

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YENİ BİR PERTURBASYON-İTERASYON METODU VE MÜHENDİSLİK PROBLEMLERİNE
UYGULAMALARI**

DOKTORA TEZİ

Makine Yüksek Mühendisi Yiğit Aksoy

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 07.05.2013

Tezin Savunulduğu Tarih : 18.06.2013

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet Pakdemirli

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Hakan Boyacı

Prof. Dr. Bekir Solmaz

Prof Dr. Mehmet Sezer

Doç. Dr. Ünal Göktaş

MANİSA 2013

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER LİSTESİ	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	vi
TABLO LİSTESİ.....	viii
TEŞEKKÜR	x
ÖZET	xi
SUMMARY	xii
1. GİRİŞ	1
2. BİRİNCİ MERTEBE ADI DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN YENİ PERTURBASYON-İTERASYON METODU.....	4
2.1. Birinci Mertebe Diferansiyel Denklemler için “Tek Düzeltme Terimli ve Birinci Türev Taylor Serili” Perturbasyon İterasyon Formülü $PiA(1,1)$	5
2.2. Birinci Mertebe Diferansiyel Denklemler için “İki Düzeltme Terimli ve İkinci Türev Taylor Serili” Perturbasyon-İterasyon Formülü $PiA(2,2)$	7
2.3. Birinci Mertebe Diferansiyel Denklemler için “Tek Düzeltme Terimli ve İkinci Türev Taylor Serili” Perturbasyon-İterasyon Formülü $PiA(1,2)$	9
2.4. Birinci Mertebe Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları.....	10
2.4.1. Bir Nonlinear Birinci Mertebe Diferansiyel Denklem.....	10
2.4.1.1. Tam Çözüm.....	10
2.4.1.2. $PiA(1,1)$ ile çözümü	11
2.4.1.3. $PiA(2,2)$ ile çözümü	13
2.4.1.4. $PiA(1,2)$ ile Çözümü	15
2.4.2. Exponansiyel Nonlinearliğe Sahip Birinci Mertebe Diferansiyel Denklem.....	19
2.4.2.1. Tam Çözüm.....	19
2.4.2.2. $PiA(1,1)$ ile Çözümü	20
2.4.2.3. $PiA(1,2)$ ile Çözümü	22
2.4.3. Nonlinear Isı Transferi Problemi	25
2.4.3.1. Perturbasyon İterasyon Algoritması $PiA(1,2)$ ile çözümü	26
2.4.3.2. Varyasyonel İterasyon Metodu Çözümü.....	27
2.4.3.3. Perturbasyon-İterasyon ve Varyasyonel İterasyon Metodlarının Sayısal Olarak Karşılaştırılması	28
3.İKİNCİ MERTEBE ADI DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN PERTURBASYON-İTERASYON METODU	31
3.1. $PiA(1,1)$ Perturbasyon-İterasyon Algoritması	31

3.2.	$PiA(1,2)$ Perturbasyon-İterasyon Algoritması	32
3.3.	Perturbasyon-İterasyon Algoritmalarının İkinci Mertebe Diferansiyel Denklemlere Uygulanması.....	33
3.3.1.	Bratu Tipi İkinci Mertebe Adi Diferansiyel Denklemler.....	33
3.3.1.1.	Bratu-Tipi Başlangıç Değer Problemi.....	34
3.3.1.1.1.	$PiA(1,1)$ Çözümü.....	34
3.3.1.1.2.	$PiA(1,2)$ Çözümü.....	35
3.3.1.1.3.	$PiA(1,3)$ Çözümü.....	37
3.3.1.1.4.	Sayısal Çözümler ile Karşılaştırmalar.....	38
3.3.1.2.	Bratu'nun Birinci Tip Sınır Değer Problemi	39
3.3.1.2.1.	$PiA(1,1)$ Çözümü.....	40
3.3.1.2.2.	$PiA(1,2)$ Çözümü.....	41
3.3.1.2.3.	Sayısal Çözümler ile Karşılaştırmalar.....	42
3.3.1.3.	Bratu' nun İkinci Tip Sınır Değer Problemi	43
3.3.1.3.1.	$PiA(1,1)$ Çözümü.....	43
3.3.1.3.2.	$PiA(1,2)$ Çözümü.....	44
3.3.1.3.3.	Sayısal Çözümlerle Karşılaştırmalar	45
3.3.1.4.	Perturbasyon-İterasyon Metodunun Bratu Denklemlerine Uygulanması Üzerine Sonuçlar.....	46
3.3.2.	Perturbasyon-İterasyon Metodunun Isı Transferi Problemlerine Uygulanması.....	46
3.3.2.1.	Nonlineer Kanatçık Denklemi.....	46
3.3.2.1.1.	$PiA(1,2)$ Çözümü.....	47
3.3.2.1.2.	Varyasyonel İterasyon Metodu Çözümü.....	48
3.3.2.1.3.	Perturbasyon-İterasyon ve Varyasyonel İterasyon Metotlarının Sayısal Karşılaştırılması	48
3.3.2.2.	Bir Levha Üzerindeki Sıcaklık Dağılım Denklemi	50
3.3.2.2.1.	$PiA(1,2)$ Çözümü.....	50
3.3.2.2.2.	Varyasyonel İterasyon Metodu Çözümü.....	51
3.3.2.2.3.	Perturbasyon-İterasyon Metodu ve Varyasyonel İterasyon Metotlarının Sayısal Karşılaştırılması	52
3.3.2.3.	İçinden Elektrik Geçen İnce Bir Yalıtılmış Tel İçindeki Isı Dağılım Denklemi	54
3.3.2.3.1.	Tam Çözüm.....	55

3.3.2.3.2.	Klasik Perturbasyon Metodu Çözümü.....	55
3.3.2.3.3.	$PiA(1,2)$ Çözümü.....	56
3.3.2.3.4.	Sayısal Karşılaştırmalar.....	57
3.3.2.4.	Değişken Isı İletim Katsayılı Kanatçık Denklemi	58
3.3.2.4.1.	Klasik Perturbasyon Metodu Çözümü.....	58
3.3.2.4.2.	$PiA(1,2)$ Çözümü.....	59
3.3.2.4.3.	Sayısal Karşılaştırmalar.....	60
3.3.2.5.	Gözenekli Kanatçık Denklemi.....	63
3.3.2.5.1.	Klasik Perturbasyon Metodu Çözümü.....	63
3.3.2.5.2.	$PiA(1,2)$ Çözümü.....	64
3.3.2.5.3.	Sayısal Karşılaştırmalar.....	65
4.	PERTURBASYON-İTERASYON METODUNUN BİRİNCİ MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE SİSTEMLERİNE GENELLEŞTİRİLMESİ	68
4.1.	Birinci Mertebe Isı Transferi Denklemi	69
4.1.1.	$PiA(1,1)$ Çözümü.....	70
4.1.2.	$PiA(1,2)$ Çözümü.....	72
4.1.3.	Sayısal Karşılaştırmalar.....	73
4.2.	Lotka-Volterra Denklemi ve Denklem Sistemleri	74
4.2.1.	Tek Boyutlu Lotka-Volterra Sistemi.....	75
4.2.1.1.	$PiA(1,1)$ Çözümü.....	75
4.2.1.2.	$PiA(1,2)$ Çözümü.....	77
4.2.1.3.	Sayısal Karşılaştırmalar.....	78
4.2.2.	İki Boyutlu Lotka-Volterra Denklem Sistemi	81
4.2.2.1.	$PiA(1,1)$ Çözümü.....	81
4.2.2.2.	Sayısal Karşılaştırmalar.....	84
4.2.3.	Üç Boyutlu Lotka-Volterra Denklemi	84
4.2.3.1.	$PiA(1,1)$ Çözümü.....	85
4.2.3.2.	Sayısal Karşılaştırmalar.....	86
4.2.4.	Çok Boyutlu Lotka-Volterra Diferansiyel Denklem Sistemi	88
	SONUÇ VE ÖNERİLER.....	90
	REFERANSLAR.....	92
	ÖZGEÇMİŞ	98

SEMBOLLER LİSTESİ

F	: Fonksiyon Değişkeni.
u	: Fonksiyonun Bağımlı Değişkeni.
t	: Fonksiyonun Bağımsız Değişkeni- Zamanı Değişkeni.
x	: Fonksiyonun Bağımsız Değişkeni- Mekanı Değişkeni.
ε	: Ele Alınan Probleme Özel Perturbasyon Parametresi.
c	: İntegral Sabiti.
n	:İterasyon Parametresi.
λ	: Ele Alınan Probleme Özel Boyutsuz Parametre.
T	: Boyutlu Sıcaklık.
θ	: Boyutsuz Sıcaklık.
I	: Akım Şiddeti.
β	: Boyutsuz Isı İletim Katsayısı.
R	: Elektrik Direnci.
r_0	: Yarıçap.
L	: Uzunluk.
k	: Isı iletim katsayısı.
k^*	: Referans ısı iletim katsayısı.
T_0	: Referans Sıcaklık.
N	: Boyutsuz Taşınım Parametresi
b_i	: Lotka-Volterra Denklemlerine ait Boyutsuz Parametreler
a_{ij}	: Lotka-Volterra Denklemlerine ait Boyutsuz Parametreler

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa Numarası

Şekil 2.1. Denklem (2.18) için Tam Çözüm, Taylor Serisi Çözümü ve Perturbasyon İterasyon Çözümlerinin Karşılaştırılması ($\epsilon=1$).....	18
Şekil 2.2. Denklem (2.18) için Tam Çözüm ve Perturbasyon İterasyon Çözümlerinin Karşılaştırılması ($\epsilon=0.1$).	19
Şekil 2.3. Denklem (2.48) için Tam Çözüm, Taylor Serisi Çözümü ve Perturbasyon İterasyon Çözümlerinin Karşılaştırılması ($\epsilon=0.1$).....	21
Şekil 2.4. Denklem (2.48) için Tam Çözüm ve PIA(1,2) Perturbasyon İterasyon Çözümlerinin Karşılaştırılması ($\epsilon=1$).....	25
Şekil 2.5. Denklem (2.66) için İki İterasyon Perturbasyon-İterasyon ve Varyasyonel İterasyon Çözümlerinin Sayısal çözümlerle karşılaştırılması ($\epsilon=1$).....	29
Şekil 2.6. Denklem (2.66) için Perturbasyon-İterasyon Metodunun İlk Üç İterasyon Çözümünün Sayısal Çözümle Karşılaştırılması ($\epsilon=2$).....	29
Şekil 2.7. Denklem (2.66) için Perturbasyon-İterasyon ve Varyasyonel İterasyon Çözümlerinin Artık Hata Analizi ($\epsilon=2$).....	30
Şekil 3.1. Denklem (3.48) için İki İterasyon Perturbasyon-İterasyon ve Varyasyonel İterasyon Çözümlerinin Sayısal Çözümlerle Karşılaştırılması ($\epsilon=0.5$).....	49

Şekil 3.2. Denklem (3.48) için Perturbasyon-İterasyon ve Varyasyonel İterasyon Çözümlerinin Artık Hata Analizi ($\varepsilon=1$).....	49
Şekil 3.3. Denklem (3.56) için İki İterasyon Perturbasyon-İterasyon ve Varyasyonel İterasyon Çözümlerinin, Sayısal Çözümlerle Karşılaştırılması ($\varepsilon=1$).....	52
Şekil 3.4. Denklem (3.56) için Perturbasyon-İterasyon Algoritmasının ve Varyasyonel İterasyon Metodunun Artık Hata Analizi ($\varepsilon=1$).....	53
Şekil 3.5. Denklem (3.56) için Perturbasyon-İterasyon Algoritmasının İlk Üç İterasyon Çözümünün Sayısal Çözümle Karşılaştırılması ($\varepsilon=100$).....	53
Şekil 3.6. Denklem (3.67) için Perturbasyon-İterasyon Algoritmasının İlk Üç İterasyon Çözümünün Tam Çözümle Karşılaştırılması ($\varepsilon=50$ ve $\lambda=1$).....	57
Şekil 3.7. Denklem (3.81) için Perturbasyon-İterasyon Algoritmasının ikinci İterasyon Çözümlerinin Sayısal Çözümler ile Karşılaştırılması.....	61
Şekil 3.8. Denklem (3.89) için Perturbasyon-İterasyon Algoritmasının Üç İterasyon Çözümlerinin Sayısal Çözümler ile Karşılaştırılması	66

TABLO LİSTESİ

Sayfa Numarası

Tablo 3.1. Bratu-Tipi Başlangıç Değer Problemi için Farklı Perturbasyon-İterasyon Metodu Çözümlerinin Tam Çözümle Karşılaştırılması.....	39
Tablo 3.2. Bratu-Tipi Birinci Sınır Değer Problemi için Farklı Perturbasyon-İterasyon Metodu Çözümlerinin Sayısal Çözümlerle Karşılaştırılması ($\lambda = 1$).....	42
Tablo 3.3. Bratu-Tipi İkinci Sınır Değer Problemi için Farklı Perturbasyon-İterasyon Metodu Çözümlerinin Sayısal Çözümlerle Karşılaştırılması ($\lambda = 1$).....	45
Tablo 3.4. Denklem (3.67) için Üç İterasyon Perturbasyon-İterasyon Metodu ve Klasik Perturbasyon Metodundan Elde Edilen Maksimum Sıcaklık Değerlerinin Farklı ε Değerlerine Göre Tam Çözüm ile Karşılaştırılması ($\lambda = 1$).....	58
Tablo 3.5. Denklem (3.81) için Perturbasyon-İterasyon Metodu ve Klasik Perturbasyon Metodu Çözümlerinin Farklı ε Değerleri için Sayısal Çözümlerle Karşılaştırılması	62
Tablo 3.6. Denklem (3.89) için Perturbasyon-İterasyon Metodu ve Klasik Perturbasyon Metodu Çözümlerinin Sayısal Çözümlerle Karşılaştırılması.....	67
Tablo 4.1. Denklem (4.8) için Perturbasyon-İterasyon Metodu ve Klasik Perturbasyon Metodu Çözümlerinin Sayısal Çözümlerle Karşılaştırılması ($\varepsilon=1$).....	74
Tablo 4.2. Denklem (4.24) için Perturbasyon-İterasyon Metodu Çözümlerinin Tam Çözüm ile Karşılaştırılması. ($a=-3$, $b=1$ ve $\alpha=0.1$).....	79

Tablo 4.3. Denklem (4.24) için PIA(1,2) Çözümlerinin Adomian ve Varyasyonel İterasyon Metodu Çözümleri ile Sayısal Karşılaştırılması ($a=-3$, $b=1$ ve $\alpha=0.1$).....80

Tablo 4.4. Denklem (4.36) için Perturbasyon-İterasyon Metodu Çözümlerinin Sayısal Çözümler ile Karşılaştırılması. ($b_1=0.1$, $a_{11}=-0.0014$, $a_{12}=-0.0012$, $b_2=0.08$, $a_{21}=-0.0009$, $a_{22}=-0.001$, $\alpha=4$ ve $\beta=10$).....84

Tablo 4.5. Üç Boyutlu Lotka-Volterra Denklemleri için Perturbasyon-İterasyon Metodu Çözümlerinin Sayısal Çözümler ile Karşılaştırılması. ($b_1=1$, $a_{11}=-1$, $a_{12}=-0.1$, $a_{13}=-0.1$, $b_2=1$, $a_{21}=-0.1$, $a_{22}=-1$, $a_{23}=-0.1$, $b_3=1$, $a_{31}=-0.1$, $a_{32}=-0.1$, $a_{33}=-1$, $\alpha=0.2$, $\beta=0.3$, $\gamma=0.5$).....87

TEŞEKKÜR

Bilim dünyasına önemli bir yarar sağlamasını umduğum bu çalışmanın her aşamasında, hayat boyu minnet duyacağım Sayın hocam Prof. Dr. Mehmet Pakdemirli' den büyük destek gördüm. Onun örnek kişiliği bana yol gösterici olacaktır.

Ayrıca evimde sunduğu huzur ortamı ile beni rahatlatan anneme de gönül borcumu dile getirmek istiyorum.

Yiğit Aksoy

ÖZET

Bu çalışmada, lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemler için yeni bir perturbasyon-iterasyon metodu geliştirilmiştir. Önerilen metot, klasik perturbasyon serisi olan yaya açılımı ve Taylor serisi yaklaşımı kullanılarak türetilmiştir. Perturbasyon serisinin ve Taylor serisinin terim sayısından yola çıkılarak perturbasyon-iterasyon metodu kendi içerisinde sınıflandırılmıştır.

İkinci ve üçüncü bölümde ortaya atılan fikirler sırasıyla birinci mertebe ve ikinci mertebe diferansiyel denklemler için matematiksel olarak türetilmiştir. Daha sonra ise geliştirilen çözüm algoritmaları araştırmacılar tarafından metodların güvenilirliğini tartışmak için sıklıkla kullanılan problemlere uygulanmıştır. Problemlerin yeni önerilen metoddan elde edilen sonuçları, tam çözümler, sayısal çözümler veya varsa problemlerin literatürde olan diğer metodlarla yapılan çözümleri ile karşılaştırılmıştır.

Dördüncü bölümde ise, önerilen perturbasyon-iterasyon metodu birinci mertebe diferansiyel denklem sistemleri için genelleştirilmiştir. Uygulama olarak ele alınan problemler sayısal veya analitik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

SUMMARY

In this study, a new perturbation-iteration method is developed systematically for both linear and nonlinear differential equations. The proposed method is generated via classical pedestrian perturbation series and Taylor series approach. The perturbation-iteration method is classified based on the numbers of perturbation terms and Taylor series terms.

In the second and third chapter, the ideas put forward in are generated mathematically for first and second order differential equations respectively. Later, the developed algorithms are applied to problems mostly used by researchers to discuss the reliability of their methods. The numerical data obtained from the perturbation-iteration solutions of the application problems was contrasted with exact solutions or numerical solutions as well as solutions of the other methods from literature.

In the fourth chapter, the proposed perturbation-iteration method is generalized to first order differential equations and their systems. Application problems were compared with numerical or exact solutions.

1.GİRİŞ

Perturbasyon teknikleri yaklaşık bir asırdır fiziksel problemlerin yaklaşık analitik çözümlerini bulmakta yaygın olarak kullanılmıştır. Cebirsel denklemler, integraller, diferansiyel denklemler, fark denklemleri, diferansiyel fark denklemleri ve integro-diferansiyel denklemler perturbasyon metotları kullanılarak yaklaşık olarak çözülmüştür. Isı transferinden, mekanik titreşimlere, katı cisimlerin mukavemetinden akışkanlar mekaniğine kadar birçok fiziksel probleme ait matematik model bu metotlarla başarılı olarak çözülmüştür. Bu metotta çözüm, fiziksel küçük bir parametrenin seri açılımı şeklinde ifade edilir. Direk açılım olarak adlandırılan en basit perturbasyon tekniği birçok modelde probleme yol açmakta, zaman içerisinde patlamalara yol açan çözümlere sebep olmaktadır. Bu yüzden gerçek çözümlerle daha uyumlu çözümler elde edebilmek için birçok farklı yöntem geliştirilmiştir. Lindstedt-Poincare tekniği, Renormalizasyon metodu, Çok Ölçekli metot, Ortalama metodu, Gerdirilmiş Parametre Metodu ve Asimptotik Açılımların Uyumu metodu gibi metotlar zaman içerisinde geliştirilmiştir.

Perturbasyon metotlarının en önemli kısıtlaması denklemde küçük bir parametreye ihtiyaç duyulması ya da denkleme bu küçük parametrenin yapay olarak eklenmesidir. Bu durumda çözümler zayıf nonlinear sistemler için geçerli olmaktadır. Fiziksel parametrenin büyük olduğu kuvvetli nonlinear sistemler için bu çözümler geçerli olmamaktadır. Perturbasyon Metodları ile ilgili daha ayrıntılı bilgi Nayfeh (2000)' de bulunabilir.

Kuvvetli nonlinear sistemler için geçerli perturbasyon çözümleri elde etmek üzere son zamanlarda bazı çalışmalar yapılmıştır. Hu ve Xiong (2004), Duffing denklemini kullanarak Lindstedt Poincare metodunu iki farklı şekilde ele almış ve sonuçları karşılaştırmışlardır. Öncelikle denklemi klasik yöntem ile çözmüşlerdir. Daha sonra perturbasyon açılımında modifikasyon yaparak dönüşüm frekansı yerine doğal frekansı seriye açarak çözümler elde etmişlerdir. Elde edilen çözümler sayısal çözümle karşılaştırılmış ve perturbasyon parametresinin çok büyük değerleri için de uygun çözümler elde edilmiştir. Benzer bir çalışmada Hu (2004a) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada yüksek nonlinearliğe sahip Duffing denklemi için yaklaşık ve tam çözümlü frekanslar karşılaştırılmıştır. Hu (2004b), yine aynı denklemi, lineer geri çağırıcı kuvvet teriminin sıfır olma durumu için de ele almıştır. Elde edilen periyotlar tam çözüm periyotları ile büyük parametreler için karşılaştırılmış ve iyi bir yakınsama sağlanmıştır.

Perturbasyon çözümlerinin kuvvetli nonlinear sistemler için geçerli sonuçlar vermesi için alternatif birçok teknik geliştirilmeye çalışılmaktadır. Lineerize edilmiş perturbasyon metodu, parametrelerin açılımı metodu, modifiye edilmiş Lindstedt Poincare metodu, iterasyon metodu bunlara örnek olarak verilebilir. He (2003) lineerize edilmiş perturbasyon metodunu kuvvetli nonlinearliğe sahip titreşim denklemlerine uygulamıştır. Kuvvetli nonlinear sistemlerde çalışan

farklı bir lineerize edilmiş perturbasyon metodu Hu (2004c) tarafından uygulanmıştır. He (1999), Duffing denklemini modifiye edilmiş yaya açılımı kullanarak kuvvetli nonlinear durumlarda geçerli çözüm üretmiştir. Parametlerin açılım metodu ise He (2006) ve Xu (2007) tarafından çeşitli nonlinear problemlere uygulanmıştır. Dai (1990), genelleştirilmiş bir perturbasyon metodunu nonlinear problemler için önermiştir. Bazı kuvvetli nonlinear sistemler için He (2002a), (2002b) tarafından Lindsted-Poincare metodunun modifiye edilmiş hali kullanılmıştır.

R. E. Mickens (1987) tarafından nonlinear osilasyon denklemleri için bir iterasyon prosedürü ortaya atılmıştır. Aynı iterasyon yaklaşımı Mickens (2005) tarafından farklı tipteki titreşim problemleri için genelleştirilmiştir. Mickens (2006) kendi geliştirdiği iterasyon metodunu kesirli kuvveti olan geri çağırıcı kuvvetli titreşim denklemlerine uygulamıştır. Bu çalışmalardan ilham alan diğer araştırmacılar ortaya atılan iterasyon prosedürünü kuvvetli nonlinear sistemler üzerinde geçerli çözümler elde etmek için modifiye etmişlerdir. Lim ve Wu (2002) Mickens (1987)'nin titreşim problemleri için ortaya attığı iterasyon metodunu geliştirmişlerdir. Marinca ve Herisanu (2006), düzeltilmiş iteratif bir perturbasyon metodunu bazı nonlinear titreşim tipi diferansiyel denklemlere uygulamıştır. Hu (2006), kuadratik nonlinearliğe sahip bir titreşim denklemine iterasyon prosedürü uygulamıştır. İterasyon perturbasyon prosedürü olarak ortaya atılan bir diğer çalışma ise He (2001) tarafından yapılmıştır. Bahsedilen çalışmada ele alınan nonlinear diferansiyel denklemlerdeki nonlinear terimler, bağımlı değişken ile çarpım halinde bulunan bir başlangıç fonksiyonu şekline dönüştürülerek nonlinear diferansiyel denklem değişken katsayılı diferansiyel denklem haline getirilmiştir. Burada bahsedilen başlangıç fonksiyonu sınır şartlarını sağlayan basit bir fonksiyondur. Daha sonra denklemin perturbatif çözümü yapılarak bulunan sonuç yine aynı denkleme başlangıç fonksiyonu olarak dahil edilmektedir. Bu sayede yaklaşık çözümler elde edilmektedir.

Literatürde perturbasyon teorisinin cebirsel denklemlerin köklerini bulmak için kullanıldığı çalışmalar mevcuttur. Pakdemirli ve Boyacı (2007), perturbasyon metodu ve Taylor serisi yaklaşımını kullanarak cebirsel denklemlerin köklerini bulmak için literatürde en çok kullanılan Newton-Raphson tipi algoritmaları yeni yaklaşımları ile çıkarmışlardır. Çalışmada perturbasyon serisinin eleman sayısı ve Taylor serisindeki türev mertebesi eşit alınarak türetilen algoritmaların daha iyi sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Ayrıca Newton-Raphson yöntemine göre daha iyi sonuçlar verdiği bilinen Householder iterasyon algoritmasını, yaklaşımlarından buldukları yeni düzeltme terimi ile geliştirmişlerdir. Bu çalışmadaki algoritmalar Pakdemirli et al. (2007) tarafından dört düzeltme terimli perturbasyon serisi ve dördüncü mertebe terimli Taylor serisi kullanarak ileri letilmiştir. Beş terimli algoritma ise başka bir çalışmada Pakdemirli et al. (2007) tarafından sunulmuştur.

Bu tez kapsamından ortaya atılan fikirlerin, Pakdemirli ve Boyacı (2007), Pakdemirli et al. (2007)'nin cebirsel denklemler üzerindeki çalışmalarının diferansiyel denklemler üzerine

genişletilmiş olduğu söylenebilir. Diferansiyel denklemler birinci mertebeden başlamak üzere en temel halde alınacaktır. Dolayısıyla amaç sadece osilasyon tipi denklemleri zmek değildir. Mühendislik ve fiziğin en temel denklemlerinin perturbasyon iterasyon zmlerine yer verilecektir.

İkinci kısımda birinci mertebeli adi diferansiyel denklemler için farklı perturbasyon-iterasyon algoritmaları geliştirilmiştir. Geliştirilen algoritmaların sonuçlarının klasik perturbasyon yaklaşımına göre daha iyi olduğu gösterilmiştir. Bu kısımdaki çalışmaların sonuçları ayrıca Pakdemirli et al. (2011)'de bulunabilir.

nc kısımda çok farklı tip perturbasyon-iterasyon algoritmaları ikinci mertebeli diferansiyel denklemlere uygulanmış ve başarılı sonuçlar alınmıştır. Bu bölümde alt kısımlar olan Bratu tipi diferansiyel denklemlerinin ve ısı transferi denklemlerinin perturbasyon-iterasyon zmleri sırasıyla Aksoy ve Pakdemirli (2010) ve Aksoy et al. (2012) tarafından sunulmuştur.

Dördüncü kısımda ise perturbasyon-iterasyon algoritması birinci mertebeli diferansiyel denklem sistemlerine genelleştirilmiştir. Uygulama olarak ısı transferi denklemi ve Lotka-Volterra denklem sistemleri seçilmiştir. Diğer bölümlerde olduğu gibi bu kısımda da mevcut yaklaşımın birinci mertebeli diferansiyel denklem sistemlerinde başarılı sonuçlar verdiği gösterilmiştir.

2. BİRİNCİ MERTEBE ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN YENİ PERTURBASYON-İTERASYON METODU

Bu kısımda literatürde olmayan yeni perturbasyon-iterasyon algoritmaları birinci mertebe adi diferansiyel denklemler için geliştirilmiştir. Tekniklerin birinci mertebe denklemler için formülleri çıkarılmış ve uygulamaları yapılmıştır. Birinci mertebe bir diferansiyel denklem en genel halde aşağıdaki şekilde ifade edilebilir :

$$F(u, \dot{u}, \varepsilon) = 0. \quad (2.1)$$

Burada ε diferansiyel denklemin içerdiği bir parametredir. Denklem (2.1) için farklı Taylor serisi açılımları ile değişik perturbasyon-iterasyon formülleri geliştirilecektir. İterasyon formülleri çıkartılırken perturbasyon serisinde bir veya daha fazla düzeltme terimi alınabilir. Tek düzeltme terimi aşağıdaki seri açılımı ile ifade edilirken

$$u_1 = u_0 + \varepsilon u_c \quad (2.2)$$

çift düzeltme terimli formül ise şöyledir :

$$u_1 = u_0 + \varepsilon (u_c)_1 + \varepsilon^2 (u_c)_2. \quad (2.3)$$

Burada u_c , $(u_c)_1$ ve $(u_c)_2$ düzeltme terimleri, u_0 ise sınır şartlarını sağlayan herhangi tahmini bir başlangıç fonksiyonudur. İterasyon formülleri çıkartılırken F fonksiyonu $\varepsilon \cong 0$ ' da seriye açılır ve bir veya daha fazla sayıda Taylor Serisi düzeltme terimi alınır. Alınan düzeltme terimi sayısı ve Taylor terimi sayısına göre farklı formüller üretilebilir. İterasyon formüllerini üretmedeki bu mantık, Pakdemirli *et al.* (2007)' nin cebirsel denklemlerin kök bulma algoritmalarını oluştururken ortaya attıkları iterasyon formül mantığının diferansiyel denklemlere uyarlanması ile aynıdır. Değişik algoritmalar, perturbasyon düzeltme terimi sayısı ve Taylor serisi düzeltme terim sayısına göre adlandırılır. Örneğin, Denklem (2.2)' yi önce denklem (2.1)' e yerleştirip daha sonra F fonksiyonunu $\varepsilon \cong 0$ ' da birinci türevlere kadar Taylor serisine açar ve iterasyon formülümüzü geliştirirsek “tek düzeltme terimli ve birinci terimli Taylor Serisi” iterasyon formülümüzü elde ederiz.

Bundan sonraki kısımlarda birinci mertebe diferansiyel denklemler için “*tek düzeltme terimli ve birinci türev Taylor Serili*”, “*çift düzeltme terimli ve ikinci türev Taylor Serili*” ve “*tek düzeltme*

terimli ve ikinci türev Taylor Serili” perturbasyon iterasyon formülleri çıkarılacaktır. Önceki analizden de (bkz. Pakdemirli *et al.* (2007)) gösterildiği gibi formüllerin tutarlı olabilmesi için perturbasyon düzeltme terim sayısı n her zaman Taylor türev mertebesi m ’den küçük veya eşit olmalıdır ($n \leq m$).

2.1. Birinci Mertebe Diferansiyel Denklemler için “Tek Düzeltme Terimli ve Birinci Türev Taylor Serili” Perturbasyon İterasyon Formülü PIA(1,1)

İlk önce Denklem (2.2), Denklem (2.1)’ e yerleştirilir :

$$F(u_0 + \varepsilon u_c, \dot{u}_0 + \varepsilon \dot{u}_c, \varepsilon) = 0. \quad (2.4)$$

Denklem (2.4) $\varepsilon \cong 0$ civarında sadece birinci türevler kullanılarak Taylor serisine açılır.

$$F(u_0, \dot{u}_0, 0) + \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, \dot{u}_0, 0)u_c \varepsilon + \frac{\partial F}{\partial \dot{u}}(u_0, \dot{u}_0, 0)\dot{u}_c \varepsilon + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(u_0, \dot{u}_0, 0)\varepsilon = 0. \quad (2.5)$$

Dikkat edilirse bu metodta bağımlı değişken ve türevleri farklı birer değişken olarak ele alınmaktadır. Denklem (2.5) düzenlenirse düzeltme terimi u_c cinsinden bir birinci mertebe diferansiyel denklem elde edilir :

$$\dot{u}_c + \frac{\partial F / \partial u}{\partial F / \partial \dot{u}} u_c = - \frac{\partial F / \partial \varepsilon + F / \varepsilon}{\partial F / \partial \dot{u}}. \quad (2.6)$$

Burada dikkat edilmesi gereken fonksiyon ve türevlerinin $\varepsilon \cong 0$ ’ da

$$\begin{aligned}
F &= F(u_0, \dot{u}_0, 0), \\
F_u &= \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, \dot{u}_0, 0), \\
F_{\dot{u}} &= \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{u}}(u_0, \dot{u}_0, 0), \\
F_{\varepsilon} &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(u_0, \dot{u}_0, 0).
\end{aligned}$$

hesap edilmesidir. Denklem (2.6) çözülürse u_c aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$u_c = c e^{-\int \frac{F_u}{F_{\dot{u}}} dt} - \left(\int \frac{F_{\varepsilon} + F/\varepsilon}{F_{\dot{u}}} e^{\int \frac{F_u}{F_{\dot{u}}} dt} dt \right) e^{-\int \frac{F_u}{F_{\dot{u}}} dt}. \quad (2.7)$$

Burada c integral sabitidir. Sağdaki terimlere ait alt indisler o parametre veya fonksiyonlara göre türevi temsil etmektedir. Denklem (2.7), Denklem (2.2)' ye yerleştirilirse yaklaşık çözüm aşağıdaki şekildedir :

$$u_1 = u_0 + \varepsilon c e^{-\int \frac{F_u}{F_{\dot{u}}} dt} - \varepsilon \left(\int \frac{F_{\varepsilon} + F/\varepsilon}{F_{\dot{u}}} e^{\int \frac{F_u}{F_{\dot{u}}} dt} dt \right) e^{-\int \frac{F_u}{F_{\dot{u}}} dt}. \quad (2.8)$$

Denklem (2.8)' de u_0 sınır şartlarını sağlayan bir başlangıç fonksiyonu ise, u_1 gerçek çözüme daha yakın ve daha hassas başka bir çözüm olacaktır. u_1 çözümü bir sonraki adım için başlangıç fonksiyonu olarak kabul edilirse u_1 ' den daha hassas bir çözüm elde ederiz. Böylece bulunan sonuçları sürekli olarak Denklem (2.8)' e başlangıç fonksiyonu olarak yerleştirirsek bir iterasyon algoritması elde ederiz. Daha sistematik olarak $n=0,1,2,3..$ olmak üzere “Tek Düzeltme Terimli ve Birinci Türev Taylor Serili” perturbasyon-iterasyon formülü Denklem (2.8) kullanılarak yazılabilir :

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon c_n e^{-\int \frac{F_u}{F_{\dot{u}}} dt} - \varepsilon \left(\int \frac{F_{\varepsilon} + F}{F_{\dot{u}}} e^{\int \frac{F_u}{F_{\dot{u}}} dt} dt \right) e^{-\int \frac{F_u}{F_{\dot{u}}} dt}. \quad (2.9)$$

Burada n iterasyon sayısına bağlı olarak $n=0,1,2,3..$ olabilir. Ayrıca Denklem (2.8)' de hesaplanması gereken türevlerin aşağıdaki şekilde olduğu unutulmamalıdır.

$$\begin{aligned} F &= F(u_n, \dot{u}_n, 0), \\ F_u &= \frac{\partial F}{\partial u}(u_n, \dot{u}_n, 0), \\ F_{\dot{u}} &= \frac{\partial F}{\partial \dot{u}}(u_n, \dot{u}_n, 0), \\ F_{\varepsilon} &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(u_n, \dot{u}_n, 0). \end{aligned}$$

2.2. Birinci Mertebe Diferansiyel Denklemler için “İki Düzeltme Terimli ve İkinci Türev Taylor Serili” Perturbasyon-İterasyon Formülü PİA(2,2)

Denklem (2.3), Denklem (2.1)' e yerleştirilirse

$$F(u_0 + \varepsilon u_{c1} + \varepsilon^2 u_{c2}, \dot{u}_0 + \varepsilon \dot{u}_{c1} + \varepsilon^2 \dot{u}_{c2}, \varepsilon) = 0 \quad (2.10)$$

elde edilir. Denklem (2.10)' u $\varepsilon \cong 0$ civarında ikinci türevlere kadar Taylor serisine açalım :

$$\begin{aligned} F + F_u (\varepsilon u_{c1} + \varepsilon^2 u_{c2}) + F_{\dot{u}} (\varepsilon \dot{u}_{c1} + \varepsilon^2 \dot{u}_{c2}) + F_{\varepsilon} \varepsilon + \frac{1}{2} F_{uu} \varepsilon^2 u_{c1}^2 + \frac{1}{2} F_{u\dot{u}} \varepsilon^2 \dot{u}_{c1}^2 + \frac{1}{2} F_{\varepsilon\varepsilon} \varepsilon^2 \\ + F_{u\dot{u}} u_{c1} \dot{u}_{c1} \varepsilon^2 + F_{u\varepsilon} u_{c1} \varepsilon^2 + F_{\dot{u}\varepsilon} \dot{u}_{c1} \varepsilon^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Yukarıdaki denklem ε ' nun mertebelerine göre ayrıştırılırsa u_{c1} ve u_{c2} düzeltme terimleri olan etkileşimli bir çift birinci mertebe diferansiyel denklem sistemi elde edilir :

$$\dot{u}_\delta + \frac{F_u}{F_{\dot{u}}} u_{c1} = - \frac{F_\varepsilon + F/\varepsilon}{F_{\dot{u}}}, \quad (2.12)$$

$$\dot{u}_\delta + \frac{F_u}{F_{\dot{u}}} u_{c2} = - \frac{1}{F_{\dot{u}}} \left(\frac{1}{2} F_{uu} u_{c1}^2 + \frac{1}{2} F_{u\dot{u}} \dot{u}_{c1}^2 + \frac{1}{2} F_{\varepsilon\varepsilon} + F_{u\dot{u}} u_{c1} \dot{u}_\delta + F_{u\varepsilon} u_{c1} + F_{\dot{u}\varepsilon} \dot{u}_\delta \right). \quad (2.13)$$

Pertürbasyon-iterasyon formülü ise aşağıdaki gibidir.

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon(u_{c1})_n + \varepsilon^2(u_{c2})_n, \quad n = 0, 1, 2, 3... \quad (2.14)$$

Denklem (2.12) ve (2.13)' deki türevler aşağıdaki şekilde hesaplanmalıdır.

$$\begin{aligned} F &= F(u_n, \dot{u}_n, 0), & F_{\dot{u}\dot{u}} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^2}(u_n, \dot{u}_n, 0), \\ F_u &= \frac{\partial F}{\partial u}(u_n, \dot{u}_n, 0), & F_{\varepsilon\varepsilon} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2}(u_n, \dot{u}_n, 0), \\ F_{\dot{u}} &= \frac{\partial F}{\partial \dot{u}}(u_n, \dot{u}_n, 0), & F_{u\varepsilon} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial \varepsilon}(u_n, \dot{u}_n, 0), \\ F_\varepsilon &= F_\varepsilon(u_n, \dot{u}_n, 0), & F_{u\dot{u}} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial \dot{u}}(u_n, \dot{u}_n, 0), \\ F_{uu} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u_n, \dot{u}_n, 0), & F_{\dot{u}\varepsilon} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u} \partial \varepsilon}(u_n, \dot{u}_n, 0). \end{aligned}$$

Bu durumda (2.12)-(2.14) kullanılarak iterasyon yapılır.

2.3. Birinci Mertebe Diferansiyel Denklemler için “Tek Düzeltme Terimli ve İkinci Türev Taylor Serili” Perturbasyon-İterasyon Formülü PIA(1,2)

Bu kısımda perturbasyon açılımında bir düzeltme terimi ve Taylor açılımında ise ikinci mertebeye kadar türevler alınmıştır. Denklem (2.4) $\varepsilon \cong 0$ civarında ikinci mertebe türevlere kadar Taylor serisine açılır :

$$F + F_u u_c \varepsilon + F_{\dot{u}} \dot{u}_c \varepsilon + F_{\varepsilon} \varepsilon + \frac{1}{2} F_{uu} u_c^2 \varepsilon^2 + \frac{1}{2} F_{\dot{u}\dot{u}} \dot{u}_c^2 \varepsilon^2 + \frac{1}{2} F_{\varepsilon\varepsilon} \varepsilon^2 + F_{u\dot{u}} u_c \dot{u}_c \varepsilon^2 + F_{u\varepsilon} u_c \varepsilon^2 + F_{\dot{u}\varepsilon} \dot{u}_c \varepsilon^2 = 0. \quad (2.15)$$

Denklem düzenlenirse

$$(F_{\dot{u}} + \varepsilon F_{\dot{u}\varepsilon}) \dot{u}_c + (F_u + \varepsilon F_{u\varepsilon}) u_c + \frac{1}{2} \varepsilon F_{uu} u_c^2 + \varepsilon F_{u\dot{u}} u_c \dot{u}_c + \frac{1}{2} \varepsilon F_{\dot{u}\dot{u}} \dot{u}_c^2 = -\frac{F}{\varepsilon} - F_{\varepsilon} - \frac{1}{2} \varepsilon F_{\varepsilon\varepsilon} \quad (2.16)$$

u_c düzeltme terimi cinsinden diferansiyel denklem elde edilir. İterasyon formülü ise aşağıdaki şekildedir :

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon (u_c)_n, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (2.17)$$

Her bir iterasyon için Denklem (2.16)'nın türevleri aşağıdaki gibidir :

$$\begin{aligned}
F &= F(u_n, \dot{u}_n, 0), & F_{\dot{u}\dot{u}} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^2}(u_n, \dot{u}_n, 0), \\
F_u &= \frac{\partial F}{\partial u}(u_n, \dot{u}_n, 0), & F_{\varepsilon\varepsilon} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2}(u_n, \dot{u}_n, 0), \\
F_{\dot{u}} &= \frac{\partial F}{\partial \dot{u}}(u_n, \dot{u}_n, 0), & F_{u\varepsilon} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial \varepsilon}(u_n, \dot{u}_n, 0), \\
F_\varepsilon &= F_\varepsilon(u_n, \dot{u}_n, 0), & F_{\dot{u}\dot{u}} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial \dot{u}}(u_n, \dot{u}_n, 0), \\
F_{uu} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u_n, \dot{u}_n, 0), & F_{\dot{u}\varepsilon} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u} \partial \varepsilon}(u_n, \dot{u}_n, 0).
\end{aligned}$$

Her bir iterasyon için farklı düzeltme terimleri Denklem (2.16)' dan elde edilir. Bulunan düzeltme ve bu düzeltme terimini bulurken kullandığımız başlangıç fonksiyonumuz Denklem (2.17)' de yerine konularak iterasyon prosedürü gerçekleştirilir.

2.4. Birinci Mertebe Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları

Bu kısımda birinci mertebe diferansiyel denklemler için çıkarılan pertürbasyon iterasyon algoritmalarının uygulamaları yapılacaktır.

2.4.1. Bir Nonlineer Birinci Mertebe Diferansiyel Denklem

Aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım :

$$\dot{u} + \varepsilon u^2 = 0, \quad u(0) = 1. \quad (2.18)$$

2.4.1.1. Tam Çözüm

Denklem (2.18)' in verilen başlangıç şartı için tam çözümü aşağıdaki gibidir :

$$u_{ex} = \frac{1}{1 + \varepsilon t}. \quad (2.19)$$

Denklem (2.19)' un Taylor serisi açılımı ise aşağıdaki gibidir :

$$u_{ex}^T = 1 - \varepsilon t + \varepsilon^2 t^2 - \varepsilon^3 t^3 \dots + (-1)^m \varepsilon^m t^m + \dots \quad (2.20)$$

2.4.1.2. PIA(1,1) ile çözümü

Denklem (2.9)' daki türevler ve integral teker teker hesaplanmalıdır :

$$F_u(u_n, \dot{u}_n, 0) = 0,$$

$$F_{\dot{u}}(u_n, \dot{u}_n, 0) = 1,$$

$$e^{\int \frac{F_u}{F_{\dot{u}}} dt} = 1,$$

$$F(u_n, \dot{u}_n, 0) = \dot{u}_n,$$

$$F_{\varepsilon}(u_n, \dot{u}_n, 0) = u_n^2.$$

Denklem (2.9), Denklem (2.18) için aşağıdaki özel şekli alır :

$$u_{n+1} = \varepsilon \left(c_n - \int u_n^2 dt \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.21)$$

$n=0$ ilk iterasyona karşılık gelir. İlk iterasyon için başlangıç şartı ile uyumlu aşağıdaki fonksiyon kullanılacaktır :

$$u_0 = 1. \quad (2.22)$$

Denklem (2.22), Denklem (2.21)' e yerleştirilip integral alınır ve $u_1(0) = 1$ başlangıç şartımız uygulanırsa ilk iterasyon sonucu aşağıdaki şekilde bulunabilir :

$$u_1 = 1 - \varepsilon t. \quad (2.23)$$

İkinci iterasyon (n=1) için Denklem (2.23), Denklem (2.21)' e yerleştirilir, integral alınır

$$u_2 = \varepsilon \left(c_1 - \left(t - \varepsilon t^2 + \frac{\varepsilon^2 t^3}{3} \right) \right) \quad (2.24)$$

bulunur. Denklem (2.24)' de ε^3 mertebesi terim ihmal edilir ve $u_2(0) = 1$ sınır şartı uygulanırsa

$$u_2 = 1 - \varepsilon t + \varepsilon^2 t^2 \quad (2.25)$$

elde edilir. Benzer işlemlerle 3. İterasyon yapılırsa

$$u_3 = 1 - \varepsilon t + \varepsilon^2 t^2 - \varepsilon^3 t^3 \quad (2.26)$$

bulunur. Dikkat edilirse iterasyon sayımız arttıkça bulunan çözümler tam çözümün Taylor serisi açılımına (Denklem (2.20)) yakınsamaktadır. 3 iterasyon sonucunda ise ε^3 mertebesi hassasiyetine ulaşılmaktadır.

2.4.1.3. PIA(2,2) ile çözümü

İlk önce düzeltme terimlerini veren diferansiyel denklem sistemindeki (Denklem (2.12) ve (2.13)) türevler hesaplanmalıdır.

$$\begin{aligned} F &= \dot{u}_n, & F_{uu} &= 0, \\ F_u &= 0, & F_{\varepsilon\varepsilon} &= 0, \\ F_{\dot{u}} &= 1, & F_{u\varepsilon} &= 2u_n, \\ F_{\varepsilon} &= u_n^2, & F_{u\dot{u}} &= 0, \\ F_{uu} &= 0, & F_{\dot{u}\varepsilon} &= 0. \end{aligned}$$

Böylece Denklem (2.12) ve (2.13) aşağıdaki hale gelir :

$$\left(\dot{u}_1\right)_n = -u_n^2 - \frac{\dot{u}_n}{\varepsilon}, \quad (2.27)$$

$$\left(\dot{u}_2\right)_n = -2u_n \left(u_{c1}\right)_n. \quad (2.28)$$

Denklem (2.27) ve (2.28) buradan çözülürse

$$\left(u_{c1}\right)_n = -\frac{u_n}{\varepsilon} - \int u_n^2 dt + c_1, \quad (2.29)$$

$$\left(u_{c2}\right)_n = \frac{2}{\varepsilon} \int u_n^2 dt + 2 \int \left(u_n \int u_n^2 dt\right) dt - 2c_1 \int u_n dt + c_2 \quad (2.30)$$

bulunur. İterasyon prosedürünü kuracağımız başlangıç fonksiyonunu ve düzeltme terimlerini içeren denklem aşağıdaki şekildedir :

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon (u_{c1})_n + \varepsilon^2 (u_{c2})_n. \quad (2.31)$$

Denklemler (2.29) ve (2.30), Denklem (2.31)' e yerleştirilirse iterasyon prosedürünü gerçekleştireceğimiz denklem elde edilir :

$$u_{n+1} = \varepsilon \left(c_1 + \int u_n^2 dt \right) + \varepsilon^2 \left(2 \int \left(u_n \int u_n^2 dt \right) dt - 2c_1 \int u_n dt + c_2 \right). \quad (2.32)$$

İlk iterasyon (n=0) için aşağıdaki başlangıç fonksiyonu kullanılabilir :

$$u_0 = 1. \quad (2.33)$$

Denklem (2.33), Denklem (2.32)' ye yerleştirilip integraller alınır ve $u_1(0) = 1$ başlangıç şartı denkleme sağlatılırsa

$$u_1 = 1 - \varepsilon t + \varepsilon^2 t^2 \quad (2.34)$$

sonucu elde edilir. Aynı işlemler ikinci iterasyon (n=1) için tekrarlanırsa

$$u_2 = 1 - \varepsilon t + \varepsilon^2 t^2 - \varepsilon^3 t^3 + \varepsilon^4 t^4 \quad (2.35)$$

ikinci iterasyon sonucu elde edilir. İlk iterasyon çözümü, Denklem (2.18)' in tam çözümünün Taylor serisi açılımına ε^2 mertebesi hassasiyetine kadar yaklaşmaktayken, ikinci iterasyon çözümü ε^4 mertebesi hassasiyetine ulaşmaktadır. Halbuki tek düzeltme terimli iterasyon formülü (Denklem (2.9)) ile bulunan sonuçlar 3 iterasyon ile ancak ε^3 mertebesi hassasiyetine kadar ulaşabilmişlerdi. Çift düzeltme terimli iterasyon prosedürümüz bu problem için tek düzeltme terimli duruma göre daha az iterasyon ile daha hassas sonuç vermiştir.

2.4.1.4. PIA(1,2) ile Çözümü

Denklem (2.18) için Denklem (2.16)' nın türevleri teker teker hesaplanmalıdır.

$$\begin{aligned} F(u_n, \dot{u}_n, 0) &= \dot{u}_n, & F_{\ddot{u}}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= 0, \\ F_u(u_n, \dot{u}_n, 0) &= 0, & F_{\varepsilon\varepsilon}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= 0, \\ F_{\dot{u}}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= 1, & F_{u\varepsilon}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= 2u_n, \\ F_{\varepsilon}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= u_n^2, & F_{u\dot{u}}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= 0, \\ F_{uu}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= 0, & F_{\dot{u}\varepsilon}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Hesaplanan terimler Denklem (2.16)' ya yerleştirilirse düzeltme terimini veren diferansiyel denklem elde edilir :

$$(\dot{u}_c)_n + 2\varepsilon u_n (\dot{u}_c)_n = -\frac{\dot{u}_n}{\varepsilon} - u_n^2. \quad (2.36)$$

Bu düzeltme terimleri aşağıdaki yaklaşığa çözüme yerleştirilmelidir.

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon (\dot{u}_c)_n. \quad (2.37)$$

İlk iterasyon (n=0) için $u_0 = 1$ başlangıç fonksiyonunu kullanırsak denklem (2.36) ve (2.37) aşağıdaki hale gelir :

$$(\dot{u}_c)_0 + 2\varepsilon(u_c)_0 = -1, \quad (2.38)$$

$$u_1 = u_0 + \varepsilon(\dot{u}_c)_0. \quad (2.39)$$

Denklem (2.38)' de $(\dot{u}_c)_0$ çözülür ve Denklem (2.39)' da yerine konulursa

$$u_1 = 1 + \varepsilon \left(-\frac{1}{2\varepsilon} + c_0 e^{-2\varepsilon t} \right) \quad (2.40)$$

bulunur. $u_1(0) = 1$ başlangıç şartı Denklem (2.40)' a uygulanıp integral sabiti c_0 bulunur :

$$c_0 = \frac{1}{2\varepsilon}. \quad (2.41)$$

Denklem (2.41), Denklem (2.40)' a yerleştirilirse ilk iterasyon sonucu bulunur :

$$u_1 = 1 + \frac{1}{2} \left(e^{-2\varepsilon t} - 1 \right). \quad (2.42)$$

Bu çözümü tam çözümün Taylor serisi açılımı ile karşılaştırmak için Taylor serisine açalım :

$$u_1^T = 1 - \varepsilon t + \varepsilon^2 t^2 + O(\varepsilon^3). \quad (2.43)$$

Görüldüğü üzere PIA(1,2) formülünü kullanarak tek iterasyon ile ε^2 mertebesinde doğruluk elde etmiş bulunmaktayız. Şimdi u_1 çözümünü denklem (2.36) ve (2.37)' ye yerleştirerek ikinci iterasyona geçelim :

$$(\dot{u}_c)_1 + 2\varepsilon \left(1 + \frac{1}{2}(e^{-2\varepsilon t} - 1) \right) (u_c)_1 = e^{-2\varepsilon t} - \left(1 + \frac{1}{2}(e^{-2\varepsilon t} - 1) \right)^2. \quad (2.44)$$

Değişken katsayılı diferansiyel denklemi çözmeye çalışmamak için $(u_c)_1$ ' in katsayısı olan $1 + \frac{1}{2}(e^{-2\varepsilon t} - 1)$ terimini yaklaşık 1 kabul edelim ve Denklem (2.44)' ü çözelim :

$$(u_c)_1 = c_1 e^{-2\varepsilon t} + \frac{t e^{-2\varepsilon t}}{2} + \frac{e^{-4\varepsilon t}}{8\varepsilon} - \frac{1}{8\varepsilon}. \quad (2.45)$$

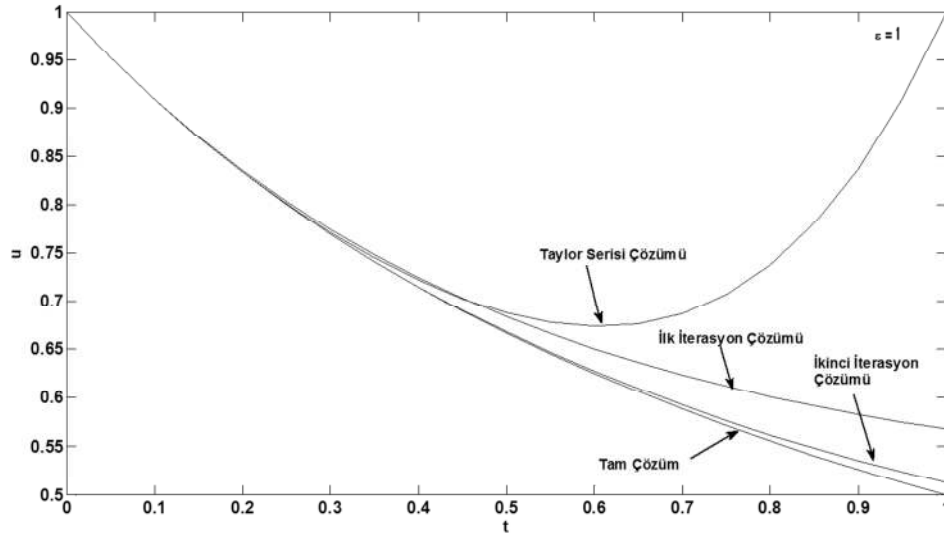
Bulunan bu sonuç Denklem (2.37)' ye yerleştirilir ve $u_2(0) = 1$ başlangıç şartı sağlatılırsa ikinci iterasyon çözümü elde edilir :

$$u_2 = 1 + \frac{1}{2}(e^{-2\varepsilon t} - 1) + \frac{\varepsilon t e^{-2\varepsilon t}}{2} + \frac{1}{8}(e^{-4\varepsilon t} - 1). \quad (2.46)$$

Bu çözümü tam çözümün Taylor serisi açılımı ile karşılaştırmak için Taylor serisine açalım :

$$u_2^T = 1 - \varepsilon t + \varepsilon^2 t^2 - \varepsilon^3 t^3 + \varepsilon^4 t^4 + O(\varepsilon^5). \quad (2.47)$$

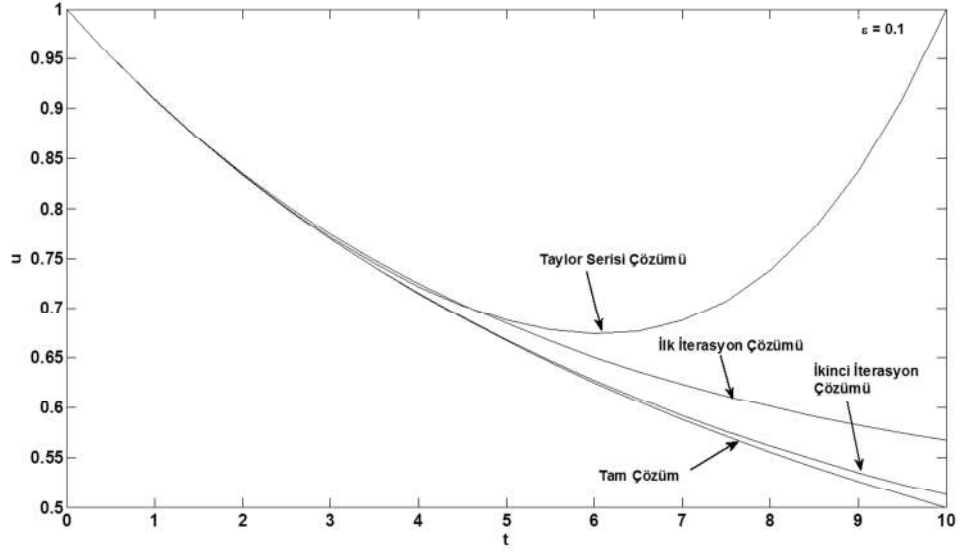
İki iterasyon sonucunda ε^4 mertebesinde hassasiyet elde edilmiştir. İterasyon formüllerimizi çıkarırken “tek düzeltme terimli ve ikinci türev Taylor serili” iterasyon formülü kullanmamız bize sonuçlarda tam çözümün Taylor serisi çözümünden farklı sonuçlar getirmiştir. Taylor serisi çözümü bir polinom iken “tek düzeltme terimli ve ikinci türev Taylor serili” çözümümüz eksponansiyel yapıdadır. Bu yüzden bu kısım için bulduğumuz sonuçları grafikler üzerinde tartışacağız.



Şekil 2.1. Denklem (2.18) için Tam Çözüm, Taylor Serisi Çözümü ve Perturbasyon İterasyon Çözümlerinin Karşılaştırılması ($\varepsilon=1$)

Şekil 2.1.' den görüldüğü gibi Denklem (2.18)' in Taylor Serisi çözümü $\varepsilon = 1$ değeri için tam çözümden ilk ve ikinci iterasyon çözümlerine göre daha çabuk ayrılmaya başlamıştır. Ayrıca iterasyon sayısının artması ile birlikte tam çözüme yakınsama iyileşmektedir. Şekil 2.2' de ise $\varepsilon = 0.1$ değerinde alınmış t koordinatı genişletilmiş ve tam çözüm, Taylor serisi çözümü ve perturbasyon-iterasyon çözümleri PİA (1.2) karşılaştırılmıştır. Perturbasyon iterasyon çözümlerinin Taylor serisinden daha hassas oldukları bu grafikten de anlaşılmaktadır. Ayrıca

her iki grafikte de Taylor serisi çözümleri patlama davranışı gösterirken, perturbasyon iterasyon çözümlerinin böyle bir zayıflığı bulunmamaktadır.



Şekil 2.2. Denklem (2.18) için Tam Çözüm ve Perturbasyon İterasyon Çözümlerinin Karşılaştırılması ($\varepsilon=0.1$).

2.4.2. Exponansiyel Nonlineerliğe Sahip Birinci Mertebe Diferansiyel Denklem

$$\dot{u} - \varepsilon e^{-u} = 0 \quad (2.48)$$

denkleminin $u(0) = 0$ başlangıç şartı altında perturbasyon iterasyon çözümlerini inceleyelim.

2.4.2.1. Tam Çözüm

Denklem (2.48)' in tam çözümü şöyledir :

$$u_{ex} = \ln(1 + \varepsilon t). \quad (2.49)$$

Denklem (2.49)' un Taylor serisi açılımı ise aşağıdaki gibidir :

$$u_{ex}^T = \varepsilon t - \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} + \frac{\varepsilon^3 t^3}{3} - \frac{\varepsilon^4 t^4}{4} + O(\varepsilon^5). \quad (2.50)$$

2.4.2.2. PIA(1,1) ile Çözümü

İlk önce Denklem (2.48) için Denklem (2.9)' daki türevler hesaplanmalıdır :

$$\begin{aligned} F(u_n, \dot{u}_n, 0) &= \dot{u}_n, \\ F_{\dot{u}}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= 1, \\ F_u(u_n, \dot{u}_n, 0) &= 0, \\ F_{\varepsilon}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= -e^{-u_n}. \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadeler Denklem (2.9)' a yerleştirilip denklem düzenlenirse bu problem için aşağıdaki perturbasyon iterasyon formülü elde edilir :

$$u_{n+1} = \varepsilon \left(c_n + \int e^{-u_n} dt \right) \quad (2.51)$$

İlk iterasyon (n=0) için $u_0 = t$ başlangıç fonksiyonu ile başlayalım :

$$u_1 = \varepsilon (c_0 - e^{-t}). \quad (2.52)$$

Denklem (2.52)' de $u_1(0) = 0$ şartını sağlatırsak nihai ilk iterasyon çözümünü buluruz :

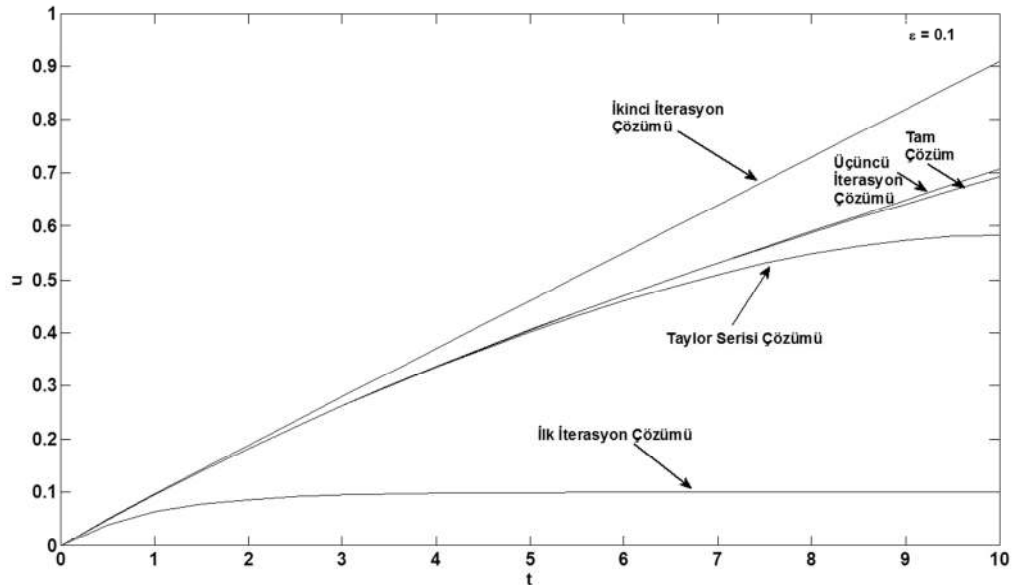
$$u_1 = \varepsilon(1 - e^{-t}). \quad (2.53)$$

Aynı şekilde ikinci ve üçüncü iterasyon sonuçları aşağıdaki şekilde bulunabilir :

$$u_2 = \varepsilon t + \varepsilon^2(1 - t - e^{-t}), \quad (2.54)$$

$$u_3 = \varepsilon t - \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} + \varepsilon^3 \left(1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t} + \frac{t^3}{6} \right). \quad (2.55)$$

İkinci ve üçüncü iterasyon çözümlerinde Denklem (2.51)'in sağ tarafındaki integral içindeki terim işlem kolaylığı açısından $e^{-u_n} \approx 1 - u_n$ olarak alınmıştır.



Şekil 2.3. Denklem (2.48) için Tam Çözümü, Taylor Serisi Çözümü ve Perturbasyon İterasyon Çözümlerinin Karşılaştırılması ($\varepsilon=0.1$).

Denklem (2.48)' in tam Çözümü, dört terim Taylor serisi çözümü ve PIA (1,1) çözümlerinin karşılaştırılması Şekil 2.3. de verilmiştir. Taylor serisi çözümü hassasiyetinin üzerine ancak 3. İterasyonda çıkmıştır. İterasyon sayısı arttıkça çözümlerin tam çözüme yakınsadığı şekilden görülmektedir.

2.4.2.3. PIA(1,2) ile Çözümü

Denklem (2.48) için Denklem (2.16)' nın türevleri teker teker hesaplanmalıdır :

$$\begin{aligned} F(u_n, \dot{u}_n, 0) &= \dot{u}_n, & F_{\dot{u}\dot{u}}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= 0, \\ F_u(u_n, \dot{u}_n, 0) &= 0, & F_{\varepsilon\varepsilon}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= 0, \\ F_{\dot{u}}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= 1, & F_{u\varepsilon}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= e^{-u_n}, \\ F_{\varepsilon}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= -e^{-u_n}, & F_{\dot{u}\dot{u}}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= 0, \\ F_{uu}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= 0, & F_{\dot{u}\varepsilon}(u_n, \dot{u}_n, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Bu terimler hesaplanır ve Denklem (2.16)' ya yerleştirilirse aşağıdaki denklem elde edilir :

$$(\dot{u}_c)_n + \varepsilon e^{-u_n} (u_c)_n = -\frac{\dot{u}_n}{\varepsilon} + e^{-u_n}. \quad (2.56)$$

Yukarıdaki denklemi çözerek, $u_{n+1} = u_n + \varepsilon(u_c)_n$ denkleminde kullanılacak düzeltme terimlerini her bir iterasyon için hesaplayabiliriz. İlk iterasyon (n=0) için :

$$u_0 = \varepsilon t. \quad (2.57)$$

Yukarıdaki başlangıç fonksiyonunu Denklem (2.56)' da kullanalım :

$$(\dot{u}_c)_0 + \varepsilon e^{-\varepsilon t} (u_c)_0 = -1 + e^{-\varepsilon t}. \quad (2.58)$$

Soldaki ikinci terimin katsayısı için $e^{-\varepsilon t} \approx 1$ kabulü ile basitleştirme yapılırsa Denklem (2.58)' den

$$(u_c)_0 = c_0 e^{-\varepsilon t} - \frac{1}{\varepsilon} + t e^{-\varepsilon t} \quad (2.59)$$

bulunur. Bu sonuç $u_1 = u_0 + \varepsilon (u_c)_0$ denkleminde yerine konur $u_1(0) = 0$ başlangıç şartı sağlatılırsa ilk iterasyon çözümüne ulaşılır :

$$u_1 = \varepsilon t + e^{-\varepsilon t} - 1 + \varepsilon t e^{-\varepsilon t}. \quad (2.60)$$

Bulunan sonucu Taylor serisine açalım :

$$u_1^T = \varepsilon t - \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} + O(\varepsilon^3). \quad (2.61)$$

Denklem (2.61)' den ilk iterasyon sonucunda ε^2 mertebesine kadar hassasiyet elde edildiği görülmektedir. İkinci iterasyon için Denklem (2.60), Denklem (2.56)' ya yerleştirilirse,

$$(\dot{u}_c)_1 + \varepsilon e^{-\varepsilon t - e^{-\varepsilon t} + 1 - \varepsilon t e^{-\varepsilon t}} (u_c)_1 = -1 + \varepsilon t e^{-\varepsilon t} + e^{-\varepsilon t - e^{-\varepsilon t} + 1 - \varepsilon t e^{-\varepsilon t}} \quad (2.62)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. $(u_c)_1$ ' in katsayısı $e^{-\varepsilon t - e^{-\varepsilon t} + 1 - \varepsilon t e^{-\varepsilon t}} \approx 1$ ve homojenliği bozan terimlerden $e^{-\varepsilon t - e^{-\varepsilon t} + 1 - \varepsilon t e^{-\varepsilon t}} \approx e^{-\varepsilon t}$ alınır ve Denklem (2.62) çözülürse,

$$(u_c)_1 = -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon t^2}{2} e^{-\varepsilon t} + t e^{-\varepsilon t} + c_1 e^{-\varepsilon t} \quad (2.63)$$

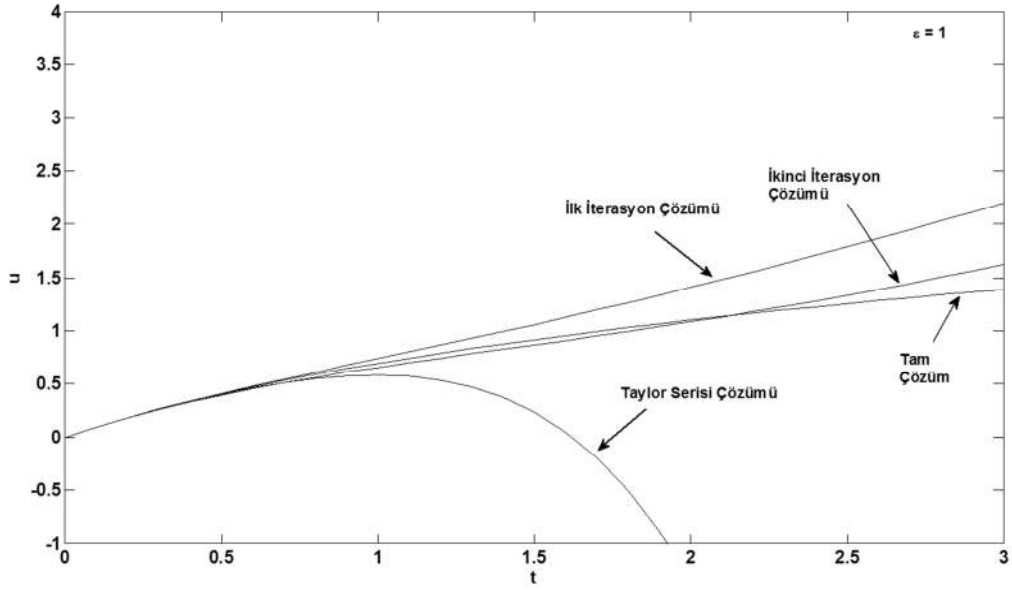
bulunur. Bu sonuç $u_2 = u_1 + \varepsilon(u_c)_1$ denkleminde yerine konur $u_2(0) = 0$ başlangıç şartı sağlatılırsa ikinci iterasyon çözümüne ulaşılır :

$$u_2 = \varepsilon t + 2e^{-\varepsilon t} - 2 + 2\varepsilon t e^{-\varepsilon t} + \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} e^{-\varepsilon t}. \quad (2.64)$$

Denklem (2.64)' ü Taylor serisine açalım :

$$u_2^T = \varepsilon t - \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} + O(\varepsilon^3). \quad (2.65)$$

Denklem (2.65)' den ikinci iterasyon sonucunda da ε^2 mertebesine kadar hassasiyet elde edildiği görülmektedir.



Şekil 2.4. Denklem (2.48) için Tam Çözüm ve PIA(1,2) Perturbasyon İterasyon Çözümlerinin Karşılaştırılması ($\varepsilon=1$).

Denklem (2.48)' in tam Çözümü, Taylor serisi çözümü ve PIA(1,2) çözümlerinin karşılaştırılması Şekil 2.4. de verilmiştir. Birinci ve ikinci iterasyon çözümlerinin Taylor serisi çözümüne göre tam çözüme daha yakın olduğu görülmektedir. Perturbasyon iterasyon çözümlerinde Taylor serisi çözümünde olduğu gibi bir patlama görülmemektedir.

2.4.3. Nonlineer Isı Transferi Problemi

Aşağıdaki Ganji ve Sadighi (2007) tarafından ele alınan yığık bir sistemin taşınım ve radyasyon mekanizmaları ile soğuma problemini modelleyen boyutsuz birinci mertebe diferansiyel denklemi inceleyelim :

$$\frac{du}{dy} + u + \varepsilon u^4 = 0, \quad u(0) = 1. \quad (2.66)$$

Burada ε , boyutsuz radyasyon parametresidir. Bu problem için Denklem (2.66)' nın tek düzeltme terimli ve ikinci türev Taylor serili perturbasyon-iterasyon çözümü, literatürdeki diğer bir iterasyon metodu olan varyasyonel iterasyon metodunun çözümleri ile karşılaştırılacaktır.

2.4.3.1. Perturbasyon İterasyon Algoritması PIA(1,2) ile çözümü

Denklem (2.66) için PIA(1,2) perturbasyon-iterasyon algoritması aşağıda çıkarılmıştır :

$$(u'_c)_n + (1 + 4\varepsilon u_n^3)(u_c)_n = -\frac{u'_n + u_n}{\varepsilon} - u_n^4. \quad (2.67)$$

Denklem (2.66)'nın sınır şartlarını sağlayan basit bir fonksiyon başlangıç fonksiyonu olarak seçilebilir :

$$u_0 = e^{-y}. \quad (2.68)$$

Bu fonksiyon denklem (2.67)'ye yerleştirilirse ilk iterasyon için çözülmesi gereken ilk diferansiyel denklem elde edilir :

$$(u'_c)_0 + (1 + 4\varepsilon e^{-3y})(u_c)_0 = -e^{-4y}. \quad (2.69)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü :

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon(u_c)_n \quad (2.70)$$

denklemini ile beraber (n=0 için) kullanılarak birinci iterasyon çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$u_1 = \frac{3 e^{-y}}{4} + \frac{e^{-y - \frac{4\varepsilon}{3} + \frac{4\varepsilon}{3}} e^{-3y}}{4}. \quad (2.71)$$

İkinci iterasyon çözümünde denklem (2.67)' de parantez içindeki u_1^3 terimi basitlik için u_0^3 alınmıştır. Böylece ikinci iterasyon çözümü aşağıdaki şekilde hesaplanır :

$$\begin{aligned} u_2 = & \frac{3 e^{-y}}{4} + \frac{e^{-y - \frac{4\varepsilon}{3} + \frac{4\varepsilon}{3}} e^{-3y}}{4} - \frac{37\varepsilon}{192} e^{-4y - \frac{16\varepsilon}{3} + \frac{4\varepsilon}{3} (3+e^{-3y})} + \frac{37\varepsilon}{192} e^{-y - \frac{16\varepsilon}{3} + \frac{4\varepsilon}{3} (3+e^{-3y})} \\ & - \frac{81}{1024} e^{-y} + \frac{3}{512} e^{-y - 4\varepsilon + \varepsilon e^{-3y}} + \frac{1}{3072} e^{-y - \frac{16\varepsilon}{3} + \frac{16\varepsilon}{3} e^{-3y}} + \frac{27}{512} e^{-y - \frac{16\varepsilon}{3} + \frac{8\varepsilon}{3} (1+e^{-3y})} \\ & + \frac{31}{1536} e^{-y - \frac{16\varepsilon}{3} + \frac{4\varepsilon}{3} (3+e^{-3y})}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

İterasyon sayısı arttıkça yapılan işlem sayısı oldukça artmaktadır. Elle işlem yapmak imkansız hale gelmektedir. Sembolik bir hesaplayıcıya ihtiyaç duyulmaktadır.

2.4.3.2. Varyasyonel İterasyon Metodu Çözümü

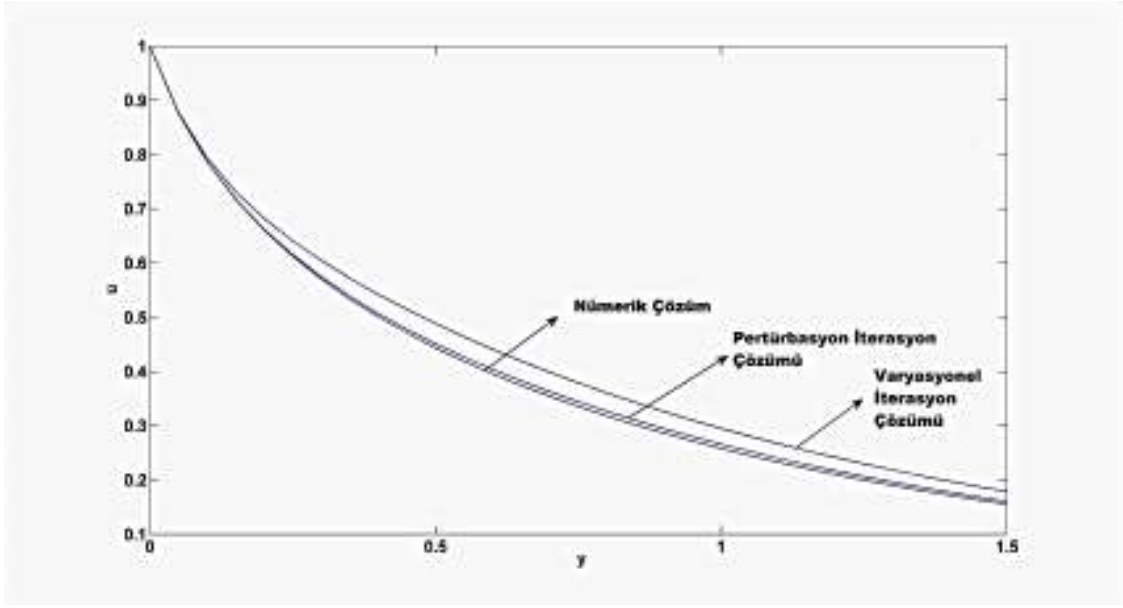
Aynı problemin VİM (varyasyonel iterasyon metodu) çözümü Ganji ve Sadighi (2007) tarafından aynı (Denklem (2.68)) başlangıç fonksiyonunu kullanılarak yapılmıştır. Araştırmacıların iki iterasyon çözümü şu şekildedir :

$$u_1 = e^{-y} - \frac{1}{3} \varepsilon e^{-y} + \frac{1}{3} \varepsilon e^{-4y}, \quad (2.73)$$

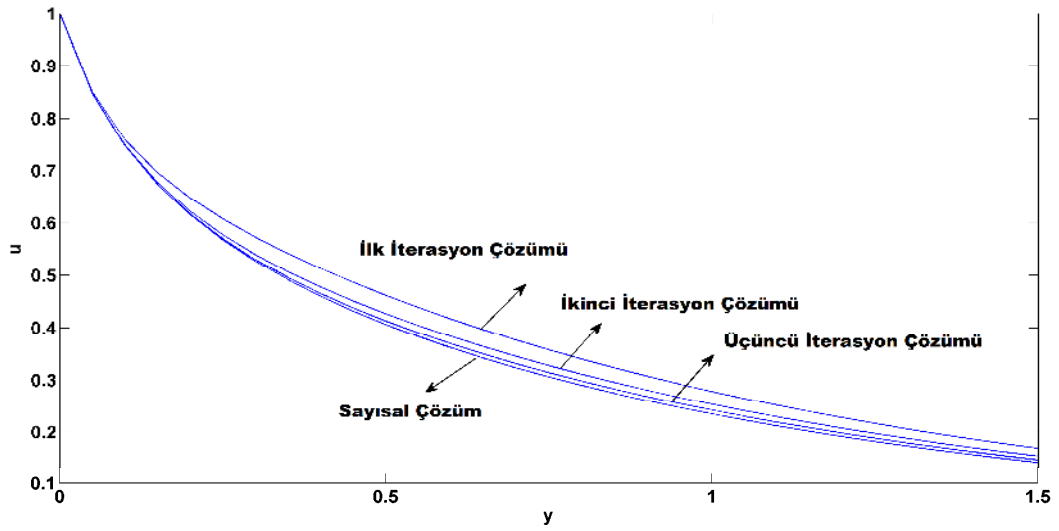
$$\begin{aligned}
u_2 = & e^{-y} - \frac{1}{3} \varepsilon e^{-y} + \frac{1}{3} \varepsilon e^{-4y} + \frac{2}{9} \varepsilon^2 e^{-y} + \frac{1}{81} \varepsilon^4 e^{-y} - \frac{2}{27} \varepsilon^3 e^{-y} - \frac{1}{1215} \varepsilon^5 e^{-y} \\
& - \frac{4}{9} \varepsilon^2 e^{-4y} + \frac{2}{27} \varepsilon^4 e^{-7y} - \frac{2}{9} \varepsilon^3 e^{-7y} - \frac{4}{81} \varepsilon^4 e^{-4y} + \frac{2}{9} \varepsilon^3 e^{-4y} + \frac{2}{27} \varepsilon^3 e^{-10y} \\
& + \frac{2}{9} \varepsilon^2 e^{-7y} + \frac{1}{1215} \varepsilon^5 e^{-16y} + \frac{1}{243} \varepsilon^5 e^{-4y} - \frac{1}{243} \varepsilon^5 e^{-13y} + \frac{1}{81} \varepsilon^4 e^{-13y} \\
& + \frac{2}{243} \varepsilon^5 e^{-10y} - \frac{4}{81} \varepsilon^4 e^{-10y} - \frac{2}{243} \varepsilon^5 e^{-7y}.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

2.4.3.3. Perturbasyon-İterasyon ve Varyasyonel İterasyon Metodlarının Sayısal Olarak Karşılaştırılması

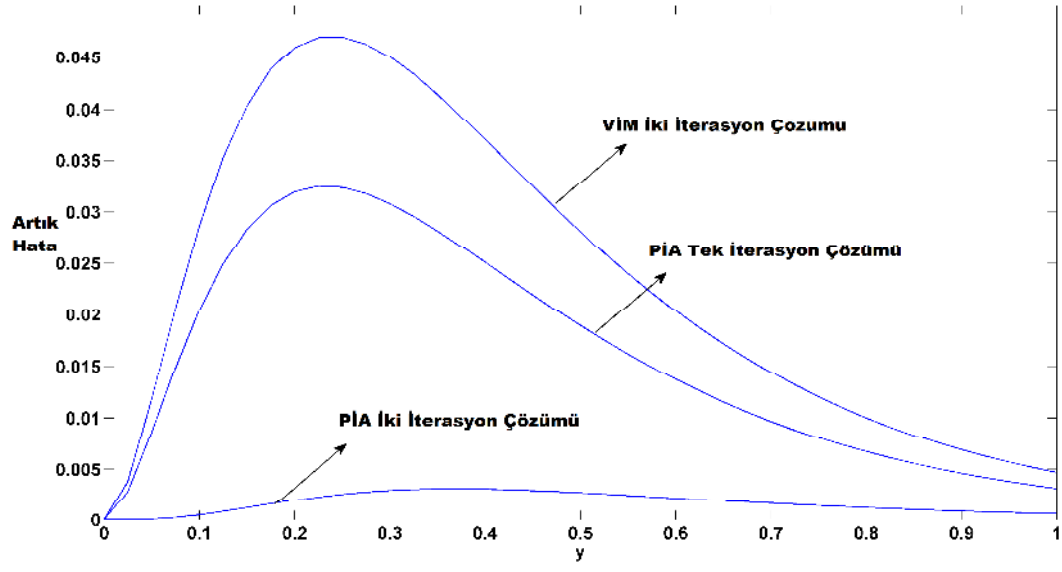
Bu kısımda perturbasyon-iterasyon algoritmalarından elde edilen çözümler, hem varyasyonel iterasyon metodunun çözümleri ile hem de sayısal çözümlerle grafikler üzerinde karşılaştırılacaktır. Şekil 2.5.' den görüldüğü üzere ikinci iterasyon perturbasyon iterasyon çözümü yine ikinci iterasyon varyasyonel iterasyon metodunun çözümüne göre sayısal çözüme çok daha yaklaşık sayısal değerler vermiştir. Karşılaştırmaların sağlıklı olabilmesi için iki metodunda aynı sayıda iterasyon ve aynı başlangıç fonksiyonu ile kullanıldığı unutulmamalıdır. Şekil 2.6.' da perturbasyon-iterasyon algoritması çözümlerinin sayısal çözümle karşılaştırılması verilmiştir. İterasyon sayısı arttıkça çözümlerin fonksiyonel olarak sayısal çözüme yakınsadığı görülmektedir. Şekil 2.7.' de ise yaklaşık çözümlerin artık hataları verilmiştir. Şekilden anlaşılacağı gibi perturbasyon-iterasyon algoritmasının ilk iterasyon çözümü bile iki iterasyon VİM çözümünden daha az hataya sahiptir. Çok önemli diğer bir husus ise ε parametresinin büyük değerleri için yakınsamaların sağlanmış olmasıdır. Bu değerler için normal perturbasyon algoritmaları kullanarak uygun çözümler üretmek mümkün değildir.



Şekil 2.5. Denklem (2.66) için İki İterasyon Perturbasyon-İterasyon ve Varyasyonel İterasyon Çözümlerinin Sayısal çözümlerle karşılaştırılması ($\varepsilon=1$).



Şekil 2.6. Denklem (2.66) için Perturbasyon-İterasyon Metodunun İlk Üç İterasyon Çözümünün Sayısal Çözümle Karşılaştırılması ($\varepsilon=2$).



Şekil 2.7. Denklem (2.66) için Perturbasyon-İterasyon ve Varyasyonel İterasyon Çözümlerinin Artık Hata Analizi. ($\varepsilon=2$).

3. İKİNCİ MERTEBE ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN PERTURBASYON-İTERASYON METODU

İkinci Bölümde birinci mertebe diferansiyel denklemler için farklı perturbasyon-iterasyon algoritmaları çıkarılmış ve farklı tipte denklemlere uygulanmıştı. Benzer algoritmalar bu kısımda ikinci mertebe diferansiyel denklemler için çıkarılacaktır.

3.1. PİA(1,1) Perturbasyon-İterasyon Algoritması

Perturbasyon açılımında bir düzeltme terimi ve Taylor açılımında sadece birinci türevleri dikkate alarak

$$F(u'', u, \varepsilon) = 0 \quad (3.1)$$

ikinci mertebe denklemi için PİA(1,1) algoritması üretilecektir. Burada $u=u(x)$ ve ε ise küçük bir parametredir. Tek düzeltme terimli bir perturbasyon serisini aşağıdaki gibi alalım :

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon (u_c)_n. \quad (3.2)$$

Denklem (3.2)' yi denklem (3.1)' e yerleştirip, sadece birinci türevleri dahil edecek şekilde Taylor serisine açalım :

$$F(u_n'', u_n, 0) + F_u(u_n'', u_n, 0) \varepsilon (u_c)_n + F_{u'}(u_n'', u_n, 0) \varepsilon (u_c)_n + F_\varepsilon(u_n'', u_n, 0) \varepsilon = 0. \quad (3.3)$$

Burada $()'$ bağımsız değişkene göre türevi temsil etmektedir. Ayrıca $F_u = \frac{\partial F}{\partial u}$, $F_{u''} = \frac{\partial F}{\partial u''}$ ve

$F_\varepsilon = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}$ olduğuna dikkat edilmelidir. Denklem (3.3) düzenlenirse, denklemin en genel halde (uygulanacak olan denkleme ve başlangıç fonksiyonuna bağlı olarak) aşağıdaki gibi değişken katsayılı homojen olmayan lineer bir diferansiyel denklem olduğu görülebilir :

$$(u''_c)_n + \frac{F_u}{F_{u''}}(u_c)_n = -\frac{F_\varepsilon + \frac{F}{\varepsilon}}{F_{u''}}. \quad (3.4)$$

Bütün türevlerin $\varepsilon=0$ ' da hesaplandığı unutulmamalıdır. Sınır şartlarını sağlayan bir başlangıç fonksiyonu u_0 denklem (3.4)' e yerleştirilerek $(u_c)_0$ hesaplanır. Daha sonra u_0 ve $(u_c)_0$ denklem (3.2)' ye yerleştirilerek ilk iterasyon çözümü olan u_1 elde edilir. Denklem (3.2) ve (3.4) kullanılarak istenilen hassasiyette çözüm elde edilene kadar iterasyon işlemi tekrarlanabilir.

3.2. PİA(1,2) Perturbasyon-İterasyon Algoritması

Bu kısımda perturbasyon-iterasyon formülü çıkarılırken perturbasyon serisi yine tek terimli alınırken Taylor serisinin terimleri ikinci mertebe türevlere kadar hesaplanacaktır. İlk önce aşağıdaki tek terimli perturbasyon serisi

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon(u_c)_n \quad (3.5)$$

denklem (3.1)' e yerleştirilir ve $\varepsilon=0$ ' da ikinci mertebe türevlerine kadar Taylor serisine açılırsa

$$\begin{aligned} & F(u''_n, u_n, 0) + F_{u''}(u''_n, u_n, 0) \varepsilon(u''_c)_n + F_u(u''_n, u_n, 0) \varepsilon(u_c)_n + F_\varepsilon(u''_n, u_n, 0) \varepsilon + \frac{1}{2} F_{\varepsilon\varepsilon}(u''_n, u_n, 0) \varepsilon^2 \\ & + \frac{1}{2} F_{u''u''}(u''_n, u_n, 0) \varepsilon^2 (u''_c)_n^2 + \frac{1}{2} F_{uu}(u''_n, u_n, 0) \varepsilon^2 (u_c)_n^2 + F_{u''u}(u''_n, u_n, 0) \varepsilon^2 (u''_c)_n (u_c)_n \\ & + F_{u''\varepsilon}(u''_n, u_n, 0) \varepsilon^2 (u''_c)_n + F_{u\varepsilon}(u''_n, u_n, 0) \varepsilon^2 (u_c)_n = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse ikinci mertebe diferansiyel denklemler için aşağıdaki tek düzeltme terimli ve ikinci türev Taylor serili perturbasyon-iterasyon denklemine ulaşılır :

$$\begin{aligned}
 & (\varepsilon F_{u''} + \varepsilon^2 F_{u''\varepsilon})(u_c'')_n + (\varepsilon F_u + \varepsilon^2 F_{u\varepsilon})(u_c)_n + \frac{1}{2} F_{u''u''} \varepsilon^2 (u_c'')_n^2 + F_{u''u} \varepsilon^2 (u_c'')_n (u_c)_n \\
 & + \frac{1}{2} F_{uu} \varepsilon^2 (u_c)_n^2 = -F - F_\varepsilon \varepsilon - \frac{1}{2} F_{\varepsilon\varepsilon} \varepsilon^2.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.3. Perturbasyon-İterasyon Algoritmalarının İkinci Mertebe Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Bu kısımda ikinci mertebe adi diferansiyel denklemler için türetilen perturbasyon-iterasyon algoritmaları matematiksel fizik ve ısı transferine ait bazı fiziksel problemlere uygulanacaktır.

3.3.1. Bratu Tipi İkinci Mertebe Adi Diferansiyel Denklemler

Önceki kısımlarda türetilen perturbasyon-iterasyon formüllerini uygulamak için bu kısımda ısı transferinde, yanma teorisinde, astrofizikte ve elektrospinning metodunda uygulamaları olan Bratu-tipi başlangıç ve sınır-değer problemlerine yer verilmiştir. Bratu denklemleri kompakt formu ve yüksek nonlineerliği nedeniyle, literatürde araştırmacılar tarafından geliştirilen analitik veya sayısal yöntemler için test aracı olarak kullanılmıştır. Adomian metodu, polinom pseudospektral algoritmalar, homotopi perturbasyon metodu, Laplace transform algoritmaları , Chebyshev polinomları ve homotopi analiz metodu bu tip problemlere başarı ile uygulanmıştır. Wazwaz (2005) Bratu tipi denklemlerin Adomian metodu ile yaklaşık çözümlerini yapmıştır. Boyd (1986) iki boyutlu Bratu tipi denklemlerini analitik ve sayısal olarak incelemiştir. Deeba *et al.* (2007) sınır değer problemleri için geliştirilen bir algoritmayı sayısal olarak bu tarz denklemlere uygulamışlardır. Öziş ve Yıldırım (2008) Adomian metodu ve Homotopi perturbasyon metodunu Bratu tipi denklemlerin çözümlerinden yola çıkarak karşılaştırmışlardır. Wang *et al.* (2008) Bratu tipi denklemlerin homotopi perturbasyon çözümlerini elde etmiştir. Yine homotopi perturbasyon metodunun Bratu denklemlerine uygulanması Feng *et al.* (2008) tarafından yapılmıştır. Khuri (2004) Laplace dönüşümü kullanan bir çözüm algoritmasını bu tip denklemlere uygulamıştır. Syam ve Hamdan (2006) Laplace dönüşümü kullanan farklı bir

algoritmayı Bratu denklemleri üzerinde denemiştir. Boyd (2003) Bratu tipi denklemlerinin çözümü için metodunda Chebyshev polinomlarını kullanmıştır. Son olarak da Li ve Liao (2005) Bratu problemlerine farklı bir analitik yaklaşım geliştirmişlerdir.

3.3.1.1. Bratu-Tipi Başlangıç Değer Problemi

Aşağıdaki Bratu' nun başlangıç değer problemini göz önüne alalım (Wazwaz (2005)) :

$$\begin{aligned} u'' - 2e^u &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) &= u'(0) = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Bu denklemin tam çözümü Wazwaz (2005)' de verilmiştir :

$$u = -2 \ln(\cos x). \tag{3.9}$$

3.3.1.1.1. PIA(1,1) Çözümü

Denklem (3.8)' yi aşağıdaki formda tekrar yazalım :

$$F(u'', u, \varepsilon) = u'' - 2e^{\varepsilon u} = 0. \tag{3.10}$$

Burada ε suni olarak denkleme ilave edilmiş bir parametredir. Denklem (3.4)'deki türev terimleri $\varepsilon=0$ da $F = u'' - 2$, $F_{u''} = 1$, $F_u = 0$, $F_\varepsilon = -2u_n$ şeklinde hesaplanır ve nihayetinde denklemlerde $\varepsilon=1$ alınırsa iterasyon formülümüz aşağıdaki basit hali alır :

$$(u''_c)_n = 2u_n - (u''_n - 2). \tag{3.11}$$

Bir tahmini başlangıç fonksiyon için sınır şartlarını sağlayan aşağıdaki basit fonksiyon alınabilir :

$$u_0 = 0. \quad (3.12)$$

Bu başlangıç fonksiyonu kullanılarak her bir iterasyona ait çözümler aşağıdaki şekilde hesaplanabilir :

$$u_1 = x^2, \quad (3.13)$$

$$u_2 = x^2 + \frac{x^4}{6}, \quad (3.14)$$

$$u_3 = x^2 + \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{90}. \quad (3.15)$$

Aynı şekilde beşinci iterasyon çözümü aşağıdaki gibidir :

$$u_5 = x^2 + \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{90} + \frac{x^8}{2520} + \frac{x^{10}}{113400}. \quad (3.16)$$

Yukarıdaki çözüm x^6 çarpanlı terimden başlayarak kesin çözümün Taylor serisi açılımından sapmaktadır.

3.3.1.1.2. PIA(1,2) Çözümü

Denklem (3.8) bu kısım için çift terim Taylor serili perturbasyon-iterasyon algoritması kullanılarak incelenecektir. İlk önce denklem (3.7)'deki terimler tek tek hesaplanır ve en son $\varepsilon=1$ alınır ise iterasyon denkleminin son hali aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$(u_c'')_n - 2(u_c)_n = 2u_n + u_n^2 - (u_n'' - 2). \quad (3.17)$$

Sınır şartlarını sağlayan tahmini bir başlangıç fonksiyonunu aşağıdaki gibi alalım :

$$u_0 = 0. \quad (3.18)$$

Bu tahmini başlangıç fonksiyonu kullanılarak denklem (3.17) aşağıdaki hale gelir :

$$(u_c'')_0 - 2(u_c)_0 = 2. \quad (3.19)$$

Denklem (3.19) çözülür ve denklem (3.18) ile beraber denklem (3.2)' ye yerleştirilirse :

$$u_1 = \text{Cosh}(\sqrt{2}x) - 1 \quad (3.20)$$

ilk iterasyon çözümü elde edilir. Benzer şekilde ikinci iterasyon

$$u_2 = \text{Cosh}(\sqrt{2}x) - 1 + \frac{1}{12}[-9 + 8\text{Cosh}(\sqrt{2}x) + \text{Cosh}(2\sqrt{2}x) - 6\sqrt{2}x \text{Sinh}(\sqrt{2}x)] \quad (3.21)$$

hesaplanır. Tek terim Taylor serili algoritmanın polinom tipi çözümlerine nazaran çift terim Taylor serili algoritma fonksiyonel yapıda çözümler üretmektedir. Fakat bu kısımda cebirsel işlemler daha yoğun olduğundan Mathematica tipi bir sembolik hesaplayıcıya gereksinim duyulabilir.

3.3.1.1.3. PIA(1,3) Çözümü

Önceki kısımlardaki analizlerin yardımıyla ikinci mertebe diferansiyel denklemler için tek düzeltme terimli perturbasyon serili ve üçüncü türeve kadar Taylor serili perturbasyon-iterasyon algoritması PIA(1,3) geliştirilebilir. Sadelik açısından denklem (3.8) için bu perturbasyon-iterasyon algoritması aşağıdaki formda verilecektir :

$$(u_c'')_n - 2(1 + u_n)(u_c)_n = 2u_n + u_n^2 + \frac{u_n^3}{3} - (u_n'' - 2). \quad (3.22)$$

Başlangıç fonksiyonunu

$$u_0 = 0 \quad (3.23)$$

seçilir ve ilk iterasyon çözümü yapılır ise

$$u_1 = \text{Cosh}(\sqrt{2}x) - 1 \quad (3.24)$$

ilk iterasyon çözümü elde edilir. Denklem (3.24), denklem (3.22)' ye yerleştirilir ise aşağıdaki değişken katsayılı homojen olmayan lineer ikinci mertebe diferansiyel denklem elde edilir :

$$(u_c'')_1 - 2(1 + u_1)(u_c)_1 = 2u_1 + u_1^2 + \frac{u_1^3}{3} - (u_1'' - 2). \quad (3.25)$$

Denklem (3.25)' de basitlik açısından ikinci terimin katsayısı yaklaşık 1 olarak kabul edilir ve iterasyon işlemi tekrar edilir ise yeni algoritmamızın ikinci iterasyon çözümüne aşağıdaki şekilde ulaşılabilir :

$$u_2 = Cosh(\sqrt{2}x) - 1 + \frac{1}{192}[-64 + 63Cosh(\sqrt{2}x) + Cosh(3\sqrt{2}x) - 36\sqrt{2}x Sinh(\sqrt{2}x)]. \quad (3.26)$$

3.3.1.1.4. Sayısal Çözümler ile Karşılaştırmalar

Denklem (3.8) için farklı perturbasyon-iterasyon algoritmalarının kendi aralarında ve sayısal çözüm ile karşılaştırılmalarına Tablo 3.1' de yer verilmiştir. Tüm çözümler hızlı bir şekilde sayısal çözüme yakınsamaktadırlar. Tablo 3.1' den PIA(1,3) algoritmasının diğer iki algoritmadan daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. PIA(1,2) algoritması, PIA(1,3) algoritmasına yakın değerler vermektedir ve dolayısıyla PIA(1,3) yerine kullanılabilir. Çözümlerde x , 1'e yaklaştıkça sayısal çözümlerden sapma gözlemlenmektedir. Fakat PIA(1,3) algoritması ile sayısal çözüm arasındaki bu sapma en fazla %0.29 gibi çok düşük bir farka yol açmaktadır. Diğer bir dikkat edilmesi gereken husus ise PIA(1,1) algoritmasının Tablo 3.1' de 3 iterasyonlu çözümleri verilirken diğer iki algortmada bu iterasyon sayısı ikide tutulmuştur buna rağmen PIA(1,1) sonuçları diğer iterasyon algoritmalarının sonucundan iyi değildir.

Tablo 3.1. Bratu-Tipi Başlangıç Değer Problemi için Farklı Perturbasyon-İterasyon Metodu Çözümlerinin Tam Çözümle Karşılaştırılması.

Bratu' nun Başlangıç Değer Problemi								
x	Tam Çözüm	PIA (1,1)			PIA (1,2)		PIA (1,3)	
		u ₁	u ₂	u ₃	u ₁	u ₂	u ₁	u ₂
0.1	0.01001	0.01000	0.01001	0.01001	0.01001	0.01001	0.01001	0.01001
0.2	0.04026	0.04000	0.04026	0.04026	0.04026	0.04026	0.04026	0.04026
0.3	0.09138	0.09000	0.09135	0.09135	0.09135	0.09138	0.09135	0.09138
0.4	0.16445	0.16000	0.16426	0.16431	0.16431	0.16445	0.16431	0.16445
0.5	0.26116	0.25000	0.26041	0.26059	0.26059	0.26114	0.26059	0.26116
0.6	0.38393	0.36000	0.38160	0.38211	0.38212	0.38380	0.38212	0.38391
0.7	0.53617	0.49000	0.53001	0.53132	0.53134	0.53570	0.53134	0.53610
0.8	0.72278	0.64000	0.70826	0.71117	0.71124	0.72126	0.71124	0.72249
0.9	0.95088	0.81000	0.91935	0.92525	0.92542	0.94648	0.92542	0.94983
1	1.23125	1.00000	1.16667	1.17778	1.17818	1.21942	1.17818	1.22772

3.3.1.2. Bratu'nun Birinci Tip Sınır Değer Problemi

Aşağıdaki Bratu-tipi ilk sınır değer problemini inceleyelim, (Wazwaz (2005)) :

$$\begin{aligned}
 u'' + \lambda e^u &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\
 u(0) &= u(1) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

3.3.1.2.1. PIA(1,1) Çözümü

Denklem (3.27)' yi aşağıdaki şekilde tekrar yazalım :

$$F(u'', u, \varepsilon) = u'' + \lambda e^{\varepsilon u} = 0. \quad (3.28)$$

Burada ε suni olarak denkleme ilave edilmiş bir parametredir. Denklem (3.4) aşağıdaki hale gelir.

$$(u''_c)_n = -\lambda u_n - (u''_n + \lambda). \quad (3.29)$$

İlgili türevler hesaplanır, aşağıdaki başlangıç fonksiyonu seçilir :

$$u_0 = 0 \quad (3.30)$$

ve denklem (3.29) ile (3.2) kullanılarak sırasıyla aşağıdaki iterasyon çözümleri elde edilir.

$$u_1 = -\frac{\lambda}{2}(x^2 - x), \quad (3.31)$$

$$u_2 = -\frac{\lambda}{2}(x^2 - x) + \frac{\lambda^2}{24}(x^4 - 2x^3 + x), \quad (3.32)$$

$$u_3 = -\frac{\lambda}{2}(x^2 - x) + \frac{\lambda^2}{24}(x^4 - 2x^3 + x) + \frac{\lambda^3}{720}(-x^6 + 3x^5 - 5x^3 + 3x). \quad (3.33)$$

3.3.1.2.2. PIA(1,2) Çözümü

Bu kısımda denklem (3.27) perturbasyon-iterasyon algoritması PIA(1,2) kullanılarak çözülecektir. Denklem (3.7), denklem (3.27) için aşağıdaki hale gelir :

$$(u_c'')_n + \lambda(u_c)_n = -\lambda u_n - \frac{\lambda}{2} u_n^2 - (u_n'' + \lambda). \quad (3.34)$$

$u_0 = 0$ başlangıç fonksiyonundan başlayarak ilk iterasyon çözümü

$$u_1 = -1 + \cos(\sqrt{\lambda}x) + \sin(\sqrt{\lambda}x) \tan\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) \quad (3.35)$$

elde edilir. Bu fonksiyon bir sonraki iterasyon için başlangıç fonksiyonu olarak kullanılırsa ikinci iterasyon çözümüne ulaşılır :

$$\begin{aligned} u_2 = & -1 + \cos(\sqrt{\lambda}x) + \sin(\sqrt{\lambda}x) \tan\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) + \frac{1}{24} \sec^3\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) \left(-15 \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) \right. \\ & -3 \cos\left(\frac{3\sqrt{\lambda}}{2}\right) + \cos\left[\left(\frac{3}{2} - 2x\right)\sqrt{\lambda}\right] + 2 \cos\left[\left(\frac{3}{2} - x\right)\sqrt{\lambda}\right] + 2 \cos\left[\left(\frac{1}{2} + x\right)\sqrt{\lambda}\right] \\ & + \cos\left[(1-4x)\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right] + 12 \cos\left[(1-2x)\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right] - 3x\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) \\ & \left. - 3x\sqrt{\lambda} \sin\left[\left(\frac{3}{2} - x\right)\sqrt{\lambda}\right] + 3(-2+3x)\sqrt{\lambda} \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) \sin(\sqrt{\lambda}x) \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.3.1.2.3. Sayısal Çözümler ile Karşılaştırmalar

Tablo 3.2’ de denklem (3.27)’ nin perturbasyon-iterasyon algoritmaları kullanılarak elde edilmiş yaklaşık analitik çözümleri ile sayısal çözümünün sayısal karşılaştırılması verilmiştir. PIA(1,1) algoritmasında üç iterasyon sonucuna yer verilirken diğer PIA(1,2) algoritmasında sadece iki iterasyon sonucu yeterli görülmüştür. Buna rağmen PIA(1,2)’ nin sonuçları PIA(1,1)’ e nazaran sayısal çözüme daha yakındır. PIA(1,2) algoritmasında sadece iki iterasyon sonucunda virgülden sonra üç veya dört terim hassasiyet elde edilmiştir.

Tablo 3.2. Bratu-Tipi Birinci Sınır Değer Problemi için Farklı Perturbasyon-İterasyon Metodu Çözümlerinin Sayısal Çözümlerle Karşılaştırılması ($\lambda = 1$).

Bratu’ nun Birinci Tip Sınır Değer Problemi						
x	Sayısal Çözümler	PIA (1,1)			PIA (1,2)	
		u ₁	u ₂	u ₃	u ₁	u ₂
0.1	0.04984	0.04500	0.04908	0.04949	0.04954	0.04983
0.2	0.08918	0.08000	0.08773	0.08851	0.08860	0.08915
0.3	0.11760	0.10500	0.11558	0.11665	0.11678	0.11756
0.4	0.13479	0.12000	0.13240	0.13365	0.13380	0.13473
0.5	0.14053	0.12500	0.13802	0.13934	0.13949	0.14048
0.6	0.13479	0.12000	0.13240	0.13365	0.13380	0.13473
0.7	0.11760	0.10500	0.11558	0.11665	0.11678	0.11756
0.8	0.08918	0.08000	0.08773	0.08851	0.08860	0.08915
0.9	0.04984	0.04500	0.04908	0.04949	0.04954	0.04983

3.3.1.3. Bratu' nun İkinci Tip Sınır Değer Problemi

Öziş ve Yıldırım (2008)' ın çalışmasından Bratu' nun ikinci tip sınır değer problemini ele alalım :

$$\begin{aligned} u'' + \lambda e^{-u} &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \tag{3.37}$$

3.3.1.3.1. PIA(1,1) Çözümü

Denklem (3.37)' yi aşağıdaki şekilde tekrar yazalım :

$$F(u'', u, \varepsilon) = u'' + \lambda e^{-\varepsilon u} = 0. \tag{3.38}$$

Burada ε denkleme suni olarak ilave edilmiş bir parametredir. Denklem (2.78), terimler hesaplandıktan sonra $\varepsilon = 1$ alınırsa aşağıdaki hale gelir :

$$(u''_c)_n = \lambda u_n - (u''_n + \lambda). \tag{3.39}$$

Bu iterasyon formülü kullanılarak aşağıdaki iterasyon sonuçları bu problem için elde edilir :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \\ (3.40) \end{aligned}$$

$$u_1 = -\frac{\lambda}{2}(x^2 - x), \tag{3.41}$$

$$u_2 = -\frac{\lambda}{2}(x^2 - x) - \frac{\lambda^2}{24}(x^4 - 2x^3 + x), \quad (3.42)$$

$$u_3 = -\frac{\lambda}{2}(x^2 - x) - \frac{\lambda^2}{24}(x^4 - 2x^3 + x) + \frac{\lambda^3}{720}(-x^6 + 3x^5 - 5x^3 + 3x). \quad (3.43)$$

3.3.1.3.2. PIA(1,2) Çözümü

Denklem (3.7) bu problem için aşağıdaki hale getirilir :

$$(u''_c)_n - \lambda(u_c)_n = \lambda u_n - \frac{\lambda}{2}u_n^2 - (u''_n + \lambda). \quad (3.44)$$

Başlangıç fonksiyonu ve yukarıdaki denklemden elde edilen iterasyon sonuçları sırasıyla şöyledir :

$$u_0 = 0, \quad (3.45)$$

$$u_1 = 1 - \cosh(\sqrt{\lambda}x) + \sinh(\sqrt{\lambda}x)\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right), \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} u_2 = & 1 - \frac{1}{24}\operatorname{sech}^3\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)\left[-15\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) - 3\cosh\left(\frac{3\sqrt{\lambda}}{2}\right) + \cosh\left[\left(\frac{3}{2} - 2x\right)\sqrt{\lambda}\right]\right] \\ & + 8\cosh\left[\left(\frac{3}{2} - x\right)\sqrt{\lambda}\right] + 8\cosh\left[\left(\frac{1}{2} + x\right)\sqrt{\lambda}\right] + \cosh\left[(1 - 4x)\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right] \\ & + 24\cosh\left[(1 - 2x)\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right] + 3x\sqrt{\lambda}\sinh\left[\left(\frac{3}{2} - x\right)\sqrt{\lambda}\right] - 3(-1 + x)\sqrt{\lambda}\sinh\left[\left(\frac{1}{2} + x\right)\sqrt{\lambda}\right] \\ & + 3(-1 + 2x)\sqrt{\lambda}\sinh\left[(1 - 2x)\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.3.1.3.3. Sayısal Çözümlerle Karşılaştırmalar

Tablo 3.3' de denklem (3.37)' nin sayısal çözümü ile PIA(1,1) ve PIA(1,2)' den elde edilen çözümler karşılaştırılmıştır. PIA(1,2) ile sadece 2 iterasyonda dört basamak hassasiyet elde edilmiştir. Tablo 3.3' den PIA(1,2) algoritmasının iki iterasyon çözümünün PIA(1,1) üç iterasyon çözümünden daha iyi olduğu görülmektedir.

Tablo 3.3. Bratu-Tipi İkinci Sınır Değer Problemi için Farklı Perturbasyon-İterasyon Metodu Çözümlerinin Sayısal Çözümlerle Karşılaştırılması ($\lambda = 1$).

Bratu' nun İkinci Tip Sınır Değer Problemi						
x	Sayısal Çözümler	PIA (1,1)			PIA (1,2)	
		u ₁	u ₂	u ₃	u ₁	u ₂
0.1	0.04143	0.04500	0.04091	0.04132	0.04128	0.04143
0.2	0.07326	0.08000	0.07226	0.07304	0.07297	0.07327
0.3	0.09579	0.10500	0.09441	0.09548	0.09538	0.09581
0.4	0.10923	0.12000	0.10760	0.10885	0.10874	0.10925
0.5	0.11370	0.12500	0.11197	0.11330	0.11318	0.11371
0.6	0.10923	0.12000	0.10760	0.10885	0.10874	0.10925
0.7	0.09579	0.10500	0.09441	0.09548	0.09538	0.09581
0.8	0.07326	0.08000	0.07226	0.07304	0.07297	0.07327
0.9	0.04143	0.04500	0.04091	0.04132	0.04128	0.04143

3.3.1.4. Perturbasyon-İterasyon Metodunun Bratu Denklemlerine Uygulanması Üzerine Sonuçlar

Bratu tipi ikinci mertebe diferansiyel denklemler için yapılan çalışmadan aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir.

- İkinci mertebe diferansiyel denklemler için sistematik olarak farklı perturbasyon-iterasyon algoritmaları türetilmiştir.
- Perturbasyon-iterasyon algoritmaları geçerli çözümler için denklemlerde küçük parametre kabulüne ihtiyaç duymamaktadır.
- Perturbasyon-iterasyon algoritmaları kullanılarak elde edilen Bratu-tipi problemlerin çözümleri artan iterasyon adımları sayesinde hızlı bir şekilde sayısal çözümlere yakınsamaktadır.
- $PIA(1,2)$ ve $PIA(1,3)$ ' ün çözümleri fonksiyon tipindeyken, $PIA(1,1)$ çözümleri polinom tipindedir.
- $PIA(1,2)$ ve $PIA(1,3)$ algoritmaları kullanılarak elde edilen sonuçlara götüren cebirsel hesaplar $PIA(1,1)$ ' in hesaplarına göre daha yoğun ve zahmetlidir.
- Diğer taraftan $PIA(1,2)$ ve $PIA(1,3)$, $PIA(1,1)$ ' e göre sayısal çözümlere daha hızlı yakınsamaktadır.

Bu çalışmada yapılan sistematik yaklaşım kullanılarak, yeni algoritmalar $PIA(n,m)$ (n : perturbasyon serisindeki düzeltme terimi sayısı; m : Taylor serisindeki son alınan türevin mertebesi) kolayca çıkarılabilir.

3.3.2. Perturbasyon-İterasyon Metodunun Isı Transferi Problemlerine Uygulanması

Bu bölümde daha önce türetilen perturbasyon iterasyon algoritmaları farklı tiplerde nonlinear ısı transferi denklemlerine uygulanacak ve bulunan sonuçlar aynı problemlerin farklı metotlar ile yapılan çözümleri ve sayısal çözümler ile karşılaştırılacaktır.

3.3.2.1. Nonlinear Kanatçık Denklemi

Aşağıdaki radyasyon terimi içeren nonlinear kanatçık denklemini ele alalım (Abbasbandy (2006)) :

$$\frac{d^2 u}{dy^2} - \varepsilon u^4 = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 1. \quad (3.48)$$

ε burada boyutsuz radyasyon parametresidir.

3.3.2.1.1. PIA(1,2) Çözümü

Denklem (3.48)' yi aşağıdaki formda tekrar yazalım :

$$F(u'', u, \varepsilon) = u'' - \varepsilon u^4 = 0. \quad (3.49)$$

Yukarıdaki denklem için iterasyon formülü önceki analizlerden elde edilen algoritmalar (ikinci mertebe diferansiyel denklemler için PIA(1,2)) kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilebilir :

$$(u''_c)_n - 4\varepsilon u_n^3 (u_c)_n = -\frac{u''_n}{\varepsilon} + u_n^4. \quad (3.50)$$

Aşağıdaki sınır şartlarını sağlayan fonksiyonu başlangıç fonksiyonu olarak kullanabiliriz :

$$u_0 = 1. \quad (3.51)$$

Yukarıdaki fonksiyon denklem (3.50)' ye yerleştirilir ve $u_{n+1} = u_n + \varepsilon(u_c)_n$ ile beraber ilk iterasyon çözümü bulunur :

$$u_1 = \frac{3}{4} + \frac{\text{Cosh}[2\sqrt{\varepsilon}y]}{4\text{Cosh}[2\sqrt{\varepsilon}]}. \quad (3.52)$$

Bu fonksiyon bir sonraki adım için başlangıç fonksiyonu olarak kullanılarak ikinci iterasyon çözümü elde edilebilir :

$$\begin{aligned}
u_2 = & \frac{3}{4} + \frac{\text{Cosh}[2\sqrt{\varepsilon}y]}{4\text{Cosh}[2\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{\text{Sech}^5[2\sqrt{\varepsilon}]}{491520} (-34200\text{Cosh}[2\sqrt{\varepsilon}] - 15390\text{Cosh}[6\sqrt{\varepsilon}] \\
& -2430\text{Cosh}[10\sqrt{\varepsilon}] + 2\text{Cosh}[(2-8y)\sqrt{\varepsilon}] + 45\text{Cosh}[(4-6y)\sqrt{\varepsilon}] + 1660\text{Cosh}[(2-4y)\sqrt{\varepsilon}] \\
& + 540\text{Cosh}[(6-4y)\sqrt{\varepsilon}] + 1843\text{Cosh}[(-8+2y)\sqrt{\varepsilon}] + 11795\text{Cosh}[(-4+2y)\sqrt{\varepsilon}] \\
& + 20160\text{Cosh}[2y\sqrt{\varepsilon}] + 90\text{Cosh}[6y\sqrt{\varepsilon}] + 11795\text{Cosh}[(4+2y)\sqrt{\varepsilon}] + 1843\text{Cosh}[(8+2y)\sqrt{\varepsilon}] \\
& + 1660\text{Cosh}[(2+4y)\sqrt{\varepsilon}] + 540\text{Cosh}[(6+4y)\sqrt{\varepsilon}] + 45\text{Cosh}[(4+6y)\sqrt{\varepsilon}] + 2\text{Cosh}[(2+8y)\sqrt{\varepsilon}] \quad (3.53) \\
& -4440\sqrt{\varepsilon} \text{Sinh}[(-8+2y)\sqrt{\varepsilon}] - 4440y\sqrt{\varepsilon} \text{Sinh}[(-8+2y)\sqrt{\varepsilon}] - 7800\sqrt{\varepsilon} \text{Sinh}[(-4+2y)\sqrt{\varepsilon}] \\
& -16680y\sqrt{\varepsilon} \text{Sinh}[(-4+2y)\sqrt{\varepsilon}] - 24480y\sqrt{\varepsilon} \text{Sinh}[2y\sqrt{\varepsilon}] + 7800\sqrt{\varepsilon} \text{Sinh}[(4+2y)\sqrt{\varepsilon}] \\
& -16680y\sqrt{\varepsilon} \text{Sinh}[(4+2y)\sqrt{\varepsilon}] + 4440\sqrt{\varepsilon} \text{Sinh}[(8+2y)\sqrt{\varepsilon}] - 4440y\sqrt{\varepsilon} \text{Sinh}[(8+2y)\sqrt{\varepsilon}]).
\end{aligned}$$

İkinci iterasyon çözümünde denklem (3.50)' de denklemin sol tarafındaki u_1^3 terimi basitlik için u_0^3 alınmıştır.

3.3.2.1.2. Varyasyonel İterasyon Metodu Çözümü

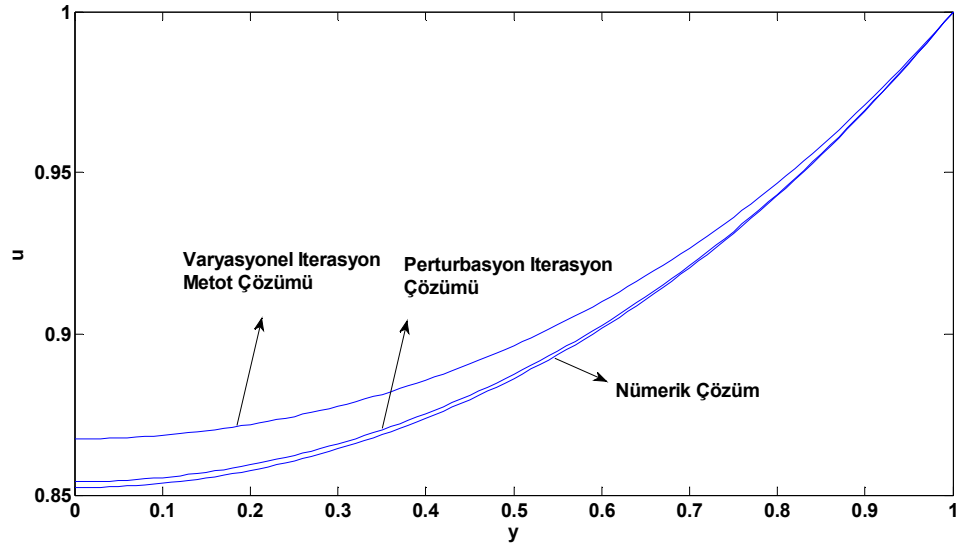
Denklem (3.48)' in iki iterasyon VİM çözümü Tari *et al.* (2007) tarafından aşağıdaki şekilde bulunmuştur :

$$u_1 = \frac{2 + \varepsilon y^2}{2 + \varepsilon} \quad (3.54)$$

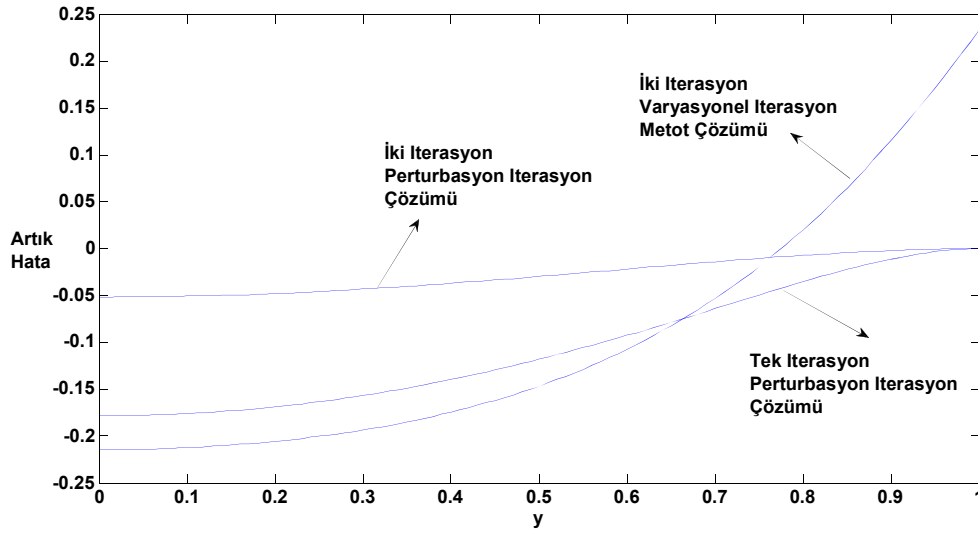
$$u_2 = \frac{10080 + 5040(3 + y^2)\varepsilon + 1680(4.5 + y^4)\varepsilon^2 + 504(2.5 + y^6)\varepsilon^3 + 90y^8\varepsilon^4 + 7y^{10}\varepsilon^5}{10080 + 20160\varepsilon + 9240\varepsilon^2 + 1764\varepsilon^3 + 90\varepsilon^4 + 7\varepsilon^5}. \quad (3.55)$$

3.3.2.1.3. Perturbasyon-İterasyon ve Varyasyonel İterasyon Metotlarının Sayısal Karşılaştırılması

Bu kısımda denklem (3.48) için her iki metodun çözümlerinin, sayısal çözümlerle karşılaştırılması verilecektir. Şekil 3.1. de her iki metodun sayısal çözümle karşılaştırılması verilmiştir. Perturbasyon-iterasyon metodu çok daha iyi bir sonuç vermektedir. Şekil 3.2. deki artık hata analizinden PIA' nın tek iterasyon çözümünün bile VİM' in iki iterasyon çözümünden daha iyi sonuç verdiği görülmektedir.



Şekil 3.1. Denklem (3.48) için İki İterasyon Perturbasyon-İterasyon ve Varyasyonel İterasyon Çözümlerinin Sayısal Çözümlerle Karşılaştırılması. ($\varepsilon=0.5$).



Şekil 3.2. Denklem (3.48) için Perturbasyon-İterasyon ve Varyasyonel İterasyon Çözümlerinin Artık Hata Analizi. ($\varepsilon=1$).

3.3.2.2. Bir Levha Üzerindeki Sıcaklık Dağılım Denklemi

Bir levha probleminde ortaya çıkan ısı dağılımı denklemini ele alalım (Rajabi *et al.* (2007)). Burada çözülecek denklem bağımlı değişkenin birinci merteye türevini de içerdiği için denklem tipi $F(u'', u', u, \varepsilon)$ olarak yeniden alınmış ve algoritmalar tekrar düzenlenmiştir.

$$\frac{d}{dy}[(1 + \varepsilon u) \frac{du}{dy}] = 0, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0. \quad (3.56)$$

3.3.2.2.1. PIA(1,2) Çözümü

Denklem (3.56) için iterasyon formülü aşağıdaki şekilde kurulur :

$$(1 + \varepsilon u_n)(u_c'')_n + 2 \varepsilon u_n'(u_c')_n + \varepsilon u_n''(u_c')_n = -\frac{u_n''}{\varepsilon} - u_n u_n'' - u_n'^2. \quad (3.57)$$

Sınır şartlarını sağlayan $u_0 = 1 - y$ başlangıç fonksiyonunu kullanarak birinci ve ikinci iterasyon çözümünü sırası ile aşağıdaki gibi elde edilir :

$$u_1 = 1 - y + \frac{1 + \varepsilon}{2\varepsilon} \left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon - \varepsilon y}\right) + \frac{1}{2}(y - 1), \quad (3.58)$$

$$u_2 = 1 - y + \frac{1 + \varepsilon}{2\varepsilon} \left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon - \varepsilon y}\right) + \frac{1}{2}(y - 1) + \frac{\varepsilon^3(y^2 - 2y^3 + y^4)}{-8 + \varepsilon(-24 + 24y) + \varepsilon^2(-24 + 44y - 20y^2) + \varepsilon^3(-8 + 20y - 16y^2 + 4y^3)}. \quad (3.59)$$

3.3.2.2.2. Varyasyonel İterasyon Metodu Çözümü

Denklem (3.56)'nın VİM çözümü literatürde bulunmamaktadır. İlk defa bu tez kapsamında çözülecektir. Denklem (3.56)'nın varyasyonel iterasyon formülü aşağıdaki şekilde kurulur :

$$u_{n+1} = u_n + \int_0^y \lambda [u_n''(\xi) + \varepsilon u_n(\xi) u_n''(\xi) + \varepsilon u_n'(\xi)^2] d\xi. \quad (3.60)$$

Burada λ Lagrange çarpanıdır. Varyasyonel teori sayesinde bulunur :

$$\lambda = \xi - y. \quad (3.61)$$

Klasik VİM yaklaşımı bu problemde bizi sınır şartlarını sağlamayan çözümlere götürmüştür. Bu problem için her bir iterasyon sonucunda sınır şartlarına uyum sağlayacak şekilde katsayıları bulunacak bir başlangıç fonksiyonu iterasyon formülü için seçilecektir.

$$u_0 = a y + b. \quad (3.62)$$

Yukarıdaki denklem, Denklem (3.61) ile beraber Denklem (3.60)'a yerleştirilir ve iterasyon işlemleri yapılırsa iki iterasyon çözümü aşağıdaki şekilde bulunur :

$$u_1 = a y + b - \frac{a^2 \varepsilon}{2} y^2, \quad (3.63)$$

$$u_2 = a y + b + \left(\frac{1}{2} a^2 b \varepsilon^2 - \frac{a^2 \varepsilon}{2}\right) y^2 + \frac{1}{2} a^3 \varepsilon^2 y^3 - \frac{1}{8} a^4 \varepsilon^3 y^4. \quad (3.64)$$

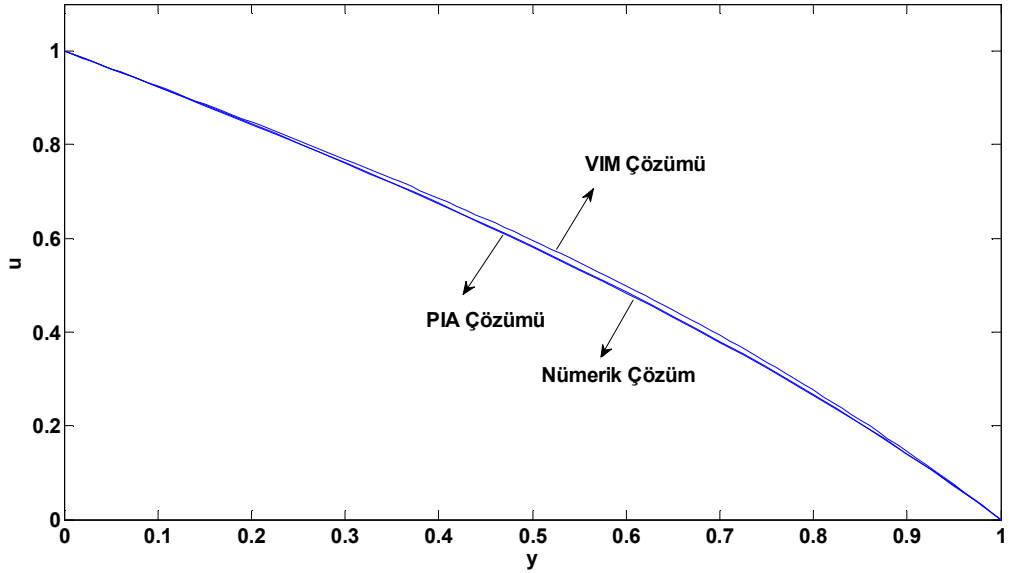
Burada a ve b katsayıları sınır şartlarını sağlatabilmek için çıkarılan aşağıdaki denklemlerden bulunacaktır :

$$b = 1, \quad (3.65)$$

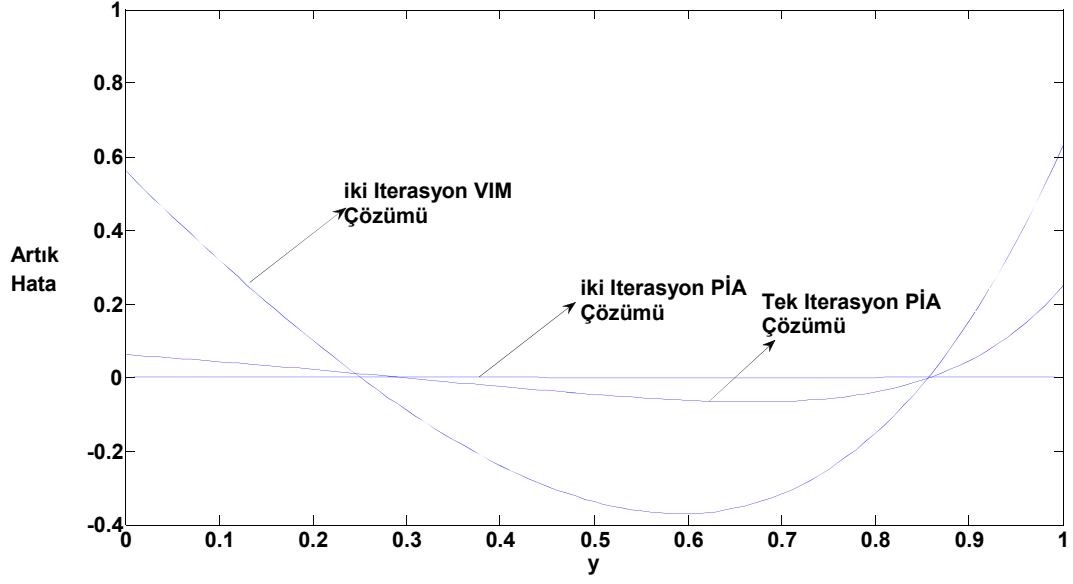
$$1 + a - \frac{a^2 \varepsilon}{2} + \frac{a^2 \varepsilon^2}{2} + \frac{a^3 \varepsilon^2}{2} - \frac{a^4 \varepsilon^3}{8} = 0. \quad (3.66)$$

3.3.2.2.3. Perturbasyon-İterasyon Metodu ve Varyasyonel İterasyon Metotlarının Sayısal Karşılaştırılması

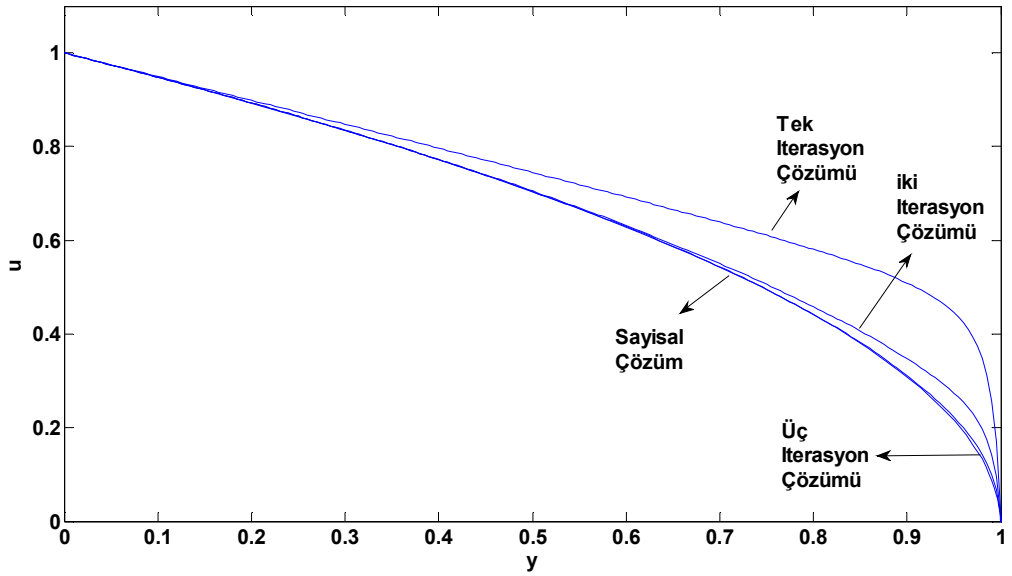
Her iki metodun karşılaştırılması Şekil 3.3. ve Şekil 3.4. de verilmiştir. Perturbasyon-iterasyon algoritmasından elde edilen çözümlerin varyasyonel metoda göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Şekil 3.5. de ise $\varepsilon=100$ gibi büyük bir değerde bile metodun oldukça başarılı olduğu anlaşılmaktadır. Bu problem için sonuçlar oldukça tatmin edicidir.



Şekil 3.3. Denklemlerin (3.66) için İki İterasyon Perturbasyon-İterasyon ve Varyasyonel İterasyon Çözümlerinin, Sayısal Çözümlerle Karşılaştırılması. ($\varepsilon=1$)



Şekil 3.4. Denklem (3.56) için Perturbasyon-İterasyon Algoritmasının ve Varyasyonel İterasyon Metodunun Artık Hata Analizi. ($\varepsilon=1$).



Şekil 3.5. Denklem (3.56) için Perturbasyon-İterasyon Algoritmasının İlk Üç İterasyon Çözümünün Sayısal Çözümle Karşılaştırılması. ($\varepsilon=100$).

3.3.2.3. İçinden Elektrik Geçen İnce Bir Yalıtılmış Tel İçindeki Isı Dağılım Denklemi

Her iki ucu T_0 sabit sıcaklıkta olan içinden elektrik geçen ince bir yalıtılmış tel içindeki ısı dağılımını veren boyutsuz denklem ilk kez bu çalışma kapsamında aşağıdaki şekilde türetilmiştir. Tel çok ince olduğu için radyal yönde ısı değişiminin olmadığı kabul edilmektedir :

$$\frac{d^2\theta}{dx^{*2}} + \varepsilon \left(\frac{d\theta}{dx^*} \right)^2 + \varepsilon \theta \frac{d^2\theta}{dx^{*2}} = -\lambda. \quad (3.67)$$

Boyutsuz parametreler $\varepsilon = \beta T_0$, $\lambda = \frac{I^2 R L}{\pi r_0^2 k^* T_0}$, $\theta = \frac{T - T_0}{T_0}$ ve $x^* = \frac{x}{L}$, dir. Burada β değişken ısı iletim katsayısına ait boyutlu bir parametre, I elektrik akımı, R telin elektrik direnci, r_0 telin yarıçapı, x tel uzunluğu boyunca koordinat ve L de tel uzunluğudur. k^* ise değişken ısı iletim katsayısı denklemi $k = k^* [1 + \beta (T - T_0)]$, den gelen referans ısı iletim katsayısıdır. Telin ucundaki iletim katsayılarından birisi k^* olarak alınabilir. Daha ayrıntılı bilgi için Çengel (2006)' e bakılabilir.

Telin her iki ucuda sabit sıcaklıkta tutulduğuna göre aşağıdaki şartlar yazılabilir :

$$\begin{aligned} T(0) &= T_0, \\ T(L) &= T_0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Bu denklemler boyutsuz olarak aşağıdaki şekildedir :

$$\begin{aligned} \theta(0) &= 0, \\ \theta(1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.69)$$

3.3.2.3.1. Tam Çözüm

Denklem (3.67) aşağıdaki formda tekrar yazılabilir :

$$\frac{d}{dx} \left[(1 + \varepsilon \theta) \frac{d\theta}{dx} \right] = -\lambda. \quad (3.70)$$

Tel içerisindeki ısı dağılımı homojen ısı üretiminden dolayı simetrik olacağından $\frac{d\theta}{dx}(0.5) = 0$

şartı ve $\theta(0)=0$ şartı kullanılarak denklemin tam çözümü aşağıdaki gibi bulunur :

$$\theta(x) = -\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{\lambda}{\varepsilon}} (x^2 - x). \quad (3.71)$$

3.3.2.3.2. Klasik Perturbasyon Metodu Çözümü

Boyutsuz sıcaklık aşağıdaki gibi seriye açılır ve Denklem (3.67)' ye yerleştirilir :

$$\theta(x) = \theta_0(x) + \varepsilon \theta_1(x). \quad (3.72)$$

Denklem mertebelere ayrıştırılır ve her bir mertebeden θ_0 ve θ_1 sırasıyla bulunur :

$$\theta_0(x) = \frac{\lambda}{2} (x - x^2), \quad (3.73)$$

$$\theta_1(x) = \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{x}{12} \right) - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{3} - \frac{x}{6} \right). \quad (3.74)$$

Bu sonuçlar Denklem (2.146)' ya yerleştirilirse klasik pertürbasyon çözümü elde edilir.

$$\theta(x) = \frac{\lambda}{2} (x - x^2) - \frac{\varepsilon \lambda}{12} (-x + 3x^2 - 4x^3 + 2x^4) + \frac{\varepsilon \lambda^2}{24} (-x + 2x^3 - x^4). \quad (3.75)$$

3.3.2.3.3. PIA(1,2) Çözümü

Denklem (3.67)' nin yaklaşık çözümünü veren perturbasyon-iterasyon denklemi aşağıdaki şekilde hesaplanır :

$$(1 + \varepsilon \theta_n) (\theta_c'')_n + 2\varepsilon \theta_n' (\theta_c')_n + \varepsilon \theta_n'' (\theta_c)_n = -\frac{\theta_n'' + \lambda}{\varepsilon} - \theta_n \theta_n'' - \theta_n'^2. \quad (3.76)$$

İteratif olarak yazılmış perturbasyon serisi ise

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \varepsilon \theta_{c,n} \quad (3.77)$$

şeklindedir. $\theta_0 = 0$ fonksiyonu ile başlayarak aşağıdaki perturbasyon-iterasyon çözümlerine ulaşılır :

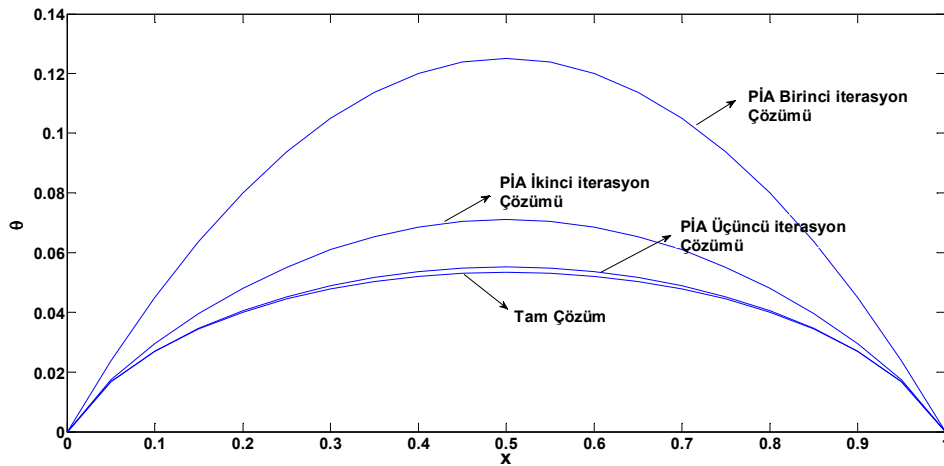
$$\theta_1 = \frac{\lambda(x - x^2)}{2}, \quad (3.78)$$

$$\theta_2 = \frac{\lambda(x-x^2)}{2} + \frac{\varepsilon\lambda^2(x^2-2x^3+x^4)}{-8+4\varepsilon\lambda(-x+x^2)}, \quad (3.79)$$

$$\theta_3 = \frac{\lambda(x-x^2)}{2} + \frac{\varepsilon\lambda^2(x^2-2x^3+x^4)}{-8+4\varepsilon\lambda(-x+x^2)} + \frac{\varepsilon^3\lambda^4(x^4-4x^5+6x^6-4x^7+x^8)}{(-16-8\varepsilon\lambda x+8\varepsilon\lambda x^2)(8+8\varepsilon\lambda x-8\varepsilon\lambda x^2+\varepsilon^2\lambda^2 x^2-2\varepsilon^2\lambda^2 x^3+\varepsilon^2\lambda^2 x^4)}. \quad (3.80)$$

3.3.2.3.4. Sayısal Karşılaştırmalar

Şekil 3.6.' da Denklem (3.67)' nin tam çözümü, $\varepsilon=50$ ve $\lambda=1$ değerleri için perturbasyon-iterasyon metodunun ilk üç iterasyon çözümü ile karşılaştırılmıştır. Şekilden iterasyon sayısı arttıkça $\varepsilon=50$ gibi büyük bir değer için bile tatmin edici sonuçlar alındığı gözlemlenmektedir. Tablo 3.4. de ise tam çözüm, perturbasyon-iterasyon çözümü, klasik perturbasyon çözümü telin tam ortasında oluşan maksimum sıcaklık değerleri için ε' nun farklı değerleri alınarak karşılaştırılmıştır. Klasik metot ε parametresinin büyük değerleri için tamamiyle yanlış çözümler verirken perturbasyon iterasyon metodu bütün ε değerleri için tam çözüme yakın çözümler vermektedir.



Şekil 3.6. Denklem (3.67) için Perturbasyon-Iterasyon Algoritmasının İlk Üç İterasyon Çözümünün Tam Çözümle Karşılaştırılması. ($\varepsilon=50$ ve $\lambda=1$).

Tablo 3.4. Denklem (3.67) için Üç İterasyon Perturbasyon-İterasyon Metodu ve Klasik Perturbasyon Metodundan Elde Edilen Maksimum Sıcaklık Değerlerinin Farklı ε Değerlerine Göre Tam Çözüm ile Karşılaştırılması ($\lambda = 1$).

ε	θ_{maksimum}		
	Tam Çözüm	Perturbasyon-İterasyon Metodu	Klasik Perturbasyon Metodu
0.1	0.12422836	0.12422836	0.12265625
1	0.11803398	0.11803398	0.10156250
10	0.08708287	0.08710969	-0.10937500
20	0.07247449	0.07271282	-0.34375000
30	0.06384920	0.06448891	-0.57812500
40	0.05791562	0.59064716	-0.81250000
50	0.05348469	0.05519138	-1.04688000

3.3.2.4. Değişken Isı İletim Katsayılı Kanatçık Denklemleri

Bu kısımda boyutsuz değişken ısı iletim katsayısına sahip bir kanatçıkta oluşan ısı dağılımı denklemi ele alınacaktır (Ganji *et al.* (2007)). Kanatçıktan ortama sadece taşınım ile ısı transferi olmaktadır. Radyasyon etkileri ihmal edilmiştir :

$$\begin{aligned}
 (1 + \varepsilon\theta) \frac{d^2\theta}{dx^2} + \varepsilon \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 - N^2\theta &= 0, \\
 \frac{d\theta}{dx}(0) &= 0, \\
 \theta(1) &= 1.
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

3.3.2.4.1. Klasik Perturbasyon Metodu Çözümü

Denklem (3.81)' in tam çözümü yapılamadığı için öncelikle klasik perturbasyon çözümü verilecektir. Boyutsuz sıcaklık aşağıdaki şekilde tek terimli perturbasyon serisine açılacaktır (Aziz ve Na (1984)) :

$$\theta(x) = \theta_0(x) + \varepsilon \theta_1(x). \quad (3.82)$$

Yukarıdaki denklem, Denklem (3.82)' ye yerleştirilir ve ε ' nun kuvvetlerine göre mertebelerine ayrıştırılırsa her bir mertebedeki çözüm sırasıyla şöyle bulunur :

$$\theta_0(x) = \text{Sech}(N) \text{Cosh}(Nx), \quad (3.83)$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{3} \text{Sech}^2(N) (\text{Cosh}(2N) \text{Sech}(N) \text{Cosh}(Nx) - \text{Cosh}(2Nx)). \quad (3.84)$$

Yukarıdaki iki denklem, Denklem (3.82)' ye yerleştirilirse klasik perturbasyon çözümü elde edilir :

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \text{Sech}(N) \text{Cosh}(Nx) \\ &+ \frac{\varepsilon}{3} \text{Sech}^2(N) (\text{Cosh}(2N) \text{Sech}(N) \text{Cosh}(Nx) - \text{Cosh}(2Nx)). \end{aligned} \quad (3.85)$$

3.3.2.4.2. PIA (1,2) Çözümü

Öncelikle Denklem (3.81) için iterasyon algoritması aşağıdaki şekilde kurulur :

$$(1 + \varepsilon \theta_n) (\theta_c'')_n + 2\varepsilon \theta_n' (\theta_c')_n + (\varepsilon \theta_n'' - N^2) (\theta_c)_n = -\frac{\theta_n'' - N^2 \theta_n}{\varepsilon} - \theta_n \theta_n'' - \theta_n'^2. \quad (3.86)$$

Sınır şartlarını sağlayan en basit fonksiyon $\theta_0(x) = 1$ başlangıç fonksiyonu olarak alınır ve iterasyon işlemlerine başlanırsa ilk iterasyon çözümü

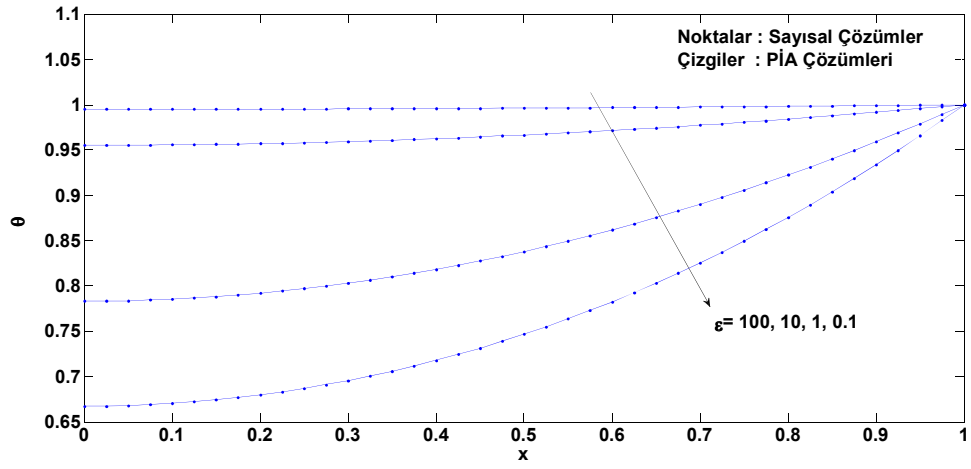
$$\theta_1(x) = \cosh\left(\frac{bx}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{b}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right) \quad (3.87)$$

şeklinde hesaplanır. İkinci iterasyon hesaplanırken ele alınacak iterasyon denkleminin değişken katsayılı olmaması için Denklem (3.86)'nın sol tarafındaki θ_1 terimleri θ_0 olarak alınmıştır. Nihayetinde ikinci iterasyon çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$\begin{aligned} \theta_2(x) = & \frac{1}{6(1+\varepsilon)^{3/2}} \operatorname{sech}\left(\frac{N}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right) \left\{ -2\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon} \cosh\left(\frac{2Nx}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{N}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right) \right. \\ & + 3Nx\varepsilon \sinh\left(\frac{Nx}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right) + \cosh\left(\frac{Nx}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right) \left(2\sqrt{1+\varepsilon}(3+4\varepsilon) + \varepsilon \tanh\left(\frac{N}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right) \right. \\ & \left. \left. \left(-3N + 2\sqrt{1+\varepsilon} \tanh\left(\frac{N}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right) \right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

3.3.2.4.3. Sayısal Karşılaştırmalar

Şekil 3.7' de boyutsuz sıcaklık dağılımının x koordinatı boyunca değişimi farklı ε değerlerine göre verilmiştir. Farklı epsilon değerleri için sayısal çözümlerin iki iterasyon perturbasyon-iterasyon çözümleri ile çakıştığı gözlemlenmektedir. $\varepsilon=100$ gibi büyük bir nonlineerlik değerinde bile sayısal çözümden ayırt edilemeyen çözümler elde edilmiştir. Perturbasyon-İterasyon metodu ve klasik perturbasyon metodu sonuçları Tablo 3.5.' de karşılaştırılmıştır. Perturbasyon-iterasyon çözümünün Tablo 3.5.' den de anlaşılacağı üzere farklı epsilon değerlerinde çok hassas sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Klasik perturbasyon metodu ise beklenildiği gibi büyük ε değerlerinde fiziksel sonuçlar üretememektedir.



Şekil 3.7. Denklem (3.81) için Perturbasyon-İterasyon Algoritmasının ikinci İterasyon Çözümlerinin Sayısal Çözümler ile Karşılaştırılması.

Tablo 3.5. Denklem (3.81) için Perturbasyon-İterasyon Metodu ve Klasik Perturbasyon Metod Çözümlerinin Farklı ε Değerleri için Sayısal Çözümlerle Karşılaştırılması.

	$\varepsilon=10$			$\varepsilon=100$			$\varepsilon=1000$		
x	Sayısal Çözüm	Perturbasyon İterasyon M.	Perturbasyon Metodu	Sayısal Çözüm	Perturbasyon İterasyon M.	Perturbasyon Metodu	Sayısal Çözüm	Perturbasyon İterasyon M.	Perturbasyon Metodu
0	0.9553278388	0.9553621215	2.6612810697	0.9950577720	0.9950578565	20.7803222337	0.9995005828	0.9995005829	201.9707338742
0.1	0.9557803974	0.9558136309	2.6535122331	0.9951072732	0.9951073565	20.6734471153	0.9995055778	0.9995055778	200.8727959372
0.2	0.9571373385	0.9571675540	2.6292817015	0.9952557670	0.9952558469	20.3432894315	0.9995205627	0.9995205627	197.4833667309
0.3	0.9593964761	0.9594220704	2.5857741980	0.9955032259	0.9955032992	19.7608171568	0.9995455370	0.9995455372	191.5112467447
0.4	0.9625541823	0.9625741287	2.5181517600	0.9958496007	0.9958496660	18.8761754639	0.9995805006	0.9995805007	182.4564125027
0.5	0.9666054257	0.9666194202	2.4193286304	0.9962948239	0.9962948806	17.6164208714	0.9996254525	0.9996254527	169.5873432818
0.6	0.9715438571	0.9715523421	2.2796431266	0.9968388088	0.9968388574	15.8822190572	0.9996803919	0.9996803921	151.9079783643
0.7	0.9773618590	0.9773659498	2.0864128801	0.9974814503	0.9974814916	13.5433700572	0.9997453177	0.9997453180	128.1129418274
0.8	0.9840506348	0.9840518979	1.8233550269	0.9982226223	0.9982226591	10.4329763743	0.9998202286	0.9998202289	96.5291898483
0.9	0.9916003059	0.9916003706	1.4698473685	0.9990621811	0.9990622162	6.3400138750	0.9999051231	0.9999051235	55.0416789401

3.3.2.5. Gözenekli Kanatçık Denklemleri

Bu kısımda gözenekli bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımını veren boyutsuz denklem ele alınmıştır (Kiwan (2006)) :

$$\begin{aligned}\frac{d^2\theta}{dx^2} - \varepsilon\theta^2 &= 0, \\ \frac{d\theta}{dx}(0) &= 0, \\ \theta(1) &= 1.\end{aligned}\tag{3.89}$$

Burada ε kanatçığın gözenekliliği ile ilgili boyutsuz ısı taşınım katsayısıdır. Öncelikle klasik perturbasyon metodu ile Denklem (3.89) çözülecektir.

3.3.2.5.1. Klasik Perturbasyon Metodu Çözümü

Boyutsuz sıcaklığı aşağıdaki şekilde iki terimli perturbasyon serisine açalım :

$$\theta(x) = \theta_0(x) + \varepsilon \theta_1(x) + \varepsilon^2 \theta_2(x).\tag{3.90}$$

Yukarıdaki açılım Denklem (3.89)' a yerleştirilir, ε ' nun kuvvetlerine göre ayrıştırılıp çıkan diferansiyel denklemler çözülürse aşağıdaki fonksiyonlar elde edilir :

$$\theta_0(x) = 1,\tag{3.91}$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1),\tag{3.92}$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 1) - \frac{1}{2}(x^2 - 1). \quad (3.93)$$

Denklem (3.91)-(3.93), Denklem (3.90)' a yerleştirilerek klasik perturbasyon çözümü elde edilir.

$$\theta(x) = 1 + \frac{\varepsilon}{2}(x^2 - 1) + \frac{\varepsilon^2}{12}(x^4 - 1) - \frac{\varepsilon^2}{2}(x^2 - 1). \quad (3.94)$$

3.3.2.5.2. PIA(1,2) Çözümü

Çift terim Taylor serili perturbasyon-iterasyon algoritması Denklem (3.89)' a uygulanırsa iterasyon denklemi aşağıdaki gibi bulunur :

$$(\theta_c'')_n - 2\varepsilon \theta_n (\theta_c)_n = -\frac{\theta_n''}{\varepsilon} + \theta_n^2. \quad (3.95)$$

Yukarıdaki iterasyon denklemi ile sırasıyla aşağıdaki iterasyon sonuçları elde edilir.

$$\theta_0 = 1, \quad (3.96)$$

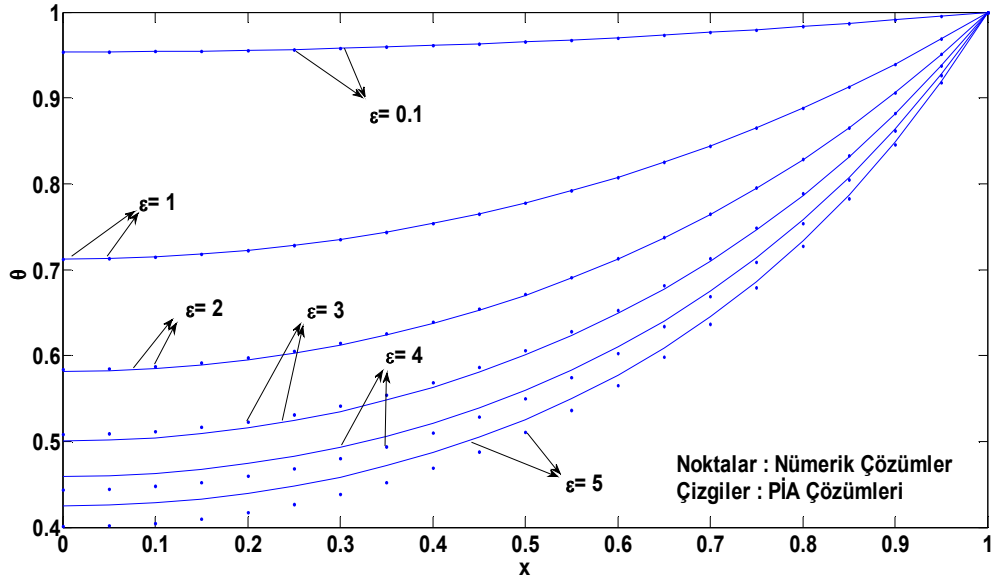
$$\theta_1 = 1 + \frac{\cosh[\sqrt{2}x\sqrt{\varepsilon}] \operatorname{sech}[\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon}] - 1}{2}, \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned}
\theta_2 = & \frac{1}{96} \operatorname{Sech}(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon}) \left\{ 12 \operatorname{Cosh}(\sqrt{2}x\sqrt{\varepsilon}) \left(4 + \operatorname{Sech}^2(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon}) \right) + \operatorname{Sech}(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon}) \right. \\
& \left(21 + \operatorname{Sech}(\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon}) \left(9 \operatorname{Cosh}(3\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon}) + \operatorname{Cosh}(\sqrt{2}(1-2x)\sqrt{\varepsilon}) \right) \right. \\
& + 2 \operatorname{Cosh}(\sqrt{2}(-2+x)\sqrt{\varepsilon}) + 2 \operatorname{Cosh}(\sqrt{2}(2+x)\sqrt{\varepsilon}) + \operatorname{Cosh}(\sqrt{2}(1+2x)\sqrt{\varepsilon}) \\
& + 3\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon} \left(-(1+x) \operatorname{Sinh}(\sqrt{2}(-2+x)\sqrt{\varepsilon}) - 2x \operatorname{Sinh}(\sqrt{2}x\sqrt{\varepsilon}) \right. \\
& \left. \left. \left. \left. - (-1+x) \operatorname{Sinh}(\sqrt{2}(2+x)\sqrt{\varepsilon}) \right) \right) \right) \right\}. \quad (3.98)
\end{aligned}$$

İkinci iterasyon çözümü bulunurken iterasyon denklemini değişken katsayılı yapan θ_1 terimi yaklaşık olarak θ_0 alınmıştır.

3.3.2.5.3. Sayısal Karşılaştırmalar

Şekil 3.8' de farklı epsilon değerleri için üçüncü iterasyon perturbasyon-iterasyon ile sayısal çözümlerin karşılaştırılması verilmiştir. Üçüncü iterasyon çözümü sembolik olarak çok büyük olduğundan bu kısımda açıkca yazılmamıştır. Sadece sayısal verileri grafik üzerinde gösterilmiştir. Ayrıca perturbasyon-iterasyon çözümlerinin $\varepsilon=5$ değerine kadar sayısal çözümlere yakın sonuçlar verdiği Şekil 3.8' den gözlemlenmektedir. Tablo 3.6.' da ise perturbasyon-iterasyon metodu çözümlerinin klasik metotta sayısal karşılaştırılmasına yer verilmiştir. Diğer örneklerde olduğu gibi klasik metodun başarısız olduğu noktalarda yeni metodumuz iyi sonuçlar vermektedir.



Şekil 3.8. Denklem (3.89) için Perturbasyon-İterasyon Algoritmasının Üç İterasyon Çözümlerinin Sayısal Çözümler ile Karşılaştırılması.

Tablo 3.6. Denklem (3.89) için Perturbasyon-İterasyon Metodu ve Klasik Perturbasyon Metodu Çözümlerinin Sayısal Çözümlerle Karşılaştırılması.

	$\epsilon=3$			$\epsilon=4$			$\epsilon=5$		
x	Sayısal Çözüm	Perturbasyon İterasyon M.	Perturbasyon Metodu	Sayısal Çözüm	Perturbasyon İterasyon M.	Perturbasyon Metodu	Sayısal Çözüm	Perturbasyon İterasyon M.	Perturbasyon Metodu
0	0.500447	0.508407	3.25000	0.443723	0.459066	5.666670	0.401008	0.424824	8.916670
0.1	0.504213	0.512042	3.22008	0.447672	0.462754	5.606800	0.405042	0.428444	8.816880
0.2	0.515626	0.523068	3.13120	0.459663	0.473978	5.428800	0.417307	0.439496	8.520000
0.3	0.535037	0.541864	2.98608	0.480132	0.493232	5.137470	0.438312	0.458578	8.033540
0.4	0.563061	0.569086	2.78920	0.509857	0.521376	4.740800	0.468963	0.486732	7.370000
0.5	0.600629	0.605715	2.54688	0.550023	0.559700	4.250000	0.510665	0.525535	6.546880
0.6	0.649061	0.653127	2.26720	0.602349	0.610039	3.679470	0.565481	0.577236	5.586670
0.7	0.710187	0.713203	1.96007	0.66927	0.674933	3.046800	0.636393	0.644999	4.516880
0.8	0.786522	0.788498	1.63720	0.754226	0.757911	2.372800	0.727718	0.733281	3.370000
0.9	0.881525	0.882496	1.31207	0.862113	0.863913	1.681470	0.845773	0.848476	2.183540

4. PERTURBASYON-İTERASYON METODUNUN BİRİNCİ MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE SİSTEMLERİNE GENELLEŞTİRİLMESİ

Bu kısımda birinci mertebe diferansiyel denklem sistemleri için genel bir perturbasyon iterasyon algoritması türetilenektir.

Aşağıdaki diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım :

$$F_k(\dot{u}_k, u_j, \varepsilon, t) = 0. \quad (4.1)$$

Burada $k = 1, 2, \dots, K$ ve $j = 1, 2, \dots, K$ 'dır. $K=1$ için sistem bir tane birinci mertebe diferansiyel denkleme dönüşür. Denklem (4.1)' i daha açık şekilde yazarsak

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(\dot{u}_1, u_1, u_2, \dots, u_k, \varepsilon, t), \\ F_2 &= F_2(\dot{u}_2, u_1, u_2, \dots, u_k, \varepsilon, t), \\ &\vdots \\ F_K &= F_K(\dot{u}_k, u_1, u_2, \dots, u_k, \varepsilon, t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

olur. Denklem (4.1)' i aşağıdaki şekilde iteratif formda tekrar yazalım :

$$F_k(\dot{u}_{k,n+1}, u_{j,n+1}, \varepsilon, t) = 0. \quad (4.3)$$

Denklem (4.2) için aşağıdaki tek düzeltme terimli perturbasyon açılımını yazalım :

$$u_{k,n+1} = u_{k,n} + \varepsilon u_{k,n}^c. \quad (4.4)$$

Denklem (4.3) aşığıdaki genel Taylor serisi notasyonu kullanılarak $\varepsilon=0$ civarında yaklaşık olarak yazılabilir :

$$F_k = \sum_{m=0}^M \frac{1}{m!} \left[\left(\frac{D}{D\varepsilon} \right)^m F_k \right]_{\varepsilon=0} \varepsilon^m. \quad (4.5)$$

Yukarıdaki denklemde türev operatörü şu şekildedir :

$$\frac{D}{D\varepsilon} = \frac{\partial \dot{u}_{k,n+1}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial \dot{u}_{k,n+1}} + \sum_{j=1}^K \left(\frac{\partial u_{j,n+1}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial u_{j,n+1}} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}. \quad (4.6)$$

Denklem (4.6), Denklem (4.5)' e yerleştirilirse

$$F_k \cong \sum_{m=0}^M \frac{1}{m!} \left\{ \left(\dot{u}_{k,n}^c \frac{\partial}{\partial \dot{u}_{k,n+1}} + \sum_{j=1}^K u_{j,n}^c \frac{\partial}{\partial u_{j,n+1}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) F_k \right\}_{\varepsilon=0} \varepsilon^m = 0 \quad (4.7)$$

elde edilir. Burada m parametresi Taylor serisinin türev mertebesini gösterir. M değeri farklı alınarak farklı perturbasyon-iterasyon algoritmaları oluşturulabilir. Perturbasyonda tek düzeltme terimi alındığı için bu algoritmalar PİA(1,M) algoritmaları olacaktır. İleriki bölümlerde M=1,2 alınarak PİA(1,1) ve PİA(1,2) algoritmaları oluşturulacaktır. Denklem (4.7) ve Denklem (4.4) beraber kullanılarak Denklem (4.1)' in yaklaşık çözümü elde edilebilir.

4.1. Birinci Mertebe Isı Transferi Denklemi

Yığık (lumped) sistemin zamana bağlı sıcaklığını veren diferansiyel denklem aşığıda verilmiştir (Liang ve Jeffrey (2009)) :

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon u) \frac{du}{dt} + u &= 0, \\ u(0) &= 1. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Burada ε boyutsuz ısı transferi katsayısıdır. Yukarıdaki problem için denklem (4.7)' de $K=1$ alınacaktır. Denklem sistemlerinin özel hali olan tek denklemler öncelikle bu genel formülasyonla çözülecektir.

4.1.1. PIA(1,1) Çözümü

Öncelikle Denklem (4.8) aşağıdaki şekilde tekrar yazılmalıdır :

$$F_1 = (1 + \varepsilon u_{1,n+1}) \dot{u}_{1,n+1} + u_{1,n+1}. \tag{4.9}$$

Denklem (4.7)' yi Denklem (4.9)' a uygulayalım :

$$F_1|_{\varepsilon=0} + \left[\left(\dot{u}_{1,n}^c \frac{\partial}{\partial \dot{u}_{1,n+1}} + u_{1,n}^c \frac{\partial}{\partial u_{1,n+1}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) F_1 \right]_{\varepsilon=0} \varepsilon = 0 \quad . \tag{4.10}$$

Denklem (4.7)' de problem tek bir diferansiyel denklemden oluştuğu için $K=1$ alınmıştır. Ayrıca perturbasyon iterasyon algoritması birinci türev Taylor serili olduğundan $M=1$ ' dir. Denklem (4.10)' da ki türevli terimler Denklem (4.4) ile beraber aşağıdaki şekilde hesaplanır :

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = u_{1,n} \dot{u}_{1,n}, \tag{4.11}$$

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial \dot{u}_1} \right|_{\varepsilon=0} = 1, \quad (4.12)$$

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial u_1} \right|_{\varepsilon=0} = 1. \quad (4.13)$$

Denklem (4.11)-(4.13)' ü Denklem (4.10)' a yerleştirirsek

$$\dot{u}_{1,n}^c + u_{1,n}^c = -\frac{\dot{u}_{1,n} + u_{1,n}}{\varepsilon} - u_{1,n} \dot{u}_{1,n} \quad (4.14)$$

iterasyon denklemimizi elde ederiz. Yaklaşık çözümleri elde etmek için aşağıdaki tahmini başlangıç fonksiyonu ile işlemlere başlayalım :

$$u_{1,0} = e^{-t}. \quad (4.15)$$

İlk iterasyon çözümü Denklem (4.14) ve Denklem (4.3) ile beraber çözülerek aşağıdaki şekilde bulunur :

$$u_{1,1} = (1 + \varepsilon) e^{-t} - \varepsilon e^{-2t}. \quad (4.16)$$

Bundan sonraki iterasyon çözümleri

$$u_{1,2} = \left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{6} \right) e^{-t} - \varepsilon (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2) e^{-2t} + \frac{3}{2} \varepsilon^2 (1 + \varepsilon) e^{-3t} - \frac{2}{3} \varepsilon^3 e^{-4t}, \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}
u_{1,3} = & -\frac{16}{63}e^{-8t}\varepsilon^7 + \frac{7}{6}e^{-7t}\varepsilon^6(1+\varepsilon) - \frac{43}{20}e^{-6t}\varepsilon^5(1+\varepsilon)^2 + \frac{1}{4}e^{-3t}\varepsilon^2(1+\varepsilon)^2 \\
& (6+6\varepsilon+3\varepsilon^2+\varepsilon^3) - \frac{1}{36}e^{-2t}\varepsilon(6+6\varepsilon+3\varepsilon^2+\varepsilon^3)^2 + \frac{5}{72}e^{-5t}\varepsilon^4 \\
& (39+93\varepsilon+87\varepsilon^2+29\varepsilon^3) - \frac{1}{3}e^{-4t}\varepsilon^3(8+20\varepsilon+21\varepsilon^2+12\varepsilon^3+3\varepsilon^4) \\
& + \frac{1}{840}e^{-t}(840+840\varepsilon+420\varepsilon^2+140\varepsilon^3+35\varepsilon^4+21\varepsilon^5+7\varepsilon^6+\varepsilon^7)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki sonuçlar Tari *et al.* (2007)' nin varyasyonel iterasyon ile buldukları ile aynıdır. Bu örnek için perturbasyon-iterasyon algoritması PIA(1,1) varyasyonel iterasyon metodu ile aynı çözümleri vermiştir.

4.1.2. PIA(1,2) Çözümü

Denklem (4.7) M=2 alarak Denklem (4.8) için tekrar düzenlenirse bir üst seviye iterasyon denklemi elde edilir :

$$(1+\varepsilon u_{1,n})\dot{u}_{1,n}^c + (1+\varepsilon \dot{u}_{1,n})u_{1,n}^c = -\frac{\dot{u}_{1,n} + u_{1,n}}{\varepsilon} - u_{1,n}\dot{u}_{1,n}. \tag{4.19}$$

Yukarıdaki denklemi $u_{1,0} = e^{-t}$ başlangıç fonksiyonu ile çözer ve Denklem (4.3)' e yerleştirirsek ilk iterasyon çözümünü elde ederiz :

$$u_{1,1} = e^{-t} + \frac{2\varepsilon(e^t - 1) + \varepsilon^2(e^t - e^{-t})}{2(e^t + \varepsilon)^2}. \tag{4.20}$$

Yukarıdaki fonksiyonun tahmini fonksiyon olarak kullanıldığı ikinci iterasyon çözümü ise

$$u_{1,2} = e^{-t} + \frac{2\varepsilon(e^t - 1) + \varepsilon^2(e^t - e^{-t})}{2(e^t + \varepsilon)^2} + \frac{\varepsilon^3}{24(e^t + \varepsilon)^5} e^{-t} (-1 + e^t)^2$$

$$(-16e^{2t} + 4e^{3t} - 15e^t \varepsilon - 10e^{2t} \varepsilon + e^{3t} \varepsilon - 3\varepsilon^2 - 6e^t \varepsilon^2 - 3e^{2t} \varepsilon^2)$$
(4.21)

şeklinde elde edilir. İkinci ve üçüncü iterasyon çözümü elde edilirken çözüm kolaylığı açısından Denklem (4.19)' un sol tarafındaki ε katsayılı terimler yaklaşık olarak $u_{1,0}$ ve $\dot{u}_{1,0}$ olarak alınmıştır. Üçüncü iterasyon çözümü ise sadelik açısından sembolik olarak burada verilmeyip sayısal çıktıları tablo üzerinde gösterilmiştir.

4.1.3. Sayısal Karşılaştırmalar

Denklem (4.8) için PIA(1,2) çözümleri ve PIA(1,1) çözümlerine tamamen uyumlu olan varyasyonel iterasyon metodu çözümleri aşağıdaki hata analizi formülü kullanılarak

$$\%Hata = \frac{|\text{Sayısal Çözüm} - \text{Yaklaşık Çözüm}|}{\text{Sayısal Çözüm}} \times 100$$
(4.22)

Tablo 4.1. üzerinde karşılaştırılmıştır. Tablo 4.1.' de her bir t zamanında yüzde hatalar ve en sonda da ortalama yüzde hata hesaplanmıştır. Tablo 4.1.' den PIA(1,2) algoritmasının her iterasyonda varyasyonel iterasyon metoduna göre çok daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Tablo 4.1. Denklem (4.8) için Perturbasyon-İterasyon Metodu ve Varyasyonel İterasyon Metot Çözümlerinin Sayısal Çözümlerle Karşılaştırılması ($\varepsilon=1$).

t	% Hata Perturbasyon- İterasyon Metodu (1,2)			% Hata Varyasyonel İterasyon Metodu		
	u _{1,1}	u _{1,2}	u _{1,3}	u _{1,1}	u _{1,2}	u _{1,3}
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	1.77	0.19	0.02	5.87	1.71	3.15
2	0.29	0.26	0.04	9.38	5.88	1.53
3	3.98	0.30	0.00	19.11	2.66	0.63
4	6.31	0.00	0.03	23.55	0.08	0.99
5	7.36	0.21	0.03	25.34	1.12	0.97
6	7.78	0.30	0.03	26.02	1.61	0.93
7	7.94	0.34	0.02	26.28	1.79	0.92
% Ort. Hata	4.55	0.20	0.02	17.86	2.58	1.40

4.2. Lotka-Volterra Denklemi ve Denklem Sistemleri

Bu kısımda matematiksel biyolojinin en ünlü denklemlerinden Lotka-Volterra denklem sistemlerinin çözümleri perturbasyon-iterasyon metodu ile ele alınacaktır. Lotka-Volterra denklem sistemleri doğadaki av-avcı ilişkisini modellemektedir. Bu tarz modeller ekolojistler ve matematikçiler tarafından sıklıkla kullanılmaktadır. En genel Lotka-Volterra denklemi aşağıdaki şekildedir (Olek (1994)) :

$$\frac{du_k}{dt} = u_k \left(b_k + \sum_{j=1}^K a_{kj} u_j \right), u_k(0) = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (4.23)$$

Bundan sonraki kısımlarda farklı K değerline karşılık gelen Lotka-Volterra denklemler sistemleri için perturbasyon-iterasyon çözümleri yapılacaktır.

4.2.1. Tek Boyutlu Lotka-Volterra Sistemi

Aşağıdaki denklem tek boyutlu bir ekolojik sistemi modellemektedir (Batiha *et al.* (2007)). Bu modelde sınırlı sayıda besin kaynağı ve bunu tüketen canlı arasındaki ilişki verilmektedir :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u(b + au), \\ b > 0, \quad a < 0, \quad u(0) > 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

a ve b probleme ait parametrelerdir. Yukarıdaki denklemin çözümü literatürde mevcuttur.

$$u(t) = \begin{cases} \frac{\frac{be^{bt}}{b + au(0)} - ae^{bt}}{u(0)}, & b \neq 0 \\ \frac{u(0)}{1 - au(0)t}, & b = 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

4.2.1.1. PIA(1,1) Çözümü

Öncelikle Denklem (4.24) ve iteratif perturbasyon serisi denklemini aşağıdaki şekilde tekrar yazılmalıdır :

$$F_1 = \dot{u}_{1,n+1} - bu_{1,n+1} - \varepsilon au_{1,n+1}^2, \quad (4.26)$$

$$u_{1,n+1} = u_{1,n} + \varepsilon u_{1,n}^c. \quad (4.27)$$

Burada ε denkleme suni olarak ilave edilmiş küçük parametredir. İterasyon denklemini kurulduğunda 1 olarak alınacaktır. Denklem (4.7), Denklem (4.26) için tekrar düzenlenirse

$$\frac{du_{1,n}^c}{dt} + \frac{\partial F_1 / \partial u_{n+1}}{\partial F_1 / \partial \dot{u}_{n+1}} u_{1,n}^c = - \frac{\varepsilon F_1}{\partial F_1 / \partial \dot{u}_{n+1}} - \frac{\partial F_1 / \partial \varepsilon}{\partial F_1 / \partial \dot{u}_{n+1}} \quad (4.28)$$

elde edilir. Buradaki terimler sırasıyla

$$F_1|_{\varepsilon=0} = \dot{u}_n - b u_n, \quad \left. \frac{\partial F_1}{\partial u_{n+1}} \right|_{\varepsilon=0} = -b, \quad \left. \frac{\partial F_1}{\partial \dot{u}_{n+1}} \right|_{\varepsilon=0} = 1, \quad \left. \frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -a u_n^2$$

şeklinde hesaplanır. Böylece iterasyon denklemimiz

$$\frac{du_{1,n}^c}{dt} - b u_{1,n}^c = -\dot{u}_{1,n} + b u_{1,n} + a u_{1,n}^2 \quad (4.29)$$

şeklini alır. Aşağıdaki tahmini başlangıç fonksiyonu ile işlemlere başlarsak

$$u_{1,0} = \alpha e^{bt} \quad (4.30)$$

sırasıyla

$$u_{1,1} = \alpha e^{bt} + \frac{\alpha^2 a}{b} e^{bt} (e^{bt} - 1), \quad (4.31)$$

$$u_{1,2} = \alpha e^{bt} + \frac{\alpha^2 a e^{bt} (e^{bt} - 1)}{b} + \frac{\alpha^3 a^2 e^{bt} (e^{bt} - 1)^2}{b^2} + \frac{\alpha^4 a^3 e^{bt} (e^{bt} - 1)^3}{3b^3} \quad (4.32)$$

iterasyon çözümlerini elde ederiz.

4.2.1.2. PIA(1,2) Çözümü

Denklem (4.24) için Denklem (4.7)' de $M=2$ alınarak türetilen iterasyon denklemimiz aşağıdaki şekildedir :

$$\frac{du_{1,n}^c}{dt} - (b + 2au_{1,n})u_{1,n}^c = -\dot{u}_{1,n} + bu_{1,n} + au_{1,n}^2. \quad (4.33)$$

Aynı şekilde $u_{1,0} = \alpha e^{bt}$ başlangıç fonksiyonu ile iterasyon işlemlerine başlarsak sırasıyla

$$u_{1,1} = \frac{\alpha}{2} e^{bt} \left(1 + e^{\frac{2a\alpha}{b}(e^{bt}-1)} \right), \quad (4.34)$$

$$u_{1,2} = \frac{\alpha e^{bt-\frac{2a\alpha}{b}}}{8} \left(3e^{\frac{2a\alpha}{b}} + 4e^{\frac{2a\alpha e^{bt}}{b}} + e^{\frac{2a\alpha(2e^{bt}-1)}{b}} - \frac{4a\alpha}{b} e^{\frac{2a\alpha e^{bt}}{b}} (e^{bt}-1) \right), \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} u_{1,3} = & \frac{1}{384} e^{bt-\frac{6a\alpha}{b}} \alpha \left(117e^{\frac{6a\alpha}{b}} + 15e^{\frac{6a\alpha e^{bt}}{b}} + 161e^{\frac{2a(2+e^{bt})\alpha}{b}} + 90e^{\frac{2a(1+2e^{bt})\alpha}{b}} + e^{\frac{2a(-1+4e^{bt})\alpha}{b}} \right. \\ & - \frac{12a}{b} e^{\frac{2a\alpha e^{bt}}{b}} (-1+e^{bt}) \left(20e^{\frac{4a\alpha}{b}} + e^{\frac{4a\alpha e^{bt}}{b}} + 12e^{\frac{2a(1+e^{bt})\alpha}{b}} \right) \alpha \\ & \left. + \frac{24\alpha^2 a^2}{b^2} e^{\frac{2a(1+e^{bt})\alpha}{b}} (-1+e^{bt})^2 \left(5e^{\frac{2a\alpha}{b}} + 2e^{\frac{2a\alpha e^{bt}}{b}} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

birinci, ikinci ve üçüncü iterasyon çözümlerini elde ederiz. İkinci ve üçüncü iterasyon çözümlerinde Denklem (4.33)' nin sol tarafındaki $b + 2a u_{1,n}$ terimi işlem kolaylığı açısından $b + 2a u_{1,0} = b + 2a \alpha e^{bt}$ alınmıştır.

4.2.1.3. Sayısal Karşılaştırmalar

Tablo 4.2.' de Denklem (4.24)' ün tam çözümünün sayısal verileri ile perturbasyon-iterasyon metodunun sayısal verileri karşılaştırılmıştır. Son iki sütun ikinci türevli Taylor serili metodun ($M=2$) çözümleridir. Görüldüğü gibi her iki farklı algoritmada farklı iterasyon değerlerinde tam çözüme yaklaşmıştır. $PIA(1,2)$ çok daha fazla işlem hacmi gerektirmesine rağmen $PIA(1,1)$ ' in beş iterasyon sonunda yakaladığı doğruluğu sadece üç iterasyonda yakalamıştır. Fakat üst seviye algoritmalar her zaman daha yoğun işlem hacmi gerektireceğinden mutlaka sembolik bir hesaplayıcıya ihtiyaç duyulmaktadır.

Tablo 4.3.' de ise $PIA(1,2)$ çözümleri Adomian ayrıştırma metodu (Batiha *et al.* (2007)) ve varyasyonel iterasyon metodu ile karşılaştırılmıştır. Görüldüğü gibi perturbasyon-iterasyon algoritması, tam çözüme diğer iki metoddan daha yakın çözümler vermektedir.

Tablo 4.2. Denklem (4.24) için Perturbasyon-İterasyon Metodu Çözümlerinin Tam Çözüm ile Karşılaştırılması. ($a=-3$, $b=1$ ve $\alpha=0.1$)

Tam Çözüm		PİA (1,1)					PİA(1,2)		
t	u_1	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$	$u_{1,4}$	$u_{1,5}$	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$
0.0	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000
0.1	0.107137	0.107030	0.107139	0.107137	0.107137	0.107137	0.107138	0.107137	0.107137
0.2	0.114533	0.114028	0.114555	0.114532	0.114533	0.114533	0.114543	0.114533	0.114533
0.3	0.122164	0.120818	0.122253	0.122159	0.122164	0.122164	0.122206	0.122164	0.122164
0.4	0.130001	0.127171	0.130259	0.129983	0.130002	0.130001	0.130121	0.130002	0.130001
0.5	0.138013	0.132785	0.138625	0.137958	0.138017	0.138012	0.138293	0.138016	0.138013
0.6	0.146163	0.137272	0.147445	0.146021	0.146175	0.146162	0.146738	0.146174	0.146163
0.7	0.154414	0.140132	0.156869	0.154084	0.154449	0.154411	0.155492	0.154445	0.154415
0.8	0.162726	0.140729	0.167126	0.162023	0.162814	0.162717	0.164618	0.162802	0.162728
0.9	0.171057	0.138259	0.178536	0.169658	0.171261	0.171033	0.174207	0.171228	0.171064
1.0	0.179367	0.131705	0.191525	0.176725	0.179808	0.179306	0.184389	0.179721	0.179386

Tablo 4.3. Denklem (4.24) için $\bar{P}IA(1,2)$ Çözümlerinin Adomian ve Varyasyonel İterasyon Metodu Çözümleri ile Sayısal Karşılaştırılması ($a=-3$, $b=1$ ve $\alpha=0.1$).

t	Tam Çözüm	ADM, φ_3	2-İterasyon VIM	1-İterasyon $\bar{P}IA(1,2)$	2-İterasyon $\bar{P}IA(1,2)$
0.0	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000
0.1	0.107137	0.107140	0.107138	0.107138	0.107137
0.2	0.114533	0.114560	0.114554	0.114543	0.114533
0.3	0.122164	0.122260	0.122253	0.122206	0.122164
0.4	0.130001	0.130240	0.130258	0.130121	0.130002
0.5	0.138013	0.138500	0.138624	0.138293	0.138016
0.6	0.146163	0.147040	0.147445	0.146738	0.146174
0.7	0.154414	0.155860	0.156896	0.155492	0.154445
0.8	0.162726	0.164960	0.167126	0.164618	0.162802
0.9	0.171057	0.174340	0.178535	0.174207	0.171228
1.0	0.179367	0.184000	0.191524	0.184389	0.179721

4.2.2. İki Boyutlu Lotka-Volterra Denklem Sistemi

Lotka (1925) ve Volterra (1926) tarafından birbirlerinden bağımsız olarak geliştirdikleri matematiksel model, bir ekolojideki belli zamanlardaki av ve avcı popülasyonunu vermektedir. Av ve avcı sayıları birbirlerinden bağımsız olamayacakları için denklemler etkileşimlidir :

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= u_1 (b_1 + a_{11} u_1 + a_{12} u_2), \quad u_1(0) = \alpha, \\ \frac{du_2}{dt} &= u_2 (b_2 + a_{21} u_1 + a_{22} u_2), \quad u_2(0) = \beta.\end{aligned}\tag{4.36}$$

Burada α ve β başlangıçtaki iki türün popülasyonlarıdır. Diğer parametrelerde modele bağlı katsayılarıdır.

4.2.2.1. PIA(1,1) Çözümü

Bu kısımda Denklem (4.36)'nın yaklaşık çözümü Denklem (4.7), Denklem (4.3) ve Denklem (4.4) ile beraber kullanılarak bulunacaktır. Denklem sistemi 2 boyutlu olduğundan $K=2$ alınmalıdır. Öncelikle Denklem (4.36)'yı aşağıdaki iteratif formda tekrar yazalım :

$$\begin{aligned}F_1 &= \dot{u}_{1,n+1} - u_{1,n+1} (b_1 + \varepsilon a_{11} u_{1,n+1} + \varepsilon a_{12} u_{2,n+1}) = 0, \\ F_2 &= \dot{u}_{2,n+1} - u_{2,n+1} (b_2 + \varepsilon a_{21} u_{1,n+1} + \varepsilon a_{22} u_{2,n+1}) = 0.\end{aligned}\tag{4.37}$$

Denklem (4.7)'yi yukarıdaki sistem için $M=1$ alarak açalım :

$$\begin{aligned}
F_1 &\cong F_1|_{\varepsilon=0} + \left\{ \left[\dot{u}_{1,n}^c \frac{\partial}{\partial \dot{u}_{1,n+1}} + u_{1,n}^c \frac{\partial}{\partial u_{1,n+1}} + u_{2,n}^c \frac{\partial}{\partial u_{2,n+1}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right] F_1 \right\}_{\varepsilon=0} \varepsilon = 0, \\
F_2 &\cong F_2|_{\varepsilon=0} + \left\{ \left[\dot{u}_{2,n}^c \frac{\partial}{\partial \dot{u}_{2,n+1}} + u_{2,n}^c \frac{\partial}{\partial u_{2,n+1}} + u_{1,n}^c \frac{\partial}{\partial u_{1,n+1}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right] F_2 \right\}_{\varepsilon=0} \varepsilon = 0.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Yukarıdaki denklemin türevleri aşağıdaki şekilde hesaplanır :

$$\begin{aligned}
F_1|_{\varepsilon=0} &= \dot{u}_{1,n} - b_1 u_{1,n}, \quad F_2|_{\varepsilon=0} = \dot{u}_{2,n} - b_2 u_{2,n}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \dot{u}_{1,n+1}} \Big|_{\varepsilon=0} = 1, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \dot{u}_{2,n+1}} \Big|_{\varepsilon=0} = 1, \\
\frac{\partial F_1}{\partial u_{1,n+1}} \Big|_{\varepsilon=0} &= -b_1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial u_{2,n+1}} \Big|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = -a_{11} u_1^2 - a_{12} u_{1,n} u_{2,n}, \\
\frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= -a_{22} u_{2,n}^2 - a_{21} u_{1,n} u_{2,n}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial u_{2,n+1}} \Big|_{\varepsilon=0} = -b_2, \quad \frac{\partial F_2}{\partial u_{1,n+1}} \Big|_{\varepsilon=0} = 0.
\end{aligned}$$

Bu yapılar Denklem (4.38)' e yerleştirilirse aşağıdaki iterasyon denklemlerini elde ederiz :

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{1,n}^c - b_1 u_{1,n}^c &= a_{11} u_{1,n}^2 + a_{12} u_{1,n} u_{2,n} - \dot{u}_{1,n} + b_1 u_{1,n}, \\
\dot{u}_{2,n}^c - b_2 u_{2,n}^c &= a_{22} u_{2,n}^2 + a_{21} u_{1,n} u_{2,n} - \dot{u}_{2,n} + b_2 u_{2,n}.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Yukarıdaki denklemler aşağıdaki iteratif perturbasyon serileri ile beraber çözülerek yaklaşık çözümler elde edilebilir :

$$\begin{aligned}
u_{1,n+1} &= u_{1,n} + u_{1,n}^c, \\
u_{2,n+1} &= u_{2,n} + u_{2,n}^c.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Başlangıç fonksiyonlarını genel formda alalım :

$$u_{1,0} = \alpha e^{b_1 t}, \quad u_{2,0} = \beta e^{b_2 t}. \quad (4.41)$$

n=0 için Denklem (4.39)' un çözümleri aşağıdaki gibidir :

$$\begin{aligned} u_{1,0}^c &= \frac{\alpha^2 a_{11} e^{t b_1} (-1 + e^{t b_1})}{b_1} + \frac{\alpha \beta a_{12} e^{t b_1} (-1 + e^{t b_2})}{b_2}, \\ u_{2,0}^c &= \frac{\alpha \beta a_{21} e^{t b_2} (-1 + e^{t b_1})}{b_1} + \frac{\beta^2 a_{22} e^{t b_2} (-1 + e^{t b_2})}{b_2}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Denklem (4.42) ve Denklem (4.41), Denklem (4.40)' a yerleştirilirse ilk iterasyon çözümü elde edilir :

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= \alpha e^{t b_1} + \frac{\alpha^2 a_{11} e^{t b_1} (-1 + e^{t b_1})}{b_1} + \frac{\alpha \beta a_{12} e^{t b_1} (-1 + e^{t b_2})}{b_2}, \\ u_{2,1} &= \beta e^{t b_2} + \frac{\alpha \beta a_{21} e^{t b_2} (-1 + e^{t b_1})}{b_1} + \frac{\beta^2 a_{22} e^{t b_2} (-1 + e^{t b_2})}{b_2}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Yukarıdaki fonksiyonların başlangıç tahmini olarak kullanılacak yeni iterasyon işlemi sonucunda ikinci iterasyon sonuçları elde edilir. İkinci iterasyon sonuçları oldukça uzun cebirsel ifadeler olarak elde edildiğinden sadece sayısal değerlerine yer verilecektir. Ayrıca ilk iterasyondan sonra sembolik bir hesaplayıcıya gerek vardır.

4.2.2.2. Sayısal Karşılaştırmalar

Denklem (4.36)'nın tam çözümü olmadığından sayısal çözümü, Tablo 4.4. de birinci ve ikinci iterasyon çözümleri ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen çözümlerin sayısal hataları kabul edilebilir düzeyde olup, iterasyon sayısı arttıkça sayısal çözümlere yaklaşılmaktadır. Tablo 4.4.'den görüldüğü üzere ilk iterasyon çözümleri bile oldukça hassastır.

Tablo 4.4. Denklem (4.36) için Perturbasyon-İterasyon Metodu Çözümlerinin Sayısal Çözümler ile Karşılaştırılması. ($b_1=0.1$, $a_{11}=-0.0014$, $a_{12}=-0.0012$, $b_2=0.08$, $a_{21}=-0.0009$, $a_{22}=-0.001$, $\alpha=4$ ve $\beta=10$)

Sayısal Çözüm			PIA(1,1)			
t	u_1	u_2	$u_{1,1}$	$u_{2,1}$	$u_{1,2}$	$u_{2,2}$
0.0	4.000000	10.000000	4.000000	10.000000	4.000000	10.000000
0.1	4.033071	10.066572	4.033059	10.066553	4.033071	10.066573
0.2	4.066363	10.133490	4.066316	10.133411	4.066364	10.133490
0.3	4.099879	10.200753	4.099771	10.200573	4.099879	10.200754
0.4	4.133617	10.268363	4.133422	10.268037	4.133618	10.268365
0.5	4.167580	10.336320	4.167269	10.335802	4.167582	10.336322
0.6	4.201767	10.404623	4.201312	10.403865	4.201770	10.404627
0.7	4.236180	10.473273	4.235549	10.472226	4.236185	10.473281
0.8	4.270819	10.542271	4.269980	10.540883	4.270826	10.542282
0.9	4.305684	10.611618	4.304604	10.609834	4.305694	10.611634
1.0	4.340776	10.681312	4.339420	10.679076	4.340796	10.681334

4.2.3. Üç Boyutlu Lotka-Volterra Denklemi

Bir ekolojide aralarında besin zinciri ilişkisi olan üç türün popülasyonunu modellemek için aşağıdaki denklem kullanılabilir (Bataineh *et al.* (2007)) :

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= u_1 (b_1 + a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3), \\
\frac{du_2}{dt} &= u_2 (b_2 + a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + a_{23} u_3), \\
\frac{du_3}{dt} &= u_3 (b_3 + a_{31} u_1 + a_{32} u_2 + a_{33} u_3).
\end{aligned} \tag{4.44}$$

4.2.3.1. PİA(1,1) Çözümü

Denklem (4.44)' ü aşağıdaki formda yazalım :

$$\begin{aligned}
F_1 &= \dot{u}_{1,n+1} - u_{1,n+1} (b_1 + \varepsilon a_{11} u_{1,n+1} + \varepsilon a_{12} u_{2,n+1} + \varepsilon a_{13} u_{3,n+1}) = 0, \\
F_2 &= \dot{u}_{2,n+1} - u_{2,n+1} (b_2 + \varepsilon a_{21} u_{1,n+1} + \varepsilon a_{22} u_{2,n+1} + \varepsilon a_{23} u_{3,n+1}) = 0, \\
F_3 &= \dot{u}_{3,n+1} - u_{3,n+1} (b_3 + \varepsilon a_{31} u_{1,n+1} + \varepsilon a_{32} u_{2,n+1} + \varepsilon a_{33} u_{3,n+1}) = 0.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Denklem (4.7) yukarıdaki sisteme uygulanırsa aşağıdaki iterasyon denklemleri elde edilir :

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{1,n}^c - b_1 u_{1,n}^c &= a_{11} u_{1,n}^2 + a_{12} u_{1,n} u_{2,n} + a_{13} u_{1,n} u_{3,n} - \dot{u}_{1,n} + b_1 u_{1,n}, \\
\dot{u}_{2,n}^c - b_2 u_{2,n}^c &= a_{22} u_{2,n}^2 + a_{21} u_{1,n} u_{2,n} + a_{23} u_{2,n} u_{3,n} - \dot{u}_{2,n} + b_2 u_{2,n}, \\
\dot{u}_{3,n}^c - b_3 u_{3,n}^c &= a_{33} u_{3,n}^2 + a_{31} u_{1,n} u_{3,n} + a_{32} u_{2,n} u_{3,n} - \dot{u}_{3,n} + b_3 u_{3,n}.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Aşağıdaki denklemler bizim tahmini başlangıç fonksiyonlarımız olsun :

$$u_{1,0} = \alpha e^{b_1 t}, \quad u_{2,0} = \beta e^{b_2 t}, \quad u_{3,0} = \gamma e^{b_3 t}. \tag{4.47}$$

Yukarıdaki fonksiyonlar kullanılarak elde edilen ilk iterasyon çözümleri şu şekildedir :

$$u_{1,1} = \alpha e^{tb_1} + \frac{\alpha^2 a_{11} e^{tb_1} (-1 + e^{tb_1})}{b_1} + \frac{\alpha \beta a_{12} e^{tb_1} (-1 + e^{tb_2})}{b_2} + \frac{\alpha \gamma a_{13} e^{tb_1} (-1 + e^{tb_3})}{b_3}, \quad (4.48)$$

$$u_{2,1} = \beta e^{tb_2} + \frac{\alpha \beta a_{21} e^{tb_2} (-1 + e^{tb_1})}{b_1} + \frac{\beta^2 a_{22} e^{tb_2} (-1 + e^{tb_2})}{b_2} + \frac{\beta \gamma a_{23} e^{tb_2} (-1 + e^{tb_3})}{b_3}, \quad (4.49)$$

$$u_{3,1} = \gamma e^{tb_3} + \frac{\alpha \gamma a_{31} e^{tb_3} (-1 + e^{tb_1})}{b_1} + \frac{\beta \gamma a_{32} e^{tb_3} (-1 + e^{tb_2})}{b_2} + \frac{\gamma^2 a_{33} e^{tb_3} (-1 + e^{tb_3})}{b_3}. \quad (4.50)$$

Bundan sonraki iterasyon sonuçlarını bulmak için bir sembolik hesaplayıcı gereklidir. Kullandığımız *Mathematica* programı sistemdeki parametreleri değişken olarak bıraktığımız zaman ilk iterasyondan sonra çözüm verememektedir. Bunun yerine sistemdeki parametrelerin sayısal değerleri girildikten sonra beşinci iterasyona kadar işlemler devam ettirilebilmiştir.

4.2.3.2. Sayısal Karşılaştırmalar

Üç boyutlu Lotka-Volterra diferansiyel denklem sistemi için analitik çözüm bulunmamaktadır. Bu yüzden perturbasyon-iterasyon metodunun çözümleri, problemin sayısal çözümleri ile karşılaştırılmıştır (Tablo 4.5.). Tablo 4.5. den görüldüğü gibi perturbasyon-iterasyon metodunun dördüncü ve beşinci iterasyon çözümleri sayısal çözüme oldukça yakındır. Üç boyutlu Lotka-Volterra denkleminde de perturbasyon-iterasyon metodu başarılı sonuçlar vermektedir.

Tablo 4.5. Üç Boyutlu Lotka-Volterra Denklemleri için Perturbasyon-İterasyon Metodu Çözümlerinin Sayısal Çözümler ile Karşılaştırılması. ($b_1=1$, $a_{11}=-1$, $a_{12}=-0.1$, $a_{13}=-0.1$, $b_2=1$, $a_{21}=-0.1$, $a_{22}=-1$, $a_{23}=-0.1$, $b_3=1$, $a_{31}=-0.1$, $a_{32}=-0.1$, $a_{33}=-1$, $\alpha=0.2$, $\beta=0.3$, $\gamma=0.5$)

Sayısal Çözümler				PIA(1,1)					
t	u ₁	u ₂	u ₃	u _{1,4}	u _{2,4}	u _{3,4}	u _{1,5}	u _{2,5}	u _{3,5}
0.0	0.20000	0.30000	0.50000	0.20000	0.30000	0.50000	0.20000	0.30000	0.50000
0.1	0.21473	0.31914	0.52234	0.21473	0.31915	0.52234	0.21473	0.31915	0.52234
0.2	0.23010	0.33873	0.54428	0.23010	0.33873	0.54429	0.23010	0.33873	0.54428
0.3	0.24609	0.35867	0.56572	0.24609	0.35867	0.56573	0.24609	0.35867	0.56572
0.4	0.26264	0.37888	0.58655	0.26265	0.37889	0.58662	0.26264	0.37888	0.58654
0.5	0.27973	0.39927	0.60667	0.27975	0.39931	0.60693	0.27973	0.39927	0.60664
0.6	0.29729	0.41974	0.62601	0.29734	0.41987	0.62679	0.29729	0.41973	0.62591
0.7	0.31527	0.44020	0.64449	0.31540	0.44054	0.64654	0.31526	0.44015	0.64420
0.8	0.33361	0.46054	0.66208	0.33393	0.46138	0.66683	0.33356	0.46042	0.66128
0.9	0.35222	0.48068	0.67871	0.35294	0.48254	0.68887	0.35210	0.48037	0.67675
1.0	0.37105	0.50053	0.69438	0.37256	0.50438	0.71455	0.37075	0.49979	0.68991

4.2.4. Çok Boyutlu Lotka-Volterra Diferansiyel Denklem Sistemi

Bu kısımda çok boyutlu Lotka-Volterra diferansiyel denklem sistemine PIA(1,1) ($M=1$) uygulanacaktır. Öncelikle çok boyutlu denklemimizi tekrar ele alalım :

$$\frac{du_k}{dt} = u_k \left(b_k + \sum_{j=1}^K a_{kj} u_j \right), \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (4.51)$$

Yukarıdaki denklemi aşağıdaki formda tekrar yazalım :

$$F_k = \dot{u}_{k,n+1} - u_{k,n+1} \left(b_k + \varepsilon \sum_{j=1}^K a_{kj} u_{j,n+1} \right). \quad (4.52)$$

Denklem (4.7)' deki terimleri Denklem (4.52)' ye göre tekrar hesaplayalım :

$$F_k|_{\varepsilon=0} = \dot{u}_{k,n} - b_k u_{k,n}, \quad \frac{\partial F_k}{\partial \dot{u}_{k,n+1}} \Big|_{\varepsilon=0} = 1, \quad \frac{\partial F_k}{\partial u_{k,n+1}} \Big|_{\varepsilon=0} = -b_k, \quad \frac{\partial F_k}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = - \sum_{j=1}^K a_{kj} u_{k,n} u_{j,n}.$$

Yukarıdaki denklemler Denklem (4.7)' ye yerleştirilir ve $\varepsilon=1$ alınırsa çok boyutlu bir Lotka-Volterra denklem sistemi için yaklaşık çözümü verecek iterasyon denklemi elde edilir :

$$\dot{u}_{k,n}^c - b_k u_{k,n}^c = -\dot{u}_{k,n} + b_k u_{k,n} + \sum_{j=1}^K a_{kj} u_{k,n} u_{j,n}. \quad (4.53)$$

Ayrıca yaklaşık çözümler için Denklem (4.53) ile beraber aşağıdaki başlangış şartlarını veren denklem ve iteratif perturbasyon serisi denklemleri birlikte kullanılmalıdır :

$$u_k(0) = \alpha_k e^{-t}, \quad (4.54)$$

$$u_{k,n+1} = u_{k,n} + u_{k,n}^c. \quad (4.55)$$

Denklem (4.53) kolayca integre edilebilir :

$$u_{k,n}^c = e^{b_k t} \left(-\int e^{-b_k t} \dot{u}_{k,n} dt + \int e^{-b_k t} b_k u_{k,n} + \int e^{-b_k t} \sum_{j=1}^K a_{kj} u_{k,n} u_{j,n} dt + c_n \right). \quad (4.56)$$

Bu ifade Denklem (4.55)' e yerleştirilirse çok boyutlu (k tane denklem içeren) Lotka-Volterra diferansiyel denklem sisteminin yaklaşık çözümü perturbasyon-iterasyon metodu ile yapılmış olur. Aşağıdaki ifadeden, tek türev Taylor serili metod ile bu kısımda elde edilmiş bütün sonuçlar elde edilebilir :

$$u_{k,n+1} = u_{k,n} + e^{b_k t} \left(-\int e^{-b_k t} \dot{u}_{k,n} dt + \int e^{-b_k t} b_k u_{k,n} + \int e^{-b_k t} \sum_{j=1}^K a_{kj} u_{k,n} u_{j,n} dt + c_n \right). \quad (4.57)$$

c_n burada her bir iterasyona ait integral sabitidir, Denklem (4.54)' ün yardımı ile bulunur.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez kapsamında Pakdemirli ve Boyacı (2007)' nın çalışmasında cebirsel denklemlerin yaklaşık köklerini bulmak için geliştirilen perturbasyon-iterasyon algoritmaları diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Diferansiyel denklemler için çıkarılan perturbasyon-iterasyon algoritmaları hem lineer hem de nonlinear farklı mertebe diferansiyel denklemlerde başarı ile uygulanmıştır. Geliştirilen perturbasyon-iterasyon algoritmaları kullanılan perturbasyon serisi ve Taylor serisinin türev mertebesine göre sınıflandırılmıştır. Sırasıyla, Tek Düzeltme Terimli ve Birinci Türev Taylor Serili $P\dot{A}(1,1)$, İki Düzeltme Terimli ve İkinci Türev Taylor Serili $P\dot{A}(2,2)$, Tek Düzeltme Terimli ve İkinci Türev Taylor Serili $P\dot{A}(1,2)$, Tek Düzeltme Terimli ve Üçüncü Türev Taylor Serili $P\dot{A}(1,3)$ perturbasyon iterasyon algoritmaları çıkarılmış ve çok farklı tipte problemler üzerinde test edilmiştir. Taylor serisinin türev mertebesini yükselttikçe çıkan algoritmalar, daha karmaşık olmakla beraber klasik metotlara ve diğer alt seviye algoritmalara göre çok daha başarılı sonuçlar vermektedir. Bütün test problemlerinden alınan çözümler, sayısal çözümler, klasik perturbasyon metodu, varyasyonel iterasyon metodu ve varsa tam çözümler ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalardan elde edilen kesin bir sonuç yeni metodun, klasik perturbasyon metodu ve varyasyonel iterasyon metoduna göre çok daha iyi çözümler vermesidir. Ayrıca metodun güvenilirliğini test etmek için yapılan uygulamalardan aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir :

- Yeni perturbasyon-iterasyon metodu klasik metot gibi küçük parametre ihtiyacı duymamaktadır. Denklemlere en başta yapay olarak eklenen küçük parametre çözümlerde 1 alınarak ortadan kaldırılmıştır.
- $P\dot{A}(1,1)$ algoritması daha çok polinom tipinde çözüm verirken, $P\dot{A}(1,2)$ ve daha üst seviye algoritmalar fonksiyonel tipte çözümler vermektedir.
- $P\dot{A}(1,M)$ tipi algoritmalarda M sayısı arttıkça elde edilen algoritmalar daha karmaşık olup çözümleri alt seviye algoritmalara göre daha hassastır.
- Çoğu örnek uygulamada klasik perturbasyon metodu sonuçları küçük parametrenin büyüyen değerlerinde patlayan tipte çözümler verirken üst seviye perturbasyon-iterasyon algoritması çözümlerinde böyle bir şeyle karşılaşmamıştır.
- Klasik perturbasyon metodundan elde edilen çözümler perturbasyon parametresinin sadece küçük değerlerinde geçerliken, perturbasyon-iterasyon metodunun çözümleri perturbasyon parametresinin birden çok büyük değerlerinde bile sayısal veya tam çözümlere oldukça yakındır. Kısaca geliştirilen yeni metot ile klasik perturbasyon metodunun sadece zayıf nonlinear problemlerde çalışması kısıtı ortadan kaldırılmıştır.

- Daha karmaşık algoritmalar tam veya sayısal çözümlere daha yakın sonuçlar vermesine rağmen işlemleri oldukça yoğundur. Bu yüzden Mathematica gibi sembolik bir hesaplayıcıya ihtiyaç duyulmaktadır.
- Yeni perturbasyon-iterasyon algoritmalarının kullanılabilirliği oldukça basit ve sistemattir. Yüksek seviye algoritmalarda çözüm kolaylığı açısından diferansiyel denklemleri değişken katsayılı yapan terimlerde başlangıç fonksiyonunu kullanarak sadeleştirme yapılabilir. Bu basitleştirmeye rağmen elde edilen sonuçlar klasik yaklaşım veya benzer metotlara göre çok daha iyidir.
- Üst seviye algoritmalarda sayısal veya tam çözüme yakınsama alt seviye algoritmalarla göre çok daha hızlı gerçekleşmektedir. Örneğin $PIA(1,1)$ çözümlerinde ikiden üçden fazla iterasyonda elde edilen yakınsama $PIA(1,2)$ çözümlerinde sadece iki iterasyonda elde edilmiştir.
- Bu tez kapsamında geliştirilen sistematik yaklaşımla $PIA(n,m)$ (n : perturbasyon serisindeki düzeltme terimi sayısı, m : Taylor serisindeki en yüksek türevin mertebesi) $n \leq m$ olmak üzere farklı tipte algoritmalar çıkarılabilir.

Bu çalışmadan sonra gelecek bir çalışma ise metodun yakınsaklık kriterleri üzerine bir teorik analiz olabilir. Ayrıca metod çok sistematik olduğundan sembolik programlamaya oldukça açıktır. Algoritmalar sembolik işlem yapan programlarda alt program olarak yazılıp denklemlerin çözümü için kullanılabilir. Bu çalışmada kısmi diferansiyel denklemler ele alınmamıştır. İleriki çalışmalarda kısmi diferansiyel denklemler için çözüm üreten algoritmalar çıkarılabilir. Fark denklemleri, diferansiyel-fark denklemleri, integro denklemler, integral-diferansiyel denklemler, fraksiyonel diferansiyel denklemler farklı bir çalışma kapsamında bu metod ile incelenebilir.

REFERANSLAR

Abbasbandy, S., 2006. The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer, *Physics Letters A*, 360, 109-113.

Aksoy, Y., ve Pakdemirli, M., 2010. Perturbation-Iteration Solutions for Bratu-type Equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 59(8), 2802-2808.

Aksoy, Y., Pakdemirli, M., Abbasbandy, S., ve Boyacı, H., 2012. New Perturbation-Iteration Solutions for Nonlinear Heat Transfer Equations, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 22(7), 814 – 828.

Aziz, A., Na ve T. Y., 1984. *Perturbation Methods in Heat Transfer*, Springer-Verlag, Berlin.

Bataineh, A.S., Noorani, M.S.M. ve Hashim, I., 2008. Series solution of the multispecies lotka-volterra equations by means of the homotopy analysis method, *Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, doi: 10.1155/2008/816787.

Batiha, B., Noorani, M.S.M. ve Hashim, I., 2007. Variational iteration method for solving multispecies Lotka-Volterra equations, *Computer and Mathematics with Applications*, 54, 903-909.

Boyd, J., P., 1986. An analytical and numerical study of the two-dimensional Bratu equation, *Journal of Scientific Computing*, 1(2), 183-206.

Boyd, J., P., 2003. Chebyshev polynomial expansions for simultaneous approximation of two branches of a function with application to the one-dimensional Bratu equation, *Applied Mathematics and Computation*, 143,189-200.

Çengel Y.,2006. Heat and Mass Transfer: a Practical Approach, Mc Graw Hill, New York.

Dai, S. Q., 1990. On a generalized PLK method and its applications, *Acta Mechanica Sinica*, 6, 111-118.

Deeba,E., Khuri, S. A, ve Xie, S.,2000. An algorithm for solving boundary value problems, *Journal of Computational Physics*, 159, 125-138.

Feng, X., He, Y., ve Meng, J., 2008. Application of homotopy perturbation method to the Bratu-type equations, *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 31(2), 243-252.

Ganji, D. D. ve Sadighi, A., 2007. Application of homotopy-perturbation and variational iteration methods to nonlinear heat transfer and porous media equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207,24-34.

Ganji, D. D., Hosseini, M.J. ve Shayegh, J., 2007. Some nonlinear heat transfer equations solved by three approximate methods, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 34, 1003-1016.

He, J. H., 1999. Modified straightforward expansion, *Meccanica*, 34, 287-289.

He, J. H., 2001. Iteration Perturbation Method for Strongly Nonlinear Oscillations, *Journal of Vibration and Control*, 7, 631-642.

He, J. H., 2002a. Modified Lindstedt-Poincare methods for some strongly nonlinear oscillations Part I: expansion of a constant, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 37, 309-314.

He, J. H., 2002b. Modified Lindstedt-Poincare methods for some strongly nonlinear oscillations Part II: a new transformation, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 37, 315-320.

He, J. H., 2003. Linearized perturbation technique and its applications to strongly nonlinear oscillators, *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 1-8.

He, J. H., 2006. Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, *International Journal of Modern Physics B*, 20, 1141-1199.

Hu,H.,2004a. A classical perturbation technique which is valid for large parameters, *Journal of Sound and Vibration*, 269, 409-412.

Hu,H.,2004b. A classical perturbation technique that works even when the linear part of restoring force is zero, *Journal of Sound and Vibration*, 271,1175-1179.

Hu, H., 2004c. A modified method of equivalent linearization that works even when the non-linearity is not small, *Journal of Sound and Vibration*, 276, 1145-1149.

Hu, H., 2006. Solutions of the Duffing-harmonic Oscillator by an Iteration procedure, *Journal of Sound and Vibration*, 298,446-452.

Hu, H., ve Xiong, Z. G., 2004. Comparison of two Lindstedt-Poincare type perturbation methods, *Journal of Sound and Vibration*, 278, 437-444.

Khuri, S. A., 2004. A new approach to Bratu's problem, *Applied Mathematics and Computation*, 147, 131-136.

Kiwan, S., 2006. Thermal Analysis of Natural Convection Porous Fins, *Transport in Porous Media*, 67, 17-29.

Li, S. ve Liao, S., 2005. An analytic approach to solve multiple solutions of a strongly nonlinear problem, *Applied Mathematics and Computation*, 169, 854-865.

Liang, S. ve Jeffrey, D.J., 2009. Comparison of homotopy analysis method and homotopy perturbation method through an evolution equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 4057-4064.

Lim, C. W. ve B. S. Wu, 2002. A Modified Mickens Procedure for Certain Non-Linear Oscillators, *Journal of Sound and Vibration*, 257, 202-206.

Lotka, A.J., 1925. *Elements of Physical Biology*, Williams & Wilkins, Baltimore, Md, USA,

Marinca, V. ve Herisanu, N., 2006. A modified iteration perturbation method for some nonlinear oscillation problems, *Acta Mechanica* 184, 231-242.

Mickens, R. E., 1987. Iteration procedure for determining approximate solutions to non-linear oscillator equation, *Journal of Sound and Vibration*, 116, 185-188

Mickens, R. E., 2005. A generalized iteration procedure for calculating approximations to periodic solutions of "truly nonlinear oscillators", *Journal of Sound and Vibration* 287, 1045-1051.

Mickens, R. E., 2006. Iteration method solutions for conservative and limit-cycle $x^{1/3}$ force oscillators, *Journal of Sound and Vibration*, 292, 964-968.

Nayfeh, A. H., 2000, Perturbation Methods, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, New York, New York.

Olek, S., 1994. An accurate solution to the multispecies Lotka-Volterra equations, Society for Industrial and Applied Mathematics, 36(3), 480-488.

Öziş, T. ve Yıldırım, A., 2008. Comparison between Adomian's method and He's homotopy perturbation method, Computers and Mathematics with Applications, 56, 1216-1224.

Pakdemirli ve M., Boyacı, H., 2007. Generation of root finding algorithms via perturbation theory and some formulas, Applied Mathematics and Computation, 184, 783-788.

Pakdemirli, M., Boyacı, H. ve Yurtsever, H. A., 2007. Perturbative derivation and comparisons of root-finding algorithms with fourth order derivatives, Mathematical and Computational Applications 12 (2), 117-124.

Pakdemirli, M., Boyacı, H. ve Yurtsever, H. A., 2008. A Root-Finding Algorithm With Fifth Order Derivatives, Mathematical and Computational Applications 13 (2), 123-128.

Pakdemirli, M., Aksoy, Y. ve Boyacı, H., 2011. A New Perturbation-Iteration Approach For First Order Differential Equations, Mathematical and Computational Applications 16 (4), 890-899.

Rajabi, A., Ganji, D.D. ve Taherian, H., 2007. Application of homotopy perturbation method in nonlinear heat conduction and convection equations, Physics Letters A, 360, 570-573.

Syam, M. I., ve Hamdan, A., 2006. An efficient method for solving Bratu equations, Applied Mathematics and Computation, 176, 704-713.

Tari, H., Ganji, D.D., Babazadeh, H.,2007. The application of He's variational iteration method to nonlinear equations arising in heat transfer, *Physics Letters A*, 363, 213-217.

Volterra, V., 1926. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi, *Memorie della Reale Accademia dei Lincei*, 2, 31-113.

Wang, M., Zhao, X. ve Liu, X., 2008. Analytic solutions of a class of nonlinearly dynamic systems, *Journal of Physics : Conference Series*, 96, 1-7.

Wazwaz,A.,2005. Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations, *Applied Mathematics and Computation*, 166, 652-663.

Xu, L., 2007. Determination of limit cycle by He's parameter-expanding method for strongly nonlinear oscillators, *Journal of Sound and Vibration*, 302, 178-184.

ÖZGEÇMİŞ

Yiğit Aksoy

30 Ocak 1982 İzmir : Doğum tarihi ve yeri

Haziran 2000: İzmir Atatürk Lisesi'nden mezuniyet

Temmuz 2005: Celal Bayar Üniversitesi Makine Mühendisliğinden Mezuniyet

Ocak 2006-Temmuz 2007: Celal Bayar Üniversitesi Makine Mühendisliğinde Araştırma Görevlisi

Temmuz 2007: Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilimdalı Makine Teorisi ve Dinamiği Programından Yüksek Lisans Mezuniyet

Şubat 2011: Celal Bayar Üniversitesi Makine Mühendisliğinde Öğretim Görevlisi