

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YENİ KUŞAK YÜKSEK ENERJİLİ HIZLANDIRICILARDA
ELEKTROMANYETİK TAU ÇİFTİ ÜRETİMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özge MERCAN

Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Fizik Mühendisliği Programı

OCAK 2015

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YENİ KUŞAK YÜKSEK ENERJİLİ HIZLANDIRICILARDA
ELEKTROMANYETİK TAU ÇİFTİ ÜRETİMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Özge MERCAN
509121113**

Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Fizik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Cem GÜÇLÜ

OCAK 2015

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509121113 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Özge MERCAN**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**YENİ KUŞAK YÜKSEK ENERJİLİ HIZLANDIRICILARDA ELEKTROMANYETİK TAU ÇİFTİ ÜRETİMİ**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Mehmet Cem GÜÇLÜ
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Mehmet Cem GÜÇLÜ
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof.Dr. Erhan GÜLMEZ
Boğaziçi Üniversitesi

Doç.Dr. A. Savaş ARAPOĞLU
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : 12 Aralık 2014

Savunma Tarihi : 20 Ocak 2015

ÖNSÖZ

Yüksek lisans bitirme projemde bana geniş çalışma imkanı sağlayan, tezimin hazırlanma aşamasında, konu seçiminden başlayarak, çalışmanın sonlandırılmasına kadar bilgi birikimi ve tecrübesi ile her aşamada desteğini esirgemeyen danışmanım, değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet Cem GÜÇLÜ ile çalışma süresince her konuda bilgileri ile yardımcı olup, değerli zamanını ayıran hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Melek YILMAZ ŞENGÜL'e, tez sürecinde manevi desteklerinden dolayı annem Dilek Sabiha MERCAN ile Mustafa Berkay DOĞAN'a ve bana en iyi koşullarda çalışma imkanı sunan İstanbul Teknik Üniversitesi'ne sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ocak 2015

Özge MERCAN

Fizik Mühendisliği

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER	vii
KISALTMALAR	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xi
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET.....	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
2. DİRAC DENKLEMİ VE FERMİYONİK ALANLAR	3
2.1 Lagrange Mekaniği	3
2.2 Lagrange Alan Mekaniği.....	4
2.3 Dirac Denklemi Ve Çözümü	5
2.4 Negatif Enerjili Çözümlerine Feynman Bakış Açısı.....	10
2.5 Etkileşim Lagrangianı Ve Ayar Dönüşümleri.....	11
3. İKİNCİ DERECE PERTÜRBASYON TERİMLERİ	15
4. SERBEST ELEKTRON POZİTRON ÇİFTİ ÜRETİMİ TESİR KESİTİ VE İKİNCİ DERECE DEN FERNMAN DİYAGRAMLARI	19
5. FORM FAKTÖRÜ VE HESAPLAMALARI	23
5.1 Gausyen Dağılım.....	25
5.2 Düzgün (Uniform) Dağılım.....	26
5.3 Wood-Saxon (Fermi) Dağılım	27
6. FORM FAKTÖRLERİNİN TESİR KESİTİNE ETKİLERİ VE GRAFİKLERİN YORUMU.....	31
7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	47
KAYNAKLAR	51
EKLER.....	53
ÖZGEÇMİŞ.....	61

KISALTMALAR

RHIC	: Relativistic Heavy Ion Collider (Rölativistik Ağır İyon Çarpıştırıcısı)
LHC	: Large Hadron Collider (Büyük Hadron Çarpıştırıcısı)
QCD	: Quantum Chromodynamic
$\mu^- \mu^+$	: Muon-anti muon çifti
$\tau^- \tau^+$	: Tau-anti tau çifti

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 6.1 : RHIC enerjisinde, form faktör hesaba katılmadan elde edilen tau ve muon tesir kesitleri	31
Çizelge 6.2 : RHIC enerjisinde, form faktörlerin etkisi ile hesaplanan tau ve muon tesir kesitleri, burada $f = 1$ ile gösterilen tesir kesiti Gausyen Dağılıma, $f = 2$ ile gösterilen tesir kesiti Düzgün Dağılıma ve $f = 3$ ile gösterilen tesir kesiti Wood-Saxon Dağılıma sahip altın çekirdeğine aittir	31
Çizelge 6.3 : LHC enerjisinde, form faktör hesaba katılmadan elde edilen tau ve muon tesir kesitleri	32
Çizelge 6.4 : LHC enerjisinde, form faktörlerin etkisi ile hesaplanan tau ve muon tesir kesitleri, burada $f = 1$ ile gösterilen tesir kesiti Gausyen Dağılıma, $f = 2$ ile gösterilen tesir kesiti Düzgün Dağılıma ve $f = 3$ ile gösterilentesir kesiti Wood-Saxon Dağılıma sahip altın çekirdeğine aittir	32
Çizelge 6.5 : RHIC enerjisinde, form faktör hesaba katılmadan elde edilen tau ve elektron tesir kesitleri	33
Çizelge 6.6 : RHIC enerjisinde, form faktörlerin etkisi ile hesaplanan tau ve elektron tesir kesitleri, burada $f = 1$ ile gösterilen tesir kesiti Gausyen Dağılıma, $f = 2$ ile gösterilen tesir kesiti Düzgün Dağılıma ve $f = 3$ ile gösterilentesir kesiti Wood-Saxon Dağılıma sahip altın çekirdeğine aittir	33
Çizelge 6.7 : LHC enerjisinde, form faktör hesaba katılmadan elde edilen tau ve elektron tesir kesitleri	34
Çizelge 6.8 : LHC enerjisinde, form faktörlerin etkisi ile hesaplanan tau ve elektron tesir kesitleri, burada $f = 1$ ile gösterilen tesir kesiti Gausyen Dağılıma, $f = 2$ ile gösterilen tesir kesiti Düzgün Dağılıma ve $f = 3$ ile gösterilentesir kesiti Wood-Saxon Dağılıma sahip altın çekirdeğine aittir	34
Çizelge 7.1 : LHC enerjisinde, Wood-Saxon form faktörünün etkisi ile hesaplanmış müon çifti tesir kesitinin diğer teorik hesaplamalar ile karşılaştırılması	48
Çizelge 7.2 : RHIC enerjisinde, Wood-Saxon form faktörünün etkisi ile hesaplanmış müon çifti tesir kesitinin diğer teorik hesaplamalar ile karşılaştırılması	48
Çizelge 7.3 : RHIC enerjisinde, form faktörsüz ve Wood-Saxon form faktörünün etkisi ile hesaplanmış tau çifti tesir kesitinin, diğer teorik hesaplama ile karşılaştırılması	49

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1	: Dirac denizi.	8
Şekil 2.2	: Elektron'un foton yayınlaması	11
Şekil 2.3	: Feynman bakış açısı	11
Şekil 4.1	: Birbirlerine doğru v hızı ile çarpışan iki atomun şematik gösterimi.....	19
Şekil 5.1	: Wood-Saxon (Fermi) dağılımı	27
Şekil 5.2	: Farklı çekirdekler için yük dağılımları [10]	27
Şekil 5.3	: Monopol ve dipol form faktörü terimlerinin Wood-Saxon yük dağılımı için gerçekçi yaklaşıma olan uyumluluğu.....	29
Şekil 6.1	: RHIC enerjisinde, tau çifti parçacığı tesir kesitinin enerjisine göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.....	35
Şekil 6.2	: RHIC enerjisinde, tau çifti parçacığı tesir kesitinin, hareketi doğrultusuna dik bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.	36
Şekil 6.3	: RHIC enerjisinde, tau çifti parçacığı tesir kesitinin, hareketi doğrultusundaki bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi	37
Şekil 6.4	: RHIC enerjisinde, tau çifti parçacığının hızlılığın (rapidity) fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesiti üzerine form faktörlerinin etkisi	38
Şekil 6.5	: LHC enerjisinde, tau çifti parçacığı tesir kesitinin enerjisine göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.....	39
Şekil 6.6	: LHC enerjisinde, tau çifti parçacığı tesir kesitinin, hareketi doğrultusuna dik bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.	40
Şekil 6.7	: LHC enerjisinde, tau çifti parçacığı tesir kesitinin, hareketi doğrultusundaki bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi	40
Şekil 6.8	: LHC enerjisinde, tau çifti parçacığının hızlılığın (rapidity) fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesiti üzerine form faktörlerinin etkisi	41
Şekil 6.9	: LHC ve RHIC enerjilerinde, tau çifti parçacığı tesir kesitinin enerjisine göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.....	41
Şekil 6.10	: LHC ve RHIC enerjilerinde, tau çifti parçacığı tesir kesitinin, hareketi doğrultusuna dik bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi	42
Şekil 6.11	: LHC ve RHIC enerjilerinde, tau çifti parçacığı tesir kesitinin, hareketi doğrultusundaki bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.	42
Şekil 6.12	: LHC ve RHIC enerjilerinde, tau çifti parçacığının hızlılığın (rapidity) i fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesiti üzerine form faktörlerinin etkisi	43

Şekil 6.13 : LHC enerjisinde, tau ve muon çifti parçacıklarının tesir kesitinin enerjisine göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.	44
Şekil 6.14 : LHC enerjisinde, tau ve muon çifti parçacıklarının tesir kesitinin, hareketi doğrultusuna dik bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.....	44
Şekil 6.15 : LHC enerjisinde, tau ve muon çifti parçacıklarının tesir kesitinin, hareketi doğrultusundaki bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.....	45
Şekil 6.16 : LHC enerjisinde, tau ve muon çifti parçacıklarının hızlılığı (rapidity) fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesiti üzerine form faktörlerinin etkisi	45
Şekil 6.17 : LHC enerjisinde, tau ve muon çifti parçacıklarının hızlılığı (rapidity) fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesiti üzerine form faktörlerinin etkisi	46

YENİ KUŞAK YÜKSEK ENERJİLİ HIZLANDIRICILARDA ELEKTROMANYETİK TAU ÇİFTİ ÜRETİMİ

ÖZET

Maddenin özünün ve maddeyi oluşturan parçacıkların aralarındaki temel kuvvetlerin araştırılması fiziğin temelini oluşturmaktadır. Bu sebeple geçmişten bugüne fizikçiler maddenin temel yapıtaşlarını anlamak için birçok deneyler ve araştırmalar yapmaktadırlar. Son yıllarda bu konular ile ilgili en önemli çalışmalar şüphesiz yeni kuşak hızlandırıcılar olarak bilinen Rölativistik Ağır İyon Çarpıştırıcısı ve Büyük Hadron Çarpıştırıcısında yapılan deneyler olmuştur. Bu çalışmaların amacı, nükleer maddeyi çok yüksek hızlarda ve yüksek sıcaklıkta çarpıştırmak ve daha temel parçacıkların oluşumunun gözlenmesi sayesinde parçacıklar hakkında daha detaylı bilgiye sahip olmaktır. Bunu başarabilmek için tamamen iyonize olmuş atomları ultra rölativistik hızlarda çarpıştırmak gerekmektedir.

Ağır atomlar, yüksek enerjili çarpıştırıcılarda hızlandırılırken, çevrelerinde çok büyük elektromanyetik alanlar oluşur. Ultra rölativistik hızlara ulaştığında ise bu atomlar Lorentz kısalmasına (büzülmesi) maruz kalırlar, bu nedenle elektromanyetik alanın şiddeti şekil değiştiren atomların sivri uçlarında daha büyük olur. Çevresel çarpışma esnasında ağır atomların çevrelerinde oluşan elektromanyetik alanların, yani sanal fotonların etkileşmesi sonucunda, elektron pozitron, muon anti-muon ve tau anti-tau çiftleri gibi çeşitli parçacıklar oluşabilir.

Lepton çiftlerinin oluşumu ve bozunumunun incelenmesi, hadronların anlaşılabilmesi için çok önemlidir, çünkü leptonlar yaratıldıkları uzay zaman bölgesiyle ilgili daha çok bilgi verirler. Parçacık üretilme olasılığı tesir kesiti ile ifade edilir. Tesir kesiti ne kadar yüksek olursa etkileşimin yani etkileşim sonucu parçacık üretme olasılığının daha yüksek olduğu söylenebilir.

Çalışmamızda, ultra rölativistik hızlarda tamamen iyonize olmuş altın ve kurşun ağır iyonlarının çarpıştırılması sonucu oluşan güçlü elektromanyetik alanlarından lepton oluşum tesir kesitleri kuantum elektrodinamiği, Feynman diyagramları ve form faktörler yardımı ile hesaplanacaktır. Elde edilen tesir kesitlerinin analitik olarak çözümleri çok zordur çünkü genellikle on boyutlu integraller şeklindedir. Bu sebeple tesir kesitlerinin çözülmesi için Fortran kodları kullanılacak olup, Monte Carlo yöntemi ile hesaplanacaktır. Hesaplanan tau tesir kesiti verilerinin, form faktörlere göre değişimi grafikler yardımı ile gösterilecektir. Bu çalışma ile ayar teorisinden kuantum elektrodinamiğine kadar birçok fizik konusuna değinilecek olup, maddeyi oluşturan temel parçacıkların oluşma mekanizmaları hakkında daha detaylı bilgiye sahip olmak amaçlanmaktadır.

TAU PAIRS PRODUCTION FROM NEW GENERATION ULTRA-RELATIVISTIC PARTICLE ACCELERATORS

SUMMARY

From recent years until now, physicists have done a lot of explorations and experiment for understanding basic structure of matter. For this reason, many scientists have done a lot of experiments and studies to understand building stone of particles.

In recent years, the most important studies done surely in Large Hadron Collider and Relativistic Heavy-Ion Collider which are known new generation particle accelerators. Aim of this study, to make collide nuclear matter in high temperature and speed and having important details of matter by observing creation of new basic particles. To make this, it is required to collide completely ionize heavy ions. Completely ionize heavy ions are collided 3400 GeV per nucleon in Large Hadron Collider and 100 GeV per nucleon in Relativistic Heavy-Ion Collider by center of mass frame.

Experimentally, lead ions were collided in Large Hadron Collider and also gold ions were collided in Relativistic Heavy Ion Collider. So, in this thesis, we have done calculations aim of the compare with the experiment.

Colliding heavy ions which are accelerated in high energy colliders, generate large electromagnetic fields around them. When this acceleration reach ultra-relativistic speed, heavy ions are exposed to Lorentz effect and for this reason, strength of electromagnetic field become larger in sharp points of ions. During the peripheral collision, by reason of interacting electromagnetic fields around ions in other words interaction of virtual photons, it is possible to creation of new particle pairs for instance electron-positron, muon-anti muon, tau-anti tau pairs.

It is important to analyze creation and annihilation lepton pairs for understanding hadrons because leptons give more information about their region of spacetime. Possibility of creating particles is couch in cross section. Large value of cross section mean high possibility of creating particles.

In this study, lepton cross section from large electromagnetic fields as a result of collision totally ionized heavy gold and lead ions, will be calculated with the help of quantum electrodynamics, Feynman diagrams and form factors. Because of consisting ten multidimension integrals, analytical solution of this cross section is very difficult. For this reason, FORTRAN codes and also method of Monte Carlo will be used to find cross section. The change cross section datas of tau pairs compared to form factors, will be shown in graphs.

Beginning 19.yy, after understanding heavy ions have momentum and charge distribution, researches shifted particles in ions. There is important difference

between colliding point particles and nucleus, because each nucleon in nucleus has own relativistic speed and momentum.

So, form factor give information of nucleons structure and charge distribution of nucleus. Fourier transformation of this charge distribution of nucleus gives atomic form factor.

There are a lot of form factors, but in this study we will mention three of them. First one is Gaussian form factor, which is found by Fourier transforming of Gaussian charge distribution. Second one is Uniform form factor, which is found by Fourier transforming of uniform charge distribution. And the last one is Wood-Saxon (fermi) form factor, which is found by Fourier transforming of fermi charge distribution.

In this thesis, all calculations were done in momentum space, so having Fourier transformed each charge distributions from position space to momentum space, were found form factors. Tau pairs cross section change depend on this form factors. So, this changing presented in graphs and tables for no form factor, uniform distribution, gaussian distribution and wood-saxon distribution.

Exchanging differential cross section by generated tau pairs's energy, longitudinal and transverse momentum is graphed in section 7. Longitudinal momentum is defined, momentum component of direction collision of lepton pairs by produced from heavy ion collisions. Transverse momentum is also defined, orthogonal momentum component of lepton pairs by produced from heavy ion collisions. Also rapidity graphs for tau-anti tau, muon-anti muon and electron-positron pairs are drawn a comparison. These graphs showed that, mass of generated particles and form factors are very important to define changing. Add to this, these graphs are also showed that, energy of colliding heavy ionized nucleus is important.

This work will touch on from gauge theories to quantum electrodynamics, so more information about mechanism of matter's basic structure come to light. Respectively, first we will touch on Dirac spinors and Feynman interpretation on these spinors. Then gauge theory will be announced shortly, and this theory will be applied on the Dirac Lagrangian.

After this, interaction Lagrangian and also interaction Hamiltonian of pair product process will be found. To calculate this interaction Hamiltonian, we will use perturbation approach method. As a result of calculations, result of first term of integral will be zero, so second term of integral will be use other calculations. It is difficult to solve this integral so ten dimensional integral will be calculated for tau-anti-tau pairs with the help of fortran codes.

Results are written into schemas, and also these results compared with other particle pairs, such as muon-anti muon and electron-positron pairs. The purpose of doing it, to see influence of cross section depending on the change of mass.

Will proceed as before, these data are graphed depending products' energy, longitudinal momentum and transverse momentum to differential cross section of lepton pairs. Each graphs were drawn separately for LHC and RHIC energies and they were compared each other.

All the results obtained, one at a time announced in section results and discussions. This thesis shows that, if the production of particles are the order of the size of the core, we have to take into account form factors for the calculation of cross

section. Especially, gaussian form factor have the most impact on cross section and form factors effect tau pairs cross section most. Near future if such an experiment is done, importance of the data obtained as a result of the graphs are plotted in section 7 will be seen.

1. GİRİŞ

Bugüne kadar kurulan dünyanın en büyük parçacık çarpıştırıcılarından biri olan “Büyük Hadron Çarpıştırıcısı” (Large-Hadron Collider - LHC), ağır iyonları (kurşun) nükleon başına 3400GeV’lik enerji ile kütle merkezi referans sistemine göre çarpıştırmaktadır. Aynı şekilde bir diğer parçacık çarpıştırıcısı olan “Rölativistik Ağır İyon Çarpıştırıcısı” (Relativistic Heavy Ion Collider - RHIC) ise ağır iyonları (altın) nükleon başına 100GeV’lik enerji ile çarpıştırmaktadır. Buradaki amaç, evrenin oluşumuna yol açan Büyük Patlama’yı (Big Bang) laboratuvar ortamında yeniden yaratmak ve evrenin varoluşunun ilk pikosaniyelik zaman diliminde oluşan maddenin kuark-gluon plazma halini incelemektir.

LHC ve RHIC çarpıştırıcıları maddeyi yüksek sıcaklık ve yüksek yoğunlukta incelemek amacı ile dizayn edilmişlerdir. Bu sayede Büyük Patlama’dan hemen sonra oluşan plazma ortamında, kuark ve gluonların birleşiminden mezon ve baryonlar meydana gelebilir. Hadronik etkileşimlerden üretilen lepton çiftleri, özellikle elektron-pozitron, müon-anti müon çiftleri, maddenin oluşumunu ve kuark-gluon plazma fazından maddeye olan bozunumu (QCD phase transition) gözlemlemek için bize yardımcı olacaktır [1]. Tamamen iyonize olmuş ağır iyonlar ultra-rölativistik hızlarda çarpıştırılarak bu ortam yaratılmaya çalışılmaktadır.

Ağır iyonlar, parçacık hızlandırıcıları sayesinde ultra-rölativistik hızlarda birbirleri ile çevresel (peripheral) çarpıştırılmaktadır. Bu derece yüksek enerjilerde hızlandırılan iyonlar Lorentz boyca kısalması nedeni ile etraflarında yaklaşık $10^{25} V/m$ mertebesinde elektromanyetik alanlar oluşur. Bu şiddetli elektromanyetik alanlardaki etkileşimler sonucu elektron-pozitron, müon-anti müon, taon-anti taon çiftleri, bozonlar gibi birçok parçacık üretilebilir. Amacımız, tamamen iyonize olmuş altın ve kurşun gibi ağır iyonların çarpıştırılmaları sonucu ortamda oluşabilecek ağır leptonların, özellikle tau-anti tau parçacığının tesir kesitini hesaplamak, elde edilen verileri diğer parçacıkların örneğin, elektron-pozitron ve müon-anti müon çiftlerinin tesir kesitleri ile karşılaştırmaktır.

Ayrıca, form faktörünün etkilerini anlamak için tesir kesitlerinin farklı form faktörlere bağlı olarak değişimi grafiklerle gösterilecektir.

Bunun için öncelikle, ağır iyon çarpışmaları esnasında oluşan elektromanyetik alana bakılmalı. İyonize altın (Au) ve kurşun (Pb) çekirdekleri önceden belirttiğimiz enerjilerde hızlandırıldıklarında, bu iyonların oluşturdıkları elektromanyetik alan, atom çekirdeğinin yükü ve ince yapı sabitinin çarpımı ile doğru orantılı olmaktadır. Bu sebeple oluşacak olan güçlü elektromanyetik alanda sayısız foton değiş-tokuşu sonucunda, lepton çiftlerini meydana getirebilir. Bu alan, pertürbatif metot yaklaşımı ile incelenecek olup, lepton çiftlerinin üretimi tesir kesitleri kuantum elektrodinamiğinde ikinci mertebe Feynman terimleri ile hesaplanacaktır. Bu metotta, pertürbasyon serilerindeki en düşük mertebeli sıfırdan farklı terimlerin, iki ara fotonlu diyagramları temsil ettiği ve bu terimlerin elektromanyetik oluşum fenomenini açıklamak için yeterli olduğu kabul edilir [1].

Taon-anti taon ve müon-anti müon çiftlerinin Compton dalgaboyları, çekirdeğin Compton dalgaboyu mertebesine çok yakın olduğu için, lepton çiftleri ile çekirdek arasında da etkileşme gözlenebilir. Bu etkileşmeyi anlamak için form faktörü kavramına değinilecektir.

LHC ve RHIC’de taon-anti taon için hesaplanan tesir kesitleri, çeşitli form faktörleri eklenen tesir kesitleri ile karşılaştırılacaktır. Ayrıca diğer lepton çiftleri olan elektron-pozitron ve müon-anti müon’un tesir kesiti grafikleri ile kıyaslanacak olup, tesir kesitinin kütle, enerjiye ve form faktörlere göre değişimi gösterilecektir.

Ağır lepton oluşum tesir kesitleri çok boyutlu integrallerden oluştuğu için analitik olarak çözümü çok zordur. Bu sebeple, integrallerin nümerik olarak çözülmesi FORTRAN kodları kullanılarak Monte Carlo yöntemi ile hesaplanacaktır.

Elektromanyetik olarak parçacık çifti üretimini anlayabilmek için Kuantum Elektrodinamiği’ne (QED) bakmamız gerekir. Çözümü çok zor olan zayıf etkileşim alanları denklemlerinin pertürbasyon teorisi ile çözülmesi ve deneysel olarak hesaplanan veriler ile teorik hesaplamalarımızın uyumu, QED’in başarısını gösterecektir.

2. DİRAC DENKLEMİ VE FERMİYONİK ALANLAR

2.1 Lagrange Mekaniği

Lagrange, hareketli bir sistemin tüm değişkenlerini içeren ve bu sistemin hareketi hakkında bize bilgi veren matematiksel bir fonksiyodur. Newton'un minimum eylem (action) yaklaşımına göre, sistemin Lagrange fonksiyonu, hareketli sistemde bulunan parçacığın izleyeceği yolu gösterir. O halde iş şu şekilde tanımlanır [3].

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (2.1)$$

Burada $q(t)$; parçacığın konumunun zamana bağlı fonksiyonunu, $\dot{q}(t)$; parçacığın hızının zamana bağlı fonksiyonunu, L ise lagrange fonksiyonunu göstermektedir. Denkleme bakarsak, eylem; fiziksel sistemin takip edeceği mümkün olan tüm yolların zamana bağlı değişimlerini içerir. Varyasyon yöntemini kullanarak, S 'nin ekstremum noktaları bulunabilir.

$$\delta S = 0 \quad (2.2)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q}(t) \right) dt = 0 \quad (2.3)$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \right|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta q(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} + \frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) \right] dt \quad (2.4)$$

Denklem (2.4)'ü çözüp, denklem (2.3)'e eklediğimizde aşağıdaki sonuç bulunur.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta q(t) \left[\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right] dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \right]_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (2.5)$$

Başlangıç ve bitiş noktalarında $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ olacağı için,

$$\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} = 0 \quad (2.6)$$

Euler-Lagrange denklemi (2.6) bulunur. [3]

2.2 Lagrange Alan Mekaniği

Elektromanyetik alanın kuantizasyonu, kuantası tanımlanmış özelliklere sahip bir parçacık olan herhangi bir klasik alanın kuantizasyonuna izin vermektedir. Örneğin, elektron ve pozitron gibi elektrik yüklü parçacıkların etkileşmesi, elektromanyetik alanın kuantası olan fotonun değiş tokuşundan meydana gelmektedir. Bu sebeple elektron-pozitron alanının kuantaları elektron ve pozitrondur denilebilir. Bu alanların en önemli noktası, elektron pozitron çiftinin oluşması veya yok edilmesine yani parçacıkların değiş tokuşuna izin vermesidir [2]. Alan ve parçacık kavramı birbirinden çok farklıdır, alanlar uzayın her bölgesini temsil ederken parçacıklar sadece uzayın belli bir noktasını temsil ederler. Alanlar, parçacıklardan doğar ve parçacıklara etki ederler, bu nedenle artık alanlardan bahsedilecektir. N, yani sonlu sayıda serbestlik derecesine sahip fiziksel bir sistem, Lagrange mekaniğini kullanarak çözümlenebilir. Ancak sonsuz sayıda serbestlik derecesi içeren sürekli sistemleri incelerken Lagrange yaklaşımının alanlar için uygulanması gerekir. Bunun için öncelikle sonlu sistemin limitini alarak, sürekli sistem haline getirilmelidir [3].

$$\{q_r(t); r = 1, 2, \dots, N\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \phi(x, t) \quad (2.7)$$

$N \rightarrow \infty$ üzerinden limitini alırsak, her x noktası sonsuz serbestlik derecesine sahip sürekli bir nokta olacaktır. Lagrange yoğunluğu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$L = \int \ell dx \quad (2.8)$$

Lagrange fonksiyonu, Lagrange yoğunluğu ℓ 'nin x üzerinden integraline eşittir. Lagrange yoğunluğu, sürekli sisteme ait olan $\phi(x, t)$ fonksiyonuna ve bu fonksiyonun x 'e ve t 'ye bağlı türevlerini içerir.

$$\ell = \ell\left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \dot{\phi}\right) \quad (2.9)$$

Varyasyon yöntemi, bu kez Lagrange yoğunluğu cisinden S'ye tekrar uygulanır,

$$\delta S = \int dt \int \left[\frac{\partial \ell}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \ell}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right] dx = 0 \quad (2.10)$$

ve denklem (2.10) çözülürse, Euler-Lagrange alan denklemi (2.11) elde edilir [3].

$$\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \quad (2.11)$$

2.3 Dirac Denklemi Ve Çözümü

Rölativistik olmayan Schrödinger denklemi (2.12), durgun kütle enerjisinden fazla enerjiye sahip olan parçacıkların yani rölativistik parçacıkların çözümlenmesinde yetersiz kalmaktadır.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (2.12)$$

Burada $\hbar$; Planck sabiti, $\psi(\vec{r}, t)$; parçacığın dalga fonksiyonu, m ; parçacığın durgun kütlesi, $V(\vec{r}, t)$ ise potansiyel enerjiyi göstermektedir. Rölativistik parçacıklar için enerji-momentum denkleminde bakılırsa, burada enerji ve momentum, dört vektör momentumun zaman ve uzay bileşenleri olarak karşımıza çıkar.

$$p^\mu = (E, \vec{p}), \quad p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - p^2 = m^2 \quad (2.13)$$

Enerji ve momentumu, operatörleri cinsinden yazarsak,

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \quad (2.14)$$

rölativistik dalga denklemlerinden biri olan Klein-Gordon denklemini (2.15) elde ederiz, burada $\phi(\vec{x}, t)$ skaler dalga fonksiyonunun bir bileşeni, spini 0 olan bozonları temsil etmektedir.

$$-\frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2) \phi(\vec{x}, t) \quad (2.15)$$

Klein-Gordon denkleminin çözümü için dalga fonksiyonunun, düzlem dalga formunda olması gerekir.

$$\phi(\vec{x}, t) = N e^{-iEt + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \quad (2.16)$$

Fakat Klein-Gordon denkleminin çözümleri, negatif enerjinin ve negatif olasılık yoğunluğunu gösteriyordu. Bu problemi çözmek için, spini $\frac{1}{2}$ olan parçacıkların çözümü olan diğer rölativistik dalga denklemi, Dirac denkleminde (2.16) yararlanılır [3].

$$i \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left[-i(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3}) + \beta m \right] \psi(\vec{x}, t) = \left(-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \psi(\vec{x}, t) \quad (2.17)$$

Denklemdeki α ve β katsayılarının neyi ifade ettiğini bulmak için, her iki tarafın da karesini alınır. [3]

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi = \left(-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \left(-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \psi \quad (2.18)$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi = -\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \frac{\partial^2 \psi}{(\partial x^i)^2} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^3 (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} - im \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \beta^2 m^2 \psi \quad (2.19)$$

Denklem (2.19)'un anlamlı olabilmesi için, parçacığın sahip olduğu dalga fonksiyonunun, Klein-Gordon denklemindeki dalga fonksiyonunu sağlaması gerekmektedir. O halde denklem (2.15) ile denklem (2.19)'un sağ tarafları birbirine eşitlenirse,

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad (2.20)$$

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad (2.21)$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 0 \quad (2.22)$$

denklemleri elde edilir. Dirac, α ve β değerlerinin, matrisi temsil ettiklerini ve bu matrisin bileşenlerinin, dalga fonksiyonu üzerine etki ettiğini öne sürmüştür. Yani matrisin her bileşeni, aynı dalga fonksiyonuna, aynı enerji seviyelerine sahip fakat yeni serbestlik derecelerine bağlı olarak dejenere bileşenler içerecektir, örneğin spin gibi. Pauli spin matrislerinin, yukarıdaki komutatör bağıntılarını sağladığından, Dirac denkleminin neden spini $\frac{1}{2}$ olan parçacıklar için kullanıldığı anlaşılır.

Dirac denkleminin çözülmesi için matrislerin 4×4 boyutunda olması gerekir, keyfi α ve β matrisi seçimi ile,

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

denklem sağlanmış olunur. Burada σ_i ; 2×2 Pauli matrislerini, 1 ; 2×2 birim matrisi, 0 ise 2×2 null matrisi temsil etmektedir. Dirac denklemi artık 4×4 'lük matrisler içerdiği için, dalga fonksiyonunun da dört boyutlu sütun vektör olması gerekir ve Dirac spinörü adını alır. O halde dalga fonksiyonuna, x 'ten bağımsız dört bileşenli spinör eklenerek düzenlenip,

$$\psi = \omega e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}} \quad (2.24)$$

dört bileşenli vektör, iki bileşenli ϕ ve χ spinörler cinsinden yazılıp,

$$\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Dirac denklemini çözersek, denklem (2.26) ve denklem (2.27) elde edilir. [3]

$$(E - m)\phi = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi \quad (2.26)$$

$$(E + m)\chi = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \phi \quad (2.27)$$

Denklem (2.27) 'de bulunan χ çözülüp, denklem (2.26) 'da yerine yazılırsa, enerji ile momentum arasındaki ilişki bulunmuş olur.

$$(E - m)(E + m)\phi = p^2 \phi \quad (2.28)$$

Herhangi iki bileşenli ϕ spinörü için yukarıdaki denklem, denklem (2.29) yardımı ile çözülürse,

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = p^2 1 \quad (2.29)$$

$$E = \mp (p^2 + m^2)^{1/2} \quad (2.30)$$

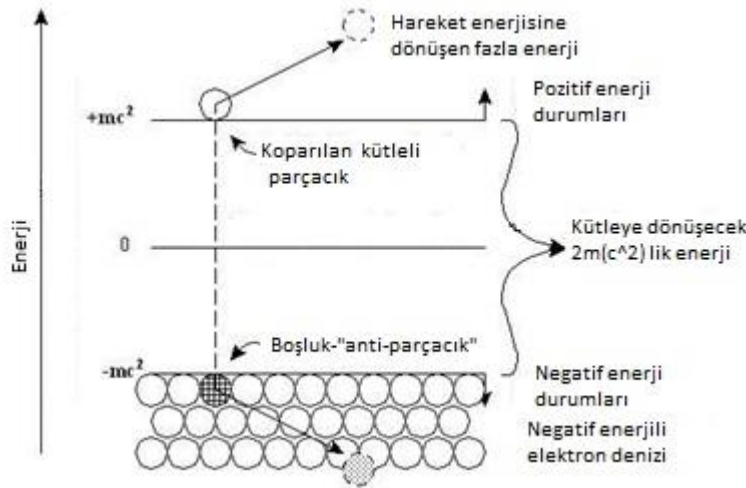
denklem (2.30) elde edilir. Dirac denklemi, enerji değerlerinin pozitif olabildiği gibi negatif değerler de alabilmesini öngörür, fakat bu mümkün olamaz. Dirac bu durumu şu şekilde açıklıyordu; enerji çözümlerinden biri pozitif yüklü parçacığı, diğeri ise negatif yüklü parçacığı temsil etmektedir.

Negatif parçacığın elektron, pozitif parçacığın ise ilk başta proton olduğunu düşündü. Ancak sonradan pozitif parçacığın elektrondan çok daha ağır olan proton olmaması

gerektiğini, doğada pozitif yüklü elektronların da olabileceğini öngördü, bu parçacık elektronun anti-parçacığı olan pozitrondu.

Dirac, pozitif enerjili elektronların düşük seviyeye geçişini engellemek yerine, pozitif enerjili elektronların mevcut olmadığı, sayısız elektronun sadece negatif enerji değerlerine sahip olduğu, Dirac denizini öngördü. Dirac denizi, tüm enerji seviyeleri negatif enerjili elektronlarla dolu, sonsuz enerjili ve negatif yüke sahip boş (vacuum) durumundadır.

Pauli dışarlama ilkesi, pozitif elektronların daha düşük seviyelere inmesini yasakladı. Dirac denizinden negatif enerjili bir elektronun koparılması, yani bir boşluk oluşması, elektronun pozitif enerjili pozitif yüklü versiyonunun yani pozitronun denize yerleştirilmesine eşit olacaktır.



Şekil 2.1: Dirac denizi

Eğer negatif enerjili elektronları, pozitif enerjiye uyarırsak, ortamda negatif enerjili elektronlar ve pozitif enerjili pozitronlar yani boşluklar (hole) olacaktır, bu çift oluşumdur [2]. Bu duruma Feynman'ın bakış açısı ise, negatif enerjili parçacıkların çözümlerinin zamanda geriye doğru, pozitif enerjili parçacıkların çözümlerinin zamanda ileriye doğru üretildiği şeklindedir. Yani, Feynman'a göre elektron, zamanda geriye doğru hareket eden pozitrondur. Dirac ve Feynman bakış açısı altında, Dirac denklemimizin pozitif enerjili ve negatif enerjili çözümlerine bakalım.

Dört vektör momentumun zaman bileşeni enerjiyi gösterdiğinden,

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}) \quad (2.31)$$

Dirac denklemimizi **(2.32)**, spinörleri kullanarak yazalım.

$$p^0 \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m1 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Denklemin pozitif enerjili çözümlerini bulmak için,

$$E \equiv p^0 = +(p^2 + m^2)^{1/2} > 0 \quad (2.33)$$

ifadesinden yararlanılır. Parçacığı durgun kabul edersek, enerjisi parçacığın kütlesine eşit olacaktır. Bu durumda uzay boyutunda parçacığın momentumunun sıfır olması beklenir. O halde denklem,

$$m \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m1 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

olacaktır. Çözümlerine bakılırsa,

$$m\phi = m1\phi \quad (2.35)$$

$$m\chi = -m1\chi \quad (2.36)$$

mümkün olabilmeleri için denklem **(2.36)**'da bulunan spinörün sıfır olması gerekir. Denklemin son hali,

$$\omega(p^0 = +m) = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

olacaktır ve bu sonuç, pozitif enerjili durgun parçacığın iki bağımsız spin durumunu göstermektedir. Biri denklem **(2.38)**'de gösterilen spin yukarı (spin up), diğeri ise denklem **(2.39)**'da gösterilen spin aşağı (spin down) durumlarıdır [3].

$$\phi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

$$\phi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Bulduğumuz sonuçlar, parçacığın durgun olması durumuna göre idi, parçacık eğer durgun değilse, dört vektörün uzay bileşeni sıfır olmayacaktır. O halde, parçacığın pozitif enerjili spinörleri,

$$\omega^{1,2} = \left(\begin{array}{c} \phi^{1,2} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \phi^{1,2} \end{array} \right) \quad (2.40)$$

şeklinde yazılır.

Parçacığın negatif enerjili spinörlerini bulmak için, denklem (2.33)'te tanımlanan durgun enerjiyi negatif olarak tanımlayıp aynı işlemler yapılırsa,

$$\omega^{3,4} = \left(\begin{array}{c} \frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^{1,2} \\ \chi^{1,2} \end{array} \right) \quad (2.41)$$

negatif enerjili spinörler bulunmuş olur. O halde, tanımlanan sistemde yukarı spinin yokluğu, aynı sistemde aşağı spinin varlığına eşittir. Bu sebeple, negatif enerjili spinörler,

$$\chi^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \chi^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

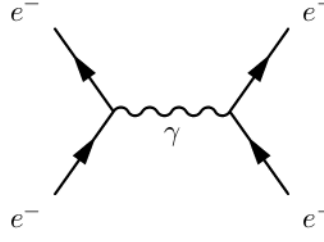
şeklinde seçilebilir. [3] Yani her parçacığın karşıt bir anti-parçacığı vardır, böylece Dirac denklemi ve denklemin negatif enerjili çözümlerine açıklama getirilmiş olunur.

2.4 Negatif Enerjili Çözümlerine Feynman Bakış Açısı

Dirac'ın negatif enerji çözümlerine açıklık getirmesi sadece spini $\frac{1}{2}$ olan parçacıkları yani fermiyonları kapsıyordu, ancak Klein-Gordon denkleminin getirdiği negatif enerji çözümlerini açıklamıyordu. Bu sebeple Feynman, fermiyonlar ve bozonlar için ortak bir açıklamada bulundu.

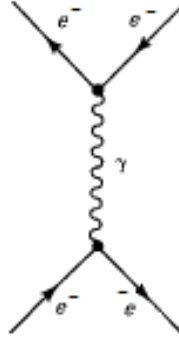
Feynman'a göre, “negatif enerjili parçacığın çözümleri zamanda geriye, pozitif enerjili parçacığın çözümleri zamanda ileriye gider.” ve “sistemin pozitif enerjili elektron yayması sonucu enerji ve yük değişimi, negatif enerjili pozitron absorbe etmesi ile aynıdır.” [3]. Örneğin, bir elektron belirli bir uzay zamanda foton yayarak

veya soğurarak yoluna devam edebilir. Elektronun izleyeceği yol aşağıdaki diyagramda gösterilmiştir.



Şekil 2.2: Elektron'un foton yayınlaması

Bu süreci Feynman şu şekilde yorumlar; pozitif enerjili elektron zamanda sadece ileri gider, o halde negatif enerjili elektronun anti-parçacığı olan pozitronda zamanda geriye gitmektedir.



Şekil 2.3: Feynman bakış açısı

Grafikte görüldüğü üzere, zamanda ileri giden bir elektron, zamanda geriye giden bir elektronla yani aslında zamanda ileriye giden bir pozitronla çarpışıp fotona dönüşüyorlar, diğer bir deyişle birbirlerini yok ediyorlar. Oluşan foton da daha sonra bir elektron-pozitron çifti üretiyor. Bu diyagramlar bozonlar içinde geçerli olmaktadır.

2.5 Etkileşim Lagrangianı Ve Ayar Dönüşümleri

Euler-Lagrange alan denklemi rölativistik invaryant formda yazılırsa,

$$\frac{\partial \ell}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = 0, \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad (2.43)$$

denklemini elde edilir. Euler-Lagrange alan denkleminde, Lagrangian yoğunluğu yerine hangi denklem yazılırsa, sonuç bize Dirac denklemini verecektir sorusuna yanıt olarak, denklem (2.18), denklem (2.43)'e göre türetilirse, denklem (2.44)'te gösterilen fermiyonik alanlar için kullanılacak olan Dirac Lagrangian yoğunluğu bulunmuş olunur.

$$L_D = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (2.44)$$

Rölativistik parçacıkların oluşan elektromanyetik alanlar ile etkileşimleri, skaler potansiyelleri $\phi(x,t)$ ve vektör potansiyelleri $\vec{A}(\vec{x},t)$ cinsinden ifade edilir. Gerek Maxwell'in elektromanyetik denklemlerinde, gerek kuantum mekaniğinde geçerli ve tutarlı olan ayar dönüşümleri, global faz değişmezlerini, lokal faz değişmezlerine dönüştürerek, etkileşmelerin oluşturulmasını sağlar. Oluşturduğumuz Dirac Lagrangian yoğunluğu da, U(1) faz dönüşümleri altında invaryanttır (değişmezdir). Ayar dönüşümleri,

$$\partial^\mu \rightarrow \hat{D}^\mu = \partial^\mu + ie\hat{A}^\mu \quad (2.45)$$

$$\hat{A}^\mu \rightarrow \hat{A}'^\mu = \hat{A}^\mu + \partial^\mu \hat{\chi} \quad (2.46)$$

$$\hat{\psi}(\vec{x},t) \rightarrow \hat{\psi}'(\vec{x},t) = e^{-ie\hat{\chi}(\vec{x},t)} \hat{\psi}(\vec{x},t) \quad (2.47)$$

olarak tanımlanırlar, burada e , elektronun yükünü temsil etmektedir. Bu dönüşümler, denklem (2.44) üzerinde uygulanabilir. Bunun için önce denklem (2.47) etki ettirilir ve,

$$\hat{L}_{LOCAL} = i\bar{\hat{\psi}}\gamma^\mu \partial_\mu \hat{\psi} - m\bar{\hat{\psi}}\hat{\psi} + \bar{\hat{\psi}}\gamma^\mu \hat{\psi} \partial_\mu \hat{\chi}(\vec{x},t) \quad (2.48)$$

sonucu bulunur. Denklem (2.45) ve (2.46) dönüşümleri altında,

$$\hat{L}_{LOCAL} = i\bar{\hat{\psi}}\gamma^\mu \partial_\mu \hat{\psi} - m\bar{\hat{\psi}}\hat{\psi} - e\bar{\hat{\psi}}\gamma^\mu \hat{\psi} \hat{A}_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.49)$$

Dirac Lagrangian yoğunluğunun son hali bulunur ve görüldüğü üzere ayar dönüşümlerinden önceki haline, etkileşim (interaction) ve elektromanyetik alan terimlerinin eklenmesi şeklinde oluşmuştur.

$$\hat{L}_D \rightarrow \hat{L}_{D_{LOCAL}} = \hat{L}_D + \hat{L}_{int} + \hat{L}_e \quad (2.50)$$

Bulduğumuz etkileşim Lagrangian yoğunluğunu ve elektrik alan Lagrangian terimi denklem (2.51) ve (2.52)'de gösterilmiştir.

$$\hat{L}_{\text{int}} = -e \bar{\hat{\psi}} \gamma_{\mu} \hat{\psi} \hat{A}^{\mu} \quad (2.51)$$

$$\hat{L}_e = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.52)$$

Elektromanyetik çift oluşum formalizmi, yukarıdaki etkileşim Lagrangian yoğunluğuna dayanmaktadır. Elde edilen Lagrangian yoğunluğu denklemi, üretilecek leptonların ve etkileşen fotonların hareketini gösteren en son denklemdir. Burada Dirac Lagrangian yoğunluğu terimi, üretilecek leptonların kinetik enerjisini, etkileşim terimi, sistemin potansiyelini ve son terim olan elektromanyetik alan terimi ise fotonların kinetik enerjisini göstermektedir.

3. İKİNCİ DERECE PERTÜRBASYON TERİMLERİ

Parçacıkların alanları ile etkileşmesi sonucunda saçılma veya yeni parçacıkların yaratılması gibi süreçlerin olduğu ve etkileşim Lagrangian yoğunluğu terimleri önceki bölümlerde bahsedilmiştir. Elektromanyetik çift oluşum sürecinin hareket denklemlerini yazmak istersek, denklem (2.43)'te bulunan Euler-Lagrange denklemine, bir önceki bölümde elde ettiğimiz son lagrangian yoğunluğunu yazıp çözersek, sistemin Hamiltonian'ını elde ederiz.

$$H(x) = H_0(x) + V(x) \quad (3.1)$$

$H(x)$, sistemin toplam Hamiltonian'ı, $H_0(x)$ serbest Hamiltonian ve $H_{\text{int}}(x)$ etkileşim Hamiltonian'ını temsil etmektedir. Etkileşim terimi, momentum uzayında hareket eden ağır iyonların dört vektör potansiyellerini içermektedir.

$$V(x) = -\vec{\alpha} \cdot \vec{A}(x) + A_0(x) \quad (3.2)$$

Denklem (3.2)'de bulunan etkileşim terimini hesaplamak oldukça zordur ve çeşitli çözüm yöntemleri mevcuttur. Tezimizde etkileşen alanların hareket denklemleri küçük mertebeden pertürbasyon serisi çözümlerinden elde edilmiştir. Bu çözümleri elde etmeden önce aşağıdaki üç temel varsayım kabul edilmelidir.

İlki, etkileşim sürecinde elektronların zamana bağlı durum vektörüdür, $|\phi(t)\rangle$. Bu vektör ile yarı klasik eylem integrali aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$S = \int dx^4 \langle \phi(t) | L_0(x) + L_{\text{int}}(x) | \phi(t) \rangle \quad (3.3)$$

Burada, $L_0(x)$, serbest fermiyonik alanlar için bir önceki bölümde türetilen Dirac Lagrangian'ını temsil etmektedir.

İkincisi, tanımlanan durum vektörü, Slater determinant $|0\rangle$ olarak düşünülebilir ve çift oluşumun vacuum (boşluk) durumunun dışında oluşacağını göz önünde bulundurularak, başlangıç durumunu

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\phi(t)\rangle \rightarrow |0\rangle \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Schrödinger penceresinden, tek parçacık durumlarının tam ve ortonormal kümesi ve buna karşı gelen tanımlanmış başlangıç Hamiltonyen'i, aşağıdaki koşulları sağlar [4].

$$H_0 \left| \chi_q^{(\pm)} \right\rangle = E_q^{(\pm)} \left| \chi_q^{(\pm)} \right\rangle \quad (3.5)$$

$$\sum_q \left| \left\langle \chi_q^{(+)} \right| \chi_q^{(+)} \right| + \left| \left\langle \chi_q^{(-)} \right| \chi_q^{(-)} \right| = 1 \quad (3.6)$$

Burada, $\left| \chi^{(+)} \right\rangle$ parçacığın, $\left| \chi^{(-)} \right\rangle$ anti-parçacığın durumlarını gösteren vektördür.

Ve son kabul edilmesi gereken varsayım, elektron pozitron çiftinin zaman içinde evrimleşmesinden sorumlu olan operatörün aşağıdaki gibi yazılabilmesi,

$$\left| \phi(t) \right\rangle = K(t, -\infty) \left| 0 \right\rangle, \quad KK^+ = K^+K = 1 \quad (3.7)$$

ve bu operatörün birimsel (unitary) olarak tanımlanmasıdır. Evrimleşme operatörü vakum durumundan parçacık çifti üretiminden sorumlu operatördür. Ayrıca evrimleşme operatörünün en düşük mertebeden terimini denklem (3.8)'deki gibi tanımlayabiliriz.

$$K_0(t, t') = e^{-iH_0(t-t')} \quad (3.8)$$

Schrödinger penceresinden, etkileşim penceresine geçmek için kullanılacak olan geçiş (transition) matrisini elde etmek için, evrimleşme operatörünün çözülmesi gereklidir.

Bunun için yaklaşıklık kullanılarak, evrimleşme operatörünü pertürbatif seriye açılırsa,

$$\begin{aligned} K(t, \infty) &= K_0(t, -\infty) + (-i) \int_{-\infty}^t d\tau K_0(t, \tau) V(\tau) K_0(\tau, -\infty) \\ &+ (-i)^2 \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' K_0(t, \tau) V(\tau) K_0(\tau, \tau') V(\tau') K_0(\tau', -\infty) + \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

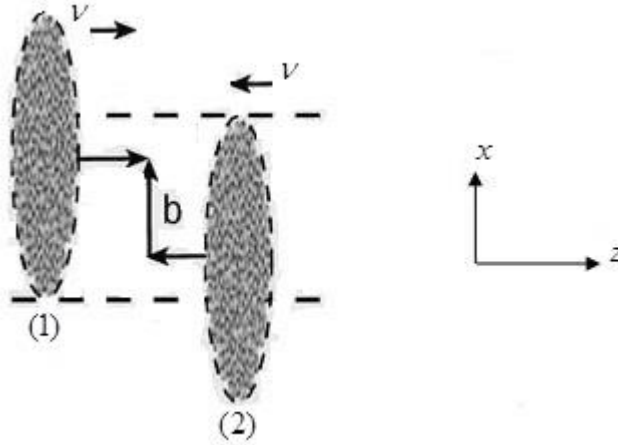
düşük mertebeden terimler elde edilir [4]. Denklem (3.9)'un ilk terimlerinden gelecek olan katkı sıfırdır, ayrıca çözümlerinde momentum ve enerji

korunmamaktadır. Bu sebeple çözümleri ikinci dereceden terimlerine indirgenecektir.

Etkileşim Hamiltonyeni ağır iyonların dört vektör potansiyellerini içerdği için önce potansiyel terimlerinin hesaplanması gerekmektedir.

4. SERBEST ELEKTRON POZİTRON ÇİFTİ ÜRETİMİ TESİR KESİTİ VE İKİNCİ DERECEDEKİ FEYNMAN DİYAGRAMLARI

Tezin amacı, şekil 4.1’de şematize edilen rölativistik ağır iyon çarpışmasında, birbirlerine göre aynı büyüklükteki fakat zıt yöndeki hızlarla ilerleyen iki atomun, saçılma parametresine bağlı olarak tesir kesitlerini bulmak idi. Tesir kesiti üretilecek parçacıkların oluşma olasılığını gösteren ifade olup parçacık fiziğinde çok önemlidir. Bundan sonraki denklemlerde kolaylık olması açısından $\hbar = e = c = m = 1$ şeklinde tanımlanmıştır. Önce, durgun sistemde tek bir çekirdeğin dört vektör potansiyeli hesaplanacak, daha sonra elde edilen sonuçlar çarpışma sistemine genelleştirilecektir.



Şekil 4.1: Birbirlerine doğru v hızı ile çarpışan iki atomun şematik gösterimi

Durgun sistemde $(0, b/2, 0)$ konumundaki çekirdeğin dört vektör potansiyeli sadece skaler potansiyeli (Coulomb potansiyeli) cinsinden yazılacaktır.

$$A_0' = \frac{-Ze}{x'^2 + \left[y' + \frac{b}{2}\right]^2 + z'^2}, \quad \vec{A}' = 0 \quad (4.1)$$

Denklem (4.1) üzerine Fourier dönüşümleri uygulanıp, potansiyeller momentum uzayında yazılır ve potansiyeller Lorentz dönüşümleri yardımı ile çarpışma sistemine genelleştirilebilir. Sistemin toplam dört vektör momentumu,

$$A^{\mu} = A_1^{\mu} + A_2^{\mu} \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, (1) numaralı çekirdeğin vektör potansiyeli A_1^{μ} , (2) numaralı çekirdeğin vektör potansiyeli A_2^{μ} ve sistemin toplam dört vektör potansiyeli A^{μ} 'dür.

(1) numaralı çekirdeğin momentum uzayında vektör potansiyelinin sıfırdan farklı bileşenleri,

$$A^0(1) = -8\pi^2 z \gamma^2 \frac{\delta(q_0 - \beta q_z)}{q_z^2 + \gamma^2(q_x^2 + q_y^2)} \exp\left[i\vec{q}_{\perp} \cdot \frac{\vec{b}}{2}\right] \quad (4.3)$$

$$A^z(1) = \beta A^0(1) \quad (4.4)$$

$$A^x(1) = A^y(1) = 0 \quad (4.5)$$

$\beta \rightarrow -\beta$ ve $b \rightarrow -b$ dönüşümleri yardımı ile (2) numaralı çekirdeğin vektör bileşenleri,

$$A^0(2) = -8\pi^2 z \gamma^2 \frac{\delta(q_0 + \beta q_z)}{q_z^2 + \gamma^2(q_x^2 + q_y^2)} \exp\left[i\vec{q}_{\perp} \cdot \frac{(-\vec{b})}{2}\right] \quad (4.6)$$

$$A^z(2) = -\beta A^0(2) \quad (4.7)$$

$$A^x(2) = A^y(2) = 0 \quad (4.8)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemlerin çıkarılması için [5] numaralı kaynaktan yararlanılmıştır. Burada γ ; Lorentz faktörü, β ; V/c sabittir.

Denklem (3.9)'da yazılan pertürbatif çözüm aynı zamanda S matris çözümü olarak bilinmektedir. S matris zaman içerisinde üretilecek lepton çiftlerinin durum vektörleri arasındaki geçişi sağlamaktadır.

$$|\phi(\infty)\rangle = S|\phi(-\infty)\rangle \quad (4.9)$$

Kuvvetli bir alanda, elektronların çokluğunun bir olasılık olmadığını fakat bunların vakumda üretilen elektronların ortalama sayısını temsil ettiğini belirterek, vakum durumunun zaman içinde evrimleşmesi,

$$S|0\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} K_0(0, t) K(t, -t) |0\rangle \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlanabilir. Tesir kesiti ifadesi, denklem (4.11) şeklinde yazılmaktadır.

$$\sigma = \int d^2b N(b) \quad (4.11)$$

Burada b , momentum uzayında çarpışan ağır iyonların merkezleri arasındaki mesafedir. $N(b)$ çift çeşitlilik olarak ifade edilir ve zaman içinde vakumdan üretilcek lepton çiftlerinin ortalama sayısını temsil eder. Çift çeşitlilik, S geçiş matrisi cinsinden de ifade edilmektedir ve sonuç olarak tesir kesiti denklem (4.12)'deki gibi yazılabilir. [4] , [5]

$$\sigma = \int d^2b \sum_{k>0} \sum_{q<0} \left| \langle k | S_{12} + S_{21} | q \rangle \right|^2 \quad (4.12)$$

Burada, $|q\rangle = |\chi_q^{(-)}\rangle$, anti-parçacığın durum vektörü, $|k\rangle = |\chi_k^{(+)}\rangle$, parçacığın durum vektörüdür. S_{21} matrisi de S_{12} matrisinde parçacıkların hızının ve ağır iyonların arasında hareket düzlemine dik doğrultudaki mesafenin (impact parameter) işaret değiştirmesi ile elde edilir. Sonuç olarak pertürbasyon serisi, S matris cinsinden yazılabilir.

$$\begin{aligned} \langle \chi_k^{(+)} | S | \chi_q^{(-)} \rangle &= (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \langle \chi_k^{(+)} | K_0(0, \infty) K_0(\infty, \tau) + [V_1(\tau) K_0(\tau, \tau') V_2(\tau') + V_2(\tau) K_0(\tau, \tau') V_1(\tau')] \\ &\quad \times [K_0(\tau', -\infty) K_0(-\infty, 0)] | \chi_q^{(-)} \rangle \end{aligned} \quad (4.13)$$

Denklem (4.13) hesaplanırsa tesir kesitinin son hali elde edilir.

$$\sigma = \frac{1}{4\beta^2} \int \frac{d^3k d^3q d^2p_{\perp}}{(2\pi)^8} \times \left| A^{(+)}(k, q; \vec{p}_{\perp}) + A^{(-)}(k, q; \vec{k}_{\perp} + \vec{q}_{\perp} - \vec{p}_{\perp}) \right|^2 \quad (4.14)$$

Yukarıdaki denklemde tesir kesitinin $A^{(+)}(k, q; \vec{p}_{\perp})$ ve $A^{(-)}(k, q; \vec{p}_{\perp})$ fonksiyonları cinsinden yazılabileceği görülür.

Bu iki fonksiyon da kendi içerisinde iki fonksiyon ile ifade edilir.

$$A^{(+)}(k, q; \vec{p}_{\perp}) = F(\vec{k}_{\perp} - \vec{p}_{\perp} : w_1) F(\vec{p}_{\perp} - \vec{q}_{\perp} : w_2) \tau_{kq}(\vec{p}_{\perp} : \beta) \quad (4.15)$$

$$A^{(-)}(k, q; \vec{p}_{\perp}) = F(\vec{k}_{\perp} - \vec{p}_{\perp} : w_2) F(\vec{p}_{\perp} - \vec{q}_{\perp} : w_1) \tau_{kq}(\vec{p}_{\perp} : -\beta) \quad (4.16)$$

Yukarıdaki denklemlerde F fonksiyonu, momentum uzayında hareket eden ağır iyonların elektromanyetik alanlarının skaler kısmını içeren terimdir. $\vec{p}_{\perp}$; dik momentum transferini, w_1 ; birinci çekirdeğin frekansını, w_2 ; ikinci çekirdeğin

frekansını göstermektedir. τ_{kq} fonksiyonu ise ağır iyonların hızını (β) ve momentumunu ($\vec{p}_\perp$) içerir. Form faktör terimi, F fonksiyonunun içerisine konulmuştur.

5. FORM FAKTÖRÜ VE HESAPLAMALARI

19. yüzyılın başlarında, çekirdeğin momentum ve yük dağılımına sahip olduğunun anlaşılmasından sonra, araştırmalar çekirdeğin içindeki parçacıklara yönelmiştir. Noktasal parçacıkları çarpıştırmak ile çekirdekleri çarpıştırmak arasında oldukça fark vardır, çünkü çekirdek içindeki parçacıkların (nükleon) herbiri kendine ait momentuma ve yüksek hızlara sahiptir.

Ağır iyonlar yüksek hızlara ulaştığında Lorentz boyca kısalmasına uğrarlar, böylece daha sivrileşen çekirdeklerin uç kısımlarında yüksek şiddette elektromanyetik alanlar oluşur ve oluşan bu alanlar çok sayıda foton içerir.

Form faktörü, çekirdeğin içinde bulunan parçacıklar ile fotonların bağlanmalarını kontrol eder ve ayrıca bu bağlanmanın şiddeti, tesir kesitinin büyüklüğünü de belirler [4]. Bu sayede form faktörü, çekirdeğin içindeki parçacıkların yapısı ve çekirdeğin sahip olduğu yük yoğunluğu hakkında daha detaylı bilgiler vermektedir.

Tesir kesiti hesaplamalarında, etkileşimin uzaysal dağılımı, aynı zamanda kendi Fourier dönüşümü olan form faktörünü de temsil eder. Tepkimenin büyüklüğü, noktasal etkileşimler için tepkimenin büyüklüğü ile form faktörünün çarpımına eşittir [6]. Bu sebeple form faktör, etkileşimin uzaysal dağılımı hakkında bilgi verir ve parçacık fiziğinde önemli bir yere sahiptir.

Öncelikle, etkileşimden söz edebilmemiz için, etkileşecek parçacıkların boyutları anlaşılmalıdır. Elektronun (e^-) Compton dalga boyu, λ_c^e ,

$$\lambda_c^e = \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{0.511 \text{ MeV}} \cong 400 \text{ fm} \quad (5.1)$$

mertebedindedir. Çekirdeğin boyutu R , örneğin altın atomu için,

$$R \approx R_0 A^{1/3} \approx 7 \text{ fm} \quad (5.2)$$

mertebedinde olup, $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$, burada sabit $R_0 \approx 1.25 \text{ fm}$ ve A atom kütle numarasını (altın atomu için $A = 197$) göstermektedir. Görüldüğü gibi, elektronun

Compton dalga boyu, çekirdeğin boyutunun yaklaşık yüz katı mertebesindedir, bu sebeple elektron ile çekirdek etkileşime neredeyse girmezler.

Tau (τ) parçacığı için Compton dalga boyuna bakacak olursak, λ_c^t ,

$$\lambda_c^t = \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1784 \text{ MeV}} \cong 0.11 \text{ fm} \quad (5.3)$$

görüldüğü gibi, çekirdek boyutu mertebesindedir. Aynı şekilde müon-anti müon çiftinin Compton dalga boyu yaklaşık 2 fm boyutunda olduğu için, çekirdekle etkileşirler. Buradaki en önemli nokta, tau (τ) ve müon (μ) parçacıklarının, elektrona göre daha ağır olması ve Compton dalga boylarının daha küçük olması sonucu, tesir kesitlerinin farklı form faktörlerine göre daha hızlı değişeceğidir. Çekirdeğin sahip olduğu yük yoğunluğu, kuantum mekaniksel olarak,

$$\rho(r) = Ze|\psi(r)|^2 \quad (5.6)$$

şeklinde tanımlanır, burada Z çekirdeğin içindeki protonların toplam sayısı yani atom numarası, $\psi(r)$ ise çekirdekte bulunan protonlardan biri için dalga fonksiyonudur ve bu fonksiyonu bir protonun olasılık yoğunluğu olarak tanımlanabilir.

Kuantum mekaniksel bakış açısı ile, yük yoğunluğunun Fourier dönüşümü alınır, elektriksel form faktörü elde edilmiş olunur. Coulomb saçılmasına bakıldığında, parçacığın uzaysal uzantısının yük yoğunluğuna bağlı olduğu görülür. F , form faktörü, gelen parçacıktan etkileşen parçacığa transfer edilen momentumun (q) fonksiyonudur [6]. O halde form faktörünü,

$$F(q^2) = \frac{\hbar}{Ze} \int \rho(r) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3r = \int \frac{4\pi\hbar}{Ze q} \rho(r) \sin(qr) r dr \quad (5.7)$$

yük dağılımının küresel simetriyi sağladığı da eklenerek, denklem (5.7)'deki gibi yazılabilir. Form faktörünün küresel koordinatlara dönüştürülmesi Ek A'da gösterilmiştir.

Bir sonraki bölümde amacımız, çevresel ağır iyon çarpışmaları sonucu oluşan tau-anti tau ($\tau^- \tau^+$) çiftinin, form faktörlere göre nasıl değiştiğini bulmak, deneysel veriler ile karşılaştırmak ve diğer parçacık çiftleri, örneğin elektron-pozitron ($e^- e^+$) ve müon-anti müon ($\mu^- \mu^+$) çiftlerinin tesir kesiti grafikleri ile karşılaştırmaktır.

Literatürde çeşitli uzaysal dağımlar örneğin yük dağılımları için farklı form faktörleri mevcuttur. Tezimizde inceleyeceğimiz form faktörleri, çekirdeğin yük dağılımının gaussian, uniform ve wood-saxon (fermi) dağılıma sahip olduğu durumları kapsamaktadır.

5.1 Gaussyen Dağılım

Temel etkileşimleri anlamak için moleküllere ve ağır çekirdeklere başvurmak istenilirse, nükleonların yakınında veya içerisinde bulunan dalga fonksiyonunun yüksek doğrulukla tanımlanması gerekir. Yük yoğunluğunun analitik ifadesi, bu dalga fonksiyonunun seri çözümlerini vermektedir.

Elektron saçılması deneylerinden elde edilen veriler sonucunda, çekirdeğin yük yoğunluğunun farklı değerlerde olabileceği gözlenmiştir. Elektronların, çekirdekten sapması, çekirdeğin iç yük yoğunluğu hakkında bize bilgi vermektedir. İlk olarak çekirdeğin yük yoğunluğunun gaussian dağılım şeklinde olduğu duruma bakalım.

Hafif (light) çekirdeklerin yük yoğunlukları, gaussian dağılım şeklindedir örneğin, ${}^6,7\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$ ve kısmi olarak ${}^4\text{He}$.

Çekirdeğin normalize edilmiş yük dağılımının,

$$\rho(r) = Ze \left(\frac{a^2}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{a^2 r^2}{2} \right] \quad (5.8)$$

şeklinde olduğunu kabul edilirse, tesir kesitine eklenecek katkı yani form fakörü hesaplanabilir. Burada $a = 2.30 / (4 \ln 3) \text{ fm}^{-1}$ değerini ifade eder. Denklem (5.8), denklem (5.7)'de yerine yazılırsa,

$$F(q^2) = 4\pi \left(\frac{a^2}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{\hbar}{q} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{a^2 r^2}{2} \right] \sin(qr) r dr \quad (5.9)$$

ifadesi elde edilir ve aşağıdaki dönüşüm altında,

$$qr = \alpha, \quad dr = \frac{d\alpha}{q} \quad (5.10)$$

denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
F(q^2) &= \frac{4\pi\hbar}{q^3} \left(\frac{a^2}{2\pi} \right)^{3/2} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{a^2\alpha^2}{2q^2}\right] \sin(\alpha)\alpha d\alpha \\
&= \frac{4\pi\hbar}{q^2} \left(\frac{a^2}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{\exp\left[-\frac{q^2}{2a^2}\right] \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^2}{q^2}} q^4}{a^4}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

form faktörü bulunur. Çekirdeğin gaussian dağılımı için form faktörü denklem (5.12)'de gösterilmiştir.

$$F(q^2) = \exp\left[-\frac{q^2}{2a^2\hbar^2}\right] \tag{5.12}$$

5.2 Düzgün (Uniform) Dağılım

R yarıçaplı, düzgün yüklenmiş küresel çekirdek için normlize edilmiş yük yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
\rho(r) &= \frac{3Ze}{4\pi R^3} \quad , \quad r < R \\
&= 0 \quad , \quad r > R
\end{aligned} \tag{5.13}$$

içeride sabit, dışarıda ise sıfırdır. O halde form faktörü,

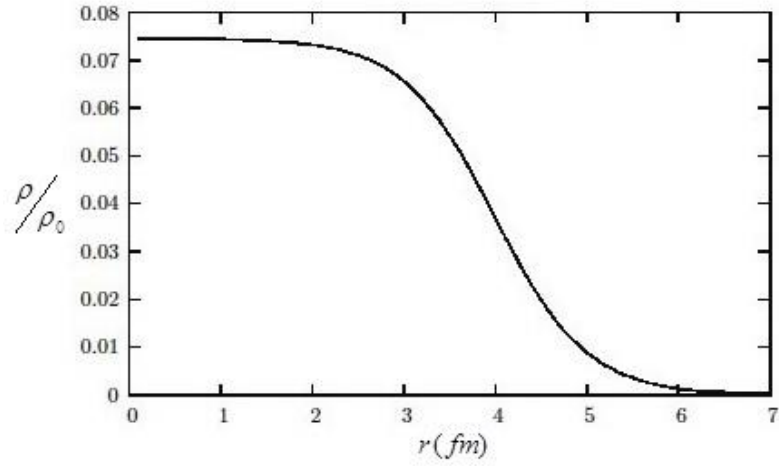
$$\begin{aligned}
F(q^2) &= \frac{4\pi}{Ze q} \int \rho(r) r \sin(qr) dr = \frac{3}{qR^3} \int_0^R r \sin(qr) dr \\
&= \frac{3\hbar}{qR^3} \left(\left[\frac{r}{q} \cos(qr) \right]_0^R - \int_0^R \frac{\cos(qr)}{q} dr \right) \\
&= \frac{3\hbar}{qR^3} \left(\frac{R}{q} \cos(qR) - \left[\frac{\sin(qr)}{q^2} \right]_0^R \right) \\
&= \frac{3\hbar}{qR^3} \left(\frac{R}{q} \cos(qR) - \frac{\sin(qR)}{q^2} \right)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

denklemlerinin sonunda denklem (5.15) bulunur.

$$F(q^2) = 3 \left(\frac{\hbar}{qR} \right)^3 (qR \cos(qR) - \sin(qR)) \quad (5.15)$$

5.3 Wood-Saxon (Fermi) Dağılımı

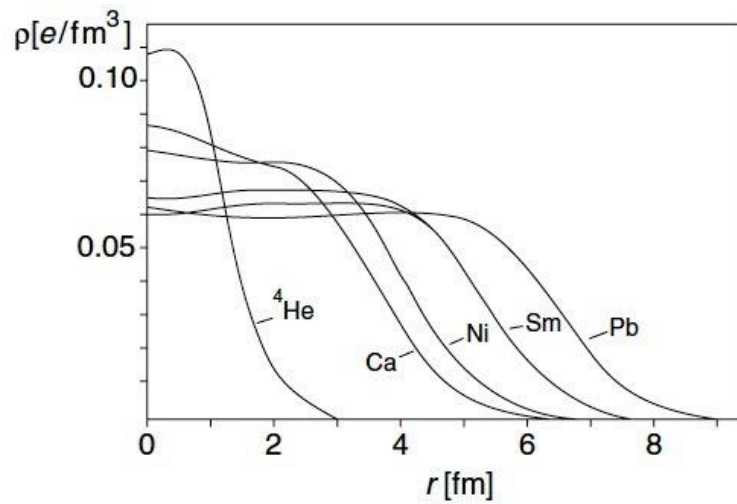
Daha gerçekçi olan Wood-Saxon modeline bakılacak olursa, yük yoğunluğunun,



Şekil 5.1: Wood-Saxon (Fermi) dağılımı

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp((r - R)/a)} \quad (5.16)$$

şeklinde olduğu görülür. Burada $R = 6.55 \text{ fm}$ (Au atomu için yük yoğunluğunun yarı değerine düştüğü andaki yarıçap), a ise uzaysal dağılımın boyutunu temsil eden parametre olup değeri, $2.30/(4 \ln 3) \text{ fm}$ 'dir.



Şekil 5.2: Farklı çekirdekler için yük dağılımları [10]

Wood-Saxon dağılımını denklemin (5.7)'de yerine yazıp çözmek analitik olarak çok zordur. Bu sebeple daha kolay çözüm için form faktörü denklemini seriye açabiliriz.

$$\begin{aligned}
F(q^2) &= \int_0^\infty \frac{4\pi}{q} \rho(r) \sin(qr) r dr = \int_0^\infty \frac{4\pi}{qr} \rho(r) \sin(qr) r^2 dr \\
&= \int_0^\infty \frac{4\pi}{qr} \rho(r) \left[qr - \frac{(qr)^3}{3!} + \frac{(qr)^5}{5!} - \dots \right] r^2 dr \\
&= \int_0^\infty \frac{4\pi}{qr} qr \rho(r) r^2 dr - \int_0^\infty \frac{4\pi}{qr} \rho(r) \frac{(qr)^3}{3!} r^2 dr + \int_0^\infty \frac{4\pi}{qr} \rho(r) \frac{(qr)^5}{5!} r^2 dr - \dots \\
&= \int_0^\infty \rho(r) dV - \int_0^\infty \rho(r) \frac{(qr)^2}{3!} dV + \int_0^\infty \rho(r) \frac{(qr)^4}{5!} dV - \dots \quad (5.17)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak form faktörü,

$$F(q^2) = 1 - \frac{q^2}{3!} \langle r^2 \rangle + \frac{q^4}{5!} \langle r^4 \rangle - \dots \quad (5.18)$$

görüldüğü gibi dağılımın yarıçapının, kuvvetlerinin ortalama değerlerine bağlı olarak bulunur. Form faktörünün ilk terimi olan yarıçapın karesinin ortalamasını Ek B'de hesaplanmış olup bulunan sonuç,

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3}{5} \left[1 + \frac{7}{3} \left(\frac{\pi a}{R} \right)^2 \right]} R \quad (5.19)$$

olacaktır ve altın çekirdeği için yarıçap ve sabit parametre değerleri yerine yazıldığında, $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 5.4338 \text{ fm}$ olarak bulunur. Deneysel olarak ölçülen değer ise, $\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{deneysel} = 5.4358 \text{ fm}$ olup, teorik hesabın deneysel veriler ile ne kadar uyuştuğunu bize göstermiş olur. Diğer terimler ise,

$$\langle r^4 \rangle \approx \frac{3}{7} R^4 + \frac{18}{7} \pi^2 a^2 R^2 + \frac{31}{7} \pi^4 a^4 \quad (5.20)$$

$$\langle r^6 \rangle \approx \frac{3}{9} R^6 + \frac{11}{3} \pi^2 a^2 R^4 + \frac{239}{15} \pi^4 a^4 R^2 + \frac{127}{5} \pi^6 a^6 \quad (5.21)$$

olarak elde edilir [11]. Burada bir Λ sabiti tanımlanabilir [12] , [13].

$$\Lambda = \sqrt{\frac{6}{\langle r^2 \rangle}} \quad (5.22)$$

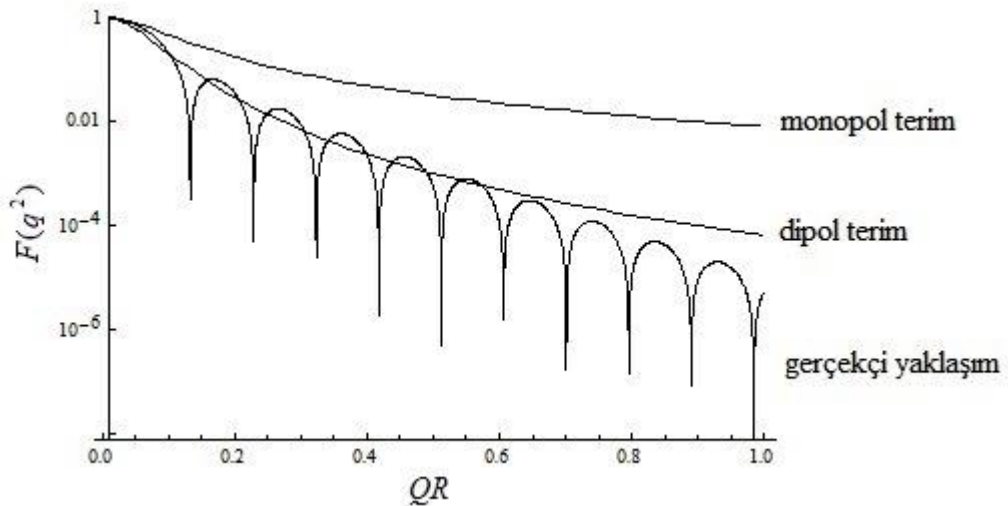
Altın çekirdeği için bu sabitin değeri yaklaşık olarak 90 MeV olarak hesaplanır ve denklem (5.18)'de ilk terim, denklem (5.22)'de tanımlanan sabit cinsinden yazılırsa,

$$F(q^2) = \frac{1}{1 + \frac{q^2}{\Lambda^2}} = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2} \quad (5.23)$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki denklem, basitleştirilmiş (simplified) veya monopol form faktör olarak tanımlanır. Aynı şekilde denklem (5.18)'de ikinci terim, denklem (5.22)'de tanımlanan sabit cinsinden yazılırsa,

$$F(q^2) = \left(\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2} \right)^2 \quad (5.24)$$

dipol form faktör elde edilir [4]. Dipol form faktör yaklaşımı, monopol form faktör yaklaşımına göre aşağıdaki şekilde gösterilen gerçekçi (realistic) yaklaşıma daha çok benzemektedir. Bu sebeple Wood-Saxon dağılımına sahip çekirdek için form faktörünün çözümlenmesi, dipol terime indirgenecektir. Aşağıdaki grafik MATHEMATİCA programında, Au çekirdeği için hesaplanan Λ değeri kullanılarak çizdirilmiştir.



Şekil 5.3: Monopol ve dipol form faktörü terimlerinin Wood-Saxon yük dağılımı için gerçekçi yaklaşıma olan uyumluluğu.

6. FORM FAKTÖRLERİNİN TESİR KESİTİNE ETKİLERİ VE GRAFİKLERİN YORUMU

Bu bölümde, RHIC enerjisinde $Au + Au$ ve LHC enerjisinde $Pb + Pb$ ağır iyonlarının çevresel çarpıştırılması sonucu oluşan tau çiftinin, Au ve Pb çekirdeklerinin yük dağılımına yani form faktörüne bağlı tesir kesitleri FORTRAN kodları ile yazılan programda hesaplatılmış olup elde edilen veriler, oluşabilecek olan diğer parçacık çiftlerinin örneğin elektron-pozitron ve muon-anti muon çifti tesir kesitleri ile kıyaslanıp, aşağıdaki çizelgelerde gösterilmiştir.

Çizelge 6.1: RHIC enerjisinde, form faktörü hesaba katılmadan elde edilen tau ve muon tesir kesitleri.

	$\sigma_{f=0}(barn)$
<i>Tau</i>	4.7514×10^{-4}
<i>Muon</i> [15]	7.2462×10^{-1}

Çizelge 6.1’de gösterildiği üzere, 100 GeV’de $Au + Au$ çekirdeklerinin çarpıştırılması sonucu form faktörü hesaba katılmadan bulunan muon- anti muon çifti tesir kesiti değeri, tau-anti tau çifti için bulunan tesir kesiti değerinden daha yüksek mertebededir. Bu farkın sebebi, tau parçacığının, muon parçacığından yaklaşık 15 kat daha ağır olmasıdır, bu sebeple muon çiftinin oluşabilme olasılığı daha fazladır.

Çizelge 6.2: RHIC enerjisinde, form faktörlerin etkisi ile hesaplanan tau ve muon tesir kesitleri, burada $f = 1$ ile gösterilen tesir kesiti Gausyen Dağılıma, $f = 2$ ile gösterilen tesir kesiti Düzgün Dağılıma ve $f = 3$ ile gösterilen tesir kesiti Wood-Saxon Dağılıma sahip altın çekirdeğine aittir.

	$\sigma_{f=1}(barn)$	$\sigma_{f=2}(barn)$	$\sigma_{f=3}(barn)$
<i>Tau</i>	4.6839×10^{-7}	3.8103×10^{-6}	3.9150×10^{-6}
<i>Muon</i> [15]	1.2048×10^{-1}	2.067×10^{-1}	2.0804×10^{-1}

Çizelge 6.2’de ise, 100 GeV’de $Au + Au$ çekirdeklerinin çarpıştırılması sonucu oluşan tau ve muon çiftlerinin, farklı form faktörlere göre oluşma olasılığının

değişimi gösterilmiştir. Görüldüğü üzere her iki parçacık çifti için en düşük tesir kesiti değerleri Gausyen Dağılıma sahip çekirdek için bulunmuştur. Bunun sebebi, denklem (5.12)'de hesaplanan form faktörünün, altın çekirdeklerinin çarpışması ile oluşan fotonların sahip olduğu momentumun (q) bir fonksiyonu olması ve bu ifadenin exponansiyel olarak azalması sonucu tesir kesitine diğer form faktörlerine göre daha az katkı sağlamasıdır.

Çizelge 6.3: LHC enerjisinde, form faktörü hesaba katılmadan elde edilen tau ve muon tesir kesitleri.

	$\sigma_{f=0}(barn)$
<i>Tau</i>	7.8615×10^{-3}
<i>Muon</i> [15]	5.2924

Çizelge 6.3'e bakılırsa burada, 3400 GeV 'de $Pb + Pb$ çekirdeklerinin çarpıştırılması sonucu form faktörü hesaba katılmadan bulunan muon- anti muon çifti tesir kesiti ve tau-anti tau çifti tesir kesiti değerleri gösterilmiştir. Buradaki önemli nokta hesaplanan tesir kesiti değerlerinin, Çizelge 6.1'de gösterilen tesir kesiti değerlerinden yaklaşık 10 kat daha fazla olmasıdır. Bunun sebebi, Au iyonlarının LHC'de RHIC'e göre 34 kat daha yüksek enerjide çarpıştırılması sonucu oluşan fotonların daha yüksek enerji ve momentuma sahip olacağı ve bunun sonucunda ortamda daha fazla tau veya muon çiftinin oluşabilecek olmasıdır.

Çizelge 6.4: LHC enerjisinde, form faktörlerin etkisi ile hesaplanan tau ve muon tesir kesitleri, burada $f = 1$ ile gösterilen tesir kesiti Gausyen Dağılıma, $f = 2$ ile gösterilen tesir kesiti Düzgün Dağılıma ve $f = 3$ ile gösterilen tesir kesiti Wood-Saxon Dağılıma sahip altın çekirdeğine aittir.

	$\sigma_{f=1}(barn)$	$\sigma_{f=2}(barn)$	$\sigma_{f=3}(barn)$
<i>Tau</i>	1.0122×10^{-3}	1.5882×10^{-3}	1.5964×10^{-3}
<i>Muon</i> [15]	2.1086	2.7189	2.7265

Aynı şekilde Çizelge 6.4'te, 3400 GeV 'de $Pb + Pb$ çekirdeklerinin çarpıştırılması sonucu oluşan tau ve muon çiftlerinin, farklı form faktörlere göre oluşabilme olasılığının değişimi gösterilmiştir. LHC enerjisinde de her iki parçacık çifti için en düşük mertebe tesir kesiti değerleri Gausyen Dağılıma sahip çekirdek için bulunmuştur. En yüksek mertebe tesir kesiti değerleri ise Wood-Saxon Dağılıma

sahip çekirdek için bulunmuştur. Bunun sebebi, yine form faktöründen gelecek katkının en fazla olduğu dağılımın Wood-Saxon Dağılımı olduğu denklem (5.23)'te görülmektedir. Ayrıca Çizelge 6.4'te hesaplanan tesir kesiti değerlerinin, Çizelge 6.2'deki tesir kesiti değerlerinden yaklaşık 10^3 kat daha fazla olması, çarpıştırılan *Au* ve *Pb* iyonlarının enerjilerinin, form faktörlerinin tesir kesitine ne kadar katkı sağlayacağını belirlenmesinde önemli rol oynadığının kanıtıdır.

Çizelge 6.5: RHIC enerjisinde, form faktörü hesaba katılmadan elde edilen tau ve elektron tesir kesitleri.

	$\sigma_{f=0}(barn)$
<i>Tau</i>	4.7514×10^{-4}
<i>Elektron</i>	3.6253×10^4

Çizelge 6.5'te, 100 GeV 'de *Au + Au* çekirdeklerinin çarpıştırılması sonucu form faktörü hesaba katılmadan bulunan elektron-pozitron çifti tesir kesiti değeri, tau-anti tau çifti için bulunan tesir kesiti değerinden çok daha yüksek mertebededir. Bu farkın sebebi, tau parçacığının, elektron parçacığından yaklaşık 3500 kat daha ağır olmasıdır, bu sebeple elektron pozitron çiftinin oluşabilme olasılığı, tau çiftinin oluşabilme olasılığından yaklaşık 10^8 daha fazladır.

Çizelge 6.6: RHIC enerjisinde, form faktörlerin etkisi ile hesaplanan tau ve elektron tesir kesitleri, burada $f = 1$ ile gösterilen tesir kesiti Gausyen Dağılıma, $f = 2$ ile gösterilen tesir kesiti Düzgün Dağılıma ve $f = 3$ ile gösterilen tesir kesiti Wood-Saxon Dağılıma sahip altın çekirdeğine aittir.

	$\sigma_{f=1}(barn)$	$\sigma_{f=2}(barn)$	$\sigma_{f=3}(barn)$
<i>Tau</i>	4.6839×10^{-7}	3.8103×10^{-6}	3.9150×10^{-6}
<i>Elektron</i>	3.6262×10^4	3.6345×10^4	3.6198×10^4

Çizelge 6.6'de ise, 100 GeV 'de *Au + Au* çekirdeklerinin çarpıştırılması sonucu oluşan tau ve elektron çiftlerinin, farklı form faktörlere göre oluşabilme olasılığının değişimi gösterilmiştir. Burada en önemli nokta elektron-pozitron çiftinin, form faktör hesaba katılmadan elde edilen tesir kesiti değeri ile, form faktörlerin etkisi ile hesaplanan tesir kesiti değerlerinin birbirlerine oldukça yakın olmasıdır. Bunun nedeni, denklem (5.1)'de gösterilen elektronun Compton dalga boyunun, çekirdeğin

boyutlarından yaklaşık 60 kat daha fazla olması ve oluşan elektron-pozitron çiftinin çekirdekle etkileşmemesidir.

Çizelge 6.7: LHC enerjisinde, form faktörü hesaba katılmadan elde edilen tau ve elektron tesir kesitleri.

	$\sigma_{f=0} (barn)$
<i>Tau</i>	7.8615×10^{-3}
<i>Elektron</i>	2.4596×10^5

Çizelge 6.7'ye bakılırsa burada, 3400 GeV 'de $Pb + Pb$ çekirdeklerinin çarpıştırılması sonucu form faktörü hesaba katılmadan bulunan elektron-pozitron çifti tesir kesiti ve tau-anti tau çifti tesir kesiti değerleri gösterilmiştir. Burada görüleceği üzere hesaplanan tesir kesiti değerlerinin, Çizelge 6.5'te gösterilen tesir kesiti değerlerinden yaklaşık 10 kat daha fazla olmasıdır. Bunun sebebi aynı şekilde, Au iyonlarının LHC'de RHIC'e göre 34 kat daha yüksek enerjide çarpıştırılması sonucu oluşan fotonların daha yüksek enerji ve momentuma sahip olacağı ve bunun sonucunda ortamda daha fazla tau veya elektron çiftinin oluşabilecek olmasıdır.

Çizelge 6.8: LHC enerjisinde, form faktörlerin etkisi ile hesaplanan tau ve elektron tesir kesitleri, burada $f = 1$ ile gösterilen tesir kesiti Gausyen Dağılıma, $f = 2$ ile gösterilen tesir kesiti Düzgün Dağılıma ve $f = 3$ ile gösterilen tesir kesiti Wood-Saxon Dağılıma sahip altın çekirdeğine aittir.

	$\sigma_{f=1} (barn)$	$\sigma_{f=2} (barn)$	$\sigma_{f=3} (barn)$
<i>Tau</i>	1.0122×10^{-3}	1.5882×10^{-3}	1.5964×10^{-3}
<i>Elektron</i>	2.4545×10^5	2.4616×10^5	2.4576×10^5

Çizelge 6.8'de ise, 3400 GeV 'de $Pb + Pb$ çekirdeklerinin çarpıştırılması sonucu oluşan tau ve elektron çiftlerinin, farklı form faktörlere göre oluşabilme olasılığının değişimi gösterilmiştir. Görüldüğü üzere, çekirdeğin yük dağılımının elektron tesir kesiti üzerine etkisi yoktur. Bunun sebebi elektronun Compton dalga boyunun çekirdek ile etkileşemeyecek kadar büyük olmasıdır. Tau – anti tau çiftinin her form faktörü için elde ettiğimiz tesir kesiti değerlerinin grafikleri MATLAB yardımı ile çizilmiştir. Grafiklerde tesir kesitinin, ayrı ayrı p_0 , pt , p_z ve rapidity'ye göre değişimleri gösterilmiştir. Burada p_0 ile gösterilen değer, çarpışma sonrası oluşan tau çiftinin enerjisini, pt ile gösterilen değer üretilen tau çiftinin çarpışma

doğrultusuna dik bileşenine ait momentumunu ve p_z değeri ise, üretilen tau çiftinin çarpışma doğrultusundaki bileşenine ait momentumunu temsil etmektedir.

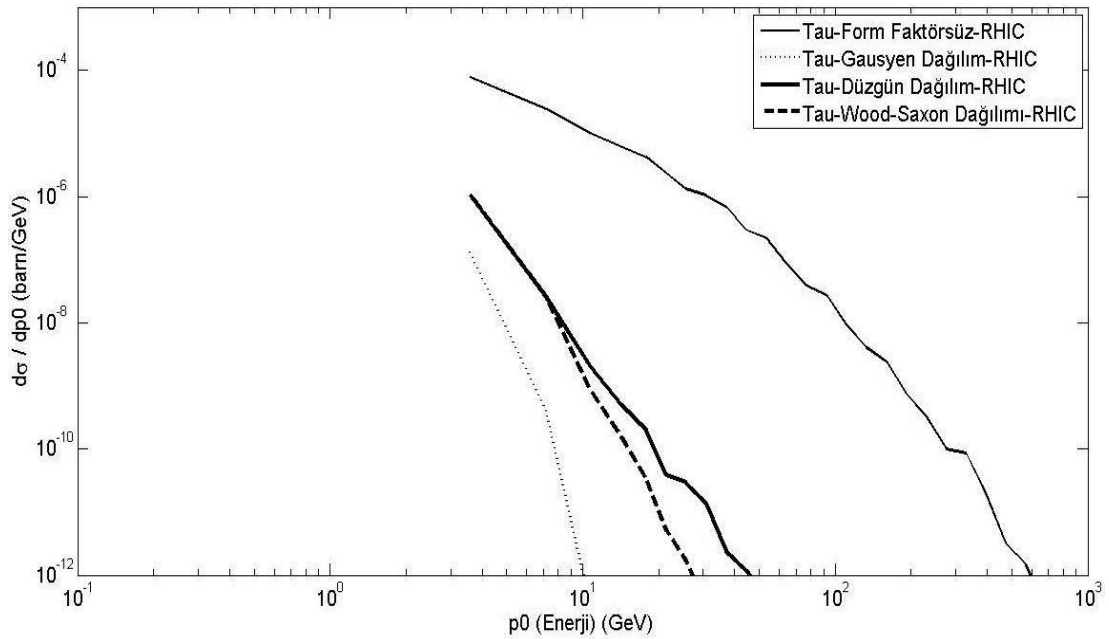
Aralarındaki ilişki,

$$p_0 = \sqrt{p_z^2 + p_t^2 + 1} \quad (6.1)$$

şeklindedir. Son olarak rapidity (hızlılık),

$$y = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{p_0 + p_z}{p_0 - p_z} \right] \quad (6.2)$$

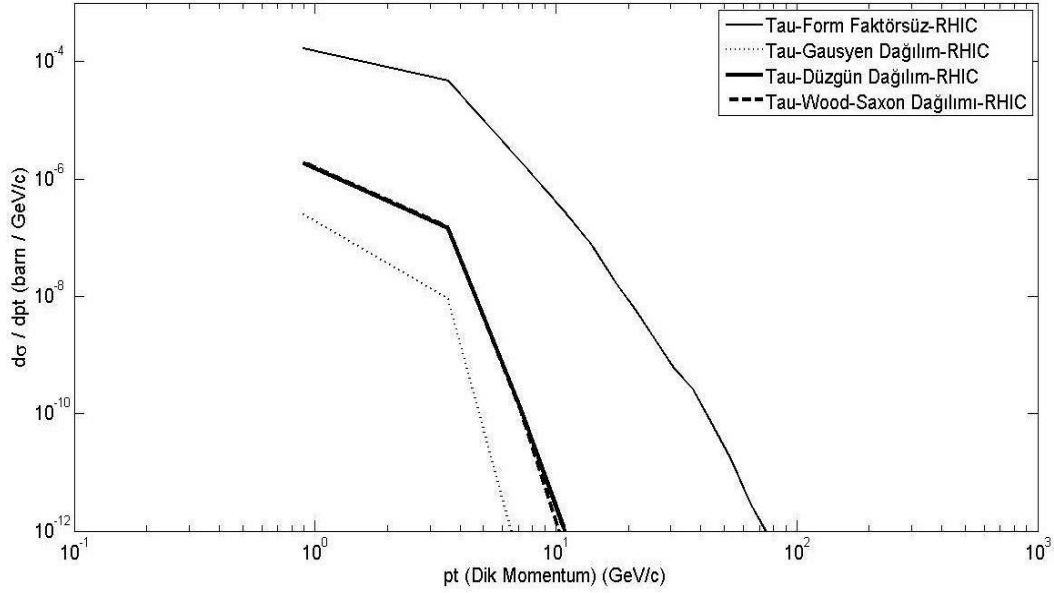
enerji ve momentumun fonksiyonu olarak tanımlanır [1]. Rapidity'nin önemi, yüksek enerjili çarpışmalar sonucu oluşan parçacıkların yayılma doğrultusu hakkında bilgi vermesidir. Bu sebeple sıfır rapidity, oluşan parçacıkların hareket doğrultularının çarpışma doğrultusuna dik olması ve $\pm \infty$ rapidity ise oluşan parçacıkların hareket doğrultusunun çarpışma doğrultusunda olması demektir [14].



Şekil 6.1: RHIC enerjisinde, tau çifti parçacıkları tesir kesitinin enerjisine göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.

Şekil 6.1’ de gösterilen grafik, 100 GeV’de $Au + Au$ çekirdeklerinin çarpıştırılması sonucu oluşan tau çiftinin enerjinin fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesitinin enerjiye göre değişimi verilmiştir. Grafik, farklı form faktörlerine göre tesir kesitinin değişimini göstermektedir. Burada, form faktörü hesaba katılmadığında, diferansiyel tesir kesitinin yani tau çifti oluşma olasılığının daha yüksek olduğu, ayrıca daha

yüksek enerjili tau çiftlerinin oluşabileceği sonucu çıkarılabilir. Form faktörlerinin katılması ile diferansiyel tesir kesitinin azalacağı görülmektedir. En hızlı azalma Gausyen Dağılıma sahip çekirdek için olması gerektiğini çizelgeler yorumlanırken söylenmiştir, grafikte de bu duruma uyum sağlamaktadır.



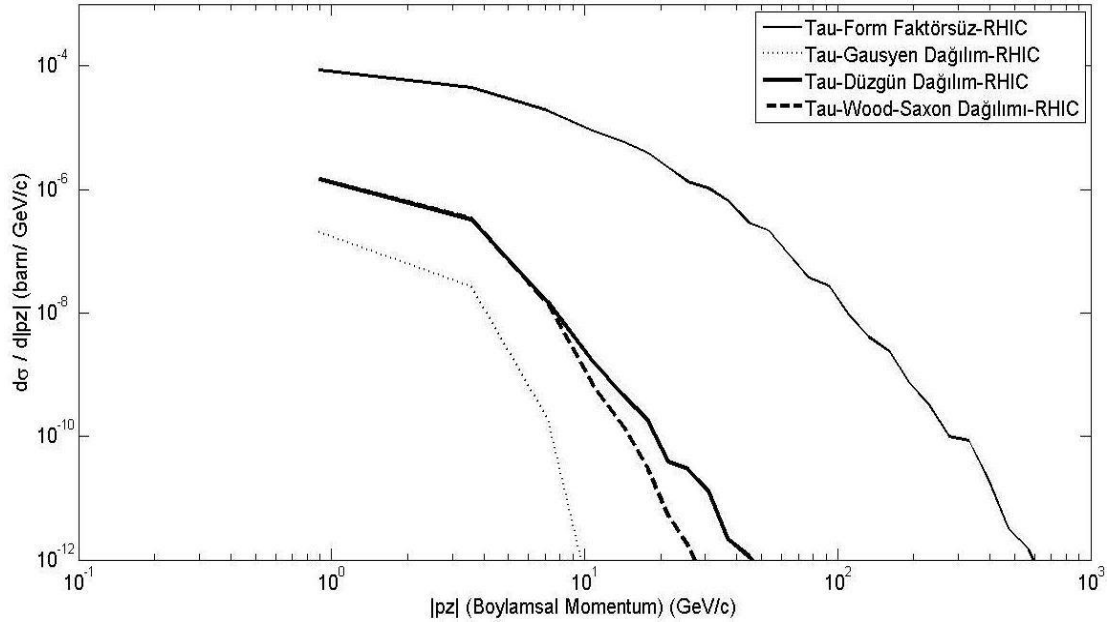
Şekil 6.2: RHIC enerjisinde, tau çifti parçacıkları tesir kesitinin, hareketi doğrultusuna dik bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.

Şekil 6.2’de, dik momentumun fonksiyonu olarak üretilen tau çiftlerinin diferansiyel tesir kesiti verilmiştir. Grafikte, ağır iyonların çarpışma doğrultusunun dik bileşenine saçılan tau çifti parçacıklarının dağılımı gösterilmiştir. Bir önceki grafiğin aksine, burada tesir kesitinin daha hızlı azaldığını ve yüksek enerjili parçacıkların oluşabilme olasılığının daha düşük olduğunu gözlemleyebiliriz. Grafik 6.1’de form faktör hesaba katılmadan çizilen eğrinin, çok küçükte olsa yaklaşık 10^3 MeV mertebesinde enerjiye sahip tau çiftlerinin oluşabilecek olmasını öngörürken, şekil 6.2’de bu değerde parçacık üretimi olmamaktadır. Diferansiyel tesir kesitinde aynı hızlı azalma, form faktörleri etkisi ile çizdirilen diğer eğriler için de söylenebilir.

Şekil 6.3’te ise, boylamsal momentumun fonksiyonu olarak üretilen tau çiftlerinin diferansiyel tesir kesiti verilmiştir. Dikkatli bakılacak olursa grafiğin, şekil 6.2’de ki grafiğe göre, şekil 6.1’de gösterilen grafik ile daha benzer olduğu görülür. Bunun sebebi denklem 6.1’de gösterilen eşitlik doğrultusunda, üretilen tau çiftlerinin enerjisinin büyük kısmını çarpışma doğrultusuna saçılan tau çiftlerinin

oluşturmasıdır. Grafikte diferansiyel tesir kesitinin, tau çiftinin hareketi doğrultusundaki bileşenine ait momentumuna göre daha yavaş azaldığı görülür.

Form faktörlerinin tesir kesiti üzerine etkisine bakılacak olursa, grafikte en hızlı azalmanın Gausyen form faktör için çizdirilen eğride olduğunu, Wood-Saxon ve Düzgün dağılımına sahip çekirdeğin tau çiftlerinin diferansiyel tesir kesiti üzerine yaklaşık olarak aynı oranda etki ettiği görülür.

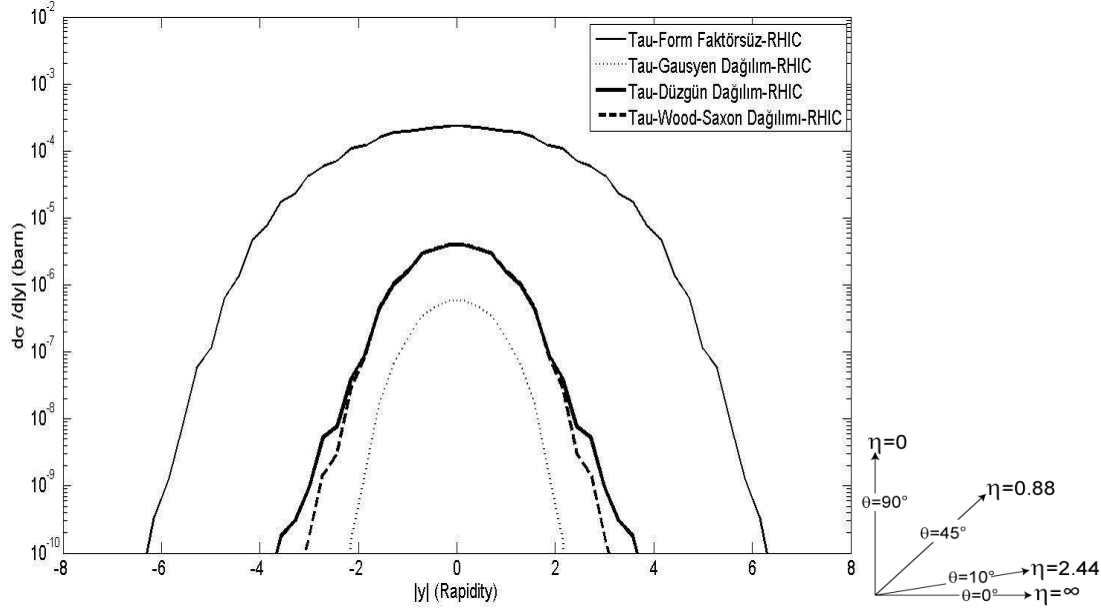


Şekil 6.3: RHIC enerjisinde, tau çifti parçacıkları tesir kesitinin, hareketi doğrultusundaki bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.

Sonuç olarak her form faktörünün, diferansiyel tesir kesitini ve yüksek enerjiye sahip parçacık üretimini azalttığı gözlenir. Wood-Saxon yük dağılımı gerçeğe en yakın dağılım olarak kabul edilmesi ve form faktörünün hesaba katılması ile diferansiyel tesir kesitinde oluşan azalma, parçacık üretiminde form faktörünün teorik olarak hesaplanması gerekliliğini ve önemini göstermektedir.

Şekil 6.4' te gösterilen grafik, üretilen tau çiftlerinin diferansiyel tesir kesitlerinin rapidity'e ve form faktörlerine göre değişimini göstermektedir. Rapidity daha önceden de söylenildiği gibi, üretilen parçacıkların yayılma doğrultusu hakkında bilgi vermesi ve Lorentz dönüşümleri altında simetrik olması (Ek C'de gösterilmiştir) sebebi ile hem deneysel hem de teorik çalışmalar için büyük önem teşkil etmektedir. Grafiğin yatay eksenini simetrik olarak dağılım göstermektedir, bunun sebebi üretilen parçacıkların simetrik olarak yukarı ve aşağı saçılmasından

kaynaklanmaktadır. Rapidity değerinin sıfır olması, denklem (6.2)'de görüleceği üzere p_z 'nin yani üretilen tau çiftlerinin çarpışma doğrultusundaki momentumlarının, üretilen parçacıkların enerjisine yani p_0 'a göre çok küçük olmasının sonucudur.



Şekil 6.4: RHIC enerjisinde, tau çifti parçacıklarının hızlılığın (rapidity) fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesiti üzerine form faktörlerinin etkisi.

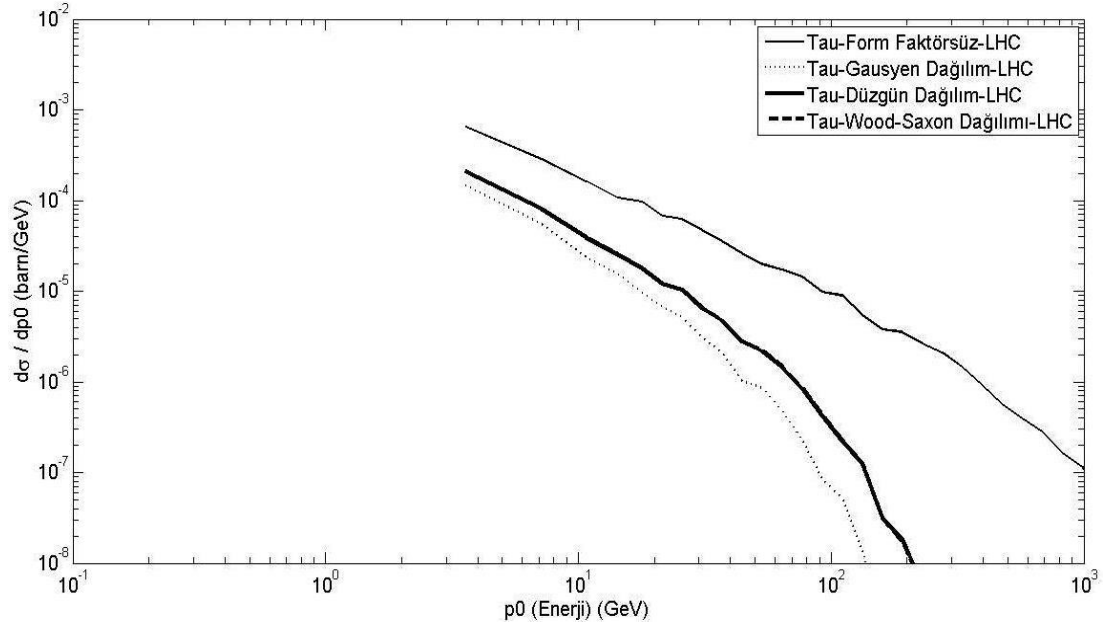
Ancak deneysel olarak saçılan parçacıkların enerjsinin ve momentumlarının ölçülmesi zor olabilmektedir, bu sebeple daha kolay bir değer olan pseudorapidity (η) tanımlanmıştır.

$$\eta = -\ln \tan \frac{\theta}{2} \quad (6.3)$$

Pseudorapidity, yüksek enerjili çarpışmalar sonucu üretilen parçacıkların, çarpışma doğrultusundan ne kadar saçıldığını belirler ve yüksek enerjili parçacıklar için rapidity değerine yaklaşık olarak eşittir. [14]

Denklem (6.3)'e bakılırsa pseudorapidity'nin, yani yüksek enerjili parçacıklar için rapidity değerinin sıfır olması için θ açısının 90° olması gerekir, benzer şekilde $\theta = 0^\circ$, rapidity değerinin $\pm \infty$ olması sonucunda bulunur. Grafikte görüleceği üzere rapidity değeri sıfır iken, üretilen tau çiftlerinin önemli bir kısmı çarpışma doğrultusuna dik yönde saçılmışlardır. Form faktörü etki etmiyor iken, rapidity 2 değerinden sonra diferansiyel tesir kesiti azalmaya başlamıştır. Rapidity değerinin

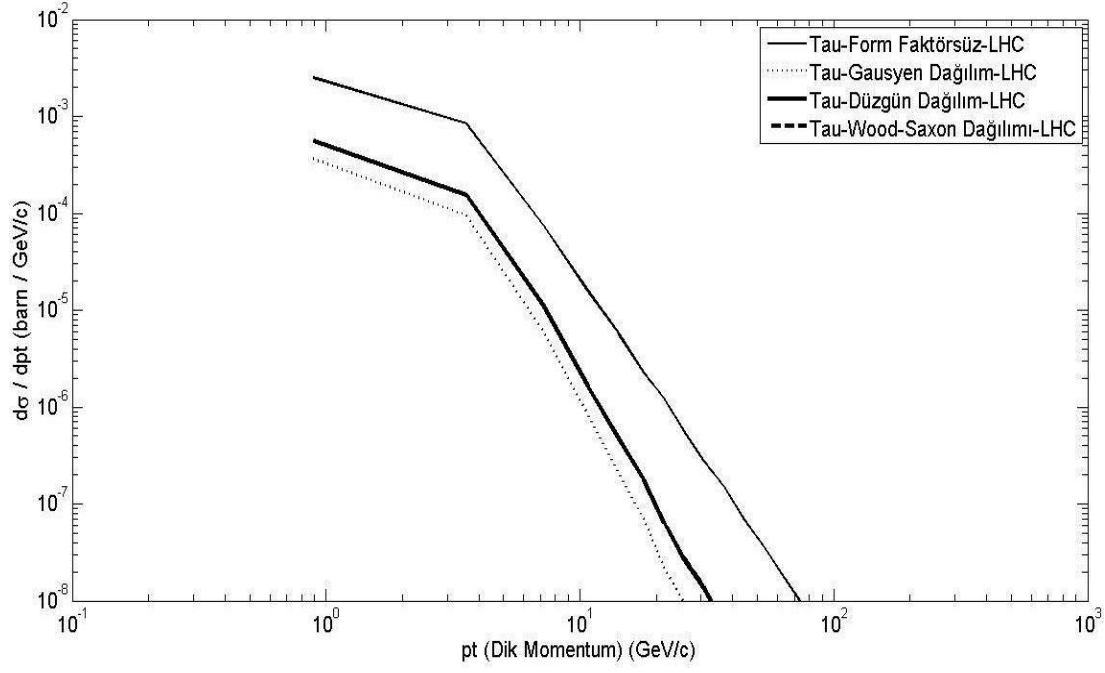
2.44 olmasının anlamı, üretilen parçacıkların yaklaşık 10° lik açı ile saçılmasıdır. Rapidity 1 değerini ise saçılma açısının 45° oluğu anlamını taşımaktadır. Sonuç olarak form faktör etki etmeden RHIC enerjisinde üretilen parçacıkların büyük bir çoğunluğu 45° dereceden daha küçük bir açı ile saçılmışlardır. Form faktörlerinin etki etmesi ile üretilen parçacıkların saçılma açısı daha da büyümekte olup, üretilen tau çiftlerinin büyük kısmı 45° dereceden daha büyük açılarla saçılmaktadır.



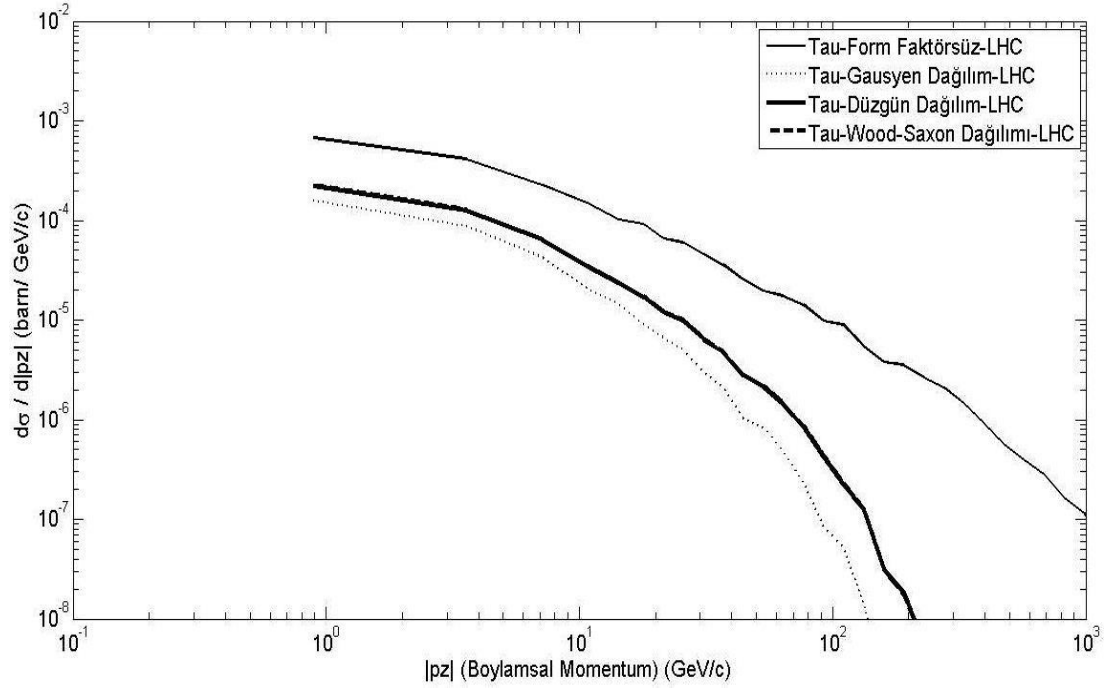
Şekil 6.5: LHC enerjisinde, tau çifti parçacıkları tesir kesitinin enerjisine göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.

Şekil 6.5'te gösterilen grafikte ise, 3400 GeV 'de $Pb + Pb$ çekirdeklerinin çarpıştırılması sonucu oluşan tau çiftinin enerjinin fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesitinin enerjiye göre değişimi verilmiştir. Şekil 6.1'de yapılan yorumla bu grafik içinde geçerli olup aralarındaki fark, LHC enerjisinde çarpıştırılan iyonlar sonucu oluşan parçacıkların tesir kesitlerinin, her form faktör için yaklaşık olarak 10 kat arttığı ve bununla birlikte üretilen parçacıkların enerjilerinin de daha fazla olduğudur. Şekil 6.6, şekil 6.7 ve şekil 6.8'de, RHIC enerjisinde gösterilen grafiklere ek olarak, LHC enerjisinde üretilen parçacıkların tesir kesitinin, RHIC enerjisinde üretilen parçacıklardan en az 10 kat daha fazla olduğu sonucuna varılır.

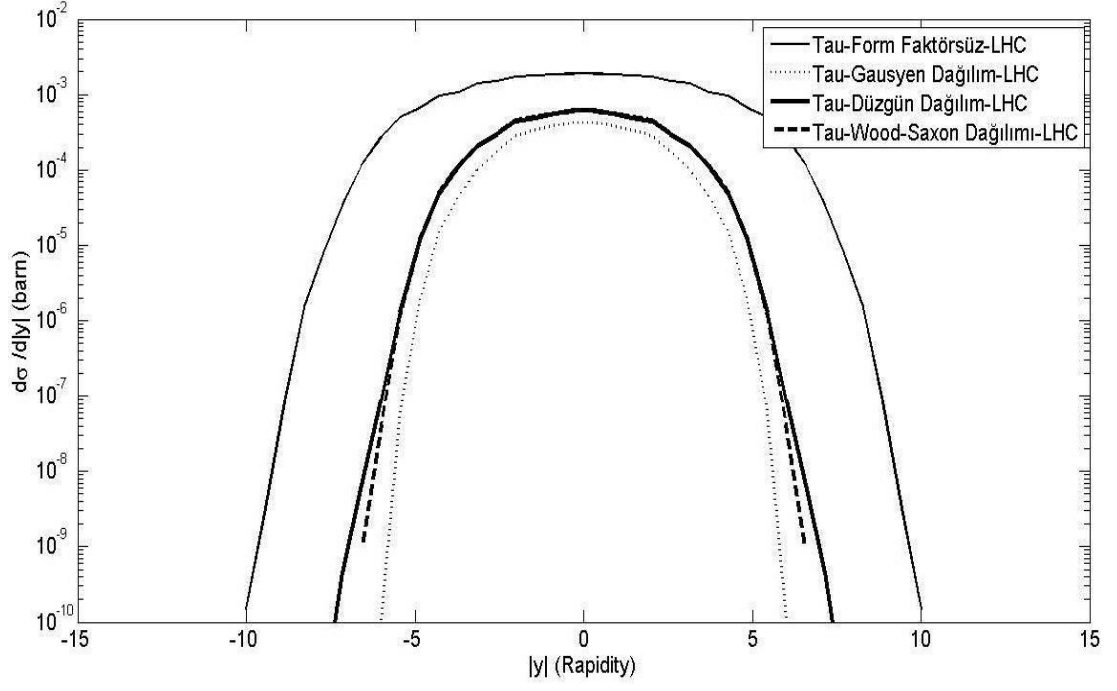
Tau çifti parçacığının RHIC ve LHC enerjileri için, diferansiyel tesir kesitinin ayrı ayrı p_0 , pt , p_z ve rapidity'e göre değişimini gösteren grafikler aynı çatı altında toplanırsa, ağır iyonların çarpıştırılma enerjilerinin ve çarpıştırılan çekirdeklerin farklılığının, parçacık üretimi üzerindeki etkiler gözlenmiş olur.



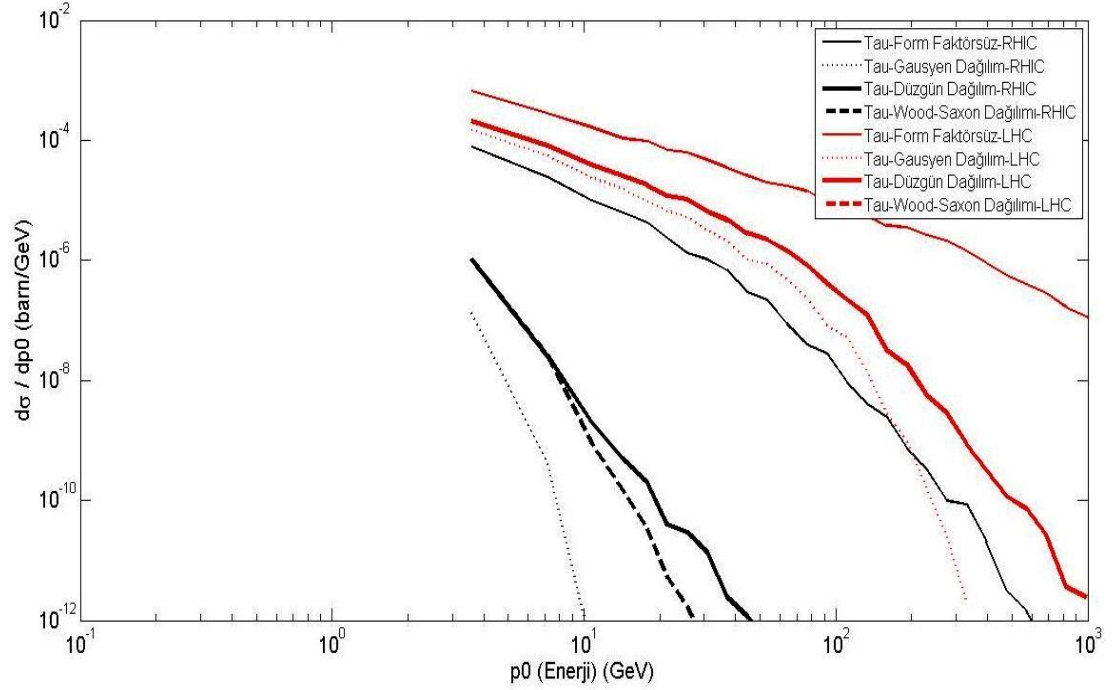
Şekil 6.6: LHC enerjisinde, tau çifti parçacıkları tesir kesitinin, hareketi doğrultusuna dik bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.



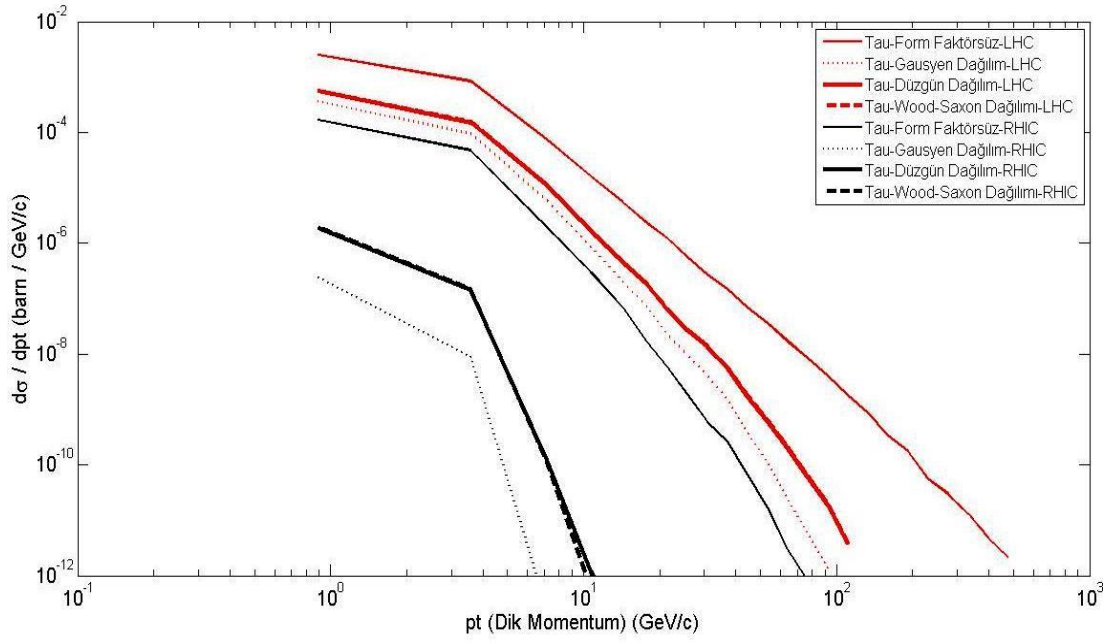
Şekil 6.7: LHC enerjisinde, tau çifti parçacıkları tesir kesitinin, hareketi doğrultusundaki bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.



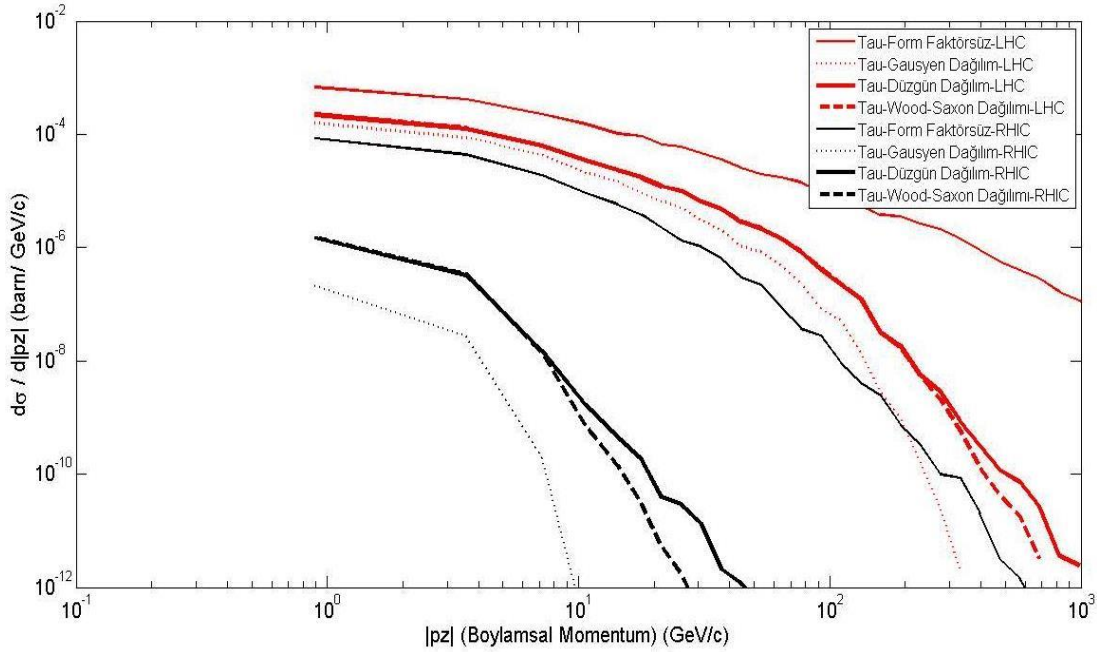
Şekil 6.8: LHC enerjisinde, tau çifti parçacıklarının hızlılığın (rapidity) fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesiti üzerine form faktörlerinin etkisi.



Şekil 6.9: LHC ve RHIC enerjilerinde, tau çifti parçacıkları tesir kesitinin enerjisine göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.

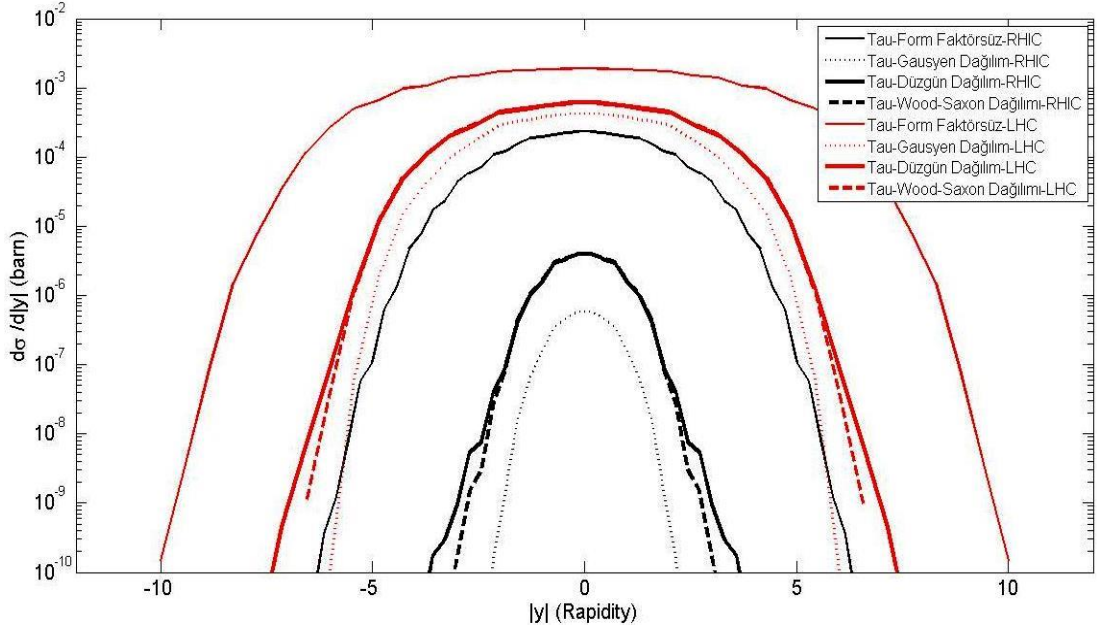


Şekil 6.10: LHC ve RHIC enerjilerinde, tau çifti parçacıkları tesir kesitinin, hareketi doğrultusuna dik bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.



Şekil 6.11: LHC ve RHIC enerjilerinde, tau çifti parçacıkları tesir kesitinin, hareketi doğrultusundaki bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.

Şekil 6.9, 6.10 ve 6.11’de görüldüğü üzere form faktörlerin etkisi ile hesaplanıp çizdirilen eğrilerin, ağır iyonların çarpıştırılma enerjilerinin 34 katına çıkarılması ile, parçacık üretilme olasılığı yaklaşık 10^2 katına çıkmıştır.

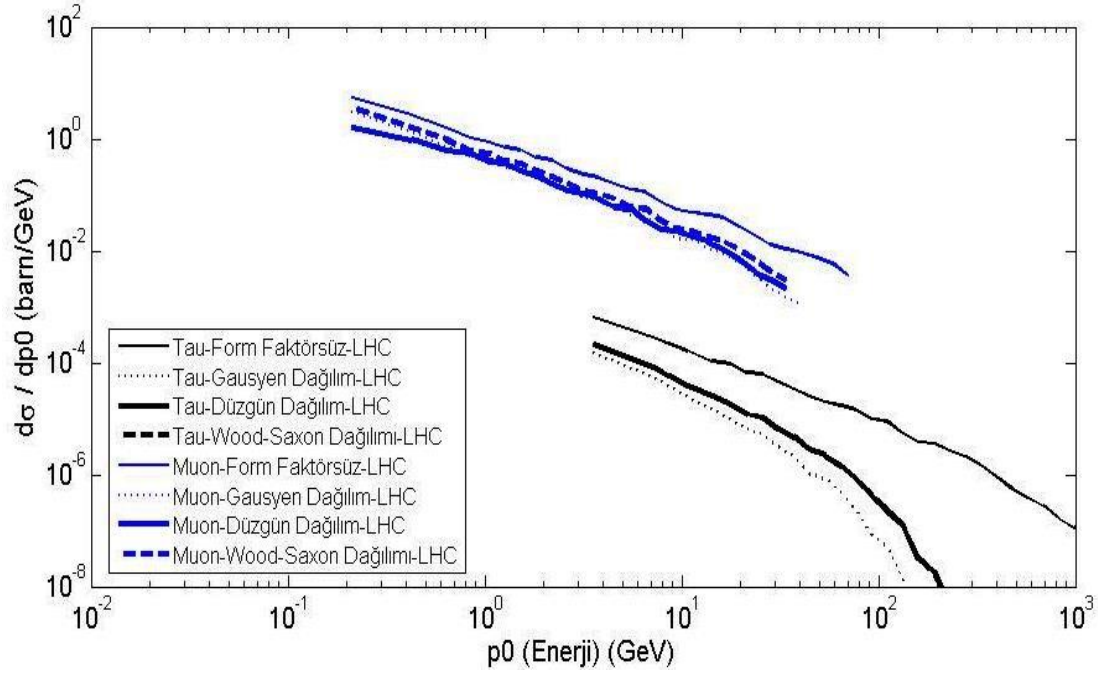


Şekil 6.12: LHC ve RHIC enerjilerinde, tau çifti parçacıklarının hızlılığın (rapidity) fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesiti üzerine form faktörlerinin etkisi.

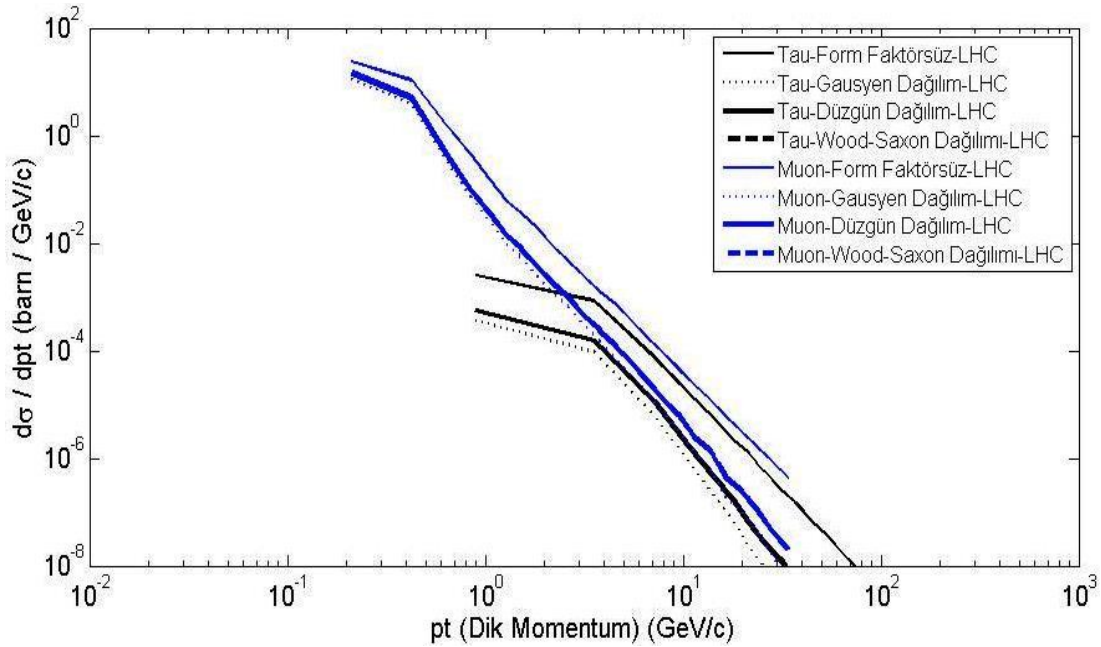
Şekil 6.12’ye bakılacak olursa, form faktör etkisi olmadan LHC enerjisinde üretilen parçacıkların büyük kısmının 10° den daha küçük açılar ile saçıldığı görülür. Bu durum RHIC enerjisinde üretilen parçacıkların saçılma açısından çok daha küçüktür. Görüleceği üzere ağır iyonların hızlandırılma enerjilerinin, parçacık üretim olasılığını arttırması dışında ayrıca üretilen parçacıkların çarpışma doğrultusuna daha yakın açılarla saçılmalarına sebep olmaktadır. Aynı durum form faktörlerin etkisi ile çizdirilen eğrilerde görülmekte olup, üretilen parçacıkların saçılma açıları azalmaktadır.

LHC enerjisinde üretilen tau-anti tau çifti grafiklerinin, $Au + Au$ ağır iyonlarının LHC enerjisinde çarpıştırılması sonucu üretilen müon-anti müon çiftlerinin grafikleri ile karşılaştırılması, üretilen parçacığın kütlesinin, parçacık tesir kesiti üzerindeki etkisini göstermesi açısından önem taşımaktadır. Şekil 6.13, 6.14 ve 6.15’e bakılırsa, müon çifti tesir kesitinin, tau çifti tesir kesitinden yaklaşık 10^4 kat daha fazla olduğu gözlenir. Bunun nedeni tau parçacığının, müon parçacığından 15 kat daha ağır

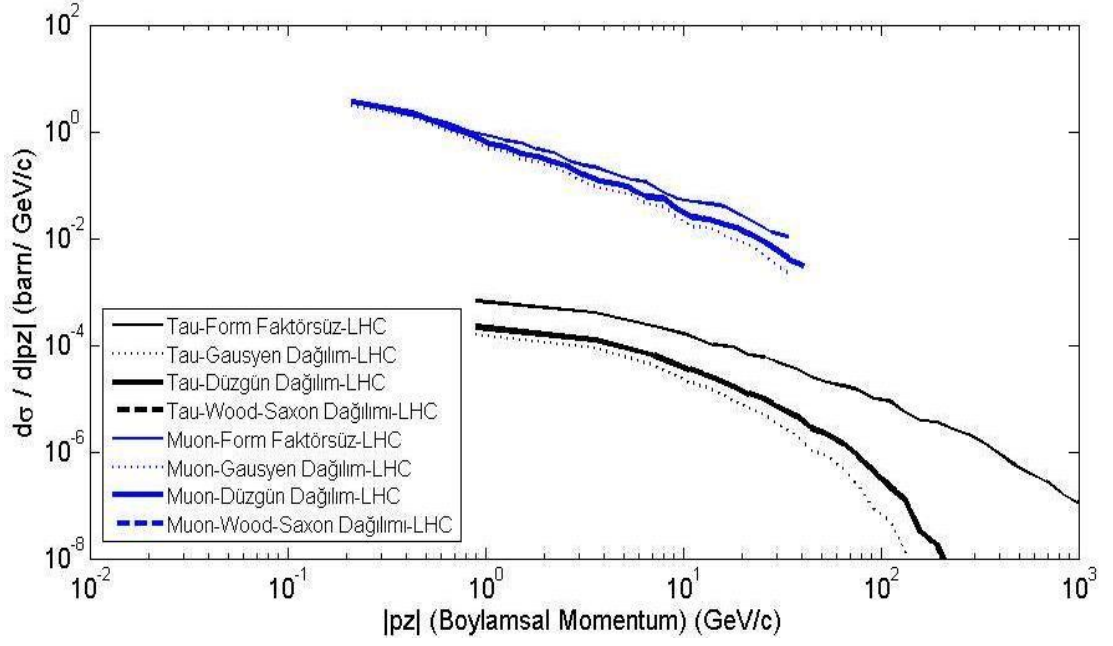
olmasıdır. Sonuç olarak üretilmek istenen parçacıkların kütlesi büyüdükçe, üretilme olasılıkları da hızlı bir şekilde azalmaktadır.



Şekil 6.13: LHC enerjisinde, tau ve muon çifti parçacıklarının tesir kesitinin enerjisine göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.

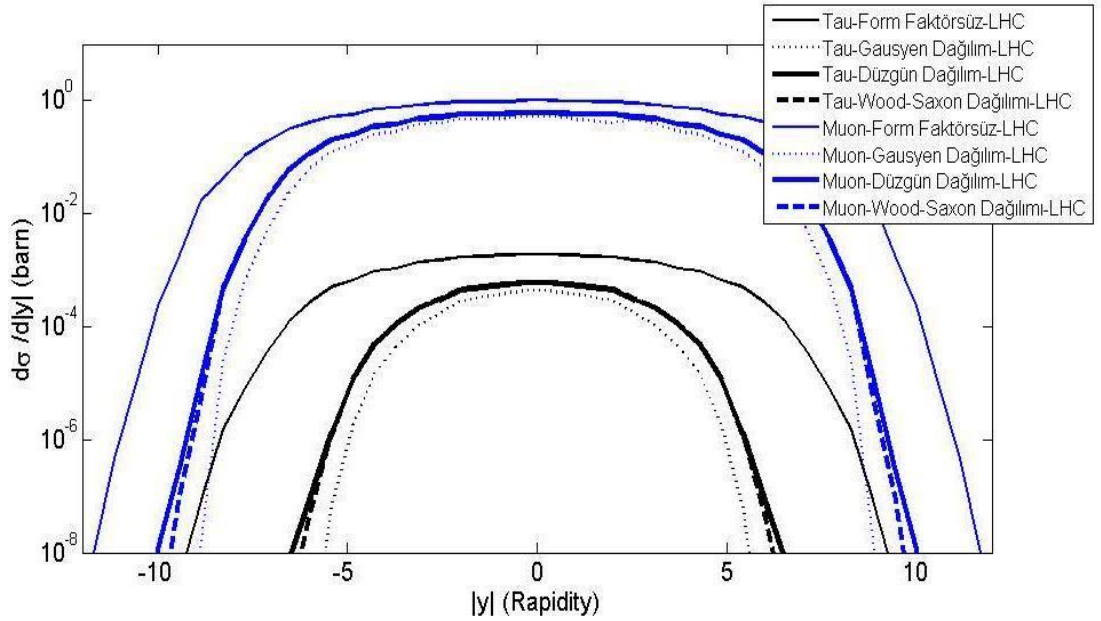


Şekil 6.14: LHC enerjisinde, tau ve muon çifti parçacıklarının tesir kesitinin, hareketi doğrultusuna dik bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.



Şekil 6.15: LHC enerjisinde, tau ve muon çifti parçacıklarının tesir kesitinin, hareketi doğrultusundaki bileşenine ait momentumuna göre değişimi üzerine form faktörlerinin etkisi.

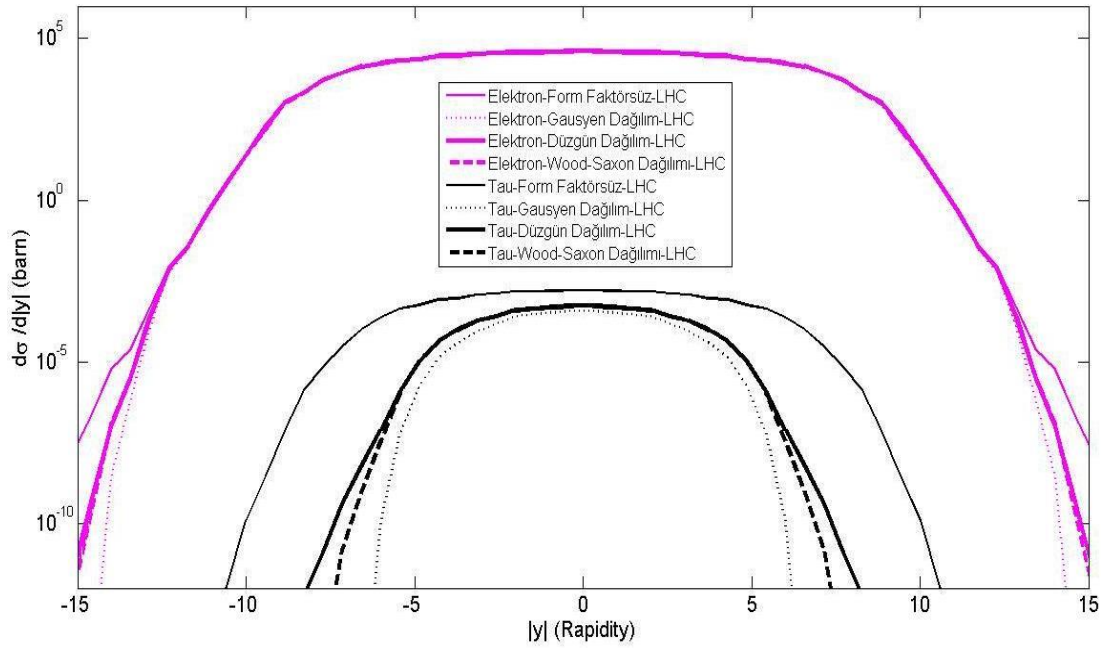
Aynı durum, LHC enerjisinde üretilen tau ve müon çiftinin rapidity grafiğinde de beklenmekte olup, müon çifti diferansiyel tesir kesitinin, tau çifti diferansiyel tesir kesitinden yaklaşık 10^4 kat daha fazla olduğu gözlenir. Müon çifti için çizdirilen grafiklerin verileri [15] numaralı kaynaktan alınmıştır.



Şekil 6.16: LHC enerjisinde, tau ve muon çifti parçacıklarının hızlılığın (rapidity) fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesiti üzerine form faktörlerinin etkisi.

Ayrıca, üretilen muon-anti muon çiftlerinin büyük kısmının saçılma açısının, tau-anti tau çiftlerinin saçılma açısından daha küçük olduğu görülmektedir.

Üretilen parçacıkların tesir kesitinin, kütleye bağlılığının daha iyi görülmesi açısından, LHC enerjisinde yine $Au + Au$ ağır iyonlarının çarpıştırılması sonucu üretilen ve tau parçacığından yaklaşık 3500 kat daha hafif olan elektron-pozitron parçacık çifti için sadece rapidity grafiği çizilmiştir ve tau-anti tau ile aynı grafikte gösterilmiştir.



Şekil 6.17: LHC enerjisinde, tau ve elektron çifti parçacıklarının hızlılığın (rapidity) fonksiyonu olarak diferansiyel tesir kesiti üzerine form faktörlerinin etkisi.

Şekil 6.17'ye bakılırsa, elektron-pozitron çifti diferansiyel tesir kesitinin rapidity'e bağlı grafiğinde, tesir kesiti ile tau-anti tau çiftinin diferansiyel tesir kesiti arasında yaklaşık 10^8 kat fark olduğu görülür. Benzer şekilde, elektron-pozitron çiftlerinin, tau-anti tau çiftlerine göre, çok büyük çoğunluğunun yaklaşık 10° den çok çok daha küçük açı ile yanı tau çiftlerine göre daha fazla saçıldığı görülmektedir.

7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

RHIC ve LHC enerjilerinde hızlandırılan altın atomlarının çevresel çarpışmaları sonucu, oluşan elektromanyetik alandan parçacık üretimi tesir kesiti, ve üretilen tau çiftleri için çeşitli form faktörleri hesaba katılarak elde edilen tesir kesiti tam olarak hesaplanmıştır. FORTRAN kodları kullanılarak hesaplanan tesir kesitlerinin, üretilen parçacıkların enerji ve momentum değişimlerine göre sırasıyla Gausyen, Düzgün ve Wood-Saxon çekirdek modelleri sonucu elde edilen form faktörleri eklenerek MATLAB’da grafikleri çizdirilmiştir. Elde edilen grafikler, müon-anti müon ve elektron pozitron çiftleri için hesaplanan ve çizdirilen diğer grafikler ile karşılaştırılmıştır.

Form faktörlerin etkisi ile üretilen parçacıkların tesir kesitlerinin, form faktörü hesaba katılmadan bulunan tesir kesiti değerlerinden çok daha küçük olduğu sonucuna varılmıştır. Tesir kesitlerinde en hızlı azalma, Gausyen dağılıma sahip çekirdek için bulunmuştur. Wood-Saxon ve Düzgün dağılıma sahip çekirdekler için ise yaklaşık olarak benzer değer elde edilmiştir. Bunun önemi, çekirdek veya çekirdekten daha küçük boyutlarda parçacık üretimi için, tesir kesiti hesaplamalarında form faktörlerinin eklenmesi, daha gerçekçi sonuçlar verecek olmasıdır. Ayrıca ağır iyonların çarpıştırılma enerjilerinin ve üretilen parçacık çiftlerinin kütesinin, gerek form faktörü etkisi ile gerek form faktörü hesaba katılmadan elde edilen tesir kesiti değerlerinin önemli ölçüde değişimine neden olmaktadır.

Grafikler diferansiyel tesir kesitinin ayrı ayrı, üretilen tau-anti tau parçacık çiftinin enerjisine, enine momentumuna ve boyuna momentumuna göre değişimini göstermektedirler. LHC enerjisinde üretilen tau-anti tau çiftinin enerjisine bağlı diferansiyel tesir kesitinin, RHIC enerjisinde üretilen çiftlerden yaklaşık 10^2 kat daha fazla olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca, LHC enerjisinde çarpıştırılan ağır iyonlardan daha yüksek enerjide tau-anti tau çifti üretimi gözlenmiştir. Aynı şekilde diferansiyel tesir kesitinin üretilen tau çiftlerinin enine ve boyuna momentumuna göre değişim grafiklerinde de gözlenmekte olup, parçacık çiftlerinin üretildiği

enerjinin, diferansiyel tesir kesiti üzerindeki etkisi görülmektedir. Elde edilen bir diğer sonuç form faktörlerinin, tau çifti için çizdirilen tüm grafiklerde diferansiyel tesir kesitinde yaklaşık 10 kat azalmaya sebep olmasıdır.

Tau-anti tau çifti için çizdirilen grafikler, LHC enerjisinde altın atomlarının çarpıştırılması sonucu oluşan muon-anti muon çiftlerinin grafikleri ile karşılaştırılmıştır. Grafiklerden elde edilen sonuç tau çifti diferansiyel tesir kesitinin, muon çifti diferansiyel tesir kesitinden form faktörlerinden bağımsız olarak yaklaşık olarak 10^5 kat daha az olmasıdır.

Ayrıca benzer olarak, tau-anti tau çifti için çizdirilen diferansiyel tesir kesitinin rapiditye göre değişim grafiği, LHC enerjisinde altın atomlarının çarpıştırılması sonucu oluşan elektron pozitron çiftlerinin rapidity grafiği ile karşılaştırılmıştır. Kütlesi tau parçacığına göre 3500 kat daha az olan elektron pozitron çiftinin, momentum uzayında çarpıştırılan altın ve kurşun atomlarının çarpıştırılma doğrultusundan tau çiftine göre daha büyük açılarla saçıldığı gözlenmiştir.

Diferansiyel tesir kesitindeki değişim dışında ayrıca üretilen parçacıkların saçılma açılarında önemli değişimler meydana gelmiştir. Üretilen parçacıkların kütesinin, meydana gelen bu değişimlere neden olduğu gözlenmektedir.

Ayrıca elde ettiğimiz tesir kesiti değerleri, diğer makalelerde hesaplanan tesir kesiti değerleri ile karşılaştırılmış olup sonuçların oldukça benzer olduğu görülmüştür. Muon-anti muon tesir kesitlerinin uyumluluğu aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

Çizelge 7.1: LHC enerjisinde, Wood-Saxon form faktörünün etkisi ile hesaplanmış müon çifti tesir kesitinin diğer teorik hesaplamalar ile karşılaştırılması.

	$\sigma^{\mu^+\mu^-} (barn) [15]$	$\sigma^{\mu^+\mu^-} (barn) [12]$	$\sigma^{\mu^+\mu^-} (barn) [16]$
LHC	2.7265	2.6	2.46

Çizelge 7.2: RHIC enerjisinde, Wood-Saxon form faktörünün etkisi ile hesaplanmış müon çifti tesir kesitinin, diğer teorik hesaplamalar ile karşılaştırılması.

	$\sigma^{\mu^+\mu^-} (barn) [15]$	$\sigma^{\mu^+\mu^-} (barn) [12]$	$\sigma^{\mu^+\mu^-} (barn) [16]$	$\sigma^{\mu^+\mu^-} (barn) [4]$
RHIC	0.208	0.23	0.209	0.2

Çizelge 7.1’de, LHC enerjisi için çeşitli kaynaklardan alınmış veriler ile programımızda hesapladığımız müon tesir kesiti değerleri karşılaştırılmıştır ve kendi

hesaplamalarımızın tutarlı sonuçlar verdiği görülmüştür. Aynı karşılaştırma Çizelge 7.2’de RHIC enerjisi için yapılmış olup, tesir kesiti sonuçlarımızın uyumluluğu gözlenmiştir. Ayrıca aynı karşılaştırmalar tau çifti tesir kesiti için de yapılmıştır.

Çizelge 7.3: RHIC enerjisinde, form faktörsüz ve Wood-Saxon form faktörünün etkisi ile hesaplanmış tau çifti tesir kesitinin, diğer teorik hesaplama ile karşılaştırılması.

	$\sigma^{\tau^+\tau^-} (barn)$	$\sigma^{\tau^+\tau^-} (barn) [4]$
Form Faktörsüz	4.7514×10^{-4}	2.7×10^{-3}
Wood-Saxon Form Faktör	3.9150×10^{-6}	2.8×10^{-6}

Literatürde sadece RHIC enerjisi için tau çifti tesir kesiti hesaplanmış olup, makalenin yayınlandığı tarih göz önünde bulundurulursa, tau çifti için hesapladığımız tesir kesiti değerinin de tutarlılığı görülür.

Sonuç olarak, foton-foton etkileşmesi sonucu ağır lepton üretimi tesir kesitinin ikinci derece pertürbasyon terimleri hesaplanmış olup, form faktörlerinin de hesaplanan tau- anti tau tesir kesitine ilave edilmesi gerekliliğinin nedenleri incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] **Yılmaz Şengül, M.** (2011). Rölativistik Ağır İyon Çarpışmaları Sonucu Parçacık Üretimi, I.T.U., Ph.D Thesis
- [2] **Mandl, F. ve Shaw, G.** (1984). Quantum Field Theory (Jhon Wiley&Sons)
- [3] **Aitchison, I. J. R. ve Hey A. J. G.** (1989). Gauge Theories In Particle Physics
- [4] **Bottcher, C. ve Strayer, M. R.** (1989). Coherent Electromagnetic Production Of Mu And Tau Lepton Pairs İn Relativistic Heavy-Ion Collisions
- [5] **Kovankaya G.** (2005). Ağır İyonların Çarpıştırılması Ve Elektron-Pozitron Çifti Oluşumu, Master Thesis
- [6] **Maximon, L. C. ve Schrack, R. A.** (1965). The Form Factor of the Fermi Model Spatial Distribution
- [7] **Foster, K.** (2011). Electron Scattering: Form Factors and Nuclear Shapes
- [8] **Magnus ve Oberhettinger** (1954). Functions of Mathematical Phycsis, p. 8.
- [9] **Elton, L. R. B.** (1961). Nuclear Sizes
- [10] **Povl, B. ve Rith, K. ve Scholz, C. ve Zetsche, F.** (2008). Particles and Nuclei
- [11] **Gustavsson, M. G. H. ve Martensson-Pendrill, A. M.** (1998). ‘Four Decades Of Hyperfine Anomalies’. Advences of Quantum Chemistry
- [12] **Hencken, K. ve Kuraev E. A. ve Serbo V. G.** (2007). Exclusive And Inclusive Muon Pair Production İn Collisions Of Relativistic Nuclei
- [13] **Ivanov, D. ve Melnikov K.** (1998). Lepton Pair Production By a High Energy Photon İn a Strong Electromagnetic Field
- [14] **Daw, E.** (2012). Rapidity and Pseudorapidity
- [15] **Gözlüklüoğlu Karakuş, N.** (2014). Yüksek Rölativistik Hızlarda Ağır İyon Çarpışmaları Sonucu Müon Çifti Üretimi, Master Thesis (I.T.U)
- [16] **Jentschura, U. D. ve Serbo, V. G.** (2009). Nuclear form factor, validity of the equivalent photon approximation and Coulomb corrections to muon pair production in photon–nucleus and nucleus–nucleus collisions

EKLER

EK A: Form Faktörünün, Küresel Koordinatlarda Yazımı

EK B: Form Faktörünün Seriyeye Açılması

EK C: Rapidity'nin Lorentz Dönüşümleri Altında İncelenmesi

EK A

Form faktörünün, yük dağılımının Fourier dönüşümü sonucu yazıldığı daha önceki bölümde gösterilmiştir.

$$F(q^2) = \frac{\hbar}{Ze} \int \rho(r) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3r \quad (\text{A.1})$$

Bu ifade küresel koordinatlarda yazılırsa,

$$\rho(\vec{r}') = \rho(r') \quad (\text{A.2})$$

ve

$$d^3\vec{r}' = r'^2 d(\cos(\theta)) d\phi dr' \quad (\text{A.3})$$

dönüşümleri altında denklemimiz,

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos(\phi)) \int_0^\infty e^{\frac{iqr \cos(\theta)}{\hbar}} \rho(r') dr' \\ &= 2\pi \int_0^\infty \left[\frac{\hbar}{iqr'} e^{\frac{iqr \cos(\theta)}{\hbar}} \right]_{-1}^1 r'^2 \rho(r') dr' \\ &= 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin(qr' / \hbar)}{qr' / \hbar} r'^2 \rho(r') dr' \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

olarak bulunur [7].

EK B

Form faktörünün seriye açıldığında, denklem (5.9)'da,

$$F(q^2) = 1 - \frac{q^2}{3!} \langle r^2 \rangle + \frac{q^4}{5!} \langle r^4 \rangle - \dots$$

şeklinde yazıldığını göstermiştik. İlk terimi hesaplamak istersek,

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = -6 \frac{\partial F}{\partial (q^2)} \Big|_{q=0} \quad (\text{B.1})$$

öncelikle form faktörünün türevini alalım.

$$F(q^2) = \frac{4\pi\rho_0}{q} \int_0^\infty \frac{r \sin(qr) dr}{1 + e^{((r-R)/a)}} = -\frac{4\pi\rho_0}{q} \cdot \text{Re} \frac{\partial}{\partial q} \int_0^\infty \frac{e^{iqr} dr}{1 + e^{((r-R)/a)}} \quad (\text{B.2})$$

Burada aşağıdaki değişken dönüşümlerini yaparsak,

$$x = e^{-r/a}, \quad b = e^{-R/a}, \quad \beta = qa \quad (\text{B.3})$$

form faktörünü,

$$F(q^2) = -\frac{4\pi\rho_0 a^3}{b\beta} \text{Re} \frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^1 x^{-i\beta} (1 + b^{-1}x) dx \quad (\text{B.4})$$

elde ederiz. Görüldüğü üzere form faktörünün denklem (B.4)'teki hali, denklem (B.5)'te bulunan hipergeometrik fonksiyon formuna benzemektedir [8].

$${}_2F_1(a, b; R; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(R-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{R-b-1} (1-zt)^{-a} dt \quad (\text{B.5})$$

Gerekli dönüşümler sonucunda, [8]

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; R; z) &= \frac{\Gamma(R)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(R-a)} (-z)^{-a} {}_2F_1(a, 1-R+a; 1-b+a; z^{-1}) \\ &+ \frac{\Gamma(R)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(R-b)} (-z)^{-b} {}_2F_1(b, 1-R+b; 1-a+b; z^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

form faktörü aşağıdaki gibi bulunur.

$$F(q^2) = -\frac{4\pi\rho_0 a^3}{\beta} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -\frac{1}{i\beta^2} F_1(1, i\beta; 1+i\beta; -b) + \frac{\pi b^{-i\beta}}{i \sinh \pi\beta} \right\} \quad (\text{B.7})$$

Hipergeometrik fonksiyonu seriye açıp yerine yazarsak form faktörü,

$$F(q^2) = \frac{4\pi^2 \rho_0 a^3}{(qa)^2 \sinh^2(\pi qa)} [\pi qa \cosh(\pi qa) \sin(qR) - qR \cos(qR) \sinh(\pi qa)] \\ + 8\pi\rho_0 a^3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{ne^{-nR/a}}{[n^2 + (qa)^2]^2} \quad (\text{B.8})$$

şeklinde elde edilir, yarıçapın karesinin ortalama değerini almak için önce denklemi sonlu hale getirmeliyiz. O halde denklem (B.8)'nin $q \rightarrow 0$ limitini alırsak, ρ_0 'ı ve $\langle r^2 \rangle$ 'yi buluruz [9].

$$\rho_0 = \left\{ \frac{4\pi R}{3} [(\pi a)^2 + R^2] + 8\pi a^3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{-nR/a}}{n^3} \right\}^{-1} \quad (\text{B.9})$$

$$\langle r^2 \rangle = \rho_0 \left\{ \frac{4\pi R}{3} [(\pi a)^2 + R^2] \left[\frac{7}{5} (\pi a)^2 \frac{3}{5} R^2 \right] + 96\pi a^5 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{-nR/a}}{n^5} \right\} \quad (\text{B.10})$$

Denklem (B.10) hesaplandığında ilk terimlerin düştüğü görülmektedir [7], bu sebeple sonuç olarak yarıçapın karesinin ortalama değeri,

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} \left[1 + \frac{7}{3} \left(\frac{\pi a}{R} \right)^2 \right] R^2 \quad (\text{B.11})$$

ve karekökü,

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3}{5} \left[1 + \frac{7}{3} \left(\frac{\pi a}{R} \right)^2 \right]} R \quad (\text{B.12})$$

olarak bulunur.

EK C

Z eksenini boyunca ilerleyen ağır iyonların çarpıştırılması sonucu oluşan parçacıkların gözlenmesi, z eksenine göre Lorentz dönüşümü altında simetrik olabilmesi ile mümkün olabilmektedir. Denklem (6.2)'de verilen rapidity'nin,

$$E' / c = \gamma(E / c - \beta p_z) \quad (\text{C.1})$$

$$p'_x = p_x \quad (\text{C.2})$$

$$p'_y = p_y \quad (\text{C.3})$$

$$p'_z = \gamma(p_z - \beta E / c) \quad (\text{C.4})$$

Lorentz dönüşümleri altında simetrik olduğunu incelenirse,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\gamma E / c - \beta \gamma p_z + \gamma p_z - \beta \gamma E / c}{\gamma E / c - \beta \gamma p_z - \gamma p_z + \beta \gamma E / c} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\gamma(E / c + p_z) - \beta \gamma(E / c + p_z)}{\gamma(E / c - p_z) + \beta \gamma(E / c - p_z)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E / c + p_z}{E / c - p_z} \frac{\gamma - \beta \gamma}{\gamma + \beta \gamma} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z c}{E - p_z c} \right) + \ln \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$y' = y + \ln \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (\text{C.6})$$

elde edilir, burada $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ Lorentz faktörü olarak tanımlanır [14].

Burada,

$$\ln \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = \tanh^{-1} \left(\tanh \ln \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \tanh^{-1} \left(\frac{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} - \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} + \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}} \right) \\
&= -\tanh^{-1} \beta
\end{aligned} \tag{C.7}$$

şeklinde yazılabilir ve sonuç olarak Lorentz dönüşümleri sonucu rapidity,

$$y' = y - \tanh^{-1} \beta \tag{C.8}$$

elde edilir [14]. Çarpışma sonucunda oluşan üretilen herhangi iki parçacığı düşünülürse, herhangi bir gözlemcinin ölçeceği rapidity ilk parçacık için y_a , ikinci parçacık için ise y_b olacaktır. Başka bir gözlemci ise ilk parçacığın rapidity değerini y'_a , ikinci parçacık için y'_b olarak gözlemleyecektir. Her iki gözlemci için parçacıkların rapidity değerleri arasındaki farkın,

$$y'_a - y'_b = (y_a - \tanh^{-1} \beta) - (y_b - \tanh^{-1} \beta) = y_a - y_b \tag{C.9}$$

birbirlerine eşit olduğu gözlenir ve rapidity değerinin Lorentz dönüşümleri altında simetrik olduğu sonucuna ulaşılır [14].



ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Özge Mercan

Doğum Yeri ve Tarihi: Üsküdar 13/09/1989

Adres: Dr. Kemal Akgüder Caddesi, Ortayol Sokak, Örnek Apartmanı, No:10/8
Bostancı/İSTANBUL

E-Posta: ozgemercan1989@hotmail.com

Lisans: İstanbul Teknik Üniversitesi / Fizik Mühendisliği

Yüksek Lisans: İstanbul Teknik Üniversitesi / Fizik Mühendisliği