



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**YENİ BİR JUNGCK-TİPİ SABİT NOKTA İTERASYON YÖNTEMİNİN
İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra ERBAŞ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Yunus ATALAN

AKSARAY, 2022

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 192342404 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Esra ERBAŞ tarafından hazırlanan “**YENİ BİR JUNGCK –TİPİ SABİT NOKTA İTERASYON YÖNTEMİNİN İNCELENMESİ**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Yunus ATALAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Kadri DOĞAN

Artvin Çoruh Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Samet MALDAR

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 01/07/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yeni Bir Jungck-Tipi Sabit Nokta İterasyon Yönteminin İncelenmesi konulu yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Esra ERBAŞ

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bana destek olan bilgi ve tecrübeleriyle katkıda bulunan değerli tez danışman hocam Sayın Doç. Dr. Yunus ATALAN'a en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Bu süreçte yardımlarını esirgemeyen Sayın Dr. Öğretim Üyesi Samet MALDAR ve Sayın Murat İLİK hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Tez jürimde bulunan saygıdeğer hocalarıma teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca maddi manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim değerli aileme sonsuz teşekkür ederim.



Esra ERBAŞ
AKSARAY,2022

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
3. JUNGCK-TİPİNDEKİ İTERASYON YÖNTEMLERİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ	10
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	39
KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ.....	46



YÜKSEK LİSANS TEZİ
YENİ BİR JUNGCK-TİPİ SABİT NOKTA İTERASYON YÖNTEMİNİN
İNCELENMESİ

Esra ERBAŞ

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yunus ATALAN

ÖZET

Sabit nokta teorisinde iyi bilinen teoremlerden biri olan Banach Daralma İlkesi birçok araştırmacı tarafından genelleştirilmiş ve normlu uzaylardan metrik uzaylara kadar farklı türden yapılar üzerinde sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Bu çalışmada Banach Büzölme İlkesinin dikkate değer genellemelerinden biri olan Jungck Daralma İlkesinden yararlanılmıştır. Bu tez dört bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde sabit nokta teorisinin tarihsel gelişimine yer verilmiştir.

İkinci bölümde daha sonra kullanılacak olan temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde yeni iterasyon yöntemi tanıtılmış ve bu yöntem için belirli bir dönüşüm sınıfı kullanılarak yakınsama, kararlılık, yakınsama hızı ve veri bağılılığı gibi sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve ileride yapılabilecek olası çalışmalara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sabit Nokta, Banach Daralma İlkesi, Jungck Daralma İlkesi, İterasyon Yöntemi, Yakınsaklık, Yakınsaklık Hızı, Kararlılık, Veri Bağılılığı

Temmuz, 2022; 46 sayfa

M.Sc. THESIS

**INVESTIGATION OF A NEW JUNGCK-TYPE FIXED POINT ITERATION
METHOD**

Esra ERBAŞ

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yunus ATALAN

ABSTRACT

Banach Contraction Principle, one of the well-known theorems in fixed point theory, has been generalized by many researchers and fixed point theorems have been obtained on different types of structures from normed spaces to metric spaces. In this study, Jungck Contraction Principle, which is one of the remarkable generalizations of Banach Contraction Principle, was used. This thesis consists of four parts.

In the first chapter, the historical development of the fixed point theory is given.

In the second part, the basic concepts that will be used later are given.

In the third chapter, the new iteration method is introduced and fixed point theorems such as convergence, stability, rate of convergence and data dependency are obtained by using a certain mapping class for this method.

In the fourth chapter, the results obtained in this thesis study are summarized and possible future studies are given.

Keywords: Fixed Point, Banach Contraction Principle, Jungck Contraction Principle Iteration Method, Convergence, Rate of Convergence, Stability, Data Dependency

July, 2022; 46 pages

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3. 1. $x_0 = 0.48$ başlangıç noktası için yeni iterasyon yöntemi ve JCR, JS ile JA iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışları.	27
Çizelge 3. 2. $x_0 = 0.48$ başlangıç noktası için JSP, JK, JN, JI ve JM iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışları.	28
Çizelge 3. 3. $x_0 = 0.75$ başlangıç noktası için yeni iterasyon ile JCR, JS, JA ve JSP iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışları.	30
Çizelge 3. 4. $x_0 = 0.75$ başlangıç noktası için JK, JN, JI ve JM iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışları.	31



SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{F}$	Cisim ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$) veya ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$)
$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$	X üzerinde tanımlı metrik fonksiyonu
$\ \cdot\ : X \rightarrow \mathbb{F}$	X üzerinde tanımlı norm fonksiyonu
(X, d)	Metrik Uzay
$(X, \ \cdot\)$	Normlu uzay
$B(x_0, r)$	x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\bar{B}(x_0, r)$	x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
$T: X \rightarrow Y$	X kümesinden Y kümesine tanımlı T dönüşümü
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$T^n(x)$	x noktasının T dönüşümü altındaki n . iterasyonu
$T(x)$	x noktasının T dönüşümü altındaki görüntüsü
ToS	T ile S dönüşümünün bileşkesi

1. GİRİŞ

Matematikte bazı problemlerin çözümleri, uygun şartları sağlayan bir f fonksiyonu için $f(x) - x = 0$ şeklinde yazılabilen bir denklemin çözümünü bulmaya indirgenebilir. Bu tipteki denklemlerin çözümü olan x noktalarına f fonksiyonunun sabit noktaları denir. Sabit nokta teorisi diferansiyel ve integral denklemler [1-3], yaklaşım teorisi ve oyun teorisi [4] gibi çeşitli alanlarda sahip olduğu geniş uygulama yelpazesiyle lineer olmayan analizin ilgi çekici ve temel bir konusu olmuştur. Bu teori ayrıca optimizasyon [5], fizik [6], ekonomi [7-8] ve tıp [9-11] gibi alanların neredeyse tamamında çok verimli uygulamalara sahiptir. Bu nedenle sabit nokta teorisi özellikle son elli yıl içerisinde analiz ve topoloji temelinde yükselen aktif araştırma alanlarından biri olmuş ve günümüzde de dinamik bir literatüre sahip çalışma sahası olarak araştırmacıların ilgisini çekmeye devam etmektedir.

Geometrik olarak sabit nokta tanımı $y = x$ doğrusu üzerindeki nokta anlamına gelmektedir. Bir sabit noktanın varlığı ve tekliği için inşa edilen teoremlere sabit nokta teoremleri adı verilir. En ünlü varlık ve teklik teoremlerinden birisi 1922 yılında Banach [12] tarafından ispatlanan ve Banach Daralma İlkesi (Banach Contraction Principle) olarak adlandırılan teoremdir. Bu teorem tam metrik uzaylarda kendi üzerine tanımlı bir daraltan (contraction) dönüşümün tek bir sabit noktaya sahip olacağını belirtmesinin yanında teklikle belirlenen bu sabit noktaya ulaşabilmek için adına iterasyon denilen bir yöntem sunar.

Yukarıda sözü edilen iterasyon yöntemlerine dair yapılan çalışmalarda temel düşüncenin genel olarak belirli dönüşüm sınıfları kullanılarak oluşturulan bu algoritmalarla elde edilen dizilerin hangi şartlar altında sabit noktaya yakınsak olduğunun belirlenmesi, yakınsama davranışının başka yöntemlerle olan denkliği, yakınsama hızının test edilmesi, iterasyon yönteminin veri bağıllığının analizi ve kararlı olup olmadığının tespiti olarak sınıflandırılması mümkündür.

Banach Daralma İlkesinde kullanılan Picard iterasyonunun genişlemeyen (nonexpansive) dönüşümlerin sabit noktasına yakınsayamaması nedeniyle yeni iterasyon yöntemleri tanımlanarak bu problem aşılmaya çalışılmıştır. Bu yaklaşım sonucunda birçok iterasyon yöntemi literatüre kazandırılmış ve yeni iterasyonların

tanımlanmasına dair çalışmalar günümüzde de popülaritesini korumaya devam etmiştir.

Bir iterasyon yönteminden elde edilen dizi belirli bir dönüşüm sınıfının sabit noktasına yakınsarken başka bir dönüşüm sınıfının sabit noktasına yakınsamayabilir. Bu problem iterasyon yöntemleri için yakınsamanın denkliği kavramını ortaya çıkarmış ve literatürde bulunan iterasyon yöntemleri ile yeni tanımlanan iterasyon yöntemlerinin yakınsama anlamında denk olup olmadıkları çeşitli uzaylarda incelenmiştir [13-19].

Yakınsama anlamında denk oldukları gösterilen iki iterasyon yönteminden hangisinin daha hızlı bir şekilde ilgili dönüşümün sabit noktasına yakınsadığının tespitinin yapılması ile geniş bir literatür oluşturulmuştur [20-26].

Bir iterasyon yönteminden elde edilen dizinin kullanılan dönüşümün sabit noktasına yakınsak olduğu gösterildikten sonra, bu iterasyon yöntemi için adına yaklaşım operatörü denilen başka bir dönüşüm kullanılarak elde edilecek yeni dizinin de yaklaşım operatörünün sabit noktasına yakınsak olduğu gösterilebilir. Böyle bir durumda her iki dönüşümün sabit noktalarının birbirlerine ne kadar yakın olduğu ve bu mesafenin nasıl hesaplanacağı soruları karşımıza veri bağıllığı kavramını çıkarmaktadır. Sabit nokta iterasyon yöntemlerinin veri bağılı olup olmadığına dair farklı türden yapılar üzerinde birçok çalışma mevcuttur [27-37].

Matematiksel olarak kararlılık kavramı, üzerinde çalışılan yapıya uygulanacak küçük değişimlerin işleyişi bozamaması olarak düşünülebilir. Bu bağlamda sabit nokta iterasyon yöntemlerinin kararlılığı üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Buradaki yaklaşım; kullanılan iterasyon yönteminden elde edilecek dizi yerine, hesaplama hataları, yuvarlama hataları vb. nedenlerden dolayı başka bir dizi elde edilmesine rağmen yeni dizinin de dönüşümün sabit noktasına yakınsaması olarak karakterize edilebilir [38-44].

Banach Daralma İlkesinde kullanılan dönüşümün daraltan olması nedeniyle araştırmacılar daha farklı dönüşüm tipleri için bu teoremin çeşitli genellemelerini elde etme yoluna gitmiştir [45-47]. Bu teoremin dikkate değer genellemelerinden biri 1976 yılında Jungck [48] tarafından değişmeli dönüşümler kullanılarak yapılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tez çalışmamızın bu bölümünde daha sonra kullanacağımız bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.1. X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için;

- i. $d(x, y) \geq 0$
- ii. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- iii. $d(x, y) = d(y, x)$
- iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartlarını sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir [49].

Tanım 2.2 (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda, $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa, $\{x_n\}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir [49].

Tanım 2.3 (X, d) herhangi bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir [49].

Tanım 2.4 (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise, X uzayına tam metrik uzay denir [50].

Tanım 2.5 (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f dönüşümüne x_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f dönüşümü X in her noktasında sürekli ise f ye X te süreklidir denir.

f sürekli bir dönüşüm olmak üzere yukarıda sözü edilen $\delta > 0$ sayısı her $x_0 \in X$ sayısından bağımsız olarak bulunabiliyorsa, yani δ sayısı sadece ε 'a bağlı ise, f 'ye düzgün sürekli dönüşüm adı verilir [51].

Teorem 2.6 (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü ve $x_0 \in X$ noktası verilsin. Aşağıdakiler denktir:

a) $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü $x_0 \in X$ noktasında sürekli.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ koşulunu sağlayan her yakınsak (x_n) dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ eşitliği vardır.

Bu teoremin bir sonucu olarak sürekli fonksiyonlar için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.7 (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü verilsin. f dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul X uzayında yakınsak her (x_n) dizisi için $f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Yani bir fonksiyonun sürekli olması için gerek ve yeter koşul yakınsak dizileri yakınsak dizilere dönüştürmesidir [51].

Tanım 2.8 V boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olsun. $+: V \times V \rightarrow V$ ve $\cdot: \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ işlemleri tanımlansın. Eğer her $x, y, z \in V$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, V ye $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzayı denir:

V1. $x + y \in V$.

V2. $x + (y + z) = (x + y) + z$.

V3. $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in V$ vardır.

V4. $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in V$ vardır.

V5. $x + y = y + x$.

V6. $\alpha \cdot x \in V$.

V7. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

V8. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.

$$\mathbf{V9.} (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

$$\mathbf{V10.} 1 \cdot x = x.$$

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise V ye reel vektör uzayı, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ise V ye kompleks vektör uzay adı verilir [52].

Tanım 2.9 X bir vektör uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$$B = \{z \in X: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset A$$

ise A kümesine konvektir denir [51].

Tanım 2.10 X bir vektör uzay olsun ve $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ olmak üzere, $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{F}$ fonksiyonunun x noktasındaki değeri $\|x\|$ ile verilsin. Bu fonksiyon

$$\mathbf{N1.} \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$\mathbf{N2.} \text{ Her } \alpha \in \mathbb{F} \text{ ve her } x \in X \text{ için } \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$\mathbf{N3.} \text{ Her } x, y \in X \text{ için } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [53].

Tanım 2.11 X normlu uzay ve $x, y \in X$ olsun. Eğer X uzayı, $d(x, y) = \|x - y\|$ norm metriğine göre tam ise X 'e Banach uzayı denir.

X 'in reel veya kompleks vektör uzay oluşuna göre Banach uzayı da reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır [54].

Tanım 2.12 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ olmak üzere V , $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. $f: V \rightarrow \mathbb{F}$ operatörüne fonksiyonel denir. Eğer f lineer ise f ye lineer fonksiyonel denir [49].

Tanım 2.13 X bir normlu uzay ve $\{x_n\}$, X te bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisi x e kuvvetli yakınsaktır (veya norma göre yakınsaktır) denir ve bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ şeklinde ya da kısaca $x_n \rightarrow x$ ile gösterilir. Buradaki x noktasına $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti adı verilir [49].

Tanım 2.14 X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer

$$Tx = x \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T 'nin sabit noktası denir ve T 'nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir [55].

Örnek 2.15

- i. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = \sqrt{x^2 - 8x + 40}$ ise $F_T = \{5\}$.
- ii. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = x - 5$ ise $F_T = \emptyset$.
- iii. Eğer $X = [0,1]$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = \cos(\cos x)$ ise $F_T = \{0.739\}$.
- iv. Eğer $X = [0,1]$ ve $Tx = x - 1 + \frac{1}{e^x}$ ise $F_T = \{0\}$.

Tanım 2.16 X bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \cdot d(x, y)$$

olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı mevcut ise T 'ye bir Lipschitzian dönüşüm denir [55].

Tanımdan da görüldüğü üzere, her T Lipschitzian dönüşümü düzgün süreklidir.

Örnek 2.17 $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = 2x - 4$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$d(Tx, Ty) = |2x - 4 - (2y - 4)| = 2|x - y| = 2d(x, y)$$

elde edilir. Böylece $\lambda \geq 2$ için T dönüşümü Lipschitzian dönüşüm şartını sağlar.

Tanım 2.18 X bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \cdot d(x, y) \quad (2.2)$$

olacak şekilde en az bir $\lambda \in (0,1)$ sayısı bulunabiliyorsa T 'ye daraltan dönüşüm denir [55].

Bir dönüşümün hangi şartlar altında sabit noktasının var olduğu ve bu sabit noktanın tek olup olmadığının belirlenmesi önem arz etmektedir. Sabit nokta için varlık ve teklik teoremleri bir dönüşümün sabit noktasının varlığını veya tekliğini göstermek için ihtiyaç duyulan uygun şartları belirler. Sabit nokta teorisinde çok iyi bilinen Banach Daralma İlkesi söz konusu sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti eder:

Teorem 2.19 X bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda

- i. T, X 'te bir tek x sabit noktasına sahiptir;
- ii. Herhangi bir $x_0 \in X$ başlangıç noktası için

$$x_{n+1} = Tx_n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

ile tanımlı Picard iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi x noktasına yakınsar [12].

İspat. Herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu, dolayısıyla $x \in X$ noktasına yakınsadığı ve bu x 'in $Tx = x$ denkleminin bir tek çözümü olduğu gösterilmelidir. O halde $n \geq 1$ ve $p \geq 1$ için (2.3) şartından

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &= d(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0) \\ &\leq \lambda d(x_{n+p-1}, x_{n-1}) \\ &= \lambda d(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0) \\ &\leq \lambda^2 d(x_{n+p-2}, x_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^n d(x_{n+p-n}, x_{n-n}) \\ &= \lambda^n d(x_p, x_0) \\ &\leq \lambda^n (d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lambda^n (\lambda d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-2}, x_0)) \\
&= \lambda^n (d(x_{p-2}, x_0) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + \lambda d(x_{p-1}, x_{p-2})) \\
&\leq \lambda^n [d(x_{p-2}, x_0) + \lambda d(x_{p-2}, x_{p-3}) + \lambda^2 d(x_{p-2}, x_{p-3})] \\
&\vdots \\
&\leq \lambda^n [d(x_1, x_0) + \lambda d(x_1, x_0) + \lambda^2 d(x_1, x_0) + \dots] \\
&= \lambda^n d(x_1, x_0) (1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots) \\
&= \lambda^n d(x_1, x_0) \left(\frac{1}{1 - \lambda} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \left(\frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \right) d(x_1, x_0)$$

olduğu elde edilir. $0 < \lambda < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $d(x_{n+p}, x_n) \rightarrow 0$ olur. Bu da $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X, d) uzayı tam olduğundan $x_n \rightarrow x$ dolayısıyla da $x_{n+1} \rightarrow x$ yazılabilir. T dönüşümü sürekli olduğundan yakınsak dizileri yakınsak dizilere dönüştürür, yani $Tx_n \rightarrow Tx$ olup $x_{n+1} = Tx_n$ denkleminde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $x = Tx$ elde edilir.

Şimdi bu sabit noktanın tek olduğu gösterilmelidir. $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere T dönüşümünün y gibi başka bir sabit noktası olsun. O halde

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq \lambda \cdot d(x, y) \Rightarrow (1 - \lambda)d(x, y) \leq 0$$

elde edilir. $x \neq y$ olduğundan çelişki elde edilir. Dolayısıyla T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Tanım 2.20 (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \tag{2.4}$$

ise, T ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir [49].

Örnek 2.21 X Banach uzayı olsun. $T: X \rightarrow X$ dönüşümü, $T(x) = \frac{x}{14} + \frac{1}{24}$ şeklinde tanımlansın. O zaman T genişlemeyen bir dönüşümdür.

Çözüm: Gerçekten de her $x, y \in X$ ve $y \neq 0$ için

$$\|T(x) - T(y)\| = \left\| \frac{x}{14} + \frac{1}{24} - \left(\frac{y}{14} + \frac{1}{24} \right) \right\| = \left\| \frac{x}{14} - \frac{y}{14} \right\| = \frac{\|x-y\|}{14} \leq \|x - y\|.$$

Örnek 2.22 $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi mutlak değer normu ile göz önüne alınsın. $T: [0,5] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$T(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 5 \\ 2, & x = 5 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Açık olarak T dönüşümü $x = 1$ noktasında bir sabit noktaya sahip sürekli olmayan bir dönüşümdür. Eğer $x = 4,5$, $y = 5$ alınırsa

$$|T(x) - T(y)| = 1 \not\leq 0.5 = |x - y|$$

yazılabilir. Dolayısıyla T genişlemeyen dönüşüm değildir.

Örnek 2.23 $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Tx = x + 15$ olsun. O halde

$$d(Tx, Ty) = |x + 15 - (y + 15)| = |x - y| = d(x, y)$$

olduğundan her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ şartı sağlanır. Dolayısıyla T genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat bu dönüşümün bir sabit noktası yoktur.

3. JUNGCK-TİPİNDEKİ İTERASYON YÖNTEMLERİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde Banach Daralma İlkesinin genellemelerinden biri olan Jungck-Daralma İlkesi yardımıyla yeni dört adımlı bir iterasyon yöntemi tanıtılmıştır. Ayrıca bu iterasyon yöntemi kullanılarak belirli bir dönüşüm için herhangi bir Banach uzayında kuvvetli yakınsama, kararlılık, yakınsaklık hızı ve veri bağıllığı sonuçları irdelenmiştir.

Jungck [48] değişmeli dönüşümler kullanarak Banach Daralma İlkesi'nin önemli genelleştirmelerinden birini aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

Teorem 3.1 (X, d) bir tam metrik uzay ve her $x, y \in X$ için $f, g: X \rightarrow X$ aşağıdaki şartları sağlayan dönüşümler olsun.

- i. (f, g) değişmeli dönüşüm çifti,
- ii. g sürekli,
- iii. $f(X) \subset g(X)$,
- iv. $k \in [0, 1]$ olmak üzere $d(fx, fy) \leq kd(gx, gy)$.

Bu durumda f ve g teklikle belirli olan $p \in X$ gibi bir ortak sabit noktaya sahiptir.

Bu teoremden iv ile verilen şart Jungck Daraltan Dönüşümü olarak adlandırılır ve $g(x) = x$ alınması durumunda klasik Banach Daralma İlkesi elde edilir. Bu teoremin bir sonucu olarak Jungck tarafından aşağıdaki iterasyon yöntemi tanımlanmıştır:

X bir Banach uzayı, Y herhangi bir küme ve $S, T: Y \rightarrow X$ dönüşümleri $T(Y) \subseteq S(Y)$ şartını sağlasın. $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$Sx_{n+1} = Tx_n \quad (3.1)$$

Bu eşitlik Jungck iterasyon yöntemi olarak adlandırılır.

(3.1) ile verilen eşitlikte $S = I$ birim dönüşüm ve $Y = X$ alınması halinde klasik Picard iterasyon yöntemi [56] elde edilmektedir. Birçok araştırmacı Jungck tarafından ortaya konulan bu yöntem üzerinde çalışmış ve klasik iterasyon yöntemlerini Jungck tipinde

yeniden yazarak çok sayıda sabit nokta teoremleri elde etmişlerdir. Bu yaklaşımla yapılan çalışmaların bazıları şunlardır:

Tanım 3.2 (Jungck-Mann İterasyon Yöntemi)

$\alpha_n \in [0,1]$ olmak üzere, Jungck-Mann (JM) iterasyon yöntemi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [57]:

$$Sx_{n+1} = (1 - \alpha_n)Sx_n + \alpha_n Tx_n. \quad (3.2)$$

Tanım 3.3 (Jungck-Ishikawa ve Jungck-Noor İterasyon Yöntemleri)

$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ olmak üzere, sırasıyla Jungck-Ishikawa (JI) ve Jungck-Noor (JN) iterasyon yöntemleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [58]:

$$\begin{aligned} Sx_{n+1} &= (1 - \alpha_n)Sx_n + \alpha_n Ty_n \\ Sy_n &= (1 - \beta_n)Sx_n + \beta_n Tx_n, \end{aligned} \quad (3.3)$$

ve

$$\begin{aligned} Sx_{n+1} &= (1 - \alpha_n)Sx_n + \alpha_n Ty_n \\ Sy_n &= (1 - \beta_n)Sx_n + \beta_n Tz_n \\ Sz_n &= (1 - \gamma_n)Sx_n + \gamma_n Tx_n. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Tanım 3.4 (Jungck-SP İterasyon Yöntemi)

$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ olmak üzere Jungck-SP (JSP) iterasyon yöntemi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [59]:

$$\begin{aligned} Sx_{n+1} &= (1 - \alpha_n)Sy_n + \alpha_n Ty_n \\ Sy_n &= (1 - \beta_n)Sz_n + \beta_n Tz_n \\ Sz_n &= (1 - \gamma_n)Sx_n + \gamma_n Tx_n. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Tanım 3.5 (Jungck-CR İterasyon Yöntemi)

$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ olmak üzere Jungck-CR (JCR) iterasyon yöntemi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [60]:

$$\begin{aligned} Su_{n+1} &= (1 - \alpha_n)Sv_n + \alpha_n Tv_n \\ Sv_n &= (1 - \beta_n)Tu_n + \beta_n Tw_n \\ Sw_n &= (1 - \gamma_n)Su_n + \gamma_n Tu_n. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ayrıca (3.6) ile verilen eşitlikte sırasıyla $\alpha_n = 0$ ve $\alpha_n = 0, \beta_n = 1$ seçilirse aşağıda verilen Jungck-tipindeki Agarwal (JA) iterasyon yöntemi [61] ile bu yöntemin özel hali olan Jungck-tipindeki Sahu (JS) iterasyon yöntemi elde edilir:

Tanım 3.6 (Jungck-Agarwal ve Jungck-Sahu İterasyon Yöntemleri)

$\beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} Sx_{n+1} &= (1 - \beta_n)Tx_n + \beta_n Ty_n \\ Sy_n &= (1 - \gamma_n)Sx_n + \gamma_n Tx_n, \end{aligned} \tag{3.7}$$

ve

$$\begin{aligned} Sx_{n+1} &= Ty_n \\ Sy_n &= (1 - \gamma_n)Sx_n + \gamma_n Tx_n. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Tanım 3.7 (Jungck-Khan İterasyon Yöntemi)

$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, a_n, b_n, c_n \in [0,1]$ olmak üzere Jungck-Khan (JK) iterasyon yöntemi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [62]:

$$\begin{aligned} Su_{n+1} &= (1 - \alpha_n - \beta_n)Su_n + \alpha_n Tv_n + \beta_n Tu_n \\ Sv_n &= (1 - b_n - c_n)Su_n + b_n Tw_n + c_n Tu_n \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$Sw_n = (1 - a_n)Su_n + a_nTu_n.$$

Yukarıda verdiğimiz iterasyon yöntemlerine dair literatürden esinlenerek tanımlamış olduğumuz yeni dört adımlı iterasyon yöntemi ise şu şekildedir:

Tanım 3.8 (Yeni Dört Adımlı İterasyon Yöntemi)

$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \mu_n \in [0,1]$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_nTy_n \\ y_n &= (1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n \\ z_n &= (1 - \gamma_n)w_n + \gamma_nTw_n \\ w_n &= (1 - \mu_n)x_n + \mu_nTx_n. \end{aligned} \tag{3.10}$$

(3.10) ile verilen iterasyon yönteminin Jungck-tipinde yeniden yazılmasıyla aşağıdaki iterasyon yöntemi elde edilir:

Tanım 3.9 (Yeni Dört Adımlı Jungck-Tipi İterasyon Yöntemi)

$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \mu_n \in [0,1]$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} Sx_{n+1} &= (1 - \alpha_n)Sy_n + \alpha_nTy_n \\ Sy_n &= (1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n \\ Sz_n &= (1 - \gamma_n)Sw_n + \gamma_nTw_n \\ Sw_n &= (1 - \mu_n)Sx_n + \mu_nTx_n. \end{aligned} \tag{3.11}$$

X bir Banach uzayı, Y herhangi bir küme ve $S, T: Y \rightarrow X$ dönüşümleri $T(Y) \subseteq S(Y)$ şartlarını sağladığında $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere yukarıda verilen Jungck tipindeki iterasyon yöntemleri için $S = I$ (birim dönüşüm) ve $Y = X$ alınması durumunda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

Sonuç 3.10

- i. (3.2) ile verilen iterasyon yönteminden klasik Mann iterasyon yöntemi [63];
- ii. (3.3) ve (3.4) ile verilen iterasyon yöntemlerinden sırasıyla klasik Ishikawa [64] ve klasik Noor [65] iterasyon yöntemleri;
- iii. (3.5) ile verilen iterasyon yönteminden klasik SP iterasyon yöntemi [66];
- iv. (3.6) ile verilen iterasyon yönteminden klasik CR iterasyon yöntemi [67];
- v. (3.7) ve (3.8) ile verilen iterasyon yöntemlerinden sırasıyla klasik Agarwal-S [68] ve klasik Sahu [69] iterasyon yöntemleri elde edilir.
- vi. Eğer (3.9) ile verilen iterasyon yönteminde $\beta_n = c_n = 0$ seçilirse (3.4) ile verilen Jungck-Noor iterasyon yönteminin elde edileceği açıktır.
- vii. Eğer (3.10) ile verilen iterasyon yönteminde $\mu_n = 0$ seçilirse klasik CR iterasyonu [67] elde edilir.
- viii. Eğer (3.11) ile verilen iterasyon yönteminde $\mu_n = 0$ seçilirse (3.6) ile verilen Jungck-CR iterasyonu elde edilir.

Şimdi temel sonuçlarımızı elde etmek için kullanacağımız bazı yardımcı teorem ve tanımları verelim:

Tanım 3.11 X boştan farklı bir küme ve $S, T: X \rightarrow X$ dönüşümleri verilsin.

- i. Eğer $x = Tx = Sx$ ise $x \in X$ noktasına T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktası denir.
- ii. Eğer bazı $x \in X$ noktaları için $z = Tx = Sx$ ise $x \in X$ noktasına T ve S dönüşümlerinin çakışık noktası, z noktasına ise T ve S 'nin çakışma noktası denir.
- iii. Eğer bazı $x \in X$ noktaları için $Tx = Sx$ olduğunda $STx = TSx$ sağlanırsa T ve S dönüşümlerine zayıf uyumludur denir [60].

Tanım 3.12 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ sırasıyla u ve v limitlerine sahip reel sayı dizileri olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n - u|}{|v_n - v|} = z$$

olmak üzere;

- i. Eğer $z=0$ ise $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin u noktasına yakınsaması, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin v noktasına yakınsaması daha hızlıdır.

- ii. Eğer $0 < z < \infty$ ise $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizilerinin yakınsama hızları eşittir [21].

Tanım 3.13 Y herhangi bir küme ve $p = Tx = Sx$ olmak üzere $S, T: Y \rightarrow X$ dönüşümleri $T(Y) \subseteq S(Y)$ şartını sağlasın. $x_0 \in X$ başlangıç noktasına sahip aşağıda verilen iterasyon yönteminden elde edilen $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ dizisi p noktasına yakınsasın.

$$Sx_{n+1} = f(T, x_n) \quad (3.12)$$

$\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$, X uzayında keyfi bir dizi ve $n=0,1,2,\dots$ için $\varepsilon_n = d(Sy_n, f(T, y_n))$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Sy_n = p$ sağlanırsa (3.12) verilen iterasyon yöntemi (S, T) kararlıdır denir [57].

Tanım 3.14 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $S, T: X \rightarrow X$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın:

- i. $T(X) \subseteq S(X)$,
- ii. negatif olmayan λ ve μ sabitleri için $\lambda + \mu < 1$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(Sx, Sy) + \mu \left(\frac{d(Sx, Tx) \cdot d(Sy, Ty)}{1 + d(Sx, Sy)} \right), \quad (3.13)$$

- iii. $S(X)$ kümesi X 'in tam alt uzayıdır.

Bu durumda S ve T dönüşümleri çakışma noktasına sahiptir. Ek olarak, S ve T dönüşümleri zayıf uyumlu ise, bu dönüşümlerin tek bir ortak sabit noktaları vardır [70].

Lemma 3.15 $\theta \in [0,1)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ eşitsizliğini sağlayan ve negatif olmayan $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ sayı dizisini göz önüne alalım. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$u_{n+1} \leq \theta u_n + v_n$$

şartını sağlayan herhangi bir $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif sayı dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ dır [55].

Lemma 3.16 Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ negatif olmayan bir dizi, $\theta_n \in (0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n = \infty$ ve $\phi_n \geq 0$ olsun. Her $n \geq n_0$ için

$$s_{n+1} \leq (1 - \theta_n)s_n + \theta_n\phi_n$$

eşitsizliğin sağlanacağı şekilde bir n_0 sayısı mevcut olsun. Bu durumda

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \phi_n$$

eşitsizliği sağlanır [71].

Tanım 3.17 $A_1, A_2: C \rightarrow C$ iki operatör olsun. Her $x \in C$ ve sabit bir $\varepsilon > 0$ için $\|A_1x - A_2x\| \leq \varepsilon$ ise A_2 'ye A_1 'in yaklaşım operatörü adı verilir [71].

Teorem 3.18 X bir Banach uzayı, Y herhangi bir küme ve $S, T: Y \rightarrow X$ dönüşümleri (3.13) şartını sağlasın. Kabul edelim ki $S(Y)$, X 'in bir tam alt uzayı, $T(Y) \subseteq S(Y)$ ve $p = Tx_p = Sx_p$ olsun. $\alpha_n \in [0,1]$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ olmak üzere (3.11) ile verilen yeni dört adımlı iterasyon yönteminden elde edilen $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p noktasına kuvvetli yakınsaktır. Ayrıca $Y = X$ ve T ile S dönüşümleri zayıf uyumlu ise p , T ve S dönüşümlerinin tek ortak sabit noktasıdır.

İspat. (3.11), (3.13) eşitsizlikleri ve $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \mu_n \in [0,1]$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \|Sx_{n+1} - p\| &= \|(1 - \alpha_n)Sy_n + \alpha_nTy_n - p\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|Sy_n - Tx_p\| + \alpha_n\|Ty_n - Tx_p\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|Sy_n - Sx_p\| \\ &\quad + \alpha_n \left\{ \lambda\|Sy_n - Sx_p\| + \mu \left(\frac{\|Sy_n - Ty_n\| \cdot \|Sx_p - Tx_p\|}{1 + \|Sy_n - Sx_p\|} \right) \right\} \quad (3.14) \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|Sy_n - Sx_p\| + \lambda\alpha_n\|Sy_n - Sx_p\| \\ &= [1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\|Sy_n - Sx_p\| \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|Sy_n - p\| &= \|(1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n - p\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|Tx_n - Tx_p\| + \beta_n\|Tz_n - Tx_p\| \\
&\leq (1 - \beta_n) \left\{ \lambda\|Sx_n - Sx_p\| + \mu \left(\frac{\|Sx_n - Tx_n\| \cdot \|Sx_p - Tx_p\|}{1 + \|Sx_n - Sx_p\|} \right) \right\} \quad (3.15) \\
&\quad + \beta_n \left\{ \lambda\|Sz_n - Sx_p\| + \mu \left(\frac{\|Sz_n - Tz_n\| \cdot \|Sx_p - Tx_p\|}{1 + \|Sz_n - Sx_p\|} \right) \right\} \\
&= \lambda(1 - \beta_n)\|Sx_n - Sx_p\| + \lambda\beta_n\|Sz_n - Sx_p\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
\|Sz_n - p\| &= \|(1 - \gamma_n)Sw_n + \gamma_nTw_n - p\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|Sw_n - Tx_p\| + \gamma_n\|Tw_n - Tx_p\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|Sw_n - Sx_p\| \quad (3.16) \\
&\quad + \gamma_n \left\{ \lambda\|Sw_n - Sx_p\| + \mu \left(\frac{\|Sw_n - Tw_n\| \cdot \|Sx_p - Tx_p\|}{1 + \|Sw_n - Sx_p\|} \right) \right\} \\
&= [1 - \gamma_n(1 - \lambda)]\|Sw_n - Sx_p\|
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|Sw_n - p\| &= \|(1 - \mu_n)Sx_n + \mu_nTx_n - p\| \\
&\leq (1 - \mu_n)\|Sx_n - Tx_p\| + \mu_n\|Tx_n - Tx_p\| \\
&\leq (1 - \mu_n)\|Sx_n - Sx_p\| \quad (3.17) \\
&\quad + \mu_n \left\{ \lambda\|Sx_n - Sx_p\| + \mu \left(\frac{\|Sx_n - Tx_n\| \cdot \|Sx_p - Tx_p\|}{1 + \|Sx_n - Sx_p\|} \right) \right\} \\
&= [1 - \mu_n(1 - \lambda)]\|Sx_n - Sx_p\|
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Sırasıyla (3.17) eşitsizliği (3.16)'da (3.16) eşitsizliği (3.15)'te ve (3.15) eşitsizliği de (3.14)'te yerine yazılıp $[1 - \mu_n(1 - \lambda)] \leq 1$ ve $[1 - \gamma_n(1 - \lambda)] \leq 1$ olduğu göz önüne alınarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\|Sx_{n+1} - p\| \leq \lambda[1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\|Sx_n - p\| \quad (3.18)$$

elde edilir.

(3.18)' de verilen eşitsizlikten;

$$\|Sx_n - p\| \leq \lambda[1 - \alpha_{n-1}(1 - \lambda)]\|Sx_{n-1} - p\|$$

$$\|Sx_{n-1} - p\| \leq \lambda[1 - \alpha_{n-2}(1 - \lambda)]\|Sx_{n-2} - p\|$$

$$\|Sx_{n-2} - p\| \leq \lambda[1 - \alpha_{n-3}(1 - \lambda)]\|Sx_{n-3} - p\|$$

⋮

$$\|Sx_1 - p\| \leq \lambda[1 - \alpha_0(1 - \lambda)]\|Sx_0 - p\|$$

olup yukarıda elde edilen eşitsizlikler yardımıyla

$$\|Sx_{n+1} - p\| \leq \lambda^{n+1} \prod_{i=0}^n [1 - \alpha_i(1 - \lambda)] \|Sx_0 - p\| \quad (3.19)$$

yazılabilir. $1 - x \leq e^{-x}$ eşitsizliğinden yararlanarak

$$\|Sx_{n+1} - p\| \leq \frac{\lambda^{n+1}}{e^{(1-\lambda)\sum_{i=0}^n \alpha_i}} \|Sx_0 - p\| \quad (3.20)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Sx_{n+1} - p\| = 0$ bulunur. Şimdi de p noktasının T ve S dönüşümlerinin tek ortak sabit noktası olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki T ve S 'nin p 'den farklı gibi bir çakışma noktası q olsun. O halde $Sx_q = Tx_q = q$ için

$$\begin{aligned}
0 \leq \|p - q\| &= \|Tx_p - Tx_q\| \\
&\leq \lambda \|Sx_p - Sx_q\| + \mu \left(\frac{\|Sx_p - Tx_p\| \cdot \|Sx_q - Tx_q\|}{1 + \|Sx_p - Sx_q\|} \right) \\
&\leq \lambda \|Sx_p - Sx_q\|
\end{aligned} \tag{3.21}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikten $p = q$ olduğu görülür. Dolayısı ile T ve S dönüşümlerinin yalnızca bir çakışma noktası vardır. T ve S dönüşümleri zayıf uyumlu ve $p = Tx_p = Sx_p$ olduğundan $TTp = TTx_p = TSx_p = STx_p$ eşitsizliğinden $Tp = Sp$ elde edilir. Çakışma noktası tek olduğundan $Tp = p$ olur. Bu nedenle $p = Tp = Sp$ olup bu eşitlik p 'nin T ve S dönüşümlerinin tek ortak sabit noktası olduğunu gösterir ve bu ise ispatı tamamlar.

Yukarıdaki teoremden verilen $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartı olmadan da yakınsama sonucunun elde edilebildiği aşağıdaki teoremden gösterilmiştir:

Teorem 3.19 X ve Y ile S ve T dönüşümleri $p = Tx_p = Sx_p$ olmak üzere Teorem 3.18'de olduğu gibi tanımlansın. Bu durumda (3.11) ile verilen yeni dört adımlı iterasyon yönteminden elde edilen $\{Sx_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi S ve T 'nin çakışma noktası olan p 'ye kuvvetli yakınsaktır. Ayrıca $Y = X$ ve T ile S dönüşümleri zayıf uyumlu ise p , T ve S dönüşümlerinin tek ortak sabit noktasıdır.

İspat. $\lambda < 1$ ve $\alpha_n \in [0,1]$ olduğundan $[1 - \alpha_n(1 - \lambda)] \leq 1$ elde edilir. Bu durumda (3.18) eşitsizliği kullanılarak

$$\|Sx_{n+1} - p\| \leq \lambda \|Sx_n - p\| \tag{3.22}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikten

$$\|Sx_{n+1} - p\| \leq \lambda^{n+1} \|Sx_0 - p\| \tag{3.23}$$

elde edilir. $\lambda < 1$ olduğu göz önüne alınır ve yukarıdaki eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Sx_{n+1} - p\| = 0$ bulunur. p 'nin T ve S dönüşümlerinin tek ortak sabit noktası olduğu Teorem 3.18'den görülebilir.

Teorem 3.20 X ve Y ile S ve T dönüşümleri $p = Tx_p = Sx_p$ olmak üzere Teorem 3.18'de olduğu gibi tanımlansın. (3.11) ile verilen yeni dört adımlı iterasyon yönteminden elde edilen $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartı ile p noktasına yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda iterasyon yöntemi (3.11) (S, T) -kararlıdır.

İspat. $\varepsilon_n = \|Sa_{n+1} - f(T, a_n)\|$ olmak üzere, kabul edelim ki $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olsun. Ayrıca $\{Sa_n\}_{n=0}^{\infty}$, X uzayında aşağıda verilen yöntemle elde edilen herhangi bir dizi olsun.

$$\begin{aligned} Sa_{n+1} &= (1 - \alpha_n)Sb_n + \alpha_n Tb_n \\ Sb_n &= (1 - \beta_n)Ta_n + \beta_n Tc_n \\ Sc_n &= (1 - \gamma_n)Sd_n + \gamma_n Td_n \\ Sd_n &= (1 - \mu_n)Sa_n + \mu_n Ta_n \end{aligned} \tag{3.24}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} Sa_n = p$ olduğu gösterilecektir. (3.13) ve (3.24) kullanılarak

$$\begin{aligned} \|Sd_n - p\| &= \|(1 - \mu_n)Sa_n + \mu_n Ta_n - p\| \\ &\leq (1 - \mu_n)\|Sa_n - p\| + \mu_n\|Tu_n - Tx_p\| \\ &\leq (1 - \mu_n)\|Sa_n - p\| \\ &\quad + \mu_n \left\{ \lambda \|Sa_n - Sx_p\| + \mu \left(\frac{\|Sa_n - Ta_n\| \cdot \|Sx_p - Tx_p\|}{1 + \|Sa_n - Sx_p\|} \right) \right\} \\ &= [1 - \mu_n(1 - \lambda)]\|Sa_n - p\| \end{aligned} \tag{3.25}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|Sc_n - p\| &= \|(1 - \gamma_n)Sd_n + \gamma_nTd_n - p\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|Sd_n - p\| + \gamma_n\|Td_n - Tx_p\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|Sd_n - p\| \\
&\quad + \gamma_n \left\{ \lambda\|Sd_n - p\| + \mu \left(\frac{\|Sd_n - Td_n\| \cdot \|Sx_p - Tx_p\|}{1 + \|Sd_n - Sx_p\|} \right) \right\} \\
&\leq [1 - \gamma_n(1 - \lambda)]\|Sd_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\|Sb_n - p\| &= \|(1 - \beta_n)Ta_n + \beta_nTc_n - p\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|Ta_n - p\| + \beta_n\|Tc_n - Tx_p\| \\
&\leq (1 - \beta_n) \left\{ \lambda\|Sa_n - p\| + \mu \left(\frac{\|Sa_n - Ta_n\| \cdot \|Sx_p - Tx_p\|}{1 + \|Sa_n - Sx_p\|} \right) \right\} \\
&\quad + \beta_n \left\{ \lambda\|Sc_n - p\| + \mu \left(\frac{\|Sc_n - Tc_n\| \cdot \|Sx_p - Tx_p\|}{1 + \|Sc_n - Sx_p\|} \right) \right\} \\
&= (1 - \beta_n)\lambda\|Sa_n - p\| + \beta_n\lambda\|Sc_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.27}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|Sa_{n+1} - p\| &\leq \|Sa_{n+1} - f(T, a_n)\| + \|f(T, a_n) - p\| \\
&\leq \varepsilon_n + \|Sa_{n+1} - p\| \\
&\leq \varepsilon_n + (1 - \alpha_n)\|Sb_n - p\| + \alpha_n\|Tb_n - p\| \\
&\leq \varepsilon_n + (1 - \alpha_n)\|Sb_n - p\| \\
&\quad + \alpha_n \left\{ \lambda\|Sb_n - p\| + \mu \left(\frac{\|Sb_n - Tb_n\| \cdot \|Sx_p - Tx_p\|}{1 + \|Sb_n - Sx_p\|} \right) \right\} \\
&= \varepsilon_n + [1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\|Sb_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.28}$$

elde edilir. Sırasıyla (3.25) eşitsizliği (3.26)'da (3.26) eşitsizliği (3.27)'de ve (3.27) eşitsizliği de (3.28)'de yerine yazılıp $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \mu_n \in [0,1]$ olduğu göz önüne alınarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\|Sa_{n+1} - p\| \leq \varepsilon_n + \lambda[1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\|Sa_n - p\|$$

elde edilir. Lemma 3.15'ten $\lim_{n \rightarrow \infty} Sa_n = p$ olduğu görülür.

Tersine $\lim_{n \rightarrow \infty} Sa_{n+1} = p$ olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \|Sa_{n+1} - f(T, a_n)\| \\ &\leq \|Sa_{n+1} - p\| + \|f(T, a_n) - p\| \\ &\leq \|Sa_{n+1} - p\| + (1 - \alpha_n)\|Sb_n - p\| + \alpha_n\|Tb_n - p\| \end{aligned} \tag{3.29}$$

(3.25)-(3.28)'de yapılan işlemler kullanılarak (3.29) eşitsizliğinden

$$\varepsilon_n \leq \|Sa_{n+1} - p\| + \lambda[1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\|Sa_n - p\|$$

elde edilir. Yukarıda verilen eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olduğu görülür.

Örnek 3.21 $X = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ Banach uzayı ve $Y = [0,1]$ olmak üzere $S, T: Y \rightarrow X$ dönüşümleri sırasıyla $Sx = \frac{1}{5}\sin 2x$ ve $Tx = \frac{1}{10}\sin^2 x$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda S ve T 'nin (3.13) şartını sağlayan ve $p = 0$ tek ortak sabit noktasına sahip dönüşüm çifti olduğu görülebilir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \mu_n = \frac{1}{n+1}$ olmak üzere (3.11) ile verilen yeni dört adımlı Jungck tipindeki iterasyon yöntemi S ve T için yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{1}{2} \sin^{-1} \left[\left(\frac{n}{n+1} \right) \sin 2y_n + \frac{1}{2(n+1)} \sin^2 y_n \right] \\
y_n &= \frac{1}{2} \sin^{-1} \left[\left(\frac{n}{2(n+1)} \right) \sin^2 x_n + \frac{1}{2(n+1)} \sin^2 z_n \right] \\
z_n &= \frac{1}{2} \sin^{-1} \left[\left(\frac{n}{n+1} \right) \sin 2w_n + \frac{1}{2(n+1)} \sin^2 w_n \right] \\
w_n &= \frac{1}{2} \sin^{-1} \left[\left(\frac{n}{n+1} \right) \sin 2x_n + \frac{1}{2(n+1)} \sin^2 x_n \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda verilen eşitlikten elde edilecek $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin $p = 0$ noktasına yakınsak olduğu Teorem 3.18'den görülebilir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{Sa_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $Sa_n = \left(\frac{1}{n+5}\right)$ şeklinde seçilirse $\lim_{n \rightarrow \infty} |Sx_n - Sa_n| = 0$ olur. Dolayısıyla $\{Sa_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ 'in bir yaklaşım dizisi olur. Ayrıca S ve T dönüşümleri kullanılarak (3.24) ile verilen iterasyon yöntemi yeniden yazılırsa:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{2} \sin^{-1} \left[\left(\frac{n}{n+1} \right) \sin 2b_n + \frac{1}{2(n+1)} \sin^2 b_n \right] \\
b_n &= \frac{1}{2} \sin^{-1} \left[\left(\frac{n}{2(n+1)} \right) \sin^2 a_n + \frac{1}{2(n+1)} \sin^2 c_n \right] \\
c_n &= \frac{1}{2} \sin^{-1} \left[\left(\frac{n}{n+1} \right) \sin 2d_n + \frac{1}{2(n+1)} \sin^2 d_n \right] \\
d_n &= \frac{1}{2} \sin^{-1} \left[\left(\frac{n}{n+1} \right) \sin 2a_n + \frac{1}{2(n+1)} \sin^2 a_n \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left[\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \sin^2 a_n \\ &+ \frac{n}{2(n+1)^2} \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{n}{n+1} \right) u_1 + \frac{1}{2(n+1)} \sin^2 \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} u_1 \right) \right\} \\ &+ \frac{1}{2(n+1)} \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} \sin^{-1} \left\{ \frac{n}{2(n+1)} \sin^2 a_n + \frac{1}{2(n+1)} \sin^2 \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} u_2 \right) \right\} \right\} \end{aligned} \right]$$

elde edilir. Burada

$$u_1 = \left(\frac{n}{n+1} \right) \sin 2a_n + \frac{1}{2(n+1)} \sin^2 a_n$$

ve

$$u_2 = \left(\frac{n}{n+1}\right)u_1 + \frac{1}{2(n+1)}\sin^2\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}u_1\right)$$

eşitlikleriyle tanımlıdır. $\varepsilon_n = |Sa_{n+1} - f(T, a_n)|$ şeklinde seçilirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{1}{n+6}\right) - f(T, a_n) \right| = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olduğu görülür.

Teorem 3.22 X ve Y ile S ve T dönüşümleri $p = Tx_p = Sx_p$ olmak üzere Teorem 3.18’de olduğu gibi tanımlansın. $x_0 = u_0 \in Y$ olmak üzere $\alpha_1 < \alpha_n \leq 1$ şartı altında (3.11) ile verilen yeni dört adımlı iterasyon yönteminden elde edilen $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi ile (3.6) ile verilen Jungck-CR iterasyon yönteminden elde edilen $\{Su_n\}$ dizisi göz önüne alınsın. $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p noktasına $\{Su_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine göre daha hızlı yakınsar.

İspat. (3.19) ile verilen eşitsizlikten

$$\|Sx_{n+1} - p\| \leq \lambda^{n+1} \prod_{i=0}^n [1 - \alpha_i(1 - \lambda)] \|Sx_0 - p\| \quad (3.30)$$

yazılabilir. Ayrıca Jungck-CR iterasyon yöntemi için

$$\begin{aligned} \|Sw_n - p\| &= \|(1 - \gamma_n)Su_n + \gamma_n Tu_n - p\| \\ &\leq (1 - \gamma_n) \|Su_n - p\| + \gamma_n \|Tu_n - Tx_p\| \\ &\leq (1 - \gamma_n) \|Su_n - p\| \\ &\quad + \gamma_n \left\{ \lambda \|Su_n - Sx_p\| + \mu \left(\frac{\|Su_n - Tu_n\| \cdot \|Sx_p - Tx_p\|}{1 + \|Su_n - Sx_p\|} \right) \right\} \\ &= (1 - \gamma_n(1 - \lambda)) \|Su_n - p\| \end{aligned} \quad (3.31)$$

ve

$$\|Sv_n - p\| = \|(1 - \beta_n)Tu_n + \beta_n Tw_n - p\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - \beta_n) \|Tu_n - p\| + \beta_n \|Tw_n - Tx_p\| \\
&\leq (1 - \beta_n) \|Tu_n - p\| \\
&\quad + \beta_n \left\{ \lambda \|Sw_n - Sx_p\| + \mu \left(\frac{\|Sw_n - Tw_n\| \cdot \|Sx_p - Tx_p\|}{1 + \|Sw_n - Sx_p\|} \right) \right\} \\
&= (1 - \beta_n) \lambda \|Su_n - p\| + \beta_n \lambda \|Sw_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.32}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|Su_{n+1} - p\| &= \|(1 - \alpha_n)Sv_n + \alpha_n Tv_n - p\| \\
&\leq (1 - \alpha_n) \|Sv_n - p\| + \alpha_n \|Tv_n - Tx_p\| \\
&\leq (1 - \alpha_n) \|Sv_n - p\| \\
&\quad + \alpha_n \left\{ \lambda \|Sv_n - Sx_p\| + \mu \left(\frac{\|Sv_n - Tv_n\| \cdot \|Sx_p - Tx_p\|}{1 + \|Sv_n - Sx_p\|} \right) \right\} \\
&= [1 - \alpha_n(1 - \lambda)] \|Sv_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.33}$$

elde edilir. Sırasıyla (3.31) eşitsizliği (3.32)'de ve (3.32) eşitsizliği de (3.33)'te yerine yazılıp $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ olduğu göz önüne alınır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\|Su_{n+1} - p\| \leq [1 - \alpha_n(1 - \lambda)] \|Su_n - p\|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte tümevarım uygulanırsa

$$\|Su_{n+1} - p\| \leq \prod_{i=0}^n [1 - \alpha_i(1 - \lambda)] \|Su_0 - p\| \tag{3.34}$$

elde edilir. $\alpha_1 < \alpha_n \leq 1$ kabulü (3.30) ve (3.34) eşitsizliklerine uygulanırsa

$$\|Sx_{n+1} - p\| \leq \lambda^{n+1} \|Sx_0 - p\| \cdot [1 - \alpha_1(1 - \lambda)]^{n+1}$$

$$\|Su_{n+1} - p\| \leq \|Su_0 - p\| [1 - \alpha_1(1 - \lambda)]^{n+1}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

$$a_n = \lambda^{n+1} \|Sx_0 - p\| [1 - \alpha_1(1 - \lambda)]^{n+1}$$

$$b_n = \|Su_0 - p\| [1 - \alpha_1(1 - \lambda)]^{n+1}$$

şeklinde tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \psi_n &= \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lambda^{n+1} \|Sx_0 - p\| \cdot [1 - \alpha_1(1 - \lambda)]^{n+1}}{\|Su_0 - p\| [1 - \alpha_1(1 - \lambda)]^{n+1}} \\ &= \lambda^{n+1} < 1 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = 0$ elde edilir. Tanım 3.12'den $\{Sx_n\}$ dizisi p noktasına $\{Su_n\}$ dizisine göre daha hızlı yakınsar.

Aşağıda verilen örnekler yeni tanımlamış olduğumuz iterasyon yönteminin bu tez çalışmasında verilen diğer Jungck tipindeki yöntemlere göre uygun koşullar altında daha yüksek bir yakınsama hızına sahip olduğunu göstermektedir:

Örnek 3.23 $Y = [0,1]$ olmak üzere $T, S: [0,1] \rightarrow [0, \frac{1}{5}]$, $Tx = \frac{x}{12}$ ve $Sx = \frac{x}{5}$ şeklinde tanımlansın. $T0 = S0 = 0$ olup $T([0,1]) \subseteq S([0,1])$ olduğu açıktır. (S, T) dönüşüm çifti $\lambda = 0.5$ ve $\mu = \frac{7}{64}$ için (3.13) ile verilen şartı sağlar. $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \mu_n = a_n = b_n = c_n = \frac{1}{10}$ olmak üzere (3.2)-(3.9) eşitlikleriyle verilen Jungck tipindeki iterasyon yöntemleri ve (3.11) ile verilen yeni dört adımlı Jungck tipindeki iterasyon yönteminin $x_0 = 0.48$ başlangıç koşulu için $p = T0 = S0 = 0$ noktasına yakınsamaları Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2'de gösterilmiştir.

Çizelge 3. 1. $x_0 = 0.48$ başlangıç noktası için yeni iterasyon yöntemi ve JCR, JS ile JA iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışları.

x_n	Yeni İterasyon (3.13)	JCR	JS	JA
x_1	0.48	0.48	0.48	0.48
x_2	0.18620019675926	0.18723472222222	0.18833333333333	0.19883333333333
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{24}	0.00000000016682	0.00000000018949	0.00000000021678	0.00000000075500
x_{25}	0.00000000006471	0.00000000007391	0.00000000008506	0.00000000031275
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{34}	0.000000000000001	0.000000000000002	0.000000000000002	0.000000000000011
x_{35}	0.000000000000000	0.000000000000001	0.000000000000001	0.000000000000005
x_{36}	$\vdots$	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000002
x_{37}	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0.000000000000001
x_{38}	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0.000000000000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Çizelge 3. 2. $x_0 = 0.48$ başlangıç noktası için JSP, JK, JN, JI ve JM iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışları.

x_n	JSP	JK	JN	JI	JM
x_1	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48
x_2	0.40080472222222	0.42161805555556	0.45078472222222	0.45083333333333	0.45200000000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{179}	0.00000000000001	0.00000000004528	0.00000671145338	0.00000684151647	0.00001083783116
x_{180}	0.00000000000000	0.00000000003977	0.00000630295968	0.00000642579933	0.00001020562434
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{249}	$\vdots$	0.00000000000001	0.0000008275099	0.0000008499377	0.00000016134154
x_{250}	$\vdots$	0.00000000000000	0.00000007771433	0.00000007982922	0.00000015192995
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{513}	$\vdots$	$\vdots$	0.00000000000001	0.00000000000001	0.00000000000002
x_{514}	$\vdots$	$\vdots$	0.00000000000000	0.00000000000001	0.00000000000002
x_{515}	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0.00000000000000	0.00000000000002
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{537}	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0.00000000000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2’den aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir:

- (3.11) ile verilen yeni tanımlamış olduğumuz dört adımlı iterasyon yöntemi 35. adımda sabit noktaya ulaşırken
- (3.2) ile verilen Jungck-Mann iterasyon yöntemi 537. adımda,
- (3.3) ile verilen Jungck-Ishikawa iterasyon yöntemi 515. adımda,
- (3.4) ile verilen Jungck-Noor iterasyon yöntemi 514. adımda,
- (3.5) ile verilen Jungck-SP iterasyon algoritması 180. adımda,
- (3.6) ile verilen Jungck-CR iterasyon algoritması 36. adımda,
- (3.7) ile verilen Jungck-Agarwal iterasyon algoritması 38. adımda,
- (3.8) ile verilen Jungck-Sahu iterasyon algoritması 36. adımda ve
- (3.9) ile verilen Jungck-Khan iterasyon yöntemi 250. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Örnek 3.24 $Y = [0.5, 1.5]$ olmak üzere $T, S: [0.5, 1.5] \rightarrow [1, 81]$, $Tx = x^8 + 24x^3 - 44x^2 + 35$ ve $Sx = 16x^4$ şeklinde tanımlansın. $T1 = S1 = 16$ olup $T([0.5, 1.5]) \subseteq S([0.5, 1.5])$ olduğu açıktır. (S, T) dönüşüm çifti $\lambda = 0.4$ ve $\mu = 0.2$ için (3.13) ile verilen şartı sağlar. $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \mu_n = a_n = b_n = c_n = \frac{3}{20}$ olmak üzere (3.2)-(3.9) eşitlikleriyle verilen Jungck tipindeki iterasyon yöntemleri ve (3.11) ile verilen yeni dört adımlı Jungck tipindeki iterasyon yönteminin $x_0 = 0.75$ başlangıç koşulu için $p = T1 = S1 = 16$ noktasına yakınsamaları Çizelge 3.3 ve Çizelge 3.4’te gösterilmiştir.

Çizelge 3. 3. $x_0 = 0.75$ başlangıç noktası için yeni iterasyon ile JCR, JS, JA ve JSP iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışları.

x_n	Yeni İterasyon (3.13)	JCR	JS	JA	JSP
x_1	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
x_2	1.05295512496838	1.05414377123399	1.04466023384367	1.06137648831351	0.87897378710221
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{11}	0.99999999994918	0.99999999994220	0.99999999993357	0.999999999978115	0.99820409366943
x_{12}	1.00000000000533	1.00000000000615	1.00000000000718	1.00000000002691	0.99883957379660
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{15}	0.99999999999999	1.00000000000007	1.00000000000008	1.00000000000041	0.99968608635441
x_{16}	1.00000000000000	0.99999999999999	0.99999999999999	0.99999999999995	0.99979688882405
x_{17}	$\vdots$	1.00000000000000	1.00000000000000	1.00000000000001	0.99986856789305
x_{18}	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	1.00000000000000	0.99991494544177
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{72}	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	1.00000000000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Çizelge 3. 4. $x_0 = 0.75$ başlangıç noktası için JK, JN, JI ve JM iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışları.

x_n	JK	JN	JI	JM
x_1	0.75	0.75	0.75	0.75
x_2	0.85315042838595	0.80608101051239	0.80567837352895	0.81072049020377
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{100}	0.99999999999999	0.99999989267722	0.99999989187984	0.99999991939256
x_{101}	1.00000000000000	0.99999990695173	0.99999990625712	0.99999993027457
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{213}	$\vdots$	0.99999999999999	0.99999999999999	0.99999999999999
x_{214}	$\vdots$	0.99999999999999	0.99999999999999	1.00000000000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{217}	$\vdots$	0.99999999999999	0.99999999999999	$\vdots$
x_{218}	$\vdots$	1.00000000000000	1.00000000000000	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Çizelge 3.3 ve Çizelge 3.4'ten aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir:

- (3.11) ile verilen yeni tanımlamış olduğumuz dört adımlı iterasyon yöntemi 16. adımda sabit noktaya ulaşırken
- (3.2) ile verilen Jungck-Mann iterasyon yöntemi 214. adımda,
- (3.3) ile verilen Jungck-Ishikawa iterasyon yöntemi 218. adımda,
- (3.4) ile verilen Jungck-Noor iterasyon yöntemi 218. adımda,
- (3.5) ile verilen Jungck-SP iterasyon algoritması 72. adımda,
- (3.6) ile verilen Jungck-CR iterasyon algoritması 17. adımda,
- (3.7) ile verilen Jungck-Agarwal iterasyon algoritması 18. adımda,
- (3.8) ile verilen Jungck-Sahu iterasyon algoritması 17. adımda ve
- (3.9) ile verilen Jungck-Khan iterasyon yöntemi 101. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Teorem 3.25 X ve Y ile S ve T dönüşümleri $p = Tx_p = Sx_p$ olmak üzere Teorem 3.18'de olduğu gibi tanımlansın. Kabul edelim ki $S_1, T_1: Y \rightarrow X$ dönüşümleri $T_1x_p = S_1x_p = q$ ve her $x \in Y$ için $\|Tx - T_1x\| \leq \varepsilon_1$ ve $\|Sx - S_1x\| \leq \varepsilon_2$ koşullarını sağlayan ε_1 ve ε_2 için sırasıyla S ve T 'nin yaklaşım operatörleri olsun. (3.11) ile verilen yeni iterasyon yönteminden elde edilen $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini $\frac{1}{2} \leq \alpha_n$ şartıyla göz önüne alalım. Ayrıca $\{Se_n\}_{n=0}^{\infty}$ aşağıdaki yöntemle elde edilen bir dizi olsun:

$$\begin{aligned} S_1e_{n+1} &= (1 - \alpha_n)S_1f_n + \alpha_nT_1f_n \\ S_1f_n &= (1 - \beta_n)T_1e_n + \beta_nT_1g_n \\ S_1g_n &= (1 - \gamma_n)S_1h_n + \gamma_nT_1h_n \\ S_1h_n &= (1 - \mu_n)S_1e_n + \mu_nT_1e_n \end{aligned} \tag{3.35}$$

Eğer $n \rightarrow \infty$ için $\{Se_n\}_{n=0}^{\infty} \rightarrow q$ ise, bu durumda

$$\|p - q\| \leq \frac{7\varepsilon_1 + 9\varepsilon_2}{1 - \lambda}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. (3.11), (3.13) ve (3.35) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|Sw_n - S_1h_n\| &= \|(1 - \mu_n)Sx_n + \mu_nTx_n - (1 - \mu_n)S_1e_n - \mu_nT_1e_n\| \\
&\leq (1 - \mu_n)\|Sx_n - S_1e_n\| + \mu_n\|Tx_n - T_1e_n\| \\
&\leq (1 - \mu_n)\|Sx_n - Se_n\| + (1 - \mu_n)\|Se_n - S_1e_n\| \\
&\quad + \mu_n\|Tx_n - Te_n\| + \mu_n\|Te_n - T_1e_n\| \\
&\leq (1 - \mu_n)\|Sx_n - Se_n\| + (1 - \mu_n)\varepsilon_2 \\
&\quad + \mu_n\|Tx_n - Te_n\| + \mu_n\varepsilon_1
\end{aligned} \tag{3.36}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\|Tx_n - Te_n\| \leq \lambda\|Sx_n - Se_n\| + \mu \left(\frac{\|Sx_n - Tx_n\| \cdot \|Se_n - Te_n\|}{1 + \|Sx_n - Se_n\|} \right)$$

olup

$$A_1 = \left(\frac{\|Sx_n - Tx_n\| \cdot \|Se_n - Te_n\|}{1 + \|Sx_n - Se_n\|} \right)$$

denirse

$$\|Tx_n - Te_n\| \leq \lambda\|Sx_n - Se_n\| + \mu A_1 \tag{3.37}$$

yazılabilir. (3.37) eşitsizliği (3.36)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\|Sw_n - S_1h_n\| &\leq [1 - \mu_n(1 - \lambda)]\|Sx_n - Se_n\| + \mu_n\mu A_1 \\
&\quad + (1 - \mu_n)\varepsilon_2 + \mu_n\varepsilon_1
\end{aligned} \tag{3.38}$$

olur. Benzer şekilde ;

$$\begin{aligned}
\|Sz_n - S_1g_n\| &= \|(1 - \gamma_n)Sw_n + \gamma_nTw_n - (1 - \gamma_n)S_1h_n - \gamma_nT_1h_n\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|Sw_n - Sh_n\| + (1 - \gamma_n)\|Sh_n - S_1h_n\| \\
&\quad + \gamma_n\|Tw_n - Th_n\| + \gamma_n\|Th_n - T_1h_n\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|Sw_n - Sh_n\| + (1 - \gamma_n)\varepsilon_2 \\
&\quad + \gamma_n\|Tw_n - Th_n\| + \gamma_n\varepsilon_1
\end{aligned} \tag{3.39}$$

ve

$$\|Tw_n - Th_n\| \leq \lambda \|Sw_n - Sh_n\| + \mu \left(\frac{\|Sw_n - Tw_n\| \cdot \|Sh_n - Th_n\|}{1 + \|Sw_n - Sh_n\|} \right) \quad (3.40)$$

yazılabilir.

$$A_2 = \left(\frac{\|Sw_n - Tw_n\| \cdot \|SL_n - TL_n\|}{1 + \|Sw_n - SL_n\|} \right)$$

denirse

$$\|Tw_n - Th_n\| \leq \lambda \|Sw_n - Sh_n\| + \mu A_2 \quad (3.41)$$

olur. (3.41) eşitsizliği (3.39)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \|Sz_n - S_1 g_n\| &\leq [1 - \gamma_n(1 - \lambda)] \|Sw_n - Sh_n\| \\ &\quad + \gamma_n \mu A_2 + (1 - \gamma_n) \varepsilon_2 + \gamma_n \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (3.42)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|Sw_n - Sh_n\| &\leq \|Sw_n - S_1 h_n\| + \|S_1 h_n - Sh_n\| \\ &\leq \|Sw_n - S_1 h_n\| + \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

olup (3.43) eşitsizliği (3.42)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \|Sz_n - S_1 g_n\| &\leq [1 - \gamma_n(1 - \lambda)] \|Sw_n - S_1 h_n\| \\ &\quad + [1 - \gamma_n(1 - \lambda)] \varepsilon_2 + \gamma_n \mu A_2 + (1 - \gamma_n) \varepsilon_2 + \gamma_n \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (3.44)$$

elde edilir. (3.38) eşitsizliği (3.44) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \|Sz_n - S_1 g_n\| &\leq [1 - \mu_n(1 - \lambda)] [1 - \gamma_n(1 - \lambda)] \|Sx_n - Se_n\| \\ &\quad + [1 - \gamma_n(1 - \lambda)] \mu_n \mu A_1 + [1 - \gamma_n(1 - \lambda)] (1 - \mu_n) \varepsilon_2 \\ &\quad + [1 - \gamma_n(1 - \lambda)] \mu_n \varepsilon_1 + [1 - \gamma_n(1 - \lambda)] \varepsilon_2 + \gamma_n \mu A_2 \\ &\quad + (1 - \gamma_n) \varepsilon_2 + \gamma_n \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (3.45)$$

elde edilir. Benzer bir yaklaşımla

$$\begin{aligned}
\|Sy_n - S_1f_n\| &= \|(1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n - (1 - \beta_n)T_1e_n - \beta_nT_1g_n\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|Tx_n - Te_n\| + (1 - \beta_n)\|Te_n - T_1e_n\| \\
&\quad + \beta_n\|Tz_n - Tg_n\| + \beta_n\|Tg_n - T_1g_n\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|Tx_n - Te_n\| + (1 - \beta_n)\varepsilon_1 + \\
&\quad + \beta_n\|Tz_n - Tg_n\| + \beta_n\varepsilon_1
\end{aligned} \tag{3.46}$$

olup

$$\|Tz_n - Tg_n\| \leq \lambda\|Sz_n - Sg_n\| + \mu \left(\frac{\|Sz_n - Tz_n\| \cdot \|Sg_n - Tg_n\|}{1 + \|Sz_n - Sg_n\|} \right) \tag{3.47}$$

yazılabilir.

$$A_3 = \left(\frac{\|Sx_n - Tx_n\| \cdot \|Su_n - Tu_n\|}{1 + \|Sx_n - Su_n\|} \right)$$

denirse;

$$\|Tz_n - Tg_n\| \leq \lambda\|Sz_n - Sg_n\| + \mu A_3 \tag{3.48}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|Sz_n - Sg_n\| &\leq \|Sz_n - S_1g_n\| + \|S_1g_n - Sg_n\| \\
&\leq \|Sz_n - S_1g_n\| + \varepsilon_2
\end{aligned} \tag{3.49}$$

olup (3.49) eşitsizliği (3.48)'de yerine yazılırsa

$$\|Tz_n - Tg_n\| \leq \lambda\|Sz_n - S_1g_n\| + \lambda\varepsilon_2 + \mu A_3 \tag{3.50}$$

elde edilir. (3.45) eşitsizliği (3.50)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\|Tz_n - Tg_n\| &\leq \lambda\|Sz_n - S_1g_n\| + \lambda\varepsilon_2 + \mu A_3 \\
&\leq \lambda[1 - \mu_n(1 - \lambda)][1 - \gamma_n(1 - \lambda)]\|Sx_n - Se_n\| \\
&\quad + \lambda[1 - \gamma_n(1 - \lambda)]\mu_n\mu A_1 + \lambda[1 - \gamma_n(1 - \lambda)](1 - \mu_n)\varepsilon_2 \\
&\quad + \lambda[1 - \gamma_n(1 - \lambda)]\mu_n\varepsilon_1 + \lambda[1 - \gamma_n(1 - \lambda)]\varepsilon_2
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$+ \gamma_n \lambda \mu A_2 + \lambda(1 - \gamma_n) \varepsilon_2 + \gamma_n \lambda \varepsilon_1 + \lambda \varepsilon_2 + \mu A_3$$

elde edilir. Ayrıca

$$\|Tx_n - Te_n\| \leq \lambda \|Sx_n - Se_n\| + \mu \left(\frac{\|Sx_n - Tx_n\| \cdot \|Se_n - Te_n\|}{1 + \|Sx_n - Se_n\|} \right) \quad (3.52)$$

olup

$$A_4 = \left(\frac{\|Sx_n - Tx_n\| \cdot \|Se_n - Te_n\|}{1 + \|Sx_n - Se_n\|} \right)$$

denirse

$$\|Tx_n - Te_n\| \leq \lambda \|Sx_n - Se_n\| + \mu A_4 \quad (3.53)$$

olur. (3.51) ve (3.53) eşitsizlikleri (3.46)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \|Sy_n - S_1 f_n\| &\leq (1 - \beta_n) \lambda \|Sx_n - Se_n\| + (1 - \beta_n) \mu A_4 + \varepsilon_1 \\ &\quad + \beta_n \lambda [1 - \mu_n(1 - \lambda)] [1 - \gamma_n(1 - \lambda)] \|Sx_n - Se_n\| \\ &\quad + \beta_n \lambda [1 - \gamma_n(1 - \lambda)] \mu_n \mu A_1 + \beta_n \gamma_n \lambda \mu A_2 + \beta_n \mu A_3 \\ &\quad + \beta_n \lambda [1 - \gamma_n(1 - \lambda)] (1 - \mu_n) \varepsilon_2 \\ &\quad + \beta_n \lambda [1 - \gamma_n(1 - \lambda)] \mu_n \varepsilon_1 + \beta_n \lambda [1 - \gamma_n(1 - \lambda)] \varepsilon_2 \\ &\quad + \beta_n \lambda (1 - \gamma_n) \varepsilon_2 + \beta_n \gamma_n \lambda \varepsilon_1 + \beta_n \lambda \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (3.54)$$

elde edilir. Benzer düşünceyle

$$\begin{aligned} \|Sx_{n+1} - S_1 e_{n+1}\| &= \|(1 - \alpha_n) Sy_n + \alpha_n Ty_n - (1 - \alpha_n) S_1 f_n - \alpha_n T_1 f_n\| \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|Sy_n - S_1 f_n\| + (1 - \alpha_n) \|S_1 f_n - T_1 f_n\| \\ &\quad + \alpha_n \|Ty_n - T_1 f_n\| + \alpha_n \|T_1 f_n - T_1 f_n\| \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|Sy_n - S_1 f_n\| + (1 - \alpha_n) \varepsilon_2 \\ &\quad + \alpha_n \|Ty_n - T_1 f_n\| + \alpha_n \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (3.55)$$

olup

$$\|Ty_n - Tf_n\| \leq \lambda \|Sy_n - Sf_n\| + \mu \left(\frac{\|Sy_n - Ty_n\| \cdot \|Sf_n - Tf_n\|}{1 + \|Sz_n - Sg_n\|} \right) \quad (3.56)$$

yazılabilir.

$$A_5 = \left(\frac{\|Sy_n - Ty_n\| \cdot \|Sf_n - Tf_n\|}{1 + \|Sz_n - Sg_n\|} \right)$$

denirse

$$\|Ty_n - Tf_n\| \leq \lambda \|Sy_n - Sf_n\| + \mu A_5 \quad (3.57)$$

olur. (3.57) eşitsizliği (3.55)'te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \|Sx_{n+1} - S_1e_{n+1}\| &\leq [1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\|Sy_n - Sf_n\| \\ &\quad + (1 - \alpha_n)\varepsilon_2 + \alpha_n\varepsilon_1 + \alpha_n \mu A_5 \end{aligned} \quad (3.58)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|Sy_n - Sf_n\| &\leq \|Sy_n - S_1f_n\| + \|S_1f_n - Sf_n\| \\ &\leq \|Sy_n - S_1f_n\| + \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (3.59)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \|Sx_{n+1} - S_1e_{n+1}\| &\leq [1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\|Sy_n - S_1f_n\| \\ &\quad + [1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\varepsilon_2 + (1 - \alpha_n)\varepsilon_2 + \alpha_n\varepsilon_1 + \alpha_n \mu A_5 \end{aligned} \quad (3.60)$$

olur. (3.54) eşitsizliği (3.60)'ta yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \|Sx_{n+1} - S_1e_{n+1}\| &\leq [1 - \alpha_n(1 - \lambda)](1 - \beta_n)\lambda \|Sx_n - Se_n\| \\ &\quad + [1 - \alpha_n(1 - \lambda)](1 - \beta_n)\mu A_4 + [1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\varepsilon_1 \\ &\quad + [1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\beta_n\lambda [1 - \mu_n(1 - \lambda)][1 - \gamma_n(1 - \lambda)]\|Sx_n - Se_n\| \\ &\quad + [1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\beta_n\lambda [1 - \gamma_n(1 - \lambda)]\mu_n\mu A_1 \\ &\quad + [1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\beta_n\gamma_n\lambda \mu A_2 + [1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\beta_n\mu A_3 \\ &\quad + [1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\beta_n\lambda [1 - \gamma_n(1 - \lambda)](1 - \mu_n)\varepsilon_2 \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned}
& +[1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\beta_n\lambda[1 - \gamma_n(1 - \lambda)]\mu_n\varepsilon_1 \\
& +[1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\beta_n\lambda[1 - \gamma_n(1 - \lambda)]\varepsilon_2 \\
& +[1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\beta_n\lambda(1 - \gamma_n)\varepsilon_2 \\
& +[1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\beta_n\gamma_n\lambda\varepsilon_1 + [1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\beta_n\lambda\varepsilon_2 \\
& +[1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\varepsilon_2 + (1 - \alpha_n)\varepsilon_2 + \alpha_n\varepsilon_1 + \alpha_n\mu A_5
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|Sx_n - Se_n\| & \leq \|Sx_n - S_1e_n\| + \|S_1e_n - Se_n\| \\
& \leq \|Sx_n - S_1e_n\| + \varepsilon_2
\end{aligned} \tag{3.62}$$

olup (3.62) eşitsizliği (3.61)'de yerine yazılıp $\frac{1}{2} \leq \alpha_n$ ile $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \mu_n \in [0,1]$ ve $\lambda < 1$ olduğu göz önüne alınarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\|Sx_{n+1} - S_1e_{n+1}\| & \leq [1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\|Sx_n - S_1e_n\| \\
& + \alpha_n(1 - \lambda) \left\{ \frac{7\varepsilon_1 + 9\varepsilon_2 + 2(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5)}{1 - \lambda} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) = 0$ olduğu açıktır. Bu gerçekten hareketle

$$\begin{aligned}
s_n & = \|Sx_n - S_1e_n\| \\
\theta_n & = \alpha_n(1 - \lambda) \in (0,1) \\
\phi_n & = \left\{ \frac{7\varepsilon_1 + 9\varepsilon_2 + 2(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5)}{1 - \lambda} \right\}
\end{aligned}$$

şeklinde seçilirse Lemma 3.16'nın şartları sağlanır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
0 & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|Sx_n - S_1e_n\| \\
& \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left\{ \frac{7\varepsilon_1 + 9\varepsilon_2 + 2(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5)}{1 - \lambda} \right\} \\
& = \frac{7\varepsilon_1 + 9\varepsilon_2}{1 - \lambda}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

yazılabilir. Bu ise ispatı tamamlar.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde sabit nokta teorisinin tarihsel gelişimi hakkında bilgi verilmiş olup ikinci bölümde ise tez boyunca kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Banach Daralma İlkesinin genellemelerinden biri olan Jungck- Daralma İlkesinde ortaya konulan yaklaşım altında klasik sabit nokta iterasyon yöntemlerinin Jungck tipinde yeniden tanımlanmasıyla oluşan literatür verilmiş ve yeni dört adımlı Jungck-tipindeki iterasyon yöntemi (3.11) eşitliğiyle tanımlanmıştır. Tanım 3.14'teki şartları sağlayan dönüşüm çifti için (3.11) ile verilen yeni iterasyon yönteminden elde edilen dizinin herhangi bir Banach uzayında kuvvetli yakınsaklığının analizi Teorem 3.18-Teorem 3.19 ile, kararlılık sonucu Teorem 3.20 ile verilmiştir. Örnek 3.21 ile elde edilen bu kararlılık sonucu nümerik olarak gösterilmiştir. Ayrıca yeni iterasyon yönteminin literatürde mevcut olan diğer Jungck-tipindeki yöntemlerle karşılaştırıldığında daha iyi bir yakınsama hızına sahip olduğu Teorem 3.22'de ispatlanmış ve bu sonucu desteklemek amacıyla lineer ve lineer olmayan dönüşümler kullanılarak sırasıyla Örnek 3.23 ve Örnek 3.24'te elde edilen sonuçlar Çizelge 3.1-Çizelge 3.4'te verilmiştir. Son olarak Tanım 3. 14'teki şartları sağlayan zayıf uyumlu dönüşümlerin tek olan ortak sabit noktasının veri bağıllığı sonucu yeni iterasyon yöntemi kullanılarak Teorem 3.25'te elde edilmiştir.

Konu ile ilgilenen araştırmacılar bu tez çalışmasında (3.10) ve (3.11) ile verilen yeni iterasyon yöntemlerini veya bu yöntemlerden elde edilecek olan iterasyon yöntemlerini kullanarak b-metrik uzaylar, konveks metrik uzaylar, hiperbolik uzaylar, eliptik metrik uzaylar ve genelleştirilmiş konveks metrik uzaylar gibi farklı geometrik yapılar üzerinde yakınsaklık, yakınsaklık denkliği, kararlılık ve veri bağıllığı gibi bazı sabit nokta teoremlerini analiz edebilir.

KAYNAKLAR

1. Amini-Harandi, A. ve Emami, H., 2010. A Fixed Point Theorem for Contraction Type Maps in Partially Ordered Metric Spaces and Application to Ordinary Differential Equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72 (5), 2238-2242.
2. Harjani, J. ve Sadarangani, K., 2010. Generalized Contractions in Partially Ordered Metric Spaces and Applications to Ordinary Differential Equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72 (3), 1188-1197.
3. Singh, S. L., 1990. Application of Fixed Point Theorems to Nonlinear Integrodifferential Equations, *Rivista di Matematica della Università di Parma*, 16 (4), 205-212.
4. Wieczorek, A., 1988. Applications of Fixed-Point Theorems in Game Theory and Mathematical Economics, *Wisdom Mat.*, 28, 25-34.
5. Ceng, L.-C., Ansari, Q. ve Yao, J.-C., 2011. Some iterative methods for finding fixed points and for solving constrained convex minimization problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 74, 5286-5302.
6. Borwein, J. ve Sims, B., 2011. The Douglas–Rachford Algorithm in the Absence of Convexity, H.H. Bauschke Burachik, R.S. Combettes, P.L. Elser, V. Luke, D.R. ve Wolkowicz, H., ed. *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering*. Springer New York, 93-109.
7. Border, K.C., 1989. Fixed point theorems with applications to economics and game theory, Cambridge university press, Cambridge UK.
8. Ok, E.A., 2007. Real analysis with economic applications, Princeton University Press, Princeton.
9. Chen, M., Lu, W., Chen, Q., Ruchala, K.J. ve Olivera, G.H., 2008. A simple fixed-point approach to invert a deformation field, *Medical physics*, 35, 81.
10. Radde, N., 2010. Fixed point characterization of biological networks with complex graph topology, *Bioinformatics*, 26, 2874-2880.
11. Wang, G.-Q. ve Cheng, S.S., 2009. Fixed point theorems arising from seeking steady states of neural networks, *Applied Mathematical Modelling*, 33, 499-506.
12. Banach, S., 1922. Sur Les Opérations Dans Les Ensembles Abstraits et Leur Application Aux Equations Intégrales, *Fundamenta Mathematicae*, 3 (1), 133-181.
13. Karakaya, V. Doğan, K. Gürsoy, F. ve Ertürk, M., 2013. Fixed Point of a New Three-Step Iteration Algorithm Under Contractive-Like Operators Over Normed Spaces, *Abstract and Applied Analysis*, 2013, 1-9.

14. Ozdemir, M. ve Akbulut, S., 2006. On The Equivalence of Some Fixed Point Iterations, *Kyungpook Mathematical Journal*, 46 (2), 211-217.
15. Rhoades, B. ve Şoltuz, S.M., 2004. The Equivalence of Mann Iteration and Ishikawa Iteration for a Lipschitzian Ψ -Uniformly Pseudocontractive and Ψ -Uniformly Accretive Maps, *Tamkang Journal of Mathematics*, 35, 235-246.
16. Rhoades, B. ve Şoltuz, S.M., 2003. On The Equivalence of Mann and Ishikawa Iteration Methods, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003 (7), 451-459.
17. Rhoades, B. ve Şoltuz, S.M., 2003. The Equivalence of Mann Iteration and Ishikawa Iteration for Non-Lipschitzian Operators, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003 (42), 2645-2651.
18. Rhoades, B. ve Şoltuz, S.M., 2003. The Equivalence Between the Convergences of Ishikawa and Mann Iterations for an Asymptotically Pseudocontractive Map, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 283 (2), 681-688.
19. Rhoades, B. ve Şoltuz, S.M., 2004. The Equivalence of Mann and Ishikawa Iterations Dealing with Strongly Pseudocontractive or Strongly Accretive Maps, *Pan-American Mathematical Journal*, 14, 51-59.
20. Rhoades, B., 1976. Comments on Two Fixed Point Iteration Methods, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 56 (3), 741-750.
21. Berinde, V., (2004). Picard Iteration Converges Faster than Mann Iteration for a Class Of Quasi-Contractive Operators, *Fixed Point Theory and Applications*, 2004 (2), 1-9.
22. Hussain, N. Rafiq, A. Damjanović, B. ve Lazović, R., 2011. On Rate of Convergence of Various Iterative Schemes, *Fixed Point Theory and Applications*, 2011 (45), 1-6.
23. Phuengrattana, W. ve Suantai, S., 2011. On the Rate of Convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP-Iterations for Continuous Functions on an Arbitrary Interval, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235 (9), 3006-3014.
24. Rana, R., Dimri, R. ve Tomar, A., 2011. Remarks on Convergence Among Picard, Mann And Ishikawa Iteration for Complex Space, *International Journal of Computer Applications* 0975-8887, 21 (9), 20-29.
25. Karakaya, V., Atalan, Y., Dogan, K. ve Bouzara, N. 2017. Some fixed point results for a new three steps iteration process in Banach spaces. *Fixed Point Theory*, 18(2), 625-640.
26. Atalan, Y. ve Karakaya, V., 2019. Investigation of some fixed point theorems in hyperbolic spaces for a three step iteration process. *The Korean Journal of Mathematics*, 27(4), 929-947.

27. Berinde, V., 2003. On The Approximation of Fixed Points of Weak Contractive Mappings, *Carpathian Journal of Mathematics*, 19 (1), 7-22.
28. Chifu, C. ve Petruşel, G., 2007. Existence and Data Dependence of Fixed Points and Strict Fixed Points for Contractive-Type Multivalued Operators, *Fixed Point Theory and Applications*, 2007 (1), 1-8.
29. Espínola, R. ve Petruşel, A., 2005. Existence and Data Dependence of Fixed Points for Multivalued Operators on Gauge Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 309 (2), 420-432.
30. Markin, J., (1973). Continuous Dependence of Fixed Point Sets, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 38 (3), 545-547.
31. Rus, I.A. ve Muresan, S., 1998. Data Dependence of The Fixed Points Set of Weakly Picard Operators, *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 43 (1), 79-83.
32. Rus, I.A., Petruşel, A. ve Sîntămărian, A., 2003. Data Dependence of the Fixed Point Set of Some Multivalued Weakly Picard Operators, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 52 (8), 1947-1959.
33. Chugh, R. ve Kumar, S., 2013. Data Dependence of Some New Iterative Schemes for Quasi-Contractive Operators, *International Journal of Computer Applications*, 73 (1), 12-18.
34. Chugh, R. ve Kumar, V., 2011. Data dependence of Noor and SP Iterative Schemes When Dealing with Quasi-contractive Operators, *International Journal of Computer Applications*, 40 (15), 41-46.
35. Karakaya, V. Gürsoy, F. Doğan, K. ve Ertürk, M., 2013. Data Dependence Results for Multistep and CR Iterative Schemes in the Class of Contractive-Like Operators, *Abstract and Applied Analysis*, 2013, 1-7.
36. Maldar, S., Atalan, Y. ve Dogan, K., 2020. Comparison rate of convergence and data dependence for a new iteration method. *Tbilisi Mathematical Journal*, 13(4), 65-79.
37. Atalan, Y., 2019. On Numerical Approach to The Rate of Convergence and Data Dependence Results for a New Iterative Scheme. *Konuralp Journal of Mathematics (KJM)*, 7(1), 97-106.
38. Urabe, M., 1956. Convergence of numerical iteration in solution of equations. *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A*, 19, 479-489.
39. Ostrowski, A., 1967. The Round off Stability of Iterations. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 47, 77-81.
40. Harder, A.M., ve Hicks, T.L., 1988. Stability results for fixed point iteration

Procedures. Math. Japonica, 33 (5), 693-70.

41. Khan, A. R., Gürsoy, F. ve Kumar, V., 2016. Stability and data dependence results for the Jungck--Khan iterative scheme. Turkish Journal of Mathematics, 40(3), 631-640.
42. Gürsoy, F., Khan, A.R., Ertürk, M. ve Karakaya, V., 2019. Weak w^2 -stability and data dependence of Mann iteration method in Hilbert spaces. Racsam 113, 11–20.
43. Doğan, K., ve Karakaya, V., 2014. On the convergence and stability results for a new general iterative process. The Scientific World Journal, 2014 1-8.
44. Doğan, K., Gürsoy, F., Karakaya, V. ve Khan, S. H., 2020. Some new results on convergence, stability and data dependence in n -normed spaces. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 69(1), 112-122.
45. Ćirić, L.J., 1974. A generalization of Banach's contraction principle, Proceedings of American Mathematical Society, 45, 267-273.
46. Edelstein, M., 1961. An extension of Banach's contraction principle. Proceedings of the American Mathematical Society, 12(1), 7-10.
47. Presic, S. B., 1965. Sur une classe D' inequations Aux Differences Finite Et. Sur La Convergence De Certaines Suites , Publications de l'Institut Mathématique, 5(25), 75-78.
48. Jungck, G., 1976. Commuting mappings and fixed points, American Mathematical Monthly, 83(4), 261-263.
49. Kreyszig, E., 1989. Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley New York.
50. Maddox, I.J., 1988. Elements of Functional Analysis, CUP Archive.
51. Brown, A.L. ve Page, A., 1970. Elements of Functional Analysis, Van Nostrand-Reinhold.
52. Pugachev, V.S. ve Sinitsyn, I.N., 1999. Lectures on Functional Analysis and Applications, World Scientific.
53. Moore, R.E. ve Cloud, M.J., 2007. Computational Functional Analysis, Elsevier.
54. Curtain, R.F. ve Pritchard, A.J., 1977. Functional Analysis in Modern Applied Mathematics, Academic Press.
55. Berinde, V., 2006. Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Math., Springer.

56. Picard, E., 1890. Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 6, 145-210.
57. Singh, S.L., Bhatnagar, C. and Mishra, S.N., 2005. Stability of Jungck-type iterative procedures, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 19, 3035–3043.
58. Olatinwo, M.O. 2008b. A generalization of some convergence results using a Jungck-Noor three-step iteration process in arbitrary Banach space, *Polytechnica Posnaniensis*, 40, 37–43.
59. Chugh, R. ve Kumar, V., 2011. Strong Convergence and Stability results for Jungck-SP iterative scheme, *International Journal of Computer Applications*, 36(12), 40-46.
60. Hussain, N., Kumar, V. ve Kutbi, M. A., 2013. On rate of convergence of Jungck-type iterative schemes, *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2013), 1-15.
61. Chugh, R. ve Kumar, S., 2013. On the stability and strong convergence for Jungck-Agarwal et al. iteration procedure. *International Journal of Computer Applications*, 64(7), 39-44.
62. Khan, A. R., Kumar, V. ve Hussain, N. 2014. Analytical and numerical treatment of Jungck- type iterative schemes, *Applied Mathematics and Computation*, 231, 521-535.
63. Mann, W.R., 1953. Mean Value Methods in Iteration, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4, 506-510.
64. Ishikawa, S., 1974. Fixed Point By a New Iteration Method, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44, 147-150.
65. Noor, M.A., 2000. New Approximation Schemes for General Variational Inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251, 217-229.
66. Pheungrattana, W. ve Suantai, S., 2011. On the Rate of Convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP Iterations for Continuous on an Arbitrary Interval, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235, 3006-3914.
67. Chugh, R., Kumar, V. ve Kumar, S., 2012. Strong Convergence of a New Three Step Iterative Scheme in Banach Spaces, *American Journal of Computational Mathematics*, 2, 345-357.
68. Agarwal, R.P., Regan, D. O. ve Sahu, D.R., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 8(1), 61–79.

69. Sahu, D.R., ve A. Petruşel, A., 2011. Strong convergence of iterative methods by strictly pseudocontractive mappings in Banach spaces, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 74(17), 6012–6023.
70. Kumar, M., Kumar, P. ve Kumar, S., 2014. Common fixed point theorems in complex valued metric spaces, *Journal of Analysis & Number Theory*, 2, 103–109.
71. Şoltuz, S. M. ve Grosan, T., 2008. Data dependence for Ishikawa iteration when dealing with contractive like operators. *Fixed Point Theory and Applications*, 2008(1), 1-7.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Esra ERBAŞ

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü 2010-2014

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2019-2022

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. MEB / Matematik Öğretmeni, 2016-Devam ediyor

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler

1.

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Erbaş, E. ve Atalan, Y., 2022. Examination of a New Jungck-Type Fixed Point Iterative Algorithm, UBCAK 2022, 15-17 March 2022.