| \frac{\mu(\frac{n}{k})}{J_r(k)} \frac{Q_k^r}{q_n} t_n \right| < \infty \right\}$$

şeklindedir.

İspat. Herhangi bir $t = (t_n) \in \omega$ dizisi için $\Delta = (\delta_{nk})$ matrisi

$$\delta_{nk} = \begin{cases} \frac{\mu(\frac{n}{k})}{J_r(k)} \frac{Q_k^r}{q_n} t_n & , \quad k \mid n \\ 0 & , \quad k \nmid n \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $U \in \{\ell_\infty, \ell_p, \ell\}$ olsun. $u = (u_n) \in U(R_{\Upsilon^r})$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n u_n = (\Delta v)_n$ olur. Buradan $u \in U(R_{\Upsilon^r})$ iken $tu \in \ell$ olması için gerek ve yeter şartın $v \in U$ iken $\Delta v \in \ell$ olması gerektiği sonucuna varılır. Dolayısıyla $t \in (U(R_{\Upsilon^r}))^\alpha$ ancak ve ancak $\Delta \in (U, \ell)$ olur. Yardımcı Teorem 3.8 kullanılarak uzayların α -dualleri elde edilmiş olur. $\square$

Yardımcı Teorem 4.2. [31, Teorem 3.1] Bir $t = (t_k) \in \omega$ dizisi ve bir üçgensel $\Pi = (\pi_{nk})$ matrisinin tersi $(\Pi)^{-1} = ((\pi)_{nk}^{-1})$ yardımıyla $\Xi = (\xi_{nk})$ matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\xi_{nk} = \sum_{j=k}^n t_j (\pi)_{jk}^{-1}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda U herhangi bir dizi uzayı olmak üzere

$$U_{\Pi}^{\beta} = \{t = (t_k) \in \omega : \Xi \in (U, c)\},$$

ve

$$U_{\Pi}^{\gamma} = \{t = (t_k) \in \omega : \Xi \in (U, \ell_{\infty})\}.$$

olur.

Sonuç olarak tanımlanan uzayların β ve γ -dualleri aşağıdaki teoremden hesaplanmıştır.

Teorem 4.3. Aşağıdaki kümeler tanımlansın.

$$A_1 = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \text{her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=k, k|j}^n \frac{\mu(\frac{j}{k})}{J_r(j)} \frac{Q_k^r}{q_j} t_j \text{ mevcut} \right\},$$

$$A_2 = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \sup_n \sum_k \left| \sum_{j=k, k|j}^n \frac{\mu(\frac{j}{k})}{J_r(j)} \frac{Q_k^r}{q_j} t_j \right|^q < \infty \right\},$$

$$A_3 = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \left| \sum_{j=k, k|j}^n \frac{\mu(\frac{j}{k})}{J_r(j)} \frac{Q_k^r}{q_j} t_j \right| = \sum_k \left| \sum_{j=k, k|j}^{\infty} \frac{\mu(\frac{j}{k})}{J_r(j)} \frac{Q_k^r}{q_j} t_j \right| \right\},$$

$$A_4 = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \sup_{n, k} \left| \sum_{j=k, k|j}^n \frac{\mu(\frac{j}{k})}{J_r(j)} \frac{Q_k^r}{q_j} t_j \right| < \infty \right\}.$$

$\ell_{\infty}(R_{Y^r}), \ell_p(R_{Y^r}), \ell(R_{Y^r})$ uzaylarının β ve γ -dualleri

$$(\ell_{\infty}(R_{Y^r}))^{\beta} = A_1 \cap A_3, (\ell_p(R_{Y^r}))^{\beta} = A_1 \cap A_2, (\ell(R_{Y^r}))^{\beta} = A_1 \cap A_4,$$

$$(\ell_{\infty}(R_{Y^r}))^{\gamma} = A_2 \ (q = 1), (\ell_p(R_{Y^r}))^{\gamma} = A_2, (\ell(R_{Y^r}))^{\gamma} = A_4 \text{ olarak hesaplanır.}$$

İspat. $t = (t_k) \in \omega$, $U \in \{\ell_\infty, \ell_p, \ell\}$ ve $\Xi = (\xi_{nk})$ matrisi

$$\xi_{nk} = \begin{cases} \sum_{j=k, k|j}^n t_j \frac{\mu(\frac{j}{k})}{J_r(j)} \frac{Q_k^r}{q_j} & , \quad 1 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olsun. Böylece bir $u = (u_n) \in U(R_{Yr})$ dizisi için

$$\sum_{k=1}^n t_k u_k = \sum_{k=1}^n t_k \left(\sum_{j|k} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} v_j \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=k, k|j}^n t_j \frac{\mu(\frac{j}{k})}{J_r(j)} \frac{Q_k^r}{q_j} \right) v_k = (\Xi v)_n$$

elde edilir. Bu eşitlikten $u \in U(R_{Yr})$ iken $tu \in cs$ olması için gerek ve yeter koşulun $v \in U$ iken $Xiv \in c$ olması gerektiği sonucuna varılır. Yani $t \in (U(R_{Yr}))^\beta$ ancak ve ancak $\Xi \in (U, c)$. Böylece, Yardımcı Teorem 3.8 kullanılarak $(\ell_\infty(R_{Yr}))^\beta = A_1 \cap A_3$, $(\ell_p(R_{Yr}))^\beta = A_1 \cap A_2$, $(\ell(R_{Yr}))^\beta = A_1 \cap A_4$ elde edilir.

Benzer şekilde bu son eşitlikten $u \in U(R_{Yr})$ iken $tu \in bs$ olması için gerek ve yeter koşulun $v \in U$ iken $\Xi v \in \ell_\infty$ olması gerektiği sonucuna varılır. Yani $t \in (U(R_{Yr}))^\gamma$ ancak ve ancak $\Xi \in (U, \ell_\infty)$. Böylece, Yardımcı Teorem 3.8 kullanılarak $(\ell_\infty(R_{Yr}))^\gamma = A_2$ with $q = 1$, $(\ell_p(R_{Yr}))^\gamma = A_2$, $(\ell(R_{Yr}))^\gamma = A_4$ elde edilir.

□

5. BELLİ MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde belli matris dönüşümleri sınıfı karakterize edilecektir. Aşağıdaki teorem $\ell_\infty(R_{Y^r})$, $\ell_p(R_{Y^r})$, $\ell(R_{Y^r})$ uzaylarından $\ell, c_0, c, \ell_\infty$ uzaylarına matris dönüşümlerini karakterize etmek için kullanılacaktır.

Teorem 5.1. $p > 1$, $U \in \{\ell_\infty, \ell_p, \ell\}$ ve $V \subset \omega$ olsun. Bu durumda $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (U_{R_{Y^r}}, V)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\theta_{lj}^{(i)} = \begin{cases} \sum_{k=j, j|k}^l \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} & , \quad 1 \leq j \leq l \\ 0 & , \quad j > l \end{cases}$$

ve

$$\theta_{ij} = \sum_{k=j, j|k}^{\infty} \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k}$$

olmak üzere her bir sabit $i \in \mathbb{N}$ için $\Theta^{(i)} = (\theta_{lj}^{(i)}) \in (U, c)$ ve $\Theta = (\theta_{ij}) \in (U, V)$ olmasıdır.

İspat. $\Lambda \in (U_{R_{Y^r}}, V)$ ve $u \in U_{R_{Y^r}}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l \lambda_{ij} u_j &= \sum_{j=1}^l \lambda_{ij} \left(\sum_{k|j} \frac{\mu(\frac{j}{k})}{J_r(j)} \frac{Q_k^r}{q_j} v_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^l \left(\sum_{k=j, j|k}^l \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right) v_j = \sum_{j=1}^l \theta_{lj}^{(i)} v_j \end{aligned} \quad (5.1)$$

eşitliği sağlanır. Λu mevcut olduğundan her bir sabit $i \in \mathbb{N}$ için $\Theta^{(i)} \in (U, c)$ bulunur. Buradan (5.1) de $l \rightarrow \infty$ iken $\Lambda u = \Theta v$ elde edilir. Böylece $\Lambda u \in V$ olması $\Theta v \in V$ olmasını; yani $\Theta \in (U, V)$ olmasını gerektirir.

Karşıt olarak her bir sabit $i \in \mathbb{N}$ için $\Theta^{(i)} = (\theta_{lj}^{(i)}) \in (U, c)$ ve $\Theta = (\theta_{ij}) \in (U, V)$ olsun. $u \in U_{R_{Y^r}}$ seçilsin. Bu durumda her bir sabit $i \in \mathbb{N}$ için $(\theta_{ij}) \in U^\beta$ olması her bir sabit $i \in \mathbb{N}$ için $(\lambda_{ij}) \in U_{R_{Y^r}}^\beta$ olmasını gerektirir. Böylece Λu mevcut olur. (5.1) eşitliğinden $l \rightarrow \infty$ iken $\Lambda u = \Theta v$ elde edilir. Bu ise $\Lambda \in (U_{R_{Y^r}}, V)$ olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 5.2. $\Lambda = (\lambda_{ij})$ sonsuz bir matris olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

$$1. \Lambda \in (\ell_\infty(R_{\Upsilon^r}), \ell_\infty) \iff$$

$$\text{Her bir sabit } i, j \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=j, j|k}^l \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \text{ mevcuttur} \quad (5.2)$$

$$\lim_l \sum_j \left| \sum_{k=j, j|k}^l \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right| = \sum_j \left| \lim_l \sum_{k=j, j|k}^l \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right| \quad (5.3)$$

ve

$$\sup_i \sum_j \left| \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right| < \infty. \quad (5.4)$$

$$2. \Lambda \in (\ell_\infty(R_{\Upsilon^r}), c) \iff (5.2), (5.3),$$

$$\text{her bir } j \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_i \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \text{ mevcuttur} \quad (5.5)$$

$$\lim_i \sum_j \left| \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right| = \sum_j \left| \lim_i \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right|.$$

$$3. \Lambda \in (\ell_\infty(R_{\Upsilon^r}), c_0) \iff (5.2), (5.3),$$

$$\lim_i \sum_j \left| \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right| = 0.$$

$$4. \Lambda \in (\ell_\infty(R_{\Upsilon^r}), \ell) \iff (5.2), (5.3) \text{ ve}$$

$$\sup_{N, K \in \mathcal{N}} \left| \sum_{i \in N} \sum_{j \in K} \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right| < \infty. \quad (5.6)$$

İspat. Bu teoremin ispatı Yardımcı Teorem 3.8 ve Teorem 5.1 kullanılarak elde edilir. $\square$

Teorem 5.3. $\Lambda = (\lambda_{ij})$ sonsuz bir matris ve $p > 1$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

$$1. \Lambda \in (\ell_p(R_{Y^r}), \ell_\infty) \iff (5.2),$$

$$\text{her bir sabit } i \in \mathbb{N} \text{ için } \sup_{l \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^l \left| \sum_{k=j, j|k}^l \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right|^q < \infty \quad (5.7)$$

$$\sup_i \sum_j \left| \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right|^q < \infty. \quad (5.8)$$

$$2. \Lambda \in (\ell_p(R_{Y^r}), c) \iff (5.2), (5.7), (5.5), (5.8).$$

$$3. \Lambda \in (\ell_p(R_{Y^r}), c_0) \iff (5.2), (5.7), (5.8),$$

$$\text{her bir } j \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_i \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} = 0. \quad (5.9)$$

$$4. \Lambda \in (\ell_p(R_{Y^r}), \ell) \iff (5.2), (5.7),$$

$$\sup_{N \in \mathcal{N}} \sum_j \left| \sum_{i \in N} \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right|^q < \infty.$$

İspat. Bu teoremin ispatı Yardımcı Teorem 3.8 ve Teorem 5.1 kullanılarak elde edilir. $\square$

Teorem 5.4. $\Lambda = (\lambda_{ij})$ sonsuz bir matris olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

$$1. \Lambda \in (\ell(R_{Y^r}), \ell_\infty) \iff (5.2),$$

$$\text{her bir sabit } i \in \mathbb{N} \text{ için } \sup_{l, j} \left| \sum_{k=j, j|k}^l \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right| < \infty \quad (5.10)$$

$$\sup_{i, j} \left| \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right| < \infty. \quad (5.11)$$

$$2. \Lambda \in (\ell(R_{Y^r}), c) \iff (5.2), (5.10), (5.5), (5.11).$$

$$3. \Lambda \in (\ell(R_{Y^r}), c_0) \iff (5.2), (5.10), (5.9), (5.11).$$

$$4. \Lambda \in (\ell(R_{Y^r}), \ell) \iff (5.2), (5.10),$$

$$\sup_j \sum_i \left| \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right| < \infty.$$

İspat. Bu teoremin ispatı Yardımcı Teorem 3.8 ve Teorem 5.1 kullanılarak elde edilir. $\square$

Sonuç 5.5. $\Lambda = (\lambda_{ij})$ sonsuz bir matris olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. $\Lambda \in (\ell_\infty(R_{Y^r}), bs) \iff (5.2), (5.3),$

$$\sup_i \sum_j \left| \sum_{l=1}^i \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{lk} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right| < \infty. \quad (5.12)$$

2. $\Lambda \in (\ell_\infty(R_{Y^r}), cs) \iff (5.2), (5.3),$

$$\text{her bir } j \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_i \sum_{l=1}^i \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{lk} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \text{ mevcuttur} \quad (5.13)$$

$$\lim_i \sum_j \left| \sum_{l=1}^i \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{lk} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right| = \sum_j \left| \lim_i \sum_{l=1}^i \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{lk} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right|.$$

3. $\Lambda \in (\ell_\infty(R_{Y^r}), cs_0) \iff (5.2), (5.3)$

$$\lim_i \sum_j \left| \sum_{l=1}^i \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{lk} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right| = 0.$$

Sonuç 5.6. $\Lambda = (\lambda_{ij})$ sonsuz bir matris ve $p > 1$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. $\Lambda \in (\ell_p(R_{Y^r}), bs) \iff (5.2), (5.7),$

$$\sup_i \sum_j \left| \sum_{l=1}^i \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{lk} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right|^q < \infty. \quad (5.14)$$

2. $\Lambda \in (\ell_p(R_{Y^r}), cs) \iff (5.2), (5.7), (5.13), (5.14).$

3. $\Lambda \in (\ell_p(R_{Y^r}), cs_0) \iff (5.2), (5.7), (5.14),$

$$\text{her bir } j \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_i \sum_{l=1}^i \sum_{k=j, j|k}^\infty \lambda_{lk} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} = 0. \quad (5.15)$$

Sonuç 5.7. $\Lambda = (\lambda_{ij})$ sonsuz bir matris olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

$$1. \Lambda \in (\ell(R_{Y^r}), bs) \iff (5.2), (5.10),$$

$$\sup_{i,j} \left| \sum_{l=1}^i \sum_{k=j, |k| \leq l}^{\infty} \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{J_r(k)} \frac{Q_j^r}{q_k} \right| < \infty. \quad (5.16)$$

$$2. \Lambda \in (\ell(R_{Y^r}), cs) \iff (5.2), (5.10), (5.13), (5.16).$$

$$3. \Lambda \in (\ell(R_{Y^r}), cs_0) \iff (5.2), (5.10), (5.15), (5.16).$$

Teorem 5.8. $\Lambda = (\lambda_{ij})$ sonsuz bir matris ve $p > 1$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

$$(a) \Lambda \in (\ell_{\infty}, \ell_p(R_{Y^r})) = (c, \ell_p(R_{Y^r})) = (c_0, \ell_p(R_{Y^r})) \iff$$

$$\sup_{K \in \mathcal{N}} \sum_i \left| \sum_{j \in K} \sum_{l|i} \frac{q_l J_r(l)}{Q_i^r} \lambda_{lj} \right|^p < \infty.$$

$$(b) \Lambda \in (\ell, \ell_p(R_{Y^r})) \iff$$

$$\sup_j \sum_i \left| \sum_{l|i} \frac{q_l J_r(l)}{Q_i^r} \lambda_{lj} \right|^p < \infty.$$

İspat. Verilen herhangi $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (\ell_{\infty}, \ell_p(R_{Y^r}))$ matrisi için yeni bir $\hat{\Lambda} = (\hat{\lambda}_{ij})$ matrisi her $i, j \in \mathbb{N}$ için

$$\hat{\lambda}_{ij} = \sum_{l|i} \frac{q_l J_r(l)}{Q_i^r} \lambda_{lj}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda herhangi $u = (u_j) \in \ell_{\infty}$ için

$$\sum_j \hat{\lambda}_{ij} u_j = \sum_{l|i} \frac{q_l J_r(l)}{Q_i^r} \sum_j \lambda_{lj} u_j$$

eşitliği her $i \in \mathbb{N}$ için $(\hat{\Lambda}u)_i = (R_{Y^r}(\Lambda u))_i$ olmasını gerektirir. Buradan $u = (u_j) \in \ell_{\infty}$ iken $\Lambda u \in \ell_p(R_{Y^r})$ olması için gerek ve yeter koşulun $u = (u_j) \in \ell_{\infty}$ iken $\hat{\Lambda}u \in \ell_p$ olması gerektiği sonucuna varılır. Böylece Yardımcı Teorem 3.8 kullanılarak

$$\sup_{K \in \mathcal{N}} \sum_i \left| \sum_{j \in K} \sum_{l|i} \frac{q_l J_r(l)}{Q_i^r} \lambda_{lj} \right|^p < \infty$$

elde edilir. □

Teorem 5.9. $\Lambda = (\lambda_{ij})$ sonsuz bir matris olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

$$(a) \Lambda \in (\ell_\infty, \ell_\infty(R_{Y^r})) = (c, \ell_\infty(R_{Y^r})) = (c_0, \ell_\infty(R_{Y^r})) \iff$$

$$\sup_i \sum_j \left| \sum_{l|i} \frac{q_l J_r(l)}{Q_i^r} \lambda_{lj} \right| < \infty.$$

$$(b) \Lambda \in (\ell, \ell_\infty(R_{Y^r})) \iff$$

$$\sup_{i,j} \left| \sum_{l|i} \frac{q_l J_r(l)}{Q_i^r} \lambda_{lj} \right| < \infty.$$

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 5.8 in ispatına benzer yöntemle yapılır. □

Teorem 5.10. Let $\Lambda = (\lambda_{ij})$ be an infinite matrix. Then, the following statements hold:

$$(a) \Lambda \in (\ell_\infty, \ell(R_{Y^r})) = (c, \ell(R_{Y^r})) = (c_0, \ell(R_{Y^r})) \iff$$

$$\sup_{K \in \mathcal{N}} \sum_i \left| \sum_{j \in K} \sum_{l|i} \frac{q_l J_r(l)}{Q_i^r} \lambda_{lj} \right| < \infty.$$

$$(b) \Lambda \in (\ell, \ell(R_{Y^r})) \iff$$

$$\sup_j \sum_i \left| \sum_{l|i} \frac{q_l J_r(l)}{Q_i^r} \lambda_{lj} \right| < \infty.$$

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 5.8 in ispatına benzer yöntemle yapılır. □

Şimdi $\ell_\infty(R_{Y^r})$, $\ell_p(R_{Y^r})$, $\ell(R_{Y^r})$ uzaylarından $\ell_\infty(R_{Y^r})$ ve $\ell(R_{Y^r})$ uzaylarına tanımlı sınırlı lineer matris operatörlerinin normları hesaplanacaktır. İlk olarak bu araştırmamız için gerekli olan esas bir sonuç verilecektir.

Yardımcı Teorem 5.11. Herhangi bir $\Lambda = (\lambda_{ij})$ sonsuz matrisi için sınırlı lineer operatörlerin normu

$$\|\Lambda\|_{(\ell_\infty, \ell_\infty)} = \|\Lambda\|_{(\ell_p, \ell_\infty)} = \sup_i \sum_j |\lambda_{ij}|^q$$

$$\|\Lambda\|_{(\ell, \ell_\infty)} = \sup_{i,j} |\lambda_{ij}|$$

$$\|\Lambda\|_{(\ell_\infty, \ell)} = \|\Lambda\|_{(\ell_p, \ell)} = \sup_{K \in \mathcal{N}} \sum_j \left| \sum_{i \in K} \lambda_{ij} \right|^q$$

$$\|\Lambda\|_{(\ell_1, \ell_1)} = \sup_j \sum_i |\lambda_{ij}|$$

şeklinde hesaplanır [24].

Teorem 5.12. $\Lambda = (\lambda_{ij})$ sonsuz bir matris olsun.

(a) Eğer $\Lambda \in B(\ell_\infty(R_{Y^r}), \ell_\infty(R_{Y^r}))$ yada $\Lambda \in B(\ell_p(R_{Y^r}), \ell_\infty(R_{Y^r}))$ ise

$$\sup_i \sum_j \left| \sum_{j|l} \frac{\mu(\frac{l}{j})}{J_r(l)} \frac{Q_j^r}{q_l} \sum_{k|i} \frac{q_k J_r(k)}{Q_i^r} \lambda_{kl} \right|^q < \infty$$

ve

$$\|\Lambda\|_{(\ell_\infty(R_{Y^r}), \ell_\infty(R_{Y^r}))} = \|\Lambda\|_{(\ell_p(R_{Y^r}), \ell_\infty(R_{Y^r}))} = \sup_i \sum_j \left| \sum_{j|l} \frac{\mu(\frac{l}{j})}{J_r(l)} \frac{Q_j^r}{q_l} \sum_{k|i} \frac{q_k J_r(k)}{Q_i^r} \lambda_{kl} \right|^q$$

olur.

(b) Eğer $\Lambda \in B(\ell(R_{Y^r}), \ell_\infty(R_{Y^r}))$ ise

$$\sup_{i,j} \left| \sum_{j|l} \frac{\mu(\frac{l}{j})}{J_r(l)} \frac{Q_j^r}{q_l} \sum_{k|i} \frac{q_k J_r(k)}{Q_i^r} \lambda_{kl} \right| < \infty$$

ve

$$\|\Lambda\|_{(\ell(R_{Y^r}), \ell_\infty(R_{Y^r}))} = \sup_{i,j} \left| \sum_{j|l} \frac{\mu(\frac{l}{j})}{J_r(l)} \frac{Q_j^r}{q_l} \sum_{k|i} \frac{q_k J_r(k)}{Q_i^r} \lambda_{kl} \right|$$

olur.

(c) Eğer $\Lambda \in B(\ell_\infty(R_{Y^r}), \ell(R_{Y^r}))$ yada $\Lambda \in B(\ell_p(R_{Y^r}), \ell(R_{Y^r}))$ ise

$$\sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_j \left| \sum_{i \in K} \sum_{j|l} \frac{\mu(\frac{l}{j})}{J_r(l)} \frac{Q_j^r}{q_l} \sum_{k|i} \frac{q_k J_r(k)}{Q_i^r} \lambda_{kl} \right|^q < \infty$$

ve

$$\|\Lambda\|_{(\ell_\infty(R_{Y^r}), \ell(R_{Y^r}))} = \|\Lambda\|_{(\ell_p(R_{Y^r}), \ell(R_{Y^r}))} = \sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_j \left| \sum_{i \in K} \sum_{j|l} \frac{\mu(\frac{l}{j})}{J_r(l)} \frac{Q_j^r}{q_l} \sum_{k|i} \frac{q_k J_r(k)}{Q_i^r} \lambda_{kl} \right|^q$$

olur.

(d) Eğer $\Lambda \in B(\ell(R_{Y^r}), \ell(R_{Y^r}))$ ise

$$\sup_j \sum_i \left| \sum_{j|l} \frac{\mu(\frac{l}{j})}{J_r(l)} \frac{Q_j^r}{q_l} \sum_{k|i} \frac{q_k J_r(k)}{Q_i^r} \lambda_{kl} \right| < \infty$$

ve

$$\|T\|_{(\ell(R_{Y^r}), \ell(R_{Y^r}))} = \sup_j \sum_i \left| \sum_{j|l} \frac{\mu(\frac{l}{j})}{J_r(l)} \frac{Q_j^r}{q_l} \sum_{k|i} \frac{q_k J_r(k)}{Q_i^r} \lambda_{kl} \right|$$

olur.

İspat. $\tilde{\Lambda} = R_{Y^r} \Lambda R_{Y^r}^{-1}$ olsun. Teorem 3.3 den $U(R_{Y^r})$ ve U uzaylarının lineer olarak izomorf olduğu bilinmektedir. Böylece aşağıda verilen diyagramdan $U \in \{\ell_\infty, \ell_p, \ell\}$ ve $V \in \{\ell_\infty, \ell\}$ olmak üzere $\|\Lambda\|_{(U(R_{Y^r}), V(R_{Y^r}))} = \|\tilde{\Lambda}\|_{(U, V)}$ elde edilir.

$$\begin{array}{ccc} U(R_{Y^r}) & \xrightarrow{\Lambda} & V(R_{Y^r}) \\ R_{Y^r}^{-1} \uparrow & & \downarrow R_{Y^r} \\ U & \xrightarrow{\tilde{\Lambda} = R_{Y^r} \Lambda R_{Y^r}^{-1}} & V \end{array}$$

Yardımcı Teorem 5.11 kullanılarak istenilen ispat edilmiş olur. □

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Tez çalışmasında kullanılacak olan matris sonsuz alt üçgensel bir matris olduğundan bu matrisin tersinin olduğu bilinmektedir. Bu sebeple uzaylar tanımlandıktan sonra uzayların duallerinin elde edileceği öngörülmüştür.

Çalışmada tanımlanacak uzayların özel durumda İlkhan ve Kara tarafından [12] nolu çalışmada tanımlanan uzaylara dönüştüğü görülmektedir. Dolayısıyla bu çalışmada elde edilecek Banach uzayları [12] nolu çalışmadaki uzayların da genel halidir. Diğer taraftan Jordan totient fonksiyonu kavramı, genel olarak matematiğin sayılar teorisi alanında kullanılan bir kavram olduğundan bu çalışmada, Jordan totient fonksiyonu yardımıyla Banach uzayları tanımlanması sayılar teorisindeki bazı kavramların fonksiyonel analiz alanında kullanılması olarak karşımıza çıkmaktadır.

7. KAYNAKLAR

- [1] F. Başar, & B. Altay, "On the space of sequences of p -bounded variation and related matrix mappings", *Ukrainian Mathematical Journal*, c. 55, sayı 1, ss. 136-147, 2003.
- [2] B. Altay, F. Başar, & M. Mursaleen, "On the Euler sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞ I", *Information Sciences*, c. 176, sayı 10, ss. 1450-1462, 2006.
- [3] M. Mursaleen, & A.K. Noman, "On some new difference sequence spaces of non-absolute type", *Mathematical and Computer Modelling*, c. 52, sayı 3-4, ss. 603-617, 2010.
- [4] M. Kirişci, & F. Başar, "Some new sequence spaces derived by the domain of generalized difference matrix", *Computers & Mathematics with Applications*, c. 60, ss. 1299-1309, 2010.
- [5] E. E. Kara, "Some topological and geometrical properties of new Banach sequence spaces", *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2013, ss. 1-15, 2013.
- [6] M. Kirişci, "Riesz type integrated and differentiated sequence spaces", *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, c. 7, sayı 2, ss. 14-27, 2015.
- [7] S.A. Mohiuddine, & A. Alotaibi, "Weighted almost convergence and related infinite matrices", *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2018, ss. 1-10, 2018.
- [8] T. Yaying, & B. Hazarika, "On sequence spaces defined by the domain of a regular Tribonacci matrix", *Mathematica Slovaca*, c. 70, sayı 3, ss. 697-706, 2020.
- [9] P. Zengin Alp, "A new paranormed sequence space defined by Catalan conservative matrix", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, c. 44, sayı 9, ss. 7651-7658, 2021.
- [10] T. Yaying, B. Hazarika, & M. Mursaleen, "On sequence space derived by the domain of q -Cesaro matrix in ℓ_p space and the associated operator ideal", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 493, sayı 1, ss. 1-17, 2021.
- [11] T. Yaying, "Paranormed Riesz difference sequence spaces of fractional order", *Kragujevac Journal of Mathematics*, c. 46, sayı 2, ss. 175-191, 2022.
- [12] M. İlkhani, & E. E. Kara, "A new Banach space defined by Euler totient matrix operator", *Operators and Matrices*, c. 13, sayı 2, 527-544, 2019.

- [13] M. İlkan, "Matrix domain of a regular matrix derived by Euler totient function in the spaces c_0 and c ", *Mediterranean Journal of Mathematics*, c. 17, sayı 1, ss. 1-21, 2020.
- [14] M. İlkan, S. Demiriz, & E. E. Kara, "A new paranormed sequence space defined by Euler totient matrix", *Karaelmas Science and Engineering Journal*, c. 9, sayı 2, 277-282, 2019.
- [15] S. Demiriz, & S. Erdem, "Domain of Euler-totient matrix operator in the space L_p ", *Korean Journal of Mathematics*, c. 28, sayı 2, ss. 361-378, 2020.
- [16] S. Demiriz, M. İlkan, & E. E. Kara, "Almost convergence and Euler totient matrix", *Annals of Functional Analysis*, c. 11, sayı 3, ss. 604-616, 2020.
- [17] S. Erdem, & S. Demiriz, "4-dimensional Euler-totient matrix operator and some double sequence spaces", *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, c. 8, sayı 2, ss. 110-122, 2020.
- [18] G. C. Hazar Güleç, & Merve İlkan, "A new paranormed series space using Euler totient means and some matrix transformations", *Korean Journal of Mathematics*, c. 28, sayı 2, ss. 205-221, 2020.
- [19] G. C. Hazar Güleç, & Merve İlkan, "A new characterization of absolute summability factors", *Communications in Optimization Theory*, c. 2020, ss. 1-11, 2020.
- [20] M. İlkan, & G. C. Hazar Güleç, "A study on absolute Euler totient series space and certain matrix transformations", *Mugla Journal of Science and Technology*, c. 6, sayı 1, ss. 112-119, 2020.
- [21] M. İlkan, "Certain geometric properties and matrix transformations on a newly introduced Banach space", *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, c. 3, sayı 1, ss. 45-51, 2020.
- [22] M. İlkan, N. Şimşek, E. E. Kara, "A new regular infinite matrix defined by Jordan totient function and its matrix domain in ℓ_p ", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, c. 44, sayı 9, ss. 7622-7633, 2021.
- [23] B. Musayev & M. Alp, *Fonksiyonel Analiz*, Kütahya, Türkiye: Balcı Yayınları, 2000.
- [24] F. Başar, *Summability Theory and Its Applications*, İstanbul, Türkiye: Bentham Science Publishers, 2012.

- [25] E. Kovac, "On ϕ convergence and ϕ density", *Mathematica Slovaca*, c. 55, ss. 329-351, 2005.
- [26] L.E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, New York: Chelsea Publishing Company, 1971.
- [27] I. Schoenberg, "The integrability of certain functions and related summability methods", *The American Mathematical Monthly*, c. 66, ss. 361-375, 1959.
- [28] P. Erdős, "Solutions of advanced problems: ϕ -convergence", *The American Mathematical Monthly*, c. 85, ss. 122-123, 1978.
- [29] M. İlkan, & M. A. Bayrakdar, "A study on matrix domain of Riesz-Euler totient matrix in the space of p -absolutely summable sequences", *Communications in Advanced Mathematical Sciences*, c. 4, sayı 1, ss. 14-25, 2021.
- [30] H. Tietz, & M. Stieglitz, "Matrix transformationen von folgenräumen eine ergebnisübersicht", *Mathematische Zeitschrift*, c. 154, ss. 1-16, 1977.
- [31] B. Altay, & F. Başar, "Certain topological properties and duals of the matrix domain of a triangle matrix in a sequence space", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 336, ss. 632-645, 2007.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Uskan DEVLETLİ

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2023
Lisans	Matematik	Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi	2016
Lise		Bakırköy Lisesi	2001

YAYINLAR

U. Devletli and M. İlkhana Kara, “New Banach sequence spaces defined by Jordan totient function”, yayımlanmak üzere gönderildi.