



**T. C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YENİ KISITLANMIŞ VE GENİŞLETİLMİŞ ESNEK KÜME
İŞLEMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİTNAT NUR AYBEK

OCAK

FİTNAT NUR AYBEK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OCAK 2024

YENİ KISITLANMIŞ VE GENİŞLETİLMİŞ ESNEK KÜME İŞLEMLERİ

Fitnat Nur AYBEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Prof. Dr. Ashhan SEZGİN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2024

Yüksek Lisans Tezi ve Kabul Onay Sayfası

Fitnat Nur AYBEK tarafından hazırlanan “Yeni Kısıtlanmış ve Genişletilmiş Esnek Küme İşlemleri” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN

Matematik Anabilim Dalı, Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet DAĞLI

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi:22 /01/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Fitnat Nur AYBEK

(Tarih)

YENİ KISITLANMIŞ VE GENİŞLETİLMİŞ ESNEK KÜME ESNEK KÜME
İŞLEMLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Fitnat Nur AYBEK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2024

ÖZET

Bu tez çalışmasında yeni esnek küme işlemleri tanımlayarak esnek küme literatürüne katkıda bulunmak amaçlanmıştır. Bu bağlamda, pek çok yeni esnek küme işlemleri tanımlanmış, örnekleri verilmiş, işlemlerin tüm cebirsel özellikleri detaylıca incelenmiş, her bir işlemin diğer esnek küme işlemleri ile ilişkisini elde etmek ve U evreni üzerindeki tüm esnek kümeler kümesi üzerinde, bu işlemlerin hangi cebirsel yapıları oluşturduklarını görmek için, işlemlerin diğer işlemler üzerine dağılma kurallarına bakılmıştır.

Tez yedi bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, esnek kümeler, esnek kümelerde işlemler ve bazı cebirsel yapılar ile ilgili daha önce yapılan çalışmalar incelenerek literatür taraması yapılmıştır. Temel kavramlar olan ikinci bölüm ise üç alt bölümde incelenmiş olup, ilk alt bölümde kümelerle ilgili tanımlar ve özellikler; ikinci alt bölümde cebirsel yapılarla ilgili temel kavramlar ve üçüncü alt bölümde esnek kümeler ve esnek küme işlemleri ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş α , dördüncü bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş γ , beşinci bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş λ , altıncı bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş yıldız, yedinci bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş teta işleminin tüm cebirsel özellikleri ve diğer işlemlere olan dağılmasına bakılmış, bu işlemlerin U evreni kümesi üzerindeki tüm esnek kümeler kümesi üzerinde, belli şartlar altında monoid gibi birli cebirsel yapılar ile yarı-halka ve yarı yakın halka gibi ikili cebirsel yapılar oluşturduğu görülmüştür. Son bölümünde ise çalışmada elde edilen sonuçlara detaylı şekilde yer verilmiş ve çalışmanın önemi tartışılmıştır.

Sayfa Adedi : 199
Anahtar Kelimeler : Esnek küme, Kısıtlanmış işlemler, Genişletilmiş işlemler, Cebirsel yapılar
Danışman : Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

NEW RESTRICTED AND EXTENDED SOFT SET OPERATIONS

(M. Sc. Thesis)

Fitnat Nur AYBEK

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2024

ABSTRACT

In this thesis study, by defining new soft set operations, it is aimed to make a contribution to the soft set literature. In this regard, many new soft set operations are defined, their examples are given, the whole algebraic properties of these operations are examined in detail and in order to obtain the relationship of these operations with other previously defined soft set operations and in order to see which algebraic structures these operations form on the set of soft sets over the universe U , the distribution rules of these operations over other operations have been examined.

The thesis consists of seven chapters. In the first section, by investigating the previous studies in the field of soft sets, soft set operations and some algebraic structures, a literature review is conducted. The second section, which basic concepts are given, consists of three subsections. In the first subsection, the definitions and properties related to sets, in the second subsection the basic concepts as regards some algebraic structures, and in the third subsection, the basic notions related to soft sets and soft set operations are given. In the third section, the whole algebraic properties and the distributions of the restricted and extended plus operation, in the fourth section the restricted and extended gamma operation, in the fifth section the restricted and extended lambda operation, in the sixth section, the restricted and extended star operation, in the seventh section, the restricted and extended theta operation over other soft set operations are examined, and it is observed that the soft sets along with these operations form a wide variety of unary and binary algebraic structures under certain conditions such as monoid, semiring and semi near-ring. In the last section, the results obtained in the study are given in detail and the importance of the study is discussed.

Number of pages	: 199
KeyWords	: Soft set, Restricted soft set operations, Extended soft set operations, Algebraic structures
Supervisor	: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca beni destekleyen, yönlendiren ve tezimin yazımı sırasında bana zaman ayırarak yardımını esirgemeyen her daim varlığını yanımda hissettiğim bilgi ve deneyimleri ile beni yetiştiren çok değerli tez danışmanım Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN'e teşekkürü bir borç bilirim.

Hem lisans hem yüksek lisans eğitimin boyunca, öğrencisi olmaktan her zaman büyük onur ve gurur duyduğum ve benim üzerimde sonsuz emeği olan hepsi birbirinden kıymetli Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı hocalarıma ve arkadaşlarıma, ayrıca eğitim hayatım boyunca benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, her zaman büyük bir sabırla benim yanımda olan annem, babam ve kardeşlerime en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR.....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	8
2.1. Kümeler	8
2.2. Bazı Cebirsel Yapılar	13
2.3. Esnek Kümeler	16
3. KISITLANMIŞ ve GENİŞLETİLMİŞ ARTI İŞLEMİ.....	23
3.1. Kısıtlanmış Artı İşlemi ve Özellikleri	23
3.2. Genişletilmiş Artı İşlemi ve Özellikleri	38
4. KISITLANMIŞ ve GENİŞLETİLMİŞ GAMMA İŞLEMİ	59
4.1. Kısıtlanmış Gamma İşlemi ve Özellikleri	59
4.2. Genişletilmiş Gamma İşlemi ve Özellikleri	75
5. KISITLANMIŞ ve GENİŞLETİLMİŞ LAMDA İŞLEMİ	96
5.1. Kısıtlanmış Lamda İşlemi ve Özellikleri.....	96
5.2. Genişletilmiş Lamda İşlemi ve Özellikleri.....	111
6. KISITLANMIŞ ve GENİŞLETİLMİŞ YILDIZ İŞLEMİ.....	132
6.1. Kısıtlanmış Yıldız İşlemi ve Özellikleri.....	132
6.2. Genişletilmiş Yıldız İşlemi ve Özellikleri.....	145
7. KISITLANMIŞ ve GENİŞLETİLMİŞ TETA İŞLEMİ.....	161

	Sayfa
7.1. Kısıtlanmış Teta İşlemi ve Özellikleri.....	161
7.2. Genişletilmiş Teta İşlemi ve Özellikleri.....	174
8. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	191
KAYNAKLAR	193
ÖZGEÇMİŞ	199



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\forall$	Evrensel niceleyici, her
$\exists$	Varlıksal niceleyici, en az bir
E	Parametre kümesi
U	Evrensel küme
$P(U)$	U nun kuvvet kümesi
(F,A)	(F,A) esnek kümesi
$(F,A)^r$	(F,A) esnek kümesinin tümleyeni
$\emptyset_A$	A ya göre boş esnek küme
$\emptyset_E$	E ye göre boş esnek küme
U_A	A ya göre evrensel küme
U_E	Mutlak esnek küme
$\emptyset_\emptyset$	Boş esnek küme
$S_E(U)$	U üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
$S_A(U)$	A kümesi üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
$+$	Artı işlemi
λ	Lamda işlemi
θ	Teta işlemi
$*$	Yıldız işlemi
γ	Gamma işlemi

1. GİRİŞ

Yaşadığımız dünyada birçok belirsizlik vardır ve bu belirsizlikler kişiden kişiye değişmektedir. Örneğin günlük hayatta kullandığımız cümleler içerisinde çok soğuk, düşük hız, güzel bebek, kısa boy gibi ölçüm değerleri kişiden kişiye değişen ifadelerdir. Hayatımızda, buna benzer belirsizlikler içeren daha birçok olay vardır. Ve bu belirsizlikleri karşılamak için klasik matematik mantık yeterli olmamaktadır. Bu yüzden belirsizlikleri giderebilmek için bilinen yöntemlerin dışında bazı bilimsel çalışmalara ihtiyaç duyulmuştur. Bu doğrultuda, 17. yüzyıl başlarında Pascal ve Fermat olasılık kuramını ortaya atarak ilk olarak belirsizlik durumunu matematiksel olarak incelemiştir. 19. yüzyıl başlarında ise birçok bilim adamı tarafından belirsizlik üzerine çalışmalar yapılmıştır. İlk olarak 1920’de Heisenberg belirsizlik kavramını açıklayarak, çok değerliliğe kapı açmıştır. 1930’ların başında ise Lukaisewicz ilk üç değerli mantık sistemini ve aynı tarihlerde kuantum filozofu olan Black de ilk sürekli değerlere sahip mantığı tanımlamıştır. Bunun dışında belirsiz tipteki problemlerin çözümü için, aralık matematiği, bulanık kümeler teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisi, esnek kümeler teorisi gibi farklı teoriler geliştirilmiştir. Daha sonra bulanık kümeler teorisi üzerine de çalışılmıştır.

Bu teoriler arasında en dikkat çeken teori Zadeh’in bulanık kümeler teorisidir. Bulanık küme, üyelik derecelerinin sürekli olduğu bir nesne sınıfıdır. Böyle bir küme, her bir nesneye sıfır ile bir arasında değişen bir üyelik derecesi atayan bir üyelik (karakteristik) fonksiyonu ile karakterize edilir diyerek, Zadeh (1965), bulanık mantığı ve dolayısıyla bulanık kümeleri tanımlamıştır. Matematik dünyasının bulanık mantık ile tanışması 1930’larda olmasına rağmen, ilk ticari bulanık mantık uygulamaları 1980’lerde ortaya çıkmıştır. 1990’larda iyice hız kazanarak ticari amaçlı uygulamalarda önemli bir yere gelmiştir. Fakat bilindiği gibi bir bulanık küme onun üyelik fonksiyonu yoluyla tanımlanır. Belirsizlik problemini çözmek için bulunan bir başka teorisi ise Pawlak (1982) tarafından ortaya atılan yaklaşımlı küme teorisidir. Yaklaşımlı küme teorisi, klasik küme teorisinin bir genişlemesidir. Yaklaşımlı küme teorisi pek çok alanda büyük bir ilgi görmüştür ve bu teorisi bilgi almayı hızlandırma ve yapay zekâ alanlarındaki uygulamaları ile dikkat çekmiş aynı zamanda da çağımızdaki birçok probleme çözüm bulduğu için son yıllarda birçok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır. Molodstov’a göre ise, özellikle bulanık küme teorisindeki üyelik fonksiyonunun doğası fazlasıyla bireyseldir. Bundan ötürü, her bir

durum için bir üyelik fonksiyonu inşa etmek de çok zordur. Bu yüzden, üyelik fonksiyonu inşasından bağımsız bir kümeler teorisine ihtiyaç duyulmuştur.

Bu nedenle, Molodtsov (1999) üyelik fonksiyonu inşasından bağımsız Esnek Küme Teorisini ortaya atmıştır. Esnek küme teorisi bulanık küme teorisinin aksine reel değerli bir fonksiyon olmayıp, küme değerli bir fonksiyon olduğu için belirsizliği de ortadan kaldırmaya çalışmaktadır. Molodtsov'un temel amacı esnek kümeler teorisinin temel kavramlarını tanıtmak, teorisinin ilk sonuçlarını sunmak ve gelecekte ortaya çıkabilecek bazı problemleri tartışmaktır. Maji, Roy ve Biswas (2002) ve Maji, Biswas ve Roy (2003), Pawlak'ın yaklaşımlı küme teorisinden faydalanarak kümelerde çoklu bulanık küme ve esnek küme modellerini birleştirerek çoklu bulanık esnek kümeler kavramını tanıtmıştır. Ayrıca çoklu bulanık esnek kümeyi kullanarak bir karar problemini analiz etmek için bir algoritma da vermişler ve bazı esnek küme işlemleri tanımlayarak literatüre katkıda bulunmuşlardır. Chen, Zhong ve Ye (2005) parametre azaltımının yeni bir tanımını sunmuşlardır. Xiao, Chen, Zhong ve Ye (2005) ve Pei ve Miao (2005) esnek kümeler ve bilgi sistemleri arasındaki ilişkiyi tartışmışlardır. Esnek kümelerin özel bilgi sistemlerinin bir sınıfı olduğunu gösterip, iş rekabet kapasitesi için yapay bir hesaplama metodu üzerine başarılı bir çalışma yapmışlardır. Mushrif (2006) esnek küme temelli sınıflandırmalar üzerine araştırmalar yapmıştır.

Esnek kümelerden faydalanılarak cebirsel yapılar üzerine de çalışmalar yapılmıştır. Aktaş ve Çağman (2007), esnek kümeleri, bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümelerin ilgili kavramlarıyla karşılaştırmış, yıllar boyu sürececek olan esnek cebirsel yapılarla ilgili çalışmaların önünü açan çalışmaya öncülük etmişler, esnek grup teorisini literatüre kazandırmıştır. Esnek grup yapısı üzerinde esnek alt grup, normal esnek alt grup, esnek grup homomorfizmi gibi cebirsel yapılar tanımlayıp, bunlar üzerine çalıştı. Yang (2008) esnek kümeler ve yaklaşımlı kümelere dayalı klinik teşhisin karar analizi çalışmasını yayımlamıştır. Jun (2008) esnek BCK/BCI cebirleri ve esnek alt cebirler kavramını tanıtmışlardır. Jun ve Park (2008) BCK/BCI cebirlerinin cebirsel yapısını esnek küme teorisini uygulayarak ele almış, esnek idealler ve idealistik esnek BCK/BCI cebirleri kavramı tanıtp, çeşitli örnekler vererek esnek ideallerin ve idealistik esnek BCK/BCI cebirleri üzerinde çeşitli işlemler tanımlamışlardır. Park, Jun ve Öztürk (2008) esnek WS-cebirleri, esnek alt cebirler ve esnek tündengelimli sistemler kavramını tanıtarak bunların

temel özellikleri üzerine çalışmışlardır. Feng, Jun ve Zhao (2008) esnek küme teorisini kullanarak, esnek yarı halkaları, esnek yarı halkaların ideallerini ve idealistik yarı halkaları çalışmışlardır.

Jun, Lee ve Zhan (2009), esnek kümeleri kullanarak, BCI-cebirlerindeki p-ideallerinin karakterizasyonlarını vererek esnek p-idealleri ve p-idealist esnek BCI cebirleri arasındaki ilişkiler üzerine çalışmışlardır. Aygünoğlu ve Aygün (2009) bulanık esnek gruplar adında bir çalışma yapmışlardır. Herawan ve Deris (2010) gripten şüphelenilen hastaların karar vermesinde esnek küme teorisinin uygulanabilirliğini üzerine çalıştılar. Gong, Xiao ve Zhang (2010) bijektif esnek küme kavramını tanıtır, özelliklerini çalışmışlardır. Jun ve Zhan (2010) esnek küme teorisini kullanarak esnek BL-cebirleri üzerinde çalışmalar yapmışlardır. Kazancı, Yılmaz ve Yamak (2010), esnek BCH-cebiri kavramını tanıtarak özelliklerini tartışıp incelemiştir. Esnek BCH-cebirleri ve esnek BCH-alt cebirleri ailesinin ikili kesişimi, genişletilmiş kesişimi, kısıtlı birleşim ve kartezyen çarpımını oluşturmuştur. Ayrıca esnek BCH-homomorfizmi kavramı tanıtmış ve temel özellikleri incelemiştir. Sezgin ve Atagün (2011) normalistik esnek grup ve normalistik esnek grup homomorfizmi kavramlarını tanıtarak bunların özelliklerini incelemiş, normalistik esnek grup homomorfizmleri altında korunan bazı yapılar üzerine çalışmışlardır. Sezgin, Atagün ve Aygün (2011) esnek yakın halkalar ve idealistik esnek yakın-halkaları, Acar, Koyuncu ve Tanay (2010) esnek halkaları, Sezgin, Atagün ve Çağman (2013) esnek N-gruplarını tanımlayarak, esnek N-altgrupları, esnek N-ideal, N-idealist esnek N-grupları ve esnek N-grup homomorfizmleri kavramlarını çalışmışlardır. Aktaş (2014) esnek bijektif grupları, Aktaş ve Özlü (2014) devirli esnek grupları, Sezer, Çağman, Atagün (2014) ve Sezer, Çağman, Atagün, Ali ve Türkmen (2015) esnek kesişimsel yarıgrupları ve ideallerini çalışmışlardır. Ullah, Ahmad, Hayat, Karaaslan, ve Rashad (2018) esnek kesişimsel AG-grubunun tanımlanmış ve incelendiği esnek küme teorisi ve AG-grupları arasında bir bağlantı kurmuşlardır.

Esnek küme teorisi için çok temel bir kavram olan ve teoremin üzerinde geliştiği esnek küme işlemleri ile ilgili çalışmalar da 2003 yılından bu yana devam etmiştir. Esnek küme Molodtsov (1999) tarafından ortaya atıldığında, temel esnek küme işlemleri bu makalede verilmiş olup, sonrasında Maji ve diğerleri (2003) esnek kümeler üzerinde tanımlanan işlemlere bazı yeni eklemeler yapmıştır. Pei ve Miao (2005) esnek kümeler için kesişim,

alt küme gibi çok temel kavramları literatüre kazandırmıştır. Ali, Feng, Liu, Min ve Shabir (2009), Maji ve diğerlerinin (2003) tanımladığı esnek küme işlemleri ve özelliklerindeki bazı problemli durumları düzelterek, esnek kümelerin kısıtlı birleşim, kısıtlı kesişim, kısıtlı fark ve esnek kümelerin genişletilmiş kesişimi gibi bazı yeni işlemlerini tanımlamış ve temel özelliklerini incelemiştir. Jiang, Tang, Chen ve Wang (2010), genişletilmiş esnek küme teorisi sunmuş, genişletilmiş esnek kümeler için bazı işlemler tanımlayarak bu işlemlerle ilgili olarak genişletilmiş esnek küme teorisinde bazı De Morgan yasalarının geçerli olduğunu kanıtlamıştır. Qin ve Hong (2010) esnek kümelerin cebirsel yapılarını detaylı ele almışlar; esnek kümelerin kafes yapılarını incelemiştir. Sezgin ve Atagün (2011) esnek kümeler üzerindeki kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim, kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim ve kısıtlanmış fark gibi temel özellikleri üzerine detaylı bir çalışma sunmuş, bu işlemlerin birbirleriyle olan ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca esnek kümeler için, kısıtlanmış simetrik farkı kavramını tanımlanmıştır. Ali, Shabir ve Naz, (2011) yeni esnek küme işlemleriyle ilgili bazı önemli özellikleri detaylı şekilde incelemiş, esnek kümeler kümesi üzerinde bu yeni işlemlerin monoid, yarı-halka ve hemihalka gibi pek çok cebirsel yapı oluşturduğunu ortaya koymuştur. Tridiv ve Dushmantha (2011), bir esnek kümenin tümleyeni kavramını yeniden tanımlamış, Singh ve Onyeozili (2012a, 2012b, 2012c, 2012d) esnek küme işlemlerinin bazı özellikleri özellikle yutma kuralları ve dağılmalar üzerine çalışmalar yapmışlardır. Liu, Feng ve Jun (2012) farklı esnek eşitlik ilişkileri türleri hakkında kapsamlı araştırma yapmış, esnek M-alt kümeleri ve esnek M-eşit ilişkilerini doğal bir şekilde genelleştiren yeni kavramlar ortaya koymuşlardır. Zhu ve Wen (2013) esnek kümelerin kesişimini, tümleyenini ve farkını yeniden tanımlamışlardır. Abbas, Ali ve Romaguer (2014), iki esnek kümenin genelleştirilmiş esnek eşitliğini g-esnek eşitliği olarak gösterip ilgili kavramları tanımlamışlardır. Abbas, Ali ve Romaguerac (2017) ise iki esnek kümenin genelleştirilmiş sonlu esnek eşitliği, genelleştirilmiş sonlu esnek birleşimi ve genelleştirilmiş sonlu esnek kesişimi kavramlarını tanımlamışlardır. Kamacı, Saltık, Akız ve Atagün (2018) temel esnek kümeler üzerinde bazı genelleştirilmiş işlemleri tanıtarak bunlarla ilgili karakteristik özellikleri araştırdılar. Ayrıca bu genelleştirilmiş işlemleri kullanarak yeni benzerlik ölçümü ve karar verme yöntemi önermeyi amaçlamışlardır. Sezgin, Shahzad ve Mehmood (2019) genişletilmiş fark adı verilen yeni bir işlem tanımlayıp, özelliklerini incelemiştir. Stojanovic (2021) ise esnek kümeler üzerinde genişletilmiş simetrik fark adı verilen yeni bir işlem tanımlayarak bu işlemin bazı diğer esnek küme işlemleri arasındaki ilişkisini

araştırmıştır. Bu zamana kadar yapılan çalışmalar incelendiğinde, 24 yıllık geçmişe sahip ve pek çok alanda uygulaması olan esnek küme teorideki işlemlerin, kısıtlanmış esnek küme işlemleri ve genişletilmiş esnek küme işlemleri olmak üzere iki ana başlık altında ilerlediğini görmekteyiz. Bu anlamda ilk defa Eren (2019) tarafından, yeni bir esnek küme işlem formu olan esnek kümelerde ikili parçalı fark işlemini tanımlamış ve özelliklerini çalışmış; Sezgin ve Çalışıcı (2024), klasik kümelerde yer alan fark işleminin özelliklerini esnek ikili parçalı fark işleminde incelemiştir. Çağman (2021) literatüre, iki yeni tümleyen işlemi kazandırmış; bu çalışmadan esinlenerek, Sezgin, Çağman, Atagün ve Aybek (2023c) yeni ikili küme işlemleri çalışmıştır. Bu çalışmalarda tanımlanan yeni ikili küme işlemlerinden ilham alarak Yavuz (2024), Eren (2019) çalışmasındaki işlem formunda, yeni esnek ikili parçalı yeni işlemler tanımlamış, özelliklerini incelemiş ve esnek kümeler kümesi üzerinde bu işlemlerin hangi cebirsel yapılar oluşturduğu ele alınmıştır. Demirci (2024), Sarılioğlu (2024), Akbulut (2024) esnek kümelerdeki genişletilmiş işlemlerinin formunu değiştirerek, tümleyenli genişletilmiş işlemler üzerinde çalışmalarını sürdürmüştür. Ayrıca, esnek kümelerdeki ikili parçalı işleminin formu biraz daha değiştirilerek, Sezgin ve Demirci (2023), Sezgin ve Sarılioğlu (2024), Sezgin ve Akbulut (2023), Sezgin ve Yavuz (2023b), Sezgin ve Aybek (2023), Sezgin ve Atagün (2023), Sezgin, Aybek ve Atagün (2023a), Sezgin, Aybek ve Güngör (2023b), Sezgin ve Çağman (2024) tarafından tümleyenli ikili parçalı esnek küme işlemleri de çalışılmıştır.

Bir küme üzerinde tanımlanan ikili işlemlerle oluşturulan yapıları inceleyen ve amacı bu cebirsel yapıları sınıflandırmak olan matematiğin önemli bir dalı soyut cebir, cebirsel yapıların ortak özelliklerini bağımsız olarak bulup, bu özelliklerden genel sonuçlar çıkarır. Bu bağlamda, cebirsel yapılar, matematikte ve diğer bilim alanlarında, özellikle fizik, kimya ve bilgisayar bilimi gibi uygulamalarda temel bir rol oynar. Bir cebirsel yapının hangi belli yapı ailesine ait olduğunu bulabilmek, bu ailenin tüm elemanlarının hangi karakteristik özelliklere sahip olduğu sonucuna varabilmemize imkan verir. Bu nedenlerle, cebirsel yapıların soyut matematik ve soyut cebirdeki önemi oldukça büyüktür.

Yarı halkalar, ilk olarak 1934 yılında Vandiver (1934) tarafından çalışılmıştır. Yarı halkalar, monoidlerdeki fonksiyonlardan doğal olarak ortaya çıkar. Vasanthi ve Sulochana (2013); Kaya ve Satyanarayana (1981) gibi farklı araştırmacılar, yarı halkalarla ilgili çeşitli teoriler ve bulgular sunmuşlar ve bazı araştırmacılar, eklemeli yarı halkaları

araştırmışlardır. Yarı halkalar son zamanlarda özellikle uygulamalarla ilgili olarak kapsamlı araştırmalara konu olmuştur. Eklemeli ters yarı halkalar Karvellas (1974) tarafından incelenmiştir. Glazek (2002) yarı halkaların geometride çok önemli olduğunu ve bununla birlikte pratik matematik ve bilgi bilimlerinin çeşitli uygulamalarındaki sorunları çözmek için çok önemli yere sahip olduğunu belirtmiştir. Genelleştirilmiş halkalar olan yakın halkalara ilk adım ise 1905 yılında Dickson (1905) tarafından yapılmıştır. Dickson (1905) günümüzde yakın cisim adı verilen dağılma özelliğinin tek taraflı sağlandığı cisimlerin varlığını kanıtlamıştır. Yakın halka kavramı ise ilk defa Zassenhaus (1936) tarafından kullanılmıştır. Yakın halkalar, ilk işlemin değişmeli olması gerekmediği ve ikinci işlemin ilk işlem üzerine dağılma yönünün tek yönlü olduğu bir yapıdır (Pilz, 1983). Clay ve Lawyer (1969), birimli bir Boole halkadan Boole yakın halka elde etmenin yolunu göstermiş, bu yolla elde edilen yakın halkalara özel yakın halkalar adını vermiştir. Matematikte yarı halkadan ve bir yakın halkadan daha genel bir cebirsel yapı olan ve yarı yakın halka olarak da adlandırılan cebirsel yapılar ile ilgili çalışmalar ise Hoorn ve Rootselaar (1967) tarafından başlatılmış, Hoorn ve Rootselaar (1967) yarı yakın halkaların, yarı halkaların ve yakın halkaların ortak bir soyutlaması olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Esnek hesaplama ve karar verme yöntemlerinin teorik temelini oluşturması ve esnek cebirsel çalışmaların önünü açması bakımından esnek küme işlemleri teorisinin temel kavramlarından biridir. Yeni esnek küme işlemleri tanımlamak, esnek kümelerin klasik ve klasik olmayan mantığa nasıl uygulanabileceğini anlamak için bir kapı açar. Bu tez çalışmanın amacı esnek kümeler teorisi için yeni esnek küme işlemleri tanımlayarak, esnek küme işlem literatürüne katkıda bulunmaktır. Bu amaçla Çağman (2021) çalışmasında tanımlanan işlemlerden faydalanarak yeni kısıtlanmış ve genişletilmiş esnek küme işlemleri tanımlanmış, bu işlemlerin kapalılık, birleşme, etkisiz eleman, ters eleman, değişme gibi temel özellikleri incelenmiş, bu işlemlerin diğer esnek küme işlemleri ile ilişkisine bakılarak esnek kümeler kümesi üzerinde bazı önemli cebirsel yapılar oluşturduğu elde edilmiştir.

Tezin ilk bölümü olan giriş kısmında esnek kümeler, esnek küme işlemleri ve cebirsel yapılar ile ilgili detaylı literatür taraması yapılmıştır. Temel kavramlar olan ikinci bölüm ise üç aşamada incelenmiş, ilk aşamada kümelerle ilgili tanımlar ve özellikler ikinci aşamada cebirsel yapılarla ilgili temel kavramlar ve üçüncü aşamada da esnek kümelerle

ilgili tanımlar ve temel kavramlarla ilgili bilgi verilmiştir. Üçüncü bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş artı işleminin; dördüncü bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş gamma işleminin; beşinci bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş lamda işleminin; altıncı bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş yıldız işleminin ve yedinci bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş teta işleminin tüm özellikleri detaylı şekilde incelenmiş ve detaylı ispatlarıyla sunulmuştur. İşlemlerimizin cebirsel özellikleri ve dağılma kuralları göz önünde bulundurularak, bu işlemlerle birlikte esnek kümelerin, esnek kümeler kümesi üzerinde, monoid, yarı-halka, yarı yakın halka gibi çok çeşitli cebirsel yapılar oluşturduğu sistematik bir şekilde gösterilmiştir. Sonuç bölümünde ise çalışmadan elde edilen sonuçlara yer verilmiş ve sonuçların önemi tartışılmıştır. Matematikte yapılan en önemli işlemlerden biri, bir küme üzerinde tanımlanan bağıntının veya işlemin özelliklerini incelemektir (Hacısalıhoğlu, 2007:181). Bu bağlamda, bu tezin sadece esnek küme teorisine değil, aynı zamanda esnek kümeler yardımıyla elde edilen cebirsel yapılarla birlikte klasik cebire de katkı sağlayacağını ümit ediyoruz.



2. GENEL BİLGİLER

2.1. Kümeler

Küme teorisi, iyi tanımlanmış nesneler topluluğu olarak adlandırılan kümeleri inceleyen matematiksel mantığın dalıdır. Küme teorisinin modern çalışması 1870'lerde Alman matematikçiler Richard Dedekind ve Georg Cantor tarafından başlatılmış olup, özellikle Georg Cantor (1874) çalışması ile genellikle küme teorisinin kurucusu olarak kabul edilir.

Kümeler, $X, Y, Z, \dots$ gibi büyük harflerle; kümenin elemanları ise $x, y, z, \dots$ gibi küçük harflerle gösterilir. X ve Y iki küme olmak üzere; X in her elemanı aynı zamanda Y nin de bir elemanı ise X 'e, Y 'nin bir alt kümesi denir ve $X \subseteq Y$ şeklinde yazılır. $X \subseteq Y$ ve $Y \subseteq X$ ise o zaman X ile Y kümelerine eşittir denir ve $X = Y$ şeklinde gösterilir. Küme teorisinde, üzerinde çalışılan en geniş kümeye evrensel küme denir ve E ile; hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve $\emptyset$ ile gösterilir. (Aydın ve Kandamar, 2013: 3).

Tezimizde, birtakım küme işlemlerine dayalı ispatlara yer verildiğinden, kümelerdeki temel ikili işlemlerden olan kesişim, birleşim, fark ve simetrik fark ile birli işlem olan tümleyen işlemin özellikleri bu bölümde verilmiştir.

2.1.1. Kesişim işlemi

X ve Y iki küme olmak üzere, hem X ya hem de Y kümesine ait olan elemanların kümesine X ile Y nin kesişimi (arakesiti) denir ve $X \cap Y$ ile gösterilir.

$$X \cap Y = \{x: x \in X \text{ ve } x \in Y\}$$

Kesişim işleminin temel özellikleri aşağıda belirtilmiştir:

- $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$ (Birleşme özelliği)
- $X \cap Y = Y \cap X$ (Değişme özelliği)
- $X \cap \emptyset = \emptyset \cap X = \emptyset$ (Yutan eleman özelliği)

- $X \cap E = E \cap X = X$ (Birim eleman özelliği)
- $X \cap X = X$ (Denk güçlülük özelliği)
- $X \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow X \subseteq Y'$. Benzer şekilde, $X \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow Y \subseteq X'$
- $\emptyset \subseteq X \cap Y, X \cap Y \subseteq E$
- $X \cap Y = E \Leftrightarrow X = Y = E$
- $X \cap Y = \emptyset \Rightarrow X = \emptyset \vee Y = \emptyset$ veya X ve Y ayrıktır.
- $X \cap Y \subseteq X, X \cap Y \subseteq Y$
- $X \subseteq Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$
- $X \cap Y = X \cup Y \Leftrightarrow X = Y$
- $X \cap Y \subseteq X \cup Y$
- $X \subseteq Y \Rightarrow X \cap Z \subseteq Y \cap Z$. Tersisi doğru değildir.
- $X \subseteq Y$ ve $Z \subseteq T \Rightarrow X \cap Z \subseteq Y \cap T$
- $X \cap (X \cup Y) = X \cup (X \cap Y) = X$ (Yutma Kuralı)
- $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ (Kesişimin birleşim üzerine soldan dağılması)
- $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$ (Kesişimin birleşim üzerine sağdan dağılması)
- $X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - (X \cap Z)$ (Kesişimin fark üzerine soldan dağılması)
- $(X - Y) \cap Z = (X \cap Z) - (Y \cap Z)$ (Kesişimin fark üzerine sağdan dağılması)

(Aydın ve Kandamar, 2013: 3-7)

2.1.2. Birleşim işlemi

X ve Y iki küme olsun. X e, Y ye veya her ikisine ait olan elemanların kümesine X ile Y nin birleşimi denir ve $X \cup Y$ ile gösterilir.

$$X \cup Y = \{x: x \in X \text{ veya } x \in Y\}$$

Birleşim işleminin özellikleri aşağıda belirtilmiştir:

- $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ (Birleşme özelliği)
- $X \cup Y = Y \cup X$ (Değişme özelliği)
- $X \cup \emptyset = \emptyset \cup X = X$ (Birim eleman özelliği)
- $X \cup X = X$ (Denk güçlülük özelliği)
- $X \cup E = E \cup X = E$ (Yutan eleman özelliği)
- $X \subseteq X \cup Y, Y \subseteq X \cup Y$
- $\emptyset \subseteq X \cup Y, X \cup Y \subseteq E$
- $X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$
- $X \cap Y \subseteq X \cup Y$
- $X \cup Y = X \cap Y \Leftrightarrow X = Y$
- $X \cup Y = \emptyset \Rightarrow X = Y = \emptyset$
- $X \subseteq Y \Rightarrow X \cup Z \subseteq Y \cup Z$. Tersisi doğru değildir.
- $X \subseteq Y$ ve $Z \subseteq T \Rightarrow X \cup Z \subseteq Y \cup T$
- $X \cap (X \cup Y) = X \cup (X \cap Y) = X$ (Yutma kuralı)
- $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ (Birleşimin kesişim üzerine soldan dağılması)
- $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$ (Birleşimin kesişim üzerine sağdan dağılması)

(Aydın ve Kandamar, 2013: 3-7; Çallıalp, 1994: 1-7).

2.1.3. Fark işlemi

K ve Y iki küme olsun. K da olup Y de olmayan elemanların kümesine X ile Y nin farkı denir ve $K \setminus Y$ veya $K - Y$ ile gösterilir.

$$X - Y = \{x: x \in X, x \notin Y\} = \{x \in X: x \notin Y\}$$

Bu tezimiz boyunca, X ile Y işlemlerinin farkı için $X - Y$ gösterimini tercih ediyoruz. Aşağıda fark işleminin özellikleri verilmiştir.

- $X-Y \neq Y-X$
- $(X-Y)-Z \neq X-(Y-Z)$
- $X-\emptyset=X$, $X-E=\emptyset$
- $\emptyset-X=\emptyset$ ve $X-X=\emptyset$
- $(X-Y) \cap (X \cap Y) = \emptyset$ ve $(Y-X) \cap (X \cap Y) = \emptyset$
- $X-(X-Y)=X \cap Y$ ve $Y-(Y-X)=X \cap Y$
- $X \cap Y = \emptyset$ ise $X-Y=X$. Buradan, $X \cap (Y-X) = \emptyset$ olup $X-(Y-X)=X$; $Y \cap (X-Y) = \emptyset$ olup $Y-(X-Y)=Y$; $(X-Y) \cap (Y-X) = \emptyset$ olup $(X-Y)-(Y-X)=X-Y$; $(Y-X) \cap (X-Y) = \emptyset$ olup $(Y-X)-(X-Y)=Y-X$; $(X-Y) \cap Y = \emptyset$ olup $(X-Y)-Y=X-Y$
- $(X-Y) \subseteq X$ ve $(Y-X) \subseteq Y$
- $X=(X-Y) \cup (X \cap Y)$ ve $Y=(Y-X) \cup (X \cap Y)$
- $X \cup Y = (X-Y) \cup (Y-X) \cup (X \cap Y) = (X-Y) \cup Y = (Y-X) \cup X$
- $X \subseteq Y \Leftrightarrow X-Y = \emptyset$
- $(X \cap Y)-Z = (X-Z) \cap (Y-Z)$ (Farkın kesişime sağdan dağılması)
- $(X \cup Y)-Z = (X-Z) \cup (Y-Z)$ (Farkın birleşime sağdan dağılması)
- $(X-Y)-Z = (X-Z)-(Y-Z)$ (Farkın farka sağdan dağılması)
- $X-(Y \cap Z) = (X-Y) \cup (X-Z)$
- $X-(Y \cup Z) = (X-Y) \cap (X-Z)$

(Nesin, 2019: 7-59; Çallıalp, 1994: 1-7).

2.1.4. Simetrik fark işlemi

X ve Y kümeleri verildiğinde, $X \cup Y$ ye ait olup $X \cap Y$ ye ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeye K ile Y kümelerinin simetrik farkı denir ve $X \Delta Y$ ile gösterilir.

$$X \Delta Y = \{x: x \in X \cup Y, x \notin X \cap Y\} = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

Bu tanımın bir sonucu olarak $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ olduğu açıktır. Simetrik fark işleminin özellikleri aşağıda verilmiştir.

- $(X \Delta Y) \Delta Z = X \Delta (Y \Delta Z)$ (Birleşme özelliği)
- $X \Delta Y = Y \Delta X$ (Değişme özelliği)
- $X \Delta \emptyset = \emptyset \Delta X = X$ (Birim eleman özelliği)
- $X \Delta X = \emptyset$ (Ters eleman özelliği)
- $X \Delta X' = X' \Delta X = E$
- $(X \Delta Y) \Delta (Y \Delta Z) = X \Delta Z$
- $X' \Delta Y' = X \Delta Y$
- $X \Delta Y = X \Delta Z \Rightarrow Y = Z$ (Kısaltma kuralı)
- $X \Delta Y \subseteq X \cup Y$
- $X \Delta Y = \emptyset \Leftrightarrow X = Y$
- $X \subseteq Y \Rightarrow X \Delta Y = Y - X$
- $X \Delta (X \cap Y) = X - Y$
- $X \cup Y = (X \Delta Y) \cup (X \cap Y)$
- $X \cap (Y \Delta Z) = (X \cap Y) \Delta (X \cap Z)$ (Kesişimin simetrik fark işlemi üzerine soldan dağılımı)
- $(X \Delta Y) \cap Z = (X \cap Z) \Delta (Y \cap Z)$ (Kesişimin simetrik fark işlemi üzerine sağdan dağılımı)

(Nesin, 2019: 7-59; Çallıalp, 1994: 1-7).

2.1.5. Tümlenim işlemi

X bir küme olmak üzere, evrensel kümede olup, X de olmayan elemanların kümesine X in tümleneni denir ve X' ile gösterilir. O halde:

$$X' = \{x: x \notin X\} = \{x \in E: x \notin X\} = E - X$$

Tümleyen işleminin özellikleri aşağıda verilmiştir.

- $X \cup X' = E$ ve $X \cap X' = \emptyset$
- $E' = \emptyset$ ve $\emptyset' = E$
- $(X')' = X$
- $X \Delta E = E \Delta X = X'$
- $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$ (De Morgan Kuralı)
- $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$ (De Morgan Kuralı)

(Nesin, 2019: 7-59; Çallıalp, 1994: 1-7).

2.2. Bazı Cebirsel Yapılar

Tezimizde esnek kümeler yardımıyla bazı cebirsel yapılar elde dildiği için, bu alt bölümde, tezimizde bazı cebirsel yapılar hakkında kısaca bilgi verilecektir.

2.2.1. Tanım X boş olmayan bir küme olmak üzere

$$\circ: X \times X \rightarrow X$$

fonksiyonuna, X kümesi üzerinde bir (ikili) işlem denir. Bu tanıma göre (ikili) işlem, iki değişkenli bir fonksiyondur (Hacısalioğlu, 2007: 163-164). Herhangi bir kümede tanımlanan işlem/işlemler bu küme ile birlikte cebirsel yapı (matematiksel yapı/matematiksel sistem) oluşturur (Hacısalioğlu, 2007:181; (Bayraktar, 2006:87). Bir işlemli cebirsel yapıların en bilineni grup iken iki işlemli cebirsel yapıların en bilineni halka ve cisimdir.

2.2.2. Tanım G boş olmayan bir küme ve $\circ$, G kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan (G, $\circ$) cebirsel yapısına grup denir.

- i. Her $x, y, z \in G$ için; $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ (Birleşme özelliği)
- ii. Öyle bir $e \in G$ vardır ki, her $x \in G$ için $x \circ e = e \circ x = x$ (Birim eleman özelliği)
- iii. e, birim eleman olmak üzere, her $x \in G$ için öyle bir $y \in G$ vardır ki $x \circ y = y \circ x = e$ (Ters eleman özelliği)

$\forall x, y \in G$ için $x \circ y = y \circ x$ şartını sağlayan (G, $\circ$) grubuna ise değişmeli grup denir (Bayraktar, 2006:87-88).

$(K, \circ)$ bir cebirsel yapı olduğunda, $\circ$ K da bir ikili işlem olduğundan, her $x, y \in K$ için, $x \circ y \in K$ özelliği yani kapalılık özelliği sağlanır ve bu durumda $(K, \circ)$ cebirsel yapısı grupoid adını alır. $(K, \circ)$ bir grupoid olsun. $\forall k \in K$ için $e \circ k = k$ olacak şekilde $e \in K$ var ise, e elemanına K nin sol birim elemanı; $k \circ e = k$ olacak şekilde $e \in K$ varsa, e elemanına K nin sağ birim elemanı denir. Birim eleman hem sağ birim, hem de sol birimdir ve tektir. $(K, \circ)$, birim elemanı e olan bir cebirsel yapı olsun. $k \in K$ için $k' \circ k = e$ olacak şekilde $k' \in K$ var ise, k' elemanına k elemanının sol ters elemanı; $k \circ k' = e$ olacak şekilde $k' \in K$ varsa, k' elemanına k elemanının sağ tersi denir. k elemanının tersi, hem sağ ters, hem de sol terstir ve tektir. $\forall k \in K$ için, $y \circ k = y$ olacak şekilde $y \in K$ varsa, y elemanına K nin sol yutan elemanı; $k \circ y = y$ olacak şekilde $y \in K$ varsa, y elemanına K nin sağ yutan elemanı denir. Yutan eleman hem sağ yutan, hem de sol yutan elemandır ve tektir (Kilp, Knauer and Mikhalev, 2001)

2.2.3. Tanım $(G, \circ)$ cebirsel yapısı, birleşme özelliğini sağlıyorsa yarı grup; birleşme ve birim eleman özelliklerini sağlıyorsa monoid denir (Bayraktar, 2006:87).

Bu tanımlara göre, her abelyen grup bir grup; her grup bir monoid; her monoid bir yarı grup; her yarı grup bir grupoid olur.

2.2.4. Tanım $(S, \circ)$ bir cebirsel yapı olsun. $s \in S$ için, $s^2 = s$ ise s elemanına idempotent eleman denir. $\forall s \in S$ için, $s^2 = s$ ise, $(S, \circ)$ cebirsel yapısına idempotentir denir (Clifford, 1954).

2.2.5. Tanım İdempotent yarı gruba bant; idempotent ve değişmeli yarıgruba yarı kafes; idempotent ve değişmeli monoide sınırlı yarı kafes denir (Clifford, 1954).

Bir monoidin birim elemanı tek olmasına rağmen bir yarıgrup/grupoid, bir veya birden çok sol birime sahip olabilir; fakat birden çok sol birime sahip ise, sağ birim elemanı yoktur, dolayısıyla birim elemanı yoktur. Benzer şekilde, bir yarıgrup/grupoid, bir veya birden çok sağ birime sahip olabilir; fakat birden çok sağ birime sahip ise, sol birim elemanı yoktur, dolayısıyla birim elemanı yoktur (Clifford, 1954).

Benzer şekilde, bir grupta her elemanın tersi tek olmasına rağmen, bir monoidde bir elemanın bir veya birden çok sol tersi olabilir; fakat o eleman birden çok sol terse sahip

ise, sağ terse sahip değildir; dolayısıyla ters elemana sahip değildir. Benzer şekilde bir monoidde bir elemanın bir veya birden çok sağ tersi olabilir; fakat o eleman birden çok sağ terse sahip ise, sol terse sahip değildir; dolayısıyla ters elemana sahip değildir (Clifford, 1954).

2.2.6. Teorem G boştan farklı bir küme ve $\circ$, G de birleşme özelliğini sağlayan bir küme olsun. $\forall x \in G$ için $e \circ x = x$ olacak şekilde $e \in G$ var (sol birim) ve $\forall x \in G$ için $x' \circ x = e$ olacak şekilde $\exists x' \in G$ var (x elemanının sol tersi) ise bu durumda $(G, \circ)$ bir gruptur (Çallıalp, 2011: 72-73). (Benzer teorem sağ birim ve sağ ters için de yazılabilir.)

2.2.7. Tanım H boştan farklı bir küme, “+” ve “ $\circ$ ” H kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun. $(H, +, \circ)$ cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(H, +, \circ)$ üçlüsüne bir halka denir.

- i. $(H, +)$ değişmeli bir gruptur.
- ii. $(H, \circ)$ yarıgruptur.
- iii. $\forall x, y, z \in H$ için $x \circ (y + z) = x \circ y + x \circ z$ ve $(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$

$(H, +, \circ)$ halkası kısaca H ile gösterilir. $(H, +)$ nın birim elemanı 0_H ile gösterilir ve H halkasının sıfırı denir. H halkası $\forall x, y \in H$ için $x \circ y = y \circ x$ şartını sağlıyorsa H ’a değişmeli halka denir. H halkasında $\forall x \in H$ için, $x \circ e = e \circ x = x$ olacak şekilde bir $e \in H$ var ise, e ye H nin birim elemanı denir ve 1_H ile gösterilir. Birim elemana sahip halkaya birimli halka denir (Aydın ve Kandamar, 2013: 231-232).

2.2.8. Tanım S boştan farklı bir küme, “+” ve “ $\circ$ ” S kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun. $(S, +, \circ)$ cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(S, +, \circ)$ üçlüsüne bir yarıhalka denir.

- i. $(S, +)$ yarıgruptur.
- ii. $(S, \circ)$ yarıgruptur.
- iii. $\forall x, y, z \in S$ için $x \circ (y + z) = x \circ y + x \circ z$ ve $(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$

Her $x, y \in S$ için, $x + y = y + x$ ise S yarı halkasına toplamsal değişmeli yarıhalka; her $x, y \in S$ için $x \circ y = y \circ x$ ise S yarı halkasına çarpımsal değişmeli yarıhalka; her $x \in S$ için, $x \circ 1 = 1 \circ x = x$

olacak şekilde $1 \in S$ varsa yani çarpımsal birimli yarıhalkaya birimli yarıhalka denir. Her $a \in S$ için $0 \circ x = x \circ 0 = 0$ ve $0 + x = x + 0 = x$ olacak şekilde $0 \in S$ varsa, $0 \in S$ elemanına S yarıhalkasının sıfırı denir. Toplamsal değişmeli ve sıfırlı yarıhalkaya hemihalka denir (Vandiver, 1934).

2.2.9. Tanım N boştan farklı bir küme, “+” ve “ $\circ$ ” N kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun. $(N, +, \circ)$ cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(N, +, \circ)$ üçlüsüne bir (sağ) yakın-halka denir.

- i. $(N, +)$ değişmeli olması gerekmeyen bir gruptur.
- ii. $(N, \circ)$ bir yarı gruptur.
- iii. $\forall x, y, z \in N$ için $(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$

Eğer iii) şıkkı yani sağdan dağılma yerine, $\forall x, y, z \in N$ için $x \circ (y + z) = x \circ y + x \circ z$ yani soldan dağılma sağlanırsa, bu şartları sağlayan $(N, +, \circ)$ üçlüsüne bir sol yakın-halka denir. Dağılma özelliğinin hangi taraftan kullanıldığı, yakın-halkanın sağ veya sol olmasını belirler (Pilz, 1983:4)

2.2.10. Tanım S boştan farklı bir küme, “+” ve “ $\circ$ ” S kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun. $(S, +, \circ)$ cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(S, +, \circ)$ üçlüsüne bir (sağ) yakın yarıhalka denir.

- i. $(S, +)$ yarıgruptur.
- ii. $(S, \circ)$ yarıgruptur.
- iii. Her $x, y, z \in S$ için $(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$ (Sağdan dağılma kuralı)

Eğer $(S, +, \circ)$ nın toplamsal birimi olan 0 , her $x \in S$ için $0 \circ x = 0$ (sol yutan) şartını sağlıyorsa, $(S, +, \circ)$ (sağ) yakın yarıhalkasına sıfırlı (sağ) yakın yarıhalka denir. $(S, +, \circ)$ sıfırlı (sağ) yakın yarı halkası, her $x \in S$ için $x \cdot 0 = 0$ (sol yutan) şartını da sağlıyorsa S 'ye sıfır simetrik yakın yarıhalka denir. (Hoorn ve Rootselaar, 1967)

2.3. Esnek Kümeler

Bu bölümde, esnek küme teorisiyle ilgili temel kavramlar derlenerek verilecektir.

2.3.1. Tanım U evrensel küme, E parametreler kümesi, $P(U)$ U 'nun kuvvet kümesi ve $C \subseteq E$ olarak verilsin. Bir (F, C) sıralı ikilisi U üzerinde esnek küme olarak adlandırılır. Burada F ,

$$F: C \rightarrow P(U)$$

ile verilen bir fonksiyondur. Başka bir şekilde ifade edecek olursak, U üzerinde bir esnek küme, U evreninin alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir. (Molodtsov, 1999)

(F, C) esnek kümesi gösterimi, kaynakların bazılarında F_C şeklinde gösterilse de tezimiz boyunca Molodtsov (1999) ve Maji ve diğerleri (2003) çalışmasında da kullanılan esnek kümenin (F, C) gösterimini tercih edilecektir. Molodtsov tarafından ortaya atılan bu tanım, Çağman ve Enginoğlu (2010) tarafından yeniden düzenlenmiş olsa da, bu tez boyunca, ilk olarak Molodtsov (1999) tarafından verilen esnek küme tanımını kullanılacaktır.

E parametreler kümesinin bir C alt kümesi ile birden fazla esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda bu esnek kümeler (F, C) , (G, C) , (H, C) vb. şeklinde gösterilecektir. Ayrıca, E parametreler kümesinin A, B, C vb. farklı alt kümeleri ile de birden fazla esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda esnek kümeler (F, A) , (F, B) , (F, C) vb. şeklinde olur (Maji ve diğerleri, 2003)

U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi (parametre kümesi ne olursa olsun) $S_E(U)$ ile gösterilecek olup; X , E kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, sabit X parametre kümesi ile U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi, $S_X(U)$ ile gösterilecektir. Yani, $S_X(U)$ kümesinde, parametre kümesi sadece X olan esnek kümeler yer alırken; $S_E(U)$ kümesinde, parametre kümesi herhangi bir küme olan U üzerindeki tüm esnek kümeler yer alabilir. $S_X(U)$ kümesinin $S_E(U)$ kümesinin alt kümesi olduğu açıktır.

Tanım kümesi boş küme olacak şekildeki, $F: \emptyset \rightarrow A$ fonksiyonuna boş fonksiyon denildiği bilinmektedir. Esnek küme de bir fonksiyon olduğundan, tanım kümesi $\emptyset$ alınarak, $F: \emptyset \rightarrow P(U)$ olacak şekilde bir esnek küme tanımlanabileceği aşikardır. Böyle esnek kümeye, boş esnek küme denilir ve $\emptyset_\emptyset$ ile gösterilir. $\emptyset_\emptyset$, parametre kümesi boş küme olan tek esnek kümedir (Ali ve diğerleri, 2011). Bu tez boyunca $(F, A) = \emptyset_\emptyset$ diye belirtilmediği

sürece $A=\emptyset$ alınmayacaktır; yani aksi belirtilmediği sürece, esnek kümelerin tümü boş esnek küme olan $\emptyset_\emptyset$ den farklıdır.

2.3.2. *Örnek* U satın almak için üzerinde düşünülen montların bir kümesi, E'nin de parametrelerin kümesi olduğunu kabul edelim. Her bir parametre bir kelime veya bir cümledir. $E=\{\text{kaliteli, uzun, koyu renk, kalın, kullanışlı}\}$ olsun. Bu durumda bir esnek küme tanımlamak, “kaliteli mont, kullanışlı mont vb.” oluşturmak demektir. (F,X) ; esnek kümesi Ahsen Hanım'ın almayı düşündüğü “montların çekiciliği” olarak tanımlanır. U evrensel kümesinde aşağıdaki şekilde verilen 6 tane montun olduğunu düşünelim.

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\} \text{ ve } E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}, X=\{e_1, e_4, e_6\}$$

olsun. Burada, e_1 "kaliteli" parametresini; e_2 "uzun" parametresini; e_3 "koyu renk" parametresini; e_4 "kalın" parametresini; e_5 kullanışlı" parametresini temsil etsin. Buna göre mont almaya gelen Ahsen Hanım için (F,X) esnek kümesini oluşturalım. Bunun için önce verilen parametrelere göre montları sınıflandıralım:

$$F(e_1) = \{u_3, u_4\}, F(e_4) = U, F(e_6) = \{u_2, u_3, u_4\}$$

Bu durumda esnek kümemiz,

$$(F,K) = \{(e_1, \{u_3, u_4\}), (e_4, U), (e_6, \{u_2, u_3, u_4\})\}$$

şeklinde olur.

2.3.3. Tanım (F,T) , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x \in T$ için; $F(x)=\emptyset$ ise (F,T) esnek kümesine T ye göre boş esnek küme denir ve $\emptyset_T$ ile gösterilir. (F,E) , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x \in E$ için; $F(x)=\emptyset$ ise (F,E) esnek kümesine E ye göre boş esnek küme denir ve $\emptyset_E$ ile gösterilir (Ali ve diğerleri, 2009).

2.3.4. Tanım (F,T) , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x \in T$ için; $F(x)=U$ ise (F,T) esnek kümesine T ye göre mutlak esnek küme denir ve U_T ile gösterilir. (F,E) , U üzerinde

bir esnek küme olsun. Her $x \in E$ için; $F(x)=U$ ise (F,E) esnek kümesine tam esnek küme denir ve U_E ile gösterilir.

2.3.5. Tanım (F,T) ve (G,Y) , U üzerinde esnek kümeler olsun. $T \subseteq Y$ ve her $x \in T$ için $F(t)=G(t)$ ise (F,T) ye (G,Y) nin esnek alt kümesidir denir $(F,T) \subseteq (G,Y)$ gösterilir. (G,Y) , (F,T) nin esnek alt kümesi ise (F,T) ye (G,Y) nin esnek üst kümesidir denir ve $(F,T) \supseteq (G,Y)$ ile gösterilir. Eğer $(F,T) \subseteq (G,Y)$ ve $(G,Y) \subseteq (F,T)$ ise (F,T) ve (G,Y) esnek kümelerine (esnek) eşit kümeler denir (Pei ve Maio, 2005)

2.3.6. Tanım (F,T) , U üzerinde bir esnek küme olsun. (F,T) esnek kümesinin esnek tümleyeni $(F,T)^c = (F^c, T)$ ve her $x \in T$ için; $F^c(x) = U - F(x)$ şeklinde tanımlanır (Ali ve diğerleri, 2009). Buradan, $(\emptyset_A)^c = U_A$, $(U_A)^c = \emptyset_A$, $(\emptyset_E)^c = U_E$, $(U_E)^c = \emptyset_E$, $(\emptyset_\emptyset)^c = \emptyset_\emptyset$, $((F,A)^c)^c = (F,A)$. Ayrıca, $\emptyset_A \subseteq (F,A) \subseteq U_A \subseteq U_E$ olduğu açıktır (Ali ve diğerleri, 2010).

Esnek kümelerdeki işlemler, genel anlamda kısıtlanmış esnek küme işlemleri ve genişletilmiş esnek küme işlemleri olmak üzere iki kategoride tanımlanmıştır. Sırasıyla önce kısıtlanmış esnek küme işlemleri, sonra genişletilmiş esnek küme işlemleri verilecektir.

2.3.7. Tanım (F,T) ve (G,Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F,T) \cap_R (G,Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış kesişimi $Z = T \cap Y$ ve $\forall x \in Z$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$ olmak üzere $(F,T) \cap_R (G,Y) = (H,Z)$ olarak tanımlanır (Pei ve Miao, 2005). Burada, $Z = T \cap Y = \emptyset$ ise $(F,T) \cap_R (G,Y) = \emptyset_\emptyset$ (Ali ve diğerleri, 2011).

2.3.8. Tanım (F,T) ve (G,Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F,T) \cup_R (G,Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış birleşimi $Z = T \cap Y$ ve $\forall x \in Z$ için $H(x) = F(x) \cup G(x)$ olmak üzere $(F,T) \cup_R (G,Y) = (H,Z)$ olarak tanımlanır (Ali ve diğerleri, 2009). Burada, $Z = T \cap Y = \emptyset$ ise $(F,T) \cup_R (G,Y) = \emptyset_\emptyset$ (Ali ve diğerleri, 2011).

2.3.9. Tanım (F,T) ve (G,Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F,T) \setminus_R (G,Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış farkı $Z = T \cap Y$ ve $\forall x \in Z$ için $H(x) = F(x) \setminus G(x)$ olmak üzere $(F,T) \setminus_R (G,Y) = (H,Z)$ olarak tanımlanır (Ali ve diğerleri, 2009). Burada, $Z = T \cap Y = \emptyset$ ise $(F,T) \setminus_R (G,Y) = \emptyset_\emptyset$ (Ali ve diğerleri, 2011).

2.3.10. Tanım (F, T) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, T)\Delta_{\mathfrak{R}}(G, Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış simetrik fark $Z = T \cap Y$ ve $\forall x \in Z$ için $H(x) = F(x)\Delta G(x)$ olmak üzere $(F, T)\Delta_{\mathfrak{R}}(G, Y) = (H, Z)$ olarak tanımlanır (Sezgin ve Atagün, 2011). Burada, $Z = T \cap Y = \emptyset$ ise $(F, T)\Delta_{\mathfrak{R}}(G, Y) = \emptyset_{\emptyset}$ (Ali ve diğerleri, 2011).

2.3.11. Tanım (F, T) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş birleşimi (H, Z) 'dir. Burada $Z = T \cup Y$ ve $\forall x \in Z$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in T - Y \\ G(x), & x \in Y - T \\ F(x) \cup G(x), & x \in T \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır, $(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Maji ve diğerleri, 2003).

2.3.12. Tanım (F, T) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş kesişimi (H, Z) 'dir. Burada $Z = T \cap Y$ ve $\forall x \in Z$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in T - Y \\ G(x), & x \in Y - T \\ F(x) \cap G(x), & x \in T \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır, $(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Ali ve diğerleri, 2009).

2.3.13. Tanım (F, T) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş fark (H, Z) 'dir. Burada, $Z = T \cup Y$ ve $\forall x \in Z$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in T - Y \\ G(x), & x \in Y - T \\ F(x) - G(x), & x \in T \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır, $(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Sezgin ve diğerleri, 2019).

2.3.14. Tanım (F, T) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş simetrik farkı (H, P) 'dir. Burada, $Z = T \cup Y$ ve $\forall x \in Z$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in T - Y \\ G(x), & x \in Y - T \\ F(x)\Delta G(x), & x \in T \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır, $(F, T)\Delta_{\varepsilon}(G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Stojanovic, 2021).

2.3.15. *Örnek* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametreler kümesi $T = \{e_1, e_5\}$ ve $Z = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, E nin iki alt kümesi olsun. (F, T) ve (G, Z) , $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ üzerinde aşağıdaki şekilde

tanımlı iki esnek küme olsun:

$(F,T)=\{(e_1,\{h_2,h_5\}), (e_3,\{h_1,h_2,h_5\})\}$, $(G,Z)=\{(e_2,\{h_1,h_4,h_5\}), \{(e_3,\{h_2,h_3,h_4\}), (e_4,\{h_3,h_5\})\}$ olsun. Bu durumda,

- $(F,T) \cap_R (G,Z) = \{(e_3,\{h_2\})\}$
- $(F,T) \cup_R (G,Z) = \{(e_3,\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\})\}$
- $(F,T) \setminus_R (G,Z) = \{(e_3,\{h_1,h_5\})\}$
- $(F,T) \Delta_R (G,Z) = \{(e_3,\{h_1,h_5\}), (e_3,\{h_3,h_4\})\}$
- $(F,T) \cup_\varepsilon (G,Z) = \{(e_1,\{h_2,h_5\}), (e_2,\{h_1,h_4,h_5\}), (e_3,\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}), (e_4,\{h_3,h_5\})\}$
- $(F,T) \cap_\varepsilon (G,Z) = \{(e_1,\{h_2,h_5\}), (e_2,\{h_1,h_4,h_5\}), (e_3,\{h_1\}), (e_4,\{h_3,h_5\})\}$
- $(F,T) \setminus_\varepsilon (G,Z) = \{(e_1,\{h_2,h_5\}), (e_2,\{h_1,h_4,h_5\}), (e_3,\{h_1,h_5\}), (e_4,\{h_3,h_5\})\}$.
- $(F,T) \Delta_\varepsilon (G,Z) = \{(e_1,\{h_2,h_5\}), (e_2,\{h_1,h_4,h_5\}), (e_3,\{h_1,h_3,h_4,h_5\}), (e_4,\{h_3,h_5\})\}$.

Çağman (2021) kapsayıcı ve dışlayıcı tümleyen şeklinde iki yeni tümleyen tanımlamıştır. + ve θ sırasıyla, kapsayıcı ve dışlayıcı tümleyenleri göstermek ve X ve Y iki küme olmak üzere, bu ikili işlemler, $X+Y=X' \cup Y$, $X \theta Y=X' \cap Y'$ olarak tanımlanmıştır. Sezgin ve diğerleri (2023c), bu iki işlem arasındaki ilişkileri incelemiş ve ayrıca bunun gibi üç yeni ikili işlem tanımlayıp, bunların birbirleriyle olan ilişkisini incelemiştir. X ve Y iki küme olmak üzere $X*Y=X' \cup Y'$, $X \gamma Y=X' \cap Y$, $X \lambda Y=X \cup Y'$.

$\bowtie$ kümelerdeki işlemleri göstermek üzere ($\bowtie$ burada $\cap$, $\cup$, $-$, Δ , λ , γ , θ , $+$, $*$ gibi küme işlemlerini göstermek üzere) esnek kümelerdeki kısıtlanmış işlemler, genişletilmiş işlemler, tümleyenli genişletilmiş işlemler, esnek ikili parçalı işlemler, tümleyenli esnek ikili parçalı işlemler aşağıda verilen genellenmiş tanımlar ile genel formda verilebilir:

2.3.16. Tanım (F,T) ve (G,Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F,T) \bowtie_{\mathfrak{R}} (G,Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış ω işlemi, $Z = T \cap Y$ ve $\forall x \in Z$ için $H(x) = F(x) \bowtie G(x)$ olmak üzere $(F,T) \bowtie_{\mathfrak{R}} (G,Y) = (H,Z)$ olarak tanımlanır. Burada, $Z = T \cap Y = \emptyset$ ise $(F,T) \bowtie_R (G,Y) = \emptyset_\emptyset$ (Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve Atagün, 2011; Aybek, 2024).

2.3.17. Tanım (F,T) ve (G,Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş $\bowtie$ işlemi (H,Z) 'dir. Burada, $Z = T \cup Y$ ve $\forall x \in Z$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in T - Y \\ G(x), & x \in Y - T \\ F(x) \bowtie G(x), & x \in T \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, T) \bowtie_{\varepsilon} (G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Maji ve diğerleri, 2003; Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve diğerleri, 2019; Stojanovic, 2021; Aybek, 2024).

2.3.18. Tanım (F, T) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin tümleyenli genişletilmiş ω işlemi (H, Z) 'dir. Burada $Z = T \cup Y$ ve $\forall x \in Z$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in T - Y \\ G'(x), & x \in Y - T \\ F(x) \bowtie G(x), & x \in T \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, T) \stackrel{*}{\bowtie}_{\varepsilon} (G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Saralioğlu, 2024; Demirci, 2024; Akbulut, 2024).

2.3.19. Tanım (F, T) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin ensek ikili parçalı $\bowtie$ işlemi (H, T) 'dir ve $\forall x \in T$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in T - Y \\ F(x) \bowtie G(x), & x \in T \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, T) \stackrel{\sim}{\bowtie} (G, Y) = (H, T)$ şeklinde gösterilir (Eren, 2019; Sezgin ve Çalışıcı, 2024; Sezgin ve Yavuz, 2023a).

2.3.20. Tanım (F, T) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin tümleyenli ensek ikili parçalı $\bowtie$ işlemi (H, T) 'dir ve $\forall x \in T$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in T - Y \\ F(x) \bowtie G(x), & x \in T \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, T) \stackrel{*}{\sim}_{\bowtie} (G, Y) = (H, T)$ şeklinde gösterilir (Sezgin ve Demirci, 2023; Sezgin ve Aybek, 2023; Sezgin ve diğerleri, 2023a; Sezgin ve diğerleri, 2023b; Sezgin ve Atagün, 2023; Sezgin ve Yavuz, 2023b; Sezgin ve Çağman, 2024; Sezgin ve Saralioğlu, 2024).

3. KISITLANMIŞ ve GENİŞLETİLMİŞ ARTI İŞLEMİ

Bu bölümde, kısıtlanmış artı ve genişletilmiş artı adı verilen yeni bir kısıtlanmış ve genişletilmiş esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile birlikte diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları ve $S_E(U)$ kümesi üzerinde bu işlemlerin hangi cebirsel yapıları oluşturduğu incelenmiş ve çok önemli sonuçlar elde edilmiştir.

3.1. Kısıtlanmış Artı İşlemi ve Özellikleri

3.1.1. Tanım (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, T) +_R (G, Z)$ ile gösterilen kısıtlanmış artı işlemi $C = T \cap Z$ olmak üzere; $C = T \cap Z \neq \emptyset$ ise $\forall \alpha \in C$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup G(\alpha)$; $C = T \cap Z = \emptyset$ ise $(F, T) +_R (G, Z) = (H, C) = \emptyset_\emptyset$ olacak şekilde $(F, T) +_R (G, Z) = (H, C)$ ile tanımlanır.

Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, tanımda $C = T \cap Z = \emptyset$ ise, $(F, T) +_R (G, Z) = \emptyset_\emptyset$ olduğu açıktır. Buradan, kısıtlanmış artı işleminin tanımlı olması için, (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde iki esnek küme olmak üzere, $T \cap Z \neq \emptyset$ şartının bulunmadığı görülmektedir.

3.1.2. Örnek $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $T = \{e_1, e_3\}$, $Z = \{e_2, e_3, e_4\}$ E 'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde $(F, T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, Z) = \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, h_3, h_5)\}$ olarak iki esnek küme olsun. $(F, T) +_R (G, Z) = (H, T \cap Z)$ olmak üzere $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_3\}$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup G(\alpha)$ olup, $H(e_3) = F'(e_3) \cup G(e_3) = \{h_3, h_4\} \cup \{h_2, h_3, h_4\} = \{h_2, h_3, h_4\}$. Böylece, $(F, T) +_R (G, Z) = \{(e_3, \{h_2, h_3, h_4\})\}$.

3.1.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $+_R$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $+_R$ 'nın $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$+_R: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((F,T), (G,Z)) \rightarrow (F,T) +_R (G,Z) = (H, T \cap Z)$$

olup, (F,T) ve (G,Z) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F,T) +_R (G,Z)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir.

$$2) [(F,T) +_R (G,Z)] +_R (H,M) \neq (F,T) +_R [(G,Z) +_R (H,M)].$$

İspat: $(F,T) +_R (G,Z) = (S, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $T(\alpha) = F'(\alpha) \cup G(\alpha)$. $(S, T \cap Z) +_R (H,M) = (R, (T \cap Z) \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$ için, $R(\alpha) = T'(\alpha) \cup H(\alpha)$. Böylece,

$$R(\alpha) = [F(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup H(\alpha)$$

$(G,Z) +_R (H,M) = (K, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $K(\alpha) = G'(\alpha) \cup H(\alpha)$. $(F,T) +_R (K, Z \cap M) = (S, T \cap (Z \cap M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$ için, $S(\alpha) = F'(\alpha) \cup K(\alpha)$. Böylece,

$$S(\alpha) = F'(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H(\alpha)]$$

Burada $(R, (T \cap Z) \cap M) \neq (S, T \cap (Z \cap M))$ olduğu görülür. Yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $+_R$ işleminin birleşme özelliği yoktur. Burada, $T \cap Z = \emptyset$ veya $Z \cap M = \emptyset$ veya $T \cap M = \emptyset$ ise, bu durumda her iki taraf $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesi olacağından, bu şartlar altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $+_R$ işleminin birleşme özelliği sağlanacağı açıktır.

$$3) [(F,T) +_R (G,T)] +_R (H,T) \neq (F,T) +_R [(G,T) +_R (H,T)].$$

İspat: $(F,T) +_R (G,T) = (K,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap T = T$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup G(\alpha)$. $(K,T) +_R (H,T) = (R,T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap T = T$ için, $R(\alpha) = K'(\alpha) \cup H(\alpha)$ olur. Böylece,

$$R(\alpha) = [F(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup H(\alpha)$$

$(G,T) +_R (H,T) = (L,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap T$ için, $L(\alpha) = G'(\alpha) \cup H(\alpha)$. $(F,T) +_R (L,T) = (N,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap T$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cup L(\alpha)$. Böylece,

$$N(\alpha) = F'(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H(\alpha)]$$

Buradan, $(R,T) \neq (N,T)$ olduğu görülür. Yani, parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler kümesi üzerinde $+_R$ işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F,T) +_R (G,Z) \neq (G,Z) +_R (F,T).$$

İspat: $(F,T) +_R (G,Z) = (H, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup G(\alpha)$. $(G,Z) +_R (F,T) = (S, Z \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap T$ için, $S(\alpha) = G'(\alpha) \cup F(\alpha)$. Böylece,

$$(F,T) +_R (G,Z) \neq (G,Z) +_R (F,T).$$

$S_E(U)$ kümesi üzerinde, $+_R$ işleminin değişme özelliği yoktur. Burada, $T \cap Z = \emptyset$ ise, bu durumda her iki taraf $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesi olacağından, bu şart altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $+_R$ işleminin değişme özelliği sağlanacağı açıktır. $(F,T) +_R (G,T) \neq (G,T) +_R (F,T)$ olduğu, yani $+_R$ işleminin parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler kümesi üzerinde de değişme özelliğine sahip olmadığı açıktır.

$$5) (F,T) +_R (F,T) = U_T.$$

İspat: $(F,T) +_R (F,T) = (H, T \cap T)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup F(\alpha) = U$ olur ve böylece $(H,T) = U_T$ elde edilir. Yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $+_R$ işlemi, denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

$$6) (F,T) +_R \emptyset_T = (F,T)^r.$$

İspat: $\emptyset_T = (S,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(F,T) +_R (S,T) = (H, T \cap T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup S(\alpha) = F'(\alpha) \cup \emptyset = F'(\alpha)$. Böylece, $(H,T) = (F,T)^r$.

$$7) \emptyset_T +_R (F,T) = U_T.$$

İspat: $\emptyset_T = (S,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(S,T) +_R (F,T) = (H, T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = S'(\alpha) \cup F(\alpha) = U \cup F(\alpha) = U$. Böylece, $(H,T) = U_T$.

$$8) (F,T) +_R \emptyset_M = (F, T \cap M)^r.$$

İspat: $\emptyset_M = (S, M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in M$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(F, T) +_R (S, M) = (H, T \cap M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup S(\alpha) = F'(\alpha) \cup \emptyset = F'(\alpha)$. Böylece, $(H, T \cap M) = (F, T \cap M)^r$. Burada, $T \cap M = \emptyset$ ise $(F, T) +_R \emptyset_M = \emptyset_\emptyset$ olur.

9) $\emptyset_M +_R (F, T) = U_{M \cap T}$.

İspat: $\emptyset_M = (S, M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in M$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(S, M) +_R (F, T) = (H, M \cap T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in M \cap T$ için, $H(\alpha) = S'(\alpha) \cup F(\alpha) = U \cup F(\alpha) = U$. Böylece, $(H, M \cap T) = U_{M \cap T}$. Burada, $T \cap M = \emptyset$ ise $\emptyset_M +_R (F, T) = \emptyset_\emptyset$ olur.

10) $(F, T) +_R \emptyset_E = (F, T)^r$.

İspat: $\emptyset_E = (S, E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in E$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(F, T) +_R (S, E) = (H, T \cap E)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap E = T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup S(\alpha) = F'(\alpha) \cup \emptyset = F'(\alpha)$. Böylece, $(H, T) = (F, T)^r$.

11) $\emptyset_E +_R (F, T) = U_T$.

İspat: $\emptyset_E = (S, E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in E$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(S, E) +_R (F, T) = (H, E \cap T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in E \cap T = T$, $H(\alpha) = S'(\alpha) \cup F(\alpha) = U \cup F(\alpha) = U$. Böylece, $(H, T) = U_T$.

12) $(F, T) +_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset +_R (F, T) = \emptyset_\emptyset$.

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ olsun. $(F, T) +_R (S, \emptyset) = (H, T \cap \emptyset) = (H, \emptyset)$ olup, $\emptyset_\emptyset$ parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme olduğu için, $(H, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $+_R$ işleminin yutan elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

13) $(F, T) +_R U_T = U_T$.

İspat: $U_T = (K, T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha) = U$. $(F, T) +_R (K, T) = (H, T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup T(\alpha) = F'(\alpha) \cup U = U$. Böylece, $(H, T) = U_T$. Yani, $S_T(U)$ kümesi üzerinde $+_R$ işleminin sağ yutan elemanı U_T esnek kümesidir.

14) $U_T +_R (F, T) = (F, T)$.

İspat: $U_T = (K, T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha) = U$. $(K, T) +_R (F, T) = (H, T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = T'(\alpha) \cup F(\alpha) = \emptyset \cup F(\alpha) = F(\alpha)$. Böylece, $(H, T) = (F, T)$. Yani, $S_T(U)$ kümesi üzerinde, $+_R$ işleminin sol birim elemanı U_T esnek kümesidir.

$$15) (F, T) +_R U_M = U_{T \cap M} .$$

İspat: $U_M = (K, M)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in M$ için, $K(\alpha) = U$. $(F, T) +_R (K, M) = (H, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup T(\alpha) = F'(\alpha) \cup U = U$. Böylece, $(H, T \cap M) = U_{T \cap M}$.

$$16) U_M +_R (F, T) = (F, T \cap M).$$

İspat: $U_M = (K, M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in M$ için, $K(\alpha) = U$. $(K, M) +_R (F, T) = (H, M \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in M \cap T$ için, $H(\alpha) = T'(\alpha) \cup F(\alpha) = \emptyset \cup F(\alpha) = F(\alpha)$. Böylece, $(H, M \cap T) = (F, M \cap T)$.

$$17) (F, T) +_R U_E = U_T.$$

İspat: $U_E = (K, E)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in E$ için, $K(\alpha) = U$. $(F, T) +_R (K, E) = (H, T \cap E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap E = T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup K(\alpha) = F'(\alpha) \cup U = U$. Böylece $(H, T) = U_T$.

$$18) U_E +_R (F, T) = (F, T).$$

İspat: $U_E = (K, E)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in E$ için, $K(\alpha) = U$. $(K, E) +_R (F, T) = (H, E \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in E \cap T = T$ için, $H(\alpha) = T'(\alpha) \cup F(\alpha) = \emptyset \cup F(\alpha) = F(\alpha)$. Buradan $(H, T) = (F, T)$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $+_R$ işleminin sol birim elemanı U_E esnek kümesidir.

$$19) (F, T) +_R (F, T)^r = (F, T)^r.$$

İspat: $(F, T)^r = (H, T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha)$. $(F, T) +_R (H, T) = (L, T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $L(\alpha) = F'(\alpha) \cup H(\alpha) = F'(\alpha) \cup F'(\alpha) = F'(\alpha)$. Böylece, $(L, T) = (F, T)^r$. Yani, $+_R$ işlemi için, her esnek kümenin tümleyeni, kendisinin sağ yutan elemanıdır.

$$20) (F, T)^r +_R (F, T) = (F, T).$$

İspat: $(F,T)^r=(H,T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha)=F'(\alpha).(H,T) +_R(F,T)=(L,T \cap T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $T(\alpha)=H'(\alpha) \cup F(\alpha)=F(\alpha) \cup F(\alpha)=F(\alpha)$. Buradan $(L,T)=(F,T)$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $+_R$ işlemi için, her esnek kümenin tümleyeni, kendisinin sol birim elemanıdır.

$$21) [(F,T) +_R(G,Z)]^r=(F,T) \setminus_R (G,Z).$$

İspat: $(F,T)+_R(G,Z)=(H,T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $H(\alpha)=F'(\alpha) \cup G(\alpha)$. $(H,T \cap Z)^r=(K,T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha)=F(\alpha) \cap G'(\alpha)$ olur. Böylece, $(K, T \cap Z)=(F,T) \setminus_R (G,Z)$.

$$22) (F,T) +_R(G,T) = \emptyset_T \Leftrightarrow (F,T) = \cup_T \text{ ve } (G,T) = \emptyset_T.$$

İspat: $(F,T) +_R(G,T) = (K,T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha)= F'(\alpha) \cup G(\alpha)$. $(K,T)=\emptyset_T$ olduğundan, $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha)=\emptyset$. Böylece, $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha)=F'(\alpha) \cup G(\alpha)=\emptyset \Leftrightarrow \forall \alpha \in T$ için, $F'(\alpha)=\emptyset$ ve $G(\alpha)=\emptyset \Leftrightarrow \forall \alpha \in T$ için, $F(\alpha)=U$ ve $G(\alpha)=\emptyset \Leftrightarrow (F,T)=U_T$ ve $(G,T)=\emptyset_T$.

$$23) \emptyset_{T \cap Z} \subseteq (F,T)+_R(G,Z) \text{ ve } (F,T) +_R(G,Z) \subseteq U_T \text{ ve } (F,T) +_R(G,Z) \subseteq U_Z.$$

İspat: Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamasından ispat açıktır.

$$24) (F,T \cap Z)^r \subseteq (F,T) +_R(G,Z) \text{ ve } (G,T \cap Z) \subseteq (F,T) +_R(G,Z).$$

İspat: $(F,T) +_R(G,Z)=(H,T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $H(\alpha)=F' \cup G(\alpha)$ olur. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $F'(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cup G(\alpha) =H(\alpha)$ ve $G(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cup G(\alpha) =H(\alpha)$. Böylece, $(F,T \cap Z)^r \subseteq (F,T) +_R(G,Z)$ ve $(G,T \cap Z) \subseteq (F,T) +_R(G,Z)$.

$$25) (F,T)^r \subseteq (F,T) +_R(G,T) \text{ ve } (G,T) \subseteq (F,T) +_R(G,T).$$

İspat: $(F,T) +_R(G,T)=(H,T \cap T)$ olsun. $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha)=F'(\alpha) \cup G(\alpha)$. Böylece, $\forall \alpha \in T$ için, $F'(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cup G(\alpha)=H(\alpha)$ olduğundan $(F,T)^r \subseteq (F,T) +_R(G,T)$. Benzer şekilde, $G(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cup G(\alpha)=H(\alpha)$ olduğundan $(G,T) \subseteq (F,T) +_R(G,T)$.

26) $(F, T) \subseteq (G, T)$ ise $(G, T) +_R (H, Z) \subseteq (F, T) +_R (H, Z)$ ve $(H, Z) +_R (F, T) \subseteq (H, Z) +_R (G, T)$.

İspat: $(F, T) \subseteq (G, T)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in T$ için, $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ ve böylece $\forall \alpha \in T$ için, $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$ olur. $(G, T) +_R (H, Z) = (K, T \cap Z)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha) = G'(\alpha) \cup H(\alpha)$. $(F, T) +_R (H, Z) = (L, T \cap Z)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $L(\alpha) = F'(\alpha) \cup H(\alpha)$. Buradan, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha) = G'(\alpha) \cup H(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cup H(\alpha) = L(\alpha)$ olup, $(G, T) +_R (H, Z) \subseteq (F, T) +_R (H, Z)$. Ayrıca $\forall \alpha \in Z \cap T$ için, $H'(\alpha) \cup F(\alpha) \subseteq H'(\alpha) \cup G(\alpha)$ olup, $(H, Z) +_R (F, T) \subseteq (H, Z) +_R (G, T)$ olduğu açıktır.

27) $(G, T) +_R (H, Z) \subseteq (F, T) +_R (H, Z)$ ise $(F, T) \subseteq (G, T)$ olmak zorunda değildir. Yani Teorem 3.1.3 (26) nın tersi doğru değildir. Benzer şekilde, $(H, Z) +_R (F, T) \subseteq (H, Z) +_R (G, T)$ ise $(F, T) \subseteq (G, T)$ olmak zorunda değildir.

İspat: Teorem 3.1.3 (26) nın tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $T = \{e_1, e_3\}$, $Z = \{e_1, e_3, e_5\}$ E'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, T) , (G, T) ve (H, Z) , U üzerinde $(F, T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, T) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$, $(H, Z) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_2\})\}$ olarak tanımlanan örnek kümeler olsun. $(G, T) +_R (H, Z) = (L, T \cap Z)$ olmak üzere $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_1, e_3\}$ için, $L(\alpha) = G'(\alpha) \cup H(\alpha)$ olup, $L(e_1) = G'(e_1) \cup H(e_1) = U$, $L(e_3) = G'(e_3) \cup H(e_3) = U$. Buradan, $(G, T) +_R (H, Z) = \{(e_1, U), (e_3, U)\}$. Şimdi de, $(F, T) +_R (H, Z) = (K, T \cap Z)$ olmak üzere $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_1, e_3\}$, $Z = \{e_1, e_3\}$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup H(\alpha)$ olup, $K(e_1) = F'(e_1) \cup H(e_1) = U$, $K(e_3) = F'(e_3) \cup H(e_3) = U$. Böylece, $(F, T) +_R (H, Z) = \{(e_1, U), (e_3, U)\}$. Buradan, $(G, T) +_R (H, Z) \subseteq (F, T) +_R (H, Z)$; fakat $(F, T) \not\subseteq (G, T)$ olmadığı açıktır. Benzer şekilde aynı örnek üzerinde $(H, Z) +_R (F, T) \subseteq (H, Z) +_R (G, T)$ iken $(F, T) \not\subseteq (G, T)$ olmak zorunda olmadığı gösterilebilir.

28) $(F, T) \subseteq (G, T)$ ve $(K, V) \subseteq (L, V)$ ise $(G, T) +_R (K, V) \subseteq (F, T) +_R (L, V)$ ve benzer şekilde $(L, V) +_R (F, T) \subseteq (K, V) +_R (G, T)$.

İspat: $(F, T) \subseteq (G, T)$ ve $(K, V) \subseteq (L, V)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in T$ ve $\forall \alpha \in Z$ için, $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ ve $K(\alpha) \subseteq L(\alpha)$. Böylece $\forall \alpha \in T$ için, $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$ ve $\forall \alpha \in Z$ için, $L'(\alpha) \subseteq K'(\alpha)$. $(G, T) +_R (K, V) = (M, T \cap V)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap V$ için, $M(\alpha) = G'(\alpha) \cup K(\alpha)$. $(F, T) +_R (L, V) = (N, T \cap V)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap V$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cup L(\alpha)$. $\forall \alpha \in T \cap V$ için,

$G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$ ve $K(\alpha) \subseteq L(\alpha)$ olduğundan, $M(\alpha) = G'(\alpha) \cup K(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cup L(\alpha) = N(\alpha)$ olur. Böylece, $(G, T) +_R (K, V) \subseteq (F, T) +_R (L, V)$. Aynı şartlar altında, $\forall \alpha \in V \cap T$ için, $L'(\alpha) \cup F(\alpha) \subseteq K'(\alpha) \cup G(\alpha)$ olduğundan, $(L, V) +_R (F, T) \subseteq (K, V) +_R (G, T)$ sağlandığı benzer şekilde gösterilir.

3.1.4. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış artı işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

3.1.4.1. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış artı işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Artı İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Soldan Dağılması:

$$1) (F, T) +_R [(G, Z) \cap_R (H, M)] = [(F, T) +_R (G, Z)] \cap_R [(F, T) +_R (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Z) \cap_R (H, M) = (R, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $R(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(F, T) +_R (R, Z \cap M) = (N, T \cap (Z \cap M))$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cup R(\alpha)$. Buradan, $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için,

$$N(\alpha) = F'(\alpha) \cup [(G(\alpha) \cap H(\alpha))]$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafını yani $[(F, T) +_R (G, Z)] \cap_R [(F, T) +_R (H, M)]$ ele alalım: $(F, T) +_R (G, Z) = (V, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $V(\alpha) = F'(\alpha) \cup G(\alpha)$. Şimdi $(F, T) +_R (H, M) = (W, T \cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $W(\alpha) = F'(\alpha) \cup H(\alpha)$. $(V, T \cap Z) \cap_R (W, T \cap M) = (S, (T \cap Z) \cap (T \cap M))$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için, $S(\alpha) = V(\alpha) \cap W(\alpha)$ olup,

$$S(\alpha) = [F'(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap [F'(\alpha) \cup H(\alpha)]$$

Buradan, $(N, T \cap Z \cap M) = (S, T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

$$2) (F, T) +_R [(G, Z) \cup_R (H, M)] = [(F, T) +_R (G, Z)] \cup_R [(F, T) +_R (H, M)].$$

$$3) (F, T) +_R [(G, Z) * _R (H, M)] = [(F, T) * _R (G, Z)] \cup_R [(F, T) * _R (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G,Z) * _R (H,M) = (R, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $R(\alpha) = G'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(F,T) + _R (R, Z \cap M) = (N, T \cap (Z \cap M))$ olsun, $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cup R(\alpha)$. Buradan, $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için,

$$N(\alpha) = F'(\alpha) \cup [(G'(\alpha) \cup H'(\alpha))]$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafını yani $[(F,T) * _R (G,Z)] \cup _R [(F,T) * _R (H,M)]$ ele alalım: $(F,T) * _R (G,Z) = (V, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $V(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$. $(F,T) * _R (H,M) = (W, T \cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $W(\alpha) = F'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(V, T \cap Z) \cup _R (W, T \cap M) = (S, (T \cap Z) \cap (T \cap M))$ olsun. Buradan $(V, T \cap Z) \cup _R (W, T \cap M) = (S, (T \cap Z) \cap (T \cap M))$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için, $S(\alpha) = V(\alpha) \cup W(\alpha)$ olup,

$$S(\alpha) = [F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)]$$

Buradan, $(N, T \cap Z \cap M) = (S, T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

$$4) (F,T) + _R [(G,Z) \theta _R (H,M)] = [(F,T) * _R (G,Z)] \cap _R [(F,T) * _R (H,M)].$$

ii) Kısıtlanmış Artı İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F,T) \cup _R (G,Z)] + _R (H,M) = [(F,T) + _R (H,M)] \cap _R [(G,Z) + _R (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım: $(F,T) \cup _R (G,Z) = (R, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $R(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$. $(R, T \cap Z) + _R (H,M) = (N, (T \cap Z) \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$ için, $N(\alpha) = R'(\alpha) \cup H(\alpha)$. Buradan,

$$N(\alpha) = [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup H(\alpha)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) + _R (H,M)] \cap _R [(G,Z) + _R (H,M)]$ bakalım. $(F,T) + _R (H,M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $T(\alpha) = F'(\alpha) \cup H(\alpha)$. $(G,Z) + _R (H,M) = (K, Z \cap M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $K(\alpha) = G'(\alpha) \cup H(\alpha)$. $(S, T \cap Z) \cap _R (K, Z \cap M) = (L, (T \cap Z) \cap (Z \cap M))$ olup, $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap (Z \cap M)$ için, $L(\alpha) = S(\alpha) \cap K(\alpha)$. Buradan,

$$L(\alpha) = [F'(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cup H(\alpha)]$$

Buradan, $(N, T \cap Z \cap M) = (L, T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

$$2) [(F, T) \cap_R (G, Z)] +_R (H, M) = [(F, T) +_R (H, M)] \cup_R [(G, Z) +_R (H, M)].$$

$$3) [(F, T) \theta_R (G, Z)] +_R (H, M) = [(F, T) \cup_R (H, M)] \cup_R [(G, Z) \cup_R (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım: $(F, T) \theta_R (G, Z) = (R, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $R(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$. $(R, T \cap Z) +_R (H, M) = (N, (T \cap Z) \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$ için, $N(\alpha) = R'(\alpha) \cup H(\alpha)$. Buradan,

$$N(\alpha) = [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup H(\alpha)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) \cup_R (H, M)] \cup_R [(G, Z) \cup_R (H, M)]$ bakalım: $(F, T) \cup_R (H, M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $T(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$. $(G, Z) \cup_R (H, M) = (K, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $K(\alpha) = G(\alpha) \cup H(\alpha)$. $(S, T \cap Z) \cup_R (K, Z \cap M) = (L, (T \cap Z) \cap (Z \cap M))$ olup $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap (Z \cap M)$ için, $L(\alpha) = S(\alpha) \cap K(\alpha)$. Buradan,

$$L(\alpha) = [F(\alpha) \cup H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cup H(\alpha)]$$

Buradan, $(N, T \cap Z \cap M) = (L, T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

$$4) [(F, T) * _R (G, Z)] +_R (H, M) = [(F, T) \cup_R (H, M)] \cap_R [(G, Z) \cup_R (H, M)].$$

3.1.4.2. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış artı işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılımı mevcuttur.

i) Kısıtlanmış Artı İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılımı:

$$1) (F, T) +_R [(G, Z) \cap_\epsilon (H, M)] = [(F, T) +_R (G, Z)] \cap_\epsilon [(F, T) +_R (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Z) \cap_\epsilon (H, M) = (R, Z \cup M)$ olup, $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T)+_R(R,Z \cup M) = (N,(T \cap (Z \cup M)))$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap (Z \cup M)$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cup R(\alpha)$. Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M-Z) = T \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım: $[(F,T)+_R(G,Z)] \cap_\epsilon [(F,T)+_R(H,M)]$. $(F,T)+_R(G,Z) = (K,T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup G(\alpha)$. $(F,T)+_R(H,M) = (S,T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $S(\alpha) = F'(\alpha) \cup H(\alpha)$. Sonra, $(K,T \cap Z) \cap_\epsilon (S,T \cap M) = (L,(T \cap Z) \cup (T \cap M))$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup (T \cap M)$ için,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) = T \cap (Z-M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (T \cap Z) = T \cap (M-Z) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap [F'(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece, $(N, T \cap (Z \cup M)) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) (F,T) +_R[(G,Z) \cup_\epsilon (H,M)] = [(F,T)+_R(G,Z)] \cup_\epsilon [(F,T) +_R(H,M)].$$

ii) Kısıtlanmış Artı İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılıması:

$$1) [(F,T) \cup_\epsilon (G,Z)] +_R(H,M) = [(F,T)+_R(H,M)] \cap_\epsilon [(G,Z) +_R(H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F,T) \cup_\epsilon (G,Z) = (R,T \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup Z$ için,

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R,T \cup Z) +_R(H,M) = (N,(T \cup Z) \cap M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap M$ için, $N(\alpha) = R'(\alpha) \cup H(\alpha)$.

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z-T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) +_R (H,M)] \cap_\varepsilon [(G,Z) +_R (H,M)]$ bakalım. $(F,T) +_R (H,M) = (K, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup H(\alpha)$. $(G,Z) +_R (H,M) = (S, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $S(\alpha) = G'(\alpha) \cup H(\alpha)$. O halde, $(K, T \cap M) \cap_\varepsilon (S, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olsun. Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) = (T-Z) \cap M \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - (T \cap M) = (Z-T) \cap M \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ [F'(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece, $(N, (T \cup Z) \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) [(F,T) \cap_\varepsilon (G,Z)] +_R (H,M) = [(F,T) +_R (H,M)] \cup_\varepsilon [(G,Z) +_R (H,M)].$$

3.1.4.3. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış artı işleminin tümleyenli genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur.

i) Kısıtlanmış Artı İşleminin Tümleyenli Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılması:

$$1) (F,T) +_R [(G,Z) \overset{*}{*}_\varepsilon (H,M)] = [(F,T) \overset{*}{*}_R (G,Z)] \cup_\varepsilon [(F,T) \overset{*}{*}_R (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G,Z) \overset{*}{*}_\varepsilon (H,M) = (R, Z \cup M)$ olsun. Burada

$\forall \alpha \in Z \cup M$ için,

$$R(\alpha) = \begin{cases} G'(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H'(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) +_R (R, Z \cup M) = (N, (T \cap (Z \cup M)))$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap (Z \cup M)$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cup R(\alpha)$.

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap (M - Z) = T \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) = (K, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$. $(F, T) *_{\mathcal{R}} (H, M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $S(\alpha) = F'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(K, T \cap Z) \cup_{\varepsilon} (S, T \cap M) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup (T \cap M)$ için,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) = T \cap (Z - M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (T \cap Z) = T \cap (M - Z) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece, $(N, (T \cap (Z \cup M))) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) (F, T) +_{\mathcal{R}} [(G, Z) \overset{*}{\theta}_{\varepsilon} (H, M)] = [(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z)] \cap_{\mathcal{R}} [(F, T) *_{\mathcal{R}} (H, M)].$$

ii) Kısıtlanmış Artı İşleminin Tümlleyenli Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F, T) \overset{*}{\theta}_{\varepsilon} (G, Z)] +_{\mathcal{R}} (H, M) = [(F, T) \cup_{\mathcal{R}} (G, Z)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \cup_{\mathcal{R}} (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, T) \overset{*}{\theta}_{\varepsilon} (G, Z) = (R, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G'(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) +_{\mathcal{R}} (H, M) = (N, (T \cup Z) \cap M)$ olsun. O halde, $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap M$ için, $N(\alpha) = R'(\alpha) \cup H(\alpha)$.

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z - T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) \cup_{\mathcal{R}} (G, Z)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \cup_{\mathcal{R}} (H, M)]$ bakalım: $(F, T) \cup_{\mathcal{R}} (H, M) = (K, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $K(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$. $(G, Z) \cup_{\mathcal{R}} (H, M) = (S, Z \cap M)$ olsun. Şimdi $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $S(\alpha) = G(\alpha) \cup H(\alpha)$. $(K, T \cap M) \cup_{\varepsilon} (S, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$

olsun. Buradan $\forall \alpha \in (T \cap M) \cup (Z \cap M)$ için,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) = (T - Z) \cap M \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - (T \cap M) = (Z - T) \cap M \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece, $(N, (T \cup Z) \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) [(F, T) \overset{*}{\underset{\varepsilon}{*}} (G, Z)] +_R (H, M) = [(F, T) \cup_R (G, Z)] \cap_{\varepsilon} [(G, Z) \cup_R (H, M)].$$

3.1.4.4. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış artı işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Artı İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Soldan Dağılımı:

$$1) (F, T) +_R [(G, Z) \overset{\sim}{\cap} (H, M)] = [(F, T) +_R (G, Z)] \overset{\sim}{\cap} [(F, T) +_R (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Z) \overset{\sim}{\cap} (H, M) = (R, Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) +_R (R, Z) = (N, T \cap Z)$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in T \cap Z$; $N(\alpha) = F'(\alpha) \cup R(\alpha)$.

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) +_R (G, Z)] \overset{\sim}{\cap} [(F, T) +_R (H, M)]$ bakalım. $(F, T) +_R (G, Z) = (K, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$; $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup G(\alpha)$. $(F, T) +_R (H, M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$; $S(\alpha) = F'(\alpha) \cup H(\alpha)$. $(K, T \cap Z) \overset{\sim}{\cap} (S, T \cap M) = (L, T \cap Z)$ olup, $\forall \alpha \in T \cap Z$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) = T \cap (Z - M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ [F'(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap [F'(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece $(N, T \cap Z) = (L, T \cap Z)$ olduğu görülür.

$$2) (F, T) +_R [(G, Z) \sim (H, M)] = [(F, T) +_R (G, Z)] \sim [(F, T) +_R (H, M)].$$

ii) Kısıtlanmış Artı İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F, T) \sim (G, Z)] +_R (H, M) = [(F, T) +_R (H, M)] \sim [(G, Z) +_R (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, T) \sim (G, Z) = (R, T)$ olur. Burada $\forall \alpha \in T$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T) +_R (H, M) = (N, T \cap M)$ olup, $\forall \alpha \in T \cap M$; $N(\alpha) = R'(\alpha) \cup H(\alpha)$.

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) +_R (H, M)] \sim [(G, Z) +_R (H, M)]$ bakalım. $(F, T) +_R (H, M) = (K, T \cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap M$; $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup H(\alpha)$. $(G, Z) +_R (H, M) = (S, Z \cap M)$ olsun.

Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$; $S(\alpha) = G'(\alpha) \cup H(\alpha)$. $(K, T \cap M) \sim (S, Z \cap M) = (L, T \cap M)$ olup, $\forall \alpha \in T \cap M$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) = (T - Z) \cap M \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece $(N, T \cap M) = (L, T \cap M)$ olduğu görülür.

$$2) [(F, T) \underset{\cap}{\sim} (G, Z)] +_R (H, M) = [(F, T) +_R (H, M)] \underset{\cup}{\sim} [(G, Z) +_R (H, M)].$$

3.2. Genişletilmiş Artı İşlemi ve Özellikleri

3.2.1. Tanım (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin $(F, T) +_\varepsilon (G, Z)$ ile gösterilen genişletilmiş artı işlemi $C = T \cup Z$ ve $\forall \alpha \in C$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

olmak üzere $(F, T) +_\varepsilon (G, Z) = (H, C)$ ile tanımlanır.

3.2.2. Örnek $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $T = \{e_1, e_3\}$, $Z = \{e_2, e_3, e_4\}$ E 'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde $(F, T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, Z) = \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, T) +_\varepsilon (G, Z) = (H, T \cup Z)$ olmak üzere, $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Burada $T \cup Z = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve $T - Z = \{e_1\}$, $Z - T = \{e_2, e_4\}$, $T \cap Z = \{e_3\}$ olmak üzere, $H(e_1) = F(e_1) = \{h_2, h_5\}$, $H(e_2) = G(e_2) = \{h_1, h_4, h_5\}$, $H(e_4) = G(e_4) = \{h_3, h_5\}$, $H(e_3) = F'(e_3) \cup G(e_3) = \{h_3, h_4\} \cup \{h_2, h_3, h_4\} = \{h_2, h_3, h_4\}$. Böylece, $(F, T) +_\varepsilon (G, Z) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$.

3.2.3. Not $S_A(U)$ kümesi üzerinde kısıtlanmış artı ve genişletilmiş artı işlemleri çakışıkır. Yani, parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler için, $(F, A) +_\varepsilon (G, A) = (F, A) +_R (G, A)$.

3.2.4. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $+_\varepsilon$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $+_\varepsilon$ işleminin $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$+_\varepsilon: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((F,T), (G,Z)) \rightarrow (F,T) +_\varepsilon (G,Z) = (H, T \cup Z)$$

olup, (F,T) ve (G,Z) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F,T) +_\varepsilon (G,Z)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir.

$$2) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise, } [(F,T) +_\varepsilon (G,Z)] +_\varepsilon (H,M) = (F,T) +_\varepsilon [(G,Z) +_\varepsilon (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,T) +_\varepsilon (G,Z) = (S, T \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup Z$ için,

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(S, T \cup Z) +_\varepsilon (H, M) = (N, (T \cup Z) \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup M$ için,

$$N(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cup M) \\ S'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T - Z) - M = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z - T) - M = T' \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z - T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(G,Z) +_\varepsilon (H,M) = (R, Z \cup M)$ olsun. $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) +_\varepsilon (R, Z \cup M) = (L, (T \cup (Z \cup M)))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup Z \cup M$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) \\ R(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) - T \\ F'(\alpha) \cup R(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z - M) - T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M - Z) - T = T' \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - T = T' \cap Z \cap M \\ F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M - Z) = T \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada $T \cap Z \cap M = \emptyset$ için $(N, (T \cup Z) \cup M) = (L, T \cup (Z \cup M))$ olduğu görülür. Yani uygun koşullar altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $+_\varepsilon$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$3) [(F, T) +_\varepsilon (G, T)] +_\varepsilon (H, T) \neq (F, T) +_\varepsilon [(G, T) +_\varepsilon (H, T)].$$

İspat: İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (3)' den elde edilir. Yani, T, E nin sabit bir alt kümesi olmak üzere $S_T(U)$ kümesi üzerinde $+_\varepsilon$ işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F, T) +_\varepsilon (G, Z) \neq (G, Z) +_\varepsilon (F, T).$$

İspat: $(F, T) +_\varepsilon (G, Z) = (H, T \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup Z$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(G, Z) +_\varepsilon (F, T) = (S, Z \cup T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in Z \cup T$ için,

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G'(\alpha) \cup F(\alpha) & \alpha \in Z \cap T \end{cases}$$

Böylece, $(F, T) +_\varepsilon (G, Z) \neq (G, Z) +_\varepsilon (F, T)$. Eğer, $Z \cap T = \emptyset$ ise $(F, T) +_\varepsilon (G, Z) = (G, Z) +_\varepsilon (F, T)$. Buradan, $(F, T) +_\varepsilon (G, T) \neq (G, T) +_\varepsilon (F, T)$ olduğu açıktır. Yani, $S_E(U)$ ve $S_T(U)$ kümeleri üzerinde $+_\varepsilon$ işleminin değişme özelliği yoktur.

$$5) (F, T) +_\varepsilon (F, T) = U_T.$$

İspat: İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (5)'den elde edilir. Yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde $+_\varepsilon$ işlemi denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

$$6) (F,T) +_\varepsilon \emptyset_T = (F,T)^r.$$

İspat: İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (6)'den elde edilir.

$$7) \emptyset_T +_\varepsilon (F,T) = U_T.$$

İspat: İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (7)'den elde edilir.

$$8) (F,T) +_\varepsilon \emptyset_\emptyset = (F,T).$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S,\emptyset)$ ve $(F,T) +_\varepsilon (S,\emptyset) = (H,T \cup \emptyset)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup \emptyset = T$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - \emptyset = T \\ S(\alpha) & \alpha \in \emptyset - T = \emptyset \\ F'(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in T \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Böylece, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F(\alpha)$ olup, $(H,T) = (F,T)$.

$$9) \emptyset_\emptyset +_\varepsilon (F,T) = (F,T).$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S,\emptyset)$ ve $(S,\emptyset) +_\varepsilon (F,T) = (H, \emptyset \cup T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in \emptyset \cup T = T$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) & \alpha \in \emptyset - T = \emptyset \\ F(\alpha) & \alpha \in T - \emptyset = T \\ S'(\alpha) \cup F(\alpha) & \alpha \in \emptyset \cap T = \emptyset \end{cases}$$

Böylece, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F(\alpha)$ olup, $(H,T) = (F,T)$.

Teorem 3.2.4 (8) ve (9) dan, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $+_\varepsilon$ işleminin birim elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir. Klasik küme teorisinde, $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ ve $B = \emptyset$ olduğundan, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, (F,T) esnek kümesi için, $(F,T) +_\varepsilon (G,K) = (G,K) +_\varepsilon (F,T) = \emptyset_\emptyset$ olacak şekilde $(G,K) \in S_E(U)$ bulamayız; çünkü bu durum $T \cup K = \emptyset$ olmasını ve dolayısıyla $T = \emptyset$ ve $K = \emptyset$ olmasını gerektirir. Kabulümüz gereği, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\emptyset_\emptyset$ haricinde hiçbir esnek

küme boş parametreye sahip olmadığından, buradan birim elemen olan $\emptyset_\emptyset$ haricinde hiçbir elemanın, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $+_\varepsilon$ işlemine göre tersinin olmadığı sonucu çıkartırız.

3.2.5. *Sonuç* Teorem 3.2.4 (1), (2), (4), (8) ve (9)'dan, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında, $(S_E(U), +_\varepsilon)$ birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoiddir. $A \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, $(S_A(U), +_\varepsilon)$ cebirsel yapısı birleşme özelliğine sahip olmadığı için yarıgrup olamaz.

$$10) (F,T) +_\varepsilon U_T = U_T.$$

İspat: İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (13)'den elde edilir. Yani, U_T esnek kümesi, $+_\varepsilon$ işleminin, $S_T(U)$ kümesi üzerinde sağ yutan elemanıdır.

$$11) U_T +_\varepsilon (F,T) = (F,T).$$

İspat: İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (14)'den elde edilir. Yani, U_T esnek kümesi, $+_\varepsilon$ işleminin $S_T(U)$ kümesi üzerinde sol birim elemanıdır.

$$12) (F,T) +_\varepsilon U_E = U_E.$$

İspat: $U_E = (T,E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in E$ için, $T(\alpha) = U$. $(F,T) +_\varepsilon (T,E) = (H, T \cup E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup E = E$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - E \\ T(\alpha) & \alpha \in E - T \\ F'(\alpha) \cup T(\alpha) & \alpha \in T \cap E \end{cases}$$

Buradan,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - E = \emptyset \\ U & \alpha \in E - T = T' \\ U & \alpha \in T \cap E = T \end{cases}$$

Böylece, $\forall \alpha \in E$ için, $H(\alpha) = U$ olup, $(H,E) = U_E$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $+_\varepsilon$ işleminin sağ yutan elemanı U_E esnek kümesidir. Burada, $U_E +_\varepsilon (F,T) \neq U_E$ olduğu, yani $S_E(U)$

kümesi üzerinde, $+_{\varepsilon}$ işleminin sol yutan elemanın U_E esnek kümesi olmadığı açıktır. Gerçekten, $U_E=(T,E)$ olmak üzere, $(T,E) +_{\varepsilon}(F,T) = (K,T \cup E)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup E = E$ için,

$$K(\alpha) = \begin{cases} T(\alpha) & \alpha \in E-T \\ F(\alpha) & \alpha \in T-E \\ T'(\alpha) \cup F(\alpha) & \alpha \in E \cap T \end{cases}$$

Buradan,

$$K(\alpha) = \begin{cases} U & \alpha \in E-T = T' \\ F(\alpha) & \alpha \in T-E = \emptyset \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap E = T \end{cases}$$

Böylece, $(K,E) \neq U_E$.

$$13) (F,T) +_{\varepsilon} (F,T)^r = (F,T)^r.$$

İspat: İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (19)'den elde edilir. Yani, her esnek kümenin tümleyeni, $+_{\varepsilon}$ işlemi için, kendisinin sağ yutan elemanıdır.

$$14) (F,T)^r +_{\varepsilon} (F,T) = (F,T).$$

İspat: İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (20)'den elde edilir. Yani, her esnek kümenin tümleyeni, $+_{\varepsilon}$ işlemi için, kendisinin sol birim elemanıdır.

$$15) [(F,T) +_{\varepsilon} (G,Z)]^r = (F,T) \overset{*}{\sim} (G,Z).$$

İspat: $(F,T) +_{\varepsilon} (G,Z) = (H,T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$ için;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(H,T \cup Z)^r = (K,T \cup Z)$ olup, $\forall \alpha \in T \cup Z$ için;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G'(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan, $(K, T \cup Z) = (F, T) \overset{*}{\sim} (G, Z)$.

$$16) (F, T) +_{\varepsilon} (G, T) = \emptyset_T \Leftrightarrow (F, T) = \cup_T \text{ ve } (G, T) = \emptyset_T.$$

İspat: İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (22)'den elde edilir.

$$17) \emptyset_T \subseteq (F, T) +_{\varepsilon} (G, Z), \emptyset_Z \subseteq (F, T) +_{\varepsilon} (G, Z), \emptyset_Z \subseteq (G, Z) +_{\varepsilon} (F, T), \emptyset_T \subseteq (G, Z) +_{\varepsilon} (F, T). \\ \text{Ayrıca, } (F, T) +_{\varepsilon} (G, Z) \subseteq U_{T \cup Z} \text{ ve } (G, Z) +_{\varepsilon} (F, T) \subseteq U_{Z \cup T}.$$

İspat: Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamasından ispat açıktır.

$$18) (F, T)^{\Gamma} \subseteq (F, T) +_{\varepsilon} (G, T) \text{ ve } (G, T) \subseteq (F, T) +_{\varepsilon} (G, T).$$

İspat: İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (25)'den elde edilir.

$$19) (F, T) \subseteq (G, T) \text{ ise } (G, T) +_{\varepsilon} (H, T) \subseteq (F, T) +_{\varepsilon} (H, T) \text{ ve } (H, Z) +_{\varepsilon} (F, T) \subseteq (H, Z) +_{\varepsilon} (G, T).$$

İspat: $(F, T) \subseteq (G, T)$ ise $(G, T) +_{\varepsilon} (H, T) \subseteq (F, T) +_{\varepsilon} (H, T)$ olduğu, İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (26) ve (27)'den elde edilir. $(F, T) \subseteq (G, T)$ ise $(G, T) +_{\varepsilon} (H, T) \subseteq (F, T) +_{\varepsilon} (H, T)$ olduğu, İspat, Not 4.2.3 ve Teorem 4.1.3 (25) ve (26)'den elde edilir. $(F, T) \subseteq (G, T)$ olsun. $\forall \alpha \in T$ için, $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$. $(H, Z) +_{\varepsilon} (F, T) = (Y, Z \cup T)$ olsun. $\forall \alpha \in Z \cup T$ için;

$$Y(\alpha) = \begin{cases} H(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ H'(\alpha) \cup F(\alpha) & \alpha \in Z \cap T \end{cases}$$

$(H, Z) +_{\varepsilon} (G, T) = (W, Z \cup T)$ olsun. $\forall \alpha \in Z \cup T$ için;

$$W(\alpha) = \begin{cases} H(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ G(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ H'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in Z \cap T \end{cases}$$

$\alpha \in Z - T$ ise, $Y(\alpha) = H(\alpha)$ ve $W(\alpha) = H(\alpha)$ olup, $Y(\alpha) = H(\alpha) \subseteq H(\alpha) = W(\alpha)$; $\alpha \in T - Z$ ise, $Y(\alpha) = F(\alpha)$ ve $W(\alpha) = G(\alpha)$ olup, $Y(\alpha) = F(\alpha) \subseteq G(\alpha) = W(\alpha)$; $\alpha \in T \cap Z$ ise, $Y(\alpha) = H'(\alpha) \cup F(\alpha)$ ve $W(\alpha) = H'(\alpha) \cup G(\alpha)$ olup, $Y(\alpha) = H'(\alpha) \cup F(\alpha) \subseteq H'(\alpha) \cup G(\alpha) = W(\alpha)$ olup,

$\forall \alpha \in Z \cup T$ için $Y(\alpha) \subseteq W(\alpha)$. Böylece, $(H, Z) +_{\varepsilon}(F, T) \subseteq (H, Z) +_{\varepsilon}(G, T)$.

20) $(H, Z) +_{\varepsilon}(F, T) \subseteq (H, Z) +_{\varepsilon}(G, T)$ ise $(F, T) \subseteq (G, T)$ olmak zorunda değildir. Benzer şekilde, $(G, T) +_{\varepsilon}(H, T) \subseteq (F, T) +_{\varepsilon}(H, T)$ ise $(F, T) \subseteq (G, T)$.

İspat: $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ parametre kümesi, $T = \{e_1, e_3\}$, $Z = \{e_1, e_3, e_5\}$ E 'nin alt kümeleri $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, T) , (G, T) ve (H, Z) , U üzerinde $(F, T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, T) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$, $(H, Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_2\})\}$ olarak tanımlanan esnek kümeler olsun. $(H, Z) +_{\varepsilon}(F, T) = (L, Z \cup T)$ olmak üzere $\forall \alpha \in Z \cup T = \{e_1, e_3, e_5\}$ için, $L(e_1) = H'(e_1) \cup F(e_1) = U$, $L(e_3) = H'(e_3) \cup F(e_3) = U$, $L(e_5) = H(e_5) = \{h_2\}$. Buradan, $(H, Z) +_{\varepsilon}(F, T) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_2\})\}$. Şimdi de, $(H, Z) +_{\varepsilon}(G, T) = (W, Z \cup T)$ olmak üzere $\forall \alpha \in Z \cup T = \{e_1, e_3, e_5\}$ için, $W(e_1) = H'(e_1) \cup G(e_1) = U$, $W(e_3) = H'(e_3) \cup G(e_3) = U$, $W(e_5) = H(e_5) = \{h_2\}$. Böylece $(H, Z) +_{\varepsilon}(G, T) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_2\})\}$. Buradan, $(H, Z) +_{\varepsilon}(F, T) \subseteq (H, Z) +_{\varepsilon}(G, T)$ fakat $(F, T) \subseteq (G, T)$ olmadığı açıktır. $(G, T) +_{\varepsilon}(H, T) \subseteq (F, T) +_{\varepsilon}(H, T)$ ise $(F, T) \subseteq (G, T)$ olmak zorunda olmadığını, aynı örnek üzerinde $(H, T) = \{(e_1, U), (e_3, U)\}$ seçilerek gösterilebilir.

21) $(F, T) \subseteq (G, T)$ ve $(K, T) \subseteq (L, T)$ ise $(G, T) +_{\varepsilon}(K, T) \subseteq (F, T) +_{\varepsilon}(L, T)$ ve buradan $(L, T) +_{\varepsilon}(F, T) \subseteq (K, T) +_{\varepsilon}(G, T)$.

İspat: İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (28)'den elde edilir.

Teorem 3.2.6 (F, T) , (G, Z) , (H, M) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş artı işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

3.2.6.1. Teorem (F, T) , (G, Z) , (H, M) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş artı işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Genişletilmiş Artı İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Soldan Dağılımı

1) Eğer $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ ise $(F, T) +_{\varepsilon}[(G, Z) \cup_R (H, M)] = [(F, T) +_{\varepsilon}(G, Z)] \cup_R [(F, T) +_{\varepsilon}(H, M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Z) \cup_R (H, M) = (M, Z \cap M)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in Z \cap M$; $M(\alpha) = G(\alpha) \cup H(\alpha)$. $(F, T) +_{\varepsilon}(M, Z \cap M) = (N, T \cup (Z \cap M))$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup (Z \cap M)$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cap M) \\ M(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - T \\ F'(\alpha) \cup M(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cap M) \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - T \\ F'(\alpha) \cup [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) +_{\varepsilon}(G, Z)] \cup_R [(F, T) +_{\varepsilon}(H, M)]$ bakalım.

$(F, T) +_{\varepsilon}(G, Z) = (M, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) +_{\varepsilon}(H, M) = (K, T \cup M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - T \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(M, T \cup Z) \cup_R (K, T \cup M) = (W, (T \cup Z) \cap (T \cup M))$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M)$ için $W(\alpha) = T(\alpha) \cap K(\alpha)$,

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup F(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap (T - M) = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap (M - T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup [F'(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T - Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup F(\alpha) & \alpha \in (Z - T) \cap (T - M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z - T) \cap (M - T) = T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \cup [F'(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (Z - T) \cap (T \cap M) = \emptyset \\ [F'(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup F(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T - M) = T \cap Z \cap M' \\ [F'(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (M - T) = \emptyset \\ [F'(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup [F'(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ U & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ U & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki $T-(Z \cap M)$ 'yi ele alırsak, $T-(Z \cap M) = T-(Z \cap M)'$ olup, bir eleman $(Z \cap M)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $Z-M$ de, ya $M-Z$ de, ya da $Z \cup M$ nin tümleyenindedir. Buradan, $\alpha \in T-(Z \cap M)$ ise $\alpha \in T \cap Z \cap M'$ veya $\alpha \in T \cap Z' \cap M$ veya $\alpha \in T \cap Z' \cap M'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M' = \emptyset$ için yani $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ ise N ve W $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ ise N ve W fonksiyonları birbirine eşit olur.

$$2) T \cap (Z \Delta M) = \emptyset \text{ ise } (F, T) +_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_R (H, M)] = [(F, T) +_{\varepsilon} (G, Z)] \cap_R [(F, T) +_{\varepsilon} (H, M)].$$

ii) Genişletilmiş Artı İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Sağdan Dağılımı

$$1) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise, } [(F, T) \cap_R (G, Z)] +_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) +_{\varepsilon} (H, M)] \cap_R [(G, Z) +_{\varepsilon} (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, T) \cap_R (G, Z) = (R, T \cap Z)$ olsun. Buradan da $\forall \alpha \in T \cap Z; R(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$. $(R, T \cap Z) +_{\varepsilon} (H, M) = (L, (T \cap Z) \cup M)$ olsun. $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup M$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cap Z) \\ R'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cap Z) \\ [F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) +_{\varepsilon} (H, M)] \cap_R [(G, Z) +_{\varepsilon} (H, M)]$ bakalım. Burada $(F, T) +_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - T \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G, Z) +_{\varepsilon} (H, M) = (K, Z \cup M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(S, T \cup Z) \cap_R (K, Z \cup M) = (W, (T \cup Z) \cap (Z \cup M))$ olsun. $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap (Z \cup M)$; $W(\alpha) = S(\alpha) \cap K(\alpha)$,

$W(\alpha) =$	$F(\alpha) \cap G(\alpha)$	$\alpha \in (T-M) \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M'$
	$F(\alpha) \cap H(\alpha)$	$\alpha \in (T-M) \cap (M-Z) = \emptyset$
	$F(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cup H(\alpha)]$	$\alpha \in (T-M) \cap (Z \cap M) = \emptyset$
	$H(\alpha) \cap G(\alpha)$	$\alpha \in (M-T) \cap (Z-M) = \emptyset$
	$H(\alpha) \cap H(\alpha)$	$\alpha \in (M-T) \cap (M-Z) = T' \cap Z' \cap M$
	$H(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cup H(\alpha)]$	$\alpha \in (M-T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M$
	$[F'(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap G(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M) \cap (Z-M) = \emptyset$
	$[F'(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap H(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M) \cap (M-Z) = T \cap Z' \cap M$
	$[F'(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cup H(\alpha)]$	$\alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M$

Buradan,

$W(\alpha) =$	$F(\alpha) \cap G(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z \cap M'$
	$H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z' \cap M$
	$H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M$
	$H(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M$
	$[F'(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cup H(\alpha)]$	$\alpha \in T \cap Z \cap M$

Burada; L fonksiyonundaki, $M-(T \cap Z)$ yi ele alırsak, $M-(T \cap Z) = M \cap (T \cap Z)'$ olup, bir eleman $(T \cap Z)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $T-Z$ de, ya $Z-T$ de ya da $T \cup Z$ nin tümleyenindedir. Burdan, $\alpha \in M-(T \cap Z)$ ise $\alpha \in M \cap T \cap Z'$ veya $\alpha \in M \cap Z \cap T'$ veya $\alpha \in M \cap T' \cap Z'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı ile $L=W$ sağlanır.

$$2) T \cap Z \cap M = (T \Delta Z) \cap M = \emptyset; [(F, T) \cup_R (G, Z)] +_\varepsilon (H, M) = [(F, T) +_\varepsilon (H, M)] \cup_R [(G, Z) +_\varepsilon (H, M)].$$

3.2.6.1.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_R)$ cebirsel yapısının birimi U_E olan komutatif ve idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 3.2.5 'de $(S_E(U), +_\varepsilon)$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, komutatif olmayan ve idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, üstelik Teorem 3.2.4 (12) de, $(F, A) +_\varepsilon U_E = U_E$, yani U_E nin $S_E(U)$ kümesi üzerinde $+_\varepsilon$ işlemi altında, sağ yutan eleman olduğu ve Teorem 3.2.6.1 (i) (2) başlığında, $+_\varepsilon$ işleminin $\cap_R$ işlemine $T \cap Z \cap M = (T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartları altında soldan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_R, +_\varepsilon)$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimli ve sıfırlı (sol) yakın yarı-halkadır. Ayrıca,

$U_E +_\epsilon (F, A) \neq U_E$, olduğundan, $(S_E(U), \cap_R, +_\epsilon)$ sıfır simetrik olmayan bir (sol) yakın yarı-halkadır.

3.2.6.1.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_R)$ cebirsel yapısının birimi U_E olan komutatif, idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 3.2.5 'de $(S_E(U), +_\epsilon)$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, komutatif olmayan, idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 3.2.6.1 (i) (2) başlığında, $+_\epsilon$ işleminin $\cap_R$ işlemine $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 3.2.6.1 (ii) (1) başlığında, $+_\epsilon$ işleminin $\cap_R$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_R, +_\epsilon)$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

3.2.6.1.3. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_E$ olan komutatif, idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 3.2.5 'de $(S_E(U), +_\epsilon)$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, komutatif olmayan, idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 3.2.6.1 (i) (1) başlığında, $+_\epsilon$ işleminin $\cup_R$ işlemine $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 3.2.6.1 (ii) (2) başlığında, $+_\epsilon$ işleminin $\cup_R$ işlemine $T \cap Z \cap M = (T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartları ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = (T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_R, +_\epsilon)$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

3.2.6.2. Teorem (F, T) , (G, Z) , (H, M) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş artı işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Genişletilmiş Artı İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılması

1) $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ olmak üzere, $(F, T) +_\epsilon [(G, Z) \cup_\epsilon (H, M)] = [(F, T) +_\epsilon (G, Z)] \cup_\epsilon [(F, T) +_\epsilon (H, M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(G,Z) \cup_{\varepsilon} (H,M) = (R,Z \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$M(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) +_{\varepsilon} (R,Z \cup M) = (N,(T \cup (Z \cup M)))$ bakalım. $\forall \alpha \in T \cup (Z \cup M)$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) \\ M(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) - T \\ F'(\alpha) \cup M(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z - M) - T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M - Z) - T = T' \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - T = T' \cap Z \cap M \\ F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M - Z) = T \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cup [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) +_{\varepsilon} (G,Z)] \cup_{\varepsilon} [(F,T) +_{\varepsilon} (H,M)]$ bakalım. Burada $(F,T) +_{\varepsilon} (G,Z) = (K,T \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F,T) +_{\varepsilon} (H,M) = (S,T \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - T \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K,T \cup Z) \cup_{\varepsilon} (S,T \cup M) = (L,(T \cup Z) \cup (T \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) - (T \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) - (T \cup Z) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$F(\alpha)$	$\alpha \in (T-Z) - (T \cup M) = \emptyset$
$G(\alpha)$	$\alpha \in (Z-T) - (T \cup M) = T' \cap Z \cap M'$
$F'(\alpha) \cup G(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap Z) - (T \cup M) = \emptyset$
$F(\alpha)$	$\alpha \in (T-M) - (T \cup Z) = \emptyset$
$H(\alpha)$	$\alpha \in (M-T) - (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M$
$F'(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M) - (T \cup Z) = \emptyset$
$F(\alpha) \cup F(\alpha)$	$\alpha \in (T-Z) \cap (T-M) = T \cap Z' \cap M'$
$L(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (T-Z) \cap (M-T) = \emptyset$
$F(\alpha) \cup [F'(\alpha) \cup H(\alpha)]$	$\alpha \in (T-Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M$
$G(\alpha) \cup F(\alpha)$	$\alpha \in (Z-T) \cap (T-M) = \emptyset$
$G(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (Z-T) \cap (M-T) = T' \cap Z \cap M$
$G(\alpha) \cup [F'(\alpha) \cup H(\alpha)]$	$\alpha \in (Z-T) \cap (T \cap M) = \emptyset$
$[F'(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup F(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap Z) \cap (T-M) = T \cap Z \cap M'$
$[F'(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap Z) \cap (M-T) = \emptyset$
$[F'(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup [F'(\alpha) \cup H(\alpha)]$	$\alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M$

Buradan,

$G(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M'$
$H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z' \cap M$
$F(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M'$
$L(\alpha) = U$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M$
$G(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M$
U	$\alpha \in T \cap Z \cap M'$
$F'(\alpha) \cup G(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z \cap M$

$T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ için $N=L$ olduğu görülür. $T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartının $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) T \cap (Z \Delta M) = \emptyset \text{ ise } (F, T) +_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)] = [(F, T) +_{\varepsilon} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} [(F, T) +_{\varepsilon} (H, M)].$$

ii) Genişletilmiş Artı İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)] +_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) +_{\varepsilon} (H, M)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z) +_{\varepsilon} (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = (R, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) +_{\varepsilon} (H, M) = (N, (T \cup Z) \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup M$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cup Z) \\ R'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-Z) - M = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z-T) - M = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z-T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) +_{\varepsilon} (H, M)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z) +_{\varepsilon} (H, M)]$ bakalım.

$(F, T) +_{\varepsilon} (H, M) = (K, T \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - T \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G, Z) +_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup M) \cup_{\varepsilon} (S, Z \cup M) = (L, (T \cup M) \cup (Z \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) - (Z \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) - (T \cup M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$F(\alpha)$	$\alpha \in (T-M)-(Z \cup M) = T \cap Z' \cap M'$
$H(\alpha)$	$\alpha \in (M-T)-(Z \cup M) = \emptyset$
$F'(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M)-(Z \cup M) = \emptyset$
$G(\alpha)$	$\alpha \in (Z-M)-(T \cup M) = T' \cap Z \cap M'$
$H(\alpha)$	$\alpha \in (M-Z)-(T \cup M) = \emptyset$
$G'(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (Z \cap M)-(T \cup M) = \emptyset$
$F(\alpha) \cup G(\alpha)$	$\alpha \in (T-M) \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M'$
$L(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (T-M) \cap (M-Z) = \emptyset$
$F(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H(\alpha)]$	$\alpha \in (T-M) \cap (Z \cap M) = \emptyset$
$H(\alpha) \cup G(\alpha)$	$\alpha \in (M-T) \cap (Z-M) = \emptyset$
$H(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (M-T) \cap (M-Z) = T' \cap Z' \cap M$
$H(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H(\alpha)]$	$\alpha \in (M-T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M$
$[F'(\alpha) \cup H(\alpha)] \cup G(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M) \cap (Z-M) = \emptyset$
$[F'(\alpha) \cup H(\alpha)] \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M) \cap (M-Z) = T \cap Z' \cap M$
$[F'(\alpha) \cup H(\alpha)] \cup [G'(\alpha) \cup H(\alpha)]$	$\alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M$

Buradan,

$F(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M'$
$G(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M'$
$F(\alpha) \cup G(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z \cap M'$
$L(\alpha) = H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z' \cap M$
$G'(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M$
$F'(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M$
$[F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup H(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z \cap M$

$T \cap Z \cap M = \emptyset$ iken $N=L$ olduğu görülür.

$$2) (T \Delta Z) \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset; [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] +_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) +_{\varepsilon} (H, M)] \cap_{\varepsilon} [(G, Z) +_{\varepsilon} (H, M)].$$

3.2.6.2.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan komutatif, idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 3.2.5'de $(S_E(U), +_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan, komutatif olmayan, idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup olduğu), Teorem 3.2.6.2 (i) (1) başlığında, $+_{\varepsilon}$ işleminin $\cup_{\varepsilon}$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı altında

soldan dağıldığı, Teorem 3.2.6.2 (ii) (1) başlığında, $+_{\varepsilon}$ işleminin $\cup_{\varepsilon}$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_{\varepsilon}, +_{\varepsilon})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

3.2.6.2.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan komutatif, idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 3.2.5’de $(S_E(U), +_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan, komutatif olmayan, idempotent olmayan bir monoid olduğu, dolayısıyla bir yarıgrup olduğu, Teorem 3.2.6.2 (i) (2) başlığında, $+_{\varepsilon}$ işleminin $\cap_{\varepsilon}$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 3.2.6.2 (ii) (2) başlığında, $+_{\varepsilon}$ işleminin $\cap_{\varepsilon}$ işlemine $(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = (T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_{\varepsilon}, +_{\varepsilon})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

3.2.6.3. Teorem (F, T) , (G, Z) , (H, M) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş artı işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Genişletilmiş Artı İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Soldan Dağılıması:

$$1) T \cap (Z \Delta M) = \emptyset \text{ ise } (F, T) +_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)] = [(F, T) +_{\varepsilon} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} [(F, T) +_{\varepsilon} (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (R, Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) +_{\varepsilon} (R, Z) = (N, T \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ R(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cup R(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z-M)-T = T' \cap Z \cap M' \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M)-T = T' \cap Z \cap M \\ F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) +_{\varepsilon} (G,Z)] \sim_{\cap} [(F,T) +_{\varepsilon} (H,M)]$ bakalım. Burada $(F,T) +_{\varepsilon} (G,Z) = (K, T \cup Z)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F,T) +_{\varepsilon} (H,M) = (S, T \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup Z) \sim_{\cap} (S, T \cup M) = (L, (T \cup Z) \cup (T \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) - (T \cup M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-Z) - (T \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z-T) - (T \cup M) = T' \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap (T-M) = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap (M-T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap [F'(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T-Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (Z-T) \cap (T-M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z-T) \cap (M-T) = T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \cap [F'(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (Z-T) \cap (T \cap M) = \emptyset \\ [F'(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap F(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T-M) = T \cap Z \cap M' \\ [F'(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (M-T) = \emptyset \\ [F'(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap [F'(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, T-Z yi ele alırsak, $T-Z = T \cap Z'$ olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya M-Z de, ya da $M \cup Z$ nin tümleyenindedir. Burdan, $\alpha \in T-Z$ ise $\alpha \in T \cap M \cap Z'$ veya $\alpha \in T \cap M' \cap Z'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı ile $N=L$ sağlanır. $T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartının da $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) T \cap (Z \Delta M) = \emptyset \text{ ise } (F, T) +_{\varepsilon} [(G, Z) \widetilde{\cup} H, M] = [(F, T) +_{\varepsilon} (G, Z)] \widetilde{\cup} [(F, M) +_{\varepsilon} (G, Z)]$$

ii) Genişletilmiş Artı İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) T' \cap Z \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset; [(F, T) \widetilde{\cup} (G, Z)] +_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) +_{\varepsilon} (H, M)] \widetilde{\cup} [(G, Z) +_{\varepsilon} (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, T) \widetilde{\cup} (G, Z) = (R, T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T) +_{\varepsilon} (H, M) = (N, T \cup M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in T-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ R'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-Z)-M = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z)-M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T)+_{\varepsilon}(H,M)] \widetilde{\cup} [(G,Z) +_{\varepsilon}(H,M)]$ bakalım. Burada

$$(F,T) +_{\varepsilon}(H,M) = (K,T \cup M) \quad \forall \alpha \in T \cup M;$$

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$$(G,Z) +_{\varepsilon}(H,M) = (S,Z \cup M) \text{ olsun. Burada } \forall \alpha \in Z \cup M;$$

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-Z \\ G'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$$(K,T \cup M) \widetilde{\cup} (S,Z \cup M) = (L,(T \cup M) \cup (Z \cup M)) \text{ olsun. Burada } \forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M);$$

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) - (Z \cup M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-M) - (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M-T) - (Z \cup M) = \emptyset \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T-M) \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T-M) \cap (M-Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T-M) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (M-T) \cap (Z-M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (M-T) \cap (M-Z) = T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (M-T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M \\ [F'(\alpha) \cup H(\alpha)] \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z-M) = \emptyset \\ [F'(\alpha) \cup H(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (M-Z) = T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cup H(\alpha)] \cup [G'(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, M-T yi ele alırsak, $M-T=M \cap T'$ olup, bir eleman T nin tümleyeninde ise o eleman ya Z-T de, ya da $Z \cup T$ nin tümleyenindedir. Burdan, $\alpha \in M-T$ ise $\alpha \in M \cap Z \cap T'$ veya $\alpha \in M \cap Z' \cap T'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T' \cap Z \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı ile $N=L$ sağlanır.

$$2) T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset; [(F,T) \underset{\cap}{\sim} (G,Z)] +_{\varepsilon} (H,M) = [(F,T) +_{\varepsilon} (H,M)] \underset{\cap}{\sim} [(G,Z) +_{\varepsilon} (H,M)].$$

3.2.6.3.1. *Sonuç* Yavuz (2024), (F,T), (G,Z) ve (H,M), $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \underset{\cup}{\sim})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani band olduğunu göstermişti. Sonuç 3.2.5'de $(S_E(U), +_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan, komutatif olmayan, idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 3.2.6.3 (i) (2) başlığında, $+_{\varepsilon}$ işleminin $\underset{\cup}{\sim}$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 3.2.6.3 (ii) (1) başlığında, $+_{\varepsilon}$ işleminin $\underset{\cup}{\sim}$ işlemine $T' \cap Z \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = (T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \underset{\cup}{\sim}, +_{\varepsilon})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

3.2.6.2.2. *Sonuç* Yavuz (2024), (F,T), (G,Z) ve (H,M), $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \underset{\cap}{\sim})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğunu göstermişti. Sonuç 3.2.5 'de $(S_E(U), +_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan, komutatif olmayan, idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 3.2.6.2 (i) (1) başlığında, $+_{\varepsilon}$ işleminin $\underset{\cap}{\sim}$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 3.2.6.2 (ii) (2) başlığında, $+_{\varepsilon}$ işleminin $\underset{\cap}{\sim}$ işlemine $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \underset{\cap}{\sim}, +_{\varepsilon})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

4. KISITLANMIŞ ve GENİŞLETİLMİŞ GAMMA İŞLEMİ

Bu bölümde, kısıtlanmış gamma ve genişletilmiş gamma adı verilen yeni bir kısıtlanmış ve genişletilmiş esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile birlikte diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları ve $S_E(U)$ kümesi üzerinde bu işlemlerin hangi cebirsel yapıları oluşturduğu incelenmiş ve çok önemli sonuçlar elde edilmiştir.

4.1. Kısıtlanmış Gamma İşlemi ve Özellikleri

4.1.1. Tanım (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, T) \gamma_R (G, Z)$ ile gösterilen kısıtlanmış gamma işlemi $C = T \cap Z$ olmak üzere, $C = T \cap Z \neq \emptyset$ ise $\forall \alpha \in C$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap G(\alpha)$; $C = T \cap Z = \emptyset$ ise $(F, T) \gamma_R (G, Z) = (H, C) = \emptyset_\emptyset$ olacak şekilde $(F, T) \gamma_R (G, Z) = (H, C)$ ile tanımlanır.

Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, tanımda $C = T \cap Z = \emptyset$ ise, $(F, T) \gamma_R (G, Z) = \emptyset_\emptyset$ olduğu açıktır. Buradan, kısıtlanmış gamma işleminin tanımlı olması için, (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde iki esnek küme olmak üzere, $T \cap Z \neq \emptyset$ şartının bulunmadığı görülmektedir.

4.1.2. Örnek $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $T = \{e_1, e_3\}$, $Z = \{e_2, e_3, e_4\}$ E 'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde $(F, T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, Z) = \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, T) \gamma_R (G, Z) = (H, T \cap Z)$ olmak üzere $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_3\}$ için $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap G(\alpha)$ olup, $H(e_3) = F'(e_3) \cap G(e_3) = \{h_3, h_4\} \cap \{h_2, h_3, h_4\} = \{h_3, h_4\}$. Böylece, $(F, T) \gamma_R (G, Z) = \{(e_3, \{h_2, h_3, h_4\})\}$.

4.1.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) γ_R , $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: γ_R işleminin, $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\gamma_R: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((F,T), (G,Z)) \rightarrow (F,T) \gamma_R (G,Z) = (H,T \cap Z)$$

olup, (F,T) ve (G,Z) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F,T) \gamma_R (G,Z)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir.

$$2) [(F,T) \gamma_R (G,Z)] \gamma_R (H,M) \neq (F,T) \gamma_R [(G,Z) \gamma_R (H,M)].$$

İspat: $(F,T) \gamma_R (G,Z) = (S,T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $S(\alpha) = F'(\alpha) \cap G(\alpha)$. $(S,T \cap Z) \gamma_R (H,M) = (R,(T \cap Z) \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$ için, $R(\alpha) = S'(\alpha) \cap H(\alpha)$. Böylece,

$$R(\alpha) = [F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap H(\alpha)$$

$(G,Z) \gamma_R (H,M) = (K,Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $K(\alpha) = G'(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(F,T) \gamma_R (K,Z \cap M) = (S,T \cap (Z \cap M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$ için, $S(\alpha) = F'(\alpha) \cap K(\alpha)$. Böylece,

$$S(\alpha) = F'(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Burada $(R,(T \cap Z) \cap M) \neq (S,T \cap (Z \cap M))$ olduğu görülür.

Yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde, γ_R işleminin birleşme özelliği yoktur. Burada, $T \cap Z = \emptyset$ veya $Z \cap M = \emptyset$ veya $T \cap M = \emptyset$ ise, bu durumda her iki taraf $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesi olacağından, bu şartlar altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, γ_R işleminin birleşme özelliği sağlanacağı açıktır.

$$3) [(F,T) \gamma_R (G,T)] \gamma_R (H,T) \neq (F,T) \gamma_R [(G,T) \gamma_R (H,T)].$$

İspat: $(F,T) \gamma_R (G,T) = (S,T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap T = T$ için, $S(\alpha) = F'(\alpha) \cap G(\alpha)$. $(S,T) \gamma_R (H,T) = (R,T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap T = T$ için, $R(\alpha) = S'(\alpha) \cap H(\alpha)$. Böylece,

$$R(\alpha) = [F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap H(\alpha)$$

$(G,T) \gamma_R (H,T) = (L,T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap T$ için, $L(\alpha) = G'(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(F,T) \gamma_R (L,T) = (N,T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap T$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cap L(\alpha)$. Böylece,

$$N(\alpha) = F'(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Buradan, $(R,T) \neq (N,T)$ olduğu görülür. Yani, parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler kümesi üzerinde γ_R işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F,T) \gamma_R (G,Z) \neq (G,Z) \gamma_R (F,T).$$

İspat: $(F,T) \gamma_R (G,Z) = (H, T \cap Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap G(\alpha)$. $(G,Z) \gamma_R (F,T) = (S, Z \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap T$ için, $T(\alpha) = G'(\alpha) \cap F(\alpha)$. Böylece,

$$(F,T) \gamma_R (G,Z) \neq (G,Z) \gamma_R (F,T).$$

$S_E(U)$ kümesi üzerinde, γ_R işleminin değişme özelliği yoktur. Burada, $T \cap Z = \emptyset$ ise bu durumda her iki taraf $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesi olacağından, bu şart altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, γ_R işleminin değişme özelliği sağlanacağı açıktır. $(F,T) \gamma_R (G,T) \neq (G,T) \gamma_R (F,T)$ olduğu, yani γ_R işleminin parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler kümesi üzerinde de değişme özelliğine sahip olmadığı açıktır.

$$5) (F,T) \gamma_R (F,T) = \emptyset_T.$$

İspat: $(F,T) \gamma_R (F,T) = (H, T \cap T)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap F(\alpha) = \emptyset_T$ olur ve böylece $(H,T) = \emptyset_T$ elde edilir. Yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde, γ_R işlemi, denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

$$6) (F,T) \gamma_R \emptyset_T = \emptyset_T.$$

İspat: $\emptyset_T = (S,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(F,T) \gamma_R (S,T) = (H, T \cap T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap S(\alpha) = F'(\alpha) \cap \emptyset = \emptyset$. Böylece, $(H,T) = \emptyset_T$. Yani, $S_T(U)$ kümesi üzerinde γ_R işleminin sağ yutan elemanı $\emptyset_T$ esnek kümesidir.

$$7) \emptyset_T \gamma_R (F,T) = (F,T).$$

İspat: $\emptyset_T = (S,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(S,T) \gamma_R (F,T) = (H, T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = S'(\alpha) \cap F(\alpha) = U \cap F(\alpha) = F(\alpha)$. Böylece, $(H,T) = (F,T)$.

Yani, $S_T(U)$ kümesi üzerinde γ_R işleminin sol birim elemanı $\emptyset_T$ esnek kümesidir.

$$8) (F,T) \gamma_R \emptyset_M = \emptyset_{T \cap M}.$$

İspat: $\emptyset_M = (S,M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in M$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(F,T) \gamma_R (S,M) = (H, T \cap M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap S(\alpha) = F'(\alpha) \cap \emptyset = \emptyset$. Böylece, $(H, T \cap M) = \emptyset_{T \cap M}$.

$$9) \emptyset_M \gamma_R (F,T) = (F, M \cap T).$$

İspat: $\emptyset_M = (S,M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in M$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(S,M) \gamma_R (F,T) = (H, M \cap T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in M \cap T$ için, $H(\alpha) = S'(\alpha) \cap F(\alpha) = U \cap F(\alpha) = F(\alpha)$. Böylece, $(H, M \cap T) = (F, M \cap T)$. Burada $M \cap T = \emptyset$ ise $\emptyset_M \gamma_R (F,T) = \emptyset_\emptyset$ olur.

$$10) (F,T) \gamma_R \emptyset_E = \emptyset_T.$$

İspat: $\emptyset_E = (S,E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in E$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(F,T) \gamma_R (S,E) = (H, T \cap E)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap E = T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap S(\alpha) = F'(\alpha) \cap \emptyset = \emptyset$. Böylece, $(H, T) = \emptyset_T$.

$$11) \emptyset_E \gamma_R (F,T) = (F,T).$$

İspat: $\emptyset_E = (S,E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in E$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(S,E) \gamma_R (F,T) = (H, E \cap T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in E \cap T = T$, $H(\alpha) = S'(\alpha) \cap F(\alpha) = U \cap F(\alpha) = F(\alpha)$. Böylece, $(H, T) = (F, T)$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, γ_R işleminin sol birim elemanı $\emptyset_E$ esnek kümesidir.

$$12) (F,T) \gamma_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \gamma_R (F,T) = \emptyset_\emptyset.$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ olsun. $(F,T) \gamma_R (S, \emptyset) = (H, T \cap \emptyset) = (H, \emptyset)$ olup, $\emptyset_\emptyset$ parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme olduğu için, $(H, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, γ_R işleminin yutan elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

$$13) (F,T) \gamma_R U_T = (F,T)^f.$$

İspat: $U_T = (K,T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha) = U$. $(F,T) \gamma_R (K,T) = (H, T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap T(\alpha) = F'(\alpha) \cap U = F'(\alpha)$. Böylece, $(H, T) = (F, T)^f$.

$$14) U_T \gamma_R (F, T) = \emptyset_T.$$

İspat: $U_T = (K, T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha) = U$. $(K, T) \gamma_R (F, T) = (H, T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = T'(\alpha) \cap F(\alpha) = \emptyset \cap F(\alpha) = \emptyset$. Böylece, $(H, T) = \emptyset_T$.

$$15) (F, T) \gamma_R U_M = (F, T \cap M)^f.$$

İspat: $U_M = (K, M)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in M$ için, $K(\alpha) = U$. $(F, T) \gamma_R (K, M) = (H, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap T(\alpha) = F'(\alpha) \cap U = F'(\alpha)$. Böylece, $(H, T \cap M) = (F, T \cap M)^f$.

$$16) U_M \gamma_R (F, T) = \emptyset_{M \cap T}.$$

İspat: $U_M = (K, M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in M$ için, $K(\alpha) = U$. $(K, M) \gamma_R (F, T) = (H, M \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in M \cap T$ için, $H(\alpha) = T'(\alpha) \cap F(\alpha) = \emptyset \cap F(\alpha) = \emptyset$. Böylece, $(H, M \cap T) = \emptyset_{M \cap T}$.

$$17) (F, T) \gamma_R U_E = (F, T)^f.$$

İspat: $U_E = (K, E)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in E$ için, $K(\alpha) = U$. $(F, T) \gamma_R (K, E) = (H, T \cap E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap E = T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap K(\alpha) = F'(\alpha) \cap U = F'(\alpha)$. Böylece $(H, T) = (F, T)^f$.

$$18) U_E \gamma_R (F, T) = \emptyset_T.$$

İspat: $U_E = (K, E)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in E$ için, $K(\alpha) = U$. $(K, E) \gamma_R (F, T) = (H, E \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in E \cap T = T$ için, $H(\alpha) = T'(\alpha) \cap F(\alpha) = \emptyset \cap F(\alpha) = \emptyset$. Buradan $(H, T) = \emptyset_T$.

$$19) (F, T) \gamma_R (F, T)^f = (F, T)^f.$$

İspat: $(F, T)^f = (H, T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha)$. $(F, T) \gamma_R (H, T) = (L, T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $L(\alpha) = F'(\alpha) \cap H(\alpha) = F'(\alpha) \cap F'(\alpha) = F'(\alpha)$. Böylece, $(L, T) = (F, T)^f$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, γ_R işlemi için, her esnek kümenin tümleyeni, kendisinin sağ yutan elemanıdır.

$$20) (F, T)^f \gamma_R (F, T) = (F, T).$$

İspat: $(F,T)^r=(H,T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha)=F'(\alpha)$. $(H,T) \gamma_R(F,T)=(L,T \cap T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $T(\alpha)=H'(\alpha) \cap F(\alpha)=F(\alpha) \cap F(\alpha)=F(\alpha)$. Buradan $(L,T)=(F,T)$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, γ_R işlemi için, her esnek kümenin tümleyeni, kendisinin sol birim elemanıdır.

$$21) [(F,T) \gamma_R(G,Z)]^r=(F,T) \lambda_R(G,Z).$$

İspat: $(F,T) \gamma_R(G,Z)=(H,T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $H(\alpha)=F'(\alpha) \cap G(\alpha)$. $H,T \cap Z)^r=(K,T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha)=F(\alpha) \cup G'(\alpha)$ olur. Böylece, $(K,T \cap Z)=(F,T) \lambda_R(G,Z)$.

$$22) (F,T) \gamma_R(G,T) = U_T \Leftrightarrow (F,T) = \emptyset_T \text{ ve } (G,T) = U_T.$$

İspat: $(F,T) \gamma_R(G,T) = (K,T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha)=F'(\alpha) \cap G(\alpha)$. $(K,T)=U_T$ olduğundan, $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha)=U$. Böylece, $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha)=F'(\alpha) \cap G(\alpha)=U \Leftrightarrow \forall \alpha \in T$ için, $F'(\alpha)=U$ ve $G(\alpha)=U \Leftrightarrow \forall \alpha \in T$ için, $F(\alpha)=\emptyset$ ve $G(\alpha)=U \Leftrightarrow (F,T) = \emptyset_T$ ve $(G,T)=U_T$.

$$23) \emptyset_{T \cap Z} \tilde{\subseteq} (F,T) \gamma_R(G,Z) \text{ ve } (F,T) \gamma_R(G,Z) \tilde{\subseteq} U_T \text{ ve } (F,T) \gamma_R(G,Z) \tilde{\subseteq} U_Z.$$

İspat: Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamasından ispat açıktır.

$$24) (F,T) \gamma_R(G,Z) \tilde{\subseteq} (F,T)^r \text{ ve } (F,T) \gamma_R(G,Z) \tilde{\subseteq} (G,Z)^r.$$

İspat: $(F,T) \gamma_R(G,Z)=(H,T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $H(\alpha)=F'(\alpha) \cap G(\alpha)$ olur. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap G(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$ ve $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap G(\alpha) \subseteq G(\alpha)$. Böylece, $(F,T) \gamma_R(G,Z) \tilde{\subseteq} (F,T)^r$ VE $(F,T) \gamma_R(G,Z) \tilde{\subseteq} (G,Z)^r$.

$$25) (F,T) \tilde{\subseteq} (G,T) \text{ ise } (G,T) \gamma_R(H,Z) \tilde{\subseteq} (F,T) \gamma_R(H,Z) \text{ ve } (H,Z) \gamma_R(F,T) \tilde{\subseteq} (H,Z) \gamma_R(G,T).$$

İspat: $(F,T) \tilde{\subseteq} (G,T)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in T$ için, $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ ve böylece $\forall \alpha \in T$ için, $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$ olur. $(G,T) \gamma_R(H,Z)=(K,T \cap Z)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha)=G'(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(F,T) \gamma_R(H,Z)=(L,T \cap Z)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $L(\alpha)=F'(\alpha) \cap H(\alpha)$. Buradan $\forall \alpha \in$

$T \cap Z$ için, $K(\alpha) = G'(\alpha) \cap H(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cap H(\alpha) = L(\alpha)$ olup, $(G, T) \gamma_R (H, Z) \cong (F, T) \gamma_R (H, Z)$. Ayrıca, $\forall \alpha \in Z \cap T$ için, $H'(\alpha) \cap F(\alpha) \subseteq H'(\alpha) \cap G(\alpha)$ olup, $(H, Z) \gamma_R (F, T) \cong (H, Z) \gamma_R (G, T)$.

26) $(G, T) \gamma_R (H, Z) \cong (F, T) \gamma_R (H, Z)$ ise $(F, T) \cong (G, T)$ olmak zorunda değildir. Ayrıca, $(H, Z) \gamma_R (F, T) \cong (H, Z) \gamma_R (G, T)$ ise $(F, T) \cong (G, T)$ olmak zorunda değildir. Yani Teorem 4.1.3 (25) nın tersi doğru değildir.

İspat: Teorem 4.1.3 (25) nın tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $T = \{e_1, e_3\}$, $Z = \{e_1, e_3, e_5\}$ E'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, T) , (G, T) ve (H, Z) , U üzerinde $(F, T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, T) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$, $(H, Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_2\})\}$ olarak tanımlanan örnek kümeler olsun. $(G, T) \gamma_R (H, Z) = (L, T \cap Z)$ olmak üzere $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_1, e_3\}$ için, $L(\alpha) = G'(\alpha) \cap H(\alpha)$ olup, $L(e_1) = G'(e_1) \cap H(e_1) = \emptyset$, $L(e_3) = G'(e_3) \cap H(e_3) = \emptyset$. Buradan, $(G, T) \gamma_R (H, Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset)\}$. Şimdi de, $(F, T) \gamma_R (H, Z) = (K, T \cap Z)$ olmak üzere $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_1, e_3\}$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cap H(\alpha)$ olup, $K(e_1) = F'(e_1) \cap H(e_1) = \emptyset$, $K(e_3) = F'(e_3) \cap H(e_3) = \emptyset$. Böylece, $(F, T) \gamma_R (H, Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset)\}$. Buradan, $(G, T) \gamma_R (H, Z) \cong (F, T) \gamma_R (H, Z)$; fakat $(F, T) \not\cong (G, T)$ olmadığı açıktır. Aynı örnek üzerinde, $(H, Z) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_2\})\}$ seçilerek, $(H, Z) \gamma_R (F, T) \cong (H, Z) \gamma_R (G, T)$ iken $(F, T) \not\cong (G, T)$ olmak zorunda olmadığı gösterilebilir.

27) $(F, T) \cong (G, T)$ ve $(K, V) \cong (L, V)$ ise $(G, T) \gamma_R (K, V) \cong (F, T) \gamma_R (L, V)$ ve aynı şekilde $(L, V) \gamma_R (F, T) \cong (K, V) \gamma_R (G, T)$.

İspat: $(F, T) \cong (G, T)$ ve $(K, V) \cong (L, V)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in T$ ve $\forall \alpha \in Z$ için $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ ve $K(\alpha) \subseteq L(\alpha)$. Böylece $\forall \alpha \in T$ için, $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$ ve $\forall \alpha \in Z$ için, $L'(\alpha) \subseteq K'(\alpha)$. $(G, T) \gamma_R (K, V) = (M, T \cap V)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap V$ için, $M(\alpha) = G'(\alpha) \cap K(\alpha)$. $(F, T) \gamma_R (L, V) = (N, T \cap V)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap V$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cap L(\alpha)$. $\forall \alpha \in T \cap V$ için, $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$ ve $K(\alpha) \subseteq L(\alpha)$ olduğundan, $M(\alpha) = G'(\alpha) \cap K(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cap L(\alpha) = N(\alpha)$ olur. Böylece, $(G, T) \gamma_R (K, V) \cong (F, T) \gamma_R (L, V)$. Aynı şartlar altında, $\forall \alpha \in V \cap T$; $L'(\alpha) \cap F(\alpha) \subseteq K'(\alpha) \cap G(\alpha)$ olduğundan, $(L, V) \gamma_R (F, T) \cong (K, V) \gamma_R (G, T)$ sağlandığı benzer şekilde gösterilir.

4.1.4. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış gamma işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

4.1.4.1. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış gamma işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Gamma İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Soldan Dağılıması:

$$1) (F, T) \gamma_R [(G, Z) \cap_R (H, M)] = [(F, T) \gamma_R (G, Z)] \cap_R [(F, T) \gamma_R (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Z) \cap_R (H, M) = (R, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $R(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(F, T) \gamma_R (R, Z \cap M) = (N, T \cap (Z \cap M))$ olsun, $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$ için $N(\alpha) = F'(\alpha) \cap R(\alpha)$. Buradan, $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için,

$$N(\alpha) = F'(\alpha) \cap [(G(\alpha) \cap H(\alpha))]$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafını yani $[(F, T) \gamma_R (G, Z)] \cap_R [(F, T) \gamma_R (H, M)]$ ele alalım: $(F, T) \gamma_R (G, Z) = (V, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $V(\alpha) = F'(\alpha) \cap G(\alpha)$. Şimdi $(F, T) \gamma_R (H, M) = (W, T \cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $W(\alpha) = F'(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(V, T \cap Z) \cap_R (W, T \cap M) = (S, (T \cap Z) \cap (T \cap M))$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için, $S(\alpha) = V(\alpha) \cap W(\alpha)$,

$$S(\alpha) = [F'(\alpha) \cap G(\alpha)] \cap [F'(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Buradan, $(N, T \cap Z \cap M) = (S, T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

$$2) (F, T) \gamma_R [(G, Z) \cup_R (H, M)] = [(F, T) \gamma_R (G, Z)] \cup_R [(F, T) \gamma_R (H, M)].$$

$$3) (F, T) \gamma_R [(G, Z) \setminus_R (H, M)] = [(F, T) \gamma_R (G, Z)] \setminus_R [(F, T) \gamma_R (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Z) \setminus_R (H, M) = (R, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $R(\alpha) = G(\alpha) \cap H'(\alpha)$. $(F, T) \gamma_R (R, Z \cap M) = (N, T \cap (Z \cap M))$ olsun, $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cap R(\alpha)$. Buradan, $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için,

$$N(\alpha) = F'(\alpha) \cap [(G(\alpha) \cap H'(\alpha))]$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafını yani $[(F,T) \curlyvee_R (G,Z)] \setminus_R [(F,T) \curlyvee_R (H,M)]$ ele alalım: $(F,T) \curlyvee_R (G,Z) = (V, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $V(\alpha) = F'(\alpha) \cap G(\alpha)$. Şimdi $(F,T) \curlyvee_R (H,M) = (W, T \cap M)$ olsun $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $W(\alpha) = F'(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(V, T \cap Z) \setminus_R (W, T \cap M) = (S, (T \cap Z) \cap (T \cap M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için, $S(\alpha) = V(\alpha) \setminus W(\alpha)$,

$$S(\alpha) = [F'(\alpha) \cap G(\alpha)] \setminus [F'(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Buradan, $(N, T \cap Z \cap M) = (S, T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

$$4) (F,T) \curlyvee_R [(G,Z) \theta_R (H,M)] = [(F,T) * _R (G,Z)] \cap_R [(F,T) * _R (H,M)].$$

$$5) (F,T) \curlyvee_R [(G,Z) * _R (H,M)] = [(F,T) \theta_R (G,Z)] \cup_R [(F,T) \theta_R (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G,Z) * _R (H,M) = (R, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $R(\alpha) = G'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(F,T) \curlyvee_R (R, Z \cap M) = (N, T \cap (Z \cap M))$ olsun, $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$ için $N(\alpha) = F'(\alpha) \cap R(\alpha)$. Buradan, $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için,

$$N(\alpha) = F'(\alpha) \cap [(G'(\alpha) \cup H'(\alpha))]$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafını yani $[(F,T) \theta_R (G,Z)] \cup_R [(F,T) \theta_R (H,M)]$ ele alalım: $(F,T) \theta_R (G,Z) = (V, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $V(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$. Şimdi $(F,T) \theta_R (H,M) = (W, T \cap M)$ $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $W(\alpha) = F'(\alpha) \cap H'(\alpha)$. $(V, T \cap Z) \cup_R (W, T \cap M) = (S, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için, $S(\alpha) = V(\alpha) \cup W(\alpha)$,

$$S(\alpha) = [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup [F'(\alpha) \cap H'(\alpha)]$$

Buradan, $(N, T \cap Z \cap M) = (S, T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

ii) Kısıtlanmış Gamma İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F,T) \cup_R (G,Z)] \curlyvee_R (H,M) = [(F,T) \curlyvee_R (H,M)] \cap_R [(G,Z) \curlyvee_R (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım: $(F,T) \cup_R (G,Z) = (R, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $R(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$. $(R, T \cap Z) \forall_R (H,M) = (N, (T \cap Z) \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$ için, $N(\alpha) = R'(\alpha) \cap H(\alpha)$. Buradan,

$$N(\alpha) = [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cap H(\alpha)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) \forall_R (H,M)] \cap_R [(G,Z) \forall_R (H,M)]$ bakalım: $(F,T) \forall_R (H,M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $S(\alpha) = F'(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(G,Z) \forall_R (H,M) = (K, Z \cap M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $K(\alpha) = G'(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(S, T \cap M) \cap_R (K, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cap (Z \cap M))$ olup $(S, T \cap M) \cap_R (K, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cap (Z \cap M))$ olup, $\forall \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M)$ için, $L(\alpha) = S(\alpha) \cap K(\alpha)$. Buradan,

$$L(\alpha) = [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Buradan, $(N, T \cap Z \cap M) = (L, T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

$$2) [(F,T) \cap_R (G,Z)] \forall_R (H,M) = [(F,T) \forall_R (H,M)] \cup_R [(G,Z) \forall_R (H,M)].$$

$$3) [(F,T) \theta_R (G,Z)] \forall_R (H,M) = [(F,T) \cap_R (H,M)] \cup_R [(G,Z) \cap_R (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım: $(F,T) \theta_R (G,Z) = (R, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $R(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$. $(R, T \cap Z) \forall_R (H,M) = (N, (T \cap Z) \cap M)$ olsun. Daha sonra ise, $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$ için, $N(\alpha) = R'(\alpha) \cap H(\alpha)$. Buradan,

$$N(\alpha) = [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap H(\alpha)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) \cap_R (H,M)] \cup_R [(G,Z) \cap_R (H,M)]$ bakalım: $(F,T) \cap_R (H,M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $S(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(G,Z) \cap_R (H,M) = (K, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $K(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(S, T \cap M) \cup_R (K, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olup, $\forall \alpha \in (T \cap M) \cup (Z \cap M)$ için, $L(\alpha) = S(\alpha) \cup K(\alpha)$. Buradan,

$$[F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Buradan, $(N, T \cap Z \cap M) = (L, T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

$$4) [(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z)] \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} (H, M) = [(F, T) \cap_{\mathcal{R}} (H, M)] \cap_{\mathcal{R}} [(G, Z) \cap_{\mathcal{R}} (H, M)].$$

4.1.4.2. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış gamma işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Gamma İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılıması:

$$1) (F, T) \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)] = [(F, T) \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} [(F, T) \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (R, Z \cup M)$ olup, $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} (R, Z \cup M) = (N, (T \cap (Z \cup M)))$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap (Z \cup M)$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cap R(\alpha)$. Şimdi

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M - Z) = T \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cap [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım: $[(F, T) \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} [(F, T) \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} (H, M)]$. $(F, T) \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} (G, Z) = (K, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cap G(\alpha)$. $(F, T) \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} (H, M) = (S, T \cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $S(\alpha) = F'(\alpha) \cap H(\alpha)$. Daha sonra, $(K, T \cap Z) \cap_{\varepsilon} (S, T \cap M) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$

Buradan, $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup (T \cap M)$ için,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) = T \cap (Z - M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (T \cap Z) = T \cap (M - Z) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cap G(\alpha)] \cap [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece, $(N, T \cap (Z \cup M)) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) (F, T) \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} [(G, Z) \cup_{\varepsilon} (H, M)] = [(F, T) \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} (G, Z)] \cup_{\varepsilon} [(F, T) \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} (H, M)].$$

$$3) (F,T) \curlyvee_R [(G,Z) \setminus_\varepsilon (H,M)] = [(F,T) \curlyvee_R (G,Z)] \setminus_\varepsilon [(F,T) \curlyvee_R (H,M)].$$

ii) Kısıtlanmış Gamma İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F,T) \cup_\varepsilon (G,Z)] \curlyvee_R (H,M) = [(F,T) \curlyvee_R (H,M)] \cap_\varepsilon [(G,Z) \curlyvee_R (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F,T) \cup_\varepsilon (G,Z) = (R, T \cup Z)$ olsun. Sonra burada, $\forall \alpha \in T \cup Z$ için,

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) \curlyvee_R (H,M) = (N, (T \cup Z) \cap M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap M$ için, $N(\alpha) = R'(\alpha) \cap H(\alpha)$.

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z-T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) \curlyvee_R (H,M)] \cap_\varepsilon [(G,Z) \curlyvee_R (H,M)]$ bakalım. $(F,T) \curlyvee_R (H,M) = (K, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(G,Z) \curlyvee_R (H,M) = (S, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $S(\alpha) = G'(\alpha) \cap H(\alpha)$. O halde, $(K, T \cap M) \cap_\varepsilon (S, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olsun. Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) = (T-Z) \cap M \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - (T \cap M) = (Z-T) \cap M \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece, $(N, (T \cup Z) \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) [(F,T) \cap_\varepsilon (G,Z)] \curlyvee_R (H,M) = [(F,T) \curlyvee_R (H,M)] \cup_\varepsilon [(G,Z) \curlyvee_R (H,M)].$$

4.1.4.3. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış gamma işleminin tümleyenli genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Gamma İşleminin Tümleyenli Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılıması:

$$1) (F,T) \gamma_R[(G,Z) \overset{*}{\underset{\varepsilon}{\ast}} (H,M)] = [(F,T) \theta_R(G,Z)] \cup_{\varepsilon} [(F,T) \theta_R(H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G,Z) \overset{*}{\underset{\varepsilon}{\ast}} (H,M) = (R,Z \cup M)$ olsun. Burada

$$\forall \alpha \in Z \cup M \text{ için, } (G,Z) \overset{*}{\underset{\varepsilon}{\ast}} (H,M) = (M, Z \cup M),$$

$$R(\alpha) = \begin{cases} G'(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H'(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \gamma_R(R, Z \cup M) = (N, (T \cap (Z \cup M)))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap (Z \cup M)$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cap R(\alpha)$,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) \\ F'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in T \cap (M - Z) \\ F'(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) \theta_R(G,Z)] \cup_{\varepsilon} [(F,T) \theta_R(H,M)]$ bakalım. $(F,T) \theta_R(G,Z) = (K, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$. $(F,T) \theta_R(H,M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $S(\alpha) = F'(\alpha) \cap H'(\alpha)$. O zaman $(K, T \cap Z) \cup_{\varepsilon} (S, T \cap M) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup (T \cap M)$ için,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) \\ T(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (T \cap Z) \\ K(\alpha) \cup T(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) = T \cap (Z - M) \\ F'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (T \cap Z) = T \cap (M - Z) \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup [F'(\alpha) \cap H'(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece, $(N, (T \cap (Z \cup M))) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) (F,T) \gamma_R[(G,Z) \overset{*}{\underset{\varepsilon}{\theta}} (H,M)] = [(F,T) \theta_R(G,Z)] \cap_R [(F,T) \theta_R(H,M)].$$

ii) Kısıtlanmış Gamma İşleminin Tümleyenli Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılıması:

$$1) [(F,T) \overset{*}{\underset{\varepsilon}{\theta}} (G,Z)] \gamma_R(H,M) = [(F,T) \cap_R(H,M)] \cup_{\varepsilon} [(G,Z) \cap_R(H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, T) \overset{*}{\underset{\varepsilon}{\circ}} (G, Z) = (R, T \cup Z)$ olsun. Buradan ise $\forall \alpha \in T \cup Z$ için,

$$R(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G'(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) \curlywedge_R (H, M) = (N, (T \cup Z) \cap M)$ olsun. O halde $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap M$ için, $N(\alpha) = R'(\alpha) \cap H(\alpha)$,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z - T) \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) \cap_R (H, M)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_R (H, M)]$ bakalım: $(F, T) \cap_R (H, M) = (K, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $K(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(G, Z) \cap_R (H, M) = (S, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $S(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$. O zaman $(K, T \cap M) \cup_{\varepsilon} (S, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in (T \cap M) \cup (Z \cap M)$ için,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - (T \cap M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) = (T - Z) \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - (T \cap M) = (Z - T) \cap M \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece, $(N, (T \cup Z) \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) [(F, T) \overset{*}{\underset{\varepsilon}{\circ}} (G, Z)] \curlywedge_R (H, M) = [(F, T) \cap_R (G, Z)] \cap_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_R (H, M)].$$

4.1.4.4. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış gamma işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Gamma İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Soldan Dağılıması:

$$1) (F, T) \curlywedge_R [(G, Z) \overset{\sim}{\cap} (H, M)] = [(F, T) \curlywedge_R (G, Z)] \overset{\sim}{\cap} [(F, T) \curlywedge_R (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G,Z) \widetilde{\cap} (H,M) = (R,Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z-M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \forall_R (R,Z) = (N,T \cap Z)$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in T \cap Z$; $N(\alpha) = F'(\alpha) \cap R(\alpha)$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ F'(\alpha) \cap [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) \forall_R (G,Z)] \widetilde{\cap} [(F,T) \forall_R (H,M)]$ bakalım. $(F,T) \forall_R (G,Z) = (K,T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$; $K(\alpha) = F'(\alpha) \cap G(\alpha)$. $(F,T) \forall_R (H,M) = (S,T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$; $S(\alpha) = F'(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(K,T \cap Z) \widetilde{\cap} (S,T \cap M) = (L,T \cap Z)$ olup, $\forall \alpha \in T \cap Z$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) = T \cap (Z-M) \\ [F'(\alpha) \cap G(\alpha)] \cap [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece $(N,T \cap Z) = (L,T \cap Z)$ olduğu görülür.

$$2) (F,T) \forall_R [(G,Z) \widetilde{\cup} (H,M)] = [(F,T) \forall_R (G,Z)] \widetilde{\cup} [(F,T) \forall_R (H,M)].$$

$$3) (F,T) \forall_R [(G,Z) \widetilde{\setminus} (H,M)] = [(F,T) \forall_R (G,Z)] \widetilde{\setminus} [(F,T) \forall_R (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G,Z) \widetilde{\setminus} (H,M) = (R,Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z-M \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \forall_R (R,Z) = (N,T \cap Z)$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in T \cap Z$; $N(\alpha) = F'(\alpha) \cap R(\alpha)$,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ F'(\alpha) \cap [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) \curlywedge_R (G,Z)] \sim [(F,T) \curlywedge_R (H,M)]$ bakalım. $(F,T) \curlywedge_R (G,Z) = (K, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$; $K(\alpha) = F'(\alpha) \cap G(\alpha)$. $(F,T) \curlywedge_R (H,M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$; $S(\alpha) = F'(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(K, T \cap Z) \sim (S, T \cap M) = (L, T \cap Z)$ olup, $\forall \alpha \in T \cap Z$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) \\ K(\alpha) \setminus S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) = T \cap (Z - M) \\ [F'(\alpha) \cap G(\alpha)] - [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece $(N, T \cap Z) = (L, T \cap Z)$ olduğu görülür.

ii) Kısıtlanmış Gamma İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F,T) \cup (G,Z)] \curlywedge_R (H,M) = [(F,T) \curlywedge_R (H,M)] \cap [(G,Z) \curlywedge_R (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F,T) \cup (G,Z) = (R,T)$ olur. Burada $\forall \alpha \in T$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R,T) \curlywedge_R (H,M) = (N, T \cap M)$ olup, $\forall \alpha \in T \cap M$; $N(\alpha) = R'(\alpha) \cap H(\alpha)$.

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T - M \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) \curlywedge_R (H,M)] \cap [(G,Z) \curlywedge_R (H,M)]$ bakalım.

$(F,T) \curlywedge_R (H,M) = (K, T \cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap M$; $K(\alpha) = F'(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(G,Z) \curlywedge_R (H,M) = (S, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$; $S(\alpha) = G'(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(K, T \cap M) \cap (S, Z \cap M) = (L, T \cap M)$ buradan $\forall \alpha \in T \cap M$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) = (T - Z) \cap M \\ [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece $(N, T \cap M) = (L, T \cap M)$.

$$2) [(F, T) \sim_{\cap} (G, Z)] \gamma_R(H, M) = [(F, T) \gamma_R(H, M)] \sim_{\cup} [(G, Z) \gamma_R(H, M)]$$

4.2. Genişletilmiş Gamma İşlemi ve Özellikleri

4.2.1. Tanım (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin $(F, T) \gamma_{\varepsilon}(G, Z)$ ile gösterilen genişletilmiş gamma işlemi $C = T \cup Z$ ve $\forall \alpha \in C$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

olmak üzere $(F, T) \gamma_{\varepsilon}(G, Z) = (H, C)$ ile tanımlanır.

4.2.2. Örnek $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $T = \{e_1, e_3\}$, $Z = \{e_2, e_3, e_4\}$ E 'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde $(F, T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, Z) = \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, T) \gamma_{\varepsilon}(G, Z) = (H, T \cup Z)$ olmak üzere, $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Burada $T \cup Z = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve $T - Z = \{e_1\}$, $Z - T = \{e_2, e_4\}$, $T \cap Z = \{e_3\}$ olmak üzere, $H(e_1) = F(e_1) = \{h_2, h_5\}$, $H(e_2) = G(e_2) = \{h_1, h_4, h_5\}$, $H(e_4) = G(e_4) = \{h_3, h_5\}$, $H(e_3) = F'(e_3) \cap G(e_3) = \{h_3, h_4\} \cap \{h_2, h_3, h_4\} = \{h_3, h_4\}$.

Böylece, $(F, T) \gamma_{\varepsilon}(G, Z) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$.

4.2.3. Not $S_A(U)$ kümesi üzerinde kısıtlanmış gamma ve genişletilmiş gamma işlemleri çakışıktır. Yani, parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler için, $(F, A) \gamma_{\varepsilon}(G, A) = (F, A) \gamma_R(G, A)$.

4.2.4. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) γ_ε , $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: γ_ε işleminin $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\begin{aligned} \gamma_\varepsilon: S_E(U) \times S_E(U) &\rightarrow S_E(U) \\ ((F,T), (G,Z)) &\rightarrow (F,T) \gamma_\varepsilon (G,Z) = (H, T \cup Z) \end{aligned}$$

(F,T) ve (G,Z) , U üzerinde iki esnek küme, $(F,T) \gamma_\varepsilon (G,Z)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir.

2) $T \cap Z \cap M = \emptyset$ için, $[(F,T) \gamma_\varepsilon (G,Z)] \gamma_\varepsilon (H,M) = (F,T) \gamma_\varepsilon [(G,Z) \gamma_\varepsilon (H,M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,T) \gamma_\varepsilon (G,Z) = (S, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$ için,

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(S, T \cup Z) \gamma_\varepsilon (H, M) = (R, (T \cup Z) \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup M$ için,

$$R(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cup M) \\ S'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T - Z) - M = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z - T) - M = T' \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z - T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(G,Z) \gamma_\varepsilon (H,M) = (R, Z \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \gamma_\varepsilon (R, Z \cup M) = (N, (T \cup (Z \cup M)))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup Z \cup M$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) \\ R(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) - T \\ F'(\alpha) \cap R(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z - M) - T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M - Z) - T = T' \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - T = T' \cap Z \cap M \\ F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M - Z) = T \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada $T \cap Z \cap M = \emptyset$ için $(N, (T \cup Z) \cup M) = (L, T \cup (Z \cup M))$ olduğu görülür. Yani, uygun koşullar altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, γ_E işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$3) [(F, T) \gamma_E (G, T)] \gamma_E (H, T) \neq (F, T) \gamma_E [(G, T) \gamma_E (H, T)].$$

İspat: İspat, Not 4.2.3 ve Teorem 4.1.3 (3)'den elde edilir. Yani T, E nin sabit bir alt kümesi olmak üzere $S_T(U)$ kümesi üzerinde $S_T(U)$ kümesi üzerinde γ_E işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F, T) \gamma_E (G, Z) \neq (G, Z) \gamma_E (F, T).$$

İspat: $(F, T) +_E (G, Z) = (H, T \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup Z$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(G, Z) \gamma_E (F, T) = (S, Z \cup T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in Z \cup T$ için,

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G'(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in Z \cap T \end{cases}$$

Böylece, $(F, T) \gamma_E (G, Z) \neq (G, Z) \gamma_E (F, T)$. Eğer, $Z \cap T = \emptyset$ ise $(F, T) \gamma_E (G, Z) = (G, Z) \gamma_E (F, T)$. Buradan, $(F, T) \gamma_E (G, T) \neq (G, T) \gamma_E (F, T)$ olduğu açıktır. Yani, $S_E(U)$ ve $S_T(U)$ kümeleri üzerinde γ_E işleminin değişme özelliği yoktur.

$$5) (F, T) \gamma_\varepsilon (F, T) = \emptyset_T.$$

İspat: İspat, Not 4.2.3 ve Teorem 4.1.3 (5)'den elde edilir. Yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde $+\varepsilon$ işlemi denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

$$6) (F, T) \gamma_\varepsilon \emptyset_T = \emptyset_T.$$

İspat: İspat, Not 4.2.3. ve Teorem 4.1.3. (6)'den elde edilir. Yani, $S_T(U)$ kümesi üzerinde γ_ε işleminin sağ yutan elemanı $\emptyset_T$ esnek kümesidir.

$$7) \emptyset_T \gamma_\varepsilon (F, T) = (F, T).$$

İspat: İspat, Not 4.2.3 ve Teorem 4.1.3 (7)'den elde edilir. Yani, $S_T(U)$ kümesi üzerinde γ_ε işleminin sol birim elemanı $\emptyset_T$ esnek kümesidir.

$$8) (F, T) \gamma_\varepsilon \emptyset_\emptyset = (F, T).$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(F, T) \gamma_\varepsilon (S, \emptyset) = (H, T \cup \emptyset)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup \emptyset = T$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - \emptyset = T \\ S(\alpha) & \alpha \in \emptyset - T = \emptyset \\ F'(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in T \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Böylece, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F(\alpha)$ olup, $(H, T) = (F, T)$.

$$9) \emptyset_\emptyset \gamma_\varepsilon (F, T) = (F, T).$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(S, \emptyset) \gamma_\varepsilon (F, T) = (H, \emptyset \cup T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in \emptyset \cup T = T$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) & \alpha \in \emptyset - T = \emptyset \\ F(\alpha) & \alpha \in T - \emptyset = T \\ S'(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in \emptyset \cap T = \emptyset \end{cases}$$

Böylece, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F(\alpha)$ olup, $(H, T) = (F, T)$.

4.2.4. Teorem (8) ve (9) dan, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, γ_ε işleminin birim elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir. Klasik küme teorisinde, $A \cup B = \emptyset \iff A = \emptyset$ ve $B = \emptyset$ olduğundan, $S_E(U)$ kümesi

üzerinde, (F,T) esnek kümesi için, $(F,T) \gamma_\varepsilon (G,K) = (G,K) \gamma_\varepsilon (F,T) = \emptyset_\emptyset$ olacak şekilde $(G,K) \in S_E(U)$ bulamayız; çünkü bu durum $T \cup K = \emptyset$ olmasını ve dolayısıyla $T = \emptyset$ ve $K = \emptyset$ olmasını gerektirir. Kabulümüz gereği, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\emptyset_\emptyset$ haricinde hiçbir esnek küme boş parametreye sahip olmadığından, buradan birim elemen olan $\emptyset_\emptyset$ haricinde hiçbir elemanın, $S_E(U)$ kümesi üzerinde γ_ε işlemine göre tersinin olmadığı sonucu çıkartırız.

4.2.5. *Sonuç* Teorem 4.2.4. (1), (2), (4), (8) ve (9)'dan, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında, $(S_E(U), \gamma_\varepsilon)$ birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoiddir. $A \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, $(S_A(U), \gamma_\varepsilon)$ cebirsel yapısı birleşme özelliğine sahip olmadığı için yarıgrup olamaz.

10) $(F,T) \gamma_\varepsilon \emptyset_E = \emptyset_E$.

İspat: $\emptyset_E = (T,E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in E$ için, $T(\alpha) = \emptyset$. $(F,T) \gamma_\varepsilon (T,E) = (H, T \cup E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup E = E$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-E \\ T(\alpha) & \alpha \in E-T \\ F'(\alpha) \cap T(\alpha) & \alpha \in T \cap E \end{cases}$$

Buradan,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-E = \emptyset \\ \emptyset & \alpha \in E-T = T' \\ \emptyset & \alpha \in T \cap E = T \end{cases}$$

Böylece, $\forall \alpha \in E$ için, $H(\alpha) = \emptyset$ olup, $(H,E) = \emptyset_E$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde γ_ε işleminin sağ yutan elemanı $\emptyset_E$ esnek kümesidir.

Burada, $\emptyset_E \gamma_\varepsilon (F,T) \neq \emptyset_E$ olduğu, yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde γ_ε işleminin sol yutan elemanının $\emptyset_E$ esnek kümesi olmadığı açıktır. Gerçekten, $\emptyset_E = (T,E)$ olmak üzere, $(T,E) \gamma_\varepsilon (F,T) = (K, T \cup E)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup E = E$ için,

$$K(\alpha) = \begin{cases} T(\alpha) & \alpha \in E-T \\ F(\alpha) & \alpha \in T-E \\ T'(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in E \cap T \end{cases}$$

Buradan,

$$K(\alpha) = \begin{cases} \emptyset & \alpha \in E - T = T' \\ F(\alpha) & \alpha \in T - E = \emptyset \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap E = T \end{cases}$$

Böylece, $(K, E) \neq \emptyset_E$.

$$11) (F, T) \gamma_\varepsilon U_T = (F, T)^r.$$

İspat: İspat, Not 4.2.3 ve Teorem 4.1.3 (13)'den elde edilir.

$$12) U_T \gamma_\varepsilon (F, T) = \emptyset_T.$$

İspat: İspat, Not 4.2.3 ve Teorem 4.1.3 (14)'den elde edilir.

$$13) (F, T) \gamma_\varepsilon (F, T)^r = (F, T)^r.$$

İspat: İspat, Not 4.2.3 ve Teorem 4.1.3 (19)'den elde edilir. Yani, her esnek kümenin tümleyeni, γ_ε işlemi için, kendisinin sağ yutan elemanıdır.

$$14) (F, T)^r \gamma_\varepsilon (F, T) = (F, T).$$

İspat: İspat, Not 4.2.3 ve Teorem 4.1.3 (20)'den elde edilir. Yani, her esnek kümenin tümleyeni, γ_ε işlemi için, kendisinin sol birim elemanıdır.

$$15) [(F, T) \gamma_\varepsilon (G, Z)]^r = (F, T) \underset{\lambda}{\overset{*}{\sim}} (G, Z).$$

İspat: $(F, T) \gamma_\varepsilon (G, Z) = (H, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$ için;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(H, T \cup Z)^r = (K, T \cup Z)$ olup, $\forall \alpha \in T \cup Z$ için;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G'(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan, $(K, T \cup Z) = (F, T) \overset{*}{\sim} (G, Z) \underset{\lambda}{\sim}$

$$16) (F, T) \gamma_{\varepsilon} (G, T) = U_T \Leftrightarrow (F, T) = \emptyset_T \text{ ve } (G, T) = U_T.$$

İspat: İspat, Not 4.2.3 ve Teorem 4.1.3 (22)'den elde edilir.

$$17) \emptyset_T \cong (F, T) \gamma_{\varepsilon} (G, Z), \emptyset_Z \cong (F, T) \gamma_{\varepsilon} (G, Z), \emptyset_Z \cong (G, Z) \gamma_{\varepsilon} (F, T), \emptyset_T \cong (G, Z) \gamma_{\varepsilon} (F, T). \\ \text{Ayrıca, } (F, T) \gamma_{\varepsilon} (G, Z) \cong U_{T \cup Z} \text{ ve } (G, Z) \gamma_{\varepsilon} (F, T) \cong U_{Z \cup T}.$$

İspat: Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamasından ispat açıktır.

$$18) (F, T) \gamma_{\varepsilon} (G, T) \cong (F, T)^r \text{ ve } (F, T) \gamma_{\varepsilon} (G, T) \cong (G, T)^r.$$

İspat: İspat, Not 4.2.3 ve Teorem 4.1.3 (24)'den elde edilir.

$$19) (F, T) \cong (G, T) \text{ ise } (G, T) \gamma_{\varepsilon} (H, T) \cong (F, T) \gamma_{\varepsilon} (H, T) \text{ ve } (H, Z) \gamma_{\varepsilon} (F, T) \cong (H, Z) \gamma_{\varepsilon} (G, T).$$

İspat: $(F, T) \cong (G, T)$ ise $(G, T) \gamma_{\varepsilon} (H, T) \cong (F, T) \gamma_{\varepsilon} (H, T)$ olduğu, İspat, Not 4.2.3 ve Teorem 4.1.3 (25) ve (26)'den elde edilir. $(F, T) \cong (G, T)$ olsun. $\forall \alpha \in T$ için, $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$. $(H, Z) \gamma_{\varepsilon} (F, T) = (Y, Z \cup T)$ olsun. $\forall \alpha \in Z \cup T$ için;

$$Y(\alpha) = \begin{cases} H(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ H'(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in Z \cap T \end{cases}$$

$(H, Z) \gamma_{\varepsilon} (G, T) = (W, Z \cup T)$ olsun. $\forall \alpha \in Z \cup T$ için;

$$W(\alpha) = \begin{cases} H(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ G(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ H'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in Z \cap T \end{cases}$$

$\alpha \in Z-T$ ise, $Y(\alpha) = H(\alpha)$ ve $W(\alpha) = H(\alpha)$ olup, $Y(\alpha) = H(\alpha) \subseteq H(\alpha) = W(\alpha)$; $\alpha \in T-Z$ ise,

$Y(\alpha)=F(\alpha)$ ve $W(\alpha)=G(\alpha)$ olup, $Y(\alpha)=F(\alpha) \subseteq G(\alpha)=W(\alpha)$; $\alpha \in T \cap Z$ ise, $Y(\alpha)=H'(\alpha) \cap F(\alpha)$ ve $W(\alpha)=H'(\alpha) \cap G(\alpha)$ olup, $Y(\alpha)=H'(\alpha) \cap F(\alpha) \subseteq H'(\alpha) \cap G(\alpha)=W(\alpha)$ olup, $\forall \alpha \in Z \cup T$ için $Y(\alpha) \subseteq W(\alpha)$. Böylece, $(H,Z) \gamma_\varepsilon(F,T) \subseteq (H,Z) \gamma_\varepsilon(G,T)$.

20) $(H,Z) \gamma_\varepsilon(F,T) \subseteq (H,Z) \gamma_\varepsilon(G,T)$ ise $(F,T) \subseteq (G,T)$ olmak zorunda değildir. Benzer şekilde, $(G,T) \gamma_\varepsilon(H,T) \subseteq (F,T) \gamma_\varepsilon(H,T)$ ise $(F,T) \subseteq (G,T)$ olmak zorunda değildir.

İspat: $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ parametre kümesi, $T=\{e_1, e_3\}$, $Z=\{e_1, e_3, e_5\}$ E'nin alt kümeleri, $U=\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F,T) , (G,T) ve (H,Z) , U üzerinde $(F,T)=\{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G,T)=\{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$, $(H,Z)=\{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_2\})\}$ olarak tanımlanan esnek kümeler olsun. $(H,Z) \gamma_\varepsilon(F,T)=(L, Z \cup T)$ olmak üzere $\forall \alpha \in Z \cup T=\{e_1, e_3, e_5\}$ için, $L(e_1)=H'(e_1) \cap F(e_1)=\emptyset$, $L(e_3)=H'(e_3) \cap F(e_3)=\emptyset$, $L(e_5)=H(e_5)=\{h_2\}$ Buradan, $(H,Z) \gamma_\varepsilon(F,T) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_2\})\}$. Şimdi de, $(H,Z) \gamma_\varepsilon(G,T) = (W, Z \cup T)$ olmak üzere $\forall \alpha \in Z \cup T=\{e_1, e_3, e_5\}$ için, $W(e_1)=H'(e_1) \cap G(e_1)=\emptyset$, $W(e_3)=H'(e_3) \cap G(e_3)=\emptyset$, $W(e_5)=H(e_5)=\{h_2\}$. Böylece $(H,Z) \gamma_\varepsilon(G,T) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_2\})\}$. Buradan, $(H,Z) \gamma_\varepsilon(F,T) \subseteq (H,Z) \gamma_\varepsilon(G,T)$ fakat $(F,T) \subseteq (G,T)$ olmadığı açıktır. $(G,T) \gamma_\varepsilon(H,T) \subseteq (F,T) \gamma_\varepsilon(H,T)$ ise $(F,T) \subseteq (G,T)$ olmak zorunda olmadığını, aynı örnek üzerinde $(H,T)=\{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset)\}$ seçilerek gösterilebilir.

21) $(F,T) \subseteq (G,T)$ ve $(K,T) \subseteq (L,T)$ ise $(G,T) \gamma_\varepsilon(K,T) \subseteq (F,T) \gamma_\varepsilon(L,T)$ ve benzer şekilde $(L,T) \gamma_\varepsilon(F,T) \subseteq (K,T) \gamma_\varepsilon(G,T)$.

İspat: İspat, Not 4.2.3 ve Teorem 4.1.3 (27)'den elde edilir.

4.2.6. Teorem $(F,T), (G,Z), (H,M)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş gamma işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

4.2.6.1. Teorem $(F,T), (G,Z), (H,M)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş gamma işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Genişletilmiş Gamma İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Soldan Dağılıması

1) Eğer $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ ise $(F,T) \gamma_\varepsilon[(G,Z) \cup_R (H,M)] = [(F,T) \gamma_\varepsilon(G,Z)] \cup_R [(F,T) \gamma_\varepsilon(H,M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Z) \cup_R (H, M) = (M, Z \cap M)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in Z \cap M; M(\alpha) = G(\alpha) \cup H(\alpha)$. $(F, T) \gamma_\varepsilon (M, Z \cap M) = (N, T \cup (Z \cap M))$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup (Z \cap M)$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cap M) \\ M(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - T \\ F'(\alpha) \cap M(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cap M) \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - T \\ F'(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

$[(F, T) \gamma_\varepsilon (G, Z)] \cup_R [(F, T) \gamma_\varepsilon (H, M)]$ bakalım. $(F, T) \gamma_\varepsilon (G, Z) = (M, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \gamma_\varepsilon (H, M) = (K, T \cup M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - T \\ F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(M, T \cup Z) \cup_R (K, T \cup M) = (W, (T \cup Z) \cap (T \cup M))$ olsun. $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M)$; $W(\alpha) = T(\alpha) \cup K(\alpha)$,

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup F(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap (T - M) = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap (M - T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T - Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup F(\alpha) & \alpha \in (Z - T) \cap (T - M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z - T) \cap (M - T) = T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \cup [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (Z - T) \cap (T \cap M) = \emptyset \\ [F'(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup F(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T - M) = T \cap Z \cap M' \\ [F'(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (M - T) = \emptyset \\ [F'(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki $T-(Z \cap M)$ yi ele alırsak, $T-(Z \cap M) = T-(Z \cap M)'$ olup, bir eleman $(Z \cap M)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $Z-M$ de, ya $M-Z$ de, ya da $Z \cup M$ nin tümleyenindedir. Burdan, $\alpha \in T-(Z \cap M)$ ise $\alpha \in T \cap Z \cap M'$ veya $\alpha \in T \cap Z' \cap M$ veya $\alpha \in T \cap Z' \cap M'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M' = \emptyset$ için yani $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ ise N ve W fonksiyonları birbirine eşit olur.

$$2) T \cap (Z \Delta M) = \emptyset \text{ ise } (F, T) \gamma_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_R (H, M)] = [(F, T) \gamma_{\varepsilon} (G, Z)] \cap_R [(F, T) \gamma_{\varepsilon} (H, M)].$$

ii) Genişletilmiş Gamma İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Sağdan Dağılması

$$1) T \cap Z \cap M = (T \Delta Z) \cap M = \emptyset; [(F, T) \cap_R (G, Z)] \gamma_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \gamma_{\varepsilon} (H, M)] \cap_R [(G, Z) \gamma_{\varepsilon} (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, T) \cap_R (G, Z) = (R, T \cap Z)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in T \cap Z; R(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$. $(R, T \cap Z) \gamma_{\varepsilon} (H, M) = (L, (T \cap Z) \cup M)$ olsun. Sonra burada, $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup M$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cap Z) \\ R'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cap Z) \\ [F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) \gamma_{\varepsilon} (H, M)] \cap_R [(G, Z) \gamma_{\varepsilon} (H, M)]$ bakalım.

$$(F, T) \gamma_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M) \text{ olsun. } \forall \alpha \in T \cup M;$$

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - T \\ F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$$(G, Z) \gamma_{\varepsilon} (H, M) = (K, Z \cup M) \text{ olsun. Burada, } \forall \alpha \in Z \cup M;$$

$$K(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$$(S, T \cup Z) \cap_R (K, Z \cup M) = (W, (T \cup Z) \cap (Z \cup M)) \text{ olsun. } \forall \alpha \in (T \cup Z) \cap (Z \cup M); W(\alpha) = S(\alpha) \cap K(\alpha),$$

$$\begin{array}{lcl}
 W(\alpha) = \left\{ \begin{array}{l} F(\alpha) \cap G(\alpha) \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) \\ F(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cap H(\alpha)] \\ H(\alpha) \cap G(\alpha) \\ H(\alpha) \cap H(\alpha) \\ H(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cap H(\alpha)] \\ [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] \cap G(\alpha) \\ [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] \cap H(\alpha) \\ [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cap H(\alpha)] \end{array} \right. & \begin{array}{l} \alpha \in (T-M) \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M' \\ \alpha \in (T-M) \cap (M-Z) = \emptyset \\ \alpha \in (T-M) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ \alpha \in (M-T) \cap (Z-M) = \emptyset \\ \alpha \in (M-T) \cap (M-Z) = T' \cap Z' \cap M \\ \alpha \in (M-T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M \\ \alpha \in (T \cap M) \cap (Z-M) = \emptyset \\ \alpha \in (T \cap M) \cap (M-Z) = T \cap Z' \cap M \\ \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{array}
 \end{array}$$

Buradan,

$$\begin{array}{lcl}
 W(\alpha) = \left\{ \begin{array}{l} F(\alpha) \cap G(\alpha) \\ H(\alpha) \\ G'(\alpha) \cap H(\alpha) \\ F'(\alpha) \cap H(\alpha) \\ [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cap H(\alpha)] \end{array} \right. & \begin{array}{l} \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ \alpha \in T \cap Z \cap M \end{array}
 \end{array}$$

Burada; L fonksiyonundaki, $M-(T \cap Z)$ yi ele alırsak, $M-(T \cap Z) = M \cap (T \cap Z)'$ olup, bir eleman $(T \cap Z)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya T-Z de, ya Z-T de, ya da T ∪ Z nin tümleyenindedir. Burdan, $\alpha \in M-(T \cap Z)$ ise $\alpha \in M \cap T \cap Z'$ veya $\alpha \in M \cap Z \cap T'$ veya $\alpha \in M \cap T' \cap Z'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı ile $L=W$ sağlanır. $T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartının, $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \cup_R (G, Z)] \gamma_\epsilon (H, M) = [(F, T) \gamma_\epsilon (H, M)] \cup_R [(G, Z) \gamma_\epsilon (H, M)].$$

4.2.6.1.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_E$ olan komutatif, idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 4.2.5 'de $(S_E(U), \gamma_\epsilon)$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla yarıgrup) olduğu, üstelik Teorem 4.2.4 (10) da, $(F, A) \gamma_\epsilon \emptyset_E = \emptyset_E$, yani $\emptyset_E$ nin $S_E(U)$ kümesi üzerinde γ_ϵ işlemi altında, sağ yutan eleman olduğu ve Teorem 4.2.6.1 (i) (1) başlığında, γ_ϵ işleminin $\cup_R$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_R, \gamma_\epsilon)$ cebirsel yapısı komutatif olmayan,

toplamsal idempotent, birimli ve sıfırlı bir (sol) yakın yarı-halkadır. Ayrıca, $\emptyset_E \gamma_\varepsilon(F, A) \neq \emptyset_E$, olduğundan, $(S_E(U), \cup_R, \gamma_\varepsilon)$ sıfır simetrik olmayan bir (sol) yakın yarı-halkadır.

4.2.6.1.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_E$ olan komutatif, idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 4.2.5’de $(S_E(U), \gamma_\varepsilon)$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 4.2.6.1 (i) (1) başlığında, γ_ε işleminin $\cup_R$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 4.2.6.1 (ii) (2) başlığında, γ_ε işleminin $\cup_R$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_R, \gamma_\varepsilon)$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

4.2.6.1.4. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_E$ olan komutatif, idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 4.2.5’de $(S_E(U), \gamma_\varepsilon)$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, komutatif olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 4.2.6.1 (i) (2) başlığında, γ_ε işleminin $\cap_R$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 4.2.6.1 (ii) (1) başlığında, γ_ε işleminin $\cap_R$ işlemine $T \cap Z \cap M = (T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartları ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = (T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_R, \gamma_\varepsilon)$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

4.2.6.2. Teorem (F, T) , (G, Z) , (H, M) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş gamma işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Genişletilmiş Gamma İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılıması

1) $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ olmak üzere, $(F, T) \gamma_\varepsilon[(G, Z) \cup_\varepsilon (H, M)] = [(F, T) \gamma_\varepsilon (G, Z)] \cup_\varepsilon [(F, T) \gamma_\varepsilon (H, M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(G,Z) \cup_{\varepsilon} (H,M) = (R,Z \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$M(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \forall_{\varepsilon} (R,Z \cup M) = (N,(T \cup (Z \cup M)))$ bakalım. $\forall \alpha \in T \cup (Z \cup M)$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) \\ M(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) - T \\ F'(\alpha) \cap M(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z - M) - T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M - Z) - T = T' \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - T = T' \cap Z \cap M \\ F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M - Z) = T \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) \forall_{\varepsilon} (G,Z)] \cup_{\varepsilon} [(F,T) \forall_{\varepsilon} (H,M)]$ bakalım. $(F,T) \forall_{\varepsilon} (G,Z) = (K,T \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F,T) \forall_{\varepsilon} (H,M) = (S,T \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - T \\ F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K,T \cup Z) \cup_{\varepsilon} (S,T \cup M) = (L,(T \cup Z) \cup (T \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) - (T \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) - (T \cup Z) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$L(\alpha) =$	$F(\alpha)$	$\alpha \in (T-Z) - (T \cup M) = \emptyset$
	$G(\alpha)$	$\alpha \in (Z-T) - (T \cup M) = T' \cap Z \cap M'$
	$F'(\alpha) \cap G(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap Z) - (T \cup M) = \emptyset$
	$F(\alpha)$	$\alpha \in (T-M) - (T \cup Z) = \emptyset$
	$H(\alpha)$	$\alpha \in (M-T) - (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M$
	$F'(\alpha) \cap H(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M) - (T \cup Z) = \emptyset$
	$F(\alpha) \cup F(\alpha)$	$\alpha \in (T-Z) \cap (T-M) = T \cap Z' \cap M'$
	$F(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (T-Z) \cap (M-T) = \emptyset$
	$F(\alpha) \cup [F'(\alpha) \cap H(\alpha)]$	$\alpha \in (T-Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M$
	$G(\alpha) \cup F(\alpha)$	$\alpha \in (Z-T) \cap (T-M) = \emptyset$
	$G(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (Z-T) \cap (M-T) = T' \cap Z \cap M$
	$G(\alpha) \cup [F'(\alpha) \cap H(\alpha)]$	$\alpha \in (Z-T) \cap (T \cap M) = \emptyset$
	$[F'(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup F(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap Z) \cap (T-M) = T \cap Z \cap M'$
	$[F'(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap Z) \cap (M-T) = \emptyset$
	$[F'(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup [F'(\alpha) \cap H(\alpha)]$	$\alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M$

Böylece,

$L(\alpha) =$	$G(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M'$
	$H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z' \cap M$
	$F(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M'$
	$F(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M$
	$G(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M$
	$G(\alpha) \cup F(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z \cap M'$
	$F'(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)]$	$\alpha \in T \cap Z \cap M$

$T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ için $N=L$ olduğu görülür. $T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartının $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) T \cap (Z \Delta M) = \emptyset \text{ ise } (F, T) \gamma_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)] = [(F, T) \gamma_{\varepsilon} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} [(F, T) \gamma_{\varepsilon} (H, M)].$$

ii) Genişletilmiş Gamma İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) (T \Delta Z) \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset; [(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)] \gamma_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \gamma_{\varepsilon} (H, M)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \gamma_{\varepsilon} (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,T) \cup_{\varepsilon} (G,Z) = (R,T \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R,T \cup Z) \gamma_{\varepsilon} (H,M) = (N,(T \cup Z) \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup M$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cup Z) \\ R'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-Z) - M = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z-T) - M = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z-T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) \gamma_{\varepsilon} (H,M)] \cup_{\varepsilon} [(G,Z) \gamma_{\varepsilon} (H,M)]$ bakalım.

$(F,T) \gamma_{\varepsilon} (H,M) = (K,T \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G,Z) \gamma_{\varepsilon} (H,M) = (S,Z \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-Z \\ G'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(K,T \cup M) \cup_{\varepsilon} (S,Z \cup M) = (L,(T \cup M) \cup (Z \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) - (Z \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) - (T \cup M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$F(\alpha)$	$\alpha \in (T-M)-(Z \cup M) = T \cap Z' \cap M'$
$H(\alpha)$	$\alpha \in (M-T)-(Z \cup M) = \emptyset$
$F'(\alpha) \cap H(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M)-(Z \cup M) = \emptyset$
$G(\alpha)$	$\alpha \in (Z-M)-(T \cup M) = T' \cap Z \cap M'$
$H(\alpha)$	$\alpha \in (M-Z)-(T \cup M) = \emptyset$
$G'(\alpha) \cap H(\alpha)$	$\alpha \in (Z \cap M)-(T \cup M) = \emptyset$
$F(\alpha) \cup G(\alpha)$	$\alpha \in (T-M) \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M'$
$L(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (T-M) \cap (M-Z) = \emptyset$
$F(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cap H(\alpha)]$	$\alpha \in (T-M) \cap (Z \cap M) = \emptyset$
$H(\alpha) \cup G(\alpha)$	$\alpha \in (M-T) \cap (Z-M) = \emptyset$
$H(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (M-T) \cap (M-Z) = T' \cap Z' \cap M$
$H(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cap H(\alpha)]$	$\alpha \in (M-T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M$
$[F'(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup G(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M) \cap (Z-M) = \emptyset$
$[F'(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M) \cap (M-Z) = T \cap Z' \cap M$
$[F'(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup [G'(\alpha) \cap H(\alpha)]$	$\alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M$

Buradan

$F(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M'$
$G(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M'$
$F(\alpha) \cup G(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z \cap M'$
$L(\alpha) = H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z' \cap M$
$H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M$
$H(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M$
$[F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap H(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z \cap M$

$(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ iken $N = L$ olduğu görülür.

2) $T \cap Z \cap M = \emptyset$ ise $[(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \vee_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \vee_{\varepsilon} (H, M)] \cap_{\varepsilon} [(G, Z) \vee_{\varepsilon} (H, M)]$.

4.2.6.2.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan komutatif, idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 4.2.5'de $(S_E(U), \vee_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak zere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 4.2.6.2 (i) (1) başlığında, $\vee_{\varepsilon}$ işleminin $\cup_{\varepsilon}$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı,

Teorem 4.2.6.2 (ii) (1) başlığında, γ_ε işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \gamma_\varepsilon)$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal birimli, sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

4.2.6.2.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif, idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes olduğunu göstermişti. Sonuç 4.2.5’de $(S_E(U), \gamma_\varepsilon)$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 4.2.6.2 (i) (2) başlığında, γ_ε işleminin $\cap_\varepsilon$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 4.2.6.2 (ii) (2) başlığında, $+\varepsilon$ işleminin $\cap_\varepsilon$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \gamma_\varepsilon)$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

4.2.6.3. Teorem (F, T) , (G, Z) , (H, M) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş gamma işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Genişletilmiş Gamma İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Soldan Dağılması:

$$1) T \cap (Z \Delta M) = \emptyset \text{ ise } (F, T) \gamma_\varepsilon [(G, Z) \underset{\cap}{\sim} (H, M)] = [(F, T) \gamma_\varepsilon (G, Z)] \underset{\cap}{\sim} [(F, T) \gamma_\varepsilon (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(G, Z) \underset{\cap}{\sim} (H, M) = (R, Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \gamma_\varepsilon (R, Z) = (N, T \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ R(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cap R(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z-M)-T = T' \cap Z \cap M' \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M)-T = T' \cap Z \cap M \\ F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) \mathcal{Y}_\varepsilon (G,Z)] \overset{\sim}{\cap} [(F,T) \mathcal{Y}_\varepsilon (H,M)]$ bakalım. Burada $(F,T) \mathcal{Y}_\varepsilon (G,Z) = (K, T \cup Z)$ olsun. Sonra, $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F,T) \mathcal{Y}_\varepsilon (H,M) = (S, T \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup Z) \overset{\sim}{\cap} (S, T \cup M) = (L, (T \cup Z) \cup (T \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) - (T \cup M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-Z) - (T \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z-T) - (T \cup M) = T' \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap (T-M) = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap (M-T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T-Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (Z-T) \cap (T-M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z-T) \cap (M-T) = T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \cap [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (Z-T) \cap (T \cap M) = \emptyset \\ [F'(\alpha) \cap G(\alpha)] \cap F(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T-M) = T \cap Z \cap M' \\ [F'(\alpha) \cap G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (M-T) = \emptyset \\ [F'(\alpha) \cap G(\alpha)] \cap [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ \emptyset & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ \emptyset & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, T-Z yi ele alırsak, T-Z=T $\cap$ Z' olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya M-Z de, ya da M $\cup$ Z nin tümleyenindedir. Burdan, $\alpha \in T \setminus Z$ ise $\alpha \in T \cap M \cap Z'$ veya $\alpha \in T \cap M' \cap Z'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartına ile N=L sağlanır. $T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartının da $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) T \cap (Z \Delta M) = \emptyset \text{ ise } (F, T) \text{ } \forall_{\varepsilon} [(G, Z) \widetilde{\cup} H, M] = [(F, T) \text{ } \forall_{\varepsilon} (G, Z)] \widetilde{\cup} [(F, M) \text{ } \forall_{\varepsilon} (G, Z)]$$

ii) Genişletilmiş Gamma İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset; [(F, T) \widetilde{\cup} (G, Z)] \text{ } \forall_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \text{ } \forall_{\varepsilon} (H, M)] \widetilde{\cup} [(G, Z) \text{ } \forall_{\varepsilon} (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, T) \widetilde{\cup} (G, Z) = (R, T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T) \text{ } \forall_{\varepsilon} (H, M) = (N, T \cup M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in T - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - T \\ R'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T - Z) - M = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M - T \\ F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) \forall_{\varepsilon} (H,M)] \widetilde{\cup} [(G,Z) \forall_{\varepsilon} (H,M)]$ bakalım. Burada

$$(F,T) \forall_{\varepsilon} (H,M) = (K,T \cup M) \forall \alpha \in T \cup M;$$

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$$(G,Z) +_{\varepsilon} (H,M) = (S,T \cup M) \text{ olsun. Burada } \forall \alpha \in Z \cup M;$$

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-Z \\ G'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$$(K,T \cup M) \widetilde{\cup} (S,Z \cup M) = (L,(T \cup M) \cup (Z \cup M)) \text{ olsun. Burada } \forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M);$$

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) - (Z \cup M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-M) - (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M-T) - (Z \cup M) = \emptyset \\ F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T-M) \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T-M) \cap (M-Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T-M) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (M-T) \cap (Z-M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (M-T) \cap (M-Z) = T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (M-T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M \\ [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z-M) = \emptyset \\ [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (M-Z) = T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup [G'(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, $M-T$ yi ele alırsak, $M \setminus T = M \cap T'$ olup, bir eleman T nin tümleyeninde ise o eleman ya $Z-T$ de, ya da $Z \cup T$ nin tümleyenindedir. Burdan, $\alpha \in M-T$ ise $\alpha \in M \cap Z \cap T'$ veya $\alpha \in M \cap Z' \cap T'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı ile $N=L$ sağlanır.

$$2) T' \cap Z \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset; [(F,T) \underset{\cap}{\sim} (G,Z)] \vee_{\varepsilon} (H,M) = [(F,T) \vee_{\varepsilon} (H,M)] \underset{\cap}{\sim} [(G,Z) \vee_{\varepsilon} (H,M)].$$

4.2.6.3.1. *Sonuç* Yavuz (2024), (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \underset{\cup}{\sim})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğunu göstermişti. Sonuç 4.2.5'de $(S_E(U), \vee_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 4.2.6.3 (i) (2) başlığında, $\vee_{\varepsilon}$ işleminin $\underset{\cup}{\sim}$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 4.2.6.3 (ii) (1) başlığında, $\vee_{\varepsilon}$ işleminin $\underset{\cup}{\sim}$ işlemine $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \underset{\cup}{\sim}, \vee_{\varepsilon})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

4.2.6.2.2. *Sonuç* Yavuz (2024), (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \underset{\cap}{\sim})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğunu göstermişti. Sonuç 4.2.5'de $(S_E(U), \vee_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 4.2.6.2 (i) (1) başlığında, $\vee_{\varepsilon}$ işleminin $\underset{\cap}{\sim}$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 4.2.6.2 (ii) (2) başlığında, $+_{\varepsilon}$ işleminin $\underset{\cap}{\sim}$ işlemine $T' \cap Z \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = (T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \underset{\cap}{\sim}, \vee_{\varepsilon})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

5. KISITLANMIŞ ve GENİŞLETİLMİŞ LAMDA İŞLEMİ

Bu bölümde, kısıtlanmış lamda ve genişletilmiş lamda adı verilen yeni bir kısıtlanmış ve genişletilmiş esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile birlikte diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları ve $S_E(U)$ kümesi üzerinde bu işlemlerin hangi cebirsel yapıları oluşturduğu incelenmiş ve çok önemli sonuçlar elde edilmiştir.

5.1. Kısıtlanmış Lamda İşlemi ve Özellikleri

5.1.1. Tanım (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, T) \lambda_R (G, Z)$ ile gösterilen kısıtlanmış lamda işlemi $C=T \cap Z$ olmak üzere, $C=T \cap Z \neq \emptyset$ ise $\forall \alpha \in C$ için, $H(\alpha) = F(\alpha) \cup G'(\alpha)$; $C = T \cap Z = \emptyset$ ise $(F, T) \lambda_R (G, Z) = (H, C) = \emptyset_\emptyset$ olacak şekilde $(F, T) \lambda_R (G, Z) = (H, C)$ ile tanımlanır.

Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, tanımda $C=T \cap Z = \emptyset$ ise, $(F, T) \lambda_R (G, Z) = \emptyset_\emptyset$ olduğu açıktır. Buradan, kısıtlanmış lamda işleminin tanımlı olması için, (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde iki esnek küme olmak üzere, $T \cap Z \neq \emptyset$ şartının bulunmadığı görülmektedir.

5.1.2. Örnek $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $T=\{e_1, e_3\}$, $Z=\{e_2, e_3, e_4\}$ E 'nin iki alt kümesi, $U=\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde $(F, T)=\{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, Z)=\{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, h_3, h_5)\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, T) \lambda_R (G, Z) = (H, T \cap Z)$ olmak üzere $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_3\}$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup G(\alpha)$ olup, $H(e_3) = F(e_3) \cup G'(e_3) = \{h_1, h_2, h_5\} \cup \{h_1, h_5\} = \{h_1, h_2, h_5\}$. Böylece, $(F, T) \lambda_R (G, Z) = \{(e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$.

5.1.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) λ_R , $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: λ_R 'nin $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\lambda_R: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((F,T), (G,Z)) \rightarrow (F,T) \lambda_R(G,Z) = (H, T \cap Z)$$

olup, (F,T) ve (G,Z) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F,T) \lambda_R(G,Z)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir.

$$2) [(F,T) \lambda_R(G,Z)] \lambda_R(H,M) \neq (F,T) \lambda_R[(G,Z) \lambda_R(H,M)].$$

İspat: $(F,T) \lambda_R(G,Z) = (L, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $T(\alpha) = F(\alpha) \cup G'(\alpha)$. $(L, T \cap Z) \lambda_R(H,M) = (R, (T \cap Z) \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$ için, $R(\alpha) = T(\alpha) \cup H'(\alpha)$. Böylece,

$$R(\alpha) = [F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup H'(\alpha)$$

$(G,Z) \lambda_R(H,M) = (K, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $K(\alpha) = G(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(F,T) \lambda_R(K, Z \cap M) = (S, T \cap (Z \cap M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$ için, $S(\alpha) = F(\alpha) \cup K'(\alpha)$. Böylece,

$$S(\alpha) = F(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Burada $(R, (T \cap Z) \cap M) \neq (S, T \cap (Z \cap M))$ olduğu görülür.

Yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde, λ_R işleminin birleşme özelliği yoktur. Burada, $T \cap Z = \emptyset$ veya $Z \cap M = \emptyset$ veya $T \cap M = \emptyset$ ise, bu durumda her iki taraf $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesi olacağından, bu şartlar altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, λ_R işleminin birleşme özelliği sağlanacağı açıktır.

$$3) [(F,T) \lambda_R(G,T)] \lambda_R(H,T) \neq (F,T) \lambda_R[(G,T) \lambda_R(H,T)].$$

İspat: $(F,T) \lambda_R(G,T) = (K,T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap T = T$ için, $T(\alpha) = F(\alpha) \cup G'(\alpha)$. $(K,T) \lambda_R(H,T) = (R,T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap T = T$ için, $R(\alpha) = T(\alpha) \cup H'(\alpha)$. Böylece,

$$R(\alpha) = [F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup H'(\alpha)$$

$(G,T) \lambda_R(H,T) = (L,T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap T$ için, $L(\alpha) = G(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(F,T) \lambda_R(L,T) = (N,T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap T$ için, $N(\alpha) = F(\alpha) \cup L'(\alpha)$. Böylece,

$$N(\alpha) = F(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Buradan, $(R,T) \neq (N,T)$ olduğu görülür. Yani, parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler kümesi üzerinde λ_R işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F,T) \lambda_R (G,Z) \neq (G,Z) \lambda_R (F,T).$$

İspat: $(F,T) \lambda_R (G,Z) = (H, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $H(\alpha) = F(\alpha) \cup G'(\alpha)$. $(G,Z) +_R (F,T) = (S, Z \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap T$ için, $S(\alpha) = G(\alpha) \cup F'(\alpha)$. Böylece,

$$(F,T) \lambda_R (G,Z) \neq (G,Z) \lambda_R (F,T).$$

$S_E(U)$ kümesi üzerinde, λ_R işleminin değişme özelliği yoktur. Burada, $T \cap Z = \emptyset$ ise, bu durumda her iki taraf $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesi olacağından, bu şart altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, λ_R işleminin değişme özelliği sağlanacağı açıktır. $(F,T) \lambda_R (G,T) \neq (G,T) \lambda_R (F,T)$ olduğu, yani λ_R işleminin parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler kümesi üzerinde de değişme özelliğine sahip olmadığı açıktır.

$$5) (F,T) \lambda_R (F,T) = U_T.$$

İspat: $(F,T) \lambda_R (F,T) = (H, T \cap T)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F(\alpha) \cup F'(\alpha) = U$ olur ve böylece $(H,T) = U_T$ elde edilir. Yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde, λ_R işlemi, denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

$$6) (F,T) \lambda_R \emptyset_T = U_T.$$

İspat: $\emptyset_T = (S,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(F,T) \lambda_R (S,T) = (H, T \cap T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F(\alpha) \cup S'(\alpha) = F(\alpha) \cup U = U$. Böylece, $(H,T) = U_T$.

$$7) \emptyset_T \lambda_R (F,T) = (F,T)^f.$$

İspat: $\emptyset_T = (S,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(S,T) \lambda_R (F,T) = (H, T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = S(\alpha) \cup F'(\alpha) = \emptyset \cup F'(\alpha) = F'(\alpha)$. Böylece, $(H,T) = (F,T)^f$.

$$8) (F,T) \lambda_R \emptyset_M = U_{T \cap M}.$$

İspat: $\emptyset_M = (S, M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in M$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(F, T) \lambda_R (S, M) = (H, T \cap M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $H(\alpha) = F(\alpha) \cup S'(\alpha) = F(\alpha) \cup U = U$. Böylece, $(H, T \cap M) = U_{T \cap M}$. Burada $T \cap M = \emptyset$ ise $(F, T) \lambda_R \emptyset_M = \emptyset_\emptyset$ olur.

9) $\emptyset_M \lambda_R (F, T) = (F, M \cap T)$.

İspat: $\emptyset_M = (S, M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in M$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(S, M) \lambda_R (F, T) = (H, M \cap T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in M \cap T$ için, $H(\alpha) = S(\alpha) \cup F'(\alpha) = \emptyset \cup F(\alpha) = F(\alpha)$. Böylece, $(H, M \cap T) = (F, M \cap T)$. Burada $M \cap T = \emptyset$ ise $\emptyset_M \lambda_R (F, T) = \emptyset_\emptyset$ olur.

10) $(F, T) \lambda_R \emptyset_E = U_T$.

İspat: $\emptyset_E = (S, E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in E$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(F, T) \lambda_R (S, E) = (H, T \cap E)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap E = T$ için, $H(\alpha) = F(\alpha) \cup S'(\alpha) = F(\alpha) \cup U = U$. Böylece, $(H, T) = U_T$.

11) $\emptyset_E \lambda_R (F, T) = (F, T)^r$.

İspat: $\emptyset_E = (S, E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in E$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(S, E) \lambda_R (F, T) = (H, E \cap T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in E \cap T = T$, $H(\alpha) = S(\alpha) \cup F'(\alpha) = \emptyset \cup F'(\alpha) = F'(\alpha)$. Böylece, $(H, T) = (F, T)^r$.

12) $(F, T) \lambda_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \lambda_R (F, T) = \emptyset_\emptyset$.

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ olsun. $(F, T) \lambda_R (S, \emptyset) = (H, T \cap \emptyset) = (H, \emptyset)$ olup, $\emptyset_\emptyset$ parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme olduğu için, $(H, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, λ_R işleminin yutan elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

13) $(F, T) \lambda_R U_T = (F, T)$.

İspat: $U_T = (K, T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha) = U$. $(F, T) \lambda_R (K, T) = (H, T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F(\alpha) \cup T'(\alpha) = F(\alpha) \cup \emptyset = F(\alpha)$. Böylece, $(H, T) = (F, T)$. Yani, $S_T(U)$ kümesi üzerinde λ_R işleminin sağ birim elemanı U_T esnek kümesidir.

14) $U_T \lambda_R (F, T) = U_T$.

İspat: $U_T = (K, T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha) = U$. $(K, T) \lambda_R (F, T) = (H, T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = T(\alpha) \cup F'(\alpha) = U \cup F'(\alpha) = U$. Böylece, $(H, T) = U_T$. Yani, $S_T(U)$ kümesi üzerinde, λ_R işleminin sol yutan elemanı U_T esnek kümesidir.

$$15) (F, T) \lambda_R U_M = (F, T \cap M).$$

İspat: $U_M = (K, M)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in M$ için, $K(\alpha) = U$. $(F, T) \lambda_R (K, M) = (H, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $H(\alpha) = F(\alpha) \cup T(\alpha) = F(\alpha) \cup \emptyset = F(\alpha)$. Böylece, $(H, T \cap M) = (F, T \cap M)$.

$$16) U_M \lambda_R (F, T) = U_{T \cap M}.$$

İspat: $U_M = (K, M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in M$ için, $K(\alpha) = U$. $(K, M) \lambda_R (F, T) = (H, M \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in M \cap T$ için, $H(\alpha) = T(\alpha) \cup F'(\alpha) = U \cup F'(\alpha) = U$. Böylece, $(H, M \cap T) = U_{T \cap M}$.

$$17) (F, T) \lambda_R U_E = (F, T).$$

İspat: $U_E = (K, E)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in E$ için, $K(\alpha) = U$. $(F, T) \lambda_R (K, E) = (H, T \cap E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap E = T$ için, $H(\alpha) = F(\alpha) \cup K(\alpha) = F(\alpha) \cup \emptyset = F(\alpha)$. Böylece $(H, T) = (F, T)$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, λ_R işleminin sağ birim elemanı U_E esnek kümesidir.

$$18) U_E \lambda_R (F, T) = U_T.$$

İspat: $U_E = (K, E)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in E$ için, $K(\alpha) = U$. $(K, E) \lambda_R (F, T) = (H, E \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in E \cap T = T$ için, $H(\alpha) = T(\alpha) \cup F'(\alpha) = U \cup F'(\alpha) = U$. Buradan $(H, T) = U_T$.

$$19) (F, T) \lambda_R (F, T)^f = (F, T).$$

İspat: $(F, T)^f = (H, T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha)$. $(F, T) \lambda_R (H, T) = (L, T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $L(\alpha) = F(\alpha) \cup H'(\alpha) = F(\alpha) \cup F(\alpha) = F(\alpha)$. Böylece, $(L, T) = (F, T)$. Yani, λ_R işlemi için, her esnek kümenin tümleyeni, kendisinin sağ birim elemanıdır.

$$20) (F, T)^f \lambda_R (F, T) = (F, T)^f.$$

İspat: $(F,T)^r=(H,T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha)=F'(\alpha)$. $(H,T)\lambda_R(F,T)=(L,T \cap T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $T(\alpha)=H(\alpha) \cup F(\alpha)=F'(\alpha) \cup F'(\alpha)=F'(\alpha)$. Buradan $(L,T)=(F,T)^r$. Yani, λ_R işlemi için, her esnek kümenin tümleyeni, kendisinin sol yutan elemanıdır.

$$21) [(F,T)\lambda_R(G,Z)]^r=(F,T) \gamma_R (G,Z).$$

İspat: $(F,T) \lambda_R(G,Z)=(H,T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $H(\alpha)=F(\alpha) \cup G'(\alpha)$. $(H,T \cap Z)^r=(K,T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha)=F'(\alpha) \cap G(\alpha)$ olur. Böylece, $(K, T \cap Z)=(F,T) \gamma_R (G,Z)$.

$$22) (F,T) \lambda_R(G,T) = \emptyset_T \Leftrightarrow (F,T) = \emptyset_T \text{ ve } (G,T) = U_T.$$

İspat: $(F,T) \lambda_R(G,T) = (K,T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha)= F(\alpha) \cup G'(\alpha)$. $(K,T)= \emptyset_T$ olduğundan, $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha)= \emptyset$. Böylece, $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha)=F(\alpha) \cup G'(\alpha)=\emptyset \Leftrightarrow \forall \alpha \in T$ için, $F(\alpha)= \emptyset$ ve $G'(\alpha)= \emptyset \Leftrightarrow \forall \alpha \in T$ için, $F(\alpha)=\emptyset$ ve $G(\alpha)=U \Leftrightarrow (F,T) = \emptyset_T$ ve $(G,T)= U_T$.

$$23) \emptyset_{T \cap Z} \subseteq (F,T) \lambda_R(G,Z) \text{ ve } (F,T)\lambda_R(G,Z) \subseteq U_T \text{ ve } (F,T)\lambda_R(G,Z) \subseteq U_Z.$$

İspat: Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamasından ispat açıktır.

$$24) (F,T \cap Z) \subseteq (F,T) \lambda_R(G,Z) \text{ ve } (G,T \cap Z)^r \subseteq (F,T) \lambda_R(G,Z).$$

İspat: $(F,T) \lambda_R(G,Z)=(H,T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $H(\alpha)=F \cup G'(\alpha)$ olur. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $F(\alpha) \subseteq F(\alpha) \cup G'(\alpha) =H(\alpha)$ ve $G'(\alpha) \subseteq F(\alpha) \cup G'(\alpha) =H(\alpha)$. Böylece, $(F,T \cap Z) \subseteq (F,T) \lambda_R(G,Z)$ ve $(G,T \cap Z)^r \subseteq (F,T) \lambda_R(G,Z)$.

$$25) (F,T) \subseteq (F,T)\lambda_R(G,T) \text{ ve } (G,T)^r \subseteq (F,T) \lambda_R (G,T).$$

İspat: $(F,T) \lambda_R(G,T)=(H,T \cap T)$ olsun. $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha)=F(\alpha) \cup G'(\alpha)$. Böylece, $\forall \alpha \in T$ için, $F(\alpha) \subseteq F(\alpha) \cup G'(\alpha)=H(\alpha)$ olduğundan $(F,T) \subseteq (F,T) \lambda_R (G,T)$. Benzer şekilde, $G'(\alpha) \subseteq F(\alpha) \cup G'(\alpha)=H(\alpha)$ olduğundan $(G,T)^r \subseteq (F,T)\lambda_R (G,T)$.

$$26) (F,T) \subseteq (G,K) \text{ ise } (F,T) \lambda_R (H,Z) \subseteq (G,K) \lambda_R (H,Z) \text{ ve } (H,Z) \lambda_R (G,T) \subseteq (H,Z) \lambda_R (F,T).$$

İspat: $(F,T) \cong (G,K)$ olsun. Buradan, $T \subseteq K$ ve $\forall \alpha \in T$ için, $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$. $(F,T) \lambda_R(H,Z) = (W, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $W(\alpha) = F(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(G,K) \lambda_R(H,Z) = (L, K \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$; $L(\alpha) = G(\alpha) \cup H'(\alpha)$. Burada, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $W(\alpha) = F(\alpha) \cup H'(\alpha) \subseteq G(\alpha) \cup H'(\alpha) = L(\alpha)$ olup, $T \subseteq K$ olduğundan, $T \cap Z \subseteq K \cap Z$ olduğu da açıktır. Böylece $(F,T) \lambda_R(H,Z) \cong (G,K) \lambda_R(H,Z)$. Ayrıca $\forall \alpha \in Z \cap T$ için, $H(\alpha) \cup G'(\alpha) \subseteq H(\alpha) \cup F'(\alpha)$ olduğundan ve $(H,Z) \lambda_R(G,T) \cong (H,Z) \lambda_R(F,T)$.

27) $(F,T) \lambda_R(H,Z) \cong (G,K) \lambda_R(H,Z)$ ise $(F,T) \cong (G,K)$ olmak zorunda değildir. Yani Teorem 5.1.3 (26) nın tersi doğru değildir. Benzer şekilde, $(H,Z) \lambda_R(G,T) \cong (H,Z) \lambda_R(F,T)$ ise $(F,T) \cong (G,K)$ olmak zorunda değildir.

İspat: Teroem 5.1.3 (26) nın tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ parametre kümesi, $T = \{e_1, e_3\}$, $K = \{e_1, e_3, e_5\}$, $Z = \{e_1, e_3, e_5, e_6\}$ E'nin alt kümeleri, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F,T) , (G,K) ve (H,Z) , U üzerinde $(F,T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G,K) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\}), (e_5, U)\}$, $(H,Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, U), (e_6, U)\}$ olarak tanımlanan esnek kümeler olsun. $(F,T) \lambda_R(H,Z) = (L, T \cap Z)$ olmak üzere $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_1, e_3\}$ için, $L(\alpha) = G(\alpha) \cup H'(\alpha)$ olup, $L(e_1) = G(e_1) \cup H'(e_1) = U$, $L(e_3) = G(e_3) \cup H'(e_3) = U$. Buradan, $(F,T) \lambda_R(H,Z) = \{(e_1, U), (e_3, U)\}$. Şimdi de, $(G,K) \lambda_R(H,Z) = (W, K \cap Z)$ olmak üzere $\forall \alpha \in K \cap Z = \{e_1, e_3, e_5\}$ için, $W(\alpha) = F(\alpha) \cup H'(\alpha)$ olup, $W(e_1) = F(e_1) \cup H'(e_1) = U$, $W(e_3) = F(e_3) \cup H'(e_3) = U$, $W(e_5) = F(e_5) \cup H'(e_5) = U$. Böylece $(G,K) \lambda_R(H,Z) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, U)\}$. Buradan, $(F,T) \lambda_R(H,Z) \cong (G,K) \lambda_R(H,Z)$ fakat $(F,T) \cong (G,K)$ olmadığı açıktır. Benzer şekilde aynı örnek üzerinden, $(H,Z) \lambda_R(G,T) \cong (H,Z) \lambda_R(F,T)$ iken $(F,T) \cong (G,K)$ olmak zorunda olmadığı gösterilebilir.

28) $(F,T) \cong (G,T)$ ve $(K,V) \cong (L,V)$ ise $(F,T) \lambda_R(L,V) \cong (G,T) \lambda_R(K,V)$ ve benzer şekilde $(K,V) \lambda_R(G,T) \cong (L,V) \lambda_R(F,T)$.

İspat: $(F,T) \cong (G,T)$ ve $(K,V) \cong (L,V)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in T$ ve $\forall \alpha \in Z$ için $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ ve $K(\alpha) \subseteq L(\alpha)$. Böylece $\forall \alpha \in T$ ve $\forall \alpha \in T$ için, $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$ ve $L'(\alpha) \subseteq K'(\alpha)$. Şimdi ise $(F,T) \lambda_R(L,T) = (M, T \cap V)$ olsun. Böylece $\forall \alpha \in T \cap V$ için, $M(\alpha) = F(\alpha) \cup L'(\alpha)$. Daha sonra $(G,T) \lambda_R(L,T) = (M, T \cap V)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap V$ için, $M(\alpha) = F(\alpha) \cup L'(\alpha)$. $(G,T) \lambda_R(K, T) = (N, T \cap V)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap V$ için, $N(\alpha) = G(\alpha) \cup K'(\alpha)$. $\forall \alpha \in T \cap V$ için, $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ ve $L'(\alpha) \subseteq K'(\alpha)$ olduğundan $M(\alpha) = F(\alpha) \cup L'(\alpha) \subseteq G(\alpha) \cup K'(\alpha) = N(\alpha)$. Böylece,

$(F,T) \lambda_R(L,V) \tilde{\subseteq} (G,T) \lambda_R(K,V)$. Aynı şartlar altında, $\forall \alpha \in V \cap T$ için, $K(\alpha) \cup G'(\alpha) \subseteq L(\alpha) \cup F'(\alpha)$ olduğundan, $(K,V) \lambda_R(G,T) \tilde{\subseteq} (L,V) \lambda_R(F,T)$ sağlandığı benzer şekilde gösterilebilir.

5.1.4. Teorem $(F,T), (G,Z), (H,M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış lamda işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

5.1.4.1. Teorem $(F,T), (G,Z), (H,M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış lamda işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Lamda İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Soldan Dağılması:

$$1) (F,T) \lambda_R [(G,Z) \cap_R (H,M)] = [(F,T) \lambda_R (G,Z)] \cup_R [(F,T) \lambda_R (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G,Z) \cap_R (H,M) = (R, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $R(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(F,T) \lambda_R (R, Z \cap M) = (N, T \cap (Z \cap M))$ olsun, $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$ için, $N(\alpha) = F(\alpha) \cup R'(\alpha)$. Buradan, $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için,

$$N(\alpha) = F(\alpha) \cup [(G'(\alpha) \cup H'(\alpha))]$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafını yani $[(F,T) \lambda_R (G,Z)] \cup_R [(F,T) \lambda_R (H,M)]$ ele alalım: $(F,T) \lambda_R (G,Z) = (V, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $V(\alpha) = F(\alpha) \cup G'(\alpha)$. Şimdi $(F,T) \lambda_R (H,M) = (W, T \cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $W(\alpha) = F(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(V, T \cap Z) \cup_R (W, T \cap M) = (S, (T \cap Z) \cap (T \cap M))$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için, $S(\alpha) = V(\alpha) \cup W(\alpha)$,

$$S(\alpha) = [F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup [F(\alpha) \cup H'(\alpha)]$$

Buradan, $(N, T \cap Z \cap M) = (S, T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

$$2) (F,T) \lambda_R [(G,Z) \cup_R (H,M)] = [(F,T) \lambda_R (G,Z)] \cap_R [(F,T) \lambda_R (H,M)].$$

$$3) (F,T) \lambda_R [(G,Z) \theta_R (H,M)] = [(F,T) \cup_R (G,Z)] \cup_R [(F,T) \cup_R (H,M)].$$

$$4) (F,T) \lambda_R [(G,Z) * _R (H,M)] = [(F,T) \cup_R (G,Z)] \cap_R [(F,T) \cup_R (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G,Z) * _R (H,M) = (R, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $R(\alpha) = G'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(F,T) \lambda_R (R, Z \cap M) = (N, T \cap (Z \cap M))$ olsun, $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$ için $N(\alpha) = F(\alpha) \cup R'(\alpha)$. Buradan, $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için,

$$N(\alpha) = F(\alpha) \cup [(G(\alpha) \cap H(\alpha))]$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafını $[(F,T) \cup_R (G,Z)] \cap_R [(F,T) \cup_R (H,M)]$ ele alalım: $(F,T) \cup_R (G,Z) = (V, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $V(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$. Şimdi $(F,T) \cup_R (H,M) = (W, T \cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $W(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$. $(V, T \cap Z) \cap_R (W, T \cap M) = (S, (T \cap Z) \cap (T \cap M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için, $S(\alpha) = V(\alpha) \cap W(\alpha)$,

$$S(\alpha) = [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap [F(\alpha) \cup H(\alpha)]$$

Buradan, $(N, T \cap Z \cap M) = (S, T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

ii) Kısıtlanmış Lamda İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F,T) \cup_R (G,Z)] \lambda_R (H,M) = [(F,T) \lambda_R (H,M)] \cup_R [(G,Z) \lambda_R (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım: $(F,T) \cup_R (G,Z) = (R, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $R(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$. $(R, T \cap Z) \lambda_R (H,M) = (N, (T \cap Z) \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$ için, $N(\alpha) = R(\alpha) \cup H'(\alpha)$. Buradan,

$$N(\alpha) = [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup H'(\alpha)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) \lambda_R (H,M)] \cup_R [(G,Z) \lambda_R (H,M)]$ bakalım: $(F,T) \lambda_R (H,M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $T(\alpha) = F(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(G,Z) \lambda_R (H,M) = (K, Z \cap M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $K(\alpha) = G(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(S, T \cap M) \cup_R (K, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cap (Z \cap M))$ olup, $\forall \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M)$ için, $L(\alpha) = S(\alpha) \cup K(\alpha)$. Buradan,

$$L(\alpha) = [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cup H'(\alpha)]$$

Buradan, $(N, T \cap Z \cap M) = (L, T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

$$2) [(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z)] \lambda_R (H,M) = [(F,T) \lambda_R (H,M)] \cap_R [(G,Z) \lambda_R (H,M)].$$

$$3) [(F,T) \theta_R (G,Z)] \lambda_R (H,M) = [(F,T) * _R (H,M)] \cap_R [(G,Z) * _R (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım: $(F,T) \theta_R (G,Z) = (R, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $R(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$. $(R, T \cap Z) \lambda_R (H,M) = (N, (T \cap Z) \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$ için, $N(\alpha) = R(\alpha) \cup H'(\alpha)$. Buradan,

$$N(\alpha) = [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup H'(\alpha)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) * _R (H,M)] \cap_R [(G,Z) * _R (H,M)]$ bakalım: Burada $(F,T) * _R (H,M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $T(\alpha) = F'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(G,Z) * _R (H,M) = (K, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $K(\alpha) = G'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(S, T \cap M) \cap_R (K, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cap (Z \cap M))$ olup, $\forall \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M)$ için, $L(\alpha) = S(\alpha) \cap K(\alpha)$. Buradan,

$$L(\alpha) = [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)]$$

Buradan, $(N, T \cap Z \cap M) = (L, T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

$$4) [(F,T) * _R (G,Z)] \lambda_R (H,M) = [(F,T) * _R (H,M)] \cup_R [(G,Z) * _R (H,M)].$$

5.1.4.2. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış lamda işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Lamda İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılması:

$$1) (F,T) \lambda_R [(G,Z) \cap_{\varepsilon} (H,M)] = [(F,T) \lambda_R (G,Z)] \cup_{\varepsilon} [(F,T) \lambda_R (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G,Z) \cap_{\varepsilon} (H,M) = (R, Z \cup M)$ olsun. $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \lambda_R (R, Z \cup M) = (N, (T \cap (Z \cup M)))$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap (Z \cup M)$ için, $N(\alpha) = F(\alpha) \cup R'(\alpha)$ için,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap (M - Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım: $[(F, T) \lambda_R(G, Z)] \cup_\varepsilon [(F, T) \lambda_R(H, M)]$. $(F, T) \lambda_R(G, Z) = (K, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha) = F(\alpha) \cup G'(\alpha)$. $(F, T) \lambda_R(H, M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $S(\alpha) = F(\alpha) \cup H'(\alpha)$. Daha sonra, $(K, T \cap Z) \cup_\varepsilon (S, T \cap M) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup (T \cap M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) = T \cap (Z - M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (T \cap Z) = T \cap (M - Z) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece $(N, (T \cap (Z \cup M))) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) (F, T) \lambda_R[(G, Z) \cup_\varepsilon (H, M)] = [(F, T) \lambda_R(G, Z)] \cap_\varepsilon [(F, T) \lambda_R(H, M)]$$

ii) Kısıtlanmış Lamda İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F, T) \cup_\varepsilon (G, Z)] \lambda_R(H, M) = [(F, T) \lambda_R(H, M)] \cup_\varepsilon [(G, Z) \lambda_R(H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, T) \cup_\varepsilon (G, Z) = (R, T \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup Z$ için,

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) \lambda_R(H, M) = (N, (T \cup Z) \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap M$ için, $N(\alpha) = R(\alpha) \cup H'(\alpha)$.

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (Z - T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) \lambda_R(H, M)] \cup_\varepsilon [(G, Z) \lambda_R(H, M)]$ bakalım. $(F, T) \lambda_R(H, M) = (K, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $K(\alpha) = F(\alpha) \cup H'(\alpha)$.

$(G, Z) \lambda_R (H, M) = (S, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $S(\alpha) = G(\alpha) \cup H'(\alpha)$. O halde, $(K, T \cap M) \cup_\varepsilon (S, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in (T \cap M) \cup (Z \cap M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) = (T - Z) \cap M \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - (T \cap M) = (Z - T) \cap M \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece $(N, (T \cup Z) \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) [(F, T) \cap_\varepsilon (G, Z)] \lambda_R (H, M) = [(F, T) \lambda_R (H, M)] \cap_\varepsilon [(G, Z) \lambda_R (H, M)].$$

5.1.4.3. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış lamda tümleyenli işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Lamda İşleminin Tümleyenli Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılımı:

$$1) (F, T) \lambda_R [(G, Z) \overset{*}{\underset{\varepsilon}{*}} (H, M)] = [(F, T) \cup_R (G, Z)] \cap_\varepsilon [(F, T) \cup_R (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, Z) \overset{*}{\underset{\varepsilon}{*}} (H, M) = (R, Z \cup M)$ olsun. Burada

$$\forall \alpha \in Z \cup M \text{ için, } (G, Z) \overset{*}{\underset{\varepsilon}{*}} (H, M) = (R, Z \cup M),$$

$$R(\alpha) = \begin{cases} G'(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H'(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \lambda_R (R, Z \cup M) = (N, (T \cap (Z \cup M)))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap (Z \cup M)$ için, $N(\alpha) = F(\alpha) \cup R'(\alpha)$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M - Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) \cup_R (G, Z)] \cap_\varepsilon [(F, T) \cup_R (H, M)]$ bakalım. $(F, T) \cup_R (G, Z) = (K, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$. $(F, T) \cup_R (H, M) = (S, T \cap M)$ Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $S(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$. Şimdi $(K, T \cap Z) \cap_\varepsilon (S, T \cap M) = (L, T \cap Z) \cup (T \cap M)$

olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup (T \cap M)$ için,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) = T \cap (Z - M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (T \cap Z) = T \cap (M - Z) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap [F(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece, $(N, (T \cap (Z \cup M))) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) (F, T) \lambda_R [(G, Z) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (H, M)] = [(F, T) \cup_R (G, Z)] \cup_R [(F, T) \cup_R (H, M)]$$

ii) Kısıtlanmış Lamda İşleminin Tümleyenli Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F, T) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (G, Z)] \lambda_R (H, M) = [(F, T) *_{\mathcal{R}} (H, M)] \cap_\varepsilon [(G, Z) *_{\mathcal{R}} (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, T) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (G, Z) = (R, T \cup Z)$ olsun. Burada

$\forall \alpha \in T \cup Z$ için,

$$R(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G'(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) \lambda_R (H, M) = (N, (T \cup Z) \cap M)$ olsun. O halde $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap M$ için, $N(\alpha) = R(\alpha) \cup H'(\alpha)$,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (Z - T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) *_{\mathcal{R}} (H, M)] \cap_\varepsilon [(G, Z) *_{\mathcal{R}} (H, M)]$ bakalım: $(F, T) *_{\mathcal{R}} (H, M) = (K, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(G, Z) *_{\mathcal{R}} (H, M) = (S, Z \cap M)$. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $S(\alpha) = G'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. O zaman $(K, T \cap M) \cap_\varepsilon (S, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in (T \cap M) \cup (Z \cap M)$ için,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) = (T - Z) \cap M \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - (T \cap M) = (Z - T) \cap M \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece, $(N, (T \cup Z) \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) [(F, T) \overset{*}{*}_{\varepsilon} (G, Z)] \lambda_R(H, M) = [(F, T) *_{\varepsilon} (H, M)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z) *_{\varepsilon} (H, M)].$$

5.1.4.4. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış lamda işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Lamda İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Soldan Dağılması:

$$1) (F, T) \lambda_R[(G, Z) \overset{\sim}{\cap} (H, M)] = [(F, T) \lambda_R(G, Z)] \overset{\sim}{\cup} [(F, T) \lambda_R(H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Z) \overset{\sim}{\cap} (H, M) = (R, Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \lambda_R(R, Z) = (N, T \cap Z)$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in T \cap Z$; $N(\alpha) = F(\alpha) \cup R'(\alpha)$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) \\ F(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) \lambda_R(G, Z)] \overset{\sim}{\cup} [(F, T) \lambda_R(H, M)]$ bakalım. $(F, T) \lambda_R(G, Z) = (K, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$; $K(\alpha) = F(\alpha) \cup G'(\alpha)$. $(F, T) \lambda_R(H, M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$; $S(\alpha) = F(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(K, T \cap Z) \overset{\sim}{\cup} (S, T \cap M) = (L, T \cap Z)$ olup, $\forall \alpha \in T \cap Z$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) = T \cap (Z - M) \\ [F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece $(N, T \cap Z) = (L, T \cap Z)$ olduğu görülür.

$$2) (F, T) \lambda_R[(G, Z) \tilde{\cup} (H, M)] = [(F, T) \lambda_R(G, Z)] \tilde{\cap} [(F, T) \lambda_R(H, M)].$$

ii) Kısıtlanmış Lamda İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F, T) \tilde{\cup} (G, Z)] \lambda_R(H, M) = [(F, T) \lambda_R(H, M)] \tilde{\cup} [(G, Z) \lambda_R(H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, T) \tilde{\cup} (G, Z) = (R, T)$ olur. Burada $\forall \alpha \in T$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T) \lambda_R(H, M) = (N, T \cap M)$ olup, $\forall \alpha \in T \cap M$; $N(\alpha) = R(\alpha) \cup H'(\alpha)$.

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) \lambda_R(H, M)] \tilde{\cup} [(G, Z) \lambda_R(H, M)]$ bakalım. $(F, T) \lambda_R(H, M) = (K, T \cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap M$; $K(\alpha) = F(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(G, Z) \lambda_R(H, M) = (S, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$; $S(\alpha) = G(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(K, T \cap M) \tilde{\cup} (S, Z \cap M) = (L, T \cap M)$ olup, buradan da $\forall \alpha \in T \cap M$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) = (T - Z) \cap M \\ [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece $(N, T \cap M) = (L, T \cap M)$ olduğu görülür.

$$2) [(F, T) \tilde{\cup} (G, Z)] \lambda_R(H, M) = [(F, T) \lambda_R(H, M)] \tilde{\cup} [(G, Z) \lambda_R(H, M)]$$

5.2. Genişletilmiş Lamda İşlemi ve Özellikleri

5.2.1. Tanım (F, T) ve (G, Z), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin (F, T) $\lambda_\varepsilon(G, Z)$ ile gösterilen genişletilmiş lamda işlemi $C=T \cup Z$ ve $\forall \alpha \in C$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

olmak üzere (F, T) $\lambda_\varepsilon(G, Z) = (H, C)$ ile tanımlanır.

5.2.2. Örnek $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $T = \{e_1, e_3\}$, $Z = \{e_2, e_3, e_4\}$ E'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, T) ve (G, Z), U üzerinde (F, T) = $\{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, (G, Z) = $\{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. (F, T) $\lambda_\varepsilon(G, Z) = (H, T \cup Z)$ olmak üzere, $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Burada $T \cup Z = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve $T-Z = \{e_1\}$, $Z-T = \{e_2, e_4\}$, $T \cap Z = \{e_3\}$ olmak üzere, $H(e_1) = F(e_1) = \{h_2, h_5\}$, $H(e_2) = G(e_2) = \{h_1, h_4, h_5\}$, $H(e_4) = G(e_4) = \{h_3, h_5\}$, $H(e_3) = F(e_3) \cup G'(e_3) = \{h_1, h_2, h_5\} \cup \{h_1, h_5\} = \{h_1, h_2, h_5\}$. Böylece, (F, T) $\lambda_\varepsilon(G, Z) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$.

5.2.3. Not $S_A(U)$ kümesi üzerinde kısıtlanmış lamda ve genişletilmiş lamda işlemleri çakışıktır. Parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler için, (F, A) $\lambda_\varepsilon(G, A) = (F, A) \lambda_R(G, A)$.

5.2.4. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $\lambda_\varepsilon, S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $+\varepsilon$ işleminin $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\lambda_\varepsilon: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((F, T), (G, Z)) \rightarrow (F, T) \lambda_\varepsilon(G, Z) = (H, T \cup Z)$$

olup, (F, T) ve (G, Z), U üzerinde iki esnek küme olduğunda (F, T) $\lambda_\varepsilon(G, Z)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir.

2) $T \cap Z \cap M = \emptyset$ ise $[(F, T) \lambda_\varepsilon (G, Z)] \lambda_\varepsilon (H, M) = (F, T) \lambda_\varepsilon [(G, Z) \lambda_\varepsilon (H, M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, T) \lambda_\varepsilon (G, Z) = (S, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(S, T \cup Z) \lambda_\varepsilon (H, M) = (R, (T \cup Z) \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup M$ için,

$$M(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cup M) \\ T(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T - Z) - M = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z - T) - M = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (Z - T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(G, Z) \lambda_\varepsilon (H, M) = (R, Z \cup M)$ olsun. $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \lambda_\varepsilon (R, Z \cup M) = (N, (T \cup (Z \cup M)))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup Z \cup M$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) \\ R(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) - T \\ F(\alpha) \cup M'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z - M) - T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M - Z) - T = T' \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap (M - Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada $T \cap Z \cap M = \emptyset$ için $(N, (T \cup Z) \cup M) = (L, T \cup (Z \cup M))$ olduğu görülür. Yani uygun koşullar altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, λ_ε işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$3) [(F, T) \lambda_\varepsilon (G, T)] \lambda_\varepsilon (H, T) \neq (F, T) \lambda_\varepsilon [(G, T) \lambda_\varepsilon (H, T)].$$

İspat: İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (3)'den elde edilir. Yani T, E nin sabit bir alt kümesi olmak üzere $S_T(U)$ kümesi üzerinde, λ_ε işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F, T) \lambda_\varepsilon (G, Z) \neq (G, Z) \lambda_\varepsilon (F, T).$$

İspat: $(F, T) \lambda_\varepsilon (G, Z) = (H, T \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup Z$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(G, Z) \lambda_\varepsilon (F, T) = (S, Z \cup T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in Z \cup T$ için,

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) \cup F'(\alpha) & \alpha \in Z \cap T \end{cases}$$

Böylece, $(F, T) \lambda_\varepsilon (G, Z) \neq (G, Z) \lambda_\varepsilon (F, T)$. Eğer, $Z \cap T = \emptyset$ ise $(F, T) \lambda_\varepsilon (G, Z) = (G, Z) \lambda_\varepsilon (F, T)$. Buradan, $(F, T) \lambda_\varepsilon (G, T) \neq (G, T) \lambda_\varepsilon (F, T)$ olduğu açıktır. Yani, $S_E(U)$ ve $S_T(U)$ kümeleri üzerinde λ_ε işleminin değişme özelliği yoktur.

$$5) (F, T) +_\varepsilon (F, T) = U_T.$$

İspat: İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (5)'den elde edilir. Yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde λ_ε işlemi denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

$$6) (F, T) \lambda_\varepsilon \emptyset_T = U_T.$$

İspat: İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (6)'den elde edilir.

$$7) \emptyset_T \lambda_\varepsilon (F, T) = (F, T)^r.$$

İspat: İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (7)'den elde edilir.

$$8) (F,T)\lambda_{\varepsilon} \emptyset_{\emptyset}=(F,T).$$

İspat: $\emptyset_{\emptyset}=(S,\emptyset)$ ve $(F,T)\lambda_{\varepsilon}(S,\emptyset)=(H,T\cup\emptyset)$ olsun. Burada, $\forall\alpha\in T\cup\emptyset=T$ için,

$$H(\alpha)=\begin{cases} F(\alpha) & \alpha\in T-\emptyset=T \\ S(\alpha) & \alpha\in\emptyset-T=\emptyset \\ F(\alpha)\cup S'(\alpha) & \alpha\in T\cap\emptyset=\emptyset \end{cases}$$

Böylece, $\forall\alpha\in T$ için, $H(\alpha)=F(\alpha)$ olup, $(H,T)=(F,T)$.

$$9) \emptyset_{\emptyset} \lambda_{\varepsilon} (F,T)=(F,T).$$

İspat: $\emptyset_{\emptyset}=(S,\emptyset)$ ve $(S,\emptyset)\lambda_{\varepsilon}(F,T)=(H,\emptyset\cup T)$ olsun. Burada, $\forall\alpha\in\emptyset\cup T=T$ için,

$$H(\alpha)=\begin{cases} S(\alpha) & \alpha\in\emptyset-T=\emptyset \\ F(\alpha) & \alpha\in T-\emptyset=T \\ S(\alpha)\cup F'(\alpha) & \alpha\in\emptyset\cap T=\emptyset \end{cases}$$

Böylece, $\forall\alpha\in T$ için, $H(\alpha)=F(\alpha)$ olup, $(H,T)=(F,T)$.

Teorem 5.2.4 (8) ve (9) dan, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, λ_{ε} işleminin birim elemanı $\emptyset_{\emptyset}$ esnek kümesidir. Klasik küme teorisinde, $A\cup B=\emptyset\iff A=\emptyset$ ve $B=\emptyset$ olduğundan, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, (F,T) esnek kümesi için, $(F,T)\lambda_{\varepsilon}(G,K)=(G,K)\lambda_{\varepsilon}(F,T)=\emptyset_{\emptyset}$ olacak şekilde $(G,K)\in S_E(U)$ bulamayız; çünkü bu durum $T\cup K=\emptyset$ olmasını ve dolayısıyla $T=\emptyset$ ve $K=\emptyset$ olmasını gerektirir. Kabulümüz gereği, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\emptyset_{\emptyset}$ haricinde hiçbir esnek küme boş parametreye sahip olmadığından, buradan birim elemen olan $\emptyset_{\emptyset}$ haricinde hiçbir elemanın, $S_E(U)$ kümesi üzerinde λ_{ε} işlemine göre tersinin olmadığı sonucu çıkartırız.

5.2.5. *Sonuç* Teorem 5.2.4 (1), (2), (4), (8) ve (9)'dan, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T\cap Z\cap M=\emptyset$ şartı altında, $(S_E(U), \lambda_{\varepsilon})$ birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoiddir. $A\subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, $(S_A(U), \lambda_{\varepsilon})$ cebirsel yapısı birleşme özelliğine sahip olmadığı için yarıgrup olamaz.

$$10) (F,T)\lambda_{\varepsilon} U_T=(F,T).$$

İspat: İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (13)'den elde edilir. Yani, U_T esnek kümesi, λ_{ε} işleminin, $S_T(U)$ kümesi üzerinde sağ birim elemanıdır.

$$11) U_T \lambda_\varepsilon (F, T) = U_T.$$

İspat: İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (14)'den elde edilir. Yani, U_T esnek kümesi, λ_ε işleminin $S_T(U)$ kümesi üzerinde sol yutan elemanıdır.

$$12) U_E \lambda_\varepsilon (F, T) = U_E.$$

İspat: $U_E = (T, E)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in E$ için, $T(\alpha) = U$. $(T, E) \lambda_\varepsilon (F, T) = (K, T \cup E)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup E = E$ için,

$$K(\alpha) = \begin{cases} T(\alpha) & \alpha \in E - T \\ F(\alpha) & \alpha \in T - E \\ T(\alpha) \cup F'(\alpha) & \alpha \in E \cap T \end{cases}$$

Buradan,

$$K(\alpha) = \begin{cases} U & \alpha \in E - T = T' \\ F(\alpha) & \alpha \in T - E = \emptyset \\ U & \alpha \in T \cap E = T \end{cases}$$

Böylece, $(K, E) = U_E$. Yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde λ_ε işleminin sol yutan elemanı U_E esnek kümesidir. $(F, T) \lambda_\varepsilon U_E \neq U_E$, yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde λ_ε işleminin sağ yutan elemanının U_E esnek kümesi olmadığı açıktır. Gerçekten, $U_E = (T, E)$ olsun.

$(F, T) \lambda_\varepsilon (T, E) = (H, T \cup E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup E = E$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - E \\ T(\alpha) & \alpha \in E - T \\ F(\alpha) \cup T'(\alpha) & \alpha \in T \cap E \end{cases}$$

Buradan,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - E = \emptyset \\ U & \alpha \in E - T = T' \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap E = T \end{cases}$$

$$13) (F, T) \lambda_\varepsilon (F, T)^r = (F, T) .$$

İspat: İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (19)'den elde edilir. Yani, her esnek kümenin tümleyeni, λ_ε işlemi için, kendisinin sağ birim elemanıdır.

$$14) (F, T)^r \lambda_\varepsilon (F, T) = (F, T)^r .$$

İspat: İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (20)'den elde edilir. Yani, her esnek kümenin tümleyeni, λ_ε işlemi için, kendisinin sol yutan elemanıdır.

$$15) [(F,T) \lambda_\varepsilon (G,Z)]^r = (F,T) \sim (G,Z).$$

İspat: $(F,T) \lambda_\varepsilon (G,Z) = (H, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$ için;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(H, T \cup Z)^r = (K, T \cup Z)$ olup, $\forall \alpha \in T \cup Z$ için;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G'(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha)' \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$$\text{Buradan, } (K, T \cup Z) = (F,T) \sim (G,Z).$$

$$16) (F,T) \lambda_\varepsilon (G,T) = \emptyset_T \Leftrightarrow (F,T) = \emptyset_T \text{ ve } (G,T) = U.$$

İspat: İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (22)'den elde edilir.

$$17) \emptyset_T \cong (F,T) \lambda_\varepsilon (G,Z), \emptyset_Z \cong (F,T) \lambda_\varepsilon (G,Z), \emptyset_Z \cong (G,Z) \lambda_\varepsilon (F,T), \emptyset_T \cong (G,Z) \lambda_\varepsilon (F,T).$$

Ayrıca, $(F,T) \lambda_\varepsilon (G,Z) \cong U_{T \cup Z}$ ve $(G,Z) \lambda_\varepsilon (F,T) \cong U_{Z \cup T}$.

İspat: Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamasından ispat açıktır.

$$18) (F,T) \cong (F,T) \lambda_\varepsilon (G,T) \text{ ve } (G,T)^r \cong (F,T) \lambda_\varepsilon (G,T).$$

İspat: İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (25)'den elde edilir.

$$19) (F,T) \cong (G,T) \text{ ise } (H,T) \lambda_\varepsilon (G,T) \cong (H,T) \lambda_\varepsilon (F,T) \text{ ve } (F,T) \lambda_\varepsilon (H,Z) \cong (G,T) \lambda_\varepsilon (H,Z).$$

İspat: $(F,T) \subseteq (G,T)$ ise $(H,T) \lambda_\varepsilon(G,T) \subseteq (H,T) \lambda_\varepsilon(F,T)$ olduğu, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (26)'dan elde edilir. $(F,T) \subseteq (G,T)$ ise $\forall \alpha \in T$ için, $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$. $(F,T) \lambda_\varepsilon(H,Z) = (Y, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$ için;

$$Y(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ H(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(G,T) \lambda_\varepsilon(H,Z) = (W, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$ için;

$$W(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ H(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ G(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$\alpha \in T-Z$ ise, $Y(\alpha) = F(\alpha)$ ve $W(\alpha) = G(\alpha)$ olup, $Y(\alpha) = F(\alpha) \subseteq G(\alpha) = W(\alpha)$; $\alpha \in Z-T$ ise, $Y(\alpha) = H(\alpha)$ ve $W(\alpha) = H(\alpha)$ olup, $Y(\alpha) = H(\alpha) \subseteq H(\alpha) = W(\alpha)$; $\alpha \in T \cap Z$ ise, $Y(\alpha) = F(\alpha) \cup H'(\alpha)$ ve $W(\alpha) = G(\alpha) \cup H'(\alpha)$ olup, $Y(\alpha) = F(\alpha) \cup H'(\alpha) \subseteq G(\alpha) \cup H'(\alpha) = W(\alpha)$ olup, $\forall \alpha \in T \cup Z$ $Y(\alpha) \subseteq W(\alpha)$. Böylece, $(F,T) \lambda_\varepsilon(H,Z) \subseteq (G,T) \lambda_\varepsilon(H,Z)$.

20) $(F,T) \lambda_\varepsilon(H,Z) \subseteq (G,T) \lambda_\varepsilon(H,Z)$ ise $(F,T) \subseteq (G,T)$ olmak zorunda değildir. Benzer şekilde, $(H,T) \lambda_\varepsilon(G,T) \subseteq (H,T) \lambda_\varepsilon(F,T)$ ise $(F,T) \subseteq (G,T)$ olmak zorunda değildir.

İspat: $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ parametre kümesi, $T = \{e_1, e_3\}$, $Z = \{e_1, e_3, e_5\}$ E'nin alt kümeleri, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F,T) , (G,T) ve (H,Z) , U üzerinde $(F,T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G,T) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$, $(H,Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_2\})\}$ olarak tanımlanan örnek kümeler olsun. $(F,T) \lambda_\varepsilon(H,Z) = (L, T \cup Z)$ olmak üzere $\forall \alpha \in T \cup Z = \{e_1, e_3, e_5\}$ için, $L(e_1) = F(e_1) \cup H'(e_1) = U$, $L(e_3) = F(e_3) \cup H'(e_3) = U$, $L(e_5) = H(e_5) = \{h_2\}$ Buradan, $(F,T) \lambda_\varepsilon(H,Z) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_2\})\}$. Şimdi de, $(G,T) \lambda_\varepsilon(H,Z) = (W, T \cup Z)$ olmak üzere $\forall \alpha \in T \cup Z = \{e_1, e_3, e_5\}$ için, $W(e_1) = G(e_1) \cup H'(e_1) = U$, $W(e_3) = G(e_3) \cup H'(e_3) = U$, $W(e_5) = H(e_5) = \{h_2\}$. Böylece $(G,T) \lambda_\varepsilon(H,Z) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_2\})\}$. Buradan, $(F,T) \lambda_\varepsilon(H,Z) \subseteq (G,T) \lambda_\varepsilon(H,Z)$ fakat $(F,T) \subseteq (G,T)$ olmadığı açıktır. $(H,T) \lambda_\varepsilon(G,T) \subseteq (H,T) \lambda_\varepsilon(F,T)$ ise $(F,T) \subseteq (G,T)$ olmak zorunda olmadığını, aynı örnek üzerinde $(H,T) = \{(e_1, U), (e_3, U)\}$ seçilerek gösterilebilir.

21) $(F,T) \subseteq (G,T)$ ve $(K,T) \subseteq (L,T)$ ise $(F,T) \lambda_\varepsilon(L,T) \subseteq (G,T) \lambda_\varepsilon(K,T)$ daha sonra buradan $(K,T) \lambda_\varepsilon(G,T) \subseteq (L,T) \lambda_\varepsilon(F,T)$.

İspat: İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (28)'den elde edilir.

5.2.6. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş lamda işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

5.2.6.1. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş lamda işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Genişletilmiş Lamda İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Soldan Dağılıması:

1) $T \cap Z \cap M = \emptyset$ ise $(F, T) \lambda_\epsilon [(G, Z) \cap_R (H, M)] = [(F, T) \lambda_\epsilon (G, Z)] \cap_R [(F, T) \lambda_\epsilon (H, M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Z) \cap_R (H, M) = (R, Z \cap M)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in Z \cap M; R(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(F, T) \lambda_\epsilon (R, Z \cap M) = (L, (T \cup (Z \cap M)))$ olsun. Sonra burada, $\forall \alpha \in T \cup (Z \cap M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cap M) \\ R(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - T \\ F(\alpha) \cup R'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cap M) \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - T \\ F(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) \lambda_\epsilon (G, Z)] \cap_R [(F, T) \lambda_\epsilon (H, M)]$ bakalım. Buradan

$(F, T) \lambda_\epsilon (G, Z) = (S, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \lambda_\epsilon (H, M) = (K, T \cup M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - T \\ F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(S, T \cup Z) \cap_R (K, T \cup M) = (W, (T \cup Z) \cap (T \cup M))$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M)$ için

$W(\alpha) = T(\alpha) \cap K(\alpha)$. Böylece,

$$\begin{array}{lcl}
 W(\alpha) = \left\{ \begin{array}{l} F(\alpha) \cap F(\alpha) \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) \\ F(\alpha) \cap [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] \\ G(\alpha) \cap F(\alpha) \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) \\ G(\alpha) \cap [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] \\ [F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap F(\alpha) \\ [F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap H(\alpha) \\ [F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] \end{array} \right. & \begin{array}{l} \alpha \in (T-Z) \cap (T-M) = T \cap Z' \cap M' \\ \alpha \in (T-Z) \cap (M-T) = \emptyset \\ \alpha \in (T-Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M \\ \alpha \in (Z-T) \cap (T-M) = \emptyset \\ \alpha \in (Z-T) \cap (M-T) = T' \cap Z \cap M \\ \alpha \in (Z-T) \cap (T \cap M) = \emptyset \\ \alpha \in (T \cap Z) \cap (T-M) = T \cap Z \cap M' \\ \alpha \in (T \cap Z) \cap (M-T) = \emptyset \\ \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M \end{array}
 \end{array}$$

Böylece,

$$\begin{array}{lcl}
 W(\alpha) = \left\{ \begin{array}{l} F(\alpha) \\ F(\alpha) \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) \\ F(\alpha) \\ F'(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cap H'(\alpha)] \end{array} \right. & \begin{array}{l} \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ \alpha \in T \cap Z \cap M \end{array}
 \end{array}$$

Burada; N fonksiyonundaki $T-(Z \cap M)$ yi ele alırsak, $T-(Z \cap M) = T-(Z \cap M)'$ olup, bir eleman $(Z \cap M)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $Z-M$ de, ya $M-Z$ de, ya da $Z \cup M$ nin tümleyeninde bulunur. Buradan, $\alpha \in T-(Z \cap M)$ ise $\alpha \in T \cap Z \cap M'$ veya $\alpha \in T \cap Z' \cap M$ veya $\alpha \in T \cap Z' \cap M'$ olduğuna dikkat edecek olursa, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ ise L ve W fonksiyonları birbirine eşit olur.

$$2) T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z \cap M = \emptyset; (F, T) \lambda_{\varepsilon} [(G, Z) \cup_R (H, M)] = [(F, T) \lambda_{\varepsilon} (G, Z)] \cup_R [(F, T) \lambda_{\varepsilon} (H, M)].$$

ii) Genişletilmiş Lamda İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) (T \Delta Z) \cap M = \emptyset \text{ ise, } [(F, T) \cap_R (G, Z)] \lambda_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \lambda_{\varepsilon} (H, M)] \cap_R [(G, Z) \lambda_{\varepsilon} (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, T) \cap_R (G, Z) = (R, T \cap Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap Z$; $R(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$. $(R, T \cap Z) \lambda_{\varepsilon} (H, M) = (L, (T \cap Z) \cup M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup M$;

$$\begin{array}{lcl}
 L(\alpha) = \left\{ \begin{array}{l} R(\alpha) \\ H(\alpha) \\ R(\alpha) \cup H'(\alpha) \end{array} \right. & \begin{array}{l} \alpha \in (T \cap Z) - M \\ \alpha \in M - (T \cap Z) \\ \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{array}
 \end{array}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cap Z) \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) \lambda_{\epsilon}(H, M)] \cap_R [(G, Z) \lambda_{\epsilon}(H, M)]$ bakalım. Burada $(F, T) \lambda_{\epsilon}(H, M) = (S, T \cup M)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - T \\ F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G, Z) \lambda_{\epsilon}(H, M) = (K, Z \cup M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(S, T \cup Z) \cap_R (K, Z \cup M) = (W, (T \cup Z) \cap (Z \cup M))$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap (Z \cup M)$ için $W(\alpha) = S(\alpha) \cap K(\alpha)$ olup,

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T - M) \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T - M) \cap (M - Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (T - M) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (M - T) \cap (Z - M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (M - T) \cap (M - Z) = T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (M - T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z - M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (M - Z) = T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cap [G(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada; L fonksiyonundaki, $M - (T \cap Z)$ 'yi ele alırsak, $M - (T \cap Z) = M \cap (T \cap Z)'$ olup, bir eleman $(T \cap Z)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $T - Z$ de, ya $Z - T$ de, ya da $T \cup Z$ nin tümleyenindedir. Buradan faydalananarak, $\alpha \in M - (T \cap Z)$ ise $\alpha \in M \cap T \cap Z'$, $\alpha \in M \cap Z \cap T'$ veya

$\alpha \in M \cap T' \cap Z'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı ile $L = W$ sağlanır. $T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartının $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

2) $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ ise, $[(F, T) \cup_R (G, Z)] \lambda_\varepsilon (H, M) = [(F, T) \lambda_\varepsilon (H, M)] \cup_R [(G, Z) \lambda_\varepsilon (H, M)]$.

5.2.6.1.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_R)$ cebirsel yapısının birimi U_E olan komutatif, idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 5.2.5'de $(S_E(U), \lambda_\varepsilon)$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, üstelik Teorem 5.2.4 (12) de, $U_E \lambda_\varepsilon (F, A) = U_E$, yani U_E nin $S_E(U)$ kümesi üzerinde λ_ε işlemi altında, sol yutan eleman olduğu ve Teorem 5.2.6.1 (i) (2) başlığında, λ_ε işleminin $\cap_R$ işlemine $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = (T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_R, \lambda_\varepsilon)$ cebirsel yapısı, komutatif olmayan, toplamsal idempotent birimli ve sıfırlı (sağ) yakın yarı-halkadır. Ayrıca, $(F, A) \lambda_\varepsilon U_E \neq U_E$ olduğundan, $(S_E(U), \cap_R, \lambda_\varepsilon)$ sıfır simetrik olmayan (sağ) yakın yarı-halkadır.

5.2.6.1.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_R)$ cebirsel yapısının birimi U_E olan komutatif idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 5.2.5'de $(S_E(U), \lambda_\varepsilon)$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 5.2.6.1 (i) (1) başlığında, λ_ε işleminin $\cap_R$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında soldan dağıldığı, Teorem 5.2.6.1 (ii) (1) başlığında, λ_ε işleminin $\cap_R$ işlemine $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartı ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = (T \Delta Z) \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_R, \lambda_\varepsilon)$ cebirsel yapısı, komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

5.2.6.1.3. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_E$ olan komutatif idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes olduğunu (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 5.2.5'de $(S_E(U), \lambda_\varepsilon)$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu,

Teorem 5.2.6.1 (i) (2) başlığında, λ_ε işleminin $\cup_R$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında soldan dağıldığı, Teorem 5.2.6.1 (ii) (2) başlığında, λ_ε işleminin $\cup_R$ işlemine $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartı ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = (T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_R, \lambda_\varepsilon)$ cebirsel yapısı, komutatif olmayan, toplamsal birimli, sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

5.2.6.2. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş lamda işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Genişletilmiş Lamda İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılması

$$1) T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z \cap M = \emptyset; (F, T) \lambda_\varepsilon [(G, Z) \cap_\varepsilon (H, M)] = [(F, T) \lambda_\varepsilon (G, Z)] \cap_\varepsilon [(F, T) \lambda_\varepsilon (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(G, Z) \cap_\varepsilon (H, M) = (R, Z \cup M)$ olsun. $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \lambda_\varepsilon (R, Z \cup M) = (N, (T \cup (Z \cup M)))$ bakalım. $\forall \alpha \in T \cup (Z \cup M)$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) \\ R(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) - T \\ F(\alpha) \cup R'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z - M) - T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M - Z) - T = T' \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap (M - Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(F, T) \lambda_\varepsilon (G, Z) = (K, T \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \lambda_\varepsilon (H, M) = (S, T \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - T \\ F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup Z) \cap_\varepsilon (S, T \cup M) = (L, (T \cup Z) \cup (T \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) - (T \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) - (T \cup Z) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T - Z) - (T \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z - T) - (T \cup M) = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) & \alpha \in (T - M) - (T \cup Z) = \emptyset \\ H(\alpha) & \alpha \in (M - T) - (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (T \cup Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap (T - M) = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap (M - T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (T - Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (Z - T) \cap (T - M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z - T) \cap (M - T) = T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \cap [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (Z - T) \cap (T \cap M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap F(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T - M) = T \cap Z \cap M' \\ [F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (M - T) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cap H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

$T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ için $N = L$ olduğu görülür. $T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartının $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \lambda_{\varepsilon}[(G, Z) \cup_{\varepsilon} (H, M)] = [(F, T) \lambda_{\varepsilon}(G, Z)] \cup_{\varepsilon} [(F, T) \lambda_{\varepsilon}(H, M)]$$

ii) Genişletilmiş Lamda İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılıması:

$$1) (T \Delta Z) \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)] \lambda_{\varepsilon}(H, M) = [(F, T) \lambda_{\varepsilon}(H, M)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \lambda_{\varepsilon}(H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = (R, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) \lambda_{\varepsilon}(H, M) = (N, (T \cup Z) \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup M$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cup Z) \\ R(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T - Z) - M = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z - T) - M = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (Z - T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(F, T) \lambda_{\varepsilon}(H, M) = (K, T \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - T \\ F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G, Z) \lambda_{\varepsilon}(H, M) = (S, T \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup M) \cup_{\varepsilon} (S, Z \cup M) = (L, (T \cup M) \cup (Z \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) - (Z \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) - (T \cup M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-M) - (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M-T) - (Z \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z-M) - (T \cup M) = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M-Z) - (T \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - (T \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T-M) \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T-M) \cap (M-Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (T-M) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (M-T) \cap (Z-M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (M-T) \cap (M-Z) = T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cup [G(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (M-T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z-M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (M-Z) = T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Buradan

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ U & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ U & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

$T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ için $N=L$ olduğu görülür. $T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartının $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

2) $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ ise $[(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \lambda_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \lambda_{\varepsilon} (H, M)] \cap_{\varepsilon} [(G, Z) \lambda_{\varepsilon} (H, M)]$.

5.2.6.2.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 5.2.5’de $(S_E(U), \lambda_\varepsilon)$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 5.2.6.2 (i) (2) başlığında, λ_ε işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 5.2.6.2 (ii) (1) başlığında, λ_ε işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartında ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

5.2.6.2.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 5.2.5’de $(S_E(U), \lambda_\varepsilon)$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 5.2.6.2 (i) (1) başlığında, λ_ε işleminin $\cap_\varepsilon$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında soldan dağıldığı, Teorem 5.2.6.2 (ii) (2) başlığında, λ_ε işleminin $\cap_\varepsilon$ işlemine $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartları ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = (T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

5.2.6.5. Teorem (F, T) , (G, Z) , (H, M) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş lamda işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Genişletilmiş Lamda İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Soldan Dağılması:

$$1) T \cap Z \cap M' = T \cap Z \cap M = \emptyset; (F, T) \lambda_\varepsilon [(G, Z) \underset{\cap}{\sim} (H, M)] = [(F, T) \lambda_\varepsilon (G, Z)] \underset{\cap}{\sim} [(F, T) \lambda_\varepsilon (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(G, Z) \underset{\cap}{\sim} (H, M) = (R, Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z-M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \lambda_\varepsilon (R, Z) = (N, T \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ R(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha) \cup R'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z-M)-T = T' \cap Z \cap M' \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M)-T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) \lambda_\varepsilon (G, Z)] \sim_{\cap} [(F, T) \lambda_\varepsilon (H, M)]$ bakalım. Burada

$(F, T) \lambda_\varepsilon (G, Z) = (K, T \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \lambda_\varepsilon (H, M) = (S, T \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup Z) \sim_{\cap} (S, T \cup M) = (L, (T \cup Z) \cup (T \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) - (T \cup M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$F(\alpha)$	$\alpha \in (T-Z) - (T \cup M) = \emptyset$
$G(\alpha)$	$\alpha \in (Z-T) - (T \cup M) = T' \cap Z \cap M'$
$F(\alpha) \cup G'(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap Z) - (T \cup M) = \emptyset$
$F(\alpha) \cap F(\alpha)$	$\alpha \in (T-Z) \cap (T-M) = T \cap Z' \cap M'$
$F(\alpha) \cap H(\alpha)$	$\alpha \in (T-Z) \cap (M-T) = \emptyset$
$L(\alpha) = F(\alpha) \cap [F(\alpha) \cup H'(\alpha)]$	$\alpha \in (T-Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M$
$G(\alpha) \cap F(\alpha)$	$\alpha \in (Z-T) \cap (T-M) = \emptyset$
$G(\alpha) \cap H(\alpha)$	$\alpha \in (Z-T) \cap (M-T) = T' \cap Z \cap M$
$G(\alpha) \cap [F(\alpha) \cup H'(\alpha)]$	$\alpha \in (Z-T) \cap (T \cap M) = \emptyset$
$[F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap F(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap Z) \cap (T-M) = T \cap Z \cap M'$
$[F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap H(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap Z) \cap (M-T) = \emptyset$
$[F(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap [F(\alpha) \cup H'(\alpha)]$	$\alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M$
Buradan,	
$G(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M'$
$F(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M'$
$L(\alpha) = F(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M$
$G(\alpha) \cap H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M$
$F(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z \cap M'$
$F(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cap H'(\alpha)]$	$\alpha \in T \cap Z \cap M$

Burada; N fonksiyonundaki, T-Z yi ele alırsak, $T-Z = T \cap Z'$ olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya M-Z de, ya da MUZ nin tümleyenindedir. Burdan, $\alpha \in T-Z$ ise $\alpha \in T \cap M \cap Z'$ veya $\alpha \in T \cap M' \cap Z'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T \cap Z \cap M' = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı ile $N=L$ sağlanır.

$$2) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \lambda_{\varepsilon} [(G, Z) \widetilde{\cup} (H, M)] = [(F, T) \lambda_{\varepsilon} (G, Z)] \widetilde{\cup} [(F, M) \lambda_{\varepsilon} (H, M)].$$

ii) Genişletilmiş Lamda İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) T' \cap Z \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset; [(F, T) \widetilde{\cup} (G, Z)] \lambda_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \lambda_{\varepsilon} (H, M)] \widetilde{\cup} [(G, Z) \widetilde{\lambda}_{\lambda} (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, T) \widetilde{\cup} (G, Z) = (R, T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T) \lambda_\varepsilon(H, M) = (N, T \cup M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in T-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ R(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-Z)-M = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z)-M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) \lambda_\varepsilon(H, M)] \tilde{\cup} [(G, Z) \tilde{\lambda}_\lambda(H, M)]$ bakalım. Burada

$(F, T) \lambda_\varepsilon(H, M) = (K, T \cup M) \forall \alpha \in T \cup M$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G, Z) \tilde{\lambda}_\lambda(H, M) = (S, Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in Z$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z-M \\ G(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup M) \tilde{\cup} (S, Z) = (L, T \cup M)$

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M)-Z \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap Z \end{cases}$$

Böylece,

$F(\alpha)$	$\alpha \in (T-M)-Z = T \cap Z' \cap M'$
$H(\alpha)$	$\alpha \in (M-T)-Z = T' \cap Z' \cap M$
$F(\alpha) \cup H'(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M)-Z = T \cap Z' \cap M$
$F(\alpha) \cup G(\alpha)$	$\alpha \in (T-M) \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M'$
$L(\alpha) = F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cup H'(\alpha)]$	$\alpha \in (T-M) \cap (Z \cap M) = \emptyset$
$H(\alpha) \cup G(\alpha)$	$\alpha \in (M-T) \cap (Z-M) = \emptyset$
$H(\alpha) \cup [G(\alpha) \cup H'(\alpha)]$	$\alpha \in (M-T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M$
$[F(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cup G(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M) \cap (Z-M) = \emptyset$
$[F(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cup H'(\alpha)]$	$\alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M$

Buradan,

$F(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M'$
$F(\alpha) \cup G(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z \cap M'$
$L(\alpha) = H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z' \cap M$
U	$\alpha \in T' \cap Z \cap M$
$F(\alpha) \cup H'(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M$
$[F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup H(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z \cap M$

Burada; N fonksiyonundaki, M-T yi ele alırsak, $M-T = M \cap T'$ olup, bir eleman T nin tümleyeninde ise o eleman ya Z-T de, ya da $Z \cup T$ nin tümleyenindedir. Burdan, $\alpha \in M-T$ ise $\alpha \in M \cap Z \cap T'$ veya $\alpha \in M \cap Z' \cap T'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T' \cap Z \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı ile $N=L$ sağlanır.

$$2) T' \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \underset{\cap}{\sim} (G, Z)] \lambda_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \lambda_{\varepsilon} (H, M)] \underset{\cap}{\sim} [(G, Z) \underset{\lambda}{\sim} (H, M)].$$

5.2.6.5.1. *Sonuç* Yavuz (2024), (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \underset{\cup}{\sim})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğunu göstermişti. Sonuç 5.2.5'de $(S_E(U), \lambda_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 5.2.6.3 (i) (2) başlığında, λ_{ε} işleminin $\underset{\cup}{\sim}$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 5.2.6.3 (ii) (1) başlığında, λ_{ε} işleminin $\underset{\cup}{\sim}$ işlemine $T' \cap Z \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları ile sağdan dağıldığı

gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = (T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \tilde{\cup}, \lambda_\varepsilon)$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

2.6.2.2. *Sonuç* Yavuz (2024), (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğunu göstermişti. Sonuç 5.2.5'de $(S_E(U), +_\varepsilon)$ cebirsel yapısının $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 5.2.6.2 (i) (1) başlığında, λ_ε işleminin $\tilde{\cap}$ işlemine $T \cap Z \cap M' = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında soldan dağıldığı, Teorem 5.2.6.2 (ii) (2) başlığında, λ_ε işleminin $\tilde{\cap}$ işlemine $T' \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T' \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \tilde{\cap}, \lambda_\varepsilon)$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimli sıfırsız, birimli bir yarı-halkadır.

6. KISITLANMIŞ ve GENİŞLETİLMİŞ YILDIZ İŞLEMİ

Bu bölümde, kısıtlanmış yıldız ve genişletilmiş yıldız adı verilen yeni bir kısıtlanmış ve genişletilmiş esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile birlikte diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları ve $S_E(U)$ kümesi üzerinde bu işlemlerin hangi cebirsel yapıları oluşturduğu incelenmiş ve çok önemli sonuçlar elde edilmiştir.

6.1. Kısıtlanmış Yıldız İşlemi ve Özellikleri

6.1.1. Tanım (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z)$ ile gösterilen kısıtlanmış yıldız işlemi $C = T \cap Z$ olmak üzere, $C = T \cap Z \neq \emptyset$ ise $\forall \alpha \in C$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$; $C = T \cap Z = \emptyset$ ise $(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) = (H, C) = \emptyset_{\emptyset}$ olacak şekilde $(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) = (H, C)$ ile tanımlanır. Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_{\emptyset}$ olduğundan, tanımda $C = T \cap Z = \emptyset$ ise, $(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) = \emptyset_{\emptyset}$ olduğu açıktır. Buradan, kısıtlanmış yıldız işleminin tanımlı olması için, (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde iki esnek küme olmak üzere, $T \cap Z \neq \emptyset$ şartının bulunmadığı görülmektedir.

6.1.2. Örnek $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $T = \{e_1, e_3\}$, $Z = \{e_2, e_3, e_4\}$ E 'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde $(F, T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, Z) = \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$ olarak tanımlanan $(e_4, h_3, h_5)\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) = (H, T \cap Z)$ olmak üzere $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_3\}$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$ olup, $H(e_3) = F'(e_3) \cup G'(e_3) = \{h_3, h_4\} \cup \{h_1, h_5\} = \{h_1, h_3, h_4, h_5\}$. Böylece, $(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) = \{(e_3, \{h_1, h_3, h_4, h_5\})\}$.

6.1.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $*_{\mathcal{R}}$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $*_{\mathcal{R}}$ 'nin $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$*_{\mathcal{R}}: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((F, T), (G, Z)) \rightarrow (F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) = (H, T \cap Z)$$

(F,T) ve (G,Z) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F,T) *_{\mathcal{R}} (G,Z)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir.

$$2) [(F,T) *_{\mathcal{R}} (G,Z)] *_{\mathcal{R}} (H,M) \neq (F,T) *_{\mathcal{R}} [(G,Z) *_{\mathcal{R}} (H,M)].$$

İspat: $(F,T) *_{\mathcal{R}} (G,Z) = (S, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $T(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$. $(S, T \cap Z) *_{\mathcal{R}} (H,M) = (R, (T \cap Z) \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$ için, $R(\alpha) = T'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. Böylece,

$$R(\alpha) = [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup H'(\alpha)$$

$(G,Z) *_{\mathcal{R}} (H,M) = (K, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $K(\alpha) = G'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(F,T) *_{\mathcal{R}} (K, Z \cap M) = (S, T \cap (Z \cap M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$ için, $S(\alpha) = F'(\alpha) \cup K'(\alpha)$. Böylece,

$$S(\alpha) = F'(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Burada $(R, (T \cap Z) \cap M) \neq (S, T \cap (Z \cap M))$ olduğu görülür.

Yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $*_{\mathcal{R}}$ işleminin birleşme özelliği yoktur. Burada, $T \cap Z = \emptyset$ veya $Z \cap M = \emptyset$ veya $T \cap M = \emptyset$ ise, bu durumda her iki taraf $\emptyset_{\emptyset}$ esnek kümesi olacağından, bu şartlar altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $*_{\mathcal{R}}$ işleminin birleşme özelliği sağlanacağı açıktır.

$$3) [(F,T) *_{\mathcal{R}} (G,T)] *_{\mathcal{R}} (H,T) \neq (F,T) *_{\mathcal{R}} [(G,T) *_{\mathcal{R}} (H,T)].$$

İspat: $(F,T) *_{\mathcal{R}} (G,T) = (K,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap T = T$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$. $(K,T) *_{\mathcal{R}} (H,T) = (R,T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap T = T$ için, $R(\alpha) = K'(\alpha) \cup H'(\alpha)$ olur. Böylece,

$$R(\alpha) = [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup H'(\alpha)$$

$(G,T) *_{\mathcal{R}} (H,T) = (L,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap T$ için, $L(\alpha) = G'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(F,T) *_{\mathcal{R}} (L,T) = (N,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap T$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cup L'(\alpha)$. Böylece,

$$N(\alpha) = F'(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Buradan, $(R,T) \neq (N,T)$ olduğu görülür.

Yani, parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler kümesi üzerinde $*_R$ işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F,T) *_R (G,Z) = (G,Z) *_R (F,T).$$

İspat: $(F,T) *_R (G,Z) = (H,T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$. $(G,Z) *_R (F,T) = (S,Z \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap T$ için, $S(\alpha) = G'(\alpha) \cup F'(\alpha)$. Böylece,

$$(F,T) *_R (G,Z) = (G,Z) *_R (F,T).$$

$S_E(U)$ kümesi üzerinde, $*_R$ işleminin değişme özelliği vardır. $(F,T) *_R (G,T) = (G,T) *_R (F,T)$ olduğu, yani $*_R$ işleminin parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler kümesi üzerinde de değişme özelliğine sahip olduğu açıktır.

$$5) (F,T) *_R (F,T) = (F,T)^r.$$

İspat: $(F,T) *_R (F,T) = (H,T \cap T)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup F'(\alpha) = F'(\alpha)$ olur ve böylece $(H,T) = (F,T)^r$ elde edilir. Yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $*_R$ işlemi, denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

$$6) (F,T) *_R \emptyset_T = \emptyset_T *_R (F,T) = U_T.$$

İspat: $\emptyset_T = (S,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(F,T) *_R (S,T) = (H,T \cap T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup S'(\alpha) = F'(\alpha) \cup U = U$. Böylece, $(H,T) = U_T$.

$$7) (F,T) *_R \emptyset_M = \emptyset_M *_R (F,T) = U_{M \cap T}.$$

İspat: $\emptyset_M = (S,M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in M$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(F,T) *_R (S,M) = (H,T \cap M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup S'(\alpha) = F'(\alpha) \cup U = U$ Böylece, $(H,T \cap M) = U_{M \cap T}$. Burada $T \cap M = \emptyset$ ise $(F,T) *_R \emptyset_M = \emptyset_M *_R (F,T) = \emptyset_\emptyset$ olur.

$$8) (F,T) *_R \emptyset_E = \emptyset_E +_R (F,T) = U_T.$$

İspat: $\emptyset_E = (S, E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in E$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(F, T) *_{\mathcal{R}} (S, E) = (H, T \cap E)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap E = T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup S'(\alpha) = F'(\alpha) \cup \emptyset = F'(\alpha)$. Böylece, $(H, T) = U_T$.

$$9) (F, T) *_{\mathcal{R}} \emptyset_{\emptyset} = \emptyset_{\emptyset} *_{\mathcal{R}} (F, T) = \emptyset_{\emptyset}.$$

İspat: $\emptyset_{\emptyset} = (S, \emptyset)$ olsun. $(F, T) *_{\mathcal{R}} (S, \emptyset) = (H, T \cap \emptyset) = (H, \emptyset)$ olup, $\emptyset_{\emptyset}$ parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme olduğu için, $(H, \emptyset) = \emptyset_{\emptyset}$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $*_{\mathcal{R}}$ işleminin yutan elemanı $\emptyset_{\emptyset}$ esnek kümesidir.

$$10) (F, T) *_{\mathcal{R}} U_T = U_T *_{\mathcal{R}} (F, T) = (F, T)^{\mathcal{I}}.$$

İspat: $U_T = (K, T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha) = U$. $(F, T) *_{\mathcal{R}} (K, T) = (H, T \cap T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup T'(\alpha) = F'(\alpha) \cup \emptyset = F'(\alpha)$. Böylece, $(H, T) = (F, T)^{\mathcal{I}}$.

$$11) (F, T) *_{\mathcal{R}} U_M = U_M *_{\mathcal{R}} (F, T) = (F, T \cap M)^{\mathcal{I}}.$$

İspat: $U_M = (K, M)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in M$ için, $K(\alpha) = U$. $(F, T) *_{\mathcal{R}} (K, M) = (H, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup T'(\alpha) = F'(\alpha) \cup \emptyset = F'(\alpha)$. Böylece $(H, T \cap M) = (F, T \cap M)^{\mathcal{I}}$. Burada $T \cap M = \emptyset$ ise $(F, T) *_{\mathcal{R}} U_M = U_M *_{\mathcal{R}} (F, T) = \emptyset_{\emptyset}$ olur.

$$12) (F, T) *_{\mathcal{R}} U_E = U_E *_{\mathcal{R}} (F, T) = (F, T)^{\mathcal{I}}.$$

İspat: $U_E = (K, E)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in E$ için, $K(\alpha) = U$. $(F, T) *_{\mathcal{R}} (K, E) = (H, T \cap E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap E = T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup K'(\alpha) = F'(\alpha) \cup \emptyset = F'(\alpha)$. Böylece $(H, T) = (F, T)^{\mathcal{I}}$.

$$13) (F, T) *_{\mathcal{R}} (F, T)^{\mathcal{I}} = (F, T)^{\mathcal{I}} *_{\mathcal{R}} (F, T) = U_T.$$

İspat: $(F, T)^{\mathcal{I}} = (H, T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha)$. $(F, T) *_{\mathcal{R}} (H, T) = (L, T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $L(\alpha) = F'(\alpha) \cup H'(\alpha) = F'(\alpha) \cup F(\alpha) = U$. Böylece, $(L, T) = (F, T)^{\mathcal{I}}$.

$$14) [(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z)]^{\mathcal{I}} = (F, T) \cap_{\mathcal{R}} (G, Z).$$

İspat: $(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) = (H, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$. $(H, T \cap Z)^{\mathcal{I}} = (K, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ olur. Böylece, $(K, T \cap Z) = (F, T) \cap_{\mathcal{R}} (G, Z)$.

$$15) (F, T) *_{\mathcal{R}} (G, T) = \emptyset_T \Leftrightarrow (F, T) = U_T \text{ ve } (G, T) = U_T.$$

İspat: $(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, T) = (K, T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$. $(K, T) = \emptyset_T$ olduğundan, $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha) = \emptyset$. Böylece, $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha) = \emptyset \Leftrightarrow \forall \alpha \in T$ için, $F'(\alpha) = \emptyset$ ve $G'(\alpha) = \emptyset \Leftrightarrow \forall \alpha \in T$ için, $F(\alpha) = U$ ve $G(\alpha) = U \Leftrightarrow (F, T) = U_T$ ve $(G, T) = U_T$.

$$16) \emptyset_{T \cap Z} \subseteq (F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) \text{ ve } (F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) \subseteq U_T \text{ ve } (F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) \subseteq U_Z.$$

İspat: Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamasından ispat açıktır.

$$17) (F, T \cap Z)^r \subseteq (F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) \text{ ve } (G, T \cap Z)^r \subseteq (F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z).$$

İspat: $(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) = (H, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$ olur. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $F'(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cup G'(\alpha) = H(\alpha)$. Böylece, $(F, T \cap Z)^r \subseteq (F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z)$. $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cup G'(\alpha) = H(\alpha)$ olduğundan, $(G, T \cap Z)^r \subseteq (F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z)$.

$$18) (F, T)^r \subseteq (F, T) *_{\mathcal{R}} (G, T) \text{ ve } (G, T)^r \subseteq (F, T) *_{\mathcal{R}} (G, T).$$

İspat: $(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, T) = (H, T \cap T)$ olsun. $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$. Böylece, $\forall \alpha \in T$ için, $F'(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cup G'(\alpha) = H(\alpha)$ olduğundan $(F, T)^r \subseteq (F, T) *_{\mathcal{R}} (G, T)$. Benzer şekilde, $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cup G'(\alpha) = H(\alpha)$ olduğundan $(G, T)^r \subseteq (F, T) *_{\mathcal{R}} (G, T)$.

$$19) (F, T) \subseteq (G, Z) \Leftrightarrow (F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) = (F, T)^r.$$

İspat: $(F, T) \subseteq (G, Z)$ olsun. Buradan, $T \subseteq Z$ ve $\forall \alpha \in T$ için, $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ ve böylece $\forall \alpha \in T$ için, $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$ olur. $(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) = (K, T \cap Z = T)$ olsun. Daha sonra buradan $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha) = F'(\alpha)$. Böylece, $(K, T) = (F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) = (F, T)^r$. Tersine, $(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) = (F, T)^r$ olsun. Buradan, $T \cap Z = T$ olup, $T \subseteq Z$. Ayrıca, $\forall \alpha \in T$ için, $F'(\alpha) \cup G'(\alpha) = F'(\alpha)$ olup, $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$. Böylece, $\forall \alpha \in T$ için $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ olup, $(F, T) \subseteq (G, Z)$.

$$20) (F, T) \subseteq (G, T) \text{ ise } (G, T) *_{\mathcal{R}} (H, Z) \subseteq (F, T) *_{\mathcal{R}} (H, Z) \text{ ve } (H, Z) *_{\mathcal{R}} (G, T) \subseteq (H, Z) *_{\mathcal{R}} (G, T).$$

İspat: $(F, T) \subseteq (G, T)$ olsun. $\forall \alpha \in T$ için, $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ ve böylece $\forall \alpha \in T$ için, $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$

olur. $(G,T) *_R (H,Z) = (K,T \cap Z)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha) = G'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(F,T) *_R (H,Z) = (L,T \cap Z)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $L(\alpha) = F'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. Buradan, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha) = G'(\alpha) \cup H'(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cup H'(\alpha) = L(\alpha)$ olup, $(G,T) *_R (H,Z) \subseteq (F,T) *_R (H,Z)$. Değişme özelliğinden, aynı şartlar altında, $(H,Z) *_R (G,T) \subseteq (H,Z) *_R (G,T)$ sağlanacağı açıktır.

21) $(G,T) *_R (H,Z) \subseteq (F,T) *_R (H,Z)$ ise $(F,T) \subseteq (G,T)$ olmak zorunda değildir. Yani Teorem 6.1.3 (20) nın tersi doğru değildir.

İspat: Teroem 6.1.3 (20) nın tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $T = \{e_1, e_3\}$, $Z = \{e_1, e_3, e_5\}$ E'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F,T) , (G,T) ve (H,Z) , U üzerinde $(F,T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G,T) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$, $(H,Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_1, h_5\})\}$ olarak tanımlanan esnek kümeler olsun. $(G,T) *_R (H,Z) = (L, T \cap Z)$ olmak üzere $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_1, e_3\}$ için, $L(\alpha) = G'(\alpha) \cup H'(\alpha)$ olup, $L(e_1) = G'(e_1) \cup H'(e_1) = U$, $L(e_3) = G'(e_3) \cup H'(e_3) = U$. Buradan, $(G,T) *_R (H,Z) = \{(e_1, U), (e_3, U)\}$. Şimdi de, $(F,T) *_R (H,Z) = (K, T \cap Z)$ olmak üzere $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_1, e_3\}$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup H'(\alpha)$ olup, $K(e_1) = F'(e_1) \cup H'(e_1) = U$, $K(e_3) = F'(e_3) \cup H'(e_3) = U$. Böylece, $(F,T) *_R (H,Z) = \{(e_1, U), (e_3, U)\}$. Buradan, $(G,T) *_R (H,Z) \subseteq (F,T) *_R (H,Z)$; fakat $(F,T) \subseteq (G,T)$ olmadığı açıktır.

22) $(F,T) \subseteq (G,T)$ ve $(K,V) \subseteq (L,V)$ ise $(G,T) *_R (L,V) \subseteq (F,T) *_R (K,V)$ ve buradan da $(L,V) *_R (G,T) \subseteq (K,V) *_R (F,T)$.

İspat: $(F,T) \subseteq (G,T)$ ve $(K,V) \subseteq (L,V)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in T$ ve $\forall \alpha \in Z$ için, $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ ve $K(\alpha) \subseteq L(\alpha)$. Böylece $\forall \alpha \in T$ ve $\forall \alpha \in Z$ için, $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$ ve $L'(\alpha) \subseteq K'(\alpha)$. $(G,T) *_R (L,Z) = (M, T \cap Z)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $M(\alpha) = G'(\alpha) \cup L'(\alpha)$. $(F,T) *_R (K,Z) = (N, T \cap Z)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cup K'(\alpha)$. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$ ve $L'(\alpha) \subseteq K'(\alpha)$ olduğundan, $M(\alpha) = G'(\alpha) \cup L'(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cup K'(\alpha) = N(\alpha)$ olur. Böylece, $(G,T) *_R (L,V) \subseteq (F,T) *_R (K,V)$. Değişme özelliğinden, aynı şartlar altında, $(L,V) *_R (G,T) \subseteq (K,V) *_R (F,T)$ sağlandığı açıktır.

6.1.4. Teorem (F,T) , (G,Z) , (H,M) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış yıldız işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

6.1.4.1. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış yıldız işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Yıldız İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Soldan Dağılıması:

$$1) (F, T) *_{\mathcal{R}} [(G, Z) \cap_{\mathcal{R}} (H, M)] = [(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z)] \cup_{\mathcal{R}} [(F, T) *_{\mathcal{R}} (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Z) \cap_{\mathcal{R}} (H, M) = (R, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $R(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(F, T) *_{\mathcal{R}} (R, Z \cap M) = (N, T \cap (Z \cap M))$ olsun, $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cup R'(\alpha)$. Buradan, $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için,

$$N(\alpha) = F'(\alpha) \cup [(G'(\alpha) \cap H'(\alpha))]$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafını yani $[(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z)] \cup_{\mathcal{R}} [(F, T) *_{\mathcal{R}} (H, M)]$ ele alalım: $(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z) = (V, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $V(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$. Şimdi $(F, T) *_{\mathcal{R}} (H, M) = (W, T \cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $W(\alpha) = F'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(V, T \cap Z) \cup_{\mathcal{R}} (W, T \cap M) = (S, (T \cap Z) \cap (T \cap M))$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için, $S(\alpha) = V(\alpha) \cup W(\alpha)$,

$$S(\alpha) = [F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)]$$

Böylece, $(N, T \cap Z \cap M) = (S, T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

$$2) (F, T) *_{\mathcal{R}} [(G, Z) \cup_{\mathcal{R}} (H, M)] = [(F, T) *_{\mathcal{R}} (G, Z)] \cap_{\mathcal{R}} [(F, T) *_{\mathcal{R}} (H, M)].$$

$$3) (F, T) *_{\mathcal{R}} [(G, Z) *_{\mathcal{R}} (H, M)] = [(F, T) +_{\mathcal{R}} (G, Z)] \cap_{\mathcal{R}} [(F, T) +_{\mathcal{R}} (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Z) *_{\mathcal{R}} (H, M) = (R, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $R(\alpha) = G'(\alpha) \cap H'(\alpha)$. $(F, T) *_{\mathcal{R}} (R, Z \cap M) = (N, T \cap (Z \cap M))$ olsun, $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cup R'(\alpha)$. Buradan, $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için,

$$N(\alpha) = F'(\alpha) \cup [(G(\alpha) \cap H(\alpha))]$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafını yani $[(F, T) +_{\mathcal{R}} (G, Z)] \cap_{\mathcal{R}} [(F, T) +_{\mathcal{R}} (H, M)]$ ele alalım:

$(F,T)+_R(G,Z)=(V,T\cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T\cap Z$ için, $V(\alpha)=F'(\alpha)\cup G(\alpha)$. Şimdi $(F,T)+_R(H,M)=(W,T\cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in T\cap M$ için, $W(\alpha)=F'(\alpha)\cup H(\alpha)$. $(V,T\cap Z) \cap_R (W,T\cap M)=(S,(T\cap Z)\cap (T\cap M))$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in T\cap Z\cap M$ için, $S(\alpha)=V(\alpha)\cap W(\alpha)$,

$$S(\alpha)= [F'(\alpha)\cup G(\alpha)] \cap [F'(\alpha)\cup H(\alpha)]$$

Böylece, $(N,T\cap Z\cap M)=(S,T\cap Z\cap M)$ olduğu görülür.

$$4) (F,T) *_R [(G,Z) \theta_R (H,M)] = [(F,T) +_R (G,Z)] \cup_R [(F,T) +_R (H,M)]$$

ii) Kısıtlanmış Yıldız İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F,T) \cup_R (G,Z)] *_R (H,M)=[(F,T) *_R (H,M)] \cap_R [(G,Z) *_R (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım: $(F,T) \cup_R (G,Z)=(R,T\cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T\cap Z$ için, $R(\alpha)=F(\alpha)\cup G(\alpha)$. $(R,T\cap Z) *_R (H,M)=(N,(T\cap Z)\cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T\cap Z)\cap M$ için, $N(\alpha)=R'(\alpha)\cup H'(\alpha)$. Buradan,

$$N(\alpha)= [F'(\alpha)\cap G'(\alpha)]\cup H'(\alpha)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) *_R (H,M)] \cap_R [(G,Z) *_R (H,M)]$ bakalım: $(F,T)\theta_R(H,M)=(S,T\cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T\cap M$ için, $S(\alpha)=F'(\alpha)\cup H'(\alpha)$. $(G,Z) *_R (H,M)=(K,Z\cap M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in Z\cap M$ için, $K(\alpha)=G'(\alpha)\cup H'(\alpha)$. $(S,T\cap M)\cap_R (K,Z\cap M)=(L,(T\cap M)\cap (Z\cap M))$ olup, $\forall \alpha \in (T\cap M)\cap (Z\cap M)$ için, $L(\alpha)=S(\alpha)\cap K(\alpha)$. Buradan,

$$L(\alpha)= [F'(\alpha)\cup H'(\alpha)] \cap [G'(\alpha)\cup H'(\alpha)]$$

Buradan, $(N,T\cap Z\cap M)=(L,T\cap Z\cap M)$ olduğu görülür.

$$2) [(F,T) \cap_\varepsilon (G,Z)] *_R (H,M)=[(F,T) *_R (H,M)] \cup_R [(G,Z) *_R (H,M)].$$

$$3) [(F,T) \theta_R (G,Z)] *_R (H,M)=[(F,T) \lambda_R (H,M)] \cup_R [(G,Z) \lambda_R (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım: $(F,T) \theta_R(G,Z)=(R,T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $R(\alpha)=F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$. $(R,T \cap Z) * _R(H,M)=(N,(T \cap Z) \cap M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$ için, $N(\alpha)=R'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. Buradan,

$$N(\alpha)=[F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup H'(\alpha)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) \lambda_R(H,M)] \cup_R [(G,Z) \lambda_R(H,M)]$ bakalım: $(F,T) \lambda_R(H,M)=(S,T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $S(\alpha)=F(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(G,Z) \lambda_R(H,M)=(K,Z \cap M)$. Daha sonra $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $K(\alpha)=G(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(S,T \cap M) \cup_R (K,Z \cap M)=(L,(T \cap M) \cap (Z \cap M))$ olup $\forall \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M)$ için $L(\alpha)=S(\alpha) \cup K(\alpha)$. Buradan,

$$L(\alpha)=[F(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cup H'(\alpha)]$$

Buradan, $(N,T \cap Z \cap M)=(L,T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

$$4) [(F,T) * _R(G,Z)] * _R(H,M)=[(F,T) \lambda_R(H,M)] \cap_R [(G,Z) \lambda_R(H,M)].$$

6.1.4.2. Teorem $(F,T), (G,Z), (H,M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış yıldız işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Yıldız İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılması:

$$1) (F,T) * _R[(G,Z) \cap _\epsilon (H,M)] = [(F,T) * _R(G,Z)] \cup _\epsilon [(F,T) * _R(H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G,Z) \cap _\epsilon (H,M)=(R,Z \cup M) \forall \alpha \in Z \cup M$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) * _R(R,Z \cup M) = (N,(T \cap (Z \cup M)))$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap (Z \cup M)$ için, $N(\alpha)=F'(\alpha) \cup R'(\alpha)$.

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap (M-Z) = T \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım: $[(F,T) *_{\mathcal{R}}(G,Z)] \cup_{\varepsilon} [(F,T) *_{\mathcal{R}}(H,M)]$. $(F,T) *_{\mathcal{R}}(G,Z) = (K, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$. $(F,T) *_{\mathcal{R}}(H,M) = (S, T \cap M)$ $(F,T) *_{\mathcal{R}}(H,M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $T(\alpha) = F'(\alpha) \cup H'(\alpha)$, $(K, T \cap Z) \cap_{\varepsilon} (S, T \cap M) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup (T \cap M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) = T \cap (Z - M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (T \cap Z) = T \cap (M - Z) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece, $(N, T \cap (Z \cup M)) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) (F,T) *_{\mathcal{R}}[(G,Z) \cup_{\varepsilon} (H,M)] = [(F,T) *_{\mathcal{R}}(G,Z)] \cap_{\varepsilon} [(F,T) *_{\mathcal{R}}(H,M)].$$

ii) Kısıtlanmış Yıldız İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F,T) \cup_{\varepsilon} (G,Z)] *_{\mathcal{R}}(H,M) = [(F,T) *_{\mathcal{R}}(H,M)] \cap_{\varepsilon} [(G,Z) *_{\mathcal{R}}(H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F,T) \cup_{\varepsilon} (G,Z) = (R, T \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup Z$ için,

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) *_{\mathcal{R}}(H,M) = (N, (T \cup Z) \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap M$ için, $N(\alpha) = R'(\alpha) \cup H'(\alpha)$.

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (Z - T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) *_{\mathcal{R}}(H,M)] \cap_{\varepsilon} [(G,Z) *_{\mathcal{R}}(H,M)]$ bakalım. $(F,T) *_{\mathcal{R}}(H,M) = (K, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(G,Z) *_{\mathcal{R}}(H,M) = (S, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $S(\alpha) = G'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. O halde, $(K, T \cap M) \cap_{\varepsilon} (S, Z \cap M) = (L, K \cup T)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in (T \cap M) \cup (Z \cap M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) = (T - Z) \cap M \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - (T \cap M) = (Z - T) \cap M \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece $(N, (T \cup Z) \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] *_{\mathbf{R}} (H, M) = [(F, T) *_{\mathbf{R}} (H, M)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z) *_{\mathbf{R}} (H, M)]$$

6.1.4.3. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış yıldız tümleyenli işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Yıldız İşleminin Tümleyenli Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılıması:

$$1) (F, T) *_{\mathbf{R}} [(G, Z) *_{\varepsilon}^* (H, M)] = [(F, T) +_{\mathbf{R}} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} [(F, T) +_{\mathbf{R}} (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, Z) *_{\varepsilon}^* (H, M) = (M, Z \cup M)$ olsun. Burada

$\forall \alpha \in Z \cup M$ için, $(G, Z) *_{\varepsilon}^* (H, M) = (R, Z \cup M)$,

$$R(\alpha) = \begin{cases} G'(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H'(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) *_{\mathbf{R}} (R, Z \cup M) = (N, (T \cap (Z \cup M)))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap (Z \cup M)$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cup R'(\alpha)$,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M - Z) = T \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) +_{\mathbf{R}} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} [(F, T) +_{\mathbf{R}} (H, M)]$ bakalım. $(F, T) +_{\mathbf{R}} (G, Z) = (K, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup G(\alpha)$. $(F, T) +_{\mathbf{R}} (H, M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $S(\alpha) = F'(\alpha) \cup H(\alpha)$. O zaman $(K, T \cap Z) \cap_{\varepsilon} (S, T \cap M) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup (T \cap M)$ için,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) = T \cap (Z - M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (T \cap Z) = T \cap (M - Z) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap [F'(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece, $(N, (T \cap (Z \cup M))) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) (F, T) *_{\theta_{\varepsilon}} [(G, Z) *_{\theta_{\varepsilon}} (H, M)] = [(F, T) +_R (G, Z)] \cup_R [(F, T) +_R (H, M)].$$

ii) Kısıtlanmış Yıldız İşleminin Tümlleyenli Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F, T) *_{\theta_{\varepsilon}} (G, Z)] *_{\theta_{\varepsilon}} (H, M) = [(F, T) \lambda_R (H, M)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \lambda_R (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, T) *_{\theta_{\varepsilon}} (G, Z) = (R, T \cup Z)$ olsun. Burada,

$\forall \alpha \in T \cup Z$ için,

$$R(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ G'(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) *_{\theta_{\varepsilon}} (H, M) = (N, (T \cup Z) \cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap M$ için, $N(\alpha) = R'(\alpha) \cup H'(\alpha)$,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (Z - T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) \lambda_R (G, Z)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \lambda_R (H, M)]$ bakalım: $(F, T) \lambda_R (H, M) = (K, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $K(\alpha) = F(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(G, Z) \lambda_R (H, M) = (S, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $S(\alpha) = G(\alpha) \cup H'(\alpha)$. O zaman $(K, T \cap M) \cup_{\varepsilon} (S, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in (T \cap M) \cup (Z \cap M)$ için,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) = (T - Z) \cap M \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - (T \cap M) = (Z - T) \cap M \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece, $(N, (T \cup Z) \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) [(F, T) \overset{*}{*}_{\varepsilon} (G, Z)] \overset{*}{*}_R (H, M) = [(F, T) \lambda_R (G, Z)] \cap_{\varepsilon} [(G, Z) \lambda_R (H, M)]$$

6.1.4.4. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış yıldız işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Yıldız İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Soldan Dağılıması:

$$1) (F, T) \overset{*}{*}_R [(G, Z) \overset{\sim}{\cap} (H, M)] = [(F, T) \overset{*}{*}_R (G, Z)] \overset{\sim}{\cup} [(F, T) \overset{*}{*}_R (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, Z) \overset{\sim}{\cap} (H, M) = (R, Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \overset{*}{*}_R (R, Z) = (N, T \cap Z)$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in T \cap Z$; $N(\alpha) = F'(\alpha) \cup R'(\alpha)$,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) \\ F'(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) \overset{*}{*}_R (G, Z)] \overset{\sim}{\cup} [(F, T) \overset{*}{*}_R (H, M)]$ bakalım. $(F, T) \overset{*}{*}_R (G, Z) = (K, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$; $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$. $(F, T) \overset{*}{*}_R (H, M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$; $S(\alpha) = F'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(K, T \cap Z) \overset{\sim}{\cup} (S, T \cap M) = (L, T \cap Z)$ olup, $\forall \alpha \in T \cap Z$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) = T \cap (Z - M) \\ [F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece $(N, T \cap Z) = (L, T \cap Z)$ olduğu görülür.

$$2) (F,T) *_{\mathcal{R}}[(G,Z) \widetilde{\cup} (H,M)] = [(F,T) \theta_{\mathcal{R}}(G,Z)] \widetilde{\cap} [(F,T) \theta_{\mathcal{R}}(H,M)].$$

ii) Kısıtlanmış Yıldız İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Sağdan Dağılıması:

$$1) [(F,T) \widetilde{\cup} (G,Z)] *_{\mathcal{R}}(H,M) = [(F,T) *_{\mathcal{R}}(H,M)] \widetilde{\cap} [(G,Z) *_{\mathcal{R}}(H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F,T) \widetilde{\cup} (G,Z) = (R,T)$ olur. Burada $\forall \alpha \in T$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R,T) *_{\mathcal{R}}(H,M) = (N, T \cap M)$ olup, $\forall \alpha \in T \cap M$; $N(\alpha) = R'(\alpha) \cup H'(\alpha)$.

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap M \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) *_{\mathcal{R}}(H,M)] \widetilde{\cap} [(G,Z) *_{\mathcal{R}}(H,M)]$ bakalım. $(F,T) *_{\mathcal{R}}(H,M) = (K, T \cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap M$; $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(G,Z) *_{\mathcal{R}}(H,M) = (S, Z \cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in Z \cap M$; $S(\alpha) = G'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(K, T \cap M) \widetilde{\cap} (S, Z \cap M) = (L, T \cap M)$ olup, buradan da $\forall \alpha \in T \cap M$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) = (T-Z) \cap M \\ [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cup [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece $(N, T \cap M) = (L, T \cap M)$ olduğu görülür.

$$2) [(F,T) \widetilde{\cap} (G,Z)] *_{\mathcal{R}}(H,M) = [(F,T) *_{\mathcal{R}}(H,M)] \widetilde{\cup} [(G,Z) *_{\mathcal{R}}(H,M)].$$

6.2. Genişletilmiş Yıldız İşlemi ve Özellikleri

6.2.1. Tanım (F,T) ve (G,Z) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin $(F,T) *_{\mathcal{E}}(G,Z)$ ile gösterilen genişletilmiş yıldız işlemi $C = T \cup Z$ ve $\forall \alpha \in C$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

olmak üzere $(F, T) *_{\varepsilon} (G, Z) = (H, C)$ ile tanımlanır.

6.2.2. *Örnek* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $T = \{e_1, e_3\}$, $Z = \{e_2, e_3, e_4\}$ E'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde $(F, T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, Z) = \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, T) *_{\varepsilon} (G, Z) = (H, T \cup Z)$ olmak üzere, $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Burada $T \cup Z = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve $T-Z = \{e_1\}$, $Z-T = \{e_2, e_4\}$, $T \cap Z = \{e_3\}$ olmak üzere, $H(e_1) = F(e_1) = \{h_2, h_5\}$, $H(e_2) = G(e_2) = \{h_1, h_4, h_5\}$, $H(e_4) = G(e_4) = \{h_3, h_5\}$, $H(e_3) = F'(e_3) \cup G'(e_3) = \{h_3, h_4\} \cup \{h_1, h_5\} = \{h_1, h_3, h_4, h_5\}$. Daha sonra buradan, $(F, T) *_{\varepsilon} (G, Z) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_3, h_4, h_5\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$.

6.2.3. Not $S_A(U)$ kümesi üzerinde kısıtlanmış yıldız ve genişletilmiş yıldız işlemleri çakışıktır. Parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler; $(F, A) *_{\varepsilon} (G, A) = (F, A) *_{\varepsilon} (G, A)$.

6.2.4. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $*_{\varepsilon}$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $*_{\varepsilon}$ işleminin $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$*_{\varepsilon}: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((F, T), (G, Z)) \rightarrow (F, T) *_{\varepsilon} (G, Z) = (H, T \cup Z)$$

olup, (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F, T) *_{\varepsilon} (G, Z)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir.

2) $T \cap Z \cap M = \emptyset$ için, $[(F, T) *_{\varepsilon} (G, Z)] *_{\varepsilon} (H, M) = (F, T) *_{\varepsilon} [(G, Z) *_{\varepsilon} (H, M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, T) *_{\varepsilon} (G, Z) = (S, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(S, TUZ) *_{\varepsilon} (H, M) = (N, (TUZ) \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (TUZ) \cup M$ için,

$$N(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) & \alpha \in (TUZ) - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (TUZ) \\ S'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (TUZ) \cap M \end{cases}$$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-Z) - M = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z-T) - M = T' \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (TUZ) = T' \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (Z-T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(G, Z) *_{\varepsilon} (H, M) = (R, Z \cup M)$ olsun. $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) *_{\varepsilon} (R, Z \cup M) = (L, T \cup (Z \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup Z \cup M$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) \\ R(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) - T \\ F'(\alpha) \cup R'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z - M) - T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M - Z) - T = T' \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - T = T' \cap Z \cap M \\ F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap (M - Z) = T \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada $T \cap Z \cap M = \emptyset$ için $(N, (TUZ) \cup M) = (L, T \cup (Z \cup M))$ olduğu görülür. Yani uygun koşullar altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $*_{\varepsilon}$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$3) [(F,T) *_{\varepsilon} (G,T)] *_{\varepsilon} (H,T) \neq (F,T) *_{\varepsilon} [(G,T) *_{\varepsilon} (H,T)].$$

İspat: İspat, Not 6.2.3 ve Teorem 6.1.3 (3)'den elde edilir. Yani T, E nin sabit bir alt kümesi olmak üzere $S_T(U)$ kümesi üzerinde $*_{\varepsilon}$ işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F,T) *_{\varepsilon} (G,Z) = (G,Z) *_{\varepsilon} (F,T).$$

İspat: $(F,T) *_{\varepsilon} (G,Z) = (H, T \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup Z$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(G,Z) *_{\varepsilon} (F,T) = (S, Z \cup T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in Z \cup T$ için,

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G'(\alpha) \cup F'(\alpha) & \alpha \in Z \cap T \end{cases}$$

Böylece, $(F,T) *_{\varepsilon} (G,Z) = (G,Z) *_{\varepsilon} (F,T)$. Buradan, $(F,T) *_{\varepsilon} (G,T) = (G,T) *_{\varepsilon} (F,T)$ olduğu açıktır. Yani, $S_E(U)$ ve $S_T(U)$ kümeleri üzerinde $*_{\varepsilon}$ işleminin değişme özelliği vardır.

$$5) (F,T) *_{\varepsilon} (F,T) = (F,T)^r.$$

İspat: İspat, Not 6.2.3 ve Teorem 6.1.3 (5)'den elde edilir. Yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde $*_{\varepsilon}$ işlemi denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

$$6) (F,T) *_{\varepsilon} \emptyset_T = \emptyset_T *_{\varepsilon} (F,T) = U_T.$$

İspat: İspat, Not 6.2.3 ve Teorem 6.1.3 (6)'den elde edilir.

$$7) (F,T) *_{\varepsilon} \emptyset_{\emptyset} = (F,T).$$

İspat: $\emptyset_{\emptyset} = (S, \emptyset)$ ve $(F,T) *_{\varepsilon} (S, \emptyset) = (H, T \cup \emptyset)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup \emptyset = T$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - \emptyset = T \\ S(\alpha) & \alpha \in \emptyset - T = \emptyset \\ F'(\alpha) \cup S'(\alpha) & \alpha \in T \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Böylece, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F(\alpha)$ olup, $(H, T) = (F, T)$.

$$8) \emptyset_\emptyset *_{\varepsilon} (F, T) = (F, T).$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(S, \emptyset) *_{\varepsilon} (F, T) = (H, \emptyset \cup T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in \emptyset \cup T = T$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) & \alpha \in \emptyset - T = \emptyset \\ F(\alpha) & \alpha \in T - \emptyset = T \\ S'(\alpha) \cup F'(\alpha) & \alpha \in \emptyset \cap T = \emptyset \end{cases}$$

Böylece, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F(\alpha)$ olup, $(H, T) = (F, T)$.

Teorem 6.2.4 (7) ve (8) den, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $*_{\varepsilon}$ işleminin birim elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir. Klasik küme teorisinde, $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ ve $B = \emptyset$ olduğundan, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, (F, T) esnek kümesi için $(F, T) *_{\varepsilon} (G, K) = (G, K) *_{\varepsilon} (F, T) = \emptyset_\emptyset$ olacak şekilde $(G, K) \in S_E(U)$ bulamayız; çünkü bu durum $T \cup K = \emptyset$ olmasını ve dolayısıyla $T = \emptyset$ ve $K = \emptyset$ olmasını gerektirir. Kabulümüz gereği, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\emptyset_\emptyset$ haricinde hiçbir esnek küme boş parametreye sahip olmadığından, buradan birim eleman olan $\emptyset_\emptyset$ haricinde hiçbir elemanın, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $*_{\varepsilon}$ işlemine göre tersinin olmadığı sonucu çıkartırız.

6.2.5. *Sonuç* Teorem 6.2.4 (1), (2), (4), (7) ve (8)'dan, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında, $(S_E(U), *_{\varepsilon})$ birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, komutatif olup, idempotent olmayan bir monoiddir. $A \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, $(S_A(U), *_{\varepsilon})$ cebirsel yapısı birleşme özelliğine sahip olmadığı için yarıgrup olamaz.

$$9) (F, T) *_{\varepsilon} U_T = U_T *_{\varepsilon} (F, T) = (F, T)^f.$$

İspat: İspat, Not 6.2.3 ve Teorem 6.1.3 (10)'dan elde edilir.

$$10) (F, T) *_{\varepsilon} (F, T)^f = (F, T)^f *_{\varepsilon} (F, T) = U_T.$$

İspat: İspat, Not 6.2.3 ve Teorem 3.1.3.(13)'den elde edilir.

$$11) [(F,T) *_{\varepsilon} (G,Z)]^r = (F,T) \underset{\cap}{*} (G,Z).$$

İspat: $(F,T) *_{\varepsilon} (G,Z) = (H, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$ için;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(H, T \cup Z)^r = (K, T \cup Z)$ olup, $\forall \alpha \in T \cup Z$ için;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G'(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$$\text{Buradan, } (K, T \cup Z) = (F,T) \underset{\cap}{*} (G,Z).$$

$$12) (F,T) *_{\varepsilon} (G,T) = \emptyset_T \Leftrightarrow (F,T) = U_T \text{ ve } (G,T) = U_T.$$

İspat: İspat, Not 6.2.3 ve Teorem 6.1.3 (15)'den elde edilir.

$$13) \emptyset_T \subseteq (F,T) *_{\varepsilon} (G,Z), \emptyset_Z \subseteq (F,T) *_{\varepsilon} (G,Z). \text{ Ayrıca, } (F,T) *_{\varepsilon} (G,Z) \subseteq U_{T \cup Z}.$$

İspat: Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamasından ispat açıktır.

$$14) (F,T)^r \subseteq (F,T) *_{\varepsilon} (G,T) \text{ ve } (G,T)^r \subseteq (F,T) *_{\varepsilon} (G,T).$$

İspat: İspat, Not 6.2.3 ve Teorem 6.1.3 (18)'den elde edilir.

$$15) (F,T) \subseteq (G,T) \Leftrightarrow (F,T) *_{\varepsilon} (G,T) = (F,T)^r.$$

İspat: İspat, Not 6.2.3 ve Teorem 6.1.3 (19)'dan elde edilir.

16) $(F, T) \cong (G, T)$ ise $(G, T) *_{\varepsilon}(H, T) \cong (F, T) *_{\varepsilon}(H, T)$. Tersine doğru değildir.

İspat: İspat, Not 6.2.3. ve Teorem 6.1.3. (20) ve (21)'den elde edilir.

17) $(F, T) \cong (G, T)$ ve $(K, T) \cong (L, T)$ ise $(G, T) *_{\varepsilon}(L, T) \cong (F, T) *_{\varepsilon}(K, T)$.

İspat: İspat, Not 6.2.3 ve Teorem 6.1.3 (22)'den elde edilir.

6.2.6. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş yıldız işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

6.2.6.1. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş yıldız işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Genişletilmiş Yıldız İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılımı:

Aşağıdaki eşitlikler, $T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z \cap M = \emptyset$ ise sağlanır.

1) $(F, T) *_{\varepsilon}[(G, Z) \cup_{\varepsilon}(H, M)] = [(F, T) *_{\varepsilon}(G, Z)] \cup_{\varepsilon}[(F, T) *_{\varepsilon}(H, M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(G, Z) \cup_{\varepsilon}(H, M) = (R, Z \cup M)$ olsun. $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) *_{\varepsilon}(R, Z \cup M) = (N, (T \cup (Z \cup M)))$ bakalım. $\forall \alpha \in T \cup (Z \cup M)$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) \\ R(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) - T \\ F'(\alpha) \cup R'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z - M) - T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M - Z) - T = T' \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - T = T' \cap Z \cap M \\ F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap (M - Z) = T \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cap H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin diğer tarafına $[(F, T) *_{\varepsilon} (G, Z)] \cup_{\varepsilon} [(F, T) *_{\varepsilon} (H, M)]$ bakalım. $(F, T) *_{\varepsilon} (G, Z) = (K, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) *_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - T \\ F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup Z) \cup_{\varepsilon} (S, T \cup M) = (L, (T \cup Z) \cup (T \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) - (T \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) - (T \cup Z) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$F(\alpha)$	$\alpha \in (T-Z)-(T \cup M) = \emptyset$
$G(\alpha)$	$\alpha \in (Z-T)-(T \cup M) = T' \cap Z \cap M'$
$F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap Z)-(T \cup M) = \emptyset$
$F(\alpha)$	$\alpha \in (T-M)-(T \cup Z) = \emptyset$
$H(\alpha)$	$\alpha \in (M-T)-(T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M$
$F'(\alpha) \cup H'(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M)-(T \cup Z) = \emptyset$
$F(\alpha) \cup F(\alpha)$	$\alpha \in (T-Z) \cap (T-M) = T \cap Z' \cap M'$
$L(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (T-Z) \cap (M-T) = \emptyset$
$F(\alpha) \cup [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)]$	$\alpha \in (T-Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M$
$G(\alpha) \cup F(\alpha)$	$\alpha \in (Z-T) \cap (T-M) = \emptyset$
$G(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (Z-T) \cap (M-T) = T' \cap Z \cap M$
$G(\alpha) \cup [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)]$	$\alpha \in (Z-T) \cap (T \cap M) = \emptyset$
$[F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup F(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap Z) \cap (T-M) = T \cap Z \cap M'$
$[F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap Z) \cap (M-T) = \emptyset$
$[F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)]$	$\alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M$

Böylece,

$G(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M'$
$H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z' \cap M$
$F(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M$
$L(\alpha) = U$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M$
$G(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M$
U	$\alpha \in T \cap Z \cap M'$
$F'(\alpha) \cup G'(\alpha) \cup H'(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z \cap M$

$T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M' = T \cap Z \cap M = \emptyset$ için $N=L$ olur. $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M' = \emptyset$ şartının da $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (F,T) *_{\varepsilon} [(G,Z) \cap_{\varepsilon} (H,M)] = [(F,T) *_{\varepsilon} (G,Z)] \cap_{\varepsilon} [(F,T) *_{\varepsilon} (H,M)]$$

ii) Genişletilmiş Yıldız İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

Aşağıdaki yer alan eşitlikler, $(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında sağlanır.

$$1) [(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z)] *_{\varepsilon} (H,M) = [(F,T) *_{\varepsilon} (H,M)] \cap_{\varepsilon} [(G,Z) *_{\varepsilon} (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z) = (R,T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R,T \cup Z) *_{\varepsilon} (H,M) = (N,(T \cup Z) \cup M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup M$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cup Z) \\ R'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-Z) - M = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z-T) - M = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (Z-T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) *_{\varepsilon} (H,M)] \cap_{\varepsilon} [(G,Z) *_{\varepsilon} (H,M)]$ bakalım.

$(F,T) *_{\varepsilon} (H,M) = (K,T \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G,Z) *_{\varepsilon} (H,M) = (S,Z \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-Z \\ G'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(K,T \cup M) \cap_{\varepsilon} (S,Z \cup M) = (L,(T \cup M) \cup (Z \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) - (Z \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) - (T \cup M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$F(\alpha)$	$\alpha \in (T-M)-(Z \cup M) = T \cap Z' \cap M'$
$H(\alpha)$	$\alpha \in (M-T)-(Z \cup M) = \emptyset$
$F'(\alpha) \cup H'(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M)-(Z \cup M) = \emptyset$
$G(\alpha)$	$\alpha \in (Z-M)-(T \cup M) = T' \cap Z \cap M'$
$H(\alpha)$	$\alpha \in (M-Z)-(T \cup M) = \emptyset$
$G'(\alpha) \cup H'(\alpha)$	$\alpha \in (Z \cap M)-(T \cup M) = \emptyset$
$F(\alpha) \cap G(\alpha)$	$\alpha \in (T-M) \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M'$
$L(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$	$\alpha \in (T-M) \cap (M-Z) = \emptyset$
$F(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)]$	$\alpha \in (T-M) \cap (Z \cap M) = \emptyset$
$H(\alpha) \cap G(\alpha)$	$\alpha \in (M-T) \cap (Z-M) = \emptyset$
$H(\alpha) \cap H(\alpha)$	$\alpha \in (M-T) \cap (M-Z) = T' \cap Z' \cap M$
$H(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)]$	$\alpha \in (M-T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M$
$[F'(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cap G(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M) \cap (Z-M) = \emptyset$
$[F'(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cap H(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M) \cap (M-Z) = T \cap Z' \cap M$
$[F'(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)]$	$\alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M$

Böylece,

$F(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M$
$G(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M'$
$F(\alpha) \cap G(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z \cap M'$
$L(\alpha) = H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z' \cap M$
$H(\alpha) \cap G'(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M$
$F'(\alpha) \cap H(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M$
$[F'(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)]$	$\alpha \in T \cap Z \cap M$

$T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M' = \emptyset$ için $N=L$ olur. $T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartının da $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) [(F,T) \cup_{\varepsilon} (G,Z)] *_{\varepsilon} (H,M) = [(F,T) \cup_{\varepsilon} (H,M)] \cup_{\varepsilon} [(G,Z) *_{\varepsilon} (H,M)].$$

6.2.6.1.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan komutatif, idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 6.2.5'de $(S_E(U), *_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan, idempotent olmayan, komutatif bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem

6.2.6.1 (i) (1) başlığında, $*_{\varepsilon}$ işleminin $\cup_{\varepsilon}$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında soldan dağıldığı, Teorem 6.2.6.2 (ii) (2) başlığında, $*_{\varepsilon}$ işleminin $\cup_{\varepsilon}$ işlemine $(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = (T \Delta Z) \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_{\varepsilon}, *_{\varepsilon})$ cebirsel yapısı birimli ve komutatif, toplamsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

6.2.6.1.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset$ olan komutatif, idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes monoid olduğunu göstermişti. Sonuç 6.2.5’de $(S_E(U), *_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset$ olan, idempotent olmayan, komutatif bir monoid olduğu, Teorem 6.2.6.1 (i) (2) başlığında, $*_{\varepsilon}$ işleminin $\cup_{\varepsilon}$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında soldan dağıldığı, Teorem 6.2.6.1 (ii) (1) başlığında, $*_{\varepsilon}$ işleminin $\cup_{\varepsilon}$ işlemine $(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. $T \cap Z \cap M = (T \Delta Z) \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_{\varepsilon}, *_{\varepsilon})$ cebirsel yapısı birimli ve komutatif, toplamsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

Teorem 6.2.6.2. (F, T) , (G, Z) , (H, M) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş yıldız işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Genişletilmiş Yıldız İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Soldan Dağılması:

Aşağıdaki eşitlikler, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları ile sağlanır.

$$1) (F, T) *_{\varepsilon} [(G, Z) \widetilde{\cap} (H, M)] = [(F, T) *_{\varepsilon} (G, Z)] \widetilde{\cap} [(F, T) *_{\varepsilon} (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(G, Z) \widetilde{\cap} (H, M) = (R, Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) *_{\varepsilon} (R, Z) = (N, T \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ R(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cup R'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z-M)-T=T' \cap Z \cap M' \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M)-T=T' \cap Z \cap M \\ F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z-M)=T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M)=T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) *_{\varepsilon}(G,Z)] \widetilde{\cap} [(F,T) *_{\varepsilon}(H,M)]$ bakalım. Burada

$(F,T) *_{\varepsilon}(G,Z)=(K,T \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F,T) *_{\varepsilon}(H,M)=(S,T \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K,T \cup Z) \widetilde{\cap} (S,T \cup M)=(L,(T \cup Z) \cup (T \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z)-(T \cup M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-Z)-(T \cup M)=\emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z-T)-(T \cup M)=T' \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z)-(T \cup M)=\emptyset \\ F(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap (T-M)=T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap (M-T)=\emptyset \\ F(\alpha) \cap [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (T-Z) \cap (T \cap M)=T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (Z-T) \cap (T-M)=\emptyset \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z-T) \cap (M-T)=T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \cap [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (Z-T) \cap (T \cap M)=\emptyset \\ [F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap F(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T-M)=T \cap Z \cap M' \\ [F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (M-T)=\emptyset \\ [F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M)=T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ G'(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cap H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, $T \setminus Z$ yi ele alırsak, $T \setminus Z = T \cap Z'$ olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya $M \setminus Z$ de, ya da $M \cup Z$ nin tümleyenindedir. Burdan, $\alpha \in T \setminus Z$ ise $\alpha \in T \cap M \cap Z'$ veya $\alpha \in T \cap M' \cap Z'$ olduğuna dikkat edecek olursak, buradan aynı şekilde $T \cap Z \cap M = T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı ile $N = L$ sağlanır. $T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartının da $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset \cap M = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (F, T) *_{\varepsilon} [(G, Z) \tilde{\cup} (H, M)] = [(F, T) *_{\varepsilon} (G, Z)] \tilde{\cup} [(F, M) *_{\varepsilon} (G, Z)]$$

ii) Genişletilmiş Yıldız İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Sağdan Dağılması:

Aşağıdaki eşitlikler, $(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları ile sağlanır.

$$1) [(F, T) \tilde{\cup} (G, Z)] *_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) *_{\varepsilon} (H, M)] \tilde{\cup} [(G, Z) *_{\varepsilon} (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, T) \tilde{\cup} (G, Z) = (R, T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T) *_{\varepsilon} (H, M) = (N, T \cup M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in T - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - T \\ R'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T - Z) - M = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M - T \\ F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

$[(F,T) *_{\varepsilon}(H,M)] \widetilde{\cup} [(G,Z) *_{\varepsilon}(H,M)]$ bakalım. $(F,T) *_{\varepsilon}(H,M)=(K,T \cup M) \forall \alpha \in T \cup M$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G,Z) *_{\varepsilon}(H,M)=(S,T \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-Z \\ G'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(K,T \cup M) \widetilde{\cup} (S,Z \cup M)=(L,(T \cup M) \cup (Z \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) - (Z \cup M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) - (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-M) - (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M-T) - (Z \cup M) = \emptyset \\ F'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T-M) \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T-M) \cap (M-Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (T-M) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (M-T) \cap (Z-M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (M-T) \cap (M-Z) = T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (M-T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M \\ [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z-M) = \emptyset \\ [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (M-Z) = T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cup H'(\alpha)] \cup [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ U & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ U & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cup H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, $M \setminus T$ yi ele alırsak, $M \setminus T = M \cap T'$ olup, bir eleman T nin tümleyeninde ise o eleman ya $Z \setminus T$ de, ya da $Z \cup T$ nin tümleyenindedir. Burdan, $\alpha \in M \setminus T$ ise $\alpha \in M \cap Z \cap T'$ veya $\alpha \in M \cap Z' \cap T'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı ile $N=L$ sağlanır. $T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartının $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) [(F,T) \underset{\cap}{\sim} (G,Z)] *_{\varepsilon} (H,M) = [(F,T) *_{\varepsilon} (H,M)] \underset{\cap}{\sim} [(G,Z) *_{\varepsilon} (H,M)].$$

6.2.6.2.1. *Sonuç* Yavuz (2024), (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \underset{\cup}{\sim})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğunu göstermişti. *Sonuç* 6.2.5'de $(S_E(U), *_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan, idempotent olmayan, komutatif bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, *Teorem* 6.2.6.2 (i) (2) başlığında, $*_{\varepsilon}$ işleminin $\underset{\cup}{\sim}$ işlemine $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında soldan dağıldığı, *Teorem* 6.2.6.2 (ii) (1) başlığında, $*_{\varepsilon}$ işleminin $\underset{\cup}{\sim}$ işlemine $(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. *Sonuç* olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = (T \Delta Z) \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \underset{\cup}{\sim}, *_{\varepsilon})$ cebirsel yapısı, birimli ve komutatif, toplamsal idempotent sıfırsız bir yarı-halkadır.

6.2.6.2.2. *Sonuç* Yavuz (2024), (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \underset{\cap}{\sim})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğunu göstermişti. *Sonuç* 6.2.5'de $(S_E(U), *_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan, idempotent olmayan, komutatif bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, *Teorem* 6.2.6.2 (i) (1) başlığında, $*_{\varepsilon}$ işleminin $\underset{\cap}{\sim}$ işlemine $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, *Teorem* 6.2.6.2 (ii) (2) başlığında, $*_{\varepsilon}$ işleminin $\underset{\cap}{\sim}$ işlemine $(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. *Sonuç* olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = (T \Delta Z) \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \underset{\cap}{\sim}, *_{\varepsilon})$ cebirsel yapısı birimli ve komutatif, toplamsal idempotent sıfırsız bir yarı-halkadır.

7. KISITLANMIŞ ve GENİŞLETİLMİŞ TETA İŞLEMİ

Bu bölümde, kısıtlanmış teta ve genişletilmiş teta adı verilen yeni bir kısıtlanmış ve genişletilmiş esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile birlikte diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları ve $S_E(U)$ kümesi üzerinde bu işlemlerin hangi cebirsel yapıları oluşturduğu incelenmiş ve çok önemli sonuçlar elde edilmiştir.

7.1. Kısıtlanmış Teta İşlemi ve Özellikleri

7.1.1. Tanım (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, T) \theta_R (G, Z)$ ile gösterilen kısıtlanmış teta işlemi $C = T \cap Z$ olmak üzere, $C = T \cap Z \neq \emptyset$ ise $\forall \alpha \in C$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$; $C = T \cap Z = \emptyset$ ise $(F, T) \theta_R (G, Z) = (H, C) = \emptyset_\emptyset$ olacak şekilde $(F, T) \theta_R (G, Z) = (H, C)$ ile tanımlanır. Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, tanımda $C = T \cap Z = \emptyset$ ise, $(F, T) \theta_R (G, Z) = \emptyset_\emptyset$ olduğu açıktır. Buradan, kısıtlanmış teta işleminin tanımlı olması için, (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde iki esnek küme olmak üzere, $T \cap Z \neq \emptyset$ şartının bulunmadığı görülmektedir.

7.1.2. Örnek $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $T = \{e_1, e_3\}$, $Z = \{e_2, e_3, e_4\}$ E 'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde $(F, T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, Z) = \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, h_3, h_5)\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, T) \theta_R (G, Z) = (H, T \cap Z)$ olmak üzere $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_3\}$ için $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_3\}$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$ olup, $H(e_3) = F'(e_3) \cap G'(e_3) = \{h_3, h_4\} \cup \{h_1, h_5\} = \emptyset$. Böylece, $(F, T) \theta_R (G, Z) = \{(e_3, \emptyset)\}$.

7.1.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) θ_R , $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: θ_R 'nin $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\theta_R: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((F, T), (G, Z)) \rightarrow (F, T) \theta_R (G, Z) = (H, T \cap Z)$$

(F,T) ve (G,Z) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F,T) \theta_R(G,Z)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir.

$$2) [(F,T) \theta_R (G,Z)] \theta_R (H,M) \neq (F,T) \theta_R [(G,Z) \theta_R (H,M)].$$

İspat: $(F,T) \theta_R (G,Z) = (S, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $T(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$. $(S, T \cap Z) \theta_R (H,M) = (R, (T \cap Z) \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$ için, $R(\alpha) = T'(\alpha) \cap H'(\alpha)$. Böylece,

$$R(\alpha) = [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap H'(\alpha)$$

$(G,Z) \theta_R (H,M) = (K, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $K(\alpha) = G'(\alpha) \cap H'(\alpha)$. $(F,T) \theta_R (K, Z \cap M) = (S, T \cap (Z \cap M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$ için, $S(\alpha) = F'(\alpha) \cap K'(\alpha)$. Böylece,

$$S(\alpha) = F'(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)]$$

Burada $(R, (T \cap Z) \cap M) \neq (S, T \cap (Z \cap M))$ olduğu görülür.

Yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde, θ_R işleminin birleşme özelliği yoktur. Burada, $T \cap Z = \emptyset$ veya $Z \cap M = \emptyset$ veya $T \cap M = \emptyset$ ise, bu durumda her iki taraf $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesi olacağından, bu şartlar altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, θ_R işleminin birleşme özelliği sağlanacağı açıktır.

$$3) [(F,T) \theta_R (G,T)] \theta_R (H,T) \neq (F,T) \theta_R [(G,T) \theta_R (H,T)].$$

İspat: $(F,T) \theta_R (G,T) = (K,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap T = T$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$. $(K,T) \theta_R (H,T) = (R,T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap T = T$ için, $R(\alpha) = K'(\alpha) \cap H'(\alpha)$ olur. Böylece,

$$R(\alpha) = [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap H'(\alpha)$$

$(G,T) \theta_R (H,T) = (L,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap T$ için, $L(\alpha) = G'(\alpha) \cap H'(\alpha)$. $(F,T) \theta_R (L,T) = (N,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap T$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cap L'(\alpha)$. Böylece,

$$N(\alpha) = F'(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)]$$

Buradan, $(R,T) \neq (N,T)$ olduğu görülür.

Yani, parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler kümesi üzerinde θ_R işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F,T) \theta_R (G,Z)=(G,Z) \theta_R (F,T).$$

İspat: $(F,T) \theta_R (G,Z)=(H,T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $H(\alpha)=F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$. $(G,Z) \theta_R (F,T)=(S,Z \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap T$ için, $S(\alpha)=G'(\alpha) \cap F'(\alpha)$. Böylece,

$$(F,T) \theta_R (G,Z)=(G,Z) \theta_R (F,T).$$

$S_E(U)$ kümesi üzerinde, θ_R işleminin değişme özelliği vardır. $(F,T) \theta_R (G,T)=(G,T) \theta_R (F,T)$ olduğu, yani θ_R işleminin parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler kümesi üzerinde de değişme özelliğine sahip olduğu açıktır.

$$5) (F,T) \theta_R (F,T)= (F,T)^r.$$

İspat: $(F,T) \theta_R (F,T)=(H,T \cap T)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha)=F'(\alpha) \cap F'(\alpha)=F'(\alpha)$ olur ve böylece $(H,T)=(F,T)^r$ elde edilir. Yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde, θ_R işlemi, denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

$$6) (F,T) \theta_R \emptyset_T = \emptyset_T \theta_R (F,T) = (F,T)^r.$$

İspat: $\emptyset_T=(S,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $S(\alpha)=\emptyset$. $(F,T) \theta_R (S,T)=(H,T \cap T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha)=F'(\alpha) \cap S'(\alpha)=F'(\alpha) \cap U = F'(\alpha)$. Böylece, $(H,T)= (F,T)^r$.

$$7) (F,T) \theta_R \emptyset_M = \emptyset_M \theta_R (F,T) = (F,T \cap M)^r.$$

İspat: $\emptyset_M=(S,M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in M$ için, $S(\alpha)=\emptyset$. $(F,T) \theta_R (S,M)=(H,T \cap M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $H(\alpha)=F'(\alpha) \cap S'(\alpha)=F'(\alpha) \cap U = F'(\alpha)$. Böylece, $(H,T \cap M)=(F,T \cap M)^r$. Burada $T \cap M = \emptyset$ ise $(F,T) \theta_R \emptyset_M = \emptyset_M \theta_R (F,T) = \emptyset_\emptyset$ olur.

$$8) (F,T) \theta_R \emptyset_E = \emptyset_E \theta_R (F,T) = (F,T)^r.$$

İspat: $\emptyset_E = (S, E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in E$ için, $S(\alpha) = \emptyset$. $(F, T) \theta_R(S, E) = (H, T \cap E)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cap E = T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap S'(\alpha) = F'(\alpha) \cap U = F'(\alpha)$. Böylece, $(H, T) = (F, T)^r$.

$$9) (F, T) \theta_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \theta_R(F, T) = \emptyset_\emptyset.$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ olsun. $(F, T) \theta_R(S, \emptyset) = (H, T \cap \emptyset) = (H, \emptyset)$ olup, $\emptyset_\emptyset$ parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme olduğu için, $(H, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, θ_R işleminin yutan elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

$$10) (F, T) \theta_R U_T = U_T \theta_R(F, T) = \emptyset_T.$$

İspat: $U_T = (K, T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha) = U$. $(F, T) \theta_R(K, T) = (H, T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap T'(\alpha) = F'(\alpha) \cap \emptyset = \emptyset$. Böylece, $(H, T) = \emptyset_T$.

$$11) (F, T) \theta_R U_M = U_M \theta_R(F, T) = \emptyset_{T \cap M}.$$

İspat: $U_M = (K, M)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in M$ için, $K(\alpha) = U$. $(F, T) \theta_R(K, M) = (H, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap T'(\alpha) = F'(\alpha) \cap \emptyset = \emptyset$. Böylece, $(H, T \cap M) = \emptyset_{T \cap M}$.

$$12) (F, T) \theta_R U_E = U_E \theta_R(F, T) = \emptyset_T.$$

İspat: $U_E = (K, E)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in E$ için, $K(\alpha) = U$. $(F, T) \theta_R(K, E) = (H, T \cap E)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap E = T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap K'(\alpha) = F'(\alpha) \cap \emptyset = \emptyset$. Böylece $(H, T) = \emptyset_T$.

$$13) (F, T) \theta_R (F, T)^r = (F, T)^r \theta_R(F, T) = \emptyset_T.$$

İspat: $(F, T)^r = (H, T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha)$. $(F, T) \theta_R(H, T) = (L, T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $L(\alpha) = F'(\alpha) \cap H'(\alpha) = F'(\alpha) \cap F(\alpha) = \emptyset$. Böylece, $(L, T) = \emptyset_T$.

$$14) [(F, T) \theta_R(G, Z)]^r = (F, T) \cup_R (G, Z).$$

İspat: $(F, T) \theta_R(G, Z) = (H, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$. $(H, T \cap Z)^r = (K, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ olur. Böylece, $(K, T \cap Z) = (F, T) \cup_R (G, Z)$.

$$15) (F,T)\theta_R(G,T) = U_T \Leftrightarrow (F,T) = \emptyset_T \text{ ve } (G,T) = \emptyset_T.$$

İspat: $(F,T) \theta_R(G,T) = (K,T \cap T)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$. $(K,T) = U_T$ olduğundan, $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha) = U$. Böylece, $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha) = U \Leftrightarrow \forall \alpha \in T$ için, $F'(\alpha) = U$ ve $G'(\alpha) = U \Leftrightarrow \forall \alpha \in T$ için, $F(\alpha) = \emptyset$ ve $G(\alpha) = \emptyset \Leftrightarrow (F,T) = \emptyset_T$ ve $(G,T) = \emptyset_T$.

$$16) \emptyset_{T \cap Z} \subseteq (F,T) \theta_R(G,Z) \text{ ve } (F,T) \theta_R(G,Z) \subseteq U_T \text{ ve } (F,T) \theta_R(G,Z) \subseteq U_Z.$$

İspat: Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamasından ispat açıktır.

$$17) (F,T)\theta_R(G,Z) \subseteq (F,T)^r \text{ ve } (F,T)\theta_R(G,Z) \subseteq (G,Z)^r.$$

İspat: $(F,T)\theta_R(G,Z) = (H,T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$ olur. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $H(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$. Böylece, $(F,T)\theta_R(G,Z) \subseteq (F,T)^r$. $F'(\alpha) \cap G'(\alpha) \subseteq G'(\alpha)$ olduğundan, $(F,T)\theta_R(G,Z) \subseteq (G,Z)^r$.

$$18) (F,T) \subseteq (G,Z) \text{ ise } (F,T) \theta_R(G,Z) = (G,T)^r.$$

İspat: $(F,T) \subseteq (G,Z)$ olsun. Buradan, $T \subseteq Z$ ve $\forall \alpha \in T$ için, $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ ve böylece $\forall \alpha \in T$ için, $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$ olur. $(F,T)\theta_R(G,Z) = (K,T \cap Z = T)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha) = G'(\alpha)$. Böylece, $(K,T) = (F,T) \theta_R(G,Z) = (G,T)^r$. Tersine, $(F,T)\theta_R(G,Z) = (G,T)^r$ olsun. Buradan, $T \cap Z = T$ olup, $T \subseteq Z$. Ayrıca, $\forall \alpha \in T$ için, $F'(\alpha) \cap G'(\alpha) = G'(\alpha)$ olup, $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$. Böylece, $\forall \alpha \in T$ için $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ olup, $(F,T) \subseteq (G,Z)$.

$$19) (F,T) \subseteq (G,T) \text{ ise } (G,T) \theta_R(H,Z) \subseteq (F,T) \theta_R(H,Z) \text{ ve } (H,Z) \theta_R(G,T) \subseteq (H,Z) \theta_R(G,T).$$

İspat: $(F,T) \subseteq (G,T)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in T$ için, $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ ve böylece $\forall \alpha \in T$ için, $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$ olur. $(G,T) \theta_R(H,Z) = (K,T \cap Z)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha) = G'(\alpha) \cap H'(\alpha)$. $(F,T) \theta_R(H,Z) = (L,T \cap Z)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $L(\alpha) = F'(\alpha) \cap H'(\alpha)$ olsun. Buradan $L(\alpha) = F'(\alpha) \cap H'(\alpha)$. Buradan, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha) = G'(\alpha) \cap H'(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cap H'(\alpha) = L(\alpha)$ olup, $(G,T) \theta_R(H,Z) \subseteq (F,T) \theta_R(H,Z)$. Değişme özelliğinden, $(H,Z) \theta_R(G,T) \subseteq (H,Z) \theta_R(G,T)$.

20) $(G, T) \theta_R(H, Z) \subseteq (F, T) \theta_R(H, Z)$ ise $(F, T) \subseteq (G, T)$ olmak zorunda değildir. Yani Teorem 7.1.3 (19) nın tersi doğru değildir.

İspat: Teorem 7.1.3 (20) nın tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $T = \{e_1, e_3\}$, $Z = \{e_1, e_3, e_5\}$ E'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, T) , (G, T) ve (H, Z) , U üzerinde $(F, T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, T) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$, $(H, Z) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_1, h_5\})\}$ olarak tanımlanan esnek kümeler olsun. $(G, T) \theta_R(H, Z) = (L, T \cap Z)$ olmak üzere $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_1, e_3\}$ için, $L(\alpha) = G'(\alpha) \cap H'(\alpha)$ olup, $L(e_1) = G'(e_1) \cap H'(e_1) = \emptyset$, $L(e_3) = G'(e_3) \cap H'(e_3) = \emptyset$. Buradan, $(G, T) \theta_R(H, Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset)\}$. Şimdi de, $(F, T) \theta_R(H, Z) = (K, T \cap Z)$ olmak üzere $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_1, e_3\}$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cap H'(\alpha)$ olup, $K(e_1) = F'(e_1) \cap H'(e_1) = \emptyset$, $K(e_3) = F'(e_3) \cap H'(e_3) = \emptyset$. Böylece, $(F, T) \theta_R(H, Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset)\}$. Buradan, $(G, T) \theta_R(H, Z) \subseteq (F, T) \theta_R(H, Z)$; fakat $(F, T) \subseteq (G, T)$ olmadığı açıktır.

21) $(F, T) \subseteq (G, T)$ ve $(K, V) \subseteq (L, V)$ ise $(G, T) \theta_R(L, V) \subseteq (F, T) \theta_R(K, V)$ ve benzer şekilde $(L, V) \theta_R(G, T) \subseteq (K, V) \theta_R(F, T)$.

İspat: $(F, T) \subseteq (G, T)$ ve $(K, V) \subseteq (L, V)$ olsun. Buradan, $\forall \alpha \in T$ ve $\forall \alpha \in Z$ için, $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ ve $K(\alpha) \subseteq L(\alpha)$. Böylece $\forall \alpha \in T$ ve $\forall \alpha \in Z$ için, $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$ ve $L'(\alpha) \subseteq K'(\alpha)$. $(G, T) \theta_R(L, Z) = (M, T \cap Z)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $M(\alpha) = G'(\alpha) \cap L'(\alpha)$. $(F, T) \theta_R(K, Z) = (N, T \cap Z)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cap K'(\alpha)$. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$ ve $L'(\alpha) \subseteq K'(\alpha)$ olduğundan, $M(\alpha) = G'(\alpha) \cap L'(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cap K'(\alpha) = N(\alpha)$ olur. Böylece, $(G, T) \theta_R(L, T) \subseteq (F, T) \theta_R(K, T)$. Değişme özelliğinden, aynı şartlar altında, $(L, V) \theta_R(G, T) \subseteq (K, V) \theta_R(F, T)$ sağlandığı açıktır.

22) $(F, T) \theta_R(G, Z) \subseteq (F, T) *_R(G, Z)$ ve $(G, Z) \theta_R(F, T) \subseteq (G, Z) *_R(F, T)$.

İspat: $(F, T) \theta_R(G, Z) = (M, T \cap Z)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $M(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$. $(F, T) *_R(G, Z) = (N, T \cap Z)$ olsun. Böylece, $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $M(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cup G'(\alpha) = N(\alpha)$ olup, $(F, T) \theta_R(G, Z) \subseteq (F, T) *_R(G, Z)$. Değişme özelliğinden $(G, Z) \theta_R(F, T) \subseteq (G, Z) *_R(F, T)$ olduğu açıktır.

7.1.4. Teorem (F, T), (G, Z), (H, M), U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış teta işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

7.1.4.1. Teorem (F, T), (G, Z), (H, M), U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış teta işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Teta İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Soldan Dağılması:

$$1) (F, T) \theta_R [(G, Z) \cap_R (H, M)] = [(F, T) \theta_R (G, Z)] \cup_R [(F, T) \theta_R (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Z) \cap_R (H, M) = (R, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $R(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(F, T) \theta_R (R, Z \cap M) = (N, T \cap (Z \cap M))$ olsun, $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cap R'(\alpha)$. Buradan, $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için,

$$N(\alpha) = F'(\alpha) \cap [(G'(\alpha) \cup H'(\alpha))]$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafını yani $[(F, T) \theta_R (G, Z)] \cup_R [(F, T) \theta_R (H, M)]$ ele alalım: $(F, T) \theta_R (G, Z) = (V, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $V(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$. Şimdi $(F, T) \theta_R (H, M) = (W, T \cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $W(\alpha) = F'(\alpha) \cap H'(\alpha)$. $(V, T \cap Z) \cup_R (W, T \cap M) = (S, (T \cap Z) \cap (T \cap M))$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için, $S(\alpha) = V(\alpha) \cup W(\alpha)$,

$$T(\alpha) = [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup [F'(\alpha) \cap H'(\alpha)]$$

Böylece, $(N, T \cap Z \cap M) = (S, T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

$$2) (F, T) \theta_R [(G, Z) \cup_R (H, M)] = [(F, T) \theta_R (G, Z)] \cap_R [(F, T) \theta_R (H, M)].$$

$$3) (F, T) \theta_R [(G, Z) * _R (H, M)] = [(F, T) \gamma_R (G, Z)] \cap_R [(F, T) \gamma_R (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Z) * _R (H, M) = (R, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $R(\alpha) = G'(\alpha) \cup H'(\alpha)$. $(F, T) \theta_R (R, Z \cap M) = (N, T \cap (Z \cap M))$ olsun, $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cap R'(\alpha)$. Buradan, $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için,

$$N(\alpha) = F'(\alpha) \cap [(G(\alpha) \cap H(\alpha))]$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafını yani $[(F,T) \curlyvee_R (G,Z)] \cap_R [(F,T) \curlyvee_R (H,M)]$ ele alalım: $(F,T) \curlyvee_R (G,Z) = (V, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $V(\alpha) = F'(\alpha) \cap G(\alpha)$. Şimdi $(F,T) \curlyvee_R (H,M) = (W, T \cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $W(\alpha) = F'(\alpha) \cap H(\alpha)$. $(V, T \cap Z) \cap_R (W, T \cap M) = (S, (T \cap Z) \cap (T \cap M))$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$ için, $S(\alpha) = V(\alpha) \cap W(\alpha)$,

$$S(\alpha) = [F'(\alpha) \cap G(\alpha)] \cap [F'(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Böylece, $(N, T \cap Z \cap M) = (S, T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

$$4) (F,T) \theta_R [(G,Z) \theta_R (H,M)] = [(F,T) \curlyvee_R (G,Z)] \cup_R [(F,T) \curlyvee_R (H,M)].$$

ii) Kısıtlanmış Teta İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F,T) \cup_R (G,Z)] \theta_R (H,M) = [(F,T) \theta_R (H,M)] \cap_R [(G,Z) \theta_R (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım: $(F,T) \cup_R (G,Z) = (R, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $R(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$. $(R, T \cap Z) \theta_R (H,M) = (N, (T \cap Z) \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$ için, $N(\alpha) = R'(\alpha) \cap H'(\alpha)$. Buradan,

$$N(\alpha) = [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cap H'(\alpha)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) \theta_R (H,M)] \cap_R [(G,Z) \theta_R (H,M)]$ bakalım: $(F,T) \theta_R (H,M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $S(\alpha) = F'(\alpha) \cap H'(\alpha)$. $(G,Z) \theta_R (H,M) = (K, Z \cap M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $K(\alpha) = G'(\alpha) \cap H'(\alpha)$. $(S, T \cap M) \cap_R (K, Z \cap M) = (L, (T \cap Z \cap M))$ olup, $\forall \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M)$ için, $L(\alpha) = S(\alpha) \cap K(\alpha)$. Buradan,

$$L(\alpha) = ([F'(\alpha) \cap H'(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cap H'(\alpha)])$$

Buradan, $(N, T \cap Z \cap M) = (L, T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

$$2) [(F,T) \cap_R (G,Z)] \theta_R (H,M) = [(F,T) \theta_R (H,M)] \cup_R [(G,Z) \theta_R (H,M)].$$

$$3) [(F,T) \theta_R (G,Z)] \theta_R (H,M) = [(F,T) \setminus_R (H,M)] \cup_R [(G,Z) \setminus_R (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım: $(F,T) \theta_R(G,Z)=(R,T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $R(\alpha)=F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$. $(R,T \cap Z) \theta_R(H,M)=(N,(T \cap Z) \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$ için, $N(\alpha)=R'(\alpha) \cap H'(\alpha)$. Buradan,

$$N(\alpha)=[F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap H'(\alpha)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) \setminus_R (H,M)] \cup_R [(G,Z) \setminus_R (H,M)]$ bakalım: $(F,T) \setminus_R (H,M)=(S,T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $S(\alpha)=F(\alpha) \cap H'(\alpha)$. $(G,Z) \setminus_R (H,M)=(K,Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için, $K(\alpha)=G(\alpha) \cap H'(\alpha)$. $(S,T \cap M) \cup_R (K,Z \cap M)=(L,(T \cap M) \cap (Z \cap M))$ olup, $\forall \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M)$ için, $L(\alpha)=T(\alpha) \cup K(\alpha)$. Buradan,

$$L(\alpha)=[F(\alpha) \cap H'(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cap H'(\alpha)]$$

Buradan, $(N,T \cap Z \cap M)=(L,T \cap Z \cap M)$ olduğu görülür.

$$4) [(F,T) * _R (G,Z)] \theta_R(H,M)=[(F,T) \setminus_R (H,M)] \cap_R [(G,Z) \setminus_R (H,M)].$$

7.1.4.2. Teorem $(F,T), (G,Z), (H,M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış teta işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Teta İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılması:

$$1) (F,T) \theta_R[(G,Z) \cap_\epsilon (H,M)] = [(F,T) \theta_R(G,Z)] \cap_\epsilon [(F,T) \theta_R(H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G,Z) \cap_\epsilon (H,M)=(R,Z \cup M)$ burada $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \theta_R(R,Z \cup M)=(N,(T \cap (Z \cup M)))$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap (Z \cup M)$ için, $N(\alpha)=F'(\alpha) \cap R'(\alpha)$.

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z-M)=T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in T \cap (M-Z)=T \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M)=T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım: $[(F,T) \theta_R(G,Z)] \cup_\epsilon [(F,T) \theta_R(H,M)]$.

$(F,T)\theta_R(G,Z)=(K,T\cap Z)$ olsun. Burada $\forall\alpha\in T\cap Z$ için, $K(\alpha)=F'(\alpha)\cap G'(\alpha)$. Şimdi ise $(F,T)\theta_R(H,M)=(S,T\cap M)$ olsun. Burada $\forall\alpha\in T\cap M$ için, $S(\alpha)=F'(\alpha)\cap H'(\alpha)$. Daha sonra, $(K,T\cap Z)\cap_\varepsilon(S,T\cap M)=(L,(T\cap Z)\cup(T\cap M))$ olsun. Böylece, $\forall\alpha\in(T\cap Z)\cup(T\cap M)$;

$$L(\alpha)=\begin{cases} K(\alpha) & \alpha\in(T\cap Z)-(T\cap M)=T\cap(Z-M) \\ S(\alpha) & \alpha\in(T\cap M)-(T\cap Z)=T\cap(M-Z) \\ K(\alpha)\cap S(\alpha) & \alpha\in(T\cap Z)\cap(T\cap M)=T\cap(Z\cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha)=\begin{cases} F'(\alpha)\cap G'(\alpha) & \alpha\in T\cap Z\cap M' \\ F'(\alpha)\cap H'(\alpha) & \alpha\in T\cap Z'\cap M \\ [F'(\alpha)\cap G'(\alpha)] \cup [F'(\alpha)\cap H'(\alpha)] & \alpha\in T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Böylece, $(N, T\cap(Z\cup M))=(L, (T\cap Z)\cup(T\cap M))$ olduğu görülür.

$$2) (F,T)\theta_R[(G,Z)\cup_\varepsilon(H,M)] = [(F,T)\theta_R(G,Z)]\cap_\varepsilon[(F,T)\theta_R(H,M)].$$

ii) Kısıtlanmış Teta İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F,T)\cup_\varepsilon(G,Z)]\theta_R(H,M) = [(F,T)\theta_R(H,M)]\cap_\varepsilon[(G,Z)\theta_R(H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F,T)\cup_\varepsilon(G,Z)=(R,T\cup Z)$ olsun. Burada ise $\forall\alpha\in T\cup Z$ için,

$$R(\alpha)=\begin{cases} F(\alpha) & \alpha\in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha\in Z-T \\ F(\alpha)\cup G(\alpha) & \alpha\in T\cap Z \end{cases}$$

$(R,T\cup Z)\theta_R(H,M)=(N,(T\cup Z)\cap M)$ olsun. Burada, $\forall\alpha\in(T\cup Z)\cap M$ için, $N(\alpha)=R'(\alpha)\cap H'(\alpha)$.

$$N(\alpha)=\begin{cases} F'(\alpha)\cap H'(\alpha) & \alpha\in(T-Z)\cap M=T\cap Z'\cap M \\ G'(\alpha)\cap H'(\alpha) & \alpha\in(Z-T)\cap M=T'\cap Z\cap M \\ [F'(\alpha)\cap G'(\alpha)]\cap H'(\alpha) & \alpha\in(T\cap Z)\cap M=T\cap Z\cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T)\theta_R(H,M)]\cap_\varepsilon[(G,Z)\theta_R(H,M)]$ bakalım. $(F,T)\theta_R(H,M)=(K,T\cap M)$ olsun. Burada $\forall\alpha\in T\cap M$ için, $K(\alpha)=F'(\alpha)\cap H'(\alpha)$. $(G,Z)\theta_R(H,M)=(S,Z\cap M)$ olsun. Burada $\forall\alpha\in Z\cap M$ için, $S(\alpha)=G'(\alpha)\cap H'(\alpha)$. O halde, $(K,T\cap M)\cap_\varepsilon(S,Z\cap M)=(L,(T\cap M)\cup(Z\cap M))$ olsun. Böylece, $\forall\alpha\in(T\cap M)\cup(Z\cap M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) = (T - Z) \cap M \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - (T \cap M) = (Z - T) \cap M \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ [F'(\alpha) \cap H'(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cap H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece $(N, (T \cup Z) \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \theta_R (H, M) = [(F, T) \theta_R (G, Z)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \theta_R (H, M)].$$

7.1.4.3. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış teta işleminin tümleyenli genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Teta İşleminin Tümleyenli Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılıması:

$$1) (F, T) \theta_R [(G, Z) \overset{*}{*}_{\varepsilon} (H, M)] = [(F, T) \gamma_R (G, Z)] \cap_{\varepsilon} [(F, T) \gamma_R (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, Z) \overset{*}{*}_{\varepsilon} (H, M) = (R, Z \cup M)$ olsun. Burada

$\forall \alpha \in Z \cup M$ için, $(G, Z) \overset{*}{*}_{\varepsilon} (H, M) = (R, Z \cup M)$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G'(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H'(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G'(\alpha) \cup H'(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \theta_R (R, Z \cup M) = (N, (T \cap (Z \cup M)))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap (Z \cup M)$ için, $N(\alpha) = F'(\alpha) \cap R'(\alpha)$,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M - Z) = T \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cap [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) \gamma_R (G, Z)] \cap_{\varepsilon} [(F, T) \gamma_R (H, M)]$ bakalım. $(F, T) \gamma_R (G, Z) = (K, T \cap Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap Z$ için, $K(\alpha) = F'(\alpha) \cap G(\alpha)$. $(F, T) \gamma_R (H, M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$ için, $S(\alpha) = F'(\alpha) \cap H(\alpha)$. O zaman $(K, T \cap Z) \cap_{\varepsilon} (S, T \cap M) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup (T \cap M)$ için,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) = T \cap (Z - M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (T \cap Z) = T \cap (M - Z) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cap G(\alpha)] \cap [F'(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece, $(N, (T \cap (Z \cup M))) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) (F, T) \theta_R [(G, Z) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (H, M)] = [(F, T) \gamma_R (G, Z)] \cup_R [(F, T) \gamma_R (H, M)].$$

ii) Kısıtlanmış Teta İşleminin Tümlleyenli Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F, T) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (G, Z)] \theta_R (H, M) = [(F, T) \setminus_R (H, M)] \cup_\varepsilon [(G, Z) \setminus_R (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, T) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (G, Z) = (R, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G'(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) \theta_R (H, M) = (N, (T \cup Z) \cap M)$ olsun. O halde $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap M$ için, $N(\alpha) = R'(\alpha) \cap H'(\alpha)$,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in (T - Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in (Z - T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

$[(F, T) \setminus_R (H, M)] \cup_\varepsilon [(G, Z) \setminus_R (H, M)]$ bakalım: $(F, T) \setminus_R (H, M) = (K, T \cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap M$;

$K(\alpha) = F(\alpha) \cap H'(\alpha)$. $(G, Z) \setminus_R (H, M) = (S, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M$ için,

$S(\alpha) = G(\alpha) \cap H'(\alpha)$. O zaman $(K, T \cap M) \cup_\varepsilon (S, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olsun. Buradan $\forall$

$\alpha \in (T \cap M) \cup (Z \cap M)$ için,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) = (T - Z) \cap M \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - (T \cap M) = (Z - T) \cap M \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cap H'(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cap H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece, $(N, (T \cup Z) \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$ olduğu görülür.

$$2) [(F, T) \underset{\varepsilon}{*}^* (G, Z)] \theta_R(H, M) = [(F, T) \setminus_R (G, Z)] \cap_{\varepsilon} [(G, Z) \setminus_R (H, M)].$$

7.1.4.4. Teorem $(F, T), (G, Z), (H, M), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, kısıtlanmış teta işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Kısıtlanmış Teta İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Soldan Dağılımı:

$$1) (F, T) \theta_R[(G, Z) \underset{\cap}{\sim} (H, M)] = [(F, T) \theta_R(G, Z)] \underset{\cup}{\sim} [(F, T) \theta_R(H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, Z) \underset{\cap}{\sim} (H, M) = (R, Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \theta_R(R, Z) = (N, T \cap Z)$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in T \cap Z$; $N(\alpha) = F'(\alpha) \cap R'(\alpha)$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) \\ F'(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, T) \theta_R(G, Z)] \underset{\cup}{\sim} [(F, T) \theta_R(H, M)]$ bakalım. $(F, T) \theta_R(G, Z) = (K, T \cap Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap Z$; $K(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$. $(F, T) \theta_R(H, M) = (S, T \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cap M$; $T(\alpha) = F'(\alpha) \cap H'(\alpha)$. $(K, T \cap Z) \underset{\cup}{\sim} (S, T \cap M) = (L, T \cap Z)$ olup, $\forall \alpha \in T \cap Z$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cap M) = T \cap (Z - M) \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup [F'(\alpha) \cap H'(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece $(N, T \cap Z) = (L, T \cap Z)$ olduğu görülür.

$$2) (F,T) \theta_R[(G,Z) \widetilde{\cup} (H,M)] = [(F,T) \theta_R(G,Z)] \widetilde{\cap} [(F,T) \theta_R(H,M)].$$

ii) Kısıtlanmış Teta İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F,T) \widetilde{\cup} (G,Z)] \theta_R(H,M) = [(F,T) \theta_R(H,M)] \widetilde{\cap} [(G,Z) \theta_R(H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F,T) \widetilde{\cup} (G,Z) = (R,T)$ olur. Burada $\forall \alpha \in T$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$$(R,T) \theta_R(H,M) = (N, T \cap M) \text{ olup, } \forall \alpha \in T \cap M; N(\alpha) = R'(\alpha) \cap H'(\alpha).$$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap M \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cap H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) \theta_R(H,M)] \widetilde{\cap} [(G,Z) \theta_R(H,M)]$ bakalım. $(F,T) \theta_R(H,M) = (K, T \cap M)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cap M; K(\alpha) = F'(\alpha) \cap H'(\alpha)$. Şimdi $(G,Z) \theta_R(H,M) = (S, Z \cap M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cap M; T(\alpha) = G'(\alpha) \cap H'(\alpha)$. $(K, T \cap M) \widetilde{\cap} (S, Z \cap M) = (L, T \cap M)$ olup, daha sonra buradan da $\forall \alpha \in T \cap M$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

$$L(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cap M) = (T-Z) \cap M \\ [F'(\alpha) \cap H'(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cap H'(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece $(N, T \cap M) = (L, T \cap M)$ olduğu görülür.

$$2) [(F,T) \widetilde{\cap} (G,Z)] \theta_R(H,M) = [(F,T) \theta_R(H,M)] \widetilde{\cup} [(G,Z) \theta_R(H,M)]$$

7.2. Genişletilmiş Teta İşlemi ve Özellikleri

7.2.1. Tanım (F,T) ve (G,Z) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin $(F,T) \theta_\varepsilon(G,Z)$ ile gösterilen genişletilmiş teta işlemi $C = T \cup Z$ ve $\forall \alpha \in C$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

olmak üzere $(F, T)\theta_\varepsilon(G, Z) = (H, C)$ ile tanımlanır.

7.2.2. *Örnek* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $T = \{e_1, e_3\}$, $Z = \{e_2, e_3, e_4\}$ E'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, T) ve (G, Z) , U üzerinde $(F, T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, Z) = \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, T)\theta_\varepsilon(G, Z) = (H, T \cup Z)$ olmak üzere, $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Burada $T \cup Z = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve $T-Z = \{e_1\}$, $Z-T = \{e_2, e_4\}$, $T \cap Z = \{e_3\}$ burada, $H(e_1) = F(e_1) = \{h_2, h_5\}$, $H(e_2) = G(e_2) = \{h_1, h_4, h_5\}$, $H(e_4) = G(e_4) = \{h_3, h_5\}$, $H(e_3) = F'(e_3) \cap G'(e_3) = \{h_3, h_4\} \cap \{h_1, h_5\} = \emptyset$. Şimdi $(F, T)\theta_\varepsilon(G, Z) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \emptyset), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$.

Not 7.2.3. $S_A(U)$ kümesi üzerinde kısıtlanmış teta ve genişletilmiş teta işlemleri çakışıktır. Yani, parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler için, $(F, A)\theta_\varepsilon(G, A) = (F, A)\theta_\varepsilon(G, A)$.

7.2.4. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) θ_ε , $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: θ_ε işleminin $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\theta_\varepsilon: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((F, T), (G, Z)) \rightarrow (F, T)\theta_\varepsilon(G, Z) = (H, T \cup Z)$$

(F, T) ve (G, Z) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F, T)\theta_\varepsilon(G, Z)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir. θ_ε 'nın $S_A(U)$ kümesi üzerinde ikili işlem olduğu da aşikardır.

2) $T \cap Z \cap M = \emptyset$ için, $[(F, T)\theta_\varepsilon(G, Z)]\theta_\varepsilon(H, M) = (F, T)\theta_\varepsilon[(G, Z)\theta_\varepsilon(H, M)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, T)\theta_\varepsilon(G, Z) = (S, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(S, TUZ) \theta_\varepsilon(H, M) = (N, (TUZ) \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (TUZ) \cup M$ için,

$$N(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) & \alpha \in (TUZ) - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (TUZ) \\ S'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in (TUZ) \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-Z) - M = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z-T) - M = T' \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (TUZ) = T' \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in (Z-T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(G, Z) \theta_\varepsilon(H, M) = (R, Z \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - Z \\ G'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \theta_\varepsilon(R, Z \cup M) = (L, T \cup (Z \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup Z \cup M$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) \\ R(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) - T \\ F'(\alpha) \cap R'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z - M) - T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M - Z) - T = T' \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - T = T' \cap Z \cap M \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in T \cap (M - Z) = T \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada $T \cap Z \cap M = \emptyset$ için $(N, (TUZ) \cup M) = (L, T \cup (Z \cup M))$ olduğu görülür. Yani uygun koşullar altında, $S_\varepsilon(U)$ kümesi üzerinde, θ_ε işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$3) [(F,T) \theta_\varepsilon (G,T)] \theta_\varepsilon (H,T) \neq (F,T) \theta_\varepsilon [(G,T) \theta_\varepsilon (H,T)].$$

İspat: İspat, Not 7.2.3 ve Teorem 7.1.3 (3)'den elde edilir. Yani T, E nin sabit bir alt kümesi olmak üzere $S_T(U)$ kümesi üzerinde, θ_ε işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F,T) \theta_\varepsilon (G,Z) = (G,Z) \theta_\varepsilon (F,T).$$

İspat: $(F,T) \theta_\varepsilon (G,Z) = (H, T \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup Z$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(G,Z) \theta_\varepsilon (F,T) = (S, Z \cup T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in Z \cup T$ için,

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G'(\alpha) \cap F'(\alpha) & \alpha \in Z \cap T \end{cases}$$

Böylece, $(F,T) \theta_\varepsilon (G,Z) = (G,Z) \theta_\varepsilon (F,T)$. Buradan, $(F,T) \theta_\varepsilon (G,T) = (G,T) \theta_\varepsilon (F,T)$ olduğu açıktır. Yani, $S_E(U)$ ve $S_T(U)$ kümeleri üzerinde θ_ε işleminin değişme özelliği vardır.

$$5) (F,T) \theta_\varepsilon (F,T) = (F,T)^r.$$

İspat: İspat, Not 7.2.3 ve Teorem 7.1.3 (5)'den elde edilir. Yani $S_E(U)$ kümesi üzerinde θ_ε işlemi denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

$$6) (F,T) \theta_\varepsilon \emptyset_T = \emptyset_T \theta_\varepsilon (F,T) = U_T.$$

İspat: İspat, Not 7.2.3 ve Teorem 7.1.3 (6)'den elde edilir.

$$7) (F,T) \theta_\varepsilon \emptyset_\emptyset = (F,T).$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(F,T) \theta_\varepsilon (S, \emptyset) = (H, T \cup \emptyset)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup \emptyset = T$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - \emptyset = T \\ S(\alpha) & \alpha \in \emptyset - T = \emptyset \\ F'(\alpha) \cap S'(\alpha) & \alpha \in T \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Böylece, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F(\alpha)$ olup, $(H, T) = (F, T)$.

$$8) \emptyset_\emptyset \theta_\varepsilon(F, T) = (F, T).$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(S, \emptyset) \theta_\varepsilon(F, T) = (H, \emptyset \cup T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in \emptyset \cup T = T$ için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) & \alpha \in \emptyset - T = \emptyset \\ F(\alpha) & \alpha \in T - \emptyset = T \\ S'(\alpha) \cap F'(\alpha) & \alpha \in \emptyset \cap T = \emptyset \end{cases}$$

Böylece, $\forall \alpha \in T$ için, $H(\alpha) = F(\alpha)$ olup, $(H, T) = (F, T)$.

Teorem 7.2.4 (7) ve (8) den, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, θ_ε işleminin birim elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir. Klasik küme teorisinde, $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ ve $B = \emptyset$ olduğundan, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, (F, T) esnek kümesi için, $(F, T) \theta_\varepsilon(G, K) = (G, K) \theta_\varepsilon(F, T) = \emptyset_\emptyset$ olacak şekilde $(G, K) \in S_E(U)$ bulamayız; çünkü bu durum $T \cup K = \emptyset$ olmasını ve dolayısıyla $T = \emptyset$ ve $K = \emptyset$ olmasını gerektirir. Kabulümüz gereği, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\emptyset_\emptyset$ haricinde hiçbir esnek küme boş parametreye sahip olmadığından, buradan birim eleman olan $\emptyset_\emptyset$ haricinde hiçbir elemanın, $S_E(U)$ kümesi üzerinde θ_ε işlemine göre tersinin olmadığı sonucu çıkartırız.

7.2.5. *Sonuç* Teorem 7.2.4 (1), (2), (4), (7) ve (8)'dan, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında, $(S_E(U), \theta_\varepsilon)$ birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, idempotent olmayan, komutatif bir monoiddir. $A \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, $(S_A(U), \theta_\varepsilon)$ cebirsel yapısı birleşme özelliğine sahip olmadığı için yarıgrup olamaz.

$$9) (F, T) \theta_\varepsilon U_T = U_T \theta_\varepsilon(F, T) = \emptyset_T.$$

İspat: İspat, Not 7.2.3 ve Teorem 7.1.3 (10)'dan elde edilir.

$$10) (F, T) \theta_\varepsilon(F, T)^r = (F, T)^r \theta_\varepsilon(F, T) = \emptyset_T.$$

İspat: İspat, Not 7.2.3 ve Teorem 3.1.3 (13)'den elde edilir.

$$11) [(F, T) \theta_\varepsilon(G, Z)]^r = (F, T) \underset{U}{\sim} (G, Z).$$

İspat: $(F, T) \theta_\varepsilon (G, Z) = (H, T \cup Z)$ olsun. $\forall \alpha \in T \cup Z$ için;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(H, T \cup Z)^r = (K, T \cup Z)$ olup, $\forall \alpha \in T \cup Z$ için;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G'(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan, $(K, T \cup Z) = (F, T) \underset{U}{\overset{*}{\sim}} (G, Z)$.

$$12) (F, T) \theta_\varepsilon (G, T) = U_T \Leftrightarrow (F, T) = \emptyset_T \text{ ve } (G, T) = \emptyset_T.$$

İspat: İspat, Not 7.2.3 ve Teorem 7.1.3 (15)'den elde edilir.

$$13) \emptyset_T \subseteq (F, T) \theta_\varepsilon (G, Z), \emptyset_Z \subseteq (F, T) \theta_\varepsilon (G, Z). \text{ Ayrıca, } (F, T) \theta_\varepsilon (G, Z) \subseteq U_{T \cup Z}.$$

İspat: Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamasından ispat açıktır.

$$14) (F, T) \theta_\varepsilon (G, T) \subseteq (F, T)^r \text{ ve } (F, T) \theta_\varepsilon (G, T) \subseteq (G, T)^r.$$

İspat: İspat, Not 7.2.3 ve Teorem 7.1.3 (17)'den elde edilir.

$$15) (F, T) \subseteq (G, T) \text{ ise } (F, T) \theta_\varepsilon (G, T) = (G, T)^r.$$

İspat: İspat, Not 7.2.3 ve Teorem 7.1.3 (18)'den elde edilir.

$$16) (F, T) \subseteq (G, T) \text{ ise } (G, T) \theta_\varepsilon (H, T) \subseteq (F, T) \theta_\varepsilon (H, T). \text{ Tersisi doğru değildir.}$$

İspat: İspat, Not 7.2.3 ve Teorem 7.1.3 (19) ve (20)'den elde edilir.

$$17) (F, T) \subseteq (G, T) \text{ ve } (K, T) \subseteq (L, T) \text{ ise } (G, T) \theta_\varepsilon (L, T) \subseteq (F, T) \theta_\varepsilon (K, T).$$

İspat: İspat, Not 7.2.3 ve Teorem 7.1.3 (21)'den elde edilir.

$$18) (F,T) \theta_\varepsilon (G,Z) \tilde{\subseteq} (F,T) *_\varepsilon (G,Z) \text{ ve } (G,Z) \theta_\varepsilon (F,T) \tilde{\subseteq} (G,Z) *_\varepsilon (F,T).$$

İspat: $(F,T)\theta_\varepsilon(G,Z)=(H,TUZ)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in TUZ$,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F,T) *_\varepsilon (G,Z)=(K,TUZ)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in TUZ$,

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$\forall \alpha \in T-Z$; $H(\alpha)=F(\alpha) \subseteq F(\alpha)=K(\alpha)$, $\forall \alpha \in Z-T$; $H(\alpha)=G(\alpha) \subseteq G(\alpha)=K(\alpha)$, $\forall \alpha \in T \cap Z$; $H(\alpha)=F'(\alpha) \cap G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha) \cup G'(\alpha)=K(\alpha)$. Böylece, $(F,A)\theta_\varepsilon(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)*_\varepsilon(G,B)$.

7.2.6. Teorem $(F,T), (G,Z), (H,M)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş teta işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

7.2.6.1. Teorem $(F,T), (G,Z), (H,M)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş teta işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Genişletilmiş Teta İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılması

Aşağıda yer alan dağılmalar $T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında sağlanır.

$$1) (F,T) \theta_\varepsilon [(G,Z) \cup_\varepsilon (H,M)] = [(F,T) \theta_\varepsilon (G,Z)] \cup_\varepsilon [(F,T) \theta_\varepsilon (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(G,Z) \cup_\varepsilon (H,M) = (R,Z \cup M)$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-Z \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \theta_\varepsilon (R,Z \cup M) = (N,(T \cup (Z \cup M)))$ bakalım. $\forall \alpha \in T \cup (Z \cup M)$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) \\ R(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) - T \\ F'(\alpha) \cap R'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z - M) - T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M - Z) - T = T' \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) - T = T' \cap Z \cap M \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z - M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in T \cap (M - Z) = T \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cap H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi ise eşitliğin sağ tarafına $[(F, T) \theta_\varepsilon (G, Z)] \cup_\varepsilon [(F, T) \theta_\varepsilon (H, M)]$ bakalım. Öncelikle $(F, T) \theta_\varepsilon (G, Z) = (K, T \cup Z)$ olsun. Buradan $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z - T \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \theta_\varepsilon (H, M) = (S, T \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - T \\ F'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup Z) \cup_\varepsilon (S, T \cup M) = (L, (T \cup Z) \cup (T \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) - (T \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) - (T \cup Z) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Böylece

$L(\alpha) =$	$F(\alpha)$	$\alpha \in (T-Z) - (T \cup M) = \emptyset$
	$G(\alpha)$	$\alpha \in (Z-T) - (T \cup M) = T' \cap Z \cap M'$
	$F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap Z) - (T \cup M) = \emptyset$
	$F(\alpha)$	$\alpha \in (T-M) - (T \cup Z) = \emptyset$
	$H(\alpha)$	$\alpha \in (M-T) - (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M$
	$F'(\alpha) \cap H'(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M) - (T \cup Z) = \emptyset$
	$F(\alpha) \cup F(\alpha)$	$\alpha \in (T-Z) \cap (T-M) = T \cap Z' \cap M'$
	$F(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (T-Z) \cap (M-T) = \emptyset$
	$F(\alpha) \cup [F'(\alpha) \cap H'(\alpha)]$	$\alpha \in (T-Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M$
	$G(\alpha) \cup F(\alpha)$	$\alpha \in (Z-T) \cap (T-M) = \emptyset$
	$G(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (Z-T) \cap (M-T) = T' \cap Z \cap M$
	$G(\alpha) \cup [F'(\alpha) \cap H'(\alpha)]$	$\alpha \in (Z-T) \cap (T \cap M) = \emptyset$
	$[F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup F(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap Z) \cap (T-M) = T \cap Z \cap M'$
	$[F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup H(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap Z) \cap (M-T) = \emptyset$
	$[F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cup [F'(\alpha) \cap H'(\alpha)]$	$\alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M$

Buradan,

$L(\alpha) =$	$G(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M'$
	$H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z' \cap M$
	$F(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M'$
	$F(\alpha) \cup H'(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M$
	$G(\alpha) \cup H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M$
	$G'(\alpha) \cup F(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z \cap M'$
	$F'(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)]$	$\alpha \in T \cap Z \cap M$

$T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M' = T \cap Z \cap M = \emptyset$ için $N=L$ olur. $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M' = \emptyset$ şartının da $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (F, T) \theta_\varepsilon [(G, Z) \cap_\varepsilon (H, M)] = [(F, T) \theta_\varepsilon (G, Z)] \cup_\varepsilon [(F, T) \theta_\varepsilon (H, M)].$$

ii) Genişletilmiş Teta İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılıması:

Aşağıdaki yer alan eşitlikler, $(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında sağlanır.

$$1) [(F, T) \cap_\varepsilon (G, Z)] \theta_\varepsilon (H, M) = [(F, T) \theta_\varepsilon (H, M)] \cap_\varepsilon [(G, Z) \theta_\varepsilon (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z)=(R,T \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R,T \cup Z) \theta_{\varepsilon} (H,M) = (N,(T \cup Z) \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup M$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) - M \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cup Z) \\ R'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap M \end{cases}$$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-Z) - M = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z-T) - M = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M - (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in (Z-T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T) \theta_{\varepsilon} (H,M)] \cap_{\varepsilon} [(G,Z) \theta_{\varepsilon} (H,M)]$ bakalım.

$(F,T) \theta_{\varepsilon} (H,M) = (K,T \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ F'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G,Z) \theta_{\varepsilon} (H,M) = (S,Z \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-Z \\ G'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(K,T \cup M) \cap_{\varepsilon} (S,Z \cup M) = (L,(T \cup M) \cup (Z \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) - (Z \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) - (T \cup M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$F(\alpha)$	$\alpha \in (T-M)-(Z \cup M) = T \cap Z' \cap M'$
$H(\alpha)$	$\alpha \in (M-T)-(Z \cup M) = \emptyset$
$F'(\alpha) \cap H'(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M)-(Z \cup M) = \emptyset$
$G(\alpha)$	$\alpha \in (Z-M)-(T \cup M) = T' \cap Z \cap M'$
$H(\alpha)$	$\alpha \in (M-Z)-(T \cup M) = \emptyset$
$G'(\alpha) \cap H'(\alpha)$	$\alpha \in (Z \cap M)-(T \cup M) = \emptyset$
$F(\alpha) \cap G(\alpha)$	$\alpha \in (T-M) \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M'$
$L(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$	$\alpha \in (T-M) \cap (M-Z) = \emptyset$
$F(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cap H'(\alpha)]$	$\alpha \in (T-M) \cap (Z \cap M) = \emptyset$
$H(\alpha) \cap G(\alpha)$	$\alpha \in (M-T) \cap (Z-M) = \emptyset$
$H(\alpha) \cap H(\alpha)$	$\alpha \in (M-T) \cap (M-Z) = T' \cap Z' \cap M$
$H(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cap H'(\alpha)]$	$\alpha \in (M-T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M$
$[F'(\alpha) \cap H'(\alpha)] \cap G(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M) \cap (Z-M) = \emptyset$
$[F'(\alpha) \cap H'(\alpha)] \cap H(\alpha)$	$\alpha \in (T \cap M) \cap (M-Z) = T \cap Z' \cap M$
$[F'(\alpha) \cap H'(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cap H'(\alpha)]$	$\alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M$
Buradan,	
$F(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M'$
$G(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M'$
$F(\alpha) \cap G(\alpha)$	$\alpha \in T \cap Z \cap M'$
$L(\alpha) = H(\alpha)$	$\alpha \in T' \cap Z' \cap M$
$\emptyset$	$\alpha \in T' \cap Z \cap M$
$\emptyset$	$\alpha \in T \cap Z' \cap M$
$[F'(\alpha) \cap H'(\alpha)] \cap [G'(\alpha) \cap H'(\alpha)]$	$\alpha \in T \cap Z \cap M$

$T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ için $N=L$ olur. $T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartının da $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) [(F,T) \cup_{\varepsilon} (G,Z)] \theta_{\varepsilon}(H,M) = [(F,T) \theta_{\varepsilon}(H,M)] \cap_{\varepsilon} [(G,Z) \theta_{\varepsilon}(H,M)].$$

7.2.6.1.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan komutatif idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 7.2.5'de $(S_E(U), \theta_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan, idempotent olmayan, komutatif bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem

7.2.6.1 (i) (1) başlığında, θ_ε işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında soldan dağıldığı, Teorem 7.2.6.2 (ii) (2) başlığında, θ_ε işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = (T \Delta Z) \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$ cebirsel yapısı birimli ve komutatif, toplamsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

7.2.6.1.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif, idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 7.2.5’de $(S_E(U), \theta_\varepsilon)$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, idempotent olmayan, komutatif bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 7.2.6.1 (i) (2) başlığında, θ_ε işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında soldan dağıldığı, Teorem 7.2.6.1 (ii) (1) başlığında, θ_ε işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = (T \Delta Z) \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$ cebirsel yapısı birimli ve komutatif, toplamsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

7.2.6.2. Teorem (F, T) , (G, Z) , (H, M) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, genişletilmiş teta işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Genişletilmiş Teta İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Soldan Dağılması:

Aşağıdaki eşitlikler, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları ile sağlanır.

$$1) (F, T) \theta_\varepsilon [(G, Z) \underset{\cap}{\sim} (H, M)] = [(F, T) \theta_\varepsilon (G, Z)] \underset{\cap}{\sim} [(F, T) \theta_\varepsilon (H, M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(G, Z) \underset{\cap}{\sim} (H, M) = (R, Z)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in Z$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z - M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \theta_\varepsilon (R, Z) = (N, T \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ R(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F'(\alpha) \cap R'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z-M)-T = T' \cap Z \cap M' \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M)-T = T' \cap Z \cap M \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cup H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(F, T) \theta_\varepsilon (G, Z) = (K, T \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup Z$;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z-T \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \theta_\varepsilon (H, M) = (S, T \cup M)$ olsun. Burada $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ F'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup Z) \tilde{\cap} (S, T \cup M) = (L, (T \cup Z) \cup (T \cup M))$ olsun. Burada $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) - (T \cup M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-Z) - (T \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z-T) - (T \cup M) = T' \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) - (T \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap (T-M) = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap (M-T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap [F'(\alpha) \cap H'(\alpha)] & \alpha \in (T-Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (Z-T) \cap (T-M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z-T) \cap (M-T) = T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \cap [F'(\alpha) \cap H'(\alpha)] & \alpha \in (Z-T) \cap (T \cap M) = \emptyset \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cap F(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T-M) = T \cap Z \cap M' \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (M-T) = \emptyset \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cap [F'(\alpha) \cap H'(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ \emptyset & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ \emptyset & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F'(\alpha) \cap [G'(\alpha) \cap H'(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, T-Z yi ele alırsak, T-Z=T $\cap$ Z' olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya M-Z de, ya da MUZ nin tümleyenindedir. Daha sonra, $\alpha \in T-Z$ ise $\alpha \in T \cap M \cap Z'$ veya $\alpha \in T \cap M' \cap Z'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı ile N=L sağlanır. $T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartının da $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (F,T) \theta_\varepsilon [(G,Z) \widetilde{\cup} H,M] = [(F,T) \theta_\varepsilon (G,Z)] \widetilde{\cup} [(F,M) \theta_\varepsilon (G,Z)].$$

ii) Genişletilmiş Teta İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Sağdan Dağılması:

Aşağıdaki eşitlikler, $(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları ile sağlanır.

$$1) [(F,T) \widetilde{\cup} (G,Z)] \theta_\varepsilon (H,M) = [(F,T) \theta_\varepsilon (H,M)] \widetilde{\cup} [(G,Z) \theta_\varepsilon (H,M)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,T) \widetilde{\cup} (G,Z) = (R,T)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T$;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-Z \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R,T) \theta_\varepsilon (H,M) = (N,T \cup M)$ olsun. Burada, $\forall \alpha \in T \cup M$;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in T-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ R'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-Z)-M = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z)-M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ F'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in (T-Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cap G'(\alpha)] \cap H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,T)\theta_\varepsilon(H,M)] \widetilde{\cup} [(G,Z)\theta_\varepsilon(H,M)]$ bakalım. Burada

$$(F,T)\theta_\varepsilon(H,M) = (K,T \cup M) \quad \forall \alpha \in T \cup M;$$

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-T \\ F'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$$(G,Z)\theta_\varepsilon(H,M) = (S,T \cup M) \text{ olsun. Burada } \forall \alpha \in Z \cup M;$$

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z-M \\ H(\alpha) & \alpha \in M-Z \\ G'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$$(K,T \cup M) \widetilde{\cup} (S,Z \cup M) = (L,(T \cup M) \cup (Z \cup M)) \text{ olsun. Burada } \forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M);$$

$$R(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) - (Z \cup M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T-M) - (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M-T) - (Z \cup M) = \emptyset \\ F'(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) - (Z \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T-M) \cap (Z-M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T-M) \cap (M-Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cap H'(\alpha)] & \alpha \in (T-M) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (M-T) \cap (Z-M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (M-T) \cap (M-Z) = T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cup [G'(\alpha) \cap H'(\alpha)] & \alpha \in (M-T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M \\ [F'(\alpha) \cap H'(\alpha)] \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z-M) = \emptyset \\ [F'(\alpha) \cap H'(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (M-Z) = T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cap H'(\alpha)] \cup [G'(\alpha) \cap H'(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ F'(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F'(\alpha) \cup G'(\alpha)] \cap H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, M-T yi ele alırsak, $M-T = M \cap T'$ olup, bir eleman T nin tümleyeninde ise o eleman ya Z-T de, ya da $Z \cup T$ nin tümleyenindedir. Burdan, $\alpha \in M-T$ ise $\alpha \in M \cap Z \cap T'$ veya $\alpha \in M \cap Z' \cap T'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı ile $N=L$ sağlanır. $T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartının $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) [(F,T) \tilde{\cap} (G,Z)] \theta_\varepsilon (H,M) = [(F,T) \theta_\varepsilon (H,M)] \tilde{\cap} [(G,Z) \theta_\varepsilon (H,M)].$$

7.2.7.2.1. *Sonuç* Yavuz (2024), (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğunu göstermişti. Sonuç 7.2.5'de $(S_E(U), \theta_\varepsilon)$ cebirsel yapısının, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, idempotent olmayan, komutatif bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 7.2.6.2 (i) (2) başlığında, θ_ε işleminin $\tilde{\cap}$ işlemine $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında soldan dağıldığı, Teorem 7.2.6.2 (ii) (1) başlığında, $*_\varepsilon$ işleminin $\tilde{\cap}$ işlemine $(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = (T \Delta Z) \cap M = T \cap Z' \cap M$ şartları altında, $(S_E(U), \tilde{\cap}, \theta_\varepsilon)$ cebirsel yapısı birimli ve komutatif, toplamsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

7.2.7.2.2. *Sonuç* Yavuz (2024), (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğunu göstermişti. Sonuç 7.2.5 'de $(S_E(U), \theta_\varepsilon)$ cebirsel yapısının $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, idempotent olmayan, komutatif bir monoid (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, Teorem 7.2.6.2 (i) (1) başlığında, θ_ε

işleminin $\tilde{\cap}$ işlemine $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 7.2.6.2 (ii) (2) başlığında, θ_ε işleminin $\tilde{\cap}$ işlemine $(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları ile sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap (Z \Delta M) = (T \Delta Z) \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \tilde{\cap}, \theta_\varepsilon)$ cebirsel yapısı birimli ve komutatif, toplamsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, esnek küme literatürüne katkı sağlaması amacıyla, pek çok yeni kısıtlanmış ve genişletilmiş esnek küme işlemi tanıtılmış, bu işlemlerin özellikleri incelenmiş; bu işlemlerin birbirleri ve diğer işlemler ile olan ilişkilerine bakılmış, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, bu işlemlerin hangi birli ve ikili cebirsel yapılar oluşturduğu tüm detaylarıyla birlikte sunulmuştur.

Yedi bölümden oluşan bu tezin ilk bölümünde, esnek kümeler, esnek işlemler ve cebirsel yapılar ile ilgili literatür taraması yapılmış; üç aşamada incelenene üçüncü bölümün ilk aşamasında kümelerle ilgili tanımlar ve özellikler; ikinci aşamasında cebirsel yapılarla ilgili temel kavramlar ve üçüncü aşamasında esnek kümelerle ilgili tanımlar ve temel kavramlarla ilgili bilgiler verilmiş, üçüncü bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş artı, dördüncü bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş gamma, beşinci bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş lamda, altıncı bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş yıldız, yedinci bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş teta işleminin tüm özellikleri ve diğer işlemlere olan dağılmasına bakılmış, bu işlemlerin U evrensel kümesi üzerindeki tüm esnek kümeler kümesi üzerinde bu bölümde sistematik olarak verilen pek çok birli ve ikili cebirsel yapılar oluşturduğu gösterilmiştir.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde bu yeni esnek küme işlemlerin hangi birli cebirsel yapılar oluşturduğuna bakılmış; belli şartlar altında $(S_E(U), +_\epsilon)$, $(S_E(U), \vee_\epsilon)$, $(S_E(U), \lambda_\epsilon)$ cebirsel yapılarının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoid; $(S_E(U), *_\epsilon)$ ve $(S_E(U), \theta_\epsilon)$ cebirsel yapılarının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan, idempotent olmayan, komutatif bir monoid olduğu görülmüştür.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde bu yeni esnek küme işlemlerin hangi ikili cebirsel yapılar oluşturduğuna bakılmış; belli şartlar altında $(S_E(U), \cap_R, +_\epsilon)$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimli ve sıfırlı sıfır simetrik olmayan bir (sol) yakın yarı-halk ve ayrıca komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız ve birimli bir yarı-halka olduğu; benzer şekilde $(S_E(U), \cup_R, +_\epsilon)$, $(S_E(U), \cup_\epsilon, +_\epsilon)$, $(S_E(U), \cap_\epsilon, +_\epsilon)$, $(S_E(U), \tilde{\cup}, +_\epsilon)$,

$(S_E(U), \widetilde{\cap}, +_\epsilon)$ cebirsel yapılarının komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız, birimli bir yarı-halka olduğu gösterilmiştir.

Belli şartlar altında $(S_E(U), \cup_R, \forall_\epsilon)$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimli ve sıfırlı sıfır simetrik olmayan bir (sol) yakın yarı-halka ve ayrıca komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız ve birimli bir yarı-halka olduğu; benzer şekilde $(S_E(U), \cap_R, \forall_\epsilon)$, $(S_E(U), \cup_\epsilon, \forall_\epsilon)$, $(S_E(U), \cap_\epsilon, \forall_\epsilon)$, $(S_E(U), \widetilde{\cup}, \forall_\epsilon)$, $(S_E(U), \widetilde{\cap}, \forall_\epsilon)$ cebirsel yapılarının komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız, birimli bir yarı-halka olduğu gösterilmiştir.

Belli şartlar altında, $(S_E(U), \cup_\epsilon, *_\epsilon)$, $(S_E(U), \cap_\epsilon, *_\epsilon)$, $(S_E(U), \widetilde{\cup}, *_\epsilon)$, $(S_E(U), \widetilde{\cap}, *_\epsilon)$ cebirsel yapılarının birimli ve komutatif, toplamsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halka olduğu, benzer şekilde, $(S_E(U), \cup_\epsilon, \theta_\epsilon)$, $(S_E(U), \cap_\epsilon, \theta_\epsilon)$, $(S_E(U), \widetilde{\cup}, \theta_\epsilon)$, $(S_E(U), \widetilde{\cap}, \theta_\epsilon)$ cebirsel yapılarının da birimli ve komutatif, toplamsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halka olduğu bulunmuştur.

Belli şartlar altında $(S_E(U), \cap_R, \lambda_\epsilon)$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimli ve sıfırlı sıfır simetrik olmayan bir (sağ) yakın yarı-halka ve ayrıca komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız ve birimli bir yarı-halka olduğu; benzer şekilde $(S_E(U), \cup_R, \lambda_\epsilon)$, $(S_E(U), \cup_\epsilon, \lambda_\epsilon)$, $(S_E(U), \cap_\epsilon, \lambda_\epsilon)$, $(S_E(U), \widetilde{\cup}, \lambda_\epsilon)$, $(S_E(U), \widetilde{\cap}, \lambda_\epsilon)$ cebirsel yapılarının komutatif olmayan, toplamsal idempotent, sıfırsız, birimli bir yarı-halka olduğu gösterilmiştir.

Bu tez yeni esnek küme işlemlerinden olan kısıtlanmış ve genişletilmiş artı, kısıtlanmış ve genişletilmiş gamma, kısıtlanmış ve genişletilmiş lamda, kısıtlanmış ve genişletilmiş yıldız ve kısıtlanmış ve genişletilmiş teta işlemlerinin tüm özelliklerinin ispatlarıyla bir arada bulunduğu, bu işlemlerin $S_E(U)$ kümesi üzerinde hangi cebirsel yapıları oluşturduğunun detaylı şekilde incelenip sunulduğu kapsayıcı bir çalışma olup, cebirde çok önemli olan cebirsel yapıların esnek kümeler kümesi üzerinde bu yeni işlemler yardımıyla elde edilmiş olması, yeni esnek küme işlemleri tanımlanıp, bu işlemlerin bu esnek küme işlemleriyle olan ilişkilerine bakılabilmesi açısından gelecek çalışmaların önünü açmaktadır.

KAYNAKLAR

- Abbas, M., Ali, B. and Romaguera, S. (2014). On Generalized Soft Equality and Soft Lattice Structure. *Filomat*, 28(6), 1191–1203.
- Abbas, M., Ali, M. I and Romaguera, S. (2017). Generalized Operations in Soft Set Theory via Relaxed Conditions on Parameters. *Filomat*, 31(19), 5955–5964.
- Acar, U., Koyuncu, F. and Tanay, B. (2010). Soft Sets and Soft Rings. *Computers Mathematics Applications*, 59(11), 3458-3463.
- Akbulut, E. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Difference and Lambda Operations*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Aktaş, H. and Çağman, N. (2007). Soft Sets and Soft Groups. *Information Sciences*, 177 (1), 2726-2735.
- Aktaş, H. and Özlü, Ş. (2014). Cyclic Soft Groups and Their Applications on Groups. *The Scientific World Journal*, Volume 2014 Article ID 437324, 5 pages.
- Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K. and Shabir, M. (2009). On Some New Operations in Soft Set Theory. *Computers Mathematics with Applications*, 57(9), 1547-1553.
- Ali, M. I., Shabir, M. and Naz, M. (2011). Algebraic Structures of Soft Sets Associated with New Operations. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(9), 2647–2654.
- Aydın, K. ve Kandamar, H. (2013). *Soyut Cebir* (Birinci Baskı). Türkiye: Kriter Yayınevi, 3-232.
- Aygünoğlu, A. and Aygün, H. (2009). Introduction to Fuzzy Soft Groups. *Computers Mathematics Applications*, 58(6), 1279-1286.
- Bayraktar, M. (2006). *Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi* (Birinci Baskı). Türkiye: Gazi Kitabevi, 87-185.
- Chang, C. C. (1958). A New Proof of the Completeness of the Łukasiewicz Axioms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 93(1), 460–490.
- Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S. and Wang, X. (2005). The Parametrization Reduction of Soft Sets and its Applications. *Computers Mathematics Applications*, 49(5-6), 757–763.
- Clay, J. R. and Lawver, D. A. (1969). Boolean Near-rings. *Canadian Mathematical Bulletin*, 12(3), 265- 273.
- Clifford, A. H. (1954). Bands of Semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5(3), 499–504.

- Çağman, N. (2021). Conditional Complements of Sets and Their Application to Group Theory. *Journal of New Results in Science*, 10(3), 67-74.
- Çallıalp, F. (1994). *Örneklerle Soyut Matematik* (Altıncı Baskı). Türkiye: Birsen Yayınevi, 1-7.
- Demirci, A. M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended, Union Plus and Theta Operations*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Dickson, L. E. (1905). Definitions of a Group and a Field by Independent Postulates. *Transactions American Mathematical Society*, 6(2), 198-204.
- Eren, Ö. F. (2019). *Esnek Küme Teorisi Üzerine*. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Feng, F., Jun, Y. B. and Zhao, X. (2008). Soft Semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, 56 (10), 2621-2628.
- Gong, K., Xiao, Z. and Zhang, X. (2010). The Bijective Soft Set with its Operations. *Computers Mathematics Applications*, 60(8), 2270–2278.
- Glazek, K. (2002). A Guide to Literature on Semirings and Their Applications in *Mathematics and Information Sciences: With Complete Bibliography*.
- Hacısalıhoğlu, H. (2007). *Soyut Matematik* (İkinci Baskı). Türkiye: Üniversite Yayınevi, 181.
- Herawan, T. (2010). Soft Set-based Decision Making for Patients Suspected Influenza-Like Illness. *International Journal of Modern Physics Conference Series*, 1(1), 1–5.
- Herawan, T. and Deris M. M. (2010). Soft Decision Making for Patients Suspected Influenza, *Lecture Notes in Computer Science, Springer* 6018, 405–418.
- Hoorn, W. G. V. and Rootselaar, V. B. (1967). Fundamental Notions in the Theory of Seminearrings. *Compositio Mathematica*, 18(1-2), 65-78.
- Jiang, Y., Tang, Y., Chen, Q., Wang, J. and Tang, S. (2010). Extending Soft Sets with Descriptionlogics. *Computers Mathematics Applications*, 59(6), 2087–2096.
- Jun, Y. B. (2008). Soft BCK-BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(5), 1408-1413.
- Jun, Y. B. and Park, C. H. (2008). Applications of Soft Sets in Ideal Theory of BCK-BCI-algebras. *Information Sciences: An International Journal*, 178 (11), 2466-2475.
- Jun, Y. B., Lee, K. J. and Zhan, J. (2009). Soft P-ideals of Soft BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(10), 2060-2068.

- Jun, Y.B. and Zhan, J. (2010). Soft BL-algebras Based on Fuzzy Sets, *Computers and Mathematics with Applications*, 59(6), 2037–2046.
- Karvellas, P. H. (1974). Inversive Semirings. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 18(3), 277-288.
- Kaya A. and Satyanarayana, M. (1981) Semirings Satisfying Properties of Distributive Type, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 82 (3) 341–346.
- Kazancı, O., Yılmaz, S. and Yamak, S. (2010). Soft Sets and Soft BCH-algebras. *Hacettepe Journal of Mathematics Statistics*, 39(2), 205-217.
- Kilp, M., Knauer, U. and Mikhalev, A. V. (2000). *Monoids, Acts and Categories* (İkinci Baskı). Berlin: *De Gruyter Expositions in Mathematics*, (29).
- Liu, X. Y., Feng F. and Jun, Y. B. (2012). A Note on Generalized Soft Equal Relations. *Computers and Mathematics with Applications*, 64(4), 572-578.
- Maji, P. K., Biswas, R. and Roy, A. R. (2003). Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 555–562.
- Maji, P. K., Roy, A. R. and Biswas, R. (2002). An Application of Soft Sets in a Decision Making Problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 44(8-9), 1077-1083.
- Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory First Results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19–31.
- Mushrif, M., Sengupta, S. and Ray, A. K. (2006). Texture Classification Using a Novel, Soft-set Theory Based Classification, Algorithm. *Lecture Notes Computer Science*, 3851, 246–254.
- Nesin, A. (2019). *Sezgisel Kümeler Kuramı* (Altıncı Baskı). Türkiye: Nesin Yayıncılık, 7-59.
- Park, C. H., Jun, Y. B. and Öztürk, M. A. (2008). Soft WS-algebras. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 23(2), 313-324.
- Pawlak, Z. (1982). Rough Sets. *Internatiol Journal of Information and Computer Sciences*, 11(1), 341-356.
- Pei, D. and Miao, D. (2005). From Soft Sets to Information Systems. 2005 IEEE International Conference on Granular Computing, 2, 617-621.
- Pilz, G. (1983). *Near-rings*. North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 470.
- Qin, K. and Hong, Z. (2010). On Soft Equality. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(5), 1347–1355.

- Saralioglu, M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended , Intersection Gamma and Star Operations*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Sezer, A.S., Çağman, N. and Atagün, A.O. (2014). Soft Intersection Interior Ideals, Quasi-ideals and Generalized Bi-ideals; A New Approach to Semigroup Theory II, *Journal of Multiple Valued Logic and Soft Computing*, 23(1-2), 161-207.
- Sezer, A.S., Çağman, N., Atagün, A.O., Ali, M.I. and Türkmen, E. (2015). Soft Intersection Semigroups, Ideals and Bi-ideals; A New Application on Semigroup Theory I, *Filomat*, 29(5), 917-946
- Sezgin, A., Ahmad, S. and Mehmood, A. (2019). A New Operation on Soft Sets: Extended Difference of Soft Sets. *Journal of New Theory*, 27, 33-42.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Plus Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 110-127.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011). On Operations of Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5), 1457- 1467.
- Sezgin, A., Atagün, A. O. and Aygün, E. (2011). A note on Soft Near-rings and Idealistic Soft Near-rings, *Filomat*, 25(1), 53-68.
- Sezgin, A., Atagün, A. O. and Çağman, N. (2013). A New View to N-group Theory-Soft N-groups, *Fasciculi Mathematici*, 51, 123-140.
- Sezgin, A. and Aybek, F. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Gamma Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(1), 27-45.
- Sezgin, A., Aybek, F. and Atagün, A. O. (2023a). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Intersection Operation. *Black Sea Journal of Engineering and Science*, 6(4), 330-346.
- Sezgin, A., Aybek, F. and Güngör N. B. (2023b). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Union Operation. *Acta Informatica Malaysia*, (7)1, 38-53.
- Sezgin, A. and Çağman, N. (2024). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 7 (1), 1-37.
- Sezgin, A., Çağman, N., Atagün, A. O. and Aybek, F. (2023c). Complemental Binary Operations of Sets and Their Application to Group Theory. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 91-98.
- Sezgin, A. and Çalışıcı, H. (2024). A Comprehensive Study on Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(1), 1-23.

- Sezgin, A. and Demirci, A. M. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Star Operation. *Ikonion Journal of Mathematics*, 5(2), 24-52.
- Sezgin, A. and Sarıalioğlu, M. (2024). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Theta Operation. *Kadirli Uygulamalı Bilimler Fakültesi Dergisi*, 4(1), 1-33.
- Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023a). A New Soft Set Operation: Soft Binary Piecewise Symmetric Difference Operation. *Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 5(2), 150-168.
- Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023b). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Lambda Operation. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 8(2), 101-133.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012a). Notes on Soft Matrices Operations. *ARPN Journal of Science and Technology*, 2(9), 861-869.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012b). On Some New Properties on Soft Set Operations. *International Journal of Computer Applications*, 59(4), 39-44.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012c). Some Conceptual Misunderstanding of the Fundamentals of Soft Set Theory. *ARPN Journal of Systems and Softwares*, 2(9), 251-254.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012d). Some Results on Distributive and Absorption Properties on Soft Operations. *IOSR Journal of Mathematics*, 4(2), 18-30.
- Stojanovic, N. S. (2021). A New Operation on Soft Sets: Extended Symmetric Difference of Soft Sets. *Military Technical Courier*, 69(4), 779-791.
- Ullah, A., Ahmad, I., Hayat, F., Karaaslan, F. and Rashad, M. (2018). Soft Intersection Abel-Grassmann's Groups. *Journal of Hyperstructures*, 7 (2), 149-173.
- Ullah, A., Karaaslan, F. and Ahmad, I. (2018). Soft Uni-Abel-Grassmann's Groups. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 11(2), 517-536.
- Vandiver, H. S. (1934). Note on A Simple Type of Algebra in Which The Cancellation Law of Addition Does Not Hold. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 40, (12) 914-920.
- Yang, C. F. (2008). A Note on: "Soft Set Theory" [*Computers and Mathematics with Applications*, 45(4-5) (2003) 555–562],” *Computers and Mathematics with Applications*, 56(7), 1899–1900.
- Yavuz, E. (2024). *Soft Binary Piecewise Operations and Their Properties*, Unpublished Master's Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.

Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.

Zassenhaus, H. (1935). Über Endliche Fastkörper. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 11, 187-220.

Zhu, P. and Wen, Q. (2013). Operations on Soft Sets Revisited, *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 105752, 7 Pages.



ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Fitnat Nur AYBEK,

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Amasya Üniversitesi	2020
Yüksek Lisans	Amasya Üniversitesi	

İş Deneyimi/Yıl	Çalıştığı Yer	Görevi
2021	Van Çaldıran	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dili : İngilizce

Bilimsel Faaliyetler(Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

- 1) Sezgin, A. and Aybek, F. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Gamma Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(1),27-45.
- 2) Sezgin, A. and Aybek, F., Atagün A.O. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Intersection Operation. *Black Sea Journal of Engineering and Science*, 6(4), 330-346.
- 3) Sezgin, A., Aybek, F. and Güngör., N.B. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Union Operation. *Acta Informatica Malaysia*, 7(1), 38-53.
- 4) Sezgin, A. and Aybek, F., (2023). More on Complementary Soft Binary Piecewise Intersection and Union Operations. *Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 35(2), 61-78.
- 5) Sezgin, A., Çağman, N., Atagün, A. O. and Aybek, F. (2023). Complemental Binary Operations of Sets and Their Application to Group Theory. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 91-98.