

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YENİ BİR OPERATÖRÜN BAZI UZAYLARDAKİ SPEKTRAL
ANALİZİ**

EZGİ ERDOĞAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. VATAN KARAKAYA**

İSTANBUL, 2013

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YENİ BİR OPERATÖRÜN BAZI UZAYLARDAKİ SPEKTRAL
ANALİZİ**

Ezgi ERDOĞAN tarafından hazırlanan tez çalışması 14.01.2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Vatan Karakaya
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Vatan Karakaya
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ömer Gök
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Necip Şimşek
İstanbul Ticaret Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanma sürecinde karşılaştığım güçlüklerde beni cesaretlendiren, yönlendiren, maddi ve manevi desteğini her zaman hissettiğim saygıdeğer hocam Prof. Dr. Vatan KARAKAYA' ya minnet ve şükranla teşekkürlerimi sunarım. Bilimin ve bilim insanının destekçisi olan ve yüksek lisans eğitimim süresince maddi destek gördüğüm Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)' na teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatım boyunca verdiğim kararlarda beni her zaman destekleyen, benden ilgi ve alakasını hiçbir zaman esirgemeyen aileme, özellikle annem ve babama sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Sevgi ve dostluklarından her zaman emin olduğum, bu çalışmada yaşadığım sıkıntılarda beni dinleyen ve motive eden tüm arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

Ocak, 2013

Ezgi Erdoğan

İÇİNDEKİLER

Sayfa	
SİMGE LİSTESİ.....	v
ÇİZELGE LİSTESİ.....	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti.....	4
1.2 Tezin Amacı.....	6
1.3 Hipotez	6
BÖLÜM 2	
TEMEL TANIM VE TEOREMLER	7
2.1 Temel Tanımlar	7
2.2 Lineer Dönüşümler.....	9
2.3 Dizi Uzayları.....	13
2.4 Matris Dönüşümleri	14
2.5 Bir Dönüşümün Spektrumu ve İnce Spektrumu	16
BÖLÜM 3	
W OPERATÖRÜNÜN c_0, c ve ℓ_∞ UZAYLARINDAKİ SPEKTRUMU	20
3.1 W Operatörünün c_0 Uzayı Üzerindeki İnce Spektrumları.....	21
3.2 c ve ℓ_∞ Dizi Uzaylarında W Operatörünün İnce Spektrumu.....	31
BÖLÜM 4	
W OPERATÖRÜNÜN ℓ_1 ve ℓ_p DİZİ UZAYLARINDAKİ İNCE SPEKTRUMU....	44
4.1 W Operatörünün ℓ_1 Uzayı Üzerindeki Spektrumu.....	44
4.2 ℓ_p Dizi Uzayında W Operatörünün İnce Spektrumu	55
KAYNAKLAR	65
ÖZGEÇMİŞ	68

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	$\{0, 1, 2, \dots\}$ sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \dots\}$ sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ cismi
w	Tüm reel veya kompleks terimli diziler uzayı
ℓ_∞	Sınırlı diziler uzayı
c	Yakınsak diziler uzayı
c_0	Sıfıra yakınsak diziler uzayı
ℓ_1	Mutlak yakınsak serilerin uzayı
ℓ_p	p . kuvvetten mutlak yakınsak serilerin uzayı
bv	Sınırlı salınımlı dizilerin uzayı
bv_0	Hem sınırlı salınımlı hem de sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
bv_p	p . kuvvetten sınırlı salınımlı dizilerin uzayı
X'	X uzayının duali
$\Re(T)$	T operatörünün görüntü kümesi
$\wp(T)$	T operatörünün tanım kümesi
$\aleph(T)$	T operatörünün sıfır kümesi
$\overline{\Re(T)}$	T operatörünün görüntüsünün kapanışı
T^{-1}	T operatörünün tersi
T^*	T operatörünün adjoint operatörü
$\rho(T)$	T operatörünün regüler değerlerinin kümesi
$\sigma(T, X)$	T operatörünün spektrum kümesi
$\sigma_p(T, X)$	T operatörünün noktasal spektrumu
$\sigma_c(T, X)$	T operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(T, X)$	T operatörünün residüel (artık) spektrumu
$(A_n(x))$	x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
$B(X, Y)$	X ' den Y uzayına sınırlı dönüşümlerin uzayı
$L(X, Y)$	X ' den Y uzayına lineer dönüşümlerin uzayı

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 2.1 X Banach uzayında (X, X') durum diyagramı.....	13
Çizelge 2.2 Resolvent ve spektrum kümelerinin şartları.....	18
Çizelge 2.3 Bir lineer operatörün spektrum alt kümeleri.....	19
Çizelge 3.1 W operatörünün $B(c_0)$ olma şartları ve durumları.....	21
Çizelge 3.2 W operatörünün c_0 uzayındaki normu.....	22
Çizelge 3.3 W operatörünün $B(c)$ olma şartları ve durumları.....	31
Çizelge 3.4 W operatörünün c uzayındaki normu.....	32
Çizelge 4.1 W operatörünün $B(\ell_1)$ olma şartları ve durumları.....	45
Çizelge 4.2 W operatörünün ℓ_1 uzayındaki normu.....	45
Çizelge 4.3 W operatörünün $B(\ell_p)$ olma durumları.....	55

YENİ BİR OPERATÖRÜN BAZI UZAYLARDAKİ SPEKTRAL ANALİZİ

Ezgi ERDOĞAN

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Bazı dizi uzaylarında tanımlı bir dönüşümün spektrumu ile ilgili olan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde spektrum alanının tarihsel gelişimi ve spektrum ile ilgili çalışmaların bir literatür özeti verilmiş ve bu çalışmanın amacı belirtilmiştir.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, fark matrisi ile factorable matrisin çarpımından elde edilen matrisin c_0, c, ℓ_∞ dizi uzaylarındaki spektrumu ve ince spektrumu incelenmiştir.

Son bölüm olan dördüncü bölümde ise aynı matrisin ℓ_1, ℓ_p dizi uzaylarındaki ince spektrumuna yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dizi uzayı, bir operatörün spektrumu, ince spektrum, matris dönüşümü, fark matrisi, factorable matris.

ABSTRACT

THE SPECTRAL ANALYSIS OF A NEW OPERATOR OVER SOME SPACES

Ezgi ERDOĞAN

Department of Mathematical Engineering
MSc. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

This study, which deal with spectrum of an operator defined on some sequence spaces, consist of four chapter.

In the first chapter, the historical development of the field of spectrum and a literature rewiev of studies concerned with the spectrum were given and the aim of this study were indicated.

In the second chapter, the principal definitions and theorems were given that used in other chapters.

In the third chapter, the spectrum and fine spectrum of the matrix that are obtained with multiplication of difference matrix and factorable matrix, were studied on sequence spaces of c_0, c, ℓ_∞ .

In the last chapter, the spectrum of the same operator were obtained over sequence spaces of ℓ_1, ℓ_p .

Key Words: Sequence spaces, the spectrum of an operator, fine spectrum, matrix transformation, difference matrix, factorable matrix.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY GRADUATE SCHOOL OF NATURAL
AND APPLIED SCIENCE

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Fonksiyonel analiz ve uygulamalarının temel konularından biri olan spektral teoremin amacı belirli şartlara sahip ters operatörlerin ve bu ters operatörlerin özellikleri ve esas operatörle olan ilişkilerinin incelenmesidir. Ters operatörlerle ilgili özellikler denklem çözme problemlerinde (lineer cebirsel denklem sistemleri, diferansiyel denklemler, integral denklemler gibi) ters operatörün karşımıza çıkmasından dolayı önemlidir [1].

Temeli 17. yüzyıla dayanan spektrum kavramı 20. yüzyılda matematik literatürüne girmiştir, yani spektrumun matematiksel teorisi 20. yüzyıl olgusudur.

Spektral teoremin temeli olarak Temel Eksen Teoremi kabul edilmektedir. 17. yüzyıl matematikçileri ve analitik geometrinin kurucuları Pierre de Fermat (1601-1665) ve René Descartes (1596-1650) 'ın eserleri arasından çıkan Temel Eksen Teoreminin, cebir ve analizin konularından biri olan spektrumun temeli olması biraz şaşırtıcı olabilir [2], [3]. Temel eksen teoremi, $\mathbb{R}^2$ Öklid düzlemindeki $ax^2 + 2bxy + cy^2$ şeklindeki kuadratik formdaki bir ifadenin uygun bir rotasyonla $ax^2 + by^2$ normal forma dönüştürülebileceğini ifade etmektedir. Burada normal formun temel eksenleri ile yeni koordinat eksenleri uyushmaktadır.

Temel eksen teoreminin genel formu, $\mathbb{R}$ üzerindeki herhangi simetrik $(Ax, x) = \sum \alpha_{ij} x_i x_j$ şeklindeki kuadratik formun $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ şeklindeki bir ortogonal dönüşüm vasıtasıyla $\sum \lambda_i x_i^2$ normal formunda yeniden yazılabileceğini ifade eder. Bu genel forma 19. yüzyılın ikinci yarısında James Joseph Sylvester (1814-1897) ve Arthur Cayley (1821-1895) tarafından n-boyutlu uzayların cebirsel yapısını vermek için matris notasyonunu kullanmalarıyla ulaşılmıştır. Sylvester, (Ax, x) 'in normal formundaki λ_i katsayılarının $\det(\lambda I - A) = 0$ karakteristik denklemin kökleri olduğunu göstermiştir [4]. Cayley, Temel Eksen teoreminin cebir dilindeki karşılığını vermiş ve her bir

simetrik reel A matrisinin ortogonal olarak bir D köşegen matris ile temsil edilebildiğini ifade etmiştir [5]. Kısacası, bir T ortogonal matrisi ($T' = T^{-1}$) için $D = T^{-1}AT$ diyagonal yapıdadır ve D matrisinin diyagonalı A matrisinin özdeğerleridir. Denk bir ifadeyle $\det(\lambda I - A) = 0$ olan polinomunun kökleridir.

Spektral teoremin ortaya çıkmasındaki ikinci adım, sonlu boyutlu teoremin sonsuz boyutlu teoriye geliştirilmesi, yani sonsuz boyutlu uzaylardaki belirli operatörlerin de diyagonal formda sunulabileceğinin anlaşılmasıdır. Bu durum ilk olarak cebirde (lineer denklem sistemlerinin çözümlerinde) ve ardından geometride ortaya çıkmıştır. 18. ve 19. yüzyılda Euler ve Etienne Bezout'un çalışmalarında olduğu gibi sonlu lineer denklem sistemleri çoğunlukla yok etme metoduyla çözülmüş, sonsuz lineer denklem sistemleri ise belirsiz katsayılar metoduyla elde edilmeye çalışılmıştır.

Joseph Fourier' in keyfi fonksiyonların trigonometrik seri (ortogonal fonksiyonların bir lineer kombinasyonu) olarak yazılabileceğini ifade etmesiyle sonsuz denklem sistemi problemine dair önemli ilk çalışmalar başlamış ve bu lineer kombinasyonlardaki bilinmeyen katsayıların belirlenmesi problemi Fourier' e sonsuz lineer denklem sistemlerinin çözümüne yönelik yolu açmıştır [6]. Fourier, sonsuz lineer denklemlerin çözümü için sonlu lineer denklemlere uygulanan determinant yönteminde $n \rightarrow \infty$ durumu göz önüne alarak çözüm aramıştır.

Spektral teori ile ilgili ilk çalışma sonsuz determinantların integral denklemlere uygulanmasından hemen sonra sonsuz determinant teorisinin sayılabilir sonsuzdan sayılamaz sonsuza genelleştirilmesi ile elde edilmiştir.

Spektral teori ile integral denklemler arasındaki bağlantı von Koch tarafından geliştirilmiş olan sonsuz matris ve determinant yönteminin 1900'lerde İsveçli matematikçi Ivan Fredholm tarafından integral denklemlere uygulamasıyla kurulmuştur. Etkileyici matematik yeteneğine sahip olan David Hilbert 1904-1910 yılları arasında integral denklemlerle ilgili yaptığı çalışmalarda spektral teori olarak adlandırdığı teoremin temel tanım ve teoremlerinin ana hatlarını vermiştir [7]. Hilbert öncelikle

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi(y) dy = \varphi(x)$$

integral denklemi ile birlikte sonlu ya da sonsuz boyutlu matris denklemlere benzeyen

$$\phi(x_i) - \lambda \sum_j K(x_i, y_j) \phi(x_j) dy = \phi(x_i)$$

denklemleri ile çalışmıştır. Bu denklemleri çözmek için gerekli olan yapıları verirken, Hilbert, K kuadratik form için noktasal spektrum ve sürekli spektrum tanımlarını vermiştir.

Hilbert' in doktora öğrencileri, Ernst Hellinger kuadratik form teorisini tekrar formüle etmiş ve Hermann Weyl, sınırlı formlar ve spektrumları ile ilgili geniş bir çalışma sunmuştur [8], [9]. Yani Hilbert ve doktora öğrencileri, Hilbert uzayı üzerindeki sınırlı lineer dönüşümler için spektral teoremin büyük kısmını oluşturmuştur. Hilbert spektrum çalışmalarını sürekli spektrumları boş küme olan dönüşümlerin geniş bir sınıfını tanımlayarak bu dönüşümlerin tam sürekli dönüşümler olduğunu göstermiştir. Tam sürekli dönüşümlerin spektrumları sadece özdeğerlerden oluşur ve bu dönüşümler sonlu boyutlu dönüşümlere en çok benzeyen sonsuz boyutlu dönüşümlerdir.

Hilbert' in ℓ_2 dizi uzayında spektral teoriyi oluşturduğu sıralarda Henri Lebesgue, bugün kendi adıyla anılan yeni bir integral geliştirmiştir [10]. Daha sonra Friedrich Riesz ve Ernst Fischer, ℓ_2 Hilbert uzayının L_2 (kareleri Lebesgue integrallenebilen fonksiyonlar) uzayına izomorfik olduğunu gösterdiler ve ardından Riesz, ℓ_2 uzayı için verilen spektral teoriye benzer bir teoriyi L_2 uzayı için geliştirmiştir [11].

Spektral teoremin gelişiminde önemli rolü olan bir diğer adım ise 1925-26 yıllarında Werner Heisenberg ve Erwin Schrödinger tarafından geliştirilen kuantum mekaniğidir. Heisenberg teorisi bazı atomik gözlemlerin matematiksel yorumlarının aynı zamanda yapılamayacağını yani bu gözlemlerin temsillerinin değişmeli olmadığını ifade eder. Bu sorunu çözmek için Heisenberg her fiziksel niceliği dönüşüm olarak adlandırdığı uygun bir sonlu ya da sonsuz matris kullanarak temsil etmiş ve fiziksel niceliğin mümkün değerlerinin kümesini dönüşümün spektrumu olarak adlandırmıştır. Böylece bir atomun enerji temsili olan dönüşümün spektrumu, atomun spektrumu olarak adlandırılmıştır.

Heisenberg' in aksine Schrödinger kısmi türevli dalga denklemi tabanlı teoriyi geliştirmiştir. Biri dalga mekaniği, diğeri ise matris mekaniği kullanarak aynı sonucu elde etmişlerdir.

Daha sonra Hilbert'in spektral teorisinin yeni mekanikler için uygun matematiksel baz olduğu açıkça anlaşılmıştır. Sonlu ve sonsuz matrisler, Hilbert uzayı üzerindeki

dönüşümler olarak yorumlanmış ve fiziksel nicelikler, bu dönüşümlerle temsil edilmiştir [12].

Spektrum kavramının ortaya çıkmasından sonraki en büyük adım 1927-29 yıllarında meşhur matematikçi John von Neumann'ın Hilbert uzayındaki bir lineer operatörün soyut kavramını geliştirmesi olmuştur. Neumann, Hilbert uzayı üzerindeki operatör yönünden kuantum mekaniğinin dönüşüm teorisini açıklamış ve Hermityan operatörleri spektral teorisini sınırlı durumdan sınırsız duruma genişletmiştir [13], [14].

Hilbert, spektral teoriyi sınırlı, kendine eş ve her yerde tanımlı olan operatörlere uygularken, von Neumann teoriyi yine kendine eş fakat sınırsız, yoğun kümede tanımlı olan operatörlere uygulamıştır.

1.1 Literatür Özeti

Dizi uzayları üzerindeki dönüşümlerin spektrumu ile ilgili ilk çalışmalar 20. yüzyılın ikinci yarısında literatürde yer almaya başlamıştır. 1965 yılında A. Brown, P.R. Halmos ve A. L. Shields [15] tarafından birinci mertebeden Cesáro dönüşümünün, ℓ_2 Hilbert uzayı üzerindeki karakteristik değerlerini ve spektrum cümlesini belirleyen makaleleri ile başlamış olan çalışmalar, 1972 yılında G. Leibowitz [16]'ın ℓ_p uzayındaki çalışmasıyla devam etmiştir. Cesáro operatörü ile ilgili bir diğer çalışma, J. I. Okutoyi'nin birinci mertebeden Cesáro operatörünün bv_0 ve bv uzayları üzerindeki spektrumlarının yer aldığı çalışmalarında görülebilir [17], [18].

Ağırlıklı ortalama operatörünün spektrumu ile ilgili ilk çalışma 1977 yılında F. P. Cass ve B.E. Rhoades [19]'ın bu operatörün spektrumunu ve Mercerian teoremlerini incelemiş oldukları çalışmadır, daha sonra J. M. Cartlidge [20], doktora çalışmasında bu operatörün ℓ_p dizi uzayındaki spektrumunu incelemiştir.

Literatürde geniş yer tutan diğer operatörler ise Δ fark operatörü ve $B(r, s)$ genelleştirilmiş fark operatörüdür. B. de Malafosse [21], fark matrisini,

$$\|x\|_{s_r} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|x^k|}{r^k}, \quad (r > 0)$$

normlu dizilerin s_r uzayında ele almıştır. B. Altay ve F. Başar [22], fark matrisinin c_0 , c dizi uzaylarındaki spektrumu, A. M. Akhmedov ve F. Başar [23], ise ℓ_p uzayı

üzerindeki spektrumu ile ilgilenmişlerdir. H. Furkan vd. sırasıyla $B(r, s)$ genelleştirilmiş fark matrisin ℓ_1 ve bv dizi uzaylarında spektral incelemesini yapmışlardır [24]. Ayrıca $B(r, s)$ genelleştirilmiş fark matrisinin c_0 ve c dizi uzaylarındaki spektrumu B. Altay ve F. Başar [25], tarafından incelenmiştir. Fark operatörü ile ilgili bir diğer çalışma A. Farés ve B. de Malafosse [26] tarafından yapılmış olup fark operatörünün spektrumunu $a = (a_n)$ pozitif reel sayı dizisi olmak üzere

$$\|x\| = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n|/a_n)^p \right]^{1/p}, p \geq 1$$

normuna sahip tüm dizilerin Banach uzayı olan $\ell_p(a)$ dizi uzayı üzerinde incelemişlerdir. P. D. Srivastava ve S. Kumar [27], belli şartlara sahip $v = (v_n)$ dizisi ile $\Delta_v x = (v_n x_n - v_{n-1} x_{n-1})_{n=0}^{\infty}$ olarak tanımlanan genelleştirilmiş fark operatörünün ℓ_1 dizi uzayındaki spektrumunu elde ettikleri çalışmaları da bu operatörle yapılmış diğer bir çalışmadır. Fark matrisi ile ilgili son çalışmalardan biri de V. Karakaya vd. [28], ikinci mertebeden fark operatörünün ℓ_p ve bv_p ($1 < p < \infty$) dizi uzayları üzerindeki spektrum incelemeleridir.

Rhaly ve lacunary matrisleri ile de çalışmalar yapılmıştır. V. Karakaya ve M. Altun [29], lacunary matrisinin spektrumunu elde etmişlerdir. M. Yıldırım, Rhaly operatörünün sırasıyla c_0, c ve ℓ_p uzaylarındaki spektrum incelemesini gerçekleştirmiştir [30], [31].

Bant matrislerin spektrum çalışmaları da literatürde geniş yer tutmaktadır. B. Altay ve M. Karakuş [32], bir bant matris olan Zweier matrisinin ℓ_1 ve bv uzayları üzerindeki spektrumlarını elde etmişlerdir. V. Karakaya ve M. Altun [33] künyeli çalışmasında üst üçgensel ikili-bant matrisinin c_0 ve c uzayları üzerindeki spektrum analizini gerçekleştirmişlerdir. M. Altun [34], üst üçgensel ve alt üçgensel n -bant sonsuz matris olarak gösterilen Toeplitz operatörünün c_0 ve c dizi uzayları üzerindeki spektrumlarını incelemiştir. Bant matrisler ile ilgili diğer bir çalışma ise A. M. Akhmedov ve S. R. El-Shabrawy [35]'nin, bazı özelliklere sahip $\tilde{a} = (a_k)$ ve $\tilde{b} = (b_k)$ yakınsak dizileri ile

ikili-bant matris tanımlayarak c yakınsak diziler uzayında $\Delta_{a,b}$ genelleştirilmiş fark matrisinin spektrumunu elde ettikleri çalışmalardır.

1.2 Tezin Amacı

Spektral analiz konusunda daha önceden yapılan çalışmalar incelenerek fark matrisi ile factorable matrisin çarpımından elde edilen $W = (w_{nk})$ matrisinin c_0 , c , ℓ_∞ , ℓ_1 ve ℓ_p dizi uzaylarında sınırlı lineer operatöre karşılık gelmesi için gerekli şartlar belirlenerek matrisin spektrum kümesi ile ince spektrumunun elde edilmesi amaçlanmıştır.

1.3 Hipotez

Aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$W = (w_{nk}) = \begin{cases} u_n(v_k - v_{k+1}), & 0 \leq k < n \\ u_n v_n, & n = k \\ 0, & n < k \end{cases}$$

matris operatörünün sırasıyla c_0 , c , ℓ_∞ , ℓ_1 ve ℓ_p Banach uzaylarında sınırlı lineer operatöre karşılık gelmesi için (u_n) ve (v_k) dizilerinin sahip olması gereken şartlar incelenmiştir. Ardından sınırlı lineer operatöre karşılık geldiği durumlar $W - \lambda I$ matrisinin terslenmesine engel teşkil eden λ kompleks değerlerinin var olduğu kabul edilerek çalışma hedeflenmiştir. Bu hipotez kullanılacak olan temel bilgilerin kısa bir özeti verildikten sonra 3. ve 4.bölümde uygulanmıştır.

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, ileriki bölümler için temel oluşturacak tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1 Temel Tanımlar

Tanım 2.1 (Vektör Uzayı) X boştan farklı bir küme ve $\mathbb{K}$, reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X \text{ ve } \cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X kümesine $\mathbb{K}$ üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir.

A) $X, +$ işlemine göre değişmeli gruptur.

$G_1) \forall x, y \in X$ için $x + y \in X$ ' dir. (kapalılık özelliği)

$G_2) \forall x, y, z \in X$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ ' dir. (birleşme özelliği)

$G_3) \forall x \in X$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır. (birim eleman)

$G_4) \forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in X$ vardır. (ters eleman)

$G_5) \forall x, y \in X$ için $x + y = y + x$ ' dir. (değişme özelliği)

B) $\forall x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

$L_1) \alpha x \in X$ ' dir. (skalarla çarpmaya göre kapalılık)

$L_2) \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ ' dir.

$L_3) (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ' dir.

L₄) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ ’ dir.

L₅) $1.x = x$ (1 , $\mathbb{K}$ cisminin birim elemanıdır.) [36]

Tanım 2.2 (Alt vektör uzayı) X , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve M, X kümesinin bir alt kümesi olsun. $\forall x, y \in M$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ için $x + y \in M$ ve $\alpha x \in M$ oluyorsa M kümesine X uzayının alt uzayı denir.

Tanım 2.3 (Lineer bağımsızlık) X , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesi de X uzayının sonlu bir alt kümesi olsun. $\alpha_i \in \mathbb{K}$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow i = 1, 2, \dots, n \text{ için } \alpha_i = 0$$

oluyorsa S kümesine $\mathbb{K}$ cismi üzerinde lineer bağımsızdır denir.

Tanım 2.4 (Metrik uzay) X boştan farklı bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer d fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d fonksiyonuna X uzayında bir metrik, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir. Her $x, y, z \in X$ için

$$M_1) d(x, y) \geq 0$$

$$M_2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M_3) d(x, y) = d(y, x) \text{ (simetri özelliği)}$$

$$M_4) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (üçgen eşitsizliği)'} \text{ dir. [1]}$$

Tanım 2.5 (Yoğun küme) (X, d) bir metrik uzay ve M , X metrik uzayının bir alt kümesi olsun. M kümesinin kapanışı X uzayına eşitse M kümesi X uzayında yoğundur denir. Bu durumda her $x \in X$ elemanı ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için M kümesinin bir a_ε üyesi $|b - a_\varepsilon| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabilecektir. [37]

Tanım 2.6 (Cauchy dizisi) (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. [37]

Tanım 2.7 (Tamlik) (X, d) bir metrik uzay olsun. X uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsaksa yani $x_n \rightarrow x \in X$ ise (X, d) metrik uzayına tam uzay denir. [1]

Tanım 2.8 (İzometri ve izometrik uzay) (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzayları arasındaki $f : X \rightarrow Y$ şeklindeki örten bir fonksiyon her $x_1, x_2 \in X$ için

$$d(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2))$$

bağıntısını sağlıyorsa bir izometri adını alır. Aralarında bir izometrinin varlığı belirlenmiş metrik uzaylar da izometrik uzaylar olarak isimlendirilir. [37]

Tanım 2.9 (Normlu uzay) X bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$N_1) \forall x \in X, x \neq \theta \text{ için } \|x\| > 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N_2) \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X \text{ için } \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$N_3) \forall x, y \in X \text{ için } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna, X uzayı üzerinde bir norm, X uzayına da normlu uzay denir. [1]

Tanım 2.10 (Banach uzayı) Tam normlu uzaya Banach uzayı denir. [38]

2.2 Lineer Dönüşümler

Tanım 2.11 X ve Y aynı skalar cismi üzerinde tanımlı iki vektör uzayı olsun. $T : X \rightarrow Y$ dönüşümü her $x_1, x_2 \in X$ ve α, β skaları için

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2$$

eşitliği sağlanıyorsa T dönüşümü lineer dönüşüm olarak adlandırılır. Değer kümesi $\mathbb{C}$ kompleks veya $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olan operatörlere fonksiyonel denir.

T lineer operatörünün tanım kümesi $\wp(T)$, görüntü kümesi $\Re(T)$ ve çekirdeği $\aleph(T)$ ile gösterilen uzaylar,

$$\wp(T) = \{x \in X : Tx = Y\}$$

$$\Re(T) = \{y \in Y : y = Tx, x \in X\}$$

$$\aleph(T) = \{x \in \wp(T) : Tx = \theta\}$$

şeklinde tanımlanır. Tanım kümesindeki farklı elemanları, görüntü kümesinde farklı elemanlara taşıyan dönüşümlere birebir dönüşüm denir. $T\theta = \theta$ özelliğine sahip bir T lineer dönüşümün birebir olması için gerek ve yeter şart $\aleph(T) = \{\theta\}$ olarak bulunmasıdır.

Ayrıca $T : X \rightarrow Y$ lineer dönüşümü her $x \in X$ için $\|Tx\| \leq M\|x\|$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısına sahipse bu dönüşüme sınırlı lineer dönüşüm denir. [1]

Teorem 2.1 X ve Y iki normlu uzay ve $T : X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu dönüşüm için aşağıdaki önermeler denktir;

- a) T , bir noktada süreklidir.
- b) T , X uzayı üzerinde düzgün süreklidir.
- c) T sınırlıdır.

Bir T dönüşümünün normu,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad (2.1)$$

eşitliği ile tanımlanır.

X ve Y iki normlu uzay olmak üzere, X uzayından Y uzayına tanımlı lineer dönüşümler uzayı $L(X, Y)$ ve sınırlı lineer dönüşümler uzayı $B(X, Y)$ ile gösterilecektir. $X = Y$ ise $B(X, Y)$ yerine kısaca $B(X)$ yazılacaktır. $B(X, Y)$ uzayı (2.1) normu ile normlu uzaydır. Y uzayı tam yani Banach uzayı ise $B(X, Y)$ de Banach uzayıdır. Y uzayı olarak X normlu uzayın skalar cismi alınır, $B(X, \mathbb{K}) = X'$ ile gösterilen sınırlı lineer fonksiyoneller uzayı (veya sürekli duali) elde edilir. [1]

Tanım 2.12 X ve Y iki normlu uzay $\wp(T)$ ve $\Re(T)$ sırasıyla X ve Y uzaylarının alt uzayları ve $T: \wp(T) \rightarrow Y$ birebir lineer dönüşüm olsun. $\Re(T)$ uzayından $\wp(T)$ uzayına tanımlı ve $\Re(T)$ uzayından alınan $Tx = y$ olacak şekildeki her y elemanını $\wp(T)$ uzayında bir x elemanına taşıyan $T^{-1}: \Re(T) \rightarrow \wp(T)$ dönüşümüne, T dönüşümünün tersi denir. Lineer olan T dönüşümünün T^{-1} ters dönüşümü de lineerdir. [1]

Teorem 2.2 X ve Y iki normlu uzay, $T \in L(X, Y)$ olsun. T^{-1} ters dönüşümünün mevcut olması için gerek ve yeter şart T dönüşümünün çekirdeğinin yalnızca sıfır vektörünü içermesidir. [1]

Teorem 2.3 X ve Y iki normlu uzay, $T \in B(X, Y)$ olsun. T^{-1} ters operatörünün mevcut ve sürekli olması için gerek ve yeter şart T operatörünün alttan sınırlı yani her $x \in X$ için $\|Tx\| > m\|x\|$ olacak biçimde pozitif bir m sayısının bulunmasıdır.

Şimdi bir dönüşümün tersi ve değer uzayı ile ilgili önemli bilgiler veren adjoint operatör tanımı ve teoremleri verilecektir.

Tanım 2.13 X ve Y $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki normlu uzay, $T \in B(X, Y)$ olsun. Y' ve X' , sırasıyla X ve Y uzaylarının sürekli dualleri olsun. Her $x \in X$ ve her $f \in Y'$ için

$$T^*: Y' \rightarrow X', (T^* f)x = f(Tx)$$

biçiminde tanımlanan T^* operatörüne T operatörünün adjoint operatörü denir. [1]

Teorem 2.4 X bir normlu uzay, $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $T^* \in B(X')$ ve $\|T\| = \|T^*\|$ dir. [39]

Teorem 2.5 X bir normlu uzay, $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda T operatörünün sınırlı tersi olması için gerek ve yeter şart T^* adjoint operatörünün örten olmasıdır. [40]

Teorem 2.6 X bir normlu uzay, $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda T operatörünün X uzayında yoğun bir görüntü kümesine sahip olması için gerek ve yeter şart T^* adjoint operatörünün birebir olmasıdır. [40]

Lineer dönüşümler üzerine önemli araştırmalar yapan Goldberg, lineer dönüşümlerin şu şekilde sınıflandırılmasını yapmıştır;

$T : X \rightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. Goldberg [40],

I. $\mathfrak{R}(T) = Y$

II. $\mathfrak{R}(T) \neq \overline{\mathfrak{R}(T)} = Y$

III. $\overline{\mathfrak{R}(T)} \neq Y$

1. T^{-1} mevcut ve sürekli
2. T^{-1} mevcut ancak süreksiz (sınırlı değil)
3. T^{-1} mevcut değil

durumlarını göz önüne almıştır. Bu durumlar birlikte düşünüldüğünde $I_1, I_2, I_3, II_1, II_2, II_3, III_1, III_2, III_3$ olmak üzere dokuz farklı durum ortaya çıkar. Eğer T hem II hem de I durumunu sağlıyorsa $T \in II_1$ şeklinde yazılır. Lineer dönüşümlerin durumlarını ifade eden bu sınıflandırma Goldberg sınıflandırması olarak adlandırılır.

Mesela $T \in III_2$ ise T^{-1} mevcut fakat sınırlı değil ve $\overline{\mathfrak{R}(T)} \neq Y$ dir. Diğer bir örnek olarak $T \in I_3$ ise $\mathfrak{R}(T) = Y$ fakat T^{-1} mevcut değildir. T operatörü için geçerli olan 9 durum adjoint operatör için de geçerlidir. Örneğin T^* için I_1 durumu $\mathfrak{R}(T^*) = X'$ ve $(T^*)^{-1}$ in var ve sürekli olduğu anlamına gelir. (T, T^*) çiftinin durumu T ile T^* operatörlerinin durumlarının sıralı çifti olarak tanımlanacaktır. Her operatörün 9 durumu söz konusu olduğundan (T, T^*) çifti 81 farklı durumda olabilir. Ancak operatörün ve X uzayının özelliği bu durumlardan bazılarını olanaksız kılar. X Banach uzayı olduğunda izin verilen durumların sayısı dokuza iner. Olası durumlar Çizelge 2.1 deki durum diyagramı üzerinde gösterilmiştir. [37]

Çizelge 2.1 X Banach uzayında (X, X') durum diyagramı

$T^* \setminus T$	I_1	I_2	I_3	II_1	II_2	II_3	III_1	III_2	III_3
I_1		×	×	×	×	×	×	×	×
I_2	×	×	×	×	×	×	×	×	×
I_3	×	×	×	×	×	×		×	×
II_1	×	×	×	×	×	×	×	×	×
II_2	×	×	×	×		×	×	×	×
II_3	×	×	×	×	×	×	×		×
III_1	×	×		×	×	×	×	×	×
III_2	×	×	×	×			×	×	×
III_3	×	×	×	×	×	×	×		

2.3 Dizi Uzayları

Bu çalışma boyunca, w ile kompleks ve reel terimli tüm dizilerin kümesi gösterilecektir. w , kümesi toplama ve skalarla çarpma işlemleri ile bir vektör uzayı belirtir. w uzayının her alt uzayına dizi uzayı denir. Bu çalışmada kullanılan dizi uzayları; yakınsak dizilerin uzayı c , sifıra yakınsak dizilerin uzayı c_0 , mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı ℓ_1 , $1 < p < \infty$ olmak üzere p -mutlak toplanabilen dizilerin uzayı ℓ_p , sınırlı dizilerin uzayı ℓ_∞ uzaylarıdır. ℓ_∞ , c , c_0 uzayları

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

normu ile, ℓ_p uzayı ($1 \leq p < \infty$)

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

normu ile Banach uzaylarıdır. [41]

2.4 Matris Dönüşümleri

Tanım 2.14 X ve Y , w uzayının iki alt uzayı ve $A = (a_{nk})$ reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris olsun. Bu durumda $x = (x_k) \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n = A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \quad (2.1)$$

mevcut ise yani (2.1) deki seri her n için yakınsak oluyorsa $Ax = A_n(x)$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer her $x \in X$ için $y_n = A_n(x)$ dönüşüm dizisi mevcuttur ve $y \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisi X uzayından Y uzayına bir matris dönüşümü tanımlar. X dizi uzayını Y uzayına dönüştüren bütün matrislerin sınıfı (X, Y) ile gösterilir ve A matrisi X uzayından Y uzayına bir matris dönüşümü ise $A \in (X, Y)$ şeklinde ifade edilir. Toplamı ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı ise $(X, Y; p)$ ile gösterilir. [41]

$k > n$ için $a_{nk} = 0$ ve $a_{nn} \neq 0$ terimlerinden oluşan $A = (a_{nk})$ matrisine üçgen matris denir. Üçgen matris dönüşümleri birebirdir.

Tanım 2.15 $A = (a_{nk})$ matrisi

$$a_{nk} = \begin{cases} a_n b_k, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

şeklinde ise $A = (a_{nk})$ matrisine factorable matris denir.

Dizi uzayları arasındaki bir lineer dönüşüme daima bir matris karşılık gelmeyebilir. Mesela; $\lim : c \rightarrow \mathbb{R}$ lineer dönüşümünün bir matris temsili tanımlı değildir. Fakat, koordinat fonksiyonellerini sürekli kılan norma sahip ve e^j ile temsil edilen

$$\begin{aligned} e^0 &= (1, 0, 0, 0, \dots) \\ e^1 &= (0, 1, 0, 0, \dots) \\ &\vdots \\ e^j &= (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklindeki standart birim dizilerinin $\{e^0, e^1, \dots, e^j, \dots\}$ cümlesinin baz kabul eden uzayda tanımlı lineer dönüşümler, bir matris gösterimine sahiptirler. Dizi uzayları teorisi genelde matris temsili olan lineer dönüşümlerle ilgilidir. [42]

Bu çalışmada gerekli olacak matris dönüşüm şartları aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.7 $A = (a_{nk})$ matrisinin c_0 uzayından yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer bir $T \in B(c_0)$ operatörüne karşılık gelmesi için gerek ve yeter şartlar;

- i) A matrisinin bütün satırları ℓ_1 uzayında ve ℓ_1 normları sınırlıdır.
- ii) A matrisinin bütün sütunları c_0 uzayındadır.

T operatörünün normu, satırların ℓ_1 normlarının supremumudur. [43]

Teorem 2.8 $A = (a_{nk})$ matrisinin c uzayından yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer bir $T \in B(c)$ operatörüne karşılık gelmesi için gerek ve yeter şartlar;

- i) A matrisinin bütün satırları ℓ_1 uzayında ve ℓ_1 normları sınırlıdır.
- ii) A matrisinin bütün sütunları c uzayındadır
- iii) A matrisinin $e = (1, 1, 1, \dots)$ dizisini yine c uzayına taşımasıdır.

Bu tür operatörlere yakınsaklığı koruyan operatör denir. T operatörünün normu, satırların ℓ_1 normlarının supremumudur. [43]

Teorem 2.9 $A = (a_{nk})$ matrisinin ℓ_∞ uzayından yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer bir $T \in B(\ell_\infty)$ operatörüne karşılık gelmesi için gerek ve yeter şart A matrisinin bütün satırları ℓ_1 uzayında ve ℓ_1 normları sınırlı olmasıdır.

T operatörünün normu, satırların ℓ_1 normlarının supremumudur. [43]

Teorem 2.10 $A = (a_{nk})$ matrisinin ℓ_1 uzayından yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer bir $T \in B(\ell_1)$ operatöre karşılık gelmesi için gerek ve yeter şart A matrisinin bütün sütunları ℓ_1 uzayında ve ℓ_1 normları sınırlı olmasıdır.

T operatörünün normu, sütunların ℓ_1 normlarının supremumudur. [43]

Teorem 2.11 $1 < p < \infty$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Her n ve k için $b_{nk} > 0$ olmak üzere

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| (b_{nk})^{\frac{1}{p}} < \infty$$

ve

$$\sup_k \sum_n |a_{nk}| (b_{nk})^{\frac{-1}{q}} < \infty$$

şartlarının sağlanması durumunda $A = (a_{nk})$ matrisi ℓ_p uzayından yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer bir $T \in B(\ell_p)$ operatörüne karşılık gelir. [44]

Teorem 2.12 Eğer $A \in B(\ell_\infty) \cap B(\ell_1)$ ise $A \in B(\ell_p)$, $(1 < p < \infty)$ ' dir. [41]

Teorem 2.13 (Riesz-Thorin) $A \in B(\ell_\infty)$ olsun. Eğer $A \in B(\ell_p)$, $(1 \leq p < \infty)$ ve $q > p$ ise $A \in B(\ell_q)$ ' dur. [20]

2.5 Bir Dönüşümün Spektrumu ve İnce Spektrumu

X , sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $T : X \rightarrow X$ lineer bir operatör olsun. T operatörü X için seçilen bir baza bağlı olan bir matris ile gösterilebilir. Bu durumda operatörün spektral analizi aslında operatöre karşılık gelen matrisin karakteristik köklerinin incelenmesidir. Sonsuz boyutlu uzaylardaki çalışmalar, sonlu boyutlu uzaylardakinden çok daha karmaşıktır ve matrisin karakteristik köklerinin incelenmesi sonsuz boyutlu normlu uzaylardaki spektrum kavramlarının bir kısmını belirtir. [1]

Tanım 2.16 (Resolvent kümesi) $X \neq \{\theta\}$ bir normlu uzay, $T : X \rightarrow X$ bir lineer dönüşüm ve I , X uzayındaki özdeşlik dönüşümü olsun. λ bir skalar olmak üzere, $T - \lambda I$ operatörünün $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ olarak gösterilen ters operatörü mevcut, sınırlı ve yoğun kümede tanımlı ise bu λ skalarına T dönüşümünün regüler değeri denir. T operatörünün tüm regüler değerlerinin kümesine T operatörünün resolvent kümesi denir ve $\rho(T, X)$ ile gösterilir. Bu durumda;

$$\rho(T, X) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \overline{\mathcal{R}(\lambda I - T)} = X \text{ ve } (\lambda I - T)^{-1} \text{ mevcut ve sürekli} \right\}$$

şeklindedir. Yani, λ skalarının T lineer dönüşümünün bir regüler değeri olması için gerek ve yeter şart, $T - \lambda I \in I_1 \cup II_1$ olmasıdır.

Tanım 2.17 (Spektrum kümesi) T operatörünün regüler değeri olmayan λ skalarına operatörün spektral değeri, tüm spektral değerlerin oluşturduğu kümeye de spektrum kümesi denir, $\sigma(T, X)$ ile gösterilir. Buna göre;

$$\sigma(T, X) = \mathbb{C} \setminus \rho(T, X)$$

‘ dir.[45]

Bu durumda $\lambda \in \sigma(T, X)$ ise

$$(R_1) \ R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1} \text{ mevcut}$$

$$(R_2) \ R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1} \text{ sınırlı}$$

$$(R_3) \ R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1} \ X \text{ uzayında yoğun bir küme üzerinde tanımlı}$$

özelliklerinden en az biri gerçekleşmez.

Spektrum kümesi nokta (ayrık) spektrum, sürekli spektrum ve artık spektrum kümesi olmak üzere ayrık üç alt kümeye ayrılır. Şimdi spektrum kümesinin alt kümelerinin tanımları verilecektir.

Tanım 2.18 (Nokta Spektrum) $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ operatörünün mevcut olmadığı yani $(T - \lambda I)$, 3 şartını sağlayan λ skalarlarının kümesine, T dönüşümünün nokta spektrumu denir ve $\lambda \in \sigma_p(T, X)$ ile gösterilir.[1]

Tanım 2.19 (Sürekli spektrum) $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ ters operatörünün mevcut ve yoğun kümede tanımlı olduğu, fakat sınırlı olmadığı λ skalarlarının kümesine, T dönüşümünün sürekli spektrum kümesi denir ve $\lambda \in \sigma_c(T, X)$ ile gösterilir.[1]

Tanım 2.20 (Artık spektrum) $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ ters operatörünün mevcut olduğu, fakat yoğun kümede tanımlı olmadığı λ skalarlarının kümesine, T dönüşümünün artık spektrum kümesi denir ve $\lambda \in \sigma_r(T, X)$ ile gösterilir.[1]

Bu tanımda ifade edilen şartlar aşağıdaki çizelgede verilebilir;

Çizelge 2.2 resolvent ve spektrum kümelerinin şartları

λ elemanıdır	sağlanır	sağlanmaz
$\rho(T, X)$	R_1, R_2, R_3	
$\sigma_p(T, X)$		R_1
$\sigma_c(T, X)$	R_1, R_3	R_2
$\sigma_r(T, X)$	R_1	R_3

Dikkat edilirse Çizelge 2.2 deki dört küme ayrıktır ve tüm kompleks düzlemi oluşturur.

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &= \rho(T, X) \cup \sigma(T, X) \\ &= \rho(T, X) \cup \sigma_p(T, X) \cup \sigma_c(T, X) \cup \sigma_r(T, X)\end{aligned}$$

dir. Yukarıda tanımlanan kümelerden bazılarının boş olup olmadığı tartışılması gereken bir varlık problemidir. Sonlu boyutlu uzaylarda; $\sigma_c(T, X) = \sigma_r(T, X) = \emptyset$ ve spektrum $\sigma(T, X)$ sadece $\sigma_p(T, X)$ kümesinden oluşur. [1]

Teorem 2.14 $T \in B(X)$ operatörünün spektrumu ile bu operatörün eşleniği $T^* \in B(X')$ operatörünün spektrumu arasında aşağıdaki bağlantılar vardır:

- a) $\sigma(T^*, X') = \sigma(T, X)$
- b) $\sigma_p(T, X) \subset \sigma_r(T^*, X') \cup \sigma_p(T^*, X')$
- c) $\sigma_p(T^*, X') \subset \sigma_r(T, X) \cup \sigma_p(T, X)$
- d) $\sigma_c(T, X) \subset \sigma_r(T^*, X') \cup \sigma_c(T^*, X')$
- e) $\sigma_c(T^*, X') \subset \sigma_c(T, X)$
- f) $\sigma_r(T, X) \subset \sigma_p(T^*, X')$
- g) $\sigma_r(T^*, X') \subset \sigma_c(T, X) \cup \sigma_p(T, X)$

Aşağıdaki çizelgede bir lineer operatörün spektrum kümelerinin Goldberg sınıflandırmasındaki durumları verilmiştir [46].

Çizelge 2.3 Bir lineer operatörün spektrum alt kümeleri

		1	2	3
		T_λ^{-1} var ve sınırlı	T_λ^{-1} var fakat sınırsız	T_λ^{-1} mevcut değil
I	$\Re(T - \lambda I) = X$	$\lambda \in \rho(T, X)$		$\lambda \in \sigma_p(T, X)$
II	$\overline{\Re(T - \lambda I)} = X$	$\lambda \in \rho(T, X)$	$\lambda \in \sigma_c(T, X)$	$\lambda \in \sigma_p(T, X)$
III	$\overline{\Re(T - \lambda I)} \neq X$	$\lambda \in \sigma_r(T, X)$	$\lambda \in \sigma_r(T, X)$	$\lambda \in \sigma_p(T, X)$

BÖLÜM 3

W OPERATÖRÜNÜN c_0, c ve ℓ_∞ UZAYLARINDAKİ SPEKTRUMU

Bu bölümde,

$$A = (a_{nk}) = \begin{pmatrix} u_0 v_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ u_1 v_0 & u_1 v_1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \dots \\ u_n v_0 & u_n v_1 & \dots & u_n v_{n-1} & u_n v_n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

factorable matris ile bir $x = (x_k)$ dizisi için

$$\Delta x = (x_k - x_{k-1})_{k=0}^\infty$$

şeklinde tanımlanan fark matrisinin çarpımı ile elde edilen c_0, c ve ℓ_∞ uzaylarından yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer operatöre karşılık gelen

$$W = (w_{nk}) = \begin{cases} u_n (v_k - v_{k+1}), & 0 \leq k < n \\ u_n v_n, & n = k \\ 0, & n < k \end{cases} \quad (3.1)$$

matrisinin bu dizi uzaylarındaki spektrumu incelenecektir.

Burada, $u = (u_n)_{n=0}^\infty$, $v = (v_k)_{k=0}^\infty$ dizileri pozitif terimli, sınırlıdır ve kesin azalan, kesin artan ya da sabit olan reel sayı dizilerdir.

Monoton bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart sınırlı olması olduğundan bu diziler yakınsaktır. Yani;

- i. $\lim u_n = L$
- ii. $\lim v_k = M$

olmalıdır.

Kesin artan, kesin azalan ya da sabit olan (u_n) ve (v_k) dizilerinden dolayı matris her zaman sınırlı lineer operatöre karşılık gelmeyebilir. Yani (u_n) ve (v_k) dizilerinden elde edilen 9 farklı durum göz önünde bulundurulmalıdır. Bunun için Bölüm 2 de verilen teoremlerdeki şartları sağlayacak diziler seçilecektir, uygun dizilerin seçilemediği durumlarda ise ince spektrum araştırılmayacaktır.

3.1 W Operatörünün c_0 Uzayı Üzerinde İnce Spektrumları

Teorem 2.7' de verilen şartlar göz önünde bulundurularak W matrisinin bu uzaydan yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer operatöre karşılık gelmesi için bu dizilerin sahip olması gereken özellikler aşağıda tablo halinde verilmiştir.

Çizelge 3.1 W operatörünün $B(c_0)$ olma şartları ve durumları

(v_k)	(u_n)	Şartlar	$W \in B(c_0)$
Kesin azalan	Kesin azalan	$(u_n) \in c_0$	✓
Kesin azalan	Sabit		✗
Kesin azalan	Kesin artan		✗
Sabit	Kesin azalan	-	✓
Sabit	Sabit	-	✓
Sabit	Kesin artan	-	✓
Kesin artan	Kesin azalan	$(u_n) \in c_0$	✓
Kesin artan	Sabit		✗
Kesin artan	Kesin artan		✗

✓ : $W \in B(c_0)$, 5 durum

O halde verilen şartlarla beraber elde edilen 5 durum için matris sınırlı lineer operatöre karşılık gelir ve bu durumlar için bu uzaydaki spektrumu incelenebilir. Diğer durumlar Teorem 2.7' de verilen şartları sağlamamaktadır.

Teorem 3.1

$$\|W\|_{(c_0:c_0)} = \sup_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} |u_n (v_k - v_{k+1})| + |u_n v_n| \right] = \sup_n u_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} |v_k - v_{k+1}| + |v_n| \right] \quad (3.2)$$

Teoremin ispatı Teorem 2.7 den kolaylıkla görülür.

Dizilerin durumuna göre norm da farklı değerler alacaktır;

Çizelge 3.2 W operatörünün c_0 uzayındaki normu

(v_k)	(u_n)	$\ W\ $
Kesin azalan	Kesin azalan	$u_0 v_0$
Sabit	Kesin azalan	$u_0 v$
Sabit	Sabit	uv
Sabit	Kesin artan	$\sup_n u_n v$
Kesin artan	Kesin azalan	$\sup_n u_n (2v_n - v_0)$

elde edilir.

Teorem 3.2

$$\sigma(W, c_0) = \left\{ \left[\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|\lambda - u_i v_i|} \geq 1, i \in N \right\} \cup \{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}, (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \right. \right. \\ \left. \left. \begin{array}{l} \{ \lambda = u_m v, m \in \mathbb{N} \} \cup \{0\}, \quad (v_k) \text{ sabit dizi, } (u_n) \in c_0 \\ \{ \lambda = u_m v, m \in \mathbb{N} \}, \quad (v_k) \text{ sabit dizi, } (u_n) \notin c_0 \end{array} \right\} = S \right. \\ \left. \left[\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|\lambda - u_i v_i|} \geq 1, i \in N \right\} \cup \{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\}, (v_k) \text{ kesin artan dizi} \right] \right\}$$

' dir.

İspat (v_k) dizisinin kesin azalan, sabit ve kesin artan olduğu durumlar için üç farklı spektrum incelemesi yapılacaktır. Her bir durumda $\lambda \notin S$ için $(W - \lambda I)^{-1}$ ters operatörünün mevcut ve (c_0, c_0) da olduğu ve $\lambda \in S$ için $(W - \lambda I)$ operatörünün terslenemediği ya da sınırlı olmadığı gösterilmelidir.

Durum 1 (v_k) dizisi kesin azalan dizi olsun. Tablo 3.1 den (u_n) dizisinin c_0 dizi uzayının elemanı olması gerektiği, yani kesin azalan sıfıra yakınsak bir dizi olduğu görülür.

$\lambda \notin S$ için $(W - \lambda I)$ alt üçgensel olduğundan tersi vardır.

$$(W - \lambda I)(W - \lambda I)^{-1} = I_n$$

eşitliğinden $(W - \lambda I)^{-1}$,

$$(W - \lambda I)^{-1} = (w_{nk})^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{u_n v_n - \lambda} & , \quad n = k \\ \frac{(-1)^{n+k} u_n (v_k - v_{k+1})}{(u_n v_n - \lambda)(u_k v_k - \lambda)} \prod_{i=k+1}^{n-1} \frac{(\lambda - u_i v_{i+1})}{(u_i v_i - \lambda)} & , \quad 0 \leq k < n \\ 0 & , \quad n < k \end{cases} \quad (3.3)$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} \|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(c_0, c_0)} &= \sup_n \left[\left| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} \right| + \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{u_n (v_k - v_{k+1})}{(u_n v_n - \lambda)(u_k v_k - \lambda)} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right) \right| \right] \\ &= \sup_n \left[\left| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} \right| + \left| \frac{u_n}{u_n v_n - \lambda} \right| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left| \frac{v_k - v_{k+1}}{u_k v_k - \lambda} \right| \prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right) \right] \\ &= \sup_n \left| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} \right| \left[1 + |u_n| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left| \frac{v_k - v_{k+1}}{u_k v_k - \lambda} \right| \prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right) \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

elde edilir. (3.2) normunun sonlu olduğu gösterilmelidir. $|q_i| = \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right|$ olsun. $\lambda \notin S$

olduğundan $|q_i| = \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| < 1$ olur. (u_n) ve (v_k) dizileri sınırlı olduğundan

$\sup_k \left| \frac{v_k - v_{k+1}}{u_k v_k - \lambda} \right| = A$ olacak şekilde $A > 0$ sayısı vardır. $|q_i| < 1$ olduğundan $\sup_i |q_i| = |q|$

olacak şekilde bir q değeri bulunabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(c_0, c_0)} &= \sup_n \left| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} \right| \left[1 + |u_n| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left| \frac{v_k - v_{k+1}}{u_k v_k - \lambda} \right| \prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right) \right] \\ &\leq \sup_n \left| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} \right| \left[1 + |u_n| \sum_{k=0}^{n-1} (A |q|^{n-k-1}) \right] \\ &= \sup_n \left| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} \right| \left[1 + |u_n| A \sum_{k=0}^{n-1} |q|^k \right] < \infty \end{aligned}$$

‘dur ve $(W - \lambda I)^{-1} \in (c_0, c_0)'$ dir. O halde $\lambda \notin \sigma(W, c_0)$ olur ki bu da $\sigma(W, c_0) \subseteq S$ olduğunu gösterir.

Şimdi $\lambda \in S$ alalım. $\lambda = 0$ olsun. (u_n) dizisinin sıfır dizisi olduğunu biliyoruz özel olarak $y = (y_n) = (u_n)$ olarak seçelim ve $Wx = y$ eşitliğini çözelim. Buradan,

$$\begin{aligned} u_0 v_0 x_0 &= u_0 \\ u_1 (v_0 - v_1) x_0 + u_1 v_1 x_1 &= u_1 \\ &\vdots \\ u_n (v_0 - v_1) x_0 + u_n (v_1 - v_2) x_1 + \dots + u_n v_n x_n &= u_n \\ u_{n+1} \sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1}) x_k + u_{n+1} v_{n+1} x_{n+1} &= u_{n+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki lineer denklem sistemi çözülürse $x = (x_n) = \left(\frac{1}{v_0}, \frac{1}{v_0}, \dots \right)$ bulunur ve bu dizi c_0 dizi uzayında değildir. Dolayısı ile operatör $\lambda = 0$ için örten değildir tersi yoktur.

$\lambda = u_0 v_0$ ise

$$W - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ u_1 (v_0 - v_1) & u_1 v_1 - u_0 v_0 & 0 & 0 & \dots \\ u_2 (v_0 - v_1) & u_2 (v_1 - v_2) & u_2 v_2 - u_0 v_0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n (v_0 - v_1) & u_n (v_1 - v_2) & u_n (v_2 - v_3) & u_n (v_3 - v_4) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

olup $W - \lambda I : c_0 \rightarrow c_0$ örten değildir. O halde tersi yoktur.

$\lambda = u_m v_m$ ve $m \neq 0$ olsun. Bu durumda matris üçgensel olmadığı için tersi mevcut değildir. Diğer $\lambda \in S$ değerleri için $\|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(c_0, c_0)} = \infty$ olduğu açıktır. Bu ise $S \subseteq \sigma(W, c_0)$ olduğunu gösterir.

Durum 2 (v_k) sabit dizi yani her $k \in \mathbb{N}$ için $(v_k) = v$ olsun. Bu durumda W operatörü;

$$W = \begin{pmatrix} u_0 v & 0 & 0 & \dots \\ 0 & u_1 v & 0 & \dots \\ 0 & 0 & u_2 v & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklinde bir köşegen matristir. Öncelikle (u_n) dizisinin sıfır dizisi olması durumunda $\lambda = 0$ değerinin spektrum kümesinde yer alması ile ilgili ispat verilecektir. $(u_n) \in c_0$ ise Durum 1'deki gibi $y = u$ seçilerek operatörün örten olmadığı görülür. $(u_n) \notin c_0$ ise 0 değeri regüler değerdir. Şimdi de $\lambda = u_m v$ için ispat verilecektir.

$\lambda \neq u_m v$ için $(W - \lambda I)^{-1}$ ters operatörünün mevcut ve (c_0, c_0) da olduğunu göstermek yeterlidir. $\lambda \neq u_m v$ için $(W - \lambda I)$ birebir olduğundan tersi vardır. $(W - \lambda I)x = y$ denklemini çözülerek $(W - \lambda I)^{-1}$ ters operatörü bulunur.

$$\begin{aligned} (u_0 v - \lambda)x_0 &= y_0 \Rightarrow x_0 = \frac{y_0}{u_0 v - \lambda} \\ (u_1 v - \lambda)x_1 &= y_1 \Rightarrow x_1 = \frac{y_1}{u_1 v - \lambda} \\ &\vdots \\ (u_n v - \lambda)x_n &= y_n \Rightarrow x_n = \frac{y_n}{u_n v - \lambda} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$(W - \lambda I)^{-1} = (w_{nk})^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{u_n v - \lambda} & , \quad n = k \\ 0 & , \quad n \neq k \end{cases}$$

olarak elde edilir.

$$\|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(c_0, c_0)} = \sup_n \left| \frac{1}{u_n v - \lambda} \right| < \infty$$

ve bu $(W - \lambda I)^{-1} \in B(c_0)$ olduğunu gösterir. O halde $\lambda \notin \sigma(W, c_0)$ olur ki buradan da $\sigma(W, c_0) \subseteq S$ elde edilir.

Şimdi $\lambda = u_m v$ olsun. Bu durumda m . sütun sadece sıfırlardan oluşur. Bu durumda operatör birebir değildir, tersi yoktur. Bu ise $S \subseteq \sigma(W, c_0)$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Durum 3 (v_k) kesin artan dizi olsun. İspat Durum 1 ile aynıdır.

Teorem 3.3

$$\sigma_p(W, c_0) = \begin{cases} \emptyset, & (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \\ \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ sabit dizi} \\ \left\{ u_m v_m; \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| < 1, m \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N} \right\}, & (v_k) \text{ kesin artan dizi} \end{cases}$$

İspat

Durum 1 (v_k) kesin azalan dizi olsun. Bu durumda (u_n) dizisi kesin azalandır. c_0 dizi uzayında sıfırdan farklı bir x dizisi için $Wx = \lambda x$ olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} u_0 v_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ u_1(v_0 - v_1) & u_1 v_1 & 0 & 0 & \dots \\ u_2(v_0 - v_1) & u_2(v_1 - v_2) & u_2 v_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n(v_0 - v_1) & u_n(v_1 - v_2) & u_n(v_2 - v_3) & u_n(v_3 - v_4) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

matris çarpımından

$$\begin{aligned} u_0 v_0 x_0 &= \lambda x_0 \\ u_1(v_0 - v_1)x_0 + u_1 v_1 x_1 &= \lambda x_1 \\ \vdots \\ u_n(v_0 - v_1)x_0 + u_n(v_1 - v_2)x_1 + \dots + u_n v_n x_n &= \lambda x_n \\ u_{n+1} \sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1})x_k + u_{n+1} v_{n+1} x_{n+1} &= \lambda x_{n+1} \\ \vdots \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünde eğer x_m ,

$x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi ise o zaman $\lambda = u_m v_m$ dir. $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} x_{m+p} &= \frac{u_{m+p}(v_m - v_{m+1})}{u_m v_m - u_{m+p} v_{m+p}} x_m \prod_{i=1}^{p-1} \left(1 + \frac{u_{m+i}(v_{m+i} - v_{m+i+1})}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) \\ &= \frac{u_{m+p}(v_m - v_{m+1})}{u_m v_m - u_{m+p} v_{m+p}} x_m \prod_{i=1}^{p-1} \left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

(v_k) kesin azalan dizi olduğundan $(u_n) \in c_0$ şartı ile beraber $\left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) > 1$

olur. $p \rightarrow \infty$ iken $x_{m+p} \neq 0$ olur ve bu durum $x = (x_n)$ dizisinin c_0 uzayında olması ile çelişir.

Durum 2 (v_k) sabit dizi yani her $k \in \mathbb{N}$ için $(v_k) = v$ olsun.

$$\begin{pmatrix} u_0 v & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_1 v & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & u_2 v & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & u_3 v & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

matris çarpımı yapılırsa

$$(u_0 v - \lambda) x_0 = 0$$

$$(u_1 v - \lambda) x_1 = 0$$

$$(u_2 v - \lambda) x_2 = 0$$

$$\vdots$$

lineer denklem sistemi elde edilir. $\lambda = u_m v$ için dizinin x_m terimi sıfırdan farklıdır.

Yani dizi $x = (0, \dots, 0, x_m, 0, \dots)$ şeklindedir. O halde $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\lambda = u_m v$ özdeğerdir.

Durum 3 (v_k) kesin artan dizi olsun. $(u_n) \in c_0$ olduğundan $\left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) < 1$ olur.

$p \rightarrow \infty$ için

$$x_{m+p} = \frac{u_{m+p} (v_m - v_{m+1})}{u_m v_m - u_{m+p} v_{m+p}} x_m \prod_{i=1}^{p-1} \left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right)$$

dizisi $-1 < \left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) < 1$ aralığındaki $\lambda = u_m v_m$ değerleri için sıfıra

yakınsaktır. Bu durumda $x = (x_n)$ dizisi c_0 dizi uzayındadır. Böylece ispat tamamlanır.

$T: c_0 \rightarrow c_0$ operatörü matris temsili A olan bir operatör ise T nin eşlenik operatörü olan $T^*: c_0' \rightarrow c_0'$ operatörünün A matrisinin transpozu olan A' matrisi olduğu bilinmektedir. Burada c_0 dizi uzayının c_0' dual uzayı, $\|x\| = \sum_k |x_k|$ normlu mutlak toplanabilir dizilerin ℓ_1 Banach uzayı ile izometrik izomorftur.

Teorem 3.4

$$\sigma_p(W^*, c_0^*) = \begin{cases} \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \\ \{u_m v; m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ sabit dizi} \\ \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ kesin artan dizi} \end{cases}$$

İspat

Durum 1 (v_k) kesin azalan dizi olsun. Bu durumda (u_n) dizisi kesin azalan sıfır dizisidir. c_0 uzayının dual uzayı ℓ_1 dizi uzayında sıfırdan farklı bir x dizisi için $W^*x = \lambda x$ olsun. Bu durumda $W^* = W^t$ olduğundan,

$$W^* = \begin{pmatrix} u_0 v_0 & u_1(v_0 - v_1) & u_2(v_0 - v_1) & u_3(v_0 - v_1) & \dots \\ 0 & u_1 v_1 & u_2(v_1 - v_2) & u_3(v_1 - v_2) & \dots \\ 0 & 0 & u_2 v_2 & u_3(v_2 - v_3) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & u_3 v_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dir. $W^*x = \lambda x$ eşitliğinden elde edilen

$$\begin{aligned} (u_0 v_0 - \lambda)x_0 + (v_0 - v_1) \sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i &= 0 \\ (u_1 v_1 - \lambda)x_1 + (v_1 - v_2) \sum_{i=2}^{\infty} u_i x_i &= 0 \\ \vdots & \\ (u_n v_n - \lambda)x_n + (v_n - v_{n+1}) \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i x_i &= 0 \\ \vdots & \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözülmesiyle $\lambda = u_m v_m$ için x dizi sıfırdan farklı ve $m+1$ terimli dizi olarak $x = (x_0, x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots)$ şeklinde bulunur. $\forall l < m$ için

$$\begin{aligned}
x_{m-l} &= \frac{u_m(v_{m-l} - v_{m-l+1})}{u_m v_m - u_{m-l} v_{m-l}} x_m \prod_{i=1}^{l-1} \left(1 + \frac{u_{m-i}(v_{m-i} - v_{m-i+1})}{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i}} \right) \\
&= \frac{u_m(v_{m-l} - v_{m-l+1})}{u_m v_m - u_{m-l} v_{m-l}} x_m \prod_{i=1}^{l-1} \left(\frac{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i+1}}{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i}} \right)
\end{aligned}$$

dir. $(x_n) \in \ell_1$ olması için $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| &= \sum_{n=0}^m |x_n| = \sum_{l=0}^m |x_{m-l}| = |x_m| + \sum_{l=1}^{m-1} \left| \frac{u_m(v_{m-l} - v_{m-l+1})}{u_m v_m - u_{m-l} v_{m-l}} x_m \prod_{i=1}^{l-1} \left(\frac{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i+1}}{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i}} \right) \right| \\
&= |x_m| + |u_m x_m| \sum_{l=1}^{m-1} \left| \frac{v_{m-l} - v_{m-l+1}}{u_m v_m - u_{m-l} v_{m-l}} \prod_{i=1}^{l-1} \left| \frac{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i+1}}{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i}} \right| \right|
\end{aligned}$$

Bu toplam sonlu terim toplamı olduğundan sınırlıdır yani dizi ℓ_1 dizi uzayının bir elemanıdır. Yani her $u_m v_m$ değeri eşlenik operatör için bir özdeğerdir.

Durum 2 (v_k) sabit dizi olsun. Durum 1 deki gibi dual uzayın sıfırdan farklı bir elemanı için $W^* x = \lambda x$ eşitliğinin çözülmesiyle aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$(u_0 v - \lambda) x_0 = 0$$

$$(u_1 v - \lambda) x_1 = 0$$

$$(u_2 v - \lambda) x_2 = 0$$

$$\vdots$$

x_m , x dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi ise $\lambda = u_m v$ dir. $\lambda = u_m v$ için dizi $x = (0, \dots, 0, x_m, 0, \dots)$ olarak bulunur. O halde her $m \in \mathbb{N}$ için $\lambda = u_m v$ özdeğerdir.

Durum 3 (v_k) kesin artan dizi olsun. İspat Durum 1 ile aynıdır.

Teorem 3.5

$$\sigma_r(W, c_0) = \begin{cases} \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \\ \emptyset, & (v_k) \text{ sabit dizi} \\ \left\{ u_m v_m; \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| \geq 1, m \in \mathbb{N}, i \in N \right\}, & (v_k) \text{ kesin artan dizi} \end{cases}$$

İspat

Durum 1 (v_k) kesin azalan dizi olsun. $\{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}$ için operatör birebirdir. O halde tersi vardır. $W^* - \lambda I$ operatörü Teorem 3.4 ten dolayı birebir değildir. Teorem 2.6 dan $\overline{\Re(W - \lambda I)} \neq c_0$ dır. Böylece ispat tamamlanır.

Durum 2 (v_k) sabit dizi olsun. Teorem 3.4 ten $\sigma_p(W^*, \ell_1) = \emptyset$. Bu durumda $W^* - \lambda I$ operatörü tüm λ değerleri için birebirdir. Teorem 2.6 dan sonuç elde edilir.

Durum 3 (v_k) kesin artan dizi olsun. Teorem 3.4 ten $\sigma_p(W^*, \ell_1) = \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}$ olduğu görülür. Bu durumda Teorem 2.6 dan $W^* - \lambda I$ matrisinin bu değerler için yoğun kümede tanımlı olmadığı görülür. Fakat Teorem 3.3 ten $\left\{ u_m v_m; \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| < 1, m \in \mathbb{N}, i \in N \right\}$ değerleri için operatörün tersinin olmadığı bilinmektedir. Dolayısıyla $\left\{ u_m v_m; \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| < 1, m \in \mathbb{N}, i \in N \right\}$ değerleri için operatörün terslenebilir fakat yoğun kümede tanımlı olmadığı görülür, böylece ispat biter.

Teorem 3.6

$$\sigma_c(W, c_0) = \begin{cases} \{0\} \cup \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|\lambda - u_i v_i|} \geq 1, i \in N \right\} \setminus \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \\ \{0\}, & (v_k) \text{ sabit dizi } (u_n) \in c_0 \\ \emptyset, & (v_k) \text{ sabit dizi } (u_n) \notin c_0 \\ \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|\lambda - u_i v_i|} \geq 1, i \in N \right\} \setminus \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ kesin artan dizi} \end{cases}$$

İspat

Durum 1 (v_k) kesin azalan dizi olsun. Bu durumda (u_n) kesin azalan dizidir.

$$\{0\} \cup \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|\lambda - u_i v_i|} \geq 1, i \in N \right\} \setminus \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\} \text{ kümesindeki } \lambda \text{ değerleri için}$$

$(W - \lambda I)$ operatörünün tersi mevcut ve yoğun kümede tanımlıdır. Fakat (3.4) ifadesindeki norm bu değerler için sınırsızdır.

Durum 2 (v_k) sabit dizi olsun. Bu durumda (u_n) kesin azalan, artan veya sabit dizidir.

$(u_n) \in c_0$ ise ters operatörün normu sınırsız olur. Diğer durumlarda norm sonludur.

Durum 3 (v_k) kesin artan dizi olsun. Bu durumda (u_n) kesin azalan sıfır dizisidir.

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|\lambda - u_i v_i|} \geq 1, i \in N \right\} \setminus \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\} \text{ kümesindeki } \lambda \text{ değerleri için } (W - \lambda I)$$

operatörünün tersi mevcut ve yoğun kümede tanımlıdır. Fakat (3.4) normunun sınırsız olmasından dolayı $W - \lambda I$ operatörü sınırlı terse sahip değildir.

3.2 c ve ℓ_∞ Dizi Uzaylarında W Operatörünün İnce Spektrumu

Bu kısımda $W = (w_{nk})$ matrisinin c ve ℓ_∞ uzayındaki spektrumu incelenecektir. Bunun için önceki kısımda olduğu gibi operatörün bu uzaylarda sınırlı lineer operatöre karşılık geldiği durumlar ve karşılık gelmesini sağlayacak olan dizi şartları verilecektir.

Çizelge 3.3 W operatörünün $B(c)$ olma şartları ve durumları

(v_k)	(u_n)	Şartlar	$W \in B(c)$
Kesin azalan	Kesin azalan	$(u_n) \in c$	✓
Kesin azalan	Sabit	-	✓
Kesin azalan	Kesin artan	$(u_n) \in c$	✓
Sabit	Kesin azalan	-	✓
Sabit	Sabit	-	✓
Sabit	Kesin artan	-	✓
Kesin artan	Kesin azalan	$(u_n) \in c$	✓
Kesin artan	Sabit	-	✓
Kesin artan	Kesin artan	$(u_n) \in c$	✓

✓ : $W \in B(c)$, 9 durum

O halde operatör dizilerin sahip olduğu bazı özelliklerle her durumda c uzayından yine bu uzaya sınırlı lineer operatör belirtir.

Teorem 3.7

$$\|W\|_{(c,c)} = \sup_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} |u_n (v_k - v_{k+1})| + |u_n v_n| \right] = \sup_n u_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} |v_k - v_{k+1}| + |v_n| \right] \quad (3.5)$$

Teoremin ispatı Teorem 2.7' den kolayca görülür.

Dizilerin durumuna göre norm da farklı değerler alacaktır;

Çizelge 3.4 W operatörünün c uzayındaki normu		
(v_k)	(u_n)	$\ W\ $
Kesin azalan	Kesin azalan	$u_0 v_0$
Kesin azalan	Sabit	$u v_0$
Kesin azalan	Kesin artan	$L v_0$
Sabit	Kesin azalan	$u_0 v$
Sabit	Sabit	$u v$
Sabit	Kesin artan	$L v$
Kesin artan	Kesin azalan	$\sup_n u_n (2v_n - v_0)$
Kesin artan	Sabit	$\sup_n u (2v_n - v_0)$
Kesin artan	Kesin artan	$\sup_n u_n (2v_n - v_0)$

Teorem 3.8

$$\sigma(W, c) = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \{0\} \cup \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|\lambda - u_i v_i|} \geq 1, i \in N \right\} \cup \{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\}, (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \right. \\ \left. \{u_m v, m \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}, \quad (v_k) \text{ sabit dizi} \right. \\ \left. \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|\lambda - u_i v_i|} \geq 1, i \in N \right\} \cup \{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\}, \quad (v_k) \text{ kesin artan dizi} \right\} = S \end{array} \right.$$

' dir.

İspat (v_k) dizisinin sabit ve kesin azalan veya kesin artan olduğu durumlar için üç ayrı spektrum incelemesi yapılacaktır.

Durum 1 (v_k) kesin azalan dizi olsun. $\lambda \notin S$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(W - \lambda I)$ operatörünün tersinin mevcut ve $(W - \lambda I)^{-1} \in B(c)$ olduğu gösterilirse ispat biter. $\lambda \notin S$ için $(W - \lambda I)$ alt üçgensel olduğundan tersi vardır.

$$(W - \lambda I)(W - \lambda I)^{-1} = I_n$$

eşitliği çözülerek $(W - \lambda I)^{-1}$ ters operatörü, yine (3.2) deki gibi bulunur.

Buradan,

$$\begin{aligned} \|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(c,c)} &= \sup_n \left\| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_n (v_k - v_{k+1})}{(u_n v_n - \lambda)(u_k v_k - \lambda)} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right) \right\| \\ &= \sup_n \left\| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} + \frac{u_n}{u_n v_n - \lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{v_k - v_{k+1}}{u_k v_k - \lambda} \prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right) \right\| \\ &= \sup_n \left\| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} \left[1 + |u_n| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{v_k - v_{k+1}}{u_k v_k - \lambda} \prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right) \right] \right\| \end{aligned} \quad (3.6)$$

elde edilir. Ters operatörün sınırlı olması için $\|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(c,c)} < \infty$ olmalıdır.

$|q_i| = \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right|$ olsun. $\lambda \notin S$ olduğundan $|q_i| = \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| < 1$ olur. Yine dizilerin

sınırlılığından $\sup_k \left| \frac{v_k - v_{k+1}}{u_k v_k - \lambda} \right| = B$ yazılabilir. $|q_i| < 1$ olduğundan $\sup_i |q_i| = |q|$ olacak

şekilde bir q değeri bulunabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(c,c)} &= \sup_n \left\| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} \left[1 + |u_n| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{v_k - v_{k+1}}{u_k v_k - \lambda} \prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right) \right] \right\| \\ &\leq \sup_n \left\| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} \left[1 + |u_n| \sum_{k=0}^{n-1} (B |q|^k) \right] \right\| \\ &= \sup_n \left\| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} \left[1 + |u_n| B \sum_{k=0}^{n-1} |q|^k \right] \right\| < \infty \end{aligned}$$

dir ve bu $(W - \lambda I)^{-1} \in B(c)$ olduğunu gösterir. O halde $\lambda \notin \sigma(W, c)$ yani $\sigma(W, c) \subseteq S$ dir.

Şimdi $\lambda \in S$ alalım. $\lambda = 0$ ise $\Re(W - \lambda I) = \{y = (y_i)_{i=0}^{\infty} \in c : y_0 = u_0 v_0 x_0\}$ olur.

Buradan $(W - \lambda I)$ operatörünün yoğun kümede tanımlı olmadığı dolayısıyla $\lambda = 0$ değerinin spektruma ait olduğu görülür.

$\lambda = u_0 v_0$ ise

$$W - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ u_1(v_0 - v_1) & u_1 v_1 - u_0 v_0 & 0 & 0 & \dots \\ u_2(v_0 - v_1) & u_2(v_1 - v_2) & u_2 v_2 - u_0 v_0 & 0 & \dots \\ u_3(v_0 - v_1) & u_3(v_1 - v_2) & u_3(v_2 - v_3) & u_3 v_3 - u_0 v_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n(v_0 - v_1) & u_n(v_1 - v_2) & u_n(v_2 - v_3) & u_n(v_3 - v_4) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

olur. Bu durum da $W - \lambda I : c \rightarrow c$ operatörünün örtenliğini bozar çünkü $\Re(W - \lambda I) = \{(y_n) \in c : y_0 = 0\}$.

$\lambda \neq u_0 v_0$ olsun. S kümesindeki $\{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\}$ değerleri için matris normu tanımlı değildir diğer değerler için $\|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(cc)} = \infty$ olduğu açıktır. Bu ise $S \subseteq \sigma(W, c)$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak $S = \sigma(W, c)$ elde edilir

Durum 2 (v_k) sabit dizi olsun her $k \in \mathbb{N}$ için $(v_k) = v$ diyelim. Bu durumda W operatörü;

$$W = \begin{pmatrix} u_0 v & 0 & 0 & \dots \\ 0 & u_1 v & 0 & \dots \\ 0 & 0 & u_2 v & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklinde olur.

$\lambda \notin S$ için $(W - \lambda I)^{-1}$ ters operatörünün mevcut ve c dizi uzayından yine bu uzaya sınırlı lineer operatör olduğunu ispatlamak yeterlidir. $\lambda \notin S$ için $(W - \lambda I)$ birebir olduğundan tersi vardır. $(W - \lambda I)x = y$ denklemi çözülerek $(W - \lambda I)^{-1}$ ters operatörü bulunur.

$$(u_0v - \lambda)x_0 = y_0 \Rightarrow x_0 = \frac{y_0}{u_0v - \lambda}$$

$$(u_1v - \lambda)x_1 = y_1 \Rightarrow x_1 = \frac{y_1}{u_1v - \lambda}$$

$$\vdots$$

$$(u_nv - \lambda)x_n = y_n \Rightarrow x_n = \frac{y_n}{u_nv - \lambda}$$

$$\vdots$$

$$(W - \lambda I)^{-1} = (w_{nk})^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{u_nv - \lambda} & , \quad n = k \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

olarak elde edilir. $\lambda \notin S$ olduğundan $u_nv - \lambda \neq 0$ dır. Teorem 2.8' den

$$\|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(c;c)} = \sup_n \left| \frac{1}{u_nv - \lambda} \right| < \infty$$

elde edilir ve bu $(W - \lambda I)^{-1} \in B(c)$ olduğunu gösterir. Bu durumda $\lambda \notin \sigma(W, c)$ bulunur, yani $\sigma(W, c) \subseteq S$ dir.

Şimdi $\lambda \in S$ alalım.

$\lambda = 0$ ise $\Re(W - \lambda I) = \left\{ y = (y_i)_{i=0}^{\infty} \in c : y_i = u_i v_i x_i, i \in \mathbb{N} \right\}$ olur. Buradan $(W - \lambda I)$ operatörünün yoğun kümede tanımlı olmadığı dolayısıyla $\lambda = 0$ değerinin spektruma ait olduğu görülür.

$\lambda = u_m v_m$ olsun. Bu durumda m . sütun sadece sıfırlardan oluşur. Bu durumda operatör birebir değildir, tersi yoktur. Bu ise $S \subseteq \sigma(W, c)$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Durum 3 (v_k) kesin artan dizi olsun. İspat Durum 1 ile aynıdır.

Teorem 3.9

$$\sigma_p(W, c) = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset, & (v_k) \text{ kesin azalan, } (u_n) \text{ kesin azalan dizi} \\ \emptyset, & (v_k) \text{ kesin azalan, } (u_n) \text{ sabit dizi} \\ \left\{ u_m v_m; \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| < 1, i \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}, & (v_k) \text{ kesin azalan, } (u_n) \text{ kesin artan dizi} \\ \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ sabit, } (u_n) \text{ kesin artan, azalan veya sabit dizi} \\ \left\{ u_m v_m; \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| < 1, i \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}, & (v_k) \text{ kesin artan, } (u_n) \text{ kesin azalan dizi} \\ \emptyset, & (v_k) \text{ kesin artan, } (u_n) \text{ sabit dizi} \\ \emptyset, & (v_k) \text{ kesin artan, } (u_n) \text{ kesin artan dizi} \end{array} \right.$$

İspat

Durum 1 (v_k) kesin azalan dizi olsun. c dizi uzayında sıfırdan farklı bir x dizisi için

$Wx = \lambda x$ olsun. Bu eşitlikten aşağıdaki lineer sistem elde edilir

$$\begin{aligned} u_0 v_0 x_0 &= \lambda x_0 \\ u_1 (v_0 - v_1) x_0 + u_1 v_1 x_1 &= \lambda x_1 \\ u_2 (v_0 - v_1) x_0 + u_2 (v_1 - v_2) x_1 + u_2 v_2 x_2 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \\ u_n (v_0 - v_1) x_0 + u_n (v_1 - v_2) x_1 + \dots + u_n v_n x_n &= \lambda x_n \\ u_{n+1} \sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1}) x_k + u_{n+1} v_{n+1} x_{n+1} &= \lambda x_{n+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bu denklem sisteminin çözümünde eğer $x_m, x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi

ise o zaman $\lambda = u_m v_m$ dir. $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} x_{m+p} &= \frac{u_{m+p} (v_m - v_{m+1})}{u_m v_m - u_{m+p} v_{m+p}} x_m \prod_{i=1}^{p-1} \left(1 + \frac{u_{m+i} (v_{m+i} - v_{m+i+1})}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) \\ &= \frac{u_{m+p} (v_m - v_{m+1})}{u_m v_m - u_{m+p} v_{m+p}} x_m \prod_{i=1}^{p-1} \left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

(u_n) kesin azalan veya sabit dizi ise $\left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}}\right) > 1$ olur. $p \rightarrow \infty$ iken

$(x_n) \rightarrow \infty$ olur ve bu durum $x = (x_n)$ dizisinin c dizi uzayında olması ile çelişir.

(u_n) kesin artan dizi ise (v_k) pozitif terimli kesin azalan dizi olduğundan

$\left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}}\right) < 1$ olabilir. $-1 < \left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}}\right) < 1$ şartını sağlayan $\lambda = u_m v_m$

değerleri için $p \rightarrow \infty$ iken (x_n) , c dizi uzayında, yani yakınsak dizi olarak elde edilir.

Durum 2 (v_k) , $k \in \mathbb{N}$ için $v_k = v$ olacak şekilde bir sabit dizi olsun.

$$\begin{pmatrix} u_0 v & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_1 v & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & u_2 v & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & u_3 v & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

matris çarpımından

$$(u_0 v - \lambda) x_0 = 0$$

$$(u_1 v - \lambda) x_1 = 0$$

$$(u_2 v - \lambda) x_2 = 0$$

$$\vdots$$

lineer denklem sistemi elde edilir. $\lambda = u_m v$ için dizinin x_m terimi sıfırdan farklıdır.

Yani dizi $x = (0, \dots, 0, x_m, 0, \dots)$ şeklindedir. O halde her $m \in \mathbb{N}$ için $\lambda = u_m v$ özdeğerdir.

Durum 3 (v_k) kesin artan dizi olsun.

(u_n) kesin azalan dizi olduğunda $\left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}}\right) < 1$ olabilir. Bu durumda $p \rightarrow \infty$

için (x_n) dizisi $-1 < \left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}}\right) < 1$ olacak şekildeki $\lambda = u_m v_m$ değerleri için

yakınsaktır. Bu durumda $x = (x_n)$ dizisi yakınsak diziler uzayının bir elemanıdır.

(u_n) kesin artan veya sabit dizi olduğunda $\left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) > 1$ olur. Bu durumda

$p \rightarrow \infty$ için x_n dizisi yakınsak değildir.

Böylece ispat tamamlanır.

$T: c \rightarrow c$ operatörü matris temsili A olan sınırlı bir operatör ise T nin eşlenik operatörü olan $T^*: c' \rightarrow c'$ operatörü, c dizi uzayının c' dual uzayı ile izometrik olan $\mathbb{C} \oplus \ell_1$ dizi uzayı üzerinde tanımlı,

$$\begin{pmatrix} \chi & 0 \\ b & A^t \end{pmatrix}$$

matrisidir. Burada χ , A matrisinin satır toplamaları dizisinin limiti ile A matrisinin sütunlarının limitleri toplamının farkıdır. b ise k .terimi, A matrisinin k .sütununun limiti olan sütun vektördür.

$$W^* = \begin{pmatrix} \chi & 0 \\ b & W^t \end{pmatrix}$$

$$\chi = \lim_n \sum_k w_{nk} - \sum_k \lim_n w_{nk} = u_n v_0 - u_n v_0 = 0$$

$b = k$.satırı W nin k . sütun limiti olan sütun vektör

Bu durumda eşlenik operator, ($\lim_n u_n = L$ olmak üzere)

$$W^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ L(v_0 - v_1) & u_0 v_0 & u_1(v_0 - v_1) & u_2(v_0 - v_1) & \dots \\ L(v_1 - v_2) & 0 & u_1 v_1 & u_2(v_1 - v_2) & \dots \\ L(v_2 - v_3) & 0 & 0 & u_2 v_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Teorem 3.10

$$\sigma_p(W^*, c^*) = \begin{cases} \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ kesin azalan, } (u_n) \text{ kesin artan, azalan veya sabit dizi} \\ \{0\} \cup \{u_m v; m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ sabit, } (u_n) \text{ kesin artan, azalan veya sabit dizi} \\ \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ kesin artan, } (u_n) \text{ kesin artan, azalan veya sabit dizi} \end{cases}$$

İspat

Durum 1 (v_k) kesin azalan dizi olsun. $(W^* - \lambda I)x = 0$ eşitliğini c dizi uzayının duali $\mathbb{C} \oplus \ell_1$ uzayındaki sıfırdan farklı bir $x = (x_n)$ dizisi için mümkün kılan λ değerlerinin bulmamız gerekmektedir.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ L(v_0 - v_1) & u_0 v_0 & u_1(v_0 - v_1) & u_2(v_0 - v_1) & \cdots \\ L(v_1 - v_2) & 0 & u_1 v_1 & u_2(v_1 - v_2) & \cdots \\ L(v_2 - v_3) & 0 & 0 & u_2 v_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Buradan bir lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} -\lambda x_0 &= 0 \\ L(v_0 - v_1)x_0 + (u_0 v_0 - \lambda)x_1 + (u_1(v_0 - v_1))x_2 + (u_2(v_0 - v_1))x_3 + \dots &= 0 \\ L(v_1 - v_2)x_0 + (u_1 v_1 - \lambda)x_2 + (u_2(v_1 - v_2))x_3 + (u_3(v_1 - v_2))x_4 + \dots &= 0 \\ \vdots & \\ L(v_m - v_{m+1})x_0 + (u_m v_m - \lambda)x_{m+1} + \sum_{i=1}^{\infty} u_{m+i}(v_m - v_{m+1})x_{m+1+i} &= 0 \\ \vdots & \end{aligned}$$

$\lambda = u_m v_m$ olduğunda ise

$$L(v_m - v_{m+1})x_0 + (u_m v_m - \lambda)x_{m+1} + \sum_{i=1}^{\infty} u_{m+i}(v_m - v_{m+1})x_{m+1+i} = 0 \text{ olduğundan her } m \in \mathbb{N}$$

için $x_{m+1} \neq 0$ olur ve x dizisi $(0, x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, 0, \dots)$ şeklinde elde edilir.

$\forall l < m$ için

$$\begin{aligned}
x_{m+1-l} &= \frac{u_{m+1}(v_{m-l} - v_{m-l+1})}{u_m v_m - u_{m-l} v_{m-l}} x_{m+1} \prod_{i=1}^{l-1} \left(1 + \frac{u_{m-i}(v_{m-i} - v_{m-i+1})}{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i}} \right) \\
&= \frac{u_{m+1}(v_{m-l} - v_{m-l+1})}{u_m v_m - u_{m-l} v_{m-l}} x_{m+1} \prod_{i=1}^{l-1} \left(\frac{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i+1}}{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i}} \right)
\end{aligned}$$

dir. $(x_n) \in \ell_1$ olması için

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| &= \sum_{n=1}^m |x_n| = \sum_{l=0}^m |x_{m+1-l}| = |x_{m+1}| + \sum_{l=1}^{m-1} \left| \frac{u_{m+1}(v_{m-l} - v_{m-l+1})}{u_m v_m - u_{m-l} v_{m-l}} x_{m+1} \prod_{i=1}^{l-1} \left(\frac{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i+1}}{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i}} \right) \right| \\
&= |x_{m+1}| + |u_{m+1} x_{m+1}| \sum_{l=1}^{m-1} \left| \frac{v_{m-l} - v_{m-l+1}}{u_m v_m - u_{m-l} v_{m-l}} \prod_{i=1}^{l-1} \left| \frac{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i+1}}{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i}} \right| \right|
\end{aligned}$$

Seri toplamı sonlu olmalıdır. Bu toplamda $m+1$ terim olduğu için sonlu yani ℓ_1 uzayının elemanıdır. O halde (v_k) kesin azalan dizi olduğunda $\{0\} \cup \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}$ kümesi özdeğerler kümesidir.

Durum 2 (v_k) sabit dizi olsun. c uzayının dual uzayında sıfırdan farklı bir x dizisi için $W^* x = \lambda x$ olsun. Bu durumda,

$$W^* - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & u_0 v - \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & u_1 v - \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & u_2 v - \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_3 v - \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

matrisi ve $(W^* - \lambda I)x = 0$ eşitliğinden aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir;

$$-\lambda x_0 = 0$$

$$(u_0 v - \lambda) x_1 = 0$$

$$(u_1 v - \lambda) x_2 = 0$$

$$\vdots$$

Bu lineer denklem sistemi çözüldüğünde $\lambda = 0$ için $x = (x_m, 0, 0, \dots)$, $\lambda = u_m v$ için $x = (0, \dots, 0, x_m, 0, \dots)$ şeklinde ℓ_1 uzayında sıfırdan farklı diziler elde edilir ve ispat tamamlanır.

Durum 3 (v_k) kesin artan dizi olsun. İspat durum 1 ile aynıdır.

Teorem 3.11

$$\sigma_r(W, c) =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ kesin azalan, } (u_n) \text{ kesin azalan veya sabit dizi} \\ \left\{ u_m v_m; 1 \leq \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| < 1, i \in N, m \in \mathbb{N} \right\}, & (v_k) \text{ kesin azalan, } (u_n) \text{ kesin artan dizi} \\ \{0\}, & (v_k) \text{ sabit, } (u_n) \text{ kesin artan, azalan veya sabit dizi} \\ \left\{ u_m v_m; 1 \leq \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right|, i \in N, m \in \mathbb{N} \right\} & (v_k) \text{ kesin artan, } (u_n) \text{ kesin azalan dizi} \\ \{u v_m; m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ kesin artan, } (u_n) \text{ sabit dizi} \\ \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ kesin artan, } (u_n) \text{ kesin artan dizi} \end{array} \right.$$

İspat Gösterilmesi gereken $W - \lambda I$ operatörünün tersinin mevcut olduğu fakat bu ters operatörün yoğun kümede tanımlı olmadığı λ değerleri kümesidir.

Durum 1 (v_k) kesin azalan dizi olsun.

(u_n) kesin azalan veya sabit dizi olsun. Bu durumda $\{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}$ için operatör birebirdir. O halde tersi vardır. Fakat $W^* - \lambda I$ Teorem 3.10' dan dolayı birebir değildir. Teorem 2.6' dan $\overline{\mathfrak{R}(W - \lambda I)} \neq c$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

$$(u_n) \text{ kesin artan dizi olsun. Bu durumda } \left\{ u_m v_m; 1 \leq \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| < 1, i \in N, m \in \mathbb{N} \right\}$$

olacak şekildeki λ değerleri için için operatör birebirdir, yani tersi vardır. Ayrıca, $W^* - \lambda I$ operatörü Teorem 3.10' dan dolayı bu değerler için birebirliği sağlar. O halde Teorem 2.6' dan $\overline{\mathfrak{R}(W - \lambda I)} = c$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Durum 2 (v_k) sabit dizi olsun. Teorem 2.6' dan $W^* - \lambda I$ operatörünün birebir olmadığı noktalarda $W - \lambda I$ operatörü yoğun görüntü kümesine sahip değildir. O halde $\{0\} \cup \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}$ için $\overline{\Re(W - \lambda I)} \neq c$ dir. Fakat $\{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}$ kümesindeki operatörün tersi olmadığı için yalnızca $\{0\}$ noktası için $\overline{\wp((W - \lambda I)^{-1})} \neq c$ olur.

Durum 3 (v_k) kesin artan dizi olsun.

(u_n) kesin azalan dizi olsun. Bu durumda $\left\{u_m v_m; 1 \leq \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right|, i \in N, m \in \mathbb{N} \right\}$ olacak şekildeki λ değerleri için için operatör birebirdir, yani tersi vardır. Ayrıca, $W^* - \lambda I$ operatörü Teorem 3.10' dan dolayı bu değerler için birebirliği sağlar. O halde Teorem 2.6' dan $\overline{\Re(W - \lambda I)} = c$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

(u_n) sabit dizi olsun. Teorem 3.9 'dan $\{0\} \cup \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}$ değerleri için operatörün tersinin mevcut olduğu görülür. Teorem 2.6' dan bu değerler için $\overline{\Re(W - \lambda I)} = \overline{\wp(W - \lambda I)} \neq c$ elde edilir.

(u_n) c uzayında kesin artan dizi olsun. Bu durumda $\{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}$ kümesindeki $\lambda = u_m v_m$ değerleri için için operatör birebirdir, yani tersi vardır. Fakat $W^* - \lambda I$, Teorem 3.10' dan dolayı birebir değildir. Teorem 2.6' dan $\overline{\Re(W - \lambda I)} \neq c$ dir.

Teorem 3.12

$$\sigma_c(W, c) = \begin{cases} \left\{ \left\{ \{0\} \cup \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|\lambda - u_i v_i|} \geq 1, i \in N \right\} \right\} \setminus \{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\}, (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \right. \\ \quad \varnothing, & (v_k) \text{ sabit dizi} \\ \left. \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|\lambda - u_i v_i|} \geq 1, i \in N \right\} \setminus (\{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}), (v_k) \text{ kesin artan dizi} \right\} \end{cases}$$

İspat Bu ispatta gösterilmesi gereken $W - \lambda I$ operatörü tersinin yoğun kümede tanımlı fakat süreksiz olduğu λ değerlerini bulmaktır.

Durum 1 (v_k) kesin azalan dizi olsun. Bu durumda (u_n) dizi uzayında kesin azalan bir dizidir.

$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|\lambda - u_i v_i|} \geq 1, i \in N \right\} \setminus (\{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\} \cup \{0\})$ kümesindeki λ değerleri

için $(W - \lambda I)$ operatörünün tersi mevcut ve yoğun kümede tanımlıdır. Bu değerlerde (3.6) normuna sahip ters operatör sınırsız olduğundan sürekli değildir.

Durum 2 (v_k) pozitif terimli sabit dizi olsun. Bu durumda (u_n) kesin azalan, artan veya sabit dizidir.

$$\sigma(W, c) = \sigma_p(W, c) \cup \sigma_c(W, c) \cup \sigma_r(W, c)$$

olarak ayrık üç küme birleşimi olarak yazılabildiğinden

$$\sigma_c(W, c) = \sigma(W, c) \setminus (\sigma_p(W, c) \cup \sigma_r(W, c))$$

olur ve buradan $\sigma_c(W, c) = \emptyset$ elde edilir.

Durum 3 (v_k) pozitif terimli kesin artan dizi olsun. Bu durumda (u_n) kesin azalan dizidir.

$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|\lambda - u_i v_i|} \geq 1, i \in N \right\} \setminus (\{u_m v_m; m \in \mathbb{N}\} \cup \{0\})$ kümesindeki λ değerleri için $(W - \lambda I)$ operatörünün tersi mevcut ve yoğun kümede tanımlıdır. Fakat (3.6) normundan dolayı $(W - \lambda I)^{-1}$ operatörü sürekli değildir. Bu nedenle $W - \lambda I$ sınırlı terse sahip değildir.

Teorem 3.13

$$\sigma(W, \ell_\infty) = \left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \{0\} \cup \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|\lambda - u_i v_i|} \geq 1, i \in N \right\} \cup \{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\}, (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \right. \\ \left. \{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}, (v_k) \text{ sabit dizi} \right. \\ \left. \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|\lambda - u_i v_i|} \geq 1, i \in N \right\} \cup \{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\}, (v_k) \text{ kesin artan dizi} \right\} \end{array} \right\}$$

İspat Cartlidge, A, c yakınsak diziler uzayından yine bu uzaya sınırlı lineer operatör ise $\sigma(A, \ell_\infty) = \sigma(A, c)$ olduğunu göstermiştir [5]. Bu çalışmadan ve Teorem 3.7' den sonuç görülür.

 **W OPERATÖRÜNÜN ℓ_1 ve ℓ_p UZAYLARINDAKİ İNCE
SPEKTRUMU**

Bu bölümde, ℓ_1 ve ℓ_p dizi uzaylarında sınırlı lineer bir operatöre karşılık gelen

$$W = (w_{nk}) = \begin{cases} u_n(v_k - v_{k+1}), & 0 \leq k < n \\ u_n v_n, & n = k \\ 0, & n < k \end{cases}$$

matrisinin spektrumu incelenecektir.

W matrisi, bir önceki bölümde olduğu gibi (u_n) ve (v_k) dizilerinin durumuna bağlı olarak 9 farklı şekilde oluşturulabilir. Fakat bunlardan biri ya da birkaçı sınırlı lineer operatöre karşılık gelmeyebilir. O nedenle bu bölümde de önce dizilere bazı şartlar yüklenecek ardından Bölüm 2 de verilen sınırlı lineer operatöre karşılık gelmesi için gerekli koşulları sağlayan durumlar için spektral analiz yapılacaktır.

4.1 W Operatörünün ℓ_1 Uzayı Üzerindeki Spektrumu

Bir matrisin ℓ_1 dizi uzayından yine bu uzaya sınırlı lineer bir operatöre karşılık gelmesi için Teorem 2.10' da bazı şartlar verilmiştir. (u_n) , (v_k) dizileri ile oluşturulan W matrisinin $B(\ell_1)$ sınırlı lineer dönüşümler uzayındaki bir operatörüne karşılık gelmesi için bu dizilerin sahip olması gereken özellikler aşağıda tablo halinde verilmiştir.

Çizelge 4.1 W operatörünün $B(\ell_1)$ uzayında olma şartları ve durumları

(v_k)	(u_n)	Şartlar	$W \in B(\ell_1)$
Kesin azalan	Kesin azalan	$(u_n) \in \ell_1$	✓
Kesin azalan	Sabit		✗
Kesin azalan	Kesin artan		✗
Sabit	Kesin azalan	-	✓
Sabit	Sabit	-	✓
Sabit	Kesin artan	-	✓
Kesin artan	Kesin azalan	$(u_n) \in \ell_1$	✓
Kesin artan	Sabit		✗
Kesin artan	Kesin artan		✗

✓ : $W \in B(\ell_1)$, 5 durum

Yani spektrum incelemesi 5 ayrı durum için yapılacaktır. Diğer durumlar Teorem 2.10' da verilen şartlara engel oluşturmaktadır.

Teorem 4.1 $\|W\|_{(\ell_1, \ell_1)} = \sup_k \left[|u_k v_k| + |v_k - v_{k+1}| \sum_{n=k}^{\infty} |u_{n+1}| \right]$

İspat Teorem 2.10'dan görülür.

Dizilerin durumuna göre farklı değerler alan norm için de aşağıdaki tablo verilebilir;

Çizelge 4.2 W operatörünün ℓ_1 uzayındaki normu

(v_k)	(u_n)	$\ W\ $
Kesin azalan	Kesin azalan	$\sup_k \left[u_k v_k + (v_k - v_{k+1}) \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n \right]$
Sabit	Kesin azalan	$u_0 v$
Sabit	Sabit	uv
Sabit	Kesin artan	Lv
Kesin artan	Kesin azalan	$\sup_k \left[u_k v_k + (v_{k+1} - v_k) \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n \right]$

Teorem 4.2

$$\sigma(W, \ell_1) = \left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|u_i v_i - \lambda|} \geq 1, i \in N \right\} \cup \{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}, & (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \\ \left\{ \lambda = u_m v_m, m \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}, & (v_k) \text{ sabit dizi} \\ \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|u_i v_i - \lambda|} \geq 1, i \in N \right\} \cup \{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ kesin artan dizi} \end{array} \right\} = S$$

İspat (v_k) dizisinin kesin azalan veya kesin artan durumu ve sabit dizi durumu için iki farklı spektrum incelemesi yapılacaktır.

Durum 1 (v_k) kesin azalan veya kesin artan dizi olsun. Bu durumda (u_n) dizisi azalarak sifıra yakınsayan bir dizi olur (Teorem 2.10 gereğince). $\lambda \notin S$ için $(W - \lambda I)^{-1}$ ters operatörünün mevcut ve $(W - \lambda I)^{-1} \in B(\ell_1)$ olduğu, $\lambda \in S$ için ise operatörün sınırlı tersi olmadığı gösterilmelidir.

$\lambda \notin S$ için $(W - \lambda I)$ alt üçgensel olduğundan tersi vardır.

$$(W - \lambda I)(W - \lambda I)^{-1} = I_n$$

eşitliğinden $(W - \lambda I)^{-1}$ ters operatörü,

$$(W - \lambda I)^{-1} = (w_{nk})^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{u_n v_n - \lambda}, & n = k \\ \frac{(-1)^{n+k} u_n (v_k - v_{k+1})}{(u_n v_n - \lambda)(u_k v_k - \lambda)} \prod_{i=k+1}^{n-1} \frac{(\lambda - u_i v_{i+1})}{(u_i v_i - \lambda)}, & 0 \leq k < n \\ 0, & n < k \end{cases}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} \|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(\ell_1; \ell_1)} &= \sup_k \left[\left| \frac{1}{u_k v_k - \lambda} \right| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{u_n (v_k - v_{k+1})}{(u_n v_n - \lambda)(u_k v_k - \lambda)} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right) \right| \right] \\ &= \sup_k \left[\left| \frac{1}{u_k v_k - \lambda} \right| + \left| \frac{v_k - v_{k+1}}{u_k v_k - \lambda} \right| \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{u_n}{u_n v_n - \lambda} \right| \prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right] \\ &= \sup_k \left| \frac{1}{u_k v_k - \lambda} \right| \left[1 + |v_k - v_{k+1}| \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{u_n}{u_n v_n - \lambda} \right| \prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

olur. Bu eşitliğin sonlu olduğu gösterilmelidir. $|q_i| = \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right|$ olsun. $\lambda \notin S$

olduğundan $|q_i| = \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| < 1$ olur. $\sup_n \left| \frac{u_n}{u_n v_n - \lambda} \right| = P$ olduğunu kabul edelim.

$|q_i| < 1$ olduğundan $\sup_i |q_i| = |q|$ olacak şekilde bir q değeri bulunabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(\ell_1, \ell_1)} &= \sup_k \left| \frac{1}{u_k v_k - \lambda} \right| \left[1 + |v_k - v_{k+1}| \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{u_n}{u_n v_n - \lambda} \right| \prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right] \\ &\leq \sup_k \left| \frac{1}{u_k v_k - \lambda} \right| \left[1 + |v_k - v_{k+1}| \sum_{n=k+1}^{\infty} P \prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right] \\ &= \sup_k \left| \frac{1}{u_k v_k - \lambda} \right| \left[1 + |v_k - v_{k+1}| P \sum_{n=k+1}^{\infty} |q|^n \right] < \infty \end{aligned}$$

elde edilir ve $(W - \lambda I)^{-1} \in (\ell_1, \ell_1)$ ' dir. O halde $\lambda \notin \sigma(W, \ell_1)$ olur ve bu da $\sigma(W, \ell_1) \subseteq S$ olduğunu gösterir.

Şimdi $\lambda \in S$ alalım.

$\lambda = 0$ ise operatör örten değildir. Çünkü Çizelge 4.1 den $(u_n) \in \ell_1 \subset c_0$ olduğu görülmektedir. Özel olarak $y = u$ alınırsa $x = \left(\frac{1}{v_0}, \frac{1}{v_0}, \dots \right)$ olarak bulunur fakat bu dizi

ℓ_1 dizi uzayında yer almamaktadır.

$\lambda = u_0 v_0$ ise

$$W - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ u_1(v_0 - v_1) & u_1 v_1 - u_0 v_0 & 0 & 0 & \dots \\ u_2(v_0 - v_1) & u_2(v_1 - v_2) & u_2 v_2 - u_0 v_0 & 0 & \dots \\ u_3(v_0 - v_1) & u_3(v_1 - v_2) & u_3(v_2 - v_3) & u_3 v_3 - u_0 v_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n(v_0 - v_1) & u_n(v_1 - v_2) & u_n(v_2 - v_3) & u_n(v_3 - v_4) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

olup $W - \lambda I : \ell_1 \rightarrow \ell_1$ örten değildir. O halde tersi yoktur.

$\lambda \neq u_0 v_0$ olsun. $\{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\}$ değerleri için matris normu tanımlı değildir. S kümesindeki diğer değerler için $\|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(\ell_1; \ell_1)} = \infty$ olduğu açıktır. Bu ise $S \subseteq \sigma(W, \ell_1)$ olduğunu gösterir.

Durum 2 (v_k) sabit dizi olsun. Bu durumda (u_n) dizisi için herhangi bir şart gerekli değildir. Her $k \in \mathbb{N}$ için $(v_k) = v$ diyelim. Bu durumda W operatörü;

$$W = \begin{pmatrix} u_0 v & 0 & 0 & \dots \\ 0 & u_1 v & 0 & \dots \\ 0 & 0 & u_2 v & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklinde olur.

$\lambda \notin S$ için $(W - \lambda I)^{-1}$ ters operatörünün mevcut ve bu uzayda sınırlı olduğu gösterilmelidir. $\lambda \notin S$ için $(W - \lambda I)$ birebir olduğundan tersi vardır. $(W - \lambda I)x = y$ eşitliği çözülerek $(W - \lambda I)^{-1}$ ters operatörü bulunur.

$$\begin{aligned} (u_0 v - \lambda)x_0 &= y_0 \Rightarrow x_0 = \frac{y_0}{u_0 v - \lambda} \\ (u_1 v - \lambda)x_1 &= y_1 \Rightarrow x_1 = \frac{y_1}{u_1 v - \lambda} \\ &\vdots \\ (u_n v - \lambda)x_n &= y_n \Rightarrow x_n = \frac{y_n}{u_n v - \lambda} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$(W - \lambda I)^{-1} = (w_{nk})^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{u_n v - \lambda}, & n = k \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

$$\|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(\ell_1; \ell_1)} = \sup_n \left| \frac{1}{u_n v - \lambda} \right| < \infty$$

ve bu $(W - \lambda I)^{-1} \in B(\ell_1)$ olduğunu gösterir. O halde $\lambda \notin \sigma(W, \ell_1)$ olur ki buradan da $\sigma(W, \ell_1) \subseteq S$ elde edilir.

Şimdi $\lambda \in S$ alalım.

$\lambda = 0$ ise operatör örten değildir. Durum 1 deki gibi ilerlendiğinde $x = \left(\frac{1}{v}, \frac{1}{v}, \dots\right)$

olarak bulunur fakat bu dizi ℓ_1 uzayının bir elemanı değildir.

$\lambda = u_m v$ olsun. Bu durumda m. sütun sadece sıfırlardan oluşur. Bu durumda operatör birebir değildir, tersi yoktur. Bu ise $S \subseteq \sigma(W, \ell_1)$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3

$$\sigma_p(W, \ell_1) = \begin{cases} \emptyset, & (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \\ \{u_m v : m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ sabit dizi} \\ \left\{ u_m v_m : \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| < 1, i \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}, & (v_k) \text{ kesin artan dizi} \end{cases}$$

İspat

Durum 1 (v_k) kesin azalan veya kesin artan dizi ve ℓ_1 dizi uzayındaki sıfırdan farklı bir x dizisi için $Wx = \lambda x$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} u_0 v_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ u_1(v_0 - v_1) & u_1 v_1 & 0 & 0 & \cdots \\ u_2(v_0 - v_1) & u_2(v_1 - v_2) & u_2 v_2 & 0 & \cdots \\ u_3(v_0 - v_1) & u_3(v_1 - v_2) & u_3(v_2 - v_3) & u_3 v_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n(v_0 - v_1) & u_n(v_1 - v_2) & u_n(v_2 - v_3) & u_n(v_3 - v_4) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} u_0 v_0 x_0 &= \lambda x_0 \\ u_1(v_0 - v_1)x_0 + u_1 v_1 x_1 &= \lambda x_1 \\ \vdots & \\ u_n(v_0 - v_1)x_0 + u_n(v_1 - v_2)x_1 + \dots + u_n v_n x_n &= \lambda x_n \\ u_{n+1} \sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1})x_k + u_{n+1} v_{n+1} x_{n+1} &= \lambda x_{n+1} \\ \vdots & \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünde eğer x_m , $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi ise o zaman $\lambda = u_m v_m$ dir. $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} x_{m+p} &= \frac{u_{m+p}(v_m - v_{m+1})}{u_m v_m - u_{m+p} v_{m+p}} x_m \prod_{i=1}^{p-1} \left(1 + \frac{u_{m+i}(v_{m+i} - v_{m+i+1})}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) \\ &= \frac{u_{m+p}(v_m - v_{m+1})}{u_m v_m - u_{m+p} v_{m+p}} x_m \prod_{i=1}^{p-1} \left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $x = (x_n) = (0, 0, \dots, 0, x_m, x_{m+1}, \dots)$ olarak elde edilir. x dizisinin ℓ_1 dizi uzayında olmasına olanak sağlayan λ değerleri özdeğerlerdir. Şimdi bu değerler araştırılacaktır.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| &= \sum_{n=m}^{\infty} |x_n| = |x_m| + \sum_{p=0}^{\infty} |x_{m+p}| \\ &= |x_m| \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \left| \frac{u_{m+p}(v_m - v_{m+1})}{u_m v_m - u_{m+p} v_{m+p}} \prod_{i=1}^{p-1} \left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) \right| \right) \\ &= |x_m| \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \left| \frac{u_{m+p}(v_m - v_{m+1})}{u_m v_m - u_{m+p} v_{m+p}} \prod_{i=1}^{p-1} \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| \right| \right) \\ &= |x_m| \left(1 + |v_m - v_{m+1}| \sum_{p=1}^{\infty} \left| \frac{u_{m+p}}{u_m v_m - u_{m+p} v_{m+p}} \prod_{i=1}^{p-1} \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| \right| \right) \end{aligned}$$

(v_k) kesin azalan dizi ise $(u_n) \in \ell_1$ şartı ile beraber $\left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| > 1$ olur. $p \rightarrow \infty$

için $x_{m+p} \neq 0$ olur ve bu durum $x = (x_n)$ dizisinin ℓ_1 dizi uzayında olması ile çelişir.

(v_k) kesin artan dizi olduğunda $(u_n) \in \ell_1 \subset c_0$ olduğundan $\left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| < 1$

olabilir. $\sup_p \left| \frac{u_{m+p}}{u_m v_m - u_{m+p} v_{m+p}} \right| = K$ olsun. $\left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| < 1$ şartını sağlayan

$\lambda = u_m v_m$ değerleri için $\sup_i \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| = |t|$ olacak şekilde $|t| < 1$ değeri

bulunabilir. Bu durumda dizinin terimleri toplamı;

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| = |x_m| \left(1 + |v_m - v_{m+1}| K \sum_{p=1}^{\infty} |t|^p \right) = |x_m| \left(1 + |v_m - v_{m+1}| K \frac{|t|}{1 - |t|} \right)$$

şeklinde olur. Yani $p \rightarrow \infty$ için x_{m+p} , ℓ_1 dizi uzayında olur ve bu $\lambda = u_m v_m$ değerleri nokta spektrumu oluşturur.

Durum 2 (v_k) sabit dizi ve her $k \in \mathbb{N}$ için $(v_k) = v$ olsun. Bu durumda matris

$$W = \begin{pmatrix} u_0 v & 0 & 0 & \dots \\ 0 & u_1 v & 0 & \dots \\ 0 & 0 & u_2 v & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklinde olur.

$$\begin{pmatrix} u_0 v & 0 & 0 & \dots \\ 0 & u_1 v & 0 & \dots \\ 0 & 0 & u_2 v & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

matris çarpımından

$$(u_0 v - \lambda) x_0 = 0$$

$$(u_1 v - \lambda) x_1 = 0$$

$$(u_2 v - \lambda) x_2 = 0$$

$$\vdots$$

lineer denklem sistemi elde edilir. $\lambda = u_m v$ için dizinin x_m terimi sıfırdan farklıdır.

Yani dizi $x = (0, \dots, 0, x_m, 0, \dots)$ şeklinde olur ve bu dizi ℓ_1 uzayının bir elemanıdır. O halde $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\lambda = u_m v$ özdeğerdir.

$T: \ell_1 \rightarrow \ell_1$ operatörü matris temsili A olan bir operatör ise T nin eşlenik operatörü olan $T^*: \ell_1' \rightarrow \ell_1'$ operatörünün A matrisinin transpozu olan A' matrisi olduğu bilinmektedir. Burada ℓ_1 dizi uzayının ℓ_1' dual uzayı, $\|x\| = \sup_k |x_k|$ normlu sınırlı dizilerin ℓ_∞ Banach uzayı ile izometrik izomorftur.

Teorem 4.4

$$\sigma_p(W^*, \ell_\infty) = \begin{cases} \{u_m v_m : m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \\ \{u_m v : m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ sabit dizi} \\ \{u_m v_m : m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ kesin artan dizi} \end{cases}$$

İspat

Durum 1 (v_k) kesin azalan veya kesin artan dizi ve ℓ_1 uzayının dual uzayı olan ℓ_∞ dizi uzayında sıfırdan farklı bir x dizisi için $W^*x = \lambda x$ olsun. Bu durumda $W^* = W^t$ olduğundan,

$$W^* = \begin{pmatrix} u_0 v_0 & u_1(v_0 - v_1) & u_2(v_0 - v_1) & u_3(v_0 - v_1) & \dots \\ 0 & u_1 v_1 & u_2(v_1 - v_2) & u_3(v_1 - v_2) & \dots \\ 0 & 0 & u_2 v_2 & u_3(v_2 - v_3) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & u_3 v_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_0 v_0 & u_1(v_0 - v_1) & u_2(v_0 - v_1) & u_3(v_0 - v_1) & \dots \\ 0 & u_1 v_1 & u_2(v_1 - v_2) & u_3(v_1 - v_2) & \dots \\ 0 & 0 & u_2 v_2 & u_3(v_2 - v_3) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & u_3 v_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} (u_0 v_0 - \lambda)x_0 + (v_0 - v_1) \sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i &= 0 \\ (u_1 v_1 - \lambda)x_1 + (v_1 - v_2) \sum_{i=2}^{\infty} u_i x_i &= 0 \\ &\vdots \\ (u_n v_n - \lambda)x_n + (v_n - v_{n+1}) \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i x_i &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

olarak elde edilen lineer denklem sistemi çözülürse $\lambda = u_m v_m$ için x dizisinin $m+1$ terimi sıfırdan farklı yani dizi $x = (x_0, x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots)$ şeklinde bulunur. $\forall l < m$ için

$$x_{m-l} = \frac{u_m(v_{m-l} - v_{m-l+1})}{u_m v_m - u_{m-l} v_{m-l}} x_m \prod_{i=1}^{l-1} \left(1 + \frac{u_{m-i}(v_{m-i} - v_{m-i+1})}{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i}} \right)$$

$$= \frac{u_m(v_{m-l} - v_{m-l+1})}{u_m v_m - u_{m-l} v_{m-l}} x_m \prod_{i=1}^{l-1} \left(\frac{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i+1}}{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i}} \right)$$

(u_n) ve (v_k) dizileri sonlu olduğundan $\sup \left| \frac{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i+1}}{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i}} \right| = A$ ve

$\sup \left| \frac{u_m(v_{m-l} - v_{m-l+1})}{u_m v_m - u_{m-l} v_{m-l}} \right| = B$ olacak şekilde A ve B sayısı bulmak mümkündür. O halde

$\forall l < m$ için $|x_{m-l}| \leq B |x_m| A^{l-1} < \infty$ olur, buradan $(x_n) \in \ell_\infty$ elde edilir.

Durum 2 (v_k) sabit dizi olsun. ℓ_∞ dizi uzayındaki sıfırdan farklı bir dizi için $W^* x = W^t x = \lambda x$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$(u_0 v - \lambda) x_0 = 0$$

$$(u_1 v - \lambda) x_1 = 0$$

⋮

olarak elde edilen lineer denklem sistemi çözülürse $\lambda = u_m v$ için sıfırdan farklı $x = (x_n)$ dizisi $(0, 0, \dots, 0, x_m, 0, \dots)$ şeklinde elde edilir ve bu dizi ℓ_∞ dizi uzayının bir elemanıdır. O halde her $m \in \mathbb{N}$ için $\lambda = u_m v$ bir özdeğerdir.

Teorem 4.5

$$\sigma_r(W, \ell_1) = \begin{cases} \{u_m v_m : m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \\ \emptyset, & (v_k) \text{ sabit dizi} \\ \left\{ u_m v_m : \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| \geq 1, i \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}, & (v_k) \text{ kesin artan dizi} \end{cases}$$

İspat

Durum 1 (v_k) kesin azalan dizi olsun. Bu durumda (u_n) , ℓ_1 dizi uzayında bir dizi olur.

Teorem 4.3'ten $\{u_m v_m : m \in \mathbb{N}\}$ için operatör birebirdir. O halde tersi vardır. Fakat

$W^* - \lambda I$ operatörü Teorem 4.4' ten dolayı birebir değildir. Teorem 2.6' dan $\overline{\Re(W - \lambda I)} \neq \ell_1$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Durum 2 (v_k) sabit dizi olsun. Teorem 2.6' dan $\{u_m v_m: m \in \mathbb{N}\}$ için $\overline{\Re(W - \lambda I)} \neq \ell_1$, dir. Fakat Teorem 4.3'ten $\{u_m v_m: m \in \mathbb{N}\}$ değerleri operatörün terslenmesine engel teşkil etmektedir. O halde (v_k) sabit dizi olduğunda $\sigma_r(W, \ell_1) = \emptyset$ 'dir.

Durum 3 (v_k) pozitif terimli kesin artan dizi olsun. (u_n) ℓ_1 dizi uzayının bir elemanıdır. Bu durumda Teorem 4.3'ten $1 \leq \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right|$ eşitsizliğini sağlayan

$\lambda = u_m v_m$ değerleri için operatörün birebir yani terslenebilir olduğu görülür. Fakat Teorem 4.4 ten bu değerler için $W^* - \lambda I$ operatörünün birebirliği sağlamadığı görülür.

O halde Teorem 2.6' dan $\left\{ u_m v_m: \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| \geq 1, m \in \mathbb{N} \right\}$ için $\overline{\Re(W - \lambda I)} \neq \ell_1$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.6

$$\sigma_c(W, \ell_1) = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \lambda \in \mathbb{C}: \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|u_i v_i - \lambda|} \geq 1, i \in N \right\} \setminus (\{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}), (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \\ \{0\}, (v_k) \text{ sabit dizi} \\ \left\{ \lambda \in \mathbb{C}: \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|u_i v_i - \lambda|} \geq 1, i \in N \right\} \setminus \{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\}, (v_k) \text{ kesin artan dizi} \end{array} \right\}$$

İspat

Durum 1 (v_k) pozitif terimli kesin azalan dizi olsun. Bu durumda (u_n) kesin azalan

sıfır dizisidir. $\left\{ \lambda \in \mathbb{C}: \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|u_i v_i - \lambda|} \geq 1, i \in N \right\} \setminus (\{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\} \cup \{0\})$ kümesindeki λ

değerleri için $(W - \lambda I)$ operatörünün tersi mevcut ve yoğun kümede tanımlıdır. Fakat (4.1) normu bu değerler için sınırsızdır.

Durum 2 (v_k) pozitif terimli sabit dizi olsun.

$$\sigma(T, X) = \sigma_p(T, X) \cup \sigma_c(T, X) \cup \sigma_r(T, X) \text{ olduğundan}$$

$$\sigma_c(T, X) = \sigma(T, X) \setminus (\sigma_p(T, X) \cup \sigma_r(T, X)) \text{ eşitliğinden istenen elde edilir.}$$

Durum 3 (v_k) pozitif terimli kesin artan dizi olsun. İspat Durum 1 ile aynıdır.

4.2 ℓ_p Dizi Uzayında W Operatörünün İnce Spektrumu

Teorem 2.11 ve 2.12’ de verilen şartlar göz önünde bulundurularak kesin artan, kesin azalan veya sabit dizi olabilen (u_n) , (v_k) dizileri ile oluşturulan W matrisinin $B(\ell_p)$ fonksiyonlar uzayında bir operatör olabileceği durumlar tabloda verilmiştir.

Çizelge 4.3 W operatörünün $B(\ell_p)$ olma durumları

(v_k)	(u_n)	Şartlar	$W \in B(\ell_1)$	$W \in B(\ell_\infty)$	$W \in B(\ell_p)$
Kesin azalan	Kesin azalan	$(u_n) \in \ell_1$	✓	✓	✓
Kesin azalan	Sabit		✗	✓	✗
Kesin azalan	Kesin artan		✗	✓	✗
Sabit	Kesin azalan	-	✓	✓	✓
Sabit	Sabit	-	✓	✓	✓
Sabit	Kesin artan	-	✓	✓	✓
Kesin artan	Kesin azalan	$(u_n) \in \ell_1$	✓	✓	✓
Kesin artan	Sabit		✗	✓	✗
Kesin artan	Kesin artan		✗	✓	✗

✓ : $W \in B(\ell_p)$, 5 durum

O halde bu operatörün, ℓ_p dizi uzayında 5 ayrı spektral incelemesi yapılacaktır. Diğer 4 durum bu uzayda sınırlı lineer operatör teşkil etmez.

Teorem 4.7 $\sigma(W, \ell_p) =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|u_i v_i - \lambda|} \geq 1, i \in N \right\} \cup \{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}, (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \\ \left\{ \lambda = u_m v, m \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}, (v_k) \text{ sabit dizi} \\ \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|u_i v_i - \lambda|} \geq 1, i \in N \right\} \cup \{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\}, (v_k) \text{ kesin artan dizi} \end{array} \right\} = S$$

ispat: Diğer kısımlardaki gibi (v_k) dizisinin durumuna göre ayrı durumlarda ispat verilecektir.

Durum 1 (v_k) dizisi kesin azalan ya da kesin artan dizi olsun. Çizelge 4.3 ten (u_n) dizisinin ℓ_1 uzayının bir elemanı olması gerektiği görülür.

$\lambda \notin S$ olsun. Bu durumda $(W - \lambda I)$ alt üçgenseldir, tersi bulunabilir. $(W - \lambda I)x = y$ eşitliği çözülerek daha önce de hesaplanmış olan ters operatör (3.1) deki gibi bulunur.

Teorem 2.12 ye göre $(W - \lambda I)^{-1} \in (\ell_1, \ell_1) \cap (\ell_\infty, \ell_\infty)$ olduğu gösterilirse

$(W - \lambda I)^{-1} \in (\ell_p, \ell_p)$ olduğu görülür. Bunun için $\lambda \notin S$ değerlerinde

$\|(W - \lambda I)^{-1}\|_{\ell_\infty} < \infty$ ve $\|(W - \lambda I)^{-1}\|_{\ell_1} < \infty$ olduğu gösterilmelidir. Önce

$$\begin{aligned} \|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(\ell_\infty, \ell_\infty)} &= \sup_n \left| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_n (v_k - v_{k+1})}{(u_n v_n - \lambda)(u_k v_k - \lambda)} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right) \right| \\ &= \sup_n \left| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} + \frac{u_n}{u_n v_n - \lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{v_k - v_{k+1}}{u_k v_k - \lambda} \right| \prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right| \\ &= \sup_n \left| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} \right| \left[1 + |u_n| \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{v_k - v_{k+1}}{u_k v_k - \lambda} \right| \prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right] \end{aligned}$$

Normunun sınırlı olduğunu gösterelim. $|q_i| = \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right|$ olsun. $\lambda \notin S$ dolayısıyla

$|q_i| = \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| < 1$ dir. (u_n) ve (v_k) dizilerinin sınırlı olması $\left| \frac{v_k - v_{k+1}}{u_k v_k - \lambda} \right|$ değerini her k

için sınırlı kılar. $\sup_k \left| \frac{v_k - v_{k+1}}{u_k v_k - \lambda} \right| = C$ diyelim. $|q_i| < 1$ olduğundan $\sup_i |q_i| = |q|$ olacak

şekilde bir q değeri bulunabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \|(W - \lambda I)^{-1}\|_{\ell_\infty} &= \sup_n \left| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} \right| \left[1 + |u_n| \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{v_k - v_{k+1}}{u_k v_k - \lambda} \right| \prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right] \\ &\leq \sup_n \left| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} \right| \left[1 + |u_n| \sum_{k=0}^{n-1} (C |q|^k) \right] \\ &= \sup_n \left| \frac{1}{u_n v_n - \lambda} \right| \left[1 + |u_n| C \sum_{k=0}^{n-1} |q|^k \right] < \infty \end{aligned}$$

elde edilir ve bu durumda $(W - \lambda I)^{-1} \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ dir.

Aynı şekilde ilerleyerek

$$\begin{aligned} \|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(\ell_1, \ell_1)} &= \sup_k \left\| \frac{1}{u_k v_k - \lambda} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{u_n (v_k - v_{k+1})}{(u_n v_n - \lambda)(u_k v_k - \lambda)} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right) \right| \right\| \\ &= \sup_k \left\| \frac{1}{u_k v_k - \lambda} + \left| \frac{v_k - v_{k+1}}{u_k v_k - \lambda} \right| \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{u_n}{u_n v_n - \lambda} \right| \prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right\| \\ &= \sup_k \left\| \frac{1}{u_k v_k - \lambda} \left[1 + |v_k - v_{k+1}| \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{u_n}{u_n v_n - \lambda} \right| \prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right] \right\| \end{aligned}$$

normunun sonlu olduğu gösterilmelidir.

$|t_i| = \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right|$ diyelim. S kümesinde olmayan λ değerleri ile çalıştığımız için

$|t_i| = \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| < 1$ olur. Yine dizilerin sınırlılığından her n için $\left| \frac{u_n}{u_n v_n - \lambda} \right|$ değeri

sonludur. $\sup_n \left| \frac{u_n}{u_n v_n - \lambda} \right| = D$ olsun. $|t_i| < 1$ olduğundan $\sup_i |t_i| = |t|$ olacak şekilde bir t

değeri bulunabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(\ell_1, \ell_1)} &= \sup_k \left\| \frac{1}{u_k v_k - \lambda} \left[1 + |v_k - v_{k+1}| \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{u_n}{u_n v_n - \lambda} \right| \prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right] \right\| \\ &\leq \sup_k \left\| \frac{1}{u_k v_k - \lambda} \left[1 + |v_k - v_{k+1}| \sum_{n=k+1}^{\infty} D \prod_{i=k+1}^{n-1} \left| \frac{\lambda - u_i v_{i+1}}{u_i v_i - \lambda} \right| \right] \right\| \\ &= \sup_k \left\| \frac{1}{u_k v_k - \lambda} \left[1 + |v_k - v_{k+1}| D \sum_{n=k+1}^{\infty} |t|^n \right] \right\| < \infty \end{aligned}$$

elde edilir yani $(W - \lambda I)^{-1} \in (\ell_1, \ell_1)$ dir.

Dolayısıyla $\lambda \notin S$ için $(W - \lambda I)^{-1} \in (\ell_1, \ell_1) \cap (\ell_\infty, \ell_\infty)$ elde edilir. Teorem 2.12 den

$(W - \lambda I)^{-1} \in (\ell_p, \ell_p)$ dir. Bu durumda $\sigma(W, \ell_p) \subseteq S$ dir.

Şimdi de $\lambda \in S$ olsun.

$\lambda = 0$ için inceleyelim. Çizelge 4.3 ten $(u_n) \in \ell_1$ olduğu biliniyor. $\ell_1 \subset \ell_p$ olduğundan

$u = y$ alınarak $y \in \ell_p$ için $Wx = y$ çözümlerse $x = \left(\frac{1}{v_0}, \frac{1}{v_0}, \dots \right)$ bulunur fakat bu dizi ℓ_p

dizi uzayının bir elemanı değildir o halde operatör örten değildir, dolayısı ile terslenemez.

$\lambda = u_0 v_0$ ise

$$W - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ u_1(v_0 - v_1) & u_1 v_1 - u_0 v_0 & 0 & 0 & \dots \\ u_2(v_0 - v_1) & u_2(v_1 - v_2) & u_2 v_2 - u_0 v_0 & 0 & \dots \\ u_3(v_0 - v_1) & u_3(v_1 - v_2) & u_3(v_2 - v_3) & u_3 v_3 - u_0 v_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n(v_0 - v_1) & u_n(v_1 - v_2) & u_n(v_2 - v_3) & u_n(v_3 - v_4) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Bu durum $W - \lambda I : \ell_p \rightarrow \ell_p$ operatörünün örtenliğini bozar çünkü

$$\Re(W - \lambda I) = \left\{ (y_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell_p : y_0 = 0 \right\}.$$

$\lambda = u_m v_m$, $m \neq 0$ olsun. Bu değerler için matris üçgensel değildir yani tersi bulunamaz.

S kümesindeki diğer değerler için normun sınırsız olduğu yani $\|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(\ell_1 : \ell_1)} = \infty$

ve $\|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(\ell_{\infty} : \ell_{\infty})} = \infty$ olduğu açıktır. Buradan $S \subseteq \sigma(W, \ell_p)$ olduğunu gösterir.

Durum 2 (v_k) dizisi sabit dizi olsun. (u_n) dizisi için herhangi bir şart gerekmemektedir. Her k için $(v_k) = v$ diyelim.

$\lambda \notin S$ için $(W - \lambda I)$ üçgensel matristir, yani tersi mevcuttur. $(W - \lambda I)(W - \lambda I)^{-1} = I_n$ matris çarpımından ters operatör

$$(W - \lambda I)^{-1} = (w_{nk})^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{u_n v - \lambda}, & n = k \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak bulunur. $\lambda \notin S$ için $\|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(\ell_1, \ell_1)} = \|(W - \lambda I)^{-1}\|_{(\ell_\infty, \ell_\infty)} < \infty$ olur ve bu durumda Teorem 2.12 ye göre $(W - \lambda I)^{-1} \in B(\ell_p)$ elde edilir. O halde $\lambda \notin \sigma(W, \ell_p)$ dir, yani $\sigma(W, \ell_p) \subseteq S$ bulunur.

Şimdi $\lambda \in S$ alalım. $\lambda = 0$ olsun. Yine çizelge 4.3 ten $(u_n) \in \ell_1$ olduğu görülür.

$\ell_1 \subset \ell_p$ olduğundan $u = y$ alınarak $y \in \ell_p$ için $Wx = y$ çözümlerse $x = \left(\frac{1}{v}, \frac{1}{v}, \dots\right)$

bulunur fakat bu dizi ℓ_p uzayında değildir. O halde operatör örten olmaz, tersi mevcut değildir.

$\lambda = u_m v$ olsun. Bu durumda m .sütun sadece sıfırlardan oluşur ve operatöre birebir olamaz, dolayısı ile tersi yoktur. Yani $S \subseteq \sigma(W, \ell_p)$ dir.

Sonuç olarak $S = \sigma(W, \ell_p)$ olduğu görülür, ispat tamamlanır.

Theorem 4.8

$$\sigma_p(W, \ell_p) = \begin{cases} \emptyset, & (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \\ \{u_m v_m : m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ sabit dizi} \\ \left\{ u_m v_m : \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| < 1, i \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}, & (v_k) \text{ kesin artan dizi} \end{cases}$$

İspat

Durum 1 (v_k) kesin azalan veya kesin artan dizi olsun. $Wx = \lambda x$ eşitliği ℓ_p dizi uzayındaki sıfırdan farklı bir x elemanı için mümkün olsun. Bu durumda $Wx = \lambda x$ matris çarpımından

$$\begin{aligned} u_0 v_0 x_0 &= \lambda x_0 \\ u_1 (v_0 - v_1) x_0 + u_1 v_1 x_1 &= \lambda x_1 \\ u_2 (v_0 - v_1) x_0 + u_2 (v_1 - v_2) x_1 + u_2 v_2 x_2 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \\ u_n (v_0 - v_1) x_0 + u_n (v_1 - v_2) x_1 + \dots + u_n v_n x_n &= \lambda x_n \\ u_{n+1} \sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1}) x_k + u_{n+1} v_{n+1} x_{n+1} &= \lambda x_{n+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünden elde edilen $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi x_m ise o zaman $\lambda = u_m v_m$ dir. $\forall r \in \mathbb{N}$ için diğer terimler

$$\begin{aligned} x_{m+r} &= \frac{u_{m+r}(v_m - v_{m+1})}{u_m v_m - u_{m+r} v_{m+r}} x_m \prod_{i=1}^{r-1} \left(1 + \frac{u_{m+i}(v_{m+i} - v_{m+i+1})}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) \\ &= \frac{u_{m+r}(v_m - v_{m+1})}{u_m v_m - u_{m+r} v_{m+r}} x_m \prod_{i=1}^{r-1} \left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. $x = (x_n) = (0, 0, \dots, 0, x_m, x_{m+1}, \dots)$ olarak elde edilir.

(v_k) kesin azalan dizi ise $(u_n) \in \ell_1 \subset c_0$ olduğundan $\left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) > 1$ bulunur.

Bu durumda $r \rightarrow \infty$ için $x = (x_n) \notin c_0$ olur ve $\ell_p \subset c_0$ olduğundan $x = (x_n) \notin \ell_p$ dir.

Fakat (v_k) kesin artan dizi ise yine $(u_n) \in c_0$ olduğundan $\left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) < 1$ olur.

Bu durumda

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p &= \sum_{n=m}^{\infty} |x_n|^p = |x_m|^p + \sum_{r=0}^{\infty} |x_{m+r}|^p \\ &= |x_m|^p \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left| \frac{u_{m+r}(v_m - v_{m+1})}{u_m v_m - u_{m+r} v_{m+r}} \prod_{i=1}^{r-1} \left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) \right|^p \right) \\ &= |x_m|^p \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left| \frac{u_{m+r}(v_m - v_{m+1})}{u_m v_m - u_{m+r} v_{m+r}} \right|^p \prod_{i=1}^{r-1} \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right|^p \right) \\ &= |x_m|^p \left(1 + |v_m - v_{m+1}|^p \sum_{r=1}^{\infty} \left| \frac{u_{m+r}}{u_m v_m - u_{m+r} v_{m+r}} \right|^p \prod_{i=1}^{r-1} \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right|^p \right) \end{aligned}$$

$\left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) < 1$ olduğundan bazı $u_m v_m$ değerleri için

$-1 < \left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) < 1$ olabilir. Yani $\left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| < 1$ dir.

$\left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| = |q_i|$ diyelim. $\left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| < 1$ olduğundan

$\sup_i \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| = |q|$ olacak şekilde bir q değeri bulunabilir. $(u_n), (v_k)$

dizilerinin sınırlı olmasından dolayı $\sup_r \left| \frac{u_{m+r}}{u_m v_m - u_{m+r} v_{m+r}} \right| = E$ yazılabilir. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p = |x_m|^p \left(1 + |v_m - v_{m+1}|^p K \sum_{r=1}^{\infty} (|q|^p)^{r-1} \right) = |x_m|^p \left(1 + |v_m - v_{m+1}|^p E \frac{1}{1 - |q|^p} \right)$$

elde edilir. Yani $r \rightarrow \infty$ için $x = (x_n)$ dizisi ℓ_p dizi uzayında olur ve bu durumda

$$-1 < \left(\frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right) < 1 \quad \text{eşitsizliğini sağlayan } \lambda = u_m v_m \text{ değerleri nokta}$$

özdeğerlerdir.

Durum 2 (v_k) sabit dizi ve her $k \in \mathbb{N}$ için $(v_k) = v$ olsun. $Wx = \lambda x$ eşitliği ℓ_p dizi uzayındaki sıfırdan farklı bir x elemanı için mümkün olsun. Bu durumda $Wx = \lambda x$ matris çarpımından

$$(u_0 v - \lambda) x_0 = 0$$

$$(u_1 v - \lambda) x_1 = 0$$

$$(u_2 v - \lambda) x_2 = 0$$

$$\vdots$$

lineer denklem sistemi elde edilir. $\lambda = u_m v$ için dizinin x_m terimi sıfırdan farklıdır.

Yani dizi $x = (0, \dots, 0, x_m, 0, \dots)$ şeklinde olur ve bu dizi ℓ_p uzayının bir elemanıdır. O

halde $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\lambda = u_m v$ $W - \lambda I$ matrisi için özdeğerdir.

$T: \ell_p \rightarrow \ell_p$ operatörü matris temsili A olan bir operatör ise T nin eşlenik operatörü

olan $T^*: \ell_p' \rightarrow \ell_p'$ operatörünün A matrisinin transpozu olan A^t matrisi olduğu

bilinmektedir. Burada ℓ_p dizi uzayının ℓ_p' dual uzayı, $\|x\| = \left(\sum_k |x_k|^q \right)^{1/q}$ normlu q -

mutlak toplanabilen dizilerin ℓ_q Banach uzayı ile izometrik izomorftur.

Teorem 4.9

$$\sigma_p(W^*, \ell_q) = \begin{cases} \{u_m v_m : m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \\ \{u_m v : m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ sabit dizi} \\ \{u_m v_m : m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ kesin artan dizi} \end{cases}$$

İspat

Durum 1 (v_k) kesin azalan veya kesin artan dizi ve ℓ_p uzayının dual uzayı olan ℓ_q dizi uzayında sıfırdan farklı bir f dizisi için $W^*f = \lambda f$ olsun. Bu durumda $W^* = W^t$ olduğundan,

$$W^* = \begin{pmatrix} u_0 v_0 & u_1(v_0 - v_1) & u_2(v_0 - v_1) & u_3(v_0 - v_1) & \dots \\ 0 & u_1 v_1 & u_2(v_1 - v_2) & u_3(v_1 - v_2) & \dots \\ 0 & 0 & u_2 v_2 & u_3(v_2 - v_3) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & u_3 v_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dir.

$$\begin{pmatrix} u_0 v_0 & u_1(v_0 - v_1) & u_2(v_0 - v_1) & u_3(v_0 - v_1) & \dots \\ 0 & u_1 v_1 & u_2(v_1 - v_2) & u_3(v_1 - v_2) & \dots \\ 0 & 0 & u_2 v_2 & u_3(v_2 - v_3) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & u_3 v_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

matris çarpımından aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} (u_0 v_0 - \lambda) f_0 + (v_0 - v_1) \sum_{i=1}^{\infty} u_i f_i &= 0 \\ (u_1 v_1 - \lambda) f_1 + (v_1 - v_2) \sum_{i=2}^{\infty} u_i f_i &= 0 \\ \vdots & \\ (u_n v_n - \lambda) f_n + (v_n - v_{n+1}) \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i f_i &= 0 \\ \vdots & \end{aligned}$$

Bu lineer denklem sistemi çözülürse $\lambda = u_m v_m$ için f dizisinin $m+1$ terimi sıfırdan farklı yani dizi $f = (f_0, f_1, \dots, f_m, 0, 0, \dots)$ şeklinde bulunur. $\forall l < m$ için

$$f_{m-l} = \frac{u_m(v_{m-l} - v_{m-l+1})}{u_m v_m - u_{m-l} v_{m-l}} f_m \prod_{i=1}^{l-1} \left(1 + \frac{u_{m-i}(v_{m-i} - v_{m-i+1})}{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i}} \right)$$

$$= \frac{u_m(v_{m-l} - v_{m-l+1})}{u_m v_m - u_{m-l} v_{m-l}} f_m \prod_{i=1}^{l-1} \left(\frac{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i+1}}{u_m v_m - u_{m-i} v_{m-i}} \right)$$

Dizinin terimlerinde sonlu çarpım olduğu için ve ayrıca dizi sonlu terim içerdiği için f dizisi ℓ_q uzayındadır. O halde her m için $u_m v_m$ bir özdeğerdir.

Durum 2 (v_k) sabit dizi ve ℓ_q dizi uzayındaki sıfırdan farklı bir dizi için $W^* f = W^t f = \lambda f$ olsun. Buradan

$$(u_0 v - \lambda) f_0 = 0$$

$$(u_1 v - \lambda) f_1 = 0$$

$$\vdots$$

olarak elde edilen lineer denklem sistemi çözümünde f dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi f_m ise $\lambda = u_m v$ olarak bulunur ve dizi $f = (0, 0, \dots, 0, f_m, 0, \dots)$ şeklinde elde edilir. Bu dizi ℓ_q dizi uzayının bir elemanıdır. O halde her $m \in \mathbb{N}$ için $\lambda = u_m v$, $W^* - \lambda I$ için bir özdeğerdir.

Teorem 4.10

$$\sigma_r(W, \ell_p) = \begin{cases} \{u_m v_m : m \in \mathbb{N}\}, & (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \\ \emptyset, & (v_k) \text{ sabit dizi} \\ \left\{ u_m v_m : \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right| \geq 1, i \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}, & (v_k) \text{ kesin artan dizi} \end{cases}$$

İspat

Durum 1 (v_k) kesin azalan dizi olsun. Çizelge 4.3 ten (u_n) dizisinin ℓ_1 dizi uzayında bir dizi olduğu yani kesin azalan sıfıra yakınsak dizi olduğu görülür. Teorem 4.9dan $\{u_m v_m : m \in \mathbb{N}\}$ için operatör birebirdir. O halde tersi vardır. Fakat $W^* - \lambda I$ operatörü bu değerlerde Teorem 4.10 dan dolayı birebir değildir. O halde Teorem 2.6 dolayısıyla $\overline{\mathcal{R}(W - \lambda I)} \neq \ell_p$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Durum 2 (v_k) sabit dizi olsun. Teorem 2.6' dan $\{u_m v_m: m \in \mathbb{N}\}$ için $\overline{\Re(W - \lambda I)} \neq \ell_p$, dir. Fakat Teorem 4.9 dan görülür ki $\{u_m v_m: m \in \mathbb{N}\}$ değerleri operatörün terslenmesine engel teşkil etmektedir. O halde (v_k) sabit dizi olduğunda $\sigma_r(W, \ell_1) = \emptyset$ 'dir.

Durum 3 (v_k) kesin artan dizi olsun. Yine (u_n) dizisinin ℓ_1 dizi uzayında kesin azalan dizi olduğu görülür. $1 \leq \left| \frac{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i+1}}{u_m v_m - u_{m+i} v_{m+i}} \right|$ eşitsizliğini sağlayan $\lambda = u_m v_m$ değerleri için operatörün birebirdir yani tersi mevcuttur. Fakat Teorem 4.10 dan bu değerlerde $W^* - \lambda I$ operatörünün birebirliği sağlamadığı görülür. Teorem 2.6 uygulanarak sonuç elde edilir.

Teorem 4.11

$$\sigma_c(W, \ell_p) = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \{0\} \cup \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|u_i v_i - \lambda|} \geq 1, i \in N, m \in \mathbb{N} \right\} \right\} \setminus \{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\}, (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \\ \{0\}, (v_k) \text{ sabit dizi} \\ \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{|\lambda - u_i v_{i+1}|}{|u_i v_i - \lambda|} \geq 1, i \in N, m \in \mathbb{N} \right\} \setminus \{u_m v_m, m \in \mathbb{N}\}, (v_k) \text{ kesin artan dizi} \end{array} \right\}$$

İspat

$\sigma(T, X) = \sigma_p(T, X) \cup \sigma_c(T, X) \cup \sigma_r(T, X)$ olarak ayırık üç küme birleşimi olarak yazılabildiği için

$\sigma_c(T, X) = \sigma(T, X) \setminus (\sigma_p(T, X) \cup \sigma_r(T, X))$ eşitliğinden sürekli spektrum kümesi elde edilir.

- [1] Kreyszig, E., (1978). Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons Inc. New York-Chichester-Brisbane-Toronto
- [2] Descartes, R., (1637). "La Géométrie", Appendix I to Discours de la Méthode, Leiden, 367-514.
- [3] de Fermat, P., (1679). "Ad Locus Planos et Solidos Isagoge", Varia Opera Mathematica, 91-110.
- [4] Sylvester, J. J., (1852). "A Demonstration of The Theorem That Every Homogeneous Quadratic Polynomial is Reducible By Real Orthogonal Substitution To The Form of A Sum of Positive and Negative Squares", Phil. Mag., 4: 138-142.
- [5] Cayley, A., (1858). "A Memoir on the Theory of Matrices", Philos. Trans. Roy. Soc. London. 148: 17-37.
- [6] Fourier, J., (1822). Theorie Analytique de la Chaleur, Paris.
- [7] Hilbert, D., (1922). Grundzüge Einer Allgemeinen Theorie der Linearen Integralgleichungen, Teubner, Leipzig.
- [8] Hellinger, E., (1909). "Neue Begründung der Theorie Quadratischer Formen von Unendlichvielen Veränderlichen", J. Reine Angew. Math 136: 210-271.
- [9] Weyl, H., (1909). "Über die Charakterischen Wurzeln Einer Linearen Substitution mit Einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen, Math. Annalen, 66: 488-510.
- [10] Lebesgue, H., (1901). "Sur une Generalisation de L'intégrale définie", C. R. Acad. Sci. Paris, 132: 1025- 1028.
- [11] Riesz, F., (1910). "Untersuchungen Über Systeme Integrierbarer Functionen", Math. Annalen, 69: 449-497.
- [12] Hilbert, D., (1970). "Contance Reid", Springer, Verlag, Berlin.
- [13] von Neumann, J., (1927). "Mathematische Begründung der Quantenmechanik", Göttingen Nachrichten, 1-57.
- [14] von Neumann, J., (1929). "Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Functionaloperation", Math. Annalen, 102: 49-131.
- [15] Brown, A., Halmos, P.R. ve Shields, A.L., (1965). "Cesáro operators", Acta Sci. Math. (Sgezed), 26: 125-137.
- [16] Leibowitz, G., (1972). "Spectra of Discrete Cesáro Operators", Tamking J. Math., 3: 123-132.
- [17] Okutoyi, J.I., (1990). "On the spectrum of C_1 as an operator on bv_0 ", J. Austral. Math. Soc. Ser. A., 48: 79-86.
- [18] Okutoyi, J.I., (1992). "On the spectrum of C_1 as an operator on bv ", Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A₁, 197-207

- [19] Cass, F. P., Rhoades, B. E., (1977). "Mercerian Teorems via Spectral Theory", Pasific J. Math. 73, 63-71.
- [20] Cartlidge, P.J., (1978), "Weighted mean matrices as operators on ℓ_p ", Ph. D. Dissertation, Indiana University.
- [21] de Malafosse, B., (2002), "Properties of some sets of sequences and aplication to the spaces of bounded difference sequences of order μ ", Hokkaido Math. J., 31: 283-299.
- [22] Altay, B. ve Başar, F., (2004), "On the spectrum of the difference operator Δ on c_0 and c ", Inform. Sci., 168: 217-224.
- [23] Akhmedov A.M. ve Başar, F., (2006), "On the spectra of the difference operator Δ over the sequence space ℓ_p ", Demonstratio Math., 39(3): 585-595.
- [24] Furkan, H., Bilgiç, H. ve Kayaduman, K., (2006) "On the fine spectra of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the sequence space ℓ_1 and bv ", Comput. Math. Appl., 53: 897-908.
- [25] Altay, B., Başar, F., (2005). "On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the sequence spaces c_0 and c ", Int. J. Math. Sci., 18, 3005-3013.
- [26] Farés, A. ve de Malafosse, B., (2008). "Spectra of the operator of the first difference in $s_\alpha, s_\alpha^0, s_\alpha^{(c)}$ and $\ell_p(a)(1 \leq p < \infty)$ and application to matrix transformations", Demonstratio Math. 41(3), 661-676.
- [27] Srivastava P. D. ve Kumar, S., (2010). "Fine spectrum of the generalized difference operator Δ_v on sequence space ℓ_1 ", Thai J. Math. 8(2), 7-19.
- [28] Karakaya, V., (2012). "On The Fine Spectrum of The Second Order Difference Operator over the Sequence Spaces ℓ_p and bv_p ", Mathematical and Computer Modelling, Vol. 55, Issue 3, pp. 426-436.
- [29] Altun, M. ve Karakaya, V., (2009). "Fine spectra of lacunary matrices", J. Commun. Math. Anal. 7, No 1, 1-10.
- [30] Yıldırım, M., (1998), "On the spectrum of the Rhaly operators on c_0 and c ", Indian J. Pure Appl. Math., 29: 1301-1309
- [31] Yıldırım, M., (2001), "On the spectrum of the Rhaly operators on ℓ_p ", Indian J. Pure Appl. Math., 32: 191-198.
- [32] Altay, B. ve Karakuş, M., (2005). "On the spectrum and fine spectrum of the Zweier matrix as an operator on some sequence spaces", Thai J. Math. 3, 153-162.
- [33] Karakaya, V. ve Altun, M., (2010). "Fine spectra of upper triangular double-band matrices", J. Comput. Appl. Math. 234, 1387-1394.
- [34] Altun, M., (2011). "On the fine spectra of triangular Toeplitz operators", Appl. Math. Comput. 217(20), 8044-8051.
- [35] Akhmedov, A. M. ve El-Shabrawy S. R., (2011). "On the fine spectrum of the operator $\Delta_{a,b}$ over the sequence spaces c ", Comput. Math. Appl. 61(10), 2994-3002.
- [36] Bayraktar, M., (1992). Fonksiyonel Analiz, Atatürk Üniversitesi Yayınları, Erzurum.
- [37] Şuhubi, E., (2001). Fonksiyonel Analiz, 1.Baskı, İTÜ Vakfı Yayınları, Ağustos 2001.

- [38] Wilansky, A., (1984). Summability through Functional Analysis, North-Holland Mathematics Studies 85, Amsterdam, New York, Oxford.
- [39] Brown, A. L. ve Page, E., (1970). "Elements of Functional Analysis", Von Nostrand Reinhold Comp, 105-242.
- [40] Goldberg, S., (1966) Unbounded Linear Operators, Mc Graw-Hill Book Comp.
- [41] Maddox, I.J., (1970). Elements of Functional Analysis, Cambridge University Pres.
- [42] Dündar, E., (2006). Bazı Limitleme Metodlarının Muhtelif Dizi Uzayları Üzerindeki Spektrumu, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya
- [43] Taylor, A. E., (1958). Introduction to Functional Analysis, Wiley, New York.
- [44] Borwein, D. ve Jakimowski, A., (1979). "Matrix Operators on ℓ_p ", Rocky Mountain J. Math, 463-477.
- [45] Reed, M. ve Simon, B., (1980). Methods of Modern Mathematical Physics, Volume I Functional Analysis, Revised and Enlarged Edition, Academic Press, Inc., Boston-san Diego-New York-London-Sydney-Tokyo-Toronto.
- [46] Başar, F., (2011). Summability Theory and Its Applications, Bentham Science Publishers, e-books, Monographs.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Ezgi Erdoğan
Doğum Tarihi ve Yeri :16.06.1988-Çorlu
Yabancı Dili :İngilizce
E-posta :ezgierdgn88@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Sakarya Üniversitesi	2010
Lise	Fen Bilimleri	Silivri Y.D.A. Lise	2006

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Kurum	Görev
2012	Marmara Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLAR

Makale

Erdoğan E., Karakaya V., *On Fine Spectra of A New Operator on Certain Sequence Spaces*, Discrete Dynamics in Nature and Society, (incelemede)

Bildiri

1. Erdoğan E., Karakaya V., (2012). *The Fine Spectra of a New Operator W on Sequence Space c_0* , International Conference on Applied Analysis and Application(ICAAA-2012). İstanbul, Türkiye
2. Erdoğan E., Karakaya V., (2012). *The Spectrum of Matrix Operators on a Difference Sequence Space of Weighted Means* International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2012). Piriştine, Kosova

ÖDÜLLERİ

1. Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü, Bölüm Birinciliği-2010
2. TÜBİTAK, Yüksek Lisans Bursiyerliği- 2012