



**T. C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YENİ TİP GENİŞLETİLMİŞ ESNEK KÜME İŞLEMLERİ:
TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ KESİŞİM, GAMMA VE YILDIZ
İŞLEMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MURAT SARIALİOĞLU

OCAK

MURAT SARIALIOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OCAK 2024

**YENİ TİP GENİŞLETİLMİŞ ESNEK KÜME İŞLEMLERİ: TÜMLEYENLİ
GENİŞLETİLMİŞ KESİŞİM, GAMMA VE YILDIZ İŞLEMİ**

Murat SARIALIOĞLU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Prof. Dr. Ashhan SEZGİN

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2024

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Murat SARIALIOĞLU tarafından hazırlanan “Yeni Tip Genişletilmiş Esnek Küme İşlemleri: Tümlenli Genişletilmiş Kesişim, Gamma ve Yıldız İşlemi” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç. Dr. Emin AYGÜN

Matematik Anabilim Dalı, Erciyes Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 18 / 01 / 2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Murat SARIALIOĞLU

(Tarih)

YENİ TİP GENİŞLETİLMİŞ ESNEK KÜME İŞLEMLERİ: TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ KESİŞİM, GAMMA VE YILDIZ İŞLEMİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Murat SARIALIOĞLU

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2024

ÖZET

Esnek küme teorisi, belirsizlik içeren problemlerin çözümünde etkili bir matematiksel araç olarak görülmekte, ortaya atıldığından bu yana teorik ve pratik pek çok alanda uygulanmaktadır. Teori için temeli, esnek küme işlemleri oluşturmaktadır. Bu bağlamda, bu tez çalışmasında teoriye katkıda bulunmak amacıyla, tümleyenli genişletilmiş işlem adı verilen yeni esnek küme işlemleri tanımlanmıştır. Tümleyenli genişletilmiş kesişim, tümleyenli genişletilmiş gamma ve tümleyenli genişletilmiş yıldız adı verilen işlemlerin tüm özellikleri detaylı bir şekilde ele alınmış, her bir işlemin diğer esnek küme işlemleri üzerine dağılmasına işlemlerin diğer esnek küme işlemleri ile ilişkisini elde etmek amacıyla bakılmış, sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde tümleyenli genişletilmiş kesişim işleminin klasik cebirde iyi bilinen ve oldukça öneme sahip pek çok cebirsel yapılar oluşturduğu gösterilmiştir. Tez çalışması, altı bölümden oluşmakta olup, ilk bölümünde esnek kümeler ve tezde adı geçen cebirsel yapılar ile ilgili kaynak taraması yapılmıştır. İkinci bölümde, küme işlemleri, esnek kümeler ve bazı cebirsel yapılar ile ilgili temel tanım ve özelliklere yer verilmiştir. Üçüncü, dördüncü ve beşinci bölüm olan ve tezin özgün bölümünü oluşturan bölümlerde sırasıyla, tümleyenli genişletilmiş kesişim, tümleyenli genişletilmiş gamma ve tümleyenli genişletilmiş yıldız işlemlerinin tanımları verilmiş, işlemlerin cebirsel özellikleri incelenmiş, bu yeni esnek küme işlemlerinin diğer esnek küme işlemlere dağılmasına bakılarak hem diğer esnek küme işlemleriyle olan ilişkisi görülmüş, hem de hangi cebirsel yapılar oluşturduğu elde edilmiştir. Ayrıca kesişim işleminin, klasik kümede de var olan bir işlem olması sebebiyle, bu klasik küme işleminin özellikleri, tümleyenli genişletilmiş kesişim işleminin özellikleri ile karşılaştırılmıştır. Hem esnek küme teorisine hem de klasik cebire katkıda bulunacak şekilde, sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde tümleyenli genişletilmiş kesişim işleminin bir sınırlı bir yarı-kafes olduğu, ayrıca tümleyenli genişletilmiş kesişim işleminin diğer esnek küme işlemleri ile birlikte komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halka, komutatif, idempotent, birimli bir hemihalka, Bool Cebiri, De Morgan Cebiri, Kleene Cebiri, Stone Cebiri ve MV-cebiri olduğu gösterilmiştir. Sonuç ve öneriler bölümünde, tezde elde edilen sonuçlar ve önemi tartışılmıştır.

Sayfa Adedi : 206
Anahtar Kelimeler : Esnek kümeler, Tümleyenli genişletilmiş işlemler, Cebirler
Danışman : Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

NEW TYPE OF EXTENDED OPERATIONS OF SOFT SETS: COMPLEMENTARY EXTENDED INTERSECTION, GAMMA AND STAR OPERATION

(M. Sc. Thesis)

Murat SARIALIOĞLU

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2024

ABSTRACT

Soft set theory is seen as an effective mathematical tool in solving problems involving uncertainty, and has been applied in many theoretical and practical areas since its introduction. The basis for the theory is soft set operations. In this context, in this thesis, new kind of soft set operations called complementary extended soft set operations are defined in order to contribute to the theory. All the properties of these operations called complementary extended intersection, complementary extended gamma and complementary extended star, are examined in detail, the distributions of each operations over other soft set operations are investigated in order to obtain the relationship of the operations with other soft set operations and it is observed that the complementary extended intersection operation on a set of fixed parameter set form many well-known and important algebraic structures in classic algebra. The thesis study consists of six sections, and in the first section, a literature review is conducted on soft sets and algebraic structures mentioned in the thesis. In the second part, basic definitions and properties of set operations, soft sets and some algebraic structures are given. In the third, fourth and fifth sections, which constitute the original part of the thesis, the definitions of complementary extended intersection, complementary extended gamma and complementary extended star operations are given, respectively, the algebraic properties of the operations are examined, and by handling the distributions of these new soft set operations over other soft set operations, not only the relationships of these operations with other soft set operations are obtained, but also it is observed what the algebraic structures these operations form. In addition, since the intersection operation is an operation that also exists in the classical set, the properties of this classical set operation are compared with the properties of the complementary extended intersection operation. In a way of contributing to soft set theory and the classical algebra both, it is presented that the complementary extended intersection operation on the set of soft sets with a fixed-parameter set form a bounded semi-lattice, and that the complementary extended intersection operation, along with other soft set operations, are commutative, idempotent, unitary, non-zero semiring, commutative, idempotent, unitary hemiring, Boolean Algebra, De Morgan Algebra, Kleene Algebra, Stone Algebra and MV-algebra. In the conclusion, the results obtained in the thesis and their importance are discussed.

Number of pages : 206

KeyWords : Soft sets, Complementary extended soft set operations, Algebras

Supervisor : Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Gerek çalışmalarım ve gerekse çalışmalarım dışında her konuda destek olan, birlikte çalışmaktan onur duyduğum ve bir danışmanın çok ötesinde bilgi, tecrübe bana kattıklarıyla yolumu aydınlatan değerli danışmanım Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN hocama minnettarım. Hayatım boyunca her zaman yanımda olan desteklerini her an yanımda hissettiğim aileme, kıymetli eşim Özge SARIALIOĞLU'na ve destek olan herkese teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	8
2.1. Kümeler.....	8
2.2. Bazı Cebirsel Yapılar.....	13
2.3. Esnek Kümeler.....	17
3. TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ KESİŞİM İŞLEMİ	25
4. TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ GAMMA İŞLEMİ.....	88
5. TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ YILDIZ İŞLEMİ	143
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	197
KAYNAKLAR	199
ÖZGEÇMİŞ	207

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\forall$	Evrensel niceleyici, her
$\exists$	Varlıksal niceleyici, en az bir
$+$	Artı işlemi
λ	Lamda işlemi
θ	Teta işlemi
$*$	Yıldız işlemi
γ	Gamma işlemi
Δ	Simetrik fark işlemi
E	Parametre kümesi
U	Evrensel küme
$P(U)$	U nun kuvvet kümesi
(F,K)	(F,K) esnek kümesi
$(F, K)^r$	(F,K) esnek kümesinin tümleyeni
$\emptyset_Z$	Z ye göre boş esnek küm
$\emptyset_E$	E ye göre boş esnek küme
U_Z	Z ye göre evrensel küme
U_E	Mutlak esnek küme
$\emptyset_\emptyset$	Boş esnek küme
$S_E(U)$	U üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
$S_Z(U)$	Z kümesi üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi

1. GİRİŞ

Bilimsel bilgi, kabul edilegelen kesinliği ve nesnel keşif yöntemi yüzünden, özünde diğer bilgi çeşitlerinden farklı olarak görülür (James, 2006). Günlük hayatta ise bilimsel bilgi gibi nesnel olmayan, güzel insan, sıcak hava, sıkıcı roman gibi kişiden kişiye değişen öznel kavramlarla karşılaşırız. İnsanlar günlük hayatta karşılaştıkları belirsizlik içeren karmaşık problemleri çözebilmek için zaman içinde değişik çözüm yolları aramışlardır. Ancak bulunan veya var olan yöntemler değişen şartlarda ortaya çıkan yeni karmaşık problemlerin çözümünde farklılık göstermiştir. Belirsizlik içeren durumlarla baş edebilmek için ortaya atılan teoriler arasında en bilinenlerin başında Zadeh (1965)'in ortaya attığı bulanık kümeler teorisi gelmektedir. Bulanık küme üyelik fonksiyonu yoluyla tanımlanır. Hızla gelişen bulanık küme teorisinde, ortaya çıkan yapısal sorunlar insanları yeni yöntem arayışına itmiştir ve üyelik fonksiyonundaki bu yapısal zorluklar Molodtsov (1999) tarafından, bağımsız bir küme teorisi olan esnek küme teorisinin ortaya atılmasıyla sonuçlanmıştır.

Esnek küme ortaya atıldığından bu yana kendine hem teorik hem uygulama pek çok alanda yer bulmuş ve öncülüğünde pek çok yeni çalışmalar literatürde yer bulmuştur. Bunlardan ilki, Maji, Roy ve Biswas (2002) tarafından verilen çok aralık değerli bulanık esnek küme kavramıdır. Maji ve diğerleri (2002) bu kavram için, tümleyen, birleşim, kesişim, ve/veya gibi temel işlemlerini de tanımlamışlardır. Maji, Biswas and Roy (2003) iki esnek kümenin eşitliğini, bir esnek kümenin alt kümesini ve süper kümesini, bir esnek kümenin tümleyenini, ve/veya gibi esnek ikili işlemler ile esnek kümeler için birleşim ve kesişim işlemlerini tanımlamışlardır. Esnek kümeyi ve mutlak esnek kümeyi örneklerle tanımlayarak, esnek küme teorisinde yeni yapılacak olan çalışmaların önünü açmıştır. Pei ve Miao (2005), daha küme teorisine dayalı, esnek alt küme ve iki esnek kümenin kesişimi kavramlarını yeniden tanımlamıştır. Xiao, Chen, Zhong ve Ye (2005) esnek kümeler teorisine dayanan bilgi tablosu hazırlayarak esnek bilgi örüntülerinin bilinirliğinin artması; aynı zamanda farklı tanıma vektörlerine karşılık gelen çözüm yöntemlerini önermişlerdir. Aktaş ve Çağman (2005), öncelikle bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümeler kavramları ve bunların özellikleri üzerinde çalışılmıştır. Mushrif, Sengupta ve Ray (2006), dokuların sınıflandırılmasında esnek küme teorisinin kullanımı önermişlerdir. Aktaş ve Çağman (2007), esnek grup, esnek altgrup ve esnek homomorfizma kavramını ilk defa

literatüre kazandırarak, pek çok esnek cebirsel yapı çalışmalarının önünü açmıştır. Yang (2008), Maji ve diğerleri (2003), çalışmasında belirttiği bazı ifadelerin yanlış olduğunu örneklerle kanıtlamıştır. Sun, Zhang ve Liu (2008), modülleri ve Molodtsov'un esnek küme tanımını kullanarak esnek modüllerin tanımını sunmuş, özelliklerini çalışmıştır. Park, Jun ve Öztürk (2008) esnek cebirsel kavramlar üzerine çalışmalar yapmışlardır. Herawan ve Deris (2010) kaba kümeler ve esnek kümeler arasındaki ara ilişkiyi ortaya çıkarmaya çalışmışlardır. Yang, Lin, Yang, Li ve Yu (2009) aralık değerli bulanık esnek küme kavramını tanımlamıştır. Dağılımlarına bakıldı ve De Morgan ile ilişkisi kanıtlandı. Ali, Feng, Liu, Min, ve Shabir (2009), esnek kümeler için esnek kümelerin kısıtlanmış birleşimi, kısıtlanmış kesişimi, kısıtlanmış farkı ve genişletilmiş kesişim kavramlarını tanımlayarak bu işlemlerin temel özelliklerini ele almışlar ve Maji ve diğerleri (2003), çalışmasındaki yine bir takım yanlış durumları düzeltmişlerdir. Çağman ve Enginoğlu (2010), Molodtsov'un esnek küme işlemlerini, daha işlevsel duruma getirmek üzere yeniden tanımlamışlardır. Xiao, Gong, Xia ve Zou (2010), özel ayırıcı esnek kümeler üzerine çalışmalar yapmışlardır. Babitha ve Sunil (2010), iki esnek kümenin kartezyen çarpımı üzerine çalışmıştır. Gong, Xiao ve Zhang (2010), bijektif esnek küme kavramını ve bijektif esnek küme üzerindeki kısıtlanmış ve genişletilmiş işlemleri tanımlamışlardır. Feng, Li, Davvaz ve Ali (2010), Dubois ve Prade'nin yaklaşımlı bulanık kümelerini genişleten, esnek küme-yaklaşımlı bulanık kümeler adı verilen bir kavramı ortaya atarak kanıtlamaya çalışmışlardır. Jiang, Tang, Chen, Wang ve Tang (2010), yeni kavramlar kullanarak genişletilmiş bir esnek küme teorisi sunmuşlardır. Qin ve Hong (2010), yeni bir esnek eşitlik kavramını tanımlamış, özelliklerini incelemiş ve esnek küme işlemleri ile esnek eşitlik arasında ilişkilere bakmıştır. Li (2011), De Morgan yasalarını kullanarak, kısıtlanmış birleşim ve kısıtlanmış kesişimin dağılıma yasalarını ve birleşim ve genişletilmiş kesişimin dağılım yasalarını vermiştir. Ge ve Yang (2011), çalışmasında, Maji ve diğerleri (2003), tarafından verilen operasyonel kuralları daha ayrıntılı olarak araştırmıştır. Sezgin ve Atagün (2011a), esnek küme teorisindeki Ali ve diğerleri (2009), çalışmasındaki yeni esnek küme işlemlerine göre, De Morgan yasasının geçerli olduğunu kanıtlamıştır. Ayrıca, kısıtlanmış simetrik farkı da tanımlayarak özelliklerini incelemişleridir. Ali, Shabir ve Naz (2011) kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim ve kesişim işlemlerinin, esnek kümeler kümesi üzerinde, yarı grup, yarı halka, BCK/BCI, MV cebirleri ve kafes yapılarını sağladığını göstermiştir. Neog ve Sut (2011), esnek kümeler için tümleyen kavramını yeniden tanımlayarak De Morgan yasasının geçerli olduğunu

göstermiştir. Li (2011), Maji ve diğerleri (2003), çalışmasındaki De Morgan kuralı ile ilgili hataya işaret edip düzeltmiş, ayrıca De Morgan yasalarını kullanarak, kısıtlanmış birleşim ve kısıtlanmış kesişimin dağılım yasalarını ve birleşim ve genişletilmiş kesişimin dağılım yasalarını sağladığını göstermiştir. Singh ve Onyeozili (2012), esnek kümelerde birleşim, kısıtlanmış birleşim, kısıtlanmış kesişim, genişletilmiş kesişim ve kısıtlanmış fark işlemlerine göre VE/VEYA işlemlerinin dağılıma özelliklerini incelemiştir. Liu, Feng ve Jun (2012), farklı esnek eşitlik ilişkileri türleri hakkında kapsamlı bilgi sunan bir çalışma yapmışlar, literatüre esnek M-alt küme ve esnek M-eşit ilişkilerini doğal bir şekilde genelleştiren yeni kavramlar ortaya koymuşlardır. Zhu ve Wen (2013), klasik kümelerin temel özelliklerinin esnek kümelerde de geçerli olduğunu göstermişlerdir. Feng ve Li (2013), farklı esnek alt küme türleri ile esnek eşitlik arasındaki ilişkilere bakmış ve buldukları sonuçları örneklerle kanıtlamıştır. Abbas, Ali ve Romaguera (2014), genelleştirilmiş esnek eşitlik ve genelleştirilmiş boş esnek küme kavramlarını tanımlamış, kavramların ilişkilerini incelemiştir. Onyeozili ve Gwary (2014), klasik kümelerdeki bazı özelliklerin esnek kümeler teorisinde geçerli olmadığını göstermişlerdir. Kharal (2014), bir esnek kümenin çekirdek, destek ve tersi kavramlarını tanımlanmış ve incelemiştir. Abbas, Ali ve Romaguera (2017), genelleştirilmiş sonlu esnek eşitliği, birleşimi ve kesişimi tanımlamış, Al-shami (2019), ise Abbas ve diğerleri (2017), çalışmasındaki genelleştirilmiş sonlu esnek birleşim ve kesişim kavramlarını tekrar tanımlayarak örnekler vermiştir. Husain ve Shivani (2018), Molodtsov (1999) tarafından başlatılan esnek kümeler teorisini inceleyerek, bazı özelliklerin geçerli olmadığını göstermişlerdir. Sezgin, Ahmad ve Mehmood (2019), esnek kümeler üzerinde genişletilmiş fark adı verilen yeni bir genişletilmiş esnek küme işlem tanımlamış, bu işlemin genişletilmiş fark ile kısıtlanmış fark ile diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisini araştırmıştır. Al-shami ve El-Shafer (2020), bazı esnek eşitlik bağıntılarına göre yeni esnek doğrusal denklem türlerini vermiş ve T-esnek eşitlik ilişkisini incelemiştir. Ali, Saleem, Sundus, Khaleeq, Saeed ve George (2022), özel olarak genelleştirilmiş sonlu esnek esnek eşitlik ve genelleştirilmiş sonlu esnek esnek birleşimler ve kesişimler üzerinde çalışmalar yapmıştır. Stojanovic (2021), yeni bir genişletilmiş işlem olarak, genişletilmiş simetrik fark işlemini tanımlayıp, bu işlemin özelliklerini, diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkileriyle detaylı şekilde incelemiştir.

Esnek küme teorisindeki teorik çalışmalar, genel olarak bir cebirsel yapının esnek cebirsel formunu detaylı şekilde ele alıp inceleme şeklinde olmuş ve Aktaş ve Çağman (2007), esnek grup çalışması bu yöndeki çalışmaların önünü açan öncü bir çalışma olmuştur. Bu çalışmanın devamında yapılan esnek cebirsel yapılar ile ilgili çalışmalara bakacak olursak, Jun (2008), esnek BCK/BCI cebirini, Feng, Jun ve Zhao (2008), esnek yarı halkayı, Jun ve Park (2008), esnek BCK/BCI cebirlerinin cebirsel özelliklerini çalışmışlardır. Jun, Lee ve Zhan (2009), esnek küme kavramını BCI cebirlerindeki p-ideallerine uygulayıp, esnek p-ideali ve esnek p-idealist BCI-cebiri kavramını tanımlamış, bulanık p-ideali ve esnek p-idealist BCI-cebiri arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Acar, Koyuncu ve Tanay (2010), esnek halkaları tanımlamış, esnek halka idealleri, idealist esnek halkalar, esnek halka homomorfizmaları ile ilgili temel özellikleri incelemişlerdir. Kazancı, Yılmaz ve Yamak (2010), esnek BCH-cebirini tanımlamış ve özelliklerini incelemiştir. Zhan ve Jun (2010), bulanık ve esnek küme teorilerini BL-cebirine uyarlamıştır. Jun, Lee ve Khan (2010), esnek sıralı yarı grup, esnek sıralı alt yarı grup, idealist esnek sıralı yarı grup ve esnek sıralı bir yarı grubun esnek ideali kavramlarını tanımlamış ve özelliklerini incelemişlerdir. Jun, Song ve So (2011), bulanık esnek BCI cebiri, bulanık esnek idealleri ve bulanık esnek p-idealleri tanımlamışlardır. Sezgin ve Atagün (2011b), esnek gruplar, normalistik esnek grup ve normalistik esnek grup homomorfizmi kavramlarını tanıtmış, Sezgin, Atagün ve Aygün (2011), esnek yakın halkalar ile ilgili teorik çalışmaları geliştirmişlerdir. Sen (2014), sabit parametreler kümesi üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesinin kısıtlanmış ve genişletilmiş işlemler ile bir Boole cebiri olduğunu göstermiştir. Aktaş ve Özlü (2014), esnek grupların mertebesini, esnek grupların kuvvetini ve devirli esnek grubu tanıtmıştır. Ayrıca devirli esnek gruplar ile klasik gruplar arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Sezer, Çağman ve Atagün (2014) ve Sezer, Çağman, Atagün, Ali ve Türkmen (2015), esnek kesişimsel yarı grup ve ideallerinin karakterize etmişlerdir. Ullah, Ahmad, Hayat, Karaaslan ve Rashad (2018), esnek kesişimsel AG-gruplarını tanımlamışlardır. Ullah, Karaaslan ve Ahmad (2018), esnek birleşimsel grup kavramını esnek birleşimsel AG-grubunu kapsayacak şekilde genişletmişler. Karaaslan (2019), esnek kümelerde AG-grupoid, AG *-groupoid ve AG-bantın bazı özelliklerini incelemiştir. Esnek idempotent eleman, esnek kesişim-ideal ve esnek kesişim AG-grupoidin esnek asal ideali gibi kavramları literatüre kazandırmıştır ve bu kavramlarla ilgili bazı sonuçlar elde etmiştir. Karaaslan, Ullah ve Ahmad (2021), normal bipolar esnek alt grup, konjuge bipolar esnek alt grup, bipolar esnek grubun bipolar sol (sağ) kosetleri kavramlarını tanımlamışlardır.

Esnek küme sadece teorik cebir alanında değil, özellikle karar verme problemleri gibi pek çok uygulama alanında kendine yer bulan bir teoridir. Maji ve diğerleri (2002), esnek kümeler ile ilgili tanımlardan yola çıkarak karar verme probleminin bir uygulamasını gerçekleştirmiştir. Chen, Tsang, Yeung (2003) ve Chen, Tsang, Yeung ve Wang (2005), bir karar verme probleminde esnek kümelerin uygulamasını geliştirmiştir. Herawan ve Deris (2010), grip hastalığına yakalandığı düşünülen hastaların karar vermesinde esnek küme teorisinin uygulanabilirliğini sunmuşlardır Herawan (2010), esnek kümeleri kullanarak tıbbi karar verme konusu üzerine çalışmalar yapmıştır. Çağman ve Enginoğlu (2010a), esnek kümeyi belirsizlik içeren problemlere başarılı bir şekilde uygulanabilecek esnek maksimum-minimum karar verme yöntemini oluşturmuşlardır. Çağman ve Enginoğlu (2010b), esnek kümelerin karar fonksiyonunun çarpımlarını tanımlamışlardır. Bu yeni tanımları kullanarak, karar vermedeki alternatifler arasından bir dizi optimum öğeyi seçen tek yönlü bir karar verme yöntemi oluşturmuşlardır. Feng, Li ve Çağman (2012), Çağman ve Enginoğlu (2010b), çalışmasındaki üniter karar verme yöntemini geliştirme ve genişletmeyi amaçlamış, klasik üniter karar vermenin, üniter karar verme yönteminin özel bir durumu olduğunu göstermişlerdir. Feng ve Zhou (2014), bulanık esnek küme için esnek t-ayırt edilebilirlik matrisine dayalı bir karar verme algoritması önererek karşılaştırmalı analizini yapmış ve algoritmanın etkinliğini göstermiştir. Atagün, Kamacı ve Oktay (2018), çalışmalarında, esnek dağılımlı maksimum-minimum karar verme yöntemleri adı verilen etkili karar verme yöntemleri oluşturarak, birden fazla karar vericinin olduğu karar verme problemlerini tek bir ürün kullanarak çözüme ulaştırmış, bu durumun, karar verme problemlerini çözme sürecini daha hızlı, daha kolay ve daha rahat hale getirdiğini göstermişlerdir. Kamacı, Saltık, Akız ve Atagün (2018), ters esnek kümenin matris gösterimini kullanarak yeni bir karar verme algoritması sunmuşlardır. Yang ve Yao (2020), kararsız bulanık kümeler ve kanonik esnek kümeler aracılığıyla karar verme problemlerinin çözümü için yeni bir üç yönlü karar yöntemi sunmuşlardır. Petchimuthu, Garg, Kamacı ve Atagün (2020), bulanık esnek kümelerin önceden var olan bazı karar verme algoritmalarıyla karşılaştırmalı sonuçlarını sunmuş, karar verme sürecini hızlandırmak ve kolaylaştırmak için algoritmanın Scilab kodlarını oluşturmuşlardır. Zorlutuna (2021), esnek sınıflar üzerinde küme değerli dönüşüm kavramını tanıtmış, örnekler ve karşı örneklerle desteklenen görüntülerin çeşitli özelliklerini ve esnek kümelerin ters görüntülerini incelemiş ve bu kavramları karar verme problemlerinde uygulanmıştır.

Soyut cebirde pek çok cebirsel yapı bulunmaktadır ve soyut cebirin amacı bu cebirsel yapıları sınıflandırmak ve cebirsel yapıyı oluşturan işlem ve kümeden bağımsız olarak bu cebirsel yapıların özelliklerini incelemektir. Halkaların bir genellemesi olan yarı halkalar, soyut cebirde hem teorik hem uygulama alanında önemli bir yer tutar. Vandiver (1935), yarı halka, Clifford (1954), yarı kafes, Chang (1958,) MV-cebiri, Birkhoff (1967), kafes, sınırlı kafes, dağılmalı kafes, Boole cebiri, De Morgan cebiri ve Stone cebirini, Clay ve Lawver (1969), Boole yakın halka kavramını tanıtmıştır. Karvellas (1974), topolojik yarı halka ve Hausdorff uzayında tanımlanan yarı halka kavramlarını ele almıştır. Pilz (1983), birinci işlemin değişmeli olmak zorunda olmadığı ve ikinci işlemin ilk işlem üzerine dağılma yönünün tek yönlü olduğu yapı olan yakın halkaları detaylı çalışmıştır. Reutenauer ve Straubing (1984), değişmeli yarı halkalar ile ilgili çalışmada bulunmuştur. Kim ve Park (1996), bir yarıhalkaların k-bulanık ideallerini incelemiştir.

Şimdiye kadar yapılan çalışmalar incelendiğinde, genel olarak esnek küme işlemleri kısıtlanmış esnek küme işlemleri ve genişletilmiş esnek küme işlemleri olarak iki ana başlık altına ilerlediği görülmektedir. Eren (2019), esnek kümelerde ikili parçalı fark işlemini tanımlamış ve özelliklerini incelemiştir; Sezgin ve Çalışıcı (2024), klasik kümelerde bulunan fark işleminin özelliklerini esnek ikili parçalı fark işleminde çalışmıştır. Çağman (2021), küme teorisinin yeni bir kavramı olarak kümelerin kapsayıcı tümleyen ve dışlayıcı tümleyeni tanımlarını vermiş, bu kavramları grup teorisine uygulamış ve bir grubun tamamlayıcı alt grubunu tanımlamıştır. Sezgin, Çağman, Atagün ve Aybek (2023), Çağman (2021), çalışmasındaki ikili tümleyen işlemlerine benzer, beş yeni ikili tümleyen kavramını literatüre kazandırmıştır. Bu çalışmada tanımlanan yeni küme işlemlerinden ilham alarak, Aybek (2024), pek çok yeni kısıtlanmış ve genişletilmiş esnek küme işlem formu tanımlamış ve özelliklerini incelemiştir. Eren (2019), çalışmasındaki esnek işlem formu, birinci satırdaki görüntü kümesinin tümleyeni alınarak biraz daha değiştirilmiş ve tümleyenli esnek ikili parçalı esnek küme işlemleri detaylı şekilde çeşitli araştırmacılar (Sezgin ve Aybek, 2023; Sezgin ve Demirci, 2023; Sezgin ve Sarılioğlu, 2024; Sezgin ve Yavuz, 2023a; Sezgin, Aybek ve Atagün 2023a; Sezgin, Aybek ve Güngör, 2023b) tarafından çalışılmıştır. Akbulut (2024) ve Demirci (2024), ise literatürde var olan genişletilmiş işlemlerin formunu, birinci ve ikinci satırdaki görüntü kümesinin tümleyenini olarak değiştirmiş ve sırasıyla tümleyenli genişletilmiş fark ve tümleyenli genişletilmiş lamda ile tümleyenli genişletilmiş birleşim, tümleyenli genişletilmiş artı ve tümleyenli

genişletilmiş teta işlemlerini tanımlayarak cebirsel özelliklerini ve diğeri esnek küme işlemleri ile ilişkilerini vermişleridir.

Bu tez çalışmasında esnek küme teorisine katkıda bulunmak amacıyla, tümleyenli genişletilmiş işlem adı verilen yeni esnek küme işlem formundan olup, tümleyenli genişletilmiş kesişim, tümleyenli genişletilmiş gamma ve tümleyenli genişletilmiş yıldız adı verilen esnek küme işlemleri tanıtılmış, tüm özellikleri detaylı bir şekilde ele alınmış, her bir işlemin diğeri esnek küme işlemleri üzerine dağılmasına, işlemlerin diğeri esnek küme işlemleri ile ilişkisini elde etmek amacıyla bakılmış, sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde tümleyenli genişletilmiş kesişim işleminin klasik cebirde iyi bilinen ve oldukça öneme sahip pek çok cebirsel yapılar oluşturduğu gösterilmiştir.

Tez çalışması, altı bölümden oluşmakta olup, ilk bölümünde esnek kümeler ve tezde adı geçeri cebirsel yapılar ile ilgili literatür taraması yapılmıştır. İkinci bölümde, küme işlemleri, esnek kümeler ve bazı cebirsel yapılar ile ilgili temel tanım ve özellikler verilmiştir. Tezin özgün bölümü olan üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümde sırasıyla, tümleyenli genişletilmiş kesişim, tümleyenli genişletilmiş gamma ve tümleyenli genişletilmiş yıldız işlemlerinin tanımları verilmiş, işlemlerin cebirsel özellikleri incelenmiştir. Bu yeni esnek küme işlemlerinin diğeri esnek küme işlemlere dağılmasına bakılarak hem diğeri esnek küme işlemleriyle olan ilişkisi görülmüş, hem de esnek kümeler kümesi üzerinde hangi cebirsel yapılar oluşturduğu incelenmiştir. Sadece esnek küme teorisine değil, klasik cebir teorisine de katkıda bulunacak şekilde, sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde tümleyenli genişletilmiş kesişim işleminin bir sınırlı bir yarı-kafes olduğu, yine tümleyenli genişletilmiş kesişim işleminin diğeri esnek küme işlemleri ile birlikte komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halka ile komutatif, idempotent, birimli bir hemihalka, Bool Cebiri, De Morgan Cebiri, Kleene Cebiri, Stone Cebiri ve MV-cebiri olduğu gösterilmiştir. Sonuç ve öneriler bölümünde, elde edilen sonuçlar ve sonuçların önemi tartışılmıştır. Cebirsel yapıların incelenmesi, farklı cebirsel sistemler tarafından paylaşılan ortak özellikleri ve yapıları araştıran soyut cebirde, matematikçilerin bu yapıların özelliklerini anlayarak karmaşık problemleri çözebilmesi, yeni teoriler geliştirip, kavramları matematiğinin, bilimin ve mühendisliğinin çeşitli alanlarına uygulayabilmesi açısından oldukça önemli olduğundan, bu tezde bunu esnek kümeler aracılığıyla yaparak klasik cebire de katkı sunulmuş olduğunu düşünüyorum.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Kümeler

İyi tanımlanmış nesneler topluluğuna küme denir. Küme kuramının temellerinin, Cantor (1874), tarafından atıldığı bilinse de, bu kavramın, Cantor'dan önce de kullanıldığı; fakat adına küme denilmediği bilinmektedir.

Kümeler, büyük; kümenin elemanları ise küçük harflerle gösterilir. Bir x elemanı bir A kümesine ait ise $x \in A$; değil ise $x \notin A$ şeklinde gösterilir. A ve B iki küme olmak üzere; A nın her elemanı aynı zamanda B nin de bir elemanı ise A 'ya, B 'nin bir alt kümesi denir ve $A \subseteq B$ şeklinde yazılır. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise o zaman A ile B kümelerine eşittir denir ve $A = B$ şeklinde gösterilir. Küme teorisinde, üzerinde çalışılan en geniş kümeye evrensel küme denir ve E ile; hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve $\emptyset$ ile gösterilir (Özer, Çoker, Taş, 1999:36-37)

Tezimizde, yeni bir esnek küme işlemi olarak tanımladığımız işlemlerin özelliklerinin ispatları küme bilgisine dayalı olduğu için, ilk olarak kümelerdeki temel küme işlemlerini hatırlatarak başlanacaktır.

2.1.1. Kesişim işlemi

D ve Z iki küme olmak üzere, hem D kümesine hem de Z kümesine ait olan elemanların kümesine D ile Z nin kesişimi (arakesiti) denir ve $D \cap Z$ ile gösterilir.

$$D \cap Z = \{x: x \in D \text{ ve } x \in Z\}$$

Kesişim işleminin temel özellikleri aşağıda belirtilmiştir:

- ❖ $(D \cap Y) \cap Z = D \cap (Y \cap Z)$ (Birleşme özelliği)
- ❖ $D \cap Z = Z \cap D$ (Değişme özelliği)
- ❖ $D \cap \emptyset = \emptyset \cap D = \emptyset$ (Yutan eleman özelliği)

- ❖ $D \cap E = E \cap D = D$ (Etkisiz eleman özelliği)
- ❖ $D \cap D = D$ (Denk güçlülük özelliği)
- ❖ $D \cap Z = \emptyset \Leftrightarrow D \subseteq Z'$. Benzer şekilde, $D \cap Z = \emptyset \Leftrightarrow Z \subseteq D'$
- ❖ $\emptyset \subseteq D \cap Z, D \cap Z \subseteq E$
- ❖ $D \cap Z = E \Leftrightarrow D = Z = E$
- ❖ $D \cap Z = \emptyset \Rightarrow D = \emptyset \vee Z = \emptyset$ veya D ve Z ayrıktır.
- ❖ $D \cap Z \subseteq D, D \cap Z \subseteq Z$
- ❖ $D \subseteq Z \Leftrightarrow D \cap Z = D$
- ❖ $D \cap Z = D \cup Z \Leftrightarrow D = Z$
- ❖ $D \cap Z \subseteq D \cup Z$
- ❖ $D \subseteq Z \Rightarrow D \cap T \subseteq Z \cap T$. Tersini doğru değildir.
- ❖ $D \subseteq Y$ ve $Z \subseteq T \Rightarrow D \cap Z \subseteq Y \cap T$
- ❖ $D \cap (D \cup Z) = D \cup (D \cap Z) = D$ (Yutma Kuralı)
- ❖ $D \cap (Z \cup Y) = (D \cap Z) \cup (D \cap Y)$ (Kesişimin birleşim üzerine soldan dağılması)
- ❖ $(D \cup Z) \cap Y = (D \cap Y) \cup (Z \cap Y)$ (Kesişimin birleşim üzerine sağdan dağılması)
- ❖ $D \cap (Z - Y) = (D \cap Z) - (D \cap Y)$ (Kesişimin fark üzerine soldan dağılması)
- ❖ $(D - Z) \cap Y = (D \cap Y) - (Z \cap Y)$ (Kesişimin fark üzerine sağdan dağılması)

(Özel, Çoker, Taş, 1999: 41-52).

2.1.2. Birleşim işlemi

D ve Z iki küme olsun. D'ye, Z'ye veya her ikisine ait olan elemanların kümesine D ile Z'nin birleşimi denir ve $D \cup Z$ ile gösterilir.

$$D \cup Z = \{x: x \in D \text{ veya } x \in Z\}$$

Birleşim işleminin özellikleri aşağıda belirtilmiştir:

- ❖ $(D \cup Y) \cup Z = D \cup (Y \cup Z)$ (Birleşme özelliği)
- ❖ $D \cup Z = Z \cup D$ (Değişme özelliği)
- ❖ $D \cup \emptyset = \emptyset \cup D = D$ (Birim eleman özelliği)
- ❖ $D \cup D = D$ (Denk güçlülük özelliği)
- ❖ $D \cup E = E \cup D = E$ (Yutan eleman özelliği)
- ❖ $D \subseteq D \cup Z, Z \subseteq D \cup Z$
- ❖ $\emptyset \subseteq D \cup Z, D \cup Z \subseteq E$
- ❖ $D \cup Z = Z \Leftrightarrow D \subseteq Z$
- ❖ $D \cap Z \subseteq D \cup Z$
- ❖ $D \cup Z = D \cap Z \Leftrightarrow D = Z$
- ❖ $D \cup Z = \emptyset \Rightarrow D = Z = \emptyset$
- ❖ $D \subseteq Z \Rightarrow D \cup K \subseteq Z \cup K$. Tersisi doğru değildir.
- ❖ $D \subseteq K$ ve $Z \subseteq T \Rightarrow D \cup Z \subseteq K \cup T$
- ❖ $D \cap (D \cup Z) = D \cup (D \cap Z) = D$ (Yutma kuralı)
- ❖ $D \cup (Z \cap Y) = (D \cup Z) \cap (D \cup Y)$ (Birleşimin kesişim üzerine soldan dağılması)
- ❖ $(D \cap Z) \cup Y = (D \cup Z) \cap (Z \cup Y)$ (Birleşimin kesişim üzerine sağdan dağılması)

(Özel, Çoker, Taş, 1999: 41-52; Çallıalp, 1994: 1-7).

2.1.3. Fark işlemi

D ve Y iki küme olsun. D da olup Y de olmayan elemanların kümesine D ile Y nin farkı denir ve $D \setminus Y$ veya $D - Y$ ile gösterilir.

$$D - Y = \{x: x \in D, x \notin Y\} = \{x \in D: x \notin Y\}$$

Bu tezimiz boyunca, D ile Y işlemlerinin farkı için D-Y gösterimini tercih ediyoruz. Aşağıda fark işleminin özellikleri verilmiştir.

- ❖ $D-Y \neq Y-D$
- ❖ $(D-Y)-Z \neq D-(Y-Z)$
- ❖ $D-\emptyset=D, D-E=\emptyset$
- ❖ $\emptyset-D=\emptyset$ ve $V-V=\emptyset$
- ❖ $(D-Y) \cap (D \cap Y) = \emptyset$ ve $(Y-D) \cap (D \cap Y) = \emptyset$
- ❖ $D-(D-Y) = D \cap Y$ ve $Y-(Y-D) = Y \cap D$
- ❖ $D \cap Y = \emptyset$ ise $D-Y=D$. Buradan, $D \cap (Y-D) = \emptyset$ olup $D-(Y-D)=D$; $Y \cap (D-Y) = \emptyset$ olup $Y-(D-Y)=Y$; $(D-Y) \cap (Y-D) = \emptyset$ olup $(D-Y)-(Y-D)=D-Y$; $(Y-D) \cap (D-Y) = \emptyset$ olup $(Y-D)-(D-Y)=Y-D$; $(D-Y) \cap Y = \emptyset$ olup $(D-Y)-Y=D-Y$
- ❖ $(D-Y) \subseteq D$ ve $(Y-D) \subseteq Y$
- ❖ $D=(D-Y) \cup (D \cap Y)$ ve $Y=(Y-D) \cup (D \cap Y)$
- ❖ $D \cup Y = (D-Y) \cup (Y-D) \cup (D \cap Y) = (D-Y) \cup Y = (Y-D) \cup D$
- ❖ $D \subseteq Y \Leftrightarrow D-Y = \emptyset$
- ❖ $(D \cap Y)-Z = (D-Z) \cap (Y-Z)$ (Farkın kesişime sağdan dağılması)
- ❖ $(D \cup Y)-Z = (D-Z) \cup (Y-Z)$ (Farkın birleşime sağdan dağılması)
- ❖ $(D-Y)-Z = (D-Z)-(Y-Z)$ (Farkın farka sağdan dağılması)
- ❖ $D-(Y \cap Z) = (D-Y) \cup (D-Z)$
- ❖ $D-(Y \cup Z) = (D-Y) \cap (D-Z)$

(Çallıalp, 1994: 1-7).

2.1.4. Simetrik fark işlemi

D ve Y kümeleri verildiğinde, $D \cup Y$ ye ait olup $D \cap Y$ ye ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeye K ile Y kümelerinin simetrik farkı denir ve $D \Delta Y$ ile gösterilir.

$$D \Delta Y = \{x: x \in V \cup Y, x \notin V \cap Y\} = (V \cup Y) - (V \cap Y)$$

Bu tanımın bir sonucu olarak $D\Delta Y=(D-Y)\cup(Y-D)$ olduğu açıktır. Simetrik fark işleminin özellikleri aşağıda verilmiştir.

- ❖ $(D\Delta Y)\Delta Z=D\Delta(Y\Delta Z)$ (Birleşme özelliği)
- ❖ $D\Delta Y=Y\Delta D$ (Değişme özelliği)
- ❖ $D\Delta\emptyset=\emptyset\Delta D=D$ (Birim eleman özelliği)
- ❖ $D\Delta D=\emptyset$ (Ters eleman özelliği)
- ❖ $D\Delta D'=D'\Delta D=E$
- ❖ $(D\Delta Y)\Delta(Y\Delta Z)=D\Delta Z$
- ❖ $D'\Delta Y'=D\Delta Y$
- ❖ $D\Delta Y=D\Delta Z\Rightarrow Y=Z$ (Kısaltma kuralı)
- ❖ $D\Delta Y\subseteq D\cup Y$
- ❖ $D\Delta Y=\emptyset\Leftrightarrow D=Y$
- ❖ $D\subseteq Y\Rightarrow D\Delta Y=Y-D$
- ❖ $D\Delta(D\cap Y)=D-Y$
- ❖ $D\cup Y=(D\Delta Y)\cup(D\cap Y)$
- ❖ $D\cap(Y\Delta Z)=(D\cap Y)\Delta(D\cap Z)$ (Kesişimin simetrik fark işlemi üzerine soldan dağılıması)
- ❖ $(D\Delta Y)\cap Z=(D\cap Z)\Delta(Y\cap Z)$ (Kesişimin simetrik fark işlemi üzerine sağdan dağılıması)

(Özel, Çoker, Taş, 1999: 41-52; Karaçay, Eş ve İbrahimoglu, 2017: 61-71).

2.1.5. Tümleyen işlemi

D bir küme olmak üzere, evrensel kümede olup, D de olmayan elemanların kümesine D'nin tümleyeni denir ve D' ile gösterilir. O halde:

$$D' = \{x: x \notin D\} = \{x \in E: x \notin D\} = E - D$$

Tümleyen işleminin özellikleri aşağıda verilmiştir.

- ❖ $D \cup D' = E$ ve $D \cap D' = \emptyset$
- ❖ $E' = \emptyset$ ve $\emptyset' = E$
- ❖ $(D')' = D$
- ❖ $D \Delta E = E \Delta X = D'$
- ❖ $(D \cup Y)' = D' \cap Y'$ (De Morgan Kuralı)
- ❖ $(D \cap Y)' = D' \cup Y'$ (De Morgan Kuralı)

(Nesin, 2019: Çallıalp, 1994: 1-7).

2.2. Bazı Cebirsel Yapılar

Bu bölümde, tanımladığımız esnek küme işlemleri ile birlikte esnek kümeler üzerinde elde ettiğimiz bazı cebirsel yapılar ile ilgili hatırlatma bilgileri verilmiştir.

2.2.1. Tanım D boş olmayan bir küme olmak üzere

$$\otimes: D \times D \rightarrow D$$

fonksiyonuna, D kümesi üzerinde bir (ikili) işlem denir (Aydın ve Kandamar, 2013:71). Cebirde ikili işlemler olduğu gibi, birli işlem de tanımlıdır. D boş olmayan bir küme olmak üzere, D den D ye fonksiyona birli işlem denir. Birli işlemler bir değişkenli fonksiyon iken, ikili işlemler iki değişkenli fonksiyondur. Bir D kümesinin tüm alt kümelerinin kümesi $P(D)$ olmak üzere, D nin bir X alt kümesinin tümleyeni, $P(D)$ kümesi üzerinde birli işlemdir (Hacısalıhoğlu, 2007: 163). Herhangi bir kümede tanımlanan işlem/işlemler bu küme ile birlikte cebirsel yapı oluşturur (Hacısalıhoğlu, 2007:181). Cebirsel yapılar, matematiksel yapı ya da matematiksel sistem olarak da bilinmektedir.

2.2.2. Tanım G boş olmayan bir küme ve $\otimes$ bu küme üzerinde bir ikili işlem olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $(G, \otimes)$ cebirsel yapısına bir grup denir.

$$G_1) \forall a, b, c \in G \text{ için } (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

$G_2)$ Öyle bir $e \in G$ vardır ki $\forall a \in G$ için $a \star e = e \star a = a$ olmalıdır (e elemanına G 'nin birim elemanı denir).

$G_3)$ e , G nin birim elemanı olmak üzere, G kümesindeki her bir a elemanı için

$$a \star a' = a' \star a = e$$

olacak şekilde bir tek $a' \in G$ vardır (a' elemanına a elemanının tersi denir.) $\forall a, b \in G$ için $a \star b = b \star a$ şartını sağlayan $(G, \star)$ grubuna ise değişmeli grup denir (Bayraktar, 2006:88)

Burada; (G_1) şartını sağlayan $(G, \star)$ cebirsel yapısına yarı grup; (G_1) ve (G_2) şartlarını sağlayan $(G, \star)$ cebirsel yapısına monoid; $\forall a, b \in G$ için $a \star b \in G$ şartını sağlayan $(G, \star)$ grubuna grupoid denir.

$(D, \star)$ bir grupoid olsun. $\forall d \in D$ için $e \star d = d$ olacak şekilde $e \in D$ var ise, e elemanına D nin sol birim elemanı; $d \star e = d$ olacak şekilde $e \in D$ varsa, e elemanına D nin sağ birim elemanı denir. Birim eleman hem sağ birim, hem de sol birimdir ve tektir. $(D, \star)$, birim elemanı e olan bir cebirsel yapı olsun. $d \in D$ için $d' \star d = e$ olacak şekilde $d' \in D$ var ise, d' elemanına d elemanının sol ters elemanı; $d \star d' = e$ olacak şekilde $d' \in D$ varsa, d' elemanına d elemanının sağ tersi denir. d elemanının tersi, hem sağ ters, hem de sol terstir ve tektir. $\forall v \in D$ için, $d \star v = d$ olacak şekilde $d \in D$ varsa, d elemanına D nin sol yutan elemanı; $v \star d = d$ olacak şekilde $d \in D$ varsa, d elemanına D nin sağ yutan elemanı denir. Yutan eleman hem sağ yutan, hem de sol yutan elemandır ve tektir (Kilp, Knauer and Mikhalev, 2001)

2.2.3. Tanım $(S, \star)$ bir cebirsel yapı olsun. $s \in S$ için, $s^2 = s$ ise s elemanına idempotent eleman denir. $\forall s \in S$ için, $s^2 = s$ ise, $(S, \star)$ cebirsel yapısına idempotentir denir. İdempotent yarı gruba bant; idempotent ve değişmeli yarıgruba yarı kafes; idempotent ve değişmeli monoide sınırlı yarı kafes denir (Clifford, 1954).

Bir monoidin birim elemanı tek olmasına rağmen bir yarıgrup/grupoid, bir veya birden çok sol birime sahip olabilir; fakat birden çok sol birime sahip ise, sağ birim elemanı yoktur, dolayısıyla birim elemanı yoktur. Benzer şekilde, bir yarıgrup/grupoid, bir veya birden çok

sağ birime sahip olabilir; fakat birden çok sağ birime sahip ise, sol birim elemanı yoktur, dolayısıyla birim elemanı yoktur (Clifford, 1954).

Benzer şekilde, bir grupta her elemanın tersi tek olmasına rağmen, bir monoidde bir elemanın bir veya birden çok sol tersi olabilir; fakat o eleman birden çok sol terse sahip ise, sağ terse sahip değildir; dolayısıyla ters elemana sahip değildir. Benzer şekilde bir monoidde bir elemanın bir veya birden çok sağ tersi olabilir; fakat o eleman birden çok sağ terse sahip ise, sol terse sahip değildir; dolayısıyla ters elemana sahip değildir (Clifford, 1954).

2.2.4. Tanım H boştan farklı bir küme, “+” ve “ $\star$ ” H kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun. $(H, +, \star)$ cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(H, +, \star)$ üçlüsüne bir halka denir.

- $(H, +)$ değişmeli bir gruptur.
- $(H, \star)$ yarıgruptur.
- $\forall x, y, z \in H$ için $x \star (y + z) = x \star y + x \star z$ ve $(x + y) \star z = x \star z + y \star z$

$(H, +, \star)$ halkası kısaca H ile gösterilir. $(H, +)$ nın birim elemanı 0_H ile gösterilir ve H halkasının sıfırı denir. H halkası $\forall x, y \in H$ için $x \star y = y \star x$ şartını sağlıyorsa H ’a değişmeli halka denir. H halkasında $\forall x \in H$ için, $x \star e = e \star x = x$ olacak şekilde bir $e \in H$ var ise, e ye H nin birim elemanı denir ve 1_H ile gösterilir. Birim elemana sahip halkaya birimli halka denir (Hacısalıhoğlu, 2007:203-204).

2.2.5. Tanım S boştan farklı bir küme, “+” ve “ $\star$ ” S kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun. $(S, +, \star)$ cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(S, +, \star)$ üçlüsüne bir yarıhalka denir.

- $(S, +)$ yarıgruptur.
- $(S, \star)$ yarıgruptur.
- $\forall x, y, z \in S$ için $x \star (y + z) = x \star y + x \star z$ ve $(x + y) \star z = x \star z + y \star z$

Her $x, y \in S$ için, $x + y = y + x$ ise S yarı halkasına toplamsal değişmeli yarıhalka; her $x, y \in S$ için $x \star y = y \star x$ ise S yarı halkasına çarpımsal değişmeli yarıhalka; her $x \in S$ için, $x \star 1 = 1 \star x = x$ olacak şekilde $1 \in S$ varsa yani çarpımsal birimli yarıhalkaya birimli yarıhalka denir. Her

$x \in S$ için $0 \star x = x \star 0 = 0$ ve $0 + x = x + 0 = x$ olacak şekilde $0 \in S$ varsa, $0 \in S$ elemanına S yarıhalkasının sıfırı denir. Toplamsal değişmeli ve sıfırlı yarıhalkaya hemihalka denir (Vandiver, 1934).

2.2.6. Tanım L boştan farklı bir küme, “ $\vee$ ” ve “ $\wedge$ ” S kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun. $(L, \vee, \wedge)$ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $(L, \vee, \wedge)$ üçlüsüne bir kafes (latis) denir.

- $(L, \vee)$ değişmeli, idempotent bir yarı grup (yarı kafes)
- $(L, \wedge)$ değişmeli, idempotent bir yarı grup (yarı kafes)
- Her $k, s \in L$ için, $k \vee (k \wedge s) = k \wedge (k \vee s)$ (yutma kuralı)

Her iki işleme göre birim elemana sahip olan kafese sınırlı kafes denir. Sınırlı kafeste genellikle L nin $\wedge$ işlemine göre birim elemanı 1 ile gösterilirken, $\vee$ işlemine göre birim eleman 0 ile gösterilir. Sınırlı L kafesi, her $a \in L$ için $a \wedge a' = 0$ ve $a \vee a' = 1$ olacak şekilde bir a' elemanına sahip ise L ye tümlenmiş kafes denir. Dağılma kuralları geçerli olan kafese dağılmalı kafes denir. Sınırlı, dağılmalı, aynı zamanda tümlmeli olan kafese Boole cebri denir. De Morgan yasalarına yani her $x, y \in L$ için $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ ve $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ sahip kafese De Morgan cebiri denir. De Morgan cebiri her $x, y \in L$ için $x \wedge x' \subseteq y \vee y'$ şartını sağlıyorsa, Kleene cebiri denir. $x \in L$ olmak üzere, $x \wedge x^* = 0$ ve $x \wedge y = 0$ olduğunda $y \subseteq x^*$ ise x^* elemanına x in sözde tümleyeni denir. $x^* \vee (x^*)^* = 1$ eşitliğine Stone özelliği denir. Stone özelliğini sağlayan sözde tümlenmiş dağılmalı kafese Stone cebiri denir (Birkhoff, 1967).

2.2.7. Tanım M boştan farklı bir küme, “ $\star$ ” M de bir ikili işlem ve “ $*$ ” M de bir birli işlem olsun. 0 herhangi bir $x, y \in M$ için aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir sabit ise $(M, \star, *, 0)$ yapısına bir MV-cebiridir denir.

- $(M, \star, 0)$ değişmeli monoiddir.
- $(x^*)^* = x$
- $x \star 0^* = 0^*$
- $(x^* \star y)^* \star y = (y^* \star x)^* \star x$ (Chang, 1958)

2.3. Esnek Kümeler

Bu bölümde, esnek küme teorisiyle ilgili temel kavramlara yer verilecektir.

2.3.1. Tanım U evrensel küme, E parametreler kümesi, $P(U)$ U 'nun kuvvet kümesi ve $D \subseteq E$ olarak verilsin. Bir (F, D) sıralı ikilisi U üzerinde esnek küme olarak adlandırılır. Burada F ,

$$F: D \rightarrow P(U)$$

ile verilen bir fonksiyondur. Başka bir şekilde ifade edecek olursak, U üzerinde bir esnek küme, U evreninin alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir. (Molodtsov, 1999)

(F, D) esnek kümesi gösterimi, bazı kaynaklarda F_D şeklinde gösterilse de biz Molodtsov (1999) ve Maji ve diğerleri (2003) çalışmasında da kullanılan esnek kümenin (F, D) gösterimini tercih edeceğiz. Molodtsov tarafından ortaya atılan bu tanım, Çağman ve Enginoğlu (2010) tarafından yeniden düzenlenerek aşağıdaki tanımı vermişlerdir. Biz bu tez boyunca, aslına sadık kalarak ilk olarak Molodtsov (1999) tarafından verilen esnek küme tanımını kullanacağız.

E parametreler kümesinin bir D alt kümesi ile birden fazla esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda bu esnek kümeler (F, D) , (G, D) , (H, D) vb. şeklinde gösterilecektir. Ayrıca, E parametreler kümesinin D , G , H vb. farklı alt kümeleri ile de birden fazla esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda esnek kümeler (F, D) , (F, G) , (F, H) vb şeklinde olur (Maji ve diğerleri, 2003)

U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi (parametre kümesi ne olursa olsun $S_E(U)$ ile gösterilecek olup; D , E kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, sabit D parametre kümesi ile U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi, $S_D(U)$ ile gösterilecektir. Yani, $S_D(U)$ kümesinde, parametre kümesi sadece D olan esnek kümeler yer alırken; $S_E(U)$ kümesinde, parametre kümesi herhangi bir küme olan U üzerindeki tüm esnek kümeler yer alabilir. $S_D(U)$ kümesinin $S_E(U)$ kümesinin alt kümesi olduğu açıktır. Tanım kümesi boş küme olacak şekildeki, $F: \emptyset \rightarrow D$ fonksiyonuna boş fonksiyon denildiği bilinmektedir. Esnek küme de bir fonksiyon olduğundan, tanım kümesi $\emptyset$ alınarak, $F: \emptyset \rightarrow P(U)$ olacak şekilde bir esnek küme tanımlanabileceği aşıkardır. Böyle esnek kümeye, boş esnek küme

denilir ve $\emptyset$ ile gösterilir. $\emptyset$, parametre kümesi boş küme olan tek esnek kümedir (Ali ve diğerleri, 2011). Bu tez boyunca $(F,D)=\emptyset$ diye belirtilmediği sürece $D=\emptyset$ alınmayacaktır; yani aksi belirtilmediği sürece, esnek kümelerin tümü boş esnek küme olan $\emptyset$ den farklıdır.

2.3.2. *Örnek* U satın almak için üzerinde düşünülen ayakkabıların bir kümesi, E'nin de parametrelerin kümesi olduğunu kabul edelim. Her bir parametre bir kelime veya bir cümledir.

$$E=\{\text{ekonomik, kolay giyilebilir, kullanışlı, havalı, rahat}\}$$

olsun. Bu durumda bir esnek küme tanımlamak, “ekonomik ayakkabı, havalı ayakkabı..” oluşturmak demektir. (F,E) ; esnek kümesi Salih Bey'in almayı düşündüğü “ayakkabıların çekiciliği” olarak tanımlanır. U evrensel kümesinde aşağıdaki şekilde verilen altı tane ayakkabı olduğunu düşünelim.

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\} \text{ ve } E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, D=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5\}$$

olsun. Burada, α_1 "ekonomik" parametresini; α_2 "kolay giyilebilir" parametresini; α_3 "kullanışlı" parametresini; α_4 "havalı"; α_5 "rahat" parametresini temsil etsin. Buna göre ayakkabı almaya gelen Salih için (F,D) esnek kümesini oluşturalım. Bunun için önce verilen parametrelere göre ayakkabıları sınıflandıralım:

$$F(\alpha_1) = U, F(\alpha_2) = \{u_1, u_5, u_6\}, F(\alpha_4) = \{u_2, u_4, u_5\}, F(\alpha_5) = \{u_6\}$$

Bu durumda esnek kümemiz,

$$(F,D) = \{(\alpha_1, U), (\alpha_2, \{u_1, u_5, u_6\}), (\alpha_4, \{u_2, u_4, u_5\}), (\alpha_5, \{u_6\})\}$$

şeklinde olur.

Boş esnek küme ve mutlak esnek küme tanımı ilk olarak Maji ve diğerleri (2003) tarafından verilmiş ve (F,Z) boş esnek kümesi Φ ile; (F,Z) mutlak esnek kümesi $\tilde{A}$ olarak

gösterilmiştir. Fakat, bu tanımların ve gösterimlerin matematiksel olarak birtakım problemler içerdiği, Ali ve diğerleri (2009), Yang (2008) ve Sezgin ve Atagün (2010) tarafından gösterilmiştir. Bu problemlili durumların önüne geçmek için, Ali ve diğerleri (2009), boş esnek küme ve mutlak esnek küme tanımlarını güncelleyerek, aşağıdaki esnek kümenin parametre kümesine göre boş esnek küme ve evrensel esnek küme tanımlarını esnek küme literatüre kazandırmıştır.

2.3.3. Tanım $(F,D) \in S_E(U)$ olsun. Her $\mathfrak{N} \in D$ için; $F(\mathfrak{N})=\emptyset$ ise (F,D) esnek kümesine D ye göre boş esnek küme denir ve $\emptyset_D$ ile gösterilir. (F,E) , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $\mathfrak{N} \in E$ için; $F(\mathfrak{N})=\emptyset$ ise (F,E) esnek kümesine E ye göre boş esnek küme denir ve $\emptyset_E$ ile gösterilir (Ali ve diğerleri, 2009).

2.3.4. Tanım. $(F,D) \in S_E(U)$ olsun. Her $\mathfrak{N} \in D$ için; $F(\mathfrak{N})=U$ ise (F,D) esnek kümesine D ye göre mutlak esnek küme denir ve U_D ile gösterilir. (F,E) , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $\mathfrak{N} \in E$ için; $F(\mathfrak{N})=U$ ise (F,E) esnek kümesine E ye göre tam esnek küme denir ve U_E şeklinde yazılır (Ali ve diğerleri, 2009).

2.3.5. Tanım (F,D) ve $(G,Y) \in S_E(U)$ olsun. Eğer, $D \subseteq Y$ ve her $\mathfrak{N} \in D$ için $F(\mathfrak{N})=G(\mathfrak{N})$ ise (F,D) ye (G,Y) nin esnek alt kümesidir denir $(F,D) \subseteq (G,Y)$ gösterilir. Eğer (G,Y) , (F,D) nin esnek alt kümesi ise (F,D) ye (G,Y) nin esnek üst kümesidir denir ve $(F,D) \supseteq (G,Y)$ ile gösterilir. Eğer $(F,D) \subseteq (G,Y)$ ve $(G,Y) \subseteq (F,D)$ ise (F,D) ve (G,Y) esnek kümelerine esnek eşit kümeler denir (Pei ve Maio, 2005)

Litaratürde başka (Maji ve diğerleri, 2003; Qin ve Hong, 2010; Jun ve Yang, 2011; Liu, Feng ve Jun ,2012; Feng ve Yongming, 2013; Abbas, Ali ve Romaguera, 2014; Mujahid Abbas, Ali ve Romaguera, 2017; Al-shami, 2019; Al-shasi ve El-Shafei, 2020; Ali, Saleem, Sundus ve Khaleew, 2022) esnek alt küme ve esnek eşit küme çalışmaları da vardır.

2.3.6. Tanım $(F,D) \in S_E(U)$ olsun. (F,D) esnek kümesinin esnek tümleyeni $(F,D)^f = (F^f,D)$ ve her $\mathfrak{N} \in D$ için; $F^f(\mathfrak{N})=U-F(\mathfrak{N})$ şeklinde tanımlanır (Ali ve diğerleri, 2009).

Buradan, $(\emptyset_A)^r = U_A$, $(U_A)^r = \emptyset_A$, $(\emptyset_E)^r = U_E$, $(U_E)^r = \emptyset_E$, $(\emptyset_\emptyset)^r = \emptyset_\emptyset$, $((F,A)^r)^r = (F,A)$. Ayrıca, $\emptyset_A \subseteq (F,A) \subseteq U_A \subseteq U_E$ olduğu açıktır. (Ali ve diğerleri, 2011).

Bir esnek kümenin tümleyeni kavramı, ilk olarak Maji ve diğerleri (2003) tarafından literatüre kazandırılmış olmakla birlikte, bu tanımda esnek kümesinin tümleyeni alındığında, esnek kümenin parametre kümesinin de değili alınıyor; dolayısıyla esnek kümenin parametre kümesi değişiyordu. Bunun ise, problemli durumlara yol açtığı Ali ve diğerleri (2009) tarafından gösterilmiştir. Bu karışıklığın önüne geçmek için, Ali ve diğerleri (2009) bir esnek kümenin bağlı tümleyeni kavramını literatüre kazandırmış olup, bu tanımda esnek kümenin tümleyeni alındığında, esnek kümenin parametre kümesi korunmakta olup, bu tanım Maji ve diğerleri (2003) de yer alan esnek tümleyen kavramından daha işlevsel olduğundan tercih edilir hale gelmiştir.

Esnek küme işlemleri, aşağıda verildiği şekilde, kısıtlanmış ve genişletilmiş işlemler olmak üzere iki kategoride ilerlemiştir:

2.3.7. Tanım $(F,D), (G,Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin $(F,D) \cap_R (G,Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış kesişimi $K = D \cap Y$ ve $\forall \mathfrak{N} \in K$ için $H(\mathfrak{N}) = F(\mathfrak{N}) \cap G(\mathfrak{N})$ olmak üzere $(F,D) \cap_R (G,Y) = (H,K)$ olarak tanımlanır (Pei ve Miao, 2005). Burada, $Z = D \cap Y = \emptyset$ ise $(F,D) \cap_R (G,Y) = \emptyset_\emptyset$ (Ali ve diğerleri, 2011).

2.3.8. Tanım $(F,D), (G,Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin $(F,D) \cup_{\mathfrak{R}} (G,Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış birleşimi $K = D \cap Y$ ve $\forall \mathfrak{N} \in K$ için $H(\mathfrak{N}) = F(\mathfrak{N}) \cup G(\mathfrak{N})$ olmak üzere $(F,D) \cup_{\mathfrak{R}} (G,Y) = (H,K)$ olarak tanımlanır (Ali ve diğerleri, 2009). Burada, $K = D \cap Y = \emptyset$ ise $(F,D) \cup_R (G,Y) = \emptyset_\emptyset$ (Ali ve diğerleri, 2011).

2.3.9. Tanım $(F,D), (G,Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin $(F,D) \setminus_{\mathfrak{R}} (G,Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış farkı $K = D \cap Y$ ve $\forall \mathfrak{N} \in K$ için $H(\mathfrak{N}) = F(\mathfrak{N}) \setminus G(\mathfrak{N})$ olmak üzere $(F,D) \setminus_{\mathfrak{R}} (G,Y) = (H,K)$ olarak tanımlanır (Ali ve diğerleri, 2009). Burada, $K = D \cap Y = \emptyset$ ise $(F,D) \setminus_R (G,Y) = \emptyset_\emptyset$ (Ali ve diğerleri, 2011)

2.3.10. Tanım $(F,D), (G,Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin $(F,D) \Delta_{\mathfrak{R}} (G,Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış simetrik fark $K = D \cap Y$ ve $\forall \mathfrak{N} \in K$ için $H(\mathfrak{N}) = F(\mathfrak{N}) \Delta G(\mathfrak{N})$ olmak

üzere $(F, D)\Delta_{\mathcal{R}}(G, Y) = (H, K)$ olarak tanımlanır (Sezgin ve Atagün, 2011a). Burada, $K = D \cap Y = \emptyset$ ise $(F, D)\Delta_{\mathcal{R}}(G, Y) = \emptyset$ (Ali ve diğerleri, 2011).

2.3.11. Tanım $(F, D), (G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş birleşimi (H, K) 'dir. Burada $K = D \cup Y$ ve $\forall \mathfrak{X} \in K$ için,

$$H(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in D - Y \\ G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Y - D \\ F(\mathfrak{X}) \cup G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in D \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır, $(F, D) \cup_{\varepsilon} (G, Y) = (H, K)$ şeklinde yazılır (Maji ve diğerleri, 2003).

2.3.12. Tanım $(F, D), (G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş kesişimi (H, K) 'dir. Burada $K = D \cup Y$ ve $\forall \mathfrak{X} \in K$ için,

$$H(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in D - Y \\ G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Y - D \\ F(\mathfrak{X}) \cap G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in D \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır, $(F, D) \cap_{\varepsilon} (G, Y) = (H, K)$ şeklinde yazılır (Ali ve diğerleri, 2009).

2.3.13. Tanım $(F, D), (G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş fark (H, K) 'dir. Burada, $K = D \cup Y$ ve $\forall \mathfrak{X} \in K$ için,

$$H(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in D - Y \\ G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Y - D \\ F(\mathfrak{X}) - G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in D \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır, $(F, D) \setminus_{\varepsilon} (G, Y) = (H, K)$ şeklinde yazılır (Sezgin ve diğerleri, 2019).

2.3.14. Tanım $(F, D), (G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş simetrik farkı (H, K) 'dir. Burada, $K = D \cup Y$ ve $\forall \mathfrak{X} \in K$ için,

$$H(X) = \begin{cases} F(X), & X \in D - Y \\ G(X), & X \in Y - D \\ F(X) \Delta G(X), & X \in D \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır, $(F, D) \Delta_\varepsilon (G, Y) = (H, K)$ şeklinde yazılır (Stojanovic, 2021).

2.3.15. *Örnek* $E = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$ parametreler kümesi $V = \{X_1, X_3, X_4, X_5\}$ ve $Y = \{X_2, X_3, X_4\}$, E nin iki alt kümesi olsun. (F, D) ve (G, Y) , $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlı iki esnek küme olsun:

$$(F, D) = \{(X_1, \{h_2, h_5\}), (X_3, \{h_1, h_2, h_5\}), (X_4, \{h_1, h_4, h_5\}), (X_5, \{h_3, h_4, h_5\})\}$$

$$(G, Y) = \{(X_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (X_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (X_4, \{h_3, h_5\})\}$$

Bu durumda,

- ❖ $(F, D) \cup_\varepsilon (G, Y) = \{(X_1, \{h_2, h_5\}), (X_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (X_3, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}), (X_4, \{h_1, h_3, h_4, h_5\}), (X_5, \{h_3, h_4, h_5\})\}$
- ❖ $(F, D) \cap_\varepsilon (G, Y) = \{(X_1, \{h_2, h_5\}), (X_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (X_3, \{h_2\}), (X_4, \{h_5\}), (X_5, \{h_3, h_4, h_5\})\}$
- ❖ $(F, D) \setminus_\varepsilon (G, Y) = \{(X_1, \{h_2, h_5\}), (X_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (X_3, \{h_1, h_5\}), (X_4, \{h_1, h_4\}), (X_5, \{h_3, h_4, h_5\})\}$
- ❖ $(F, D) \Delta_\varepsilon (G, Y) = \{(X_1, \{h_2, h_5\}), (X_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (X_3, \{h_1, h_3, h_4, h_5\}), (X_4, \{h_1, h_3, h_4\}), (X_5, \{h_3, h_4, h_5\})\}$
- ❖ $(F, D) \cup_R (G, Y) = \{(X_3, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}), (X_4, \{h_1, h_3, h_4, h_5\})\}$
- ❖ $(F, D) \cap_R (G, Y) = \{(X_3, \{h_2\}), (X_4, \{h_5\})\}$
- ❖ $(F, D) \setminus_R (G, Y) = \{(X_3, \{h_1, h_5\}), (X_4, \{h_1, h_4\})\}$
- ❖ $(F, D) \Delta_R (G, Y) = \{(X_3, \{h_1, h_3, h_4, h_5\}), (X_4, \{h_1, h_3, h_4\}), (X_5, \{h_3, h_4, h_5\})\}$

Çağman (2021), kapsayıcı ve dışlayıcı tümleyen şeklinde iki yeni tümleyen tanımlamıştır. + ve θ sırasıyla, kapsayıcı ve dışlayıcı tümleyenleri göstermek ve D ve Y iki küme olmak üzere, bu ikili işlemler, $D+Y=D' \cup Y$, $D\theta Y=D' \cap Y$ olarak tanımlanmıştır. Sezgin ve diğerleri (2023c), bu iki işlem arasındaki ilişkileri incelemiş ve ayrıca bunun gibi üç yeni

ikili işlem tanımlayıp, bunların birbirleriyle olan ilişkisini incelemiştir. D ve Y iki küme olmak üzere $D * Y = D' \cup Y'$, $D \gamma Y = D' \cap Y$, $D \lambda Y = D \cup Y'$.

$\star$ kümelerdeki işlemleri göstermek üzere ($\star$ burada $\cap, \cup, -, \Delta, \lambda, \gamma, \theta, +, *$ gibi küme işlemlerini göstermek üzere) esnek kümelerdeki kısıtlanmış işlemler, genişletilmiş işlemler, tümleyenli genişletilmiş işlemler, esnek ikili parçalı işlemler, tümleyenli esnek ikili parçalı işlemler aşağıda verilen genellenmiş tanımlar ile genel formda verilebilir:

2.3.16. Tanım $(F, D), (G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin $(F, D) \star_{\mathcal{R}} (G, Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış $\star$ işlemi, $K = D \cap Y$ ve $\forall \mathfrak{X} \in K$ için $H(\mathfrak{X}) = F(\mathfrak{X}) \star G(\mathfrak{X})$ olmak üzere $(F, D) \star_{\mathcal{R}} (G, Y) = (H, K)$ olarak tanımlanır. Burada, $K = D \cap Y = \emptyset$ ise $(F, D) \star_{\mathcal{R}} (G, Y) = \emptyset_{\emptyset}$ (Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve Atagün, 2011a; Aybek, 2024).

2.3.17. Tanım $(F, D), (G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş $\star$ işlemi (H, K) 'dir. Burada, $K = D \cup Y$ ve $\forall \mathfrak{X} \in K$ için,

$$H(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in D - Y \\ G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Y - D \\ F(\mathfrak{X}) \star G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in D \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, D) \star_{\varepsilon} (G, Y) = (H, K)$ şeklinde yazılır (Maji ve diğerleri, 2003; Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve diğerleri, 2019; Stojanovic, 2021; Aybek, 2024).

2.3.18. Tanım $(F, D), (G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin tümleyenli genişletilmiş $\star$ işlemi (H, K) 'dir. Burada $K = D \cup Y$ ve $\forall \mathfrak{X} \in K$ için,

$$H(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in D - Y \\ G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Y - D \\ F(\mathfrak{X}) \star G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in D \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, D) \overset{*}{\star}_{\varepsilon} (G, Y) = (H, K)$ şeklinde yazılır (Demirci, 2024; Akbulut, 2024).

2.3.19. Tanım $(F, D), (G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin ensek ikili parçalı $\odot$ işlemi (H, D) 'dir ve $\forall x \in D$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in D - Y \\ F(x) \odot G(x), & x \in D \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, D) \overset{\sim}{\odot} (G, Y) = (H, D)$ şeklinde gösterilir (Eren, 2019; Sezgin ve Yavuz, 2023b; Sezgin ve Çalışıcı, 2024; Yavuz, 2024).

2.3.20. Tanım. $(F, D), (G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin tümleyenli esnek ikili parçalı $\odot$ işlemi (H, D) 'dir ve $\forall x \in D$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in D - Y \\ F(x) \odot G(x), & x \in D \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, D) \overset{*}{\odot} (G, Y) = (H, D)$ şeklinde gösterilir (Sezgin ve Demirci, 2023; Sezgin ve Aybek, 2023; Sezgin ve diğerleri, 2023a, 2023b; Sezgin ve Atagün, 2023; Sezgin ve Yavuz, 2023a; Sezgin ve Çağman, 2024; Sezgin ve Sarıalioğlu, 2024)

3. TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ KESİŞİM İŞLEMİ

Bu bölümde, tümleyenli genişletilmiş kesişim adı verilen yeni bir esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir.

3.1. Tanım $(F,Z), (G,C) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümenin $(F,Z) \overset{*}{\cap}_\epsilon (G,C)$ ile gösterilen tümleyenli genişletilmiş kesişim işlemi $K=Z \cup C$ ve $\forall \mathfrak{X} \in K$;

$$H(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Z-C \\ G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in C-Z \\ F(\mathfrak{X}) \cap G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Z \cap C \end{cases}$$

olmak üzere $(F,Z) \overset{*}{\cap}_\epsilon (G,C) = (H,K)$ ile tanımlanır.

3.2. *Örnek* $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ parametre kümesi $Z=\{e_1, e_3\}$ ve $C=\{e_2, e_3, e_4\}$ E nin iki alt kümesi, $U=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}$ evrensel küme olmak üzere $(F,Z), (G,C) \in S_E(U)$ $(F,Z)=\{(e_1,\{h_2,h_5\}), (e_3,\{h_1,h_2,h_5\})\}, (G,C)=\{(e_2,\{h_1,h_4,h_5\}), (e_3,\{h_2,h_3,h_4\}), (e_4,\{h_3,h_5\})\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F,Z) \overset{*}{\cap}_\epsilon (G,C)=(L,Z \cup C)$ olmak üzere $\forall \mathfrak{X} \in Z \cup C$;

$$L(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Z-C \\ G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in C-Z \\ F(\mathfrak{X}) \cap G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Z \cap C \end{cases}$$

Burada, $Z \cup C=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, $Z-C=\{e_1\}$, $C-Z=\{e_2,e_4\}$, $Z \cap C=\{e_3\}$ olmak üzere, $L(e_1)=F'(e_1)=\{h_1,h_3,h_4\}$, $L(e_2)=G'(e_2)=\{h_2,h_3\}$, $L(e_4)=G'(e_4)=\{h_1,h_2,h_4\}$ ve $L(e_3)=F(e_3) \cap G(e_3)=\{h_1,h_2,h_5\} \cap \{h_2,h_3,h_4\}=\{h_2\}$. Böylece, $(F,Z) \overset{*}{\cap}_\epsilon (G,C)=\{(e_1,\{h_1,h_3,h_4\}), (e_2,\{h_2,h_3\}), (e_3,\{h_2\}), (e_4,\{h_1,h_2,h_4\})\}$.

3.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $\cap_{\varepsilon}^*$, $S_E(U)$, kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $\cap_{\varepsilon}^*$ işleminin, $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\cap_{\varepsilon}^* : S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((F, Z), (G, C)) \rightarrow (F, Z) \cap_{\varepsilon}^* (G, C) = (L, Z \cup C)$$

olup, $(F, Z), (G, C) \in S_E(U)$ olduğunda, $(F, Z) \cap_{\varepsilon}^* (G, C) \in S_E(U)$ olur.

2) $[(F, Z) \cap_{\varepsilon}^* (G, C)] \cap_{\varepsilon}^* (H, R) \neq (F, Z) \cap_{\varepsilon}^* [(G, C) \cap_{\varepsilon}^* (H, R)]$.

İspat: Öncelikle sol tarafa bakalım. $(F, Z) \cap_{\varepsilon}^* (G, C) = (T, Z \cup C)$ olsun. Burada, $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup C$;

$$T(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - C \\ G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in C - Z \\ F(\mathfrak{N}) \cap G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap C \end{cases}$$

$(T, Z \cup C) \cap_{\varepsilon}^* (H, R) = (M, Z \cup C \cup R)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup C \cup R$;

$$M(\mathfrak{N}) = \begin{cases} T'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cup C) - R \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in R - (Z \cup C) \\ T(\mathfrak{N}) \cap H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cup C) \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$M(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z - C) - R = Z \cap C' \cap R' \\ G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (C - Z) - R = Z' \cap C \cap R' \\ F'(\mathfrak{N}) \cup G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in R - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(\mathfrak{N}) \cap H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z - C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ G'(\mathfrak{N}) \cap H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (C - Z) \cap R = Z' \cap C \cap R \\ (F(\mathfrak{N}) \cap G(\mathfrak{N})) \cap H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $(F,Z) \underset{\epsilon}{*} [(G,C) \underset{\epsilon}{*} (H,R)]$ bakalım.

$(G,C) \underset{\epsilon}{*} (H,R)=(K,C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$K(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C-R \\ H'(x), & x \in R-C \\ G(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (K,C \cup R) = (S, Z \cup C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$S(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-(C \cup R) \\ K'(x), & x \in (C \cup R)-Z \\ F(x) \cap K(x), & x \in Z \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$S(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-(C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G(x), & x \in (C-R)-Z = Z' \cap C \cap R' \\ H(x), & x \in (R-C)-Z = Z' \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R)-Z = Z' \cap C \cap R \\ F(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ F(x) \cap (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece, $M \neq S$ olduğu görülür. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\underset{\epsilon}{*}$ işlemi birleşme özelliğine sahip değildir.

$$3) [(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (G,Z)] \underset{\epsilon}{*} (H,Z) = (F,Z) \underset{\epsilon}{*} [(G,Z) \underset{\epsilon}{*} (H,Z)].$$

İspat: Öncelikle sol tarafa bakalım $(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (G,Z)=(T,Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup Z=Z$;

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-Z=\emptyset \\ G'(x), & x \in Z-Z=\emptyset \\ F(x) \cap G(x), & x \in Z \cap Z=Z \end{cases}$$

$(T, Z) \underset{\varepsilon}{*} (H, Z) = (M, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$M(x) = \begin{cases} T'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ H'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ T(x) \cap H(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan,

$$M(x) = \begin{cases} T'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ H'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ (F(x) \cap G(x)) \cup H(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Şimdi sağ tarafa yani $(F, Z) \underset{\varepsilon}{*} [(G, Z) \underset{\varepsilon}{*} (H, Z)]$ bakalım. $(G, Z) \underset{\varepsilon}{*} (H, Z) = (L, Z \cup Z)$ olsun.

Burada, $\forall x \in Z$;

$$L(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ H'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ G(x) \cap H(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{\varepsilon}{*} (L, Z) = (N, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ L'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ F(x) \cap L(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ L'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ F(x) \cap (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Böylece, $M=N$ olduğu görülür. Yani, $Z \subseteq E$ sabit bir paramere kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$

kümesi üzerinde $\underset{\varepsilon}{*}$ işleminin birleşme özelliği vardır.

$$4) (F, Z) \underset{\epsilon}{*} (G, C) = (G, C) \underset{\epsilon}{*} (F, Z).$$

İspat: Öncelikle eşitliğin her iki tarafındaki esnek kümenin parametere kümeleri $Z \cup C$ olup, esnek eşitliğin ilk şartı sağlanmış olur. Şimdi eşitliğin sol tarafına bakalım.

$$(F, Z) \underset{\epsilon}{*} (G, C) = (H, Z \cup C) \text{ olsun. Burada } \forall \mathfrak{N} \in Z \cup C;$$

$$H(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - C \\ G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in C - Z \\ F(\mathfrak{N}) \cap G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap C \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $(G, C) \underset{\epsilon}{*} (F, Z)$ bakalım. $(G, C) \underset{\epsilon}{*} (F, Z) = (T, C \cup Z)$ olsun.

Burada $\forall \mathfrak{N} \in C \cup Z$;

$$T(\mathfrak{N}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in C - Z \\ F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - C \\ G(\mathfrak{N}) \cap F(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in C \cap Z \end{cases}$$

Böylece, $H = T$ olduğu görülür. Benzer şekilde, $(F, Z) \underset{\epsilon}{*} (G, Z) = (G, Z) \underset{\epsilon}{*} (F, Z)$. Yani, $S_E(U)$

ve $S_Z(U)$ kümeleri üzerinde $\underset{\epsilon}{*}$ işleminin değişme özelliği vardır.

$$5) (F, Z) \underset{\epsilon}{*} (F, Z) = (F, Z).$$

İspat: $(F, Z) \underset{\epsilon}{*} (F, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z$;

$$H(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - Z = \emptyset \\ F(\mathfrak{N}) \cap F(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan, $\forall \mathfrak{N} \in Z$; $H(\mathfrak{N}) = F(\mathfrak{N}) \cap F(\mathfrak{N}) = F(\mathfrak{N})$ olup $(H, Z) = (F, Z)$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\epsilon}{*}$ işlemi denk güçlülük (idempotent) özelliğe sahiptir.

$$6) (F, Z) \underset{\epsilon}{\overset{*}{\cap}} U_Z = U_Z \underset{\epsilon}{\overset{*}{\cap}} (F, Z) = (F, Z).$$

İspat: $U_Z = (T, Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z; T(\aleph) = U$. $(F, Z) \underset{\epsilon}{\overset{*}{\cap}} (T, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z;$

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ T'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cap T(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z; H(\aleph) = F(\aleph) \cap T(\aleph) = F(\aleph) \cap U = F(\aleph)$ olup $(H, Z) = (F, Z)$.

$S_Z(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\epsilon}{\overset{*}{\cap}}$ işleminin birim elemanı U_Z esnek kümesidir.

3.3.1. *Sonuç* $Z \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, Teorem 3.3 (1), (3), (4), (5) ve (6) dan $(S_Z(U), \underset{\epsilon}{\overset{*}{\cap}})$ cebirsel yapısı birimi U_Z olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafestir. Teorem 3.3 (2) den, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\epsilon}{\overset{*}{\cap}}$ işlemi birleşmeli olmadığı için bir yarıgrup oluşturamaz, $(S_E(U), \underset{\epsilon}{\overset{*}{\cap}})$ cebirsel yapısı bir grupoiddir.

$$7) (F, Z) \underset{\epsilon}{\overset{*}{\cap}} \emptyset_Z = \emptyset_Z \underset{\epsilon}{\overset{*}{\cap}} (F, Z) = \emptyset_Z.$$

İspat: $\emptyset_Z = (S, Z)$ olsun. $\forall \aleph \in; S(\aleph) = \emptyset$. $(F, Z) \underset{\epsilon}{\overset{*}{\cap}} (S, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z;$

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ S'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cap S(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z; H(\aleph) = F(\aleph) \cap S(\aleph) = F(\aleph) \cap \emptyset = \emptyset$ olup, $(H, Z) = \emptyset_Z$.

$S_Z(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\epsilon}{\overset{*}{\cap}}$ işleminin yutan elemanı $\emptyset_Z$ esnek kümesidir.

$$8) (F, Z) \underset{\epsilon}{\overset{*}{\cap}} \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \underset{\epsilon}{\overset{*}{\cap}} (F, Z) = (F, Z)^f.$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (K, \emptyset)$ ve $(F, Z) \underset{\varepsilon}{*} (K, \emptyset) = (Q, \cup \emptyset) = (Q, Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$Q(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - \emptyset = Z \\ K'(\aleph), & \aleph \in \emptyset - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cap K(\aleph), & \aleph \in Z \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Buradan, $\forall \aleph \in Z$; $Q(\aleph) = F'(\aleph)$ olup $(Q, Z) = (F, Z)^r$.

$$9) (F, Z) \underset{\varepsilon}{*} (F, Z)^r = (F, Z)^r \underset{\varepsilon}{*} (F, Z) = \emptyset_Z.$$

İspat: $(F, Z)^r = (H, Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph)$. $(F, Z) \underset{\varepsilon}{*} (H, Z) = (T, Z \cup Z)$ olsun .

Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Burada $\forall \aleph \in Z$; $T(\aleph) = F(\aleph) \cap H(\aleph) = F(\aleph) \cap F'(\aleph) = \emptyset$ olup $(T, Z) = \emptyset_Z$

$$10) [(F, Z) \underset{\varepsilon}{*} (G, C)]^r = (F, Z) \underset{\varepsilon}{*} (G, C).$$

İspat: $(F, Z) \underset{\varepsilon}{*} (G, C) = (H, Z \cup C)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ G'(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F(\aleph) \cap G(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$(H, Z \cup C)^r = (T, Z \cup C)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ G(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

Buradan, $(T, Z \cup C) = (F, Z) *_\varepsilon (G, C)$ olur.

$$11) (F, Z) *_\varepsilon (G, Z) = U_Z \Leftrightarrow (F, Z) = (G, Z) = U_Z.$$

İspat: $(F, Z) *_\varepsilon (G, Z) = (T, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ G'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cap G(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(T, Z) = U_Z$ olduğundan, $\forall \aleph \in Z$ için $T(\aleph) = U$ ve $\forall \aleph \in Z$; $F(\aleph) \cap G(\aleph) = U$. Buradan, $\forall \aleph \in Z$; $F(\aleph) = G(\aleph) = U$. Böylece, $(F, Z) = (G, Z) = U_Z$.

$$12) (F, Z) *_\varepsilon (G, Z) = \emptyset_Z \Leftrightarrow (G, Z) \subseteq (F, Z)^r \text{ ve } (F, Z) \subseteq (G, Z)^r.$$

İspat: $(F, Z) *_\varepsilon (G, Z) = (T, Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$ için,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ G'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cap G(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(T, Z) = \emptyset_Z$ olduğundan, $\forall \aleph \in Z$ için, $T(\aleph) = \emptyset$. Buradan, $\forall \aleph \in Z$ için, $T(\aleph) = F(\aleph) \cap G(\aleph) = \emptyset \Leftrightarrow \forall \aleph \in Z$ için, $x \in G(\aleph)$ ise $x \notin F(\aleph)$, dolayısıyla $x \in F'(\aleph)$. Buradan, $G(\aleph) \subseteq F'(\aleph)$. Dolayısıyla, $(G, Z) \subseteq (F, Z)^r$. Benzer şekilde, $(F, Z) *_\varepsilon (G, Z) = \emptyset_Z$ ise $(F, Z) \subseteq (G, Z)^r$ olduğu gösterilebilir. Tersine, $(G, Z) \subseteq (F, Z)^r$ olsun. Buradan, $\forall \aleph \in Z$ için, $x \in G(\aleph)$ ise $x \notin F(\aleph)$, dolayısıyla $\forall \aleph \in Z$; $F(\aleph) \cap G(\aleph) = \emptyset$. Böylece, $(F, Z) *_\varepsilon (G, Z) = \emptyset_Z$.

$$13) \emptyset_Z \subseteq (F, Z) *_\varepsilon (G, C), \quad \emptyset_C \subseteq (F, Z) *_\varepsilon (G, C), \quad \emptyset_{Z \cup C} \subseteq (F, Z) *_\varepsilon (G, C), \quad (F, Z) *_\varepsilon (G, C) \subseteq U_{Z \cup C}.$$

$$14) (F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, Z) \subseteq (F, Z) \text{ ve } (F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, Z) \subseteq (G, Z).$$

İspat: $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ G'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cap G(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F(\aleph) \cap G(\aleph) \subseteq F(\aleph)$. Böylece, $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, Z) \subseteq (F, Z)$. Benzer şekilde, $\forall \aleph \in Z$;

$H(\aleph) = F(\aleph) \cap G(\aleph) \subseteq G(\aleph)$. Böylece $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, Z) \subseteq (G, Z)$.

$$15) (F, Z) \subseteq (G, Z) \Leftrightarrow (F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, Z) = (F, Z).$$

İspat: (F, Z) ise her $\aleph \in Z$ için, $F(\aleph) \subseteq G(\aleph)$. $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, Z) = (H, Z)$ olsun. $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ G'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cap G(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Böylece, $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F(\aleph) \cap G(\aleph) = F(\aleph)$. Böylece, $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, Z) = (F, Z)$. Tersine,

$(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, Z) = (F, Z)$ olsun. Buradan, $\forall \aleph \in Z$ için, $F(\aleph) \cap G(\aleph) = F(\aleph)$ olup, $F(\aleph) \subseteq G(\aleph)$.

Böylece, $\forall \aleph \in Z$; $(F, Z) \subseteq (G, Z)$.

$$16) (F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, C) \subseteq (F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, C).$$

İspat: $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, C) = (H, Z \cup C)$ olsun. Burada $\aleph \in Z \cup C$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-C \\ G'(\aleph), & \aleph \in C-Z \\ F(\aleph) \cap G(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, C) = (T, Z \cup C)$ olsun. Burada $\aleph \in Z \cup C$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-C \\ G'(\aleph), & \aleph \in C-Z \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$\forall \aleph \in Z-C; H(\aleph) = F'(\aleph) \subseteq F'(\aleph) = T(\aleph), \forall \aleph \in C-Z; H(\aleph) = G'(\aleph) \subseteq G'(\aleph) = T(\aleph), \forall \aleph \in Z \cap C;$

$F(\aleph) \cap G(\aleph) \subseteq F(\aleph) \cup G(\aleph)$. Böylece, $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, C) \subseteq (F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, C)$.

$$17) (F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, C) = (F) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, B) \Leftrightarrow (F, Z \cap C) = (G, Z \cap C).$$

İspat: $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, C) \subseteq (F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, C)$ ve $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, C) = (H, Z \cup C)$ olsun. $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-C \\ G'(\aleph), & \aleph \in C-Z \\ F(\aleph) \cap G(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, C) = (K, Z \cup C)$ olsun. $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$K(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-C \\ G'(\aleph), & \aleph \in C-Z \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in C \cap Z \end{cases}$$

$(H, Z \cup C) = (K, \cup C)$ olduğundan, $\forall \aleph \in Z-C; F'(\aleph) = F'(\aleph), \forall \aleph \in C-Z; G'(\aleph) = G'(\aleph), \forall \aleph \in Z \cap C; F(\aleph) \cap G(\aleph) = F(\aleph) \cup G(\aleph)$ olur. Buradan, $\forall \aleph \in Z \cap C; F(\aleph) = G(\aleph)$. Böylece, $(F, Z \cap C) = (G, Z \cap C)$ olur. Tersine, $(F, Z \cap C) = (G, Z \cap C)$ olsun. Buradan, $\forall \aleph \in Z \cap C; F(\aleph) = G(\aleph)$. Böylece, $\forall \aleph \in Z \cap C; F(\aleph) \cap G(\aleph) = F(\aleph) \cup G(\aleph)$. $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, C) = (H, Z \cup C)$ olsun.

$\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ G'(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F(\aleph) \cap G(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, C) = (K, Z \cup C)$ olsun. $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$K(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ G'(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in C \cap Z \end{cases}$$

$\forall \aleph \in Z \cap C$; $F(\aleph) \cap G(\aleph) = F(\aleph) \cup G(\aleph)$ olduğundan, $\forall \aleph \in Z \cup C$ $H(\aleph) = K(\aleph)$ olur ve böylece, $(H, Z \cup C) = (K, Z \cup C)$. Yani, $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, C) = (F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, C)$.

$$18) (F, Z) \cong (G, Z) \text{ ise } (F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, Z) \cong (G, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, Z).$$

İspat: $(F, Z) \cong (G, Z)$ olsun. Buradan, $\forall \aleph \in Z$ için, $F(\aleph) \subseteq G(\aleph)$. $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, Z) = (W, Z)$ olsun.

Böylece, $\forall \aleph \in Z$ için,

$$W(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(G, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, Z) = (L, Z)$ olsun. Böylece, $\forall \aleph \in Z$ için,

$$L(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ G(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Böylece, $\forall \aleph \in Z$ için, $W(\aleph) = F(\aleph) \cap H(\aleph) \subseteq G(\aleph) \cap H(\aleph) = L(\aleph)$ olup, $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, Z) \cong$

$(G, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, Z)$.

19) $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, Z) \cong (G, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, Z)$ ise $(F, Z) \cong (G, Z)$ olmak zorunda değildir. Yani Teorem 3.3 (18) tersi doğru değildir.

İspat: Teorem 3.3 (18) nın tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $A = C = \{e_1, e_3\}$ E'nin alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme olsun. (F, Z) , (G, Z) ve (H, Z) , $(F, Z) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, Z) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$, $(H, Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset)\}$ olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.

Buradan, $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, Z) = (L, Z)$ olup $(L, Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset)\}$ ve $(G, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, Z) = (K, Z)$ olmak üzere $(K, Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset)\}$. Böylece, $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, Z) \cong (G, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, Z)$; fakat $(F, Z) \not\cong (G, Z)$ olmadığı açıktır.

20) $(F, Z) \cong (G, C)$ ve $(K, Z) \cong (L, C)$ ise $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (K, Z) \cong (G, C) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (L, C)$.

İspat: $(F, Z) \cong (G, C)$ ve $(K, Z) \cong (L, C)$ olsun. Buradan, $Z \subseteq C$ ve $\forall \aleph \in Z$ için, $F(\aleph) \subseteq G(\aleph)$ ve $K(\aleph) \subseteq L(\aleph)$. $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (K, Z) = (W, Z)$ olsun. Böylece, $\forall \aleph \in Z$ için,

$$W(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ K'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cap K(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(G, C) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (L, C) = (S, C)$ olsun. Böylece, $\forall \aleph \in C$ için,

$$S(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in C - C = \emptyset \\ L'(\aleph), & \aleph \in C - C = \emptyset \\ G(\aleph) \cap L(\aleph), & \aleph \in C \cap C = C \end{cases}$$

Böylece, $\forall \aleph \in Z$ için, $W(\aleph) = F(\aleph) \cap K(\aleph) \subseteq G(\aleph) \cap L(\aleph) = S(\aleph)$ olup, $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (K, Z) \cong (G, C) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (L, C)$.

21) $(F, Z) \underset{\epsilon}{\cap}^* [(F, Z) \underset{\epsilon}{\cup}^* (G, Z)] = (F, Z)$ ve $(F, Z) \underset{\epsilon}{\cup}^* [(F, Z) \underset{\epsilon}{\cap}^* (G, Z)] = (F, Z)$. (Yutma yasası)

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, Z) \underset{\epsilon}{\cup}^* (G, Z) = (T, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ G'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ F(x) \cap G(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{\epsilon}{\cap}^* (T, Z) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$ için;

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ T'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ F(x) \cap T(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Böylece,

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ F(x) \cup [F(x) \cap G(x)], & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan,

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ F(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Böylece, $(M, Z) = (F, Z)$ olup $(F, Z) \underset{\epsilon}{\cup}^* [(F, Z) \underset{\epsilon}{\cap}^* (G, Z)] = (F, Z)$.

Benzer şekilde, $(F, Z) \underset{\epsilon}{\cap}^* [(F, Z) \underset{\epsilon}{\cup}^* (G, Z)] = (F, Z)$ sağlandığı da gösterilir. Burada, $\underset{\epsilon}{\cup}^*$ işlemi yerine, kısıtlanmış birleşim, yani $\cup_R$, genişletilmiş birleşim yani $\cup_\epsilon$ işlemi, ya da esnek ikili parçalı birleşim işlemi yani $\widetilde{\cup}$ de getirilse bu özelliğin sağlanacağı Z, E evrensel

kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde bu işlemlerin çakışık olduğundan aşıkardır.

3.4. Teorem Tümleyenli genişletilmiş kesişim işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

3.4.1. Teorem Tümleyenli genişletilmiş kesişim işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Kesişim İşleminin Kısıtlanmış İşlemler Üzerine Soldan Dağılıması

$$1)(Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\cap_{\epsilon}}^* [(G, C) \cap_R (H, R)] = [(F, Z)_{\cap_{\epsilon}}^* (G, C)] \cup_R [(F, Z)_{\cap_{\epsilon}}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, C) \cap_R (H, R) = (M, C \cap R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cap R; M(x) = G(x) \cap H(x)$. $(F, Z)_{\cap_{\epsilon}}^* (M, C \cap R) = (N, Z \cup (C \cap R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup (C \cap R);$

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cap R) \\ M'(x), & x \in (C \cap R) - Z \\ F(x) \cap M(x), & x \in Z \cap (C \cap R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cap R) = Z - (C \cap R) \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cap (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\cap_{\epsilon}}^* (G, C)] \cap_R [(F, Z)_{\cap_{\epsilon}}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\cap_{\epsilon}}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup C;$

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ G'(x), & x \in C-Z \\ F(x) \cap G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

Şimdi $(F, Z) \cap_{\varepsilon}^* (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \cap_R (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cap (Z \cup R))$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup (C \cap R)$;
 $T(x) = V(x) \cap W(x)$. Buradan

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cap F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cap (F(x) \cap H(x)), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cap (F(x) \cap H(x)), & x \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F(x) \cap G(x)) \cap F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F(x) \cap G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F(x) \cap G(x)) \cap (F(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ \emptyset, & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ \emptyset, & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F(x) \cap G(x)) \cap (F(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki $Z-(C \cap R)$ ele alınırsa, $Z-(C \cap R) = Z \cap (C \cap R)'$ olup, bir eleman $(C \cap R)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $C-R$ de, ya $R-C$ de, ya da $C \cup R$ nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in Z-(C \cap R)$ ise $x \in Z \cap C \cap R'$ veya $x \in Z \cap C' \cap R$ veya $x \in Z \cap C' \cap R'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ ise N ve

T fonksiyonları birbirine eşit olur. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\cap \varepsilon}^* [(G, C) \cup_R (H, R)] = [(F, Z)_{\cap \varepsilon}^* (G, C)] \cup_R [(F, Z)_{\cap \varepsilon}^* (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\cap \varepsilon}^* [(G, C) *_R (H, R)] = [(F, Z)_{\cap \varepsilon}^* (G, C)] \cup_R [(F, Z)_{\cap \varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, C) *_R (H, R) = (M, C \cap R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cap R; M(x) = G'(x) \cup H'(x)$. $(F, Z)_{\cap \varepsilon}^* (M, C \cap R) = (N, Z \cup (C \cap R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup (C \cap R);$

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cap R) \\ M'(x), & x \in (C \cap R) - Z \\ F(x) \cap M(x), & x \in Z \cap (C \cap R) \end{cases}$$

Buradan

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cap R) = Z - (C \cap R) \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F(x) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\cap \varepsilon}^* (G, C)] \cup_R [(F, Z)_{\cap \varepsilon}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\cap \varepsilon}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup C;$

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

Şimdi $(F, Z)_{\cap \varepsilon}^* (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R;$

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \cup_R (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cap (Z \cup R))$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup (C \cap R)$;
 $T(x) = V(x) \cup W(x)$. Buradan

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F(x) \cap H'(x)), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cup (F(x) \cap H'(x)), & x \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F(x) \cap G'(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F(x) \cap G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F(x) \cap G'(x)) \cup (F(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F(x) \cap G'(x)) \cup (F(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ ise $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\cap_{\epsilon}}{*} [(G, C) \theta_R(H, R)] = [(F, Z) \underset{\cap_{\epsilon}}{*} (G, C)] \cap_R [(F, Z) \underset{\cap_{\epsilon}}{*} (H, R)].$$

ii) Tümleneyli Genişletilmiş Kesişim İşleminin Kısıtlanmış İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, [(F, Z) \cup_R (G, C)] \underset{\cap_{\epsilon}}{*} (H, R) = [(F, Z) \underset{\cap_{\epsilon}}{*} (H, R)] \cup_R [(G, C) \underset{\cap_{\epsilon}}{*} (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,Z)\cup_R(G,C)=(M,Z\cap C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cap C; \quad M(x)=F(x) \cup G(x). \quad (M,Z\cap C) \stackrel{*}{\cap}_\varepsilon (H,R) = (N,(Z\cap C)\cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in (Z\cap C)\cup R;$

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in (Z\cap C) - R \\ H'(x), & x \in R - (Z\cap C) \\ M(x) \cap H(x), & x \in Z \cap (C \cap R) \end{cases}$$

Böylece,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z\cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R - (Z\cap C) = R - (Z \cap C) \\ (F(x) \cup G(x)) \cap H(x), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z) \stackrel{*}{\cap}_\varepsilon (H,R)] \cup_R [(G,C) \stackrel{*}{\cap}_\varepsilon (H,R)]$ bakalım.

$(F,Z) \stackrel{*}{\cap}_\varepsilon (H,R) = (V,Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R;$

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Şimdi, $(G,C) \stackrel{*}{\cap}_\varepsilon (H,R) = (W,C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R;$

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ H'(x), & x \in R - C \\ G(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V,Z \cup R) \cup_R (W,C \cup R) = (T,(Z \cup R) \cap (C \cup R))$ olsun. Burada, $\forall x \in (Z \cap C) \cup R;$

$T(x) = V(x) \cup W(x)$. Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cup G'(x), & x \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(x) \cup H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F(x) \cap H(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, $R-(Z \cap C)$ 'yi ele alırsak, $R-(Z \cap C) = R \cap (Z \cap C)'$ olup, bir eleman $(Z \cap C)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $Z-C$ de, ya $C-Z$ da, ya da $Z \cup C$ nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in R-(Z \cap C)$ ise $x \in R \cap Z \cap C'$ veya $x \in R \cap Z' \cap C$ veya $x \in R \cap Z' \cap C'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının, $(Z \cap C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, [(F, Z) \cap_R (G, C)] \overset{*}{\cap}_\varepsilon (H, R) = [(F, Z) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (H, R)] \cap_R [(G, C) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (H, R)].$$

$$3) (Z \cap C) \cap R = \cap C \cap R' = \emptyset, [(F, Z) *_{\mathcal{R}} (G, C)] \overset{*}{\cap}_\varepsilon (H, R) = [(F, Z) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (H, R)] \cup_R [(G, C) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) *_{\mathcal{R}} (G, C) = (M, Z \cap C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cap C$; $M(x) = F'(x) \cup G'(x)$. $(M, Z \cap C) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (H, R) = (N, (Z \cap C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in (Z \cap C) \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in (Z \cap C) - R \\ H'(x), & x \in R - (Z \cap C) \\ M(x) \cap H(x), & x \in Z \cap (C \cap R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x) \cap G(x), & x \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R - (Z \cap C) = R - (Z \cap C) \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cap H(x), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[F, Z]_{\gamma_\varepsilon}^*(H, R) \cup_R [(G, C)_{\gamma_\varepsilon}^*(H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^*(H, R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(G, C)_{\gamma_\varepsilon}^*(H, R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ H'(x), & x \in R - C \\ G'(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \cup_R (W, C \cup R) = (T, (Z \cup R) \cap (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in (Z \cap C) \cup R$;
 $T(x) = V(x) \cup W(x)$. Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z - R) \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - R) \cap (R - C) = \emptyset \\ F'(x) \cup (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z - R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cup G'(x), & x \in (R - Z) \cap (C - R) = \emptyset \\ H'(x) \cup H'(x), & x \in (R - Z) \cap (R - C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cup (G'(x) \cap H(x)), & x \in (R - Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cup G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C - R) = \emptyset \\ (F'(x) \cap H(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cup (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{X}) \cup G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(\mathfrak{X}) \cup G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ F'(\mathfrak{X}) \cup H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(\mathfrak{X}) \cap H'(\mathfrak{X})) \cup (G'(\mathfrak{X}) \cap H'(\mathfrak{X})), & \mathfrak{X} \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, [(F, Z) \theta_R (G, C)]_{\cap_\varepsilon}^* (H, R) = [(F, Z) \gamma_\varepsilon^* (H, R)] \cap_R [(G, C) \gamma_\varepsilon^* (H, R)].$$

3.4.1.1. Not Teorem 3.4.1 deki dağılmalar ve hangi şartlar altında sağlandığı dikkate alınırsa, Z , E parametre kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde aşağıdaki dağılmaların koşulsuz şartsız sağlandığı aşikardır:

- $(F, Z)_{\cap_\varepsilon}^* [(G, Z) \cap_R (H, Z)] = [(F, Z)_{\cap_\varepsilon}^* (G, Z)] \cap_R [(F, Z)_{\cap_\varepsilon}^* (H, Z)]$.
- $[(F, Z) \cap_R (G, Z)]_{\cap_\varepsilon}^* (H, Z) = [(F, Z)_{\cap_\varepsilon}^* (H, Z)] \cap_R [(G, Z)_{\cap_\varepsilon}^* (H, Z)]$.
- $(F, Z)_{\cap_\varepsilon}^* [(G, Z) \cup_R (H, Z)] = [(F, Z)_{\cap_\varepsilon}^* (G, Z)] \cup_R [(F, Z)_{\cap_\varepsilon}^* (H, Z)]$.
- $[(F, Z) \cup_R (G, Z)]_{\cap_\varepsilon}^* (H, Z) = [(F, Z)_{\cap_\varepsilon}^* (H, Z)] \cup_R [(G, Z)_{\cap_\varepsilon}^* (H, Z)]$.
- $(F, Z)_{\cap_\varepsilon}^* [(G, Z) \Delta_R (H, Z)] = [(F, Z)_{\cap_\varepsilon}^* (G, Z)] \Delta_R [(F, Z)_{\cap_\varepsilon}^* (H, Z)]$.
- $[(F, Z) \Delta_R (G, Z)]_{\cap_\varepsilon}^* (H, Z) = [(F, Z)_{\cap_\varepsilon}^* (H, Z)] \Delta_R [(G, Z)_{\cap_\varepsilon}^* (H, Z)]$.

3.4.2. Teorem Tümleyenli genişletilmiş kesişim işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Kesişim İşleminin Genişletilmiş İşlemler Üzerine Soldan Dağılması

$$1) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, (F, Z)_{\cap_\varepsilon}^* [(G, C) \cap_\varepsilon (H, R)] = [(F, Z)_{\cap_\varepsilon}^* (G, C)] \cap_\varepsilon [(F, Z)_{\cap_\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G,C)\cap_{\varepsilon}(H,R)=(M,C\cup R)$ olsun.
Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$M(x) = \begin{cases} G(x), & x \in C-R \\ H(x), & x \in R-C \\ G(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F,Z) \cap_{\varepsilon}^* (M,C\cup R) = (N,Z \cup (C\cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup (C\cup R)$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C\cup R) \\ M'(x), & x \in (C\cup R) - Z \\ F(x) \cap M(x), & x \in Z \cap (C\cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C\cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G'(x), & x \in (C-R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-C) - Z = Z' \cap B' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F(x) \cap G(x), & x \in Z \cap (C-R) = Z \cap C \cap C' \\ F(x) \cap H(x), & x \in Z \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ F(x) \cap (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z) \cap_{\varepsilon}^* (G,C)] \cap_{\varepsilon} [(F,Z) \cap_{\varepsilon}^* (H,R)]$ bakalım.

$(F,Z) \cap_{\varepsilon}^* (G,C) = (V,Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ G'(x), & x \in C-Z \\ F(x) \cap G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F,Z) \cap_{\varepsilon}^* (H,R) = (W,Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z-R \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in R-Z \\ F(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \cap_{\varepsilon} (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup C \cup R$;

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} V(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ W(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup R) - (Z \cup C) \\ V(\mathfrak{K}) \cap W(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (R-Z) - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap (F(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(\mathfrak{K}) \cap F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(\mathfrak{K}) \cap (F(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K})) \cap F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K})) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K})) \cap F(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (R-Z) - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ \emptyset, & \mathfrak{K} \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ \emptyset, & \mathfrak{K} \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K})) \cap F(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, (F, Z) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} [(G, C) \cup_{\varepsilon} (H, R)] = [(F, Z) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (G, C)] \cup_{\varepsilon} [(F, Z) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, (F, Z) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} [(G, C) *_\varepsilon (H, R)] = [(F, Z) \underset{\setminus_{\varepsilon}}{*} (G, C)] \cup_{\varepsilon} [(F, Z) \underset{\setminus_{\varepsilon}}{*} (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C) *_\varepsilon (H, R) = (M, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$M(x) = \begin{cases} G(x), & x \in C - R \\ H(x), & x \in R - C \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (M, C \cup R) = (N, Z \cup (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) \\ M'(x), & x \in (C \cup R) - Z \\ F(x) \cap M(x), & x \in Z \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G'(x), & x \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R - C) - Z = Z' \cap C' \cap R \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F(x) \cap G(x), & x \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F(x) \cap H(x), & x \in Z \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ F(x) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \underset{\setminus_{\varepsilon}}{*} (G, C)] \cup_{\varepsilon} [(F, Z) \underset{\setminus_{\varepsilon}}{*} (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z) \underset{\setminus_{\varepsilon}}{*} (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ G'(x), & x \in C-Z \\ F(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{\varepsilon}{*} (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \cup_{\varepsilon} (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ W(x), & x \in (Z \cup R) - (Z \cup C) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x), & x \in (Z-R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ H'(x), & x \in (R-Z) - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F(x) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F(x) \cap H'(x)), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cup (F(x) \cap H'(x)), & x \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F(x) \cap G'(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F(x) \cap G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F(x) \cap G'(x)) \cup (F(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\mathfrak{N}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (R-Z) - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(\mathfrak{N}) \cup F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F(\mathfrak{N}) \cap G'(\mathfrak{N})) \cup (F(\mathfrak{N}) \cap H'(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, (F, Z) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} [(G, C) \theta_{\varepsilon}(H, R)] = [(F, Z) \underset{\setminus_{\varepsilon}}{*} (G, C)] \cap_{\varepsilon} [(F, Z) \underset{\setminus_{\varepsilon}}{*} (H, R)].$$

ii) Tümlenli Genişletilmiş Kesişim İşleminin Genişletilmiş İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, [(F, Z) \cup_{\varepsilon} (G, C)] \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (H, R) = [(F, Z) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (H, R)] \cup_{\varepsilon} [(G, C) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \cup_{\varepsilon} (G, C) = (M, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup C$;

$$M(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - C \\ G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in C - Z \\ F(\mathfrak{N}) \cup G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap C \end{cases}$$

$$(M, Z \cup C) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (H, R) = (N, (Z \cup C) \cup R) \text{ olsun. Burada } \forall \mathfrak{N} \in Z \cup C \cup R;$$

$$N(\mathfrak{N}) = \begin{cases} M'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cup C) - R \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in R - (Z \cup C) \\ M(\mathfrak{N}) \cap H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cup C) \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-C)-R = Z \cap C' \cap R' \\ G'(x), & x \in (C-Z)-R = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap C)-R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R-(Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F(x) \cap H(x), & x \in (Z-C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap H(x), & x \in (C-Z) \cap R = Z' \cap C \cap R \\ (F(x) \cup G(x)) \cap H(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (H,R)] \cup_\varepsilon [(G,C) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (H,R)]$ bakalım.

$(F,Z) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (H,R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(G,C) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (H,R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C-R \\ H'(x), & x \in R-C \\ G(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \cup_\varepsilon (W, C \cup R) = (T, Z \cup C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ W(x), & x \in (C \cup R) - (Z \cup R) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F'(X), & X \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H'(X), & X \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F(X) \cap H(X), & X \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ G'(X), & X \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H'(X), & X \in (R-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G(X) \cap H(X), & X \in (C \cap R) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(X) \cup G'(X), & X \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(X) \cup H'(X), & X \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(X) \cup (G(X) \cap H(X)), & X \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(X) \cup G'(X), & X \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(X) \cup H'(X), & X \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap B' \cap R \\ H'(X) \cup (G(X) \cap H(X)), & X \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F(X) \cap H(X)) \cup G'(X), & X \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F(X) \cap H(X)) \cup H'(X), & X \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(X) \cap H(X)) \cup (G(X) \cap H(X)), & X \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F'(X), & X \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G'(X), & X \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(X) \cup G'(X), & X \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(X), & X \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(X) \cup G(X), & X \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ F'(X) \cup H'(X), & X \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(X) \cap H(X)) \cup (G(X) \cap H(X)), & X \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C)ZR = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, [(F, Z) \cap_{\varepsilon} (G, C)] \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, R) = [(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, R)] \cap_{\varepsilon} [(G, C) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \theta_{\varepsilon} (G, C)] \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, R) = [(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\gamma_{\varepsilon}} (H, R)] \cap_{\varepsilon} [(G, C) \overset{*}{\cap}_{\gamma_{\varepsilon}} (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \theta_{\varepsilon} (G, C) = (M, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall X \in Z \cup C$;

$$M(x) = \begin{cases} F(x), & x \in Z-C \\ G(x), & x \in C-Z \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(M, Z \cup C) \stackrel{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, R) = (N, (Z \cup C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in (Z \cup C) - R \\ H'(x), & x \in R - (Z \cup C) \\ M(x) \cap H(x), & x \in (Z \cup C) \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-C) - R = Z \cap C' \cap R' \\ G'(x), & x \in (C-Z) - R = Z' \cap C \cap R' \\ F(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F(x) \cap H(x), & x \in (Z-C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C-Z) \cap R = Z' \cap C \cap R \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cap H(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \stackrel{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, R)] \cap_{\varepsilon} [(G, C) \stackrel{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z) \stackrel{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, Z) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(G, C) \stackrel{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ H'(x), & x \in R - C \\ G'(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \cap_{\varepsilon} (W, C \cup R) = (T, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ W(x), & x \in (C \cup R) - (Z \cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap H(x), & x \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(x) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ F'(x) \cap H(x) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G'(x), & x \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ \emptyset, & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ \emptyset, & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ F'(x) \cap H(x) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, [(F, Z) *_{\varepsilon} (G, C)] *_{\cap_{\varepsilon}} (H, R) = [(F, Z) *_{\gamma_{\varepsilon}} (H, R)] \cup [(G, C) *_{\gamma_{\varepsilon}} (H, R)].$$

3.4.2.1. Not Teorem 3.4.2 deki dağılmalar ve hangi şartlar altında sağlandığı dikkate alınır, Z, E parametre kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde aşağıdaki dağılmaların koşulsuz şartsız sağlandığı aşikardır:

- $(F,Z)_{\cap_\epsilon}^* [(G,Z) \cap_\epsilon (H,Z)] = [(F,Z)_{\cap_\epsilon}^* (G,Z)] \cap_\epsilon [(F,Z)_{\cap_\epsilon}^* (H,Z)]$.
- $[(F,Z) \cap_\epsilon (G,Z)]_{\cap_\epsilon}^* (H,Z) = [(F,Z)_{\cap_\epsilon}^* (H,Z)] \cap_\epsilon [(G,Z)_{\cap_\epsilon}^* (H,Z)]$.
- $(F,Z)_{\cap_\epsilon}^* [(G,Z) \cup_\epsilon (H,Z)] = [(F,Z)_{\cap_\epsilon}^* (G,Z)] \cup_\epsilon [(F,Z)_{\cap_\epsilon}^* (H,Z)]$.
- $[(F,Z) \cup_\epsilon (G,Z)]_{\cap_\epsilon}^* (H,Z) = [(F,Z)_{\cap_\epsilon}^* (H,Z)] \cup_\epsilon [(G,Z)_{\cap_\epsilon}^* (H,Z)]$.
- $(F,Z)_{\cap_\epsilon}^* [(G,Z) \Delta_\epsilon (H,Z)] = [(F,Z)_{\cap_\epsilon}^* (G,Z)] \Delta_\epsilon [(F,Z)_{\cap_\epsilon}^* (H,Z)]$.
- $[(F,Z) \Delta_\epsilon (G,Z)]_{\cap_\epsilon}^* (H,Z) = [(F,Z)_{\cap_\epsilon}^* (H,Z)] \Delta_\epsilon [(G,Z)_{\cap_\epsilon}^* (H,Z)]$.

3.4.3. Teorem Tümleyenli genişletilmiş kesişim işleminin tümleyenli genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Kesişim İşleminin Tümleyenli Genişletilmiş İşlemler Üzerine Soldan Dağılması

$$1) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F,Z)_{\cap_\epsilon}^* [(G,C)_{\cap_\epsilon}^* (H,R)] = [(F,Z)_{\cap_\epsilon}^* (G,C)]_{\cap_\epsilon}^* [(F,Z)_{\cap_\epsilon}^* (H,R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G,C)_{\cap_\epsilon}^* ((H,R) = (M,C \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$M(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ H'(x), & x \in R - C \\ G(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$$(F,Z)_{\cap_\epsilon}^* (M,C \cup R) = (N,Z \cup (C \cup R)) \text{ olsun. Burada } \forall x \in Z \cup C \cup R;$$

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) \\ M'(x), & x \in (C \cup R) - Z \\ F(x) \cap M(x), & x \in Z \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G(x), & x \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ H(x), & x \in (R - C) - Z = Z' \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F(x) \cap G(x), & x \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F(x) \cap H(x), & x \in Z \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ F(x) \cap (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\cap \varepsilon}^* (G, C)]_{\cap \varepsilon}^* [(F, Z)_{\cap \varepsilon}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\cap \varepsilon}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F(x) \cap G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z)_{\cap \varepsilon}^* (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C)_{\cap \varepsilon}^* (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup Z \cap B) \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ W'(x), & x \in (Z \cup R) - (Z \cup C) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in (Z-C)-(Z \cup R) = \emptyset \\ G(\aleph), & \aleph \in (C-Z)-(Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C)-(Z \cup R) = \emptyset \\ F(\aleph), & \aleph \in (Z-R)-(Z \cup C) = \emptyset \\ H(\aleph), & \aleph \in (R-Z)-(Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap R)-(Z \cup C) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap F'(\aleph), & \aleph \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap (F(\aleph) \cap H(\aleph)), & \aleph \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(\aleph) \cap F'(\aleph), & \aleph \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(\aleph) \cap (F(\aleph) \cap H(\aleph)), & \aleph \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F(\aleph) \cap G(\aleph)) \cap F'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F(\aleph) \cap G(\aleph)) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F(\aleph) \cap G(\aleph)) \cap (F(\aleph) \cap H(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} G(\aleph), & \aleph \in (C-Z)-(Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H(\aleph), & \aleph \in (R-Z)-(Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(\aleph) & \aleph \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ \emptyset & \aleph \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ \emptyset & \aleph \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F(\aleph) \cap G(\aleph)) \cap (F(\aleph) \cap H(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\cap \varepsilon}^* [(G, C)_{\cup \varepsilon}^* (H, R)] = [(F, Z)_{\cap \varepsilon}^* (G, C)]_{\cup \varepsilon}^* [(F, Z)_{\cap \varepsilon}^* (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\cap \varepsilon}^* [(G, C)_{* \varepsilon}^* (H, R)] = [(F, Z)_{\setminus \varepsilon}^* (G, C)]_{\cap \varepsilon}^* [(F, Z)_{\setminus \varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C)_{* \varepsilon}^* (H, R) = (M, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in C \cup R$;

$$M(\mathfrak{K}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in C-R \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in R-C \\ G'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z)_{\cap_{\varepsilon}}^* (M, C \cup R) = (N, Z \cup (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup C \cup R$;

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - (C \cup R) \\ M'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (C \cup R) - Z \\ F(\mathfrak{K}) \cap M(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (R - C) - Z = Z' \cap C' \cap R \\ G(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ F(\mathfrak{K}) \cap (G'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\setminus_{\varepsilon}}^* (G, C)]_{\cap_{\varepsilon}}^* [(F, Z)_{\setminus_{\varepsilon}}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\setminus_{\varepsilon}}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup C$;

$$V(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - C \\ G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in C - Z \\ F(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z)_{\setminus_{\varepsilon}}^* (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup R$;

$$W(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - R \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in R - Z \\ F(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C)_{\cap_{\varepsilon}}^* (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ W'(x), & x \in (Z \cup R) - (Z \cup C) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G(x), & x \in (C - Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F(x), & x \in (Z - R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ H(x), & x \in (R - Z) - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(x) \cup H(x), & x \in (Z \cap R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ F'(x) \cap F'(x), & x \in (Z - C) \cap (Z - R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z - C) \cap (R - Z) = \emptyset \\ F'(x) \cap (F(x) \cap H'(x)), & x \in (Z - C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (C - Z) \cap (Z - R) = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C - Z) \cap (R - Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cap (F(x) \cap H'(x)), & x \in (C - Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F(x) \cap G'(x)) \cap F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z - R) = Z \cap C \cap R' \\ (F(x) \cap G'(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R - Z) = \emptyset \\ (F(x) \cap G'(x)) \cap F(x) \cap H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G(x), & x \in (C - Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H(x), & x \in (R - Z) - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F(x), & x \in (Z - C) \cap (Z - R) = Z \cap C' \cap R' \\ \emptyset, & x \in (Z - C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C - Z) \cap (R - Z) = Z' \cap C \cap R \\ \emptyset, & x \in (Z \cap C) \cap (Z - R) = Z \cap C \cap R' \\ F(x) \cap G'(x) \cap F(x) \cap H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N = T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\cap_{\varepsilon}}^* [(G, C)_{\theta_{\varepsilon}}^* (H, R)] = [(F, Z)_{\setminus_{\varepsilon}}^* (G, C)]_{\cap_{\varepsilon}}^* [(F, Z)_{\setminus_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Kesişim İşleminin Tümleyenli Genişletilmiş İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, [(F, Z) \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} (G, C)] \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (H, R) = [(F, Z) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (H, R)] \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} [(G, C) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} (G, C) = (M, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(M, Z \cup C) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (H, R) = (N, (Z \cup C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in (Z \cup C) \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in (Z \cup C) - R \\ H'(x), & x \in R - (Z \cup C) \\ M(x) \cap H(x), & x \in (Z \cup C) \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - C) - R = Z \cap C' \cap R' \\ G(x), & x \in (C - Z) - R = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(x) \cap H(x), & x \in (Z - C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap H(x), & x \in (C - Z) \cap R = Z' \cap C \cap R \\ (F(x) \cup G(x)) \cap H(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (H, R)] \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} [(G, C) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (H, R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(G,C) \cap_{\varepsilon}^* (H,R)=(W,C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C-R \\ H'(x), & x \in R-C \\ G(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V,Z \cup R) \cup_{\varepsilon}^* (W,C \cup R)=(T,Z \cup C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ W'(x), & x \in (C \cup R) - (Z \cup R) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H(x), & x \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ G(x), & x \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H(x), & x \in (R-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cup G'(x), & x \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(x) \cup H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cup (G(x) \cap H(x)) & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F(x) \cap H(x)) \cup H'(x) & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup (G(x) \cap H(x)) & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap C' \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ F(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K})) \cup (G(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, C)] \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, R) = [(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, R)] \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} [(G, C) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\theta_{\varepsilon}} (G, C)] \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, R) = [(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, R)] \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} [(G, C) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, R)],$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, C) = (M, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup C$;

$$M(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - C \\ G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in C - Z \\ F(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap C \end{cases}$$

$$(M, Z \cup C) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, R) = (N, (Z \cup C) \cup R) \text{ olsun. Burada } \forall \mathfrak{K} \in Z \cup C \cup R;$$

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} M'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup C) - R \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in R - (Z \cup C) \\ M'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup C) \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-C)-R = Z \cap C' \cap R' \\ G(x), & x \in (C-Z)-R = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z \cap C)-R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R-(Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F(x) \cap H'(x), & x \in (Z-C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ G(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap R = Z' \cap C \cap R \\ (F(x) \cup G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z) \underset{\varepsilon}{*} (H,R)] \underset{\varepsilon}{*} [(G,C) \underset{\varepsilon}{*} (H,R)]$ bakalım.

$(F,Z) \underset{\varepsilon}{*} (H,R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(G,C) \underset{\varepsilon}{*} (H,R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C-R \\ H'(x), & x \in R-C \\ G(x) \cap H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \underset{\varepsilon}{*} (W, C \cup R) = (T, Z \cup C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup R)-(C \cup R) \\ W'(x), & x \in (C \cup R)-(Z \cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F(X), & X \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H(X), & X \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(X) \cup H(X), & X \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ G(X), & X \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H(X), & X \in (R-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(X) \cup H(X), & X \in (C \cap R) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(X) \cap G'(X), & X \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(X) \cap H'(X), & X \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(X) \cap (G(X) \cap H'(X)), & X \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(X) \cap G'(X), & X \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(X) \cap H'(X), & X \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(X) \cap (G(X) \cap H'(X)) & X \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F(X) \cap H'(X)) \cap G'(X), & X \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F(X) \cap H'(X)) \cap H'(X) & X \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(X) \cap H'(X)) \cap (G(X) \cap H'(X)) & X \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F(X), & X \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G(X), & X \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(X) \cap G'(X), & X \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(X), & X \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ G(X) \cap H'(X), & X \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ F(X) \cap H'(X), & X \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(X) \cap H'(X)) \cap (G(X) \cap H'(X)) & X \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (G, C)]_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, R) = [(F, Z)_{\gamma_{\varepsilon}}^* (H, R)] \cup_{\varepsilon}^* [(G, C)_{\gamma_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

3.4.3.1. Not Teorem 3.4.3 deki dağılmalar ve hangi şartlar altında sağlandığı dikkate alınırsa, Z , E parametre kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde aşağıdaki dağılmaların koşulsuz şartsız sağlandığı aşıkardır:

- $(F, Z)_{\cap_{\varepsilon}}^* [(G, Z)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, Z)] = [(F, Z)_{\cap_{\varepsilon}}^* (G, Z)]_{\cap_{\varepsilon}}^* [(F, Z)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, Z)].$

- $[(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (G,Z)] \underset{\epsilon}{*} (H,Z) = [(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (H,Z)] \underset{\epsilon}{*} [(G,Z) \underset{\epsilon}{*} (H,Z)].$
- $(F,Z) \underset{\epsilon}{*} [(G,Z) \underset{\epsilon}{*} (H,Z)] = [(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (G,Z)] \underset{\epsilon}{*} [(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (H,Z)].$
- $[(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (G,Z)] \underset{\epsilon}{*} (H,Z) = [(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (H,Z)] \underset{\epsilon}{*} [(G,Z) \underset{\epsilon}{*} (H,Z)].$

3.4.4. Teorem Tümleyenli genişletilmiş kesişim işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Kesişim İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Soldan Dağılıması

$$1) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F,Z) \underset{\epsilon}{*} [(G,C) \underset{\sim}{\cap} (H,R)] = [(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (G,C)] \underset{\sim}{\cap} [(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (H,R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G,C) \underset{\sim}{\cap} (H,R) = (M,C)$ olsun. Buradan $\forall x \in C$;

$$M(x) = \begin{cases} G(x), & x \in C - R \\ G(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (M,C) = (N,Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ M'(x), & x \in C - Z \\ F(x) \cap M(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F(x) \cap G(x), & x \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F(x) \cap (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (G,C)] \underset{\epsilon}{\sim} [(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (H,R)]$ bakalım.

$(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (G,C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F(x) \cap G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (H,R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \underset{\epsilon}{\sim} (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (C - Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F(x) \cap G(x), & x \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap F'(x), & x \in (Z - C) \cap (Z - R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z - C) \cap (R - Z) = \emptyset \\ F'(x) \cap (F(x) \cap H(x)), & x \in (Z - C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (C - Z) \cap (Z - R) = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C - Z) \cap (R - Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cap (F(x) \cap H(x)), & x \in (C - Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F(x) \cap G(x)) \cap F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z - R) = Z \cap C \cap R' \\ (F(x) \cap G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R - Z) = \emptyset \\ (F(x) \cap G(x)) \cap (F(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ \emptyset, & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ \emptyset, & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F(x) \cap G(x)) \cap (F(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, Z-C ele alırsak, Z-C=Z∩C' olup, bir eleman C nin tümleyeninde ise o eleman ya R-C de, ya da C ∪ R nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in R-C$ ise $x \in Z \cap C' \cap R$ veya $x \in Z \cap C' \cap R'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile N=T olduğu görülür. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\cap_\varepsilon}{*} [(G, C) \widetilde{\cup} (H, R)] = [(F, Z) \underset{\cap_\varepsilon}{*} (G, C)] \widetilde{\cup} [(F, Z) \underset{\cap_\varepsilon}{*} (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\cap_\varepsilon}{*} [(G, C) \widetilde{*} (H, R)] = [(F, Z) \underset{\setminus_\varepsilon}{*} (G, C)] \widetilde{\cup} [(F, Z) \underset{\setminus_\varepsilon}{*} (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C) \widetilde{*} (H, R) = (M, C)$ olsun. Buradan $\forall x \in C$;

$$M(x) = \begin{cases} G(x), & x \in C-R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{\cap_\varepsilon}{*} (M, C) = (N, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ M'(x), & x \in C-Z \\ F(x) \cap M(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ G'(x), & x \in (C-R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F(x) \cap G(x), & x \in Z \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F(x) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z) \setminus_{\varepsilon}^* (G,C)] \cup [(F,Z) \setminus_{\varepsilon}^* (H,R)]$ bakalım.

$(F,Z) \setminus_{\varepsilon}^* (G,C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F,Z) \setminus_{\varepsilon}^* (H,R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \cup (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cup (Z \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in (Z \cup C) \cup (Z \cup R)$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (C - Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z - C) \cap (Z - R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - C) \cap (R - Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F(x) \cap H'(x)), & x \in (Z - C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (C - Z) \cap (Z - R) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C - Z) \cap (R - Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cup (F(x) \cap H'(x)), & x \in (C - Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F(x) \cap G'(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z - R) = Z \cap C \cap R' \\ (F(x) \cap G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R - Z) = \emptyset \\ (F(x) \cap G'(x)) \cup (F(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F(x) \cap G'(x)) \cup (F(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır .

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\cap_\varepsilon}{*} [(G, C) \underset{\theta}{\sim} (H, R)] = [(F, Z) \underset{\setminus_\varepsilon}{*} (G, C)] \underset{\cap}{\sim} [(F, Z) \underset{\setminus_\varepsilon}{*} (H, R)].$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Kesişim İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, [(F, Z) \underset{\cup}{\sim} (G, C)] \underset{\cap_\varepsilon}{*} (H, R) = [(F, Z) \underset{\cap_\varepsilon}{*} (H, R)] \underset{\cup}{\sim} [(G, C) \underset{\cap_\varepsilon}{*} (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \underset{\cup}{\sim} (G, C) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$M(x) = \begin{cases} F(x), & x \in Z - C \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(M, Z) \underset{\cap}{*} (H, R) = (N, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ M(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - C) - R = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F(x) \cap H(x), & x \in (Z - C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cup G(x)) \cap H(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F,Z)_{\cap_{\varepsilon}}^*(H,R)] \sim [(G,C)_{\cap_{\varepsilon}}^*(H,R)]$.

$(F,Z)_{\cap_{\varepsilon}}^*(H,R)=(V,Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Şimdi $(G,C)_{\cap_{\varepsilon}}^*(H,R)=(W,C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ H'(x), & x \in R - C \\ G(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V,Z \cup R) \sim (W,C \cup R) = (T,(Z \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H'(x), & x \in (R - Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F(x) \cap H(x), & x \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z - R) \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - R) \cap (R - C) = \emptyset \\ F'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (Z - R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cup G'(x), & x \in (R - Z) \cap (C - R) = \emptyset \\ H'(x) \cup H'(x), & x \in (R - Z) \cap (R - C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (R - Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C - R) = \emptyset \\ (F(x) \cap H(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ G(x) \cup H'(x), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ F(x) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, R-Z ele alırsak, $R-Z = R \cap Z'$ olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya C-Z de, ya da $C \cup Z$ nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in Z' \cap C \cap R$ veya $x \in Z' \cap C' \cap R$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının ($Z \Delta C \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\cap}^{\sim} (G, C)_{\cap}^* (H, R) = [(F, Z)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, R)]_{\cap}^{\sim} [(G, C)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z)_{\cap}^{\sim} (G, C)_{\cap}^* (H, R)]_{\cap_{\varepsilon}}^* = [(F, Z)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, R)]_{\cap}^{\sim} [(G, C)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z)_{\cap}^{\sim} (G, C)_{\cap}^* (H, R) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$M(x) = \begin{cases} F(x), & x \in Z-C \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(M, Z)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, R) = (N, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ M(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-C)-R = Z \cap C' \cap R' \\ F(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap C)-R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F(x) \cap H(x), & x \in (Z-C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cap H(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F,Z)_{\gamma_\varepsilon}^*(H,R)] \sim_\cap [(G,C)_{\gamma_\varepsilon}^*(H,R)]$.

$(F,Z)_{\gamma_\varepsilon}^*(H,R) = (V,Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Şimdi $(G,C)_{\gamma_\varepsilon}^*(H,R) = (W,C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C-R \\ H'(x), & x \in R-C \\ G'(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V,Z \cup R) \sim_\cap (W,C \cup R) = (T,(Z \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{X}) \cap H(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{X}) \cap G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(\mathfrak{X}) \cap H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{X}) \cap (G'(\mathfrak{X}) \cap H(\mathfrak{X})), & \mathfrak{X} \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{X}) \cap G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{X}) \cap H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(\mathfrak{X}) \cup (G'(\mathfrak{X}) \cap H(\mathfrak{X})), & \mathfrak{X} \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F'(\mathfrak{X}) \cap H(\mathfrak{X})) \cap G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F'(\mathfrak{X}) \cap H(\mathfrak{X})) \cap H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(\mathfrak{X}) \cap H(\mathfrak{X})) \cap (G'(\mathfrak{X}) \cap H(\mathfrak{X})), & \mathfrak{X} \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(\mathfrak{X}) \cap G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(\mathfrak{X}) \cup G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ \emptyset, & \mathfrak{X} \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(\mathfrak{X}) \cap H(\mathfrak{X})) \cap (G'(\mathfrak{X}) \cap H(\mathfrak{X})), & \mathfrak{X} \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, [(F, Z) \underset{*}{\sim} (G, C)] \underset{*}{\cap}_{\epsilon} (H, R) = [(F, Z) \underset{*}{\gamma}_{\epsilon} (H, R)] \underset{*}{\cup} [(G, C) \underset{*}{\gamma}_{\epsilon} (H, R)].$$

3.4.4.1. Not Teorem 3.4.4 deki dağılmalar ve hangi şartlar altında sağlandığı dikkate alınırsa, Z, E parametre kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde aşağıdaki dağılmaların koşulsuz şartsız sağlandığı aşıkardır:

- $(F, Z) \underset{*}{\cap}_{\epsilon} [(G, Z) \underset{*}{\sim} (H, Z)] = [(F, Z) \underset{*}{\cap}_{\epsilon} (G, Z)] \underset{*}{\sim} [(F, Z) \underset{*}{\cap}_{\epsilon} (H, Z)].$
- $[(F, Z) \underset{*}{\sim} (G, Z)] \underset{*}{\cap}_{\epsilon} (H, Z) = [(F, Z) \underset{*}{\cap}_{\epsilon} (H, Z)] \underset{*}{\sim} [(G, Z) \underset{*}{\cap}_{\epsilon} (H, Z)].$
- $(F, Z) \underset{*}{\cap}_{\epsilon} [(G, Z) \underset{*}{\cup} (H, Z)] = [(F, Z) \underset{*}{\cap}_{\epsilon} (G, Z)] \underset{*}{\sim} [(F, Z) \underset{*}{\cap}_{\epsilon} (H, Z)].$

- $[(F,Z) \widetilde{\cup} (G,Z)] \overset{*}{\cap}_{\epsilon} (H,Z) = [(F,Z) \overset{*}{\cap}_{\epsilon} (H,Z)] \widetilde{\cup} [(G,Z) \overset{*}{\cap}_{\epsilon} (H,Z)].$
- $(F,Z) \overset{*}{\cap}_{\epsilon} [(G,Z) \widetilde{\Delta} (H,Z)] = [(F,Z) \overset{*}{\cap}_{\epsilon} (G,Z)] \widetilde{\Delta} [(F,Z) \overset{*}{\cap}_{\epsilon} (H,Z)].$
- $[(F,Z) \widetilde{\Delta} (G,Z)] \overset{*}{\cap}_{\epsilon} (H,Z) = [(F,Z) \overset{*}{\cap}_{\epsilon} (H,Z)] \widetilde{\Delta} [(G,Z) \overset{*}{\cap}_{\epsilon} (H,Z)].$

3.4.5. Teorem Tümleyenli genişletilmiş kesişim işleminin tümleyenli esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Kesişim İşleminin Tümleyenli Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Soldan Dağılıması

$$1) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F,Z) \overset{*}{\cap}_{\epsilon} [(G,C) \underset{\cap}{\sim} (H,R)] = [(F,Z) \overset{*}{\cap}_{\epsilon} (G,C)] \underset{\cap}{\sim} [(F,Z) \overset{*}{\cap}_{\epsilon} (H,R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G,C) \underset{\cap}{\sim} (H,R) = (M,C)$ olsun. Buradan $\forall \mathfrak{N} \in C$;

$$M(\mathfrak{N}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in C - R \\ G(\mathfrak{N}) \cap H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in C \cap R \end{cases}$$

$(F,Z) \overset{*}{\cap}_{\epsilon} (M,C) = (N,Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup C$;

$$N(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - C \\ M'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in C - Z \\ F(\mathfrak{N}) \cap M(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap C \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - C \\ G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ G'(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F(\mathfrak{N}) \cap G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F(\mathfrak{N}) \cap (G(\mathfrak{N}) \cap H(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z)_{\cap}^* (G,C)]_{\cap}^* [(F,Z)_{\cap}^* (H,R)]$ bakalım.

$(F,Z)_{\cap}^* (G,C)=(V,Z\cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z\cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ G'(x), & x \in C-Z \\ F(x) \cap G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F,Z)_{\cap}^* (H,R)=(W,Z\cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z\cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V,Z\cup C)_{\cap}^* (W,Z\cup R)=(T,(Z\cup C))$ olsun. Burada $\forall x \in Z\cup C$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z\cup C)-(Z\cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z\cup C) \cap (Z\cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-C)-(Z\cup R) = \emptyset \\ G(x), & x \in (C-Z)-(Z\cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z \cap C)-(Z\cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cap (F(x) \cap H(x)), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cap (F(x) \cap H(x)), & x \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F(x) \cap G(x)) \cap F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F(x) \cap G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ ((F(x) \cap G(x)) \cap (F(x) \cap H(x))), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ \emptyset, & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ \emptyset, & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ ((F(x) \cap G(x)) \cap (F(x) \cap H(x))), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, Z-C ele alırsak, Z-C=Z∩C' olup, bir eleman C nin tümleyeninde ise o eleman ya R-C de, ya da C ∪ R nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in R - C$ ise $x \in Z \cap C' \cap R$ veya $x \in Z \cap C' \cap R'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile N=T olduğu görülür. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\cap_{\epsilon}}{*} [(G, C) \underset{\cup}{*} (H, R)] = [(F, Z) \underset{\cap_{\epsilon}}{*} (G, C)] \underset{\cup}{*} [(F, Z) \underset{\cap_{\epsilon}}{*} (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\cap_{\epsilon}}{*} [(G, C) \underset{*}{\sim} (H, R)] = [(F, Z) \underset{\setminus_{\epsilon}}{*} (G, C)] \underset{\cup}{*} [(F, Z) \underset{\setminus_{\epsilon}}{*} (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C) \underset{*}{\sim} (H, R) = (M, C)$ olsun. Buradan $\forall x \in C$;

$$M(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{\cap_{\epsilon}}{*} (M, C) = (N, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ M'(x), & x \in C - Z \\ F(x) \cap M(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ G(x), & x \in (C-R)-Z = Z' \cap C \cap R' \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R)-Z = Z' \cap C \cap R \\ F(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F(x) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (G,C)] \underset{U}{*} [(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (H,R)]$ bakalım.

$(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (G,C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ G'(x), & x \in C-Z \\ F(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F,Z) \underset{\epsilon}{*} (H,R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \underset{U}{*} (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F(x) \cap H'(x)), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cup (F(x) \cap H'(x)), & x \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F(x) \cap G'(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F(x) \cap G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ ((F(x) \cap G'(x)) \cup (F(x) \cap H'(x))), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ ((F(x) \cap G'(x)) \cup (F(x) \cap H'(x))), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\cap}{\overset{*}{\sim}}_{\epsilon} [(G, C) \underset{\cap}{\overset{*}{\sim}}_{\theta} (H, R)] = [(F, Z) \underset{\cap}{\overset{*}{\sim}}_{\epsilon} (G, C)] \underset{\cap}{\overset{*}{\sim}}_{\epsilon} [(F, Z) \underset{\cap}{\overset{*}{\sim}}_{\epsilon} (H, R)].$$

ii) Tümlenli Genişletilmiş Kesişim İşleminin Tümlenli Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{\cup}{\overset{*}{\sim}} (G, C)] \underset{\cap}{\overset{*}{\sim}}_{\epsilon} (H, R) = [(F, Z) \underset{\cap}{\overset{*}{\sim}}_{\epsilon} (H, R)] \underset{\cup}{\overset{*}{\sim}} [(G, C) \underset{\cap}{\overset{*}{\sim}}_{\epsilon} (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \underset{\cup}{\overset{*}{\sim}} (G, C) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(M, Z) \stackrel{*}{\cap}_{\epsilon} (H, R) = (N, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ M(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-C)-R = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap C)-R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F'(x) \cap H(x), & x \in (Z-C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cup G(x)) \cap H(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z) \stackrel{*}{\cap}_{\epsilon} (H, R)] \sim_{\cup} [(G, C) \stackrel{*}{\cap}_{\epsilon} (H, R)]$.

$(F, Z) \stackrel{*}{\cap}_{\epsilon} (H, R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Şimdi $(G, C) \stackrel{*}{\cap}_{\epsilon} (H, R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C-R \\ H'(x), & x \in R-C \\ G(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \sim_{\cup} (W, C \cup R) = (T, (Z \cup R) \cup (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H(x), & x \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cup G'(x), & x \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(x) \cup H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F(x) \cap H(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cup G(x), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ F(x) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, R-Z ele alırsak, R-Z=R∩Z' olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya C-Z de, ya da C∪Z nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in Z' \cap C \cap R$ veya $x \in Z' \cap C' \cap R$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile N=T sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \sim_{\cap}^* (G, C)] \cap_{\epsilon}^* (H, R) = [(F, Z) \cap_{\epsilon}^* (H, R)] \sim_{\cap}^* [(G, C) \cap_{\epsilon}^* (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{\theta}{\sim}^* (G, C)] \underset{\cap}{\cap}_{\varepsilon}^* (H, R) = [(F, Z) \underset{\gamma_{\varepsilon}}{\sim}^* (H, R)] \underset{\cap}{\cap}^* [(G, C) \underset{\gamma_{\varepsilon}}{\sim}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \underset{\theta}{\sim}^* (G, C) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(M, Z) \underset{\cap}{\cap}_{\varepsilon}^* (H, R) = (N, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ M(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - C) - R = Z \cap C' \cap R' \\ F(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cap H(x), & x \in (Z - C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cap H(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z) \underset{\gamma_{\varepsilon}}{\sim}^* (H, R)] \underset{\cap}{\cap}^* [(G, C) \underset{\gamma_{\varepsilon}}{\sim}^* (H, R)]$.

$(F, Z) \underset{\gamma_{\varepsilon}}{\sim}^* (H, R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Şimdi $(G, C) \underset{\gamma_{\varepsilon}}{\sim}^* (H, R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C-R \\ H'(x), & x \in R-C \\ G'(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \sim (W, C \cup R) = (T, (Z \cup R) \cap (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H(x), & x \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F(x) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(x) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ \emptyset, & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ \emptyset, & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ denk olduğu aşıkardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{*}{\sim} (G, C)] \underset{*}{\cap_{\varepsilon}} (H, R) = [(F, Z) \underset{*}{\gamma_{\varepsilon}} (H, R)] \underset{*}{\sim} [(G, C) \underset{*}{\gamma_{\varepsilon}} (H, R)].$$

3.4.5.1. Not Teorem 3.4.5 deki dağılmalar ve hangi şartlar altında sağlandığı dikkate alınırsa, Z, E parametre kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde aşağıdaki dağılmaların koşulsuz şartsız sağlandığı aşıkardır:

- $(F, Z) \underset{*}{\cap_{\varepsilon}} [(G, Z) \underset{*}{\sim} (H, Z)] = [(F, Z) \underset{*}{\cap_{\varepsilon}} (G, Z)] \underset{*}{\sim} [(F, Z) \underset{*}{\cap_{\varepsilon}} (H, Z)].$
- $[(F, Z) \underset{*}{\sim} (G, Z)] \underset{*}{\cap_{\varepsilon}} (H, Z) = [(F, Z) \underset{*}{\cap_{\varepsilon}} (H, Z)] \underset{*}{\sim} [(G, Z) \underset{*}{\cap_{\varepsilon}} (H, Z)].$
- $(F, Z) \underset{*}{\cap_{\varepsilon}} [(G, Z) \underset{*}{\sim} (H, Z)] = [(F, Z) \underset{*}{\cap_{\varepsilon}} (G, Z)] \underset{*}{\sim} [(F, Z) \underset{*}{\cap_{\varepsilon}} (H, Z)].$
- $[(F, Z) \underset{*}{\sim} (G, Z)] \underset{*}{\cap_{\varepsilon}} (H, Z) = [(F, Z) \underset{*}{\cap_{\varepsilon}} (H, Z)] \underset{*}{\sim} [(G, Z) \underset{*}{\cap_{\varepsilon}} (H, Z)]$

3.4.6. Teorem $(S_Z(U), \cap_R, \underset{*}{\cap_{\varepsilon}})$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halkadır.

İspat: Ali ve diğerleri (2011), Z, E evrensel kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $(S_Z(U), \cap_R)$ cebirsel yapısının birimi U_Z olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 3.3.1 'de $(S_Z(U), \underset{*}{\cap_{\varepsilon}})$ cebirsel yapısının da birimi U_Z olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu gösterildi. Not 3.4.5.1'den, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde, $\underset{*}{\cap_{\varepsilon}}$ işleminin $\cap_R$ işlemine sağdan ve soldan dağıldığı bilinmektedir. Böylece, $(S_Z(U), \cap_R, \underset{*}{\cap_{\varepsilon}})$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halkadır.

3.4.7. Teorem $(S_Z(U), \cup_R, \underset{*}{\cap_{\varepsilon}})$ ve $(S_Z(U), \Delta_R, \underset{*}{\cap_{\varepsilon}})$ cebirsel yapıları, komutatif, idempotent, birimli bir hemihalka.

İspat: Ali ve diğerleri (2011), $(S_Z(U), \cup_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_Z$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 3.3.1 de $(S_Z(U), \cap_\varepsilon^*)$ cebirsel yapısının, birimi U_Z olan, komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes olduğu, Not 3.4.5.1'den $\cap_\varepsilon^*$ işleminin $\cup_R$ işlemine ağdan ve soldan dağıldığı bilinmektedir.

Ayrıca, $(F, Z) \cap_\varepsilon^* \emptyset_Z = \emptyset_Z \cap_\varepsilon^* (F, Z) = \emptyset_Z, (F, Z) \cup_R \emptyset_Z = \emptyset_Z \cup_R (F, Z) = (F, Z)$, $(S_Z(U), \cup_R, \cap_\varepsilon^*)$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli bir hemiringtir.

Benzer şekilde, $\cap_\varepsilon^*$ işleminin Δ_R işlemine soldan ve sağdan dağıldığı. Not 3.4.5.1'den gösterilebilir. $(F, Z) \cap_\varepsilon^* \emptyset_Z = \emptyset_Z \cap_\varepsilon^* (F, Z) = \emptyset_Z, (F, A) \Delta_R \emptyset_Z = \emptyset_Z \Delta_R (F, Z) = (F, Z)$ olduğundan, $(S_Z(U), \Delta_R, \cap_\varepsilon^*)$ cebirsel yapısı komutatif, çarpımsal idempotent, birimli bir hemiringtir.

3.4.8. Teorem $(S_Z(U), \Delta_R, \cap_\varepsilon^*)$ cebirsel yapısı bir Boole Halkasıdır.

İspat: Sezgin ve Çağman (2023), $(S_Z(U), \Delta_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_Z$ olup, her elemanın tersi kendisi olan, değişmeli bir grup olduğunu göstermişti. Sonuç 3.3.1 de $(S_Z(U), \cap_\varepsilon^*)$ cebirsel yapısının, birimi U_Z olan, komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes, dolayısıyla bir yarıgrup olduğu, Not 3.4.5.1'den, $\cap_\varepsilon^*$ işleminin Δ_R işlemine sağdan ve soldan dağıldığı gösterilmiştir. Dolayısıyla $(S_Z(U), \Delta_R, \cap_\varepsilon^*)$ cebirsel yapısı birimli değişmeli bir halkadır. Ayrıca, $(F, Z)^2 = (F, Z) \cap_\varepsilon^* (F, Z)$ olduğundan, $(S_Z(U), \Delta_R, \cap_\varepsilon^*)$ cebirsel yapısı bir Boole Halkasıdır. $(F, Z) \tilde{\Delta} (F, Z) = \emptyset_Z$ ve $(F, Z) \cap_\varepsilon^* (G, Z) = (G, Z) \cap_\varepsilon^* (F, Z)$ olması, $(S_Z(U), \Delta_R, \cap_\varepsilon^*)$ cebirsel yapısının bir Bool halkası olmasının doğal sonucudur.

3.4.9. Teorem $(S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \cup_R, \cap_\varepsilon^*)$ Bool, De Morgan, Kleene ve Stone cebiridir.

İspat: $(S_Z(U), \cup_R)$ cebirsel yapısı, birimi $\emptyset_Z$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes dolayısıyla bir yarıgruptur. $(S_Z(U), \cap_\epsilon^*)$ cebirsel yapısı, birimi U_Z olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes dolayısıyla bir yarıgruptur. Teorem 3.3 (24) de, $\cap_\epsilon^*$ ve $\cup_R$ işlemlerinin yutan kuralını sağladığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, $(S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \cup_R, \cap_\epsilon^*)$ sınırlı bir kafestir. Ayrıca, $\forall (F, Z) \in S_Z(U)$ için, $(F, Z) \cup_R (F, Z)^r = U_Z$ ve $(F, Z) \cap_\epsilon^* (F, Z)^r = \emptyset_Z$ olduğundan, $(S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \cup_R, \cap_\epsilon^*)$ tümlemeli sınırlı bir kafestir. Üstelik, Not 3.4.5.1'den $\cap_\epsilon^*$ işleminin $\cap_R$ işlemine sağdan ve soldan dağıldığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, $(S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \cup_R, \cap_\epsilon^*)$ dağılmalı, tümlemeli, sınırlı bir kafes, dolayısıyla bir Boole cebiridir.

Üstelik, $[(F, Z) \cap_\epsilon^* (G, Z)]^r = (F, Z)^r \cup_R (G, Z)^r$ ve $[(F, Z) \cup_R (G, Z)]^r = (F, Z)^r \cap_\epsilon^* (G, Z)^r$ yani De Morgan kuralı da sağladığından, $(S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \cup_R, \cap_\epsilon^*)$ De Morgan Cebiridir. Ayrıca, $\forall (F, Z), (G, Z) \in S_Z(U)$ için, $(F, Z) \cap_\epsilon^* (F, Z)^r = \emptyset_Z \cong (G, Z) \cup_R (G, Z)^r = U_Z$ olduğundan, $(S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \cup_R, \cap_\epsilon^*)$ bir Kleene Cebiridir.

Üstelik, $(F, Z) \cap_\epsilon^* (F, Z)^r = \emptyset_Z$ olduğu bilinmektedir ve $(F, Z) \cap_\epsilon^* (G, Z) = \emptyset_Z$ iken $(G, Z) \cong (F, Z)^r$ olduğu Teorem 3.3 (16) da gösterilmiştir. Bu, $(F, Z)^r$ nin (F, Z) nin sözde tümleyeni olduğunu gösterir. Ayrıca, $(F, Z)^r \cup_R [(F, Z)^r]^r = U_Z$ olduğundan, $(S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \cup_R, \cap_\epsilon^*)$ Stone'nun birimi özelliğini sağlar ve $(S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \cup_R, \cap_\epsilon^*)$ bir Stone cebiridir.

Burada hemen not edelim ki, $(S_E(U), \cap_\epsilon^*)$ cebirsel yapısı birleşmeli olmadığından, $\cup_R$ işlemi ile birlikte $S_E(U)$ kümesi üzerinde bir kafes oluşturma durumu söz konusu olamaz.

3.4.10. Sonuç $(S_Z(U), \cap_\epsilon, \cap_\epsilon^*)$, $(S_Z(U), \cap_\epsilon^*, \cap_\epsilon^*)$, $(S_Z(U), \cap_\epsilon^*, \cap_\epsilon^*)$, $(S_Z(U), \cap_\epsilon^*, \cap_\epsilon^*)$ cebirsel yapıları birer komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halkadır.

3.4.11. *Sonuç* $(S_Z(U), \cup_R, \overset{*}{\cap}_\varepsilon)$, $(S_Z(U), \overset{*}{\cup}_\varepsilon, \overset{*}{\cap}_\varepsilon)$, $(S_Z(U), \sim, \overset{*}{\cap}_\varepsilon)$, $(S_Z(U), \overset{*}{\sim}, \overset{*}{\cap}_\varepsilon)$ ve $(S_Z(U), \Delta_\varepsilon, \overset{*}{\cap}_\varepsilon)$, $(S_Z(U), \overset{*}{\sim}, \overset{*}{\cap}_\varepsilon)$, $(S_Z(U), \overset{*}{\sim}, \overset{*}{\cap}_\varepsilon)$ cebirsel yapıları birer komutatif, idempotent, birimli bir hemihalka.

3.4.12. *Sonuç* $(S_Z(U), \Delta_\varepsilon, \overset{*}{\cap}_\varepsilon)$, $(S_Z(U), \overset{*}{\sim}, \overset{*}{\cap}_\varepsilon)$, $(S_Z(U), \overset{*}{\sim}, \overset{*}{\cap}_\varepsilon)$ cebirsel yapıları da bir Boole halkasıdır.

3.4.13. *Sonuç* $(S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \cup_\varepsilon, \overset{*}{\cap}_\varepsilon)$, $(S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \overset{*}{\cup}_\varepsilon, \overset{*}{\cap}_\varepsilon)$, $(S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \sim, \overset{*}{\cap}_\varepsilon)$, $(S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \overset{*}{\sim}, \overset{*}{\cap}_\varepsilon)$ bir Bool cebiridir, De Morgan cebiridir, Kleene cebiridir, Stone cebiridir.

3.4.14. *Teorem* $(S_Z(U), \overset{r}{\cap}_\varepsilon, \overset{*}{\cap}_\varepsilon, U_Z)$ bir MV-cebiridir.

İspat: $(S_Z(U), \overset{r}{\cap}_\varepsilon, \overset{*}{\cap}_\varepsilon, U_Z)$ bir MV-cebiri olduğunu örnek için, MV-cebiri şartları sağladığını gösterelim.

- (MV1) $(S_Z(U), \overset{*}{\cap}_\varepsilon, U_Z)$ değişmeli bir monoiddir. (Sonuç 3.3.1)
- (MV2) $((F, Z)^r)^r = (F, Z)$. (Ali ve diğerleri 2011)
- (MV3) $(U_Z)^r \overset{*}{\cap}_\varepsilon (F, Z) = \emptyset_Z \overset{*}{\cap}_\varepsilon (F, Z) = \emptyset_Z = (U_Z)^r$.
- (MV4) $[(F, Z)^r \overset{*}{\cap}_\varepsilon (G, Z)]^r \overset{*}{\cap}_\varepsilon (G, Z) = ((G, Z)^r \overset{*}{\cap}_\varepsilon (F, Z)^r)^r \overset{*}{\cap}_\varepsilon (F, Z)$. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
 [(F, Z)^r \overset{*}{\cap}_\varepsilon (G, Z)]^r \overset{*}{\cap}_\varepsilon (G, Z) &= [((F, Z)^r)^r \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, Z)^r]^r \overset{*}{\cap}_\varepsilon (G, Z) \\
 &= [(F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, Z)]^r \overset{*}{\cap}_\varepsilon (G, Z) \\
 &= [(F, Z) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (G, Z)] \overset{*}{\cup}_\varepsilon [(G, Z)^r \overset{*}{\cap}_\varepsilon (G, Z)] \\
 &= [(F, Z) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (G, Z)] \overset{*}{\cup}_\varepsilon [(F, Z) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (F, Z)^r]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (F, Z) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} [(G, Z) \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} (F, Z)^r] \\
&= (F, Z) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} [(G, Z)^r \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (F, Z)]^r \\
&= [(G, Z)^r \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (F, Z)]^r \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (F, Z)
\end{aligned}$$

Böylelikle, $(S_Z(U), \underset{\cap_{\varepsilon}}{^r}, \underset{\cap_{\varepsilon}}{*}, U_Z)$ bir MV-cebiridir.



4. TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ GAMMA İŞLEMİ

Bu bölümde, tümleyenli genişletilmiş gamma adı verilen yeni bir esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir.

4.1. Tanım $(F, Z), (G, C) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümenin $(F, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (G, C)$ ile gösterilen tümleyenli genişletilmiş gamma işlemi $K=Z \cup C$ ve $\forall x \in K$;

$$H(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ G'(x), & x \in C-Z \\ F(x) \gamma G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

olmak üzere $(F, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (G, C) = (H, K)$ ile tanımlanır.

4.2. Örnek $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi $Z=\{e_1, e_3\}$ ve $C=\{e_2, e_3, e_4\}$ E nin iki alt kümesi, $U=\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme olmak üzere (F, Z) ve (G, C) , $(F, Z)=\{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, C)=\{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (G, C) = (L, Z \cup C)$ olmak üzere $\forall x \in Z \cup C$;

$$L(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ G'(x), & x \in C-Z \\ F'(x) \cap G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

Burada, $Z \cup C = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $Z-C = \{e_1\}$, $C-Z = \{e_2, e_4\}$, $Z \cap C = \{e_3\}$ olmak üzere, $L(e_1) = F'(e_1) = \{h_1, h_3, h_4\}$, $L(e_2) = G'(e_2) = \{h_2, h_3\}$, $L(e_4) = G'(e_4) = \{h_1, h_2, h_4\}$ ve $Z(e_3) = F'(e_3) \cap G(e_3) = \{h_3, h_4\} \cap \{h_2, h_3, h_4\} = \{h_3, h_4\}$. Böylece, $(F, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (G, C) = \{(e_1, \{h_1, h_3, h_4\}), (e_2, \{h_2, h_3\}), (e_3, \{h_3, h_4\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_4\})\}$.

4.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

- 1) γ_ε^* , $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: γ_ε^* işleminin, $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\begin{aligned} \gamma_\varepsilon^* : S_E(U) \times S_E(U) &\rightarrow S_E(U) \\ ((F,R), (G,T)) &\rightarrow (F,R) \gamma_\varepsilon^* (G,T) = (Z, R \cup T) \end{aligned}$$

olup, $(F,R), (G,T) \in S_E(U)$ olduğunda, $(F,R) \gamma_\varepsilon^* (G,T) \in S_E(U)$ olur.

- 2) $[(F,Z) \gamma_\varepsilon^* (G,C)] \gamma_\varepsilon^* (H,R) \neq (F,Z) \gamma_\varepsilon^* [(G,C) \gamma_\varepsilon^* (H,R)]$.

İspat: Öncelikle sol tarafa bakalım. $(F,Z) \gamma_\varepsilon^* (G,C) = (T, Z \cup C)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ G'(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$(T, Z \cup C) \gamma_\varepsilon^* (H,R) = (M, Z \cup C \cup R)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup C \cup R$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} T'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup C) - R \\ H'(\aleph), & \aleph \in R - (Z \cup C) \\ T'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup C) \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$M(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in (Z - C) - R = Z \cap C' \cap R' \\ G(\aleph), & \aleph \in (C - Z) - R = Z' \cap C \cap R' \\ F(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(\aleph), & \aleph \in R - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in (Z - C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ G'(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in (C - Z) \cap R = Z' \cap C \cap R \\ (F(\aleph) \cap G'(\aleph)) \cap H(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $(F,Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} [(G,C) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H,R)]$ bakalım.

$(G,C) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H,R) = (K,C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$K(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ H'(x), & x \in R - C \\ G'(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F,Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (K,C \cup R) = (S,Z \cup C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$S(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) \\ K'(x), & x \in (C \cup R) - Z \\ F'(x) \cap K(x), & x \in Z \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$S(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G(x), & x \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ H(x), & x \in (R - C) - Z = Z' \cap C' \cap R \\ G(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ F'(x) \cup (G'(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece, $M \neq S$ olduğu görülür. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\underset{\gamma_\varepsilon}{*}$ işlemi birleşme özelliğine sahip değildir.

$$3) [(F,Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (G,Z)] \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H,Z) \neq (F,Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} [(G,Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H,Z)].$$

İspat: Öncelikle sol tarafa bakalım $(F,Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (G,Z) = (T,Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup Z = Z$;

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ G'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ F'(x) \cap G(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(T, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H, Z) = (M, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} T'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ T'(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan,

$$M(\aleph) = \begin{cases} T'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ (F(\aleph) \cup G'(\aleph)) \cap H(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Şimdi sağ tarafa yani $(F, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} [(G, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H, Z)]$ bakalım. $(G, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H, Z) = (L, Z \cup Z)$ olsun.

Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$L(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ G'(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (L, Z) = (N, Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ L'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap L(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ L'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap (G'(\aleph) \cap H(\aleph)), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Böylece, $M \neq N$ olduğu görülür. Yani, $Z \subseteq E$ sabit bir paramere kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$

kümesi üzerinde $\underset{\gamma_\varepsilon}{*}$ işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F,Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (G,C) \neq (G,C) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (F,Z).$$

İspat: Öncelikle eşitliğin her iki tarafındaki esnek kümenin parametre kümeleri $Z \cup C$ olup, esnek eşitliğin ilk şartı sağlanmış olur. Şimdi eşitliğin sol tarafına bakalım.

$$(F,Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (G,C) = (H, Z \cup C) \text{ olsun. Burada } \forall \mathfrak{N} \in Z \cup C;$$

$$H(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - C \\ G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in C - Z \\ F'(\mathfrak{N}) \cap G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap C \end{cases}$$

$$\text{Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani } (G,C) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (F,Z) \text{ bakalım. } (G,C) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (F,Z) = (T, C \cup Z) \text{ olsun.}$$

$$\text{Burada } \forall \mathfrak{N} \in C \cup Z;$$

$$T(\mathfrak{N}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in C - Z \\ F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - C \\ G'(\mathfrak{N}) \cap F(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in C \cap Z \end{cases}$$

Böylece, $H \neq T$ olduğu görülür. Benzer şekilde, $(F,Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (G,Z) \neq (G,Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (F,Z)$. Yani, $S_E(U)$

ve $S_Z(U)$ kümeleri üzerinde $\underset{\gamma_\varepsilon}{*}$ işleminin değişme özelliği yoktur.

$$5) (F,Z) \underset{\gamma}{*} (F,Z) = \emptyset_Z.$$

$$\text{İspat: } (F,Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (F,Z) = (H, Z \cup Z) \text{ olsun. Burada } \forall \mathfrak{N} \in Z;$$

$$H(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\mathfrak{N}) \cap F(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan, $\forall \mathfrak{N} \in Z; H(\mathfrak{N}) = F'(\mathfrak{N}) \cap F(\mathfrak{N}) = U$ olup $(H,Z) = \emptyset_Z$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\gamma_\varepsilon}{*}$ işlemi denk güçlülük (idempotent) özelliğine sahip değildir.

$$6) \emptyset_Z \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (F, Z) = (F, Z).$$

İspat: $\emptyset_Z = (S, Z)$ olsun. $\forall \aleph \in Z; S(\aleph) = \emptyset$. $(S, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (F, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z;$

$$H(\aleph) = \begin{cases} S'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ S'(\aleph) \cap F(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z; H(\aleph) = S'(\aleph) \cap F(\aleph) = U \cap F(\aleph) = F(\aleph)$ olup, $(H, Z) = (F, Z)$.

$S_Z(U)$ kümesi üzerinde $\overset{*}{\gamma_\varepsilon}$ işleminin sol birim elemanı $\emptyset_Z$ esnek kümesidir.

$$7) (F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} \emptyset_Z = \emptyset_Z.$$

İspat: $\emptyset_Z = (S, Z)$ olsun. $\forall \aleph \in Z; S(\aleph) = \emptyset$. $(F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (S, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z;$

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ S'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap S(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z; H(\aleph) = F'(\aleph) \cap S(\aleph) = F'(\aleph) \cap \emptyset = \emptyset$ olup, $(H, Z) = \emptyset_Z$.

Yani, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde $\overset{*}{\gamma_\varepsilon}$ işlemi için, her elemanın sol birim eleman olan $\emptyset_Z$ ye göre sol tersi, $\emptyset_Z$ esnek kümesidir. Ayrıca, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde $\overset{*}{\gamma_\varepsilon}$ işleminin sağ yutan elemanı $\emptyset_Z$ esnek kümesidir.

$$8) (F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (F, Z) = (F, Z)^T.$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (K, \emptyset)$ ve $(F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (K, \emptyset) = (Q, Z \cup \emptyset) = (Q, Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z;$

$$Q(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - \emptyset = Z \\ K'(\aleph), & \aleph \in \emptyset - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap K(\aleph), & \aleph \in Z \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Buradan, $\forall \aleph \in Z$; $Q(\aleph) = F'(\aleph)$ olup $(Q, Z) = (F, Z)^r$.

Benzer şekilde, $\emptyset \emptyset \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (F, Z) = (W, \emptyset \cup Z) = (W, Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$W(\aleph) = \begin{cases} K'(\aleph), & \aleph \in \emptyset - Z = \emptyset \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - \emptyset = Z \\ K'(\aleph) \cap F(\aleph), & \aleph \in \emptyset \cap Z = \emptyset \end{cases}$$

Buradan, $\forall \aleph \in Z$; $W(\aleph) = F'(\aleph)$ olup $(W, Z) = (F, Z)^r$.

$$9) U_Z \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (F, Z) = \emptyset_Z.$$

İspat: $U_Z = (T, Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$; $T(\aleph) = U$. $(T, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (F, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} T'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ T'(\aleph) \cap F(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = T'(\aleph) \cap F(\aleph) = \emptyset \cap F(\aleph) = \emptyset$ olup $(H, Z) = \emptyset_Z$.

$$10) (F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} U_Z = (F, Z)^r.$$

İspat: $U_Z = (T, Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$; $T(\aleph) = U$. $(F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (T, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ T'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap T(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph) \cap T(\aleph) = F'(\aleph) \cap U = F'(\aleph)$ olup $(H, Z) = (F, Z)^r$.

$$11) U_E \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (F, Z) = \emptyset_E.$$

İspat: $U_E = (S, E)$ olsun. $\forall \aleph \in E$; $S(\aleph) = U$. $(S, E) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (F, Z) = (H, E \cup Z = E)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in E$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} S'(\aleph), & \aleph \in E - Z = Z' \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - E = \emptyset \\ S'(\aleph) \cap F(\aleph), & \aleph \in Z \cap E = Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = S'(\aleph) \cap F(\aleph) = \emptyset \cap F(\aleph) = \emptyset$ olup,

$$H(\aleph) = \begin{cases} \emptyset, & \aleph \in E - Z = Z' \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - E = \emptyset \\ \emptyset, & \aleph \in Z \cap E = Z \end{cases}$$

Böylece, $\forall \aleph \in E$; $H(\aleph) = \emptyset$, dolayısıyla $(H, E) = \emptyset_E$.

$$12) (F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (F, Z)^r = (F, Z)^r.$$

İspat: $(F, Z)^r = (H, Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph)$. $(F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (H, Z) = (T, Z \cup Z)$ olsun .

Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Burada $\forall \aleph \in Z$; $T(\aleph) = F'(\aleph) \cap H(\aleph) = F'(\aleph) \cap F'(\aleph) = F'(\aleph)$ olup $(T, Z) = (F, Z)^r$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde, her esnek kümenin tümleyeni $\overset{*}{\gamma_\varepsilon}$ işlemi için kendisinin sağda yutan elemanıdır.

$$13) (F, Z)^r \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (F, Z) = (F, Z).$$

İspat: $(F, Z)^r = (H, Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph)$. $(H, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (F, Z) = (T, Z \cup Z)$ olsun .

Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} H'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\aleph) \cap F(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Burada $\forall \aleph \in Z$; $T(\aleph) = H'(\aleph) \cap F(\aleph) = F(\aleph) \cap F(\aleph) = F(\aleph)$ olup $(T, Z) = (F, Z)$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde, her esnek kümenin tümleyeni $\stackrel{*}{\gamma_\varepsilon}$ işlemi için kendisinin solda birim elemanıdır.

$$14) [(F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (G, C)]^r = (F, Z) \setminus_\varepsilon (G, C).$$

İspat: $(F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (G, C) = (H, Z \cup C)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ G'(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F'(\aleph) \cap G(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$(H, Z \cup C)^r = (T, Z \cup C)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ G(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

Buradan, $(T, Z \cup C) = (F, Z) \lambda_\varepsilon (G, C)$ olur.

$$15) (F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (G, Z) = U_Z \Leftrightarrow (F, Z) = \emptyset_Z \text{ ve } (G, Z) = U_Z$$

İspat: $(F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (G, Z) = (T, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ G'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap G(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(T, Z) = U_Z$ olduğundan, $\forall \aleph \in Z$ için $T(\aleph) = U$ ve $\forall \aleph \in Z$; $F'(\aleph) \cap G(\aleph) = U$. Burdan, $\forall \in Z$; $F'(\aleph) = U$ ve $G(\aleph) = U$. Böylece, $(F, Z) = \emptyset_Z$ ve $(G, Z) = U_Z$.

$$16) \emptyset_Z \subseteq (F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (G, C), \emptyset_C \subseteq (F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (G, C), \emptyset_{Z \cup C} \subseteq (F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (G, C), (F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (G, C) \subseteq U_{Z \cup C}.$$

$$17) (F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (G, Z) \subseteq (F, Z)^r \text{ ve } (F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (G, Z) \subseteq (G, Z).$$

İspat: $(F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (G, Z) = (H, Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ G'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap G(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph) \cap G(\aleph) \subseteq F'(\aleph)$. Böylece, $(F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (G, Z) \subseteq (F, Z)^r$. Benzer şekilde,

$\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph) \cap G(\aleph) \subseteq G(\aleph)$. Böylece $(F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (G, Z) \subseteq (G, Z)$.

$$18) (F, Z) \subseteq (G, Z) \text{ ise } (G, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (H, C) \subseteq (F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (H, C).$$

İspat: $(F, Z) \subseteq (G, Z)$ olsun. Buradan, $\forall \aleph \in Z$ için, $F(\aleph) \subseteq G(\aleph)$ ve $G'(\aleph) \subseteq F'(\aleph)$.

$(G, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (H, B) = (W, Z \cup C)$ olsun. Böylece, $\forall \aleph \in Z \cup C$ için,

$$W(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ H'(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ H'(\aleph) \cap F(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (H, B) = (L, Z \cup C)$ olsun. Böylece, $\forall \aleph \in Z \cup C$ için,

$$L(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ H'(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ H'(\aleph) \cap G(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

Böylece, $\forall \aleph \in Z - C$; $W(\aleph) = G'(\aleph) \subseteq G'(\aleph) = L(\aleph)$, $\forall \aleph \in C - Z$; $W(\aleph) = H'(\aleph) \subseteq H'(\aleph) = L(\aleph)$, $\aleph \in Z \cap C$; $W(\aleph) = H'(\aleph) \cap F(\aleph) \subseteq H'(\aleph) \cap G(\aleph) = L(\aleph)$ olup, $(G, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (H, C) \subseteq (F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (H, C)$.

19) $(G, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (H, C) \subseteq (F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (H, C)$ ise $(F, Z) \subseteq (G, Z)$ olmak zorunda değildir. Yani Teorem 4.3 (18) tersi doğru değildir.

İspat: Teorem 4.3 (18) in tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $A = \{e_1, e_3\}$, $\mathcal{C} = \{e_1, e_3, e_5\}$, E 'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, Z) , (G, Z) ve (H, C) , $(F, Z) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, Z) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$, $(H, C) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_3, h_4\})\}$ olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.

Buradan, $(G, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (H, C) = (L, Z \cup C)$ olmak üzere, $(L, Z \cup C) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_3, h_4\})\}$ ve $(F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (H, C) = (K, Z \cup C)$ olmak üzere $(K, Z \cup C) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_3, h_4\})\}$. Böylece, $(G, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (H, C) \subseteq (F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (H, C)$ fakat $(F, Z) \not\subseteq (G, Z)$ olmadığı açıktır.

20) $(G, Z) \subseteq (F, C)$ ve $(K, Z) \subseteq (L, C)$ ise $(F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (K, Z) \subseteq (G, C) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (L, C)$.

İspat: $(G, Z) \subseteq (F, C)$ ve $(K, Z) \subseteq (L, C)$ olsun. Buradan, $Z \subseteq C$ ve $\forall \aleph \in Z$ için, $G(\aleph) \subseteq F(\aleph)$ ve $K(\aleph) \subseteq L(\aleph)$. $(F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (K, Z) = (W, Z)$ olsun. Böylece, $\forall \aleph \in Z$ için,

$$W(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ K'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap K(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(G, C) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (L, C) = (S, C)$ olsun. Böylece, $\forall \aleph \in C$ için,

$$S(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in C - C = \emptyset \\ L'(\aleph), & \aleph \in C - C = \emptyset \\ G'(\aleph) \cap L(\aleph), & \aleph \in C \cap C = C \end{cases}$$

Böylece, $\forall \aleph \in Z$ için, $G(\aleph) \subseteq F(\aleph)$ olduğu için $F'(\aleph) \subseteq G'(\aleph)$ ve $W(\aleph) = F'(\aleph) \cap K(\aleph) \subseteq G'(\aleph) \cap L(\aleph) = S(\aleph)$ olup, $(F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (K, Z) \subseteq (G, C) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (L, C)$.

4.4. Teorem Tümleyenli genişletilmiş gamma işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

4.4.1. Teorem Tümleyenli genişletilmiş gamma işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Gamma İşleminin Kısıtlanmış İşlemler Üzerine Soldan Dağılması

$$1) Z \cap C \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} [(G, C) \cap_R (H, R)] = [(F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (G, C)] \cup_R [(F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, C) \cap_R (H, R) = (M, C \cap R)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in C \cap R$; $M(\aleph) = G(\aleph) \cap H(\aleph)$. $(F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (M, C \cap R) = (N, Z \cup (C \cap R))$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup (C \cap R)$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - (C \cap R) \\ M'(\aleph), & \aleph \in (C \cap R) - Z \\ F'(\aleph) \cap M(\aleph), & \aleph \in Z \cap (C \cap R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cap R) = Z - (C \cap R) \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cap (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^*(G, C)] \cup_R [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^*(H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^*(G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cap G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

Şimdi $(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^*(H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \cup_R (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cap (Z \cup R))$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup (C \cap R)$;

$T(x) = V(x) \cup W(x)$. Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z - C) \cap (Z - R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - C) \cap (R - Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F'(x) \cap H(x)) & x \in (Z - C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (C - Z) \cap (Z - R) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C - Z) \cap (R - Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cup (F'(x) \cap H(x)), & x \in (C - Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z - R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cap G(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R - Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G(x)) \cup (F'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cap G(x)) \cup (F'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki $Z-(C \cap R)$ ele alınırsa, $Z-(C \cap R) = Z \cap (C \cap R)'$ olup, bir eleman $(C \cap R)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $C-R$ de, ya $R-C$ de, ya da $C \cup R$ nin tümleyenindedir. Buradan, $x \in Z - (C \cap R)$ ise $x \in Z \cap C \cap R'$ veya $x \in Z \cap C' \cap R$ veya $x \in Z \cap C' \cap R'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z \cap C \cap R = \emptyset$ ise N ve T fonksiyonları birbirine eşit olur.

$$2) Z' \cap C \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* [(G, C) \cup_R (H, R)] = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, C)] \cup_R [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)].$$

$$3) Z' \cap C \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* [(G, C) *_R (H, R)] = [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, C)] \cup_R [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, C) *_R (H, R) = (M, C \cap R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cap R$; $M(t) = G'(t) \cup H'(t)$. $(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (M, C \cap R) = (N, Z \cup (C \cap R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup (C \cap R)$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cap R) \\ M'(x), & x \in (C \cap R) - Z \\ F'(x) \cap M(x), & x \in Z \cap (C \cap R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cap R) = Z - (C \cap R) \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, C)] \cup_R [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ G'(x), & x \in C-Z \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

Şimdi $(F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \cup_R (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cap (Z \cup R))$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup (C \cap R)$;
 $T(x) = V(x) \cup W(x)$. Buradan

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = \emptyset$ şartı ile $N = T$ sağlanır.

4) $Z' \cap C \cap R = Z \cap C \cap R = \emptyset$ ise $(F, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} [(G, C) \theta_R(H, R)] = [(F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (G, C)] \cup_R [(F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (H, R)]$

ii) Tümlleyenli Genişletilmiş Gamma İşleminin Kısıtlanmış İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) (Z\Delta C)\cap R=\emptyset \text{ ise } [(F,Z)\cup_R(G,C)]_{\gamma_\varepsilon}^*(H,R)=[(F,Z)]_{\gamma_\varepsilon}^*(H,R)\cap_R[(G,C)]_{\gamma_\varepsilon}^*(H,R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,Z)\cup_R(G,C)=(M,Z\cap C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z\cap C$; $M(x)=F(x)\cup G(x)$. $(M,Z\cap C)_{\gamma_\varepsilon}^*(H,R)=(N,(Z\cap C)\cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in (Z\cap C)\cup R$;

$$N(x)=\begin{cases} M'(x), & x \in (Z\cap C)-R \\ H'(x), & x \in R-(Z\cap C) \\ M'(x)\cap H(x), & x \in Z\cap (C\cap R) \end{cases}$$

Böylece,

$$N(x)=\begin{cases} F'(x)\cap G'(x), & x \in (Z\cap C)-R=Z\cap C\cap R' \\ H'(x), & x \in R-(Z\cap C)=R-(Z\cap C) \\ (F'(x)\cap G'(x)) \cap H(x), & x \in Z\cap (C\cap R)=Z\cap C\cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z)]_{\gamma_\varepsilon}^*(H,R)\cap_R[(G,C)]_{\gamma_\varepsilon}^*(H,R)$ bakalım.

$(F,Z)_{\gamma_\varepsilon}^*(H,R)=(V,Z\cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z\cup R$;

$$V(x)=\begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F'(x)\cap H(x), & x \in Z\cap R \end{cases}$$

Şimdi, $(G,C)_{\gamma_\varepsilon}^*(H,R)=(W,C\cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C\cup R$;

$$W(x)=\begin{cases} G'(x), & x \in C-R \\ H'(x), & x \in R-C \\ G'(x)\cap H(x), & x \in C\cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \cap_R (W, C \cup R) = (T, (Z \cup R) \cap (C \cup R))$ olsun. Burada, $\forall x \in (Z \cap C) \cup R$;
 $T(x) = V(x) \cap W(x)$. Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(x) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ \emptyset, & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ \emptyset, & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, $R-(Z \cap C)$ 'yi ele alırsak, $R-(Z \cap C) = R \cap (Z \cap C)'$ olup, bir eleman $(Z \cap C)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $Z-C$ de, ya $C-Z$ da, ya da $Z \cup C$ nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in R-(Z \cap C)$ ise $x \in R \cap Z \cap C'$ veya $x \in R \cap Z' \cap C$ veya $x \in R \cap Z' \cap C'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) Z \cap C \cap R' = (Z \Delta C) \cap R = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \cap_R (G, C)]_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R) = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)] \cup_R [(G, C)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)].$$

$$3) Z \cap C \cap R' = (Z \Delta C) \cap R = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \theta_R (G, C)]_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R) = [(F, Z)_{\cap_\varepsilon}^* (H, R)] \cup_R [(G, C)_{\cap_\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \theta_R (G, C) = (M, Z \cap C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cap B$; $M(x) = F'(x) \cap G'(x)$. $(M, Z \cap C)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R) = (N, (Z \cap C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in (Z \cap C) \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in (Z \cap C) - R \\ H'(x), & x \in R - (Z \cap C) \\ M'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap (C \cap R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R - (Z \cap C) = R - (Z \cap C) \\ (F(x) \cup G(x)) \cap H(x), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[F, Z] \underset{\epsilon}{*} (H, R) \cup_R [(G, C) \underset{\epsilon}{*} (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z) \underset{\epsilon}{*} (H, R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(G, C) \underset{\epsilon}{*} (H, R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ H'(x), & x \in R - C \\ G(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \cup_R (W, C \cup R) = (T, (Z \cup R) \cap (C \cup R))$ olsun.

Burada $\forall x \in (Z \cap C) \cup R$; $T(x) = V(x) \cup W(x)$. Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z - R) \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - R) \cap (R - C) = \emptyset \\ F'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (Z - R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cup G'(x), & x \in (R - Z) \cap (C - R) = \emptyset \\ H'(x) \cup H'(x), & x \in (R - Z) \cap (R - C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (R - Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C - R) = \emptyset \\ (F(x) \cap H(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{X}) \cup G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(\mathfrak{X}) \cup G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ F(\mathfrak{X}) \cup H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(\mathfrak{X}) \cap H(\mathfrak{X})) \cup (G(\mathfrak{X}) \cap H(\mathfrak{X})), & \mathfrak{X} \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) Z \cap C \cap R' = (Z \Delta C) \cap R = \emptyset, [(F, Z) *_{\mathcal{R}} (G, C)]_{\gamma_{\varepsilon}}^* (H, R) = [(F, Z)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, R)] \cap_{\mathcal{R}} [(G, C)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

4.4.2. Teorem Tümleyenli genişletilmiş gamma işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Gamma İşleminin Genişletilmiş İşlemler Üzerine Soldan Dağılıması

$$1) Z' \cap C \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\gamma_{\varepsilon}}^* [(G, C) \cap_{\varepsilon} (H, R)] = [(F, Z)_{\gamma_{\varepsilon}}^* (G, C)] \cap_{\varepsilon} [(F, Z)_{\gamma_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C) \cap_{\varepsilon} (H, R) = (M, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{X} \in C \cup R$;

$$M(\mathfrak{X}) = \begin{cases} G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in C-R \\ H(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in R-C \\ G(\mathfrak{X}) \cap H(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z)_{\gamma_{\varepsilon}}^* (M, C \cup R) = (N, Z \cup (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{X} \in Z \cup C \cup R$;

$$N(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Z - (C \cup R) \\ M'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (C \cup R) - Z \\ F'(\mathfrak{X}) \cap M(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Z \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G'(x), & x \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R - C) - Z = Z' \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cap G(x), & x \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ F'(x) \cap (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, C)] \cap_\varepsilon [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cap G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \cap_\varepsilon (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ W(x), & x \in (Z \cup R) - (Z \cup C) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-C)-(Z \cup R) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (C-Z)-(Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap G(x), & x \in (Z \cap C)-(Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x), & x \in (Z-R)-(Z \cup C) = \emptyset \\ H'(x), & x \in (R-Z)-(Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(x) \cap H(x), & x \in (Z \cap R)-(Z \cup C) = \emptyset \\ F'(x) \cap F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cap (F'(x) \cap H(x)), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cap (F'(x) \cap H(x)), & x \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G(x)) \cap F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cap G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G(x)) \cap (F'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in (C-Z)-(Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z)-(Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap H(x), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cap G(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cap G(x)) \cap (F'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır.

$$2) Z \cap C \cap R' = (Z \Delta C) \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* [(G, C) \cup_\varepsilon (H, R)] = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, C)] \cup_\varepsilon [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)].$$

$$3) Z \cap C \cap R' = (Z \Delta C) \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* [(G, C) *_\varepsilon (H, R)] = [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, C)] \cup_\varepsilon [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C) *_\varepsilon (H, R) = (M, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$M(x) = \begin{cases} G(x), & x \in C-R \\ H(x), & x \in R-C \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (M, C \cup R) = (N, Z \cup (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) \\ M'(x), & x \in (C \cup R) - Z \\ F'(x) \cap M(x), & x \in Z \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G'(x), & x \in (C-R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-C) - Z = Z' \cap C' \cap R \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cap G(x), & x \in Z \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ F'(x) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \stackrel{*}{\theta_\varepsilon} (G, C)] \cup_\varepsilon [(F, Z) \stackrel{*}{\theta_\varepsilon} (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z) \stackrel{*}{\theta_\varepsilon} (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ G'(x), & x \in C-Z \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z) \stackrel{*}{\theta_\varepsilon} (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \cup_\varepsilon (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ W(x), & x \in (Z \cup R) - (Z \cup C) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (C - Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x), & x \in (Z - R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ H'(x), & x \in (R - Z) - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z \cap R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z - C) \cap (Z - R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - C) \cap (R - Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z - C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (C - Z) \cap (Z - R) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C - Z) \cap (R - Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (C - Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z - R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R - Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in (C - Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R - Z) - (Z \cup C) = Z \cap C' \cap R \\ F'(x), & x \in (Z - C) \cap (Z - R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z - C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C - Z) \cap (R - Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z - R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) Z \cap C \cap R' = (Z \Delta C) \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* [(G, C)_{\theta_\varepsilon}(H, R)] = [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, C)]_{\theta_\varepsilon} [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, R)].$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Gamma İşleminin Genişletilmiş İşlemler Üzerine Sağdan Dağılıması

$$1) (Z\Delta C) \cap R = \emptyset \text{ ise } [(F,Z) \cup_{\varepsilon} (G,C)] \overset{*}{\gamma_{\varepsilon}} (H,R) = [(F,Z) \overset{*}{\gamma_{\varepsilon}} (H,R)] \cap_{\varepsilon} [(G,C) \overset{*}{\gamma_{\varepsilon}} (H,R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,Z) \cup_{\varepsilon} (G,C) = (M, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$M(x) = \begin{cases} F(x), & x \in Z - C \\ G(x), & x \in C - Z \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$$(M, Z \cup C) \overset{*}{\gamma_{\varepsilon}} (H,R) = (N, (Z \cup C) \cup R) \text{ olsun. Burada } \forall x \in (Z \cup C) \cup R;$$

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in (Z \cup C) - R \\ H'(x), & x \in R - (Z \cup C) \\ M'(x) \cap H(x), & x \in (Z \cup C) \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - C) - R = Z \cap C' \cap R' \\ G'(x), & x \in (C - Z) - R = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(x) \cap H(x), & x \in (Z - C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap H(x), & x \in (C - Z) \cap R = Z' \cap C \cap R \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cap H(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z) \overset{*}{\gamma_{\varepsilon}} (H,R)] \cap_{\varepsilon} [(G,C) \overset{*}{\gamma_{\varepsilon}} (H,R)]$ bakalım.

$$(F,Z) \overset{*}{\gamma_{\varepsilon}} (H,R) = (V, Z \cup R) \text{ olsun. Burada } \forall x \in Z \cup R ;$$

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(G, C) \stackrel{*}{\gamma}_{\varepsilon} (H, R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ H'(x), & x \in R - C \\ G'(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \cap_{\varepsilon} (W, C \cup R) = (T, Z \cup C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ W(x), & x \in (C \cup R) - (Z \cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H'(x), & x \in (R - Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap H(x), & x \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (C - R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R - C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z - R) \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z - R) \cap (R - C) = \emptyset \\ F'(x) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z - R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (R - Z) \cap (C - R) = \emptyset \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (R - Z) \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ H'(x) \cap (G'(x) \cap H(x)) & x \in (R - Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C - R) = \emptyset \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap H'(x) & x \in (Z \cap R) \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap (G'(x) \cap H(x)) & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G'(x), & x \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ \emptyset, & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ \emptyset, & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta C) \cap R = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \cap_{\varepsilon} (G, C)] \overset{*}{\gamma_{\varepsilon}} (H, R) = [(F, Z) \overset{*}{\gamma_{\varepsilon}} (H, R)] \cup_{\varepsilon} [(G, C) \overset{*}{\gamma_{\varepsilon}} (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \theta_{\varepsilon} (G, C)] \overset{*}{\gamma_{\varepsilon}} (H, R) = [(F, Z) \overset{*}{\cap_{\varepsilon}} (H, R)] \cup_{\varepsilon} [(G, C) \overset{*}{\cap_{\varepsilon}} (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \theta_{\varepsilon} (G, C) = (M, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$M(x) = \begin{cases} F(x), & x \in Z - C \\ G(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$$(M, Z \cup C) \overset{*}{\gamma_{\varepsilon}} (H, R) = (N, (Z \cup C) \cup R) \text{ olsun. Burada } \forall x \in (Z \cup C) \cup R;$$

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in (Z \cup C) - R \\ H'(x), & x \in R - (Z \cup C) \\ M'(x) \cap H(x), & x \in (Z \cup C) \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-C)-R = Z \cap C' \cap R' \\ G'(x), & x \in (C-Z)-R = Z' \cap C \cap R' \\ F(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap C)-R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R-(Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(x) \cap H(x), & x \in (Z-C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap H(x), & x \in (C-Z) \cap R = Z' \cap C \cap R \\ (F(x) \cup G(x)) \cap H(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z) \underset{\cap_\varepsilon}{*} (H,R)] \cup_\varepsilon [(G,C) \underset{\cap_\varepsilon}{*} (H,R)]$. bakalım.

$(F,Z) \underset{\cap_\varepsilon}{*} (H,R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(G,C) \underset{\cap_\varepsilon}{*} (H,R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C-R \\ H'(x), & x \in R-C \\ G(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \cup_\varepsilon (W, C \cup R) = (T, Z \cup C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ W(x), & x \in (C \cup R) - (Z \cup R) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F'(X), & X \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H'(X), & X \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F(X) \cap H(X), & X \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ G'(X), & X \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H'(X), & X \in (R-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G(X) \cap H(X), & X \in (C \cap R) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(X) \cup G'(X), & X \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(X) \cup H'(X), & X \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(X) \cup (G(X) \cap H(X)), & X \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(X) \cup G'(X), & X \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(X) \cup H'(X), & X \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(X) \cup (G(X) \cap H(X)), & X \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F(X) \cap H(X)) \cup G'(X), & X \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F(X) \cap H(X)) \cup H'(X), & X \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ F(X) \cap H(X)) \cup (G(X) \cap H(X)) & X \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada,

$$T(X) = \begin{cases} F'(X), & X \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G'(X), & X \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(X) \cup G'(X), & X \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(X), & X \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(X) \cup G(X), & X \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ F(X) \cup H'(X), & X \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ F(X) \cap H(X)) \cup (G(X) \cap H(X)) & X \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, [(F, Z) *_{\varepsilon} (G, C)]^*_{\gamma_{\varepsilon}} (H, R) = [(F, Z) *_{\cap_{\varepsilon}} (H, R)] \cap_{\varepsilon} [(G, C) *_{\cap_{\varepsilon}} (H, R)].$$

4.4.3. Teorem Tümleyenli genişletilmiş gamma işleminin tümleyenli genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Gamma İşleminin Tümleyenli Genişletilmiş İşlemler Üzerine Soldan Dağılıması

$$1) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, (F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* [(G, C)_{\cap_\varepsilon}^* (H, R)] = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, C)]_{\cap_\varepsilon}^* [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C)_{\cap_\varepsilon}^* ((H, R) = (M, C \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$M(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ H'(x), & x \in R - C \\ G(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (M, C \cup R) = (N, Z \cup (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) \\ M'(x), & x \in (C \cup R) - Z \\ F'(x) \cap M(x), & x \in Z \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G(x), & x \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ H(x), & x \in (R - C) - Z = Z' \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ F'(x) \cap (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, C)]_{\cap_\varepsilon}^* [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cap G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-R \\ H'(\aleph), & \aleph \in R-Z \\ F'(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \stackrel{*}{\cap}_{\varepsilon} (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup C \cup R$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} V'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ W'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup R) - (Z \cup C) \\ V(\aleph) \cap W(\aleph), & \aleph \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in (Z-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G(\aleph), & \aleph \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F(\aleph), & \aleph \in (Z-R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ H(\aleph), & \aleph \in (R-Z) - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap F'(\aleph), & \aleph \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap (F'(\aleph) \cap H(\aleph)), & \aleph \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(\aleph) \cap F'(\aleph), & \aleph \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(\aleph) \cap (F'(\aleph) \cap H(\aleph)), & \aleph \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(\aleph) \cap G(\aleph)) \cap F'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(\aleph) \cap G(\aleph)) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F'(\aleph) \cap G(\aleph)) \cap (F'(\aleph) \cap H(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} G(\aleph), & \aleph \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H(\aleph), & \aleph \in (R-Z) - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(\aleph) & \aleph \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(\aleph) \cap G(\aleph) & \aleph \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(\aleph) \cap G(\aleph)) \cap (F'(\aleph) \cap H(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* [(G, C)_{\cup_\varepsilon}^* (H, R)] = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, C)]_{\cup_\varepsilon}^* [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)].$$

$$3) Z' \cap C \cap R = Z \cap C \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* [(G, C)_{*_\varepsilon}^* (H, R)] = [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, C)]_{\cap_\varepsilon}^* [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C)_{*_\varepsilon}^* ((H, R) = (M, C \cup R))$ olsun. Burada $\forall \aleph \in C \cup R$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in C - R \\ H'(\aleph), & \aleph \in R - C \\ G'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (M, C \cup R) = (N, Z \cup (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup C \cup R$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - (C \cup R) \\ M'(\aleph), & \aleph \in (C \cup R) - Z \\ F'(\aleph) \cap M(\aleph), & \aleph \in Z \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G(x), & x \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ H(x), & x \in (R - C) - Z = Z' \cap C' \cap R \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ F'(x) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, C)]_{\cap_\varepsilon} [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C)_{\cap_\varepsilon}^* (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in (Z \cup C) \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ W'(x), & x \in (Z \cup R) - (Z \cup C) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F(X), & X \in (Z-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G(X), & X \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F(X) \cup G(X), & X \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F(X), & X \in (Z-R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ H(X), & X \in (R-Z) - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F(X) \cup H(X), & X \in (Z \cap R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ F'(X) \cap F'(X), & X \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(X) \cap H'(X), & X \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(X) \cap (F'(X) \cap H'(X)), & X \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(X) \cap F'(X), & X \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(X) \cap H'(X), & X \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(X) \cap (F'(X) \cap H'(X)), & X \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(X) \cap G'(X)) \cap F'(X), & X \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(X) \cap G'(X)) \cap H'(X), & X \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F'(X) \cap G'(X)) \cap (F'(X) \cap H'(X)), & X \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} G(X), & X \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H(X), & X \in (R-Z) - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(X) & X \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(X) \cap H'(X) & X \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(X) \cap H'(X), & X \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(X) \cap G'(X) & X \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(X) \cap G'(X)) \cap (F'(X) \cap H'(X)), & X \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C \cap R = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır.

$$4) Z' \cap C \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} [(G, C) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (H, R)] = [(F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (G, C)] \underset{\cap_\varepsilon}{*} [(F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (H, R)].$$

ii) Tümlenli Genişletilmiş Gamma İşleminin Tümlenli Genişletilmiş İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) (Z \Delta C) \cap R = \emptyset \text{ ise } [(FA) \underset{\cup_\varepsilon}{*} (G, C)] \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H, R) = [(F, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H, R)] \underset{\cap_\varepsilon}{*} [(G, C) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,Z) \underset{\cup_\varepsilon}{*} (G,C)=(M,Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ G'(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$(M,Z \cup C) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H,R)=(N,(Z \cup C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup C \cup R$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} M'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup C) - R \\ H'(\aleph), & \aleph \in R - (Z \cup C) \\ M'(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in (Z \cup C) \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in (Z - C) - R = Z \cap C' \cap R' \\ G(\aleph), & \aleph \in (C - Z) - R = Z' \cap C \cap R' \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(\aleph), & \aleph \in R - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in (Z - C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ G(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in (C - Z) \cap R = Z' \cap C \cap R \\ (F'(\aleph) \cap G'(\aleph)) \cap H(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H,R)] \underset{\cap_\varepsilon}{*} [(G,C) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H,R)]$ bakalım.

$(F,Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H,R)=(V,Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup R$;

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - R \\ H'(\aleph), & \aleph \in R - Z \\ F'(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in Z \cap R \end{cases}$$

$(G,C) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H,R)=(W,C \cup R)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C-R \\ H'(x), & x \in R-C \\ G'(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \stackrel{*}{\cap}_{\varepsilon} (W, C \cup R) = (T, Z \cup C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ W'(x), & x \in (C \cup R) - (Z \cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C \cap R' \\ H(x), & x \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F(x) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ G(x), & x \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H(x), & x \in (R-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(x) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cap (G'(x) \cap H(x)) & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap H'(x) & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap (G'(x) \cap H(x)) & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G(x), & x \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ \emptyset, & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ \emptyset, & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap (G'(x) \cap H(x)) & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta C) \cap R = \emptyset \text{ ise } [(FA)_{\cap_{\varepsilon}}^* (G, C)]_{\gamma_{\varepsilon}}^* (H, R) = [(F, Z)_{\gamma_{\varepsilon}}^* (H, R)]_{\cap_{\varepsilon}}^* [(G, C)_{\gamma_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z)_{\theta_{\varepsilon}}^* (G, C)]_{\gamma_{\varepsilon}}^* (H, R) = [(F, Z)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, R)]_{\cup_{\varepsilon}}^* [(G, C)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z)_{\theta_{\varepsilon}}^* (G, C) = (M, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(M, Z \cup C)_{\gamma_{\varepsilon}}^* (H, R) = (N, (Z \cup C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in (Z \cup C) \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in (Z \cup C) - R \\ H'(x), & x \in R - (Z \cup C) \\ M'(x) \cap H(x), & x \in (Z \cup C) \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - C) - R = Z \cap C' \cap R' \\ G(x), & x \in (C - Z) - R = Z' \cap C \cap R' \\ F(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F(x) \cap H(x), & x \in (Z - C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C - Z) \cap R = Z' \cap C \cap R \\ (F(x) \cup G(x)) \cap H(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, R)]_{\cup_{\varepsilon}}^* [(G, C)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(G, C) \stackrel{*}{\cap}_{\varepsilon} (H, R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C-R \\ H'(x), & x \in R-C \\ G(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \stackrel{*}{\cup}_{\varepsilon} (W, C \cup R) = (T, Z \cup C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ W'(x), & x \in (C \cup R) - (Z \cup R) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H(x), & x \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ G(x), & x \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H(x), & x \in (R-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cup G'(x), & x \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(x) \cup H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F(x) \cap H(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap Z' \\ G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap Z \\ F'(\mathfrak{X}) \cup G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap Z' \\ H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(\mathfrak{X}) \cup G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ F(\mathfrak{X}) \cup H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(\mathfrak{X}) \cap H(\mathfrak{X})) \cup (G(\mathfrak{X}) \cap H(\mathfrak{X})), & \mathfrak{X} \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (G, C)]_{\gamma_{\varepsilon}}^* (H, R) = [(F, Z)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, R)]_{\cap_{\varepsilon}}^* [(G, C)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, R)]$$

4.4.4. Teorem Tümleyenli genişletilmiş gamma işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Gamma İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Soldan Dağılıması

$$1) (Z \Delta C) \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\gamma_{\varepsilon}}^* [(G, C) \widetilde{\cap} (H, R)] = [(F, Z)_{\gamma_{\varepsilon}}^* (G, C)] \widetilde{\cap} [(F, Z)_{\gamma_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C) \widetilde{\cap} (H, R) = (M, C)$ olsun. Buradan $\forall \mathfrak{X} \in C$;

$$M(\mathfrak{X}) = \begin{cases} G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in C-R \\ G(\mathfrak{X}) \cap H(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z)_{\gamma_{\varepsilon}}^* (M, C) = (N, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{X} \in Z \cup C$;

$$N(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Z-C \\ M'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in C-Z \\ F'(\mathfrak{X}) \cap M(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Z \cap C \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ G'(x), & x \in (C-R)-Z = Z' \cap C \cap R' \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R)-Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cap G(x), & x \in Z \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z)_{\gamma_\varepsilon}^*(G,C)] \sim_{\cap} [(F,Z)_{\gamma_\varepsilon}^*(H,R)]$ bakalım.

$(F,Z)_{\gamma_\varepsilon}^*(G,C) = (V,Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ G'(x), & x \in C-Z \\ F'(x) \cap G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F,Z)_{\gamma_\varepsilon}^*(H,R) = (W,Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V,Z \cup C) \sim_{\cap} (W,Z \cup R) = (T,(Z \cup C))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap G(x), & x \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cap (F'(x) \cap H(x)), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cap (F'(x) \cap H(x)), & x \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G(x)) \cap F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cap G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G(x)) \cap (F'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap H(x), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cap G(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cap G(x)) \cap (F'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, Z-C ele alırsak, Z-C=Z∩C' olup, bir eleman C nin tümleyeninde ise o eleman ya R-C de, ya da C ∪ R nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in R - C$ ise $x \in Z \cap C' \cap R$ veya $x \in Z \cap C' \cap R'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z \cap C' \cap R = Z' \cap C \cap R = \emptyset$ şartı ile N=T sağlanır. $Z \cap C' \cap R = Z' \cap C \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta R) \cap C = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* [(G, C) \widetilde{\cup} (H, R)] = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, C)] \widetilde{\cup} [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* [(G, C) \widetilde{*} (H, R)] = [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, C)] \widetilde{\cup} [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C) \widetilde{*} (H, R) = (M, C)$ olsun. Buradan $\forall x \in C$;

$$M(x) = \begin{cases} G(x), & x \in C-R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (M, C) = (N, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ M'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cap M(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cap G(x), & x \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, C)] \widetilde{\cup} [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \widetilde{\cup} [(W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C))]$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in (Z-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(\aleph), & \aleph \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup F'(\aleph), & \aleph \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup (F'(\aleph) \cap H'(\aleph)), & \aleph \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(\aleph) \cup F'(\aleph), & \aleph \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(\aleph) \cup (F'(\aleph) \cap H'(\aleph)), & \aleph \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(\aleph) \cap G'(\aleph)) \cup F'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(\aleph) \cap G'(\aleph)) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F'(\aleph) \cap G'(\aleph)) \cup (F'(\aleph) \cap H'(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(\aleph), & \aleph \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(\aleph), & \aleph \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(\aleph) \cap G'(\aleph)) \cup (F'(\aleph) \cap H'(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* [(G, C)_{\theta}^{\sim} (H, R)] = [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, C)]_{\cap}^{\sim} [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, R)].$$

ii) Tümlenli Genişletilmiş Gamma İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) (Z \Delta C) \cap R = \emptyset \text{ ise } [(F, Z)_{\cup}^{\sim} (G, C)]_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R) = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)]_{\cap}^{\sim} [(G, C)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z)_{\cup}^{\sim} (G, C) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in Z-C \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$(M, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R) = (N, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ M'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - C) - R = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cap H(x), & x \in (Z - C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cap H(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)] \sim [(G, C)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)]$.

$(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Şimdi $(G, C)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ H'(x), & x \in R - C \\ G'(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \sim (W, C \cup R) = (T, (Z \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap H(x), & x \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(x) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ \emptyset, & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ \emptyset, & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, R-Z ele alırsak, $R-Z = R \cap Z'$ olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya C-Z de, ya da $C \cup Z$ nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in Z' \cap C \cap R$ veya $x \in Z' \cap C' \cap R$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta C) \cap R = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \tilde{\cap} (G, C)]_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R) = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)] \tilde{\cup} [(G, C)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset, [(F, Z) \tilde{\cap} (G, C)]_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R) = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)] \tilde{\cup} [(G, C)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \tilde{\cap} (G, C) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in Z-C \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$(M, Z) \stackrel{*}{\gamma_\varepsilon} (H, R) = (N, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup R$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} M'(\aleph), & \aleph \in Z-R \\ H'(\aleph), & \aleph \in R-Z \\ M'(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in Z \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in (Z-C)-R = Z \cap C' \cap R' \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C)-R = Z \cap C \cap R' \\ H'(\aleph), & \aleph \in R-Z \\ F'(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in (Z-C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ (F(\aleph) \cup G(\aleph)) \cap H(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z) \stackrel{*}{\cap_\varepsilon} (H, R)] \widetilde{\cup} [(G, C) \stackrel{*}{\cap_\varepsilon} (H, R)]$.

$(F, Z) \stackrel{*}{\cap_\varepsilon} (H, R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup R$;

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-R \\ H'(\aleph), & \aleph \in R-Z \\ F(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in Z \cap R \end{cases}$$

Şimdi $(G, C) \stackrel{*}{\cap_\varepsilon} (H, R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in C \cup R$;

$$W(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in C-R \\ H'(\aleph), & \aleph \in R-C \\ G(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \widetilde{\cup} (W, C \cup R) = (T, (Z \cup R) \cap (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall \aleph \in (Z \cup R) \cap (C \cup R)$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} V(\aleph), & \aleph \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ V(\aleph) \cup W(\aleph), & \aleph \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F'(X), & X \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H'(X), & X \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F(X) \cap H(X), & X \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(X) \cup G'(X), & X \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(X) \cup H'(X), & X \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(X) \cup (G(X) \cap H(X)), & X \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(X) \cup G'(X), & X \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(X) \cup H'(X), & X \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(X) \cup (G(X) \cap H(X)), & X \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F(X) \cap H(X)) \cup G'(X), & X \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F(X) \cap H(X)) \cup H'(X), & X \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(X) \cap H(X)) \cup (G(X) \cap H(X)), & X \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F'(X), & X \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(X) \cup G'(X), & X \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(X), & X \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(X) \cup G(X), & X \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ F(X) \cup H'(X), & X \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(X) \cap H(X)) \cup (G'(X) \cap H(X)), & X \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, [(F, Z) \underset{*}{\sim} (G, C)] \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H, R) = [(F, Z) \underset{\cap_\varepsilon}{*} (H, R)] \underset{\cap}{\sim} [(G, C) \underset{\cap_\varepsilon}{*} (H, R)].$$

4.4.5. Teorem Tömleyenli genişletilmiş gamma işleminin tömleyenli esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Tömleyenli Genişletilmiş Gamma İşleminin Tömleyenli Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Soldan Dağılması

$$1) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* [(G, C) \underset{\cap}{\sim} (H, R)] = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, C)] \underset{\cap}{\sim} [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C) \underset{\cap}{\sim} (H, R) = (M, C)$ olsun. Buradan $\forall x \in C$;

$$M(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ G(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (M, C) = (N, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ M'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cap M(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G(x), & x \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, C)] \underset{\cap}{\sim} [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cap G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \sim (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;
 $\cap$

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F(x) \cup G'(x), & x \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cap (F'(x) \cap H(x)), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cap (F'(x) \cap H(x)), & x \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G(x)) \cap F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cap G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G(x)) \cap (F'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap H(x), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cap G(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cap G(x)) \cap (F'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, Z-C ele alırsak, Z-C=Z∩C' olup, bir eleman C nin tümleyeninde ise o eleman ya R-C de, ya da C ∪ R nin tümleyenindedir. Buradan, $x \in R - C$ ise $x \in Z \cap C' \cap R$ veya $x \in Z \cap C' \cap R'$ olduğuna dikkat edecek olursak,

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) (Z \Delta R) \cap C = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* [(G, C) \underset{U}{\sim}^* (H, R)] = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, C)] \underset{U}{\sim}^* [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta R) \cap C = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* [(G, C) \underset{*}{\sim}^* (H, R)] = [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, C)] \underset{U}{\sim}^* [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C) \underset{*}{\sim}^* (H, R) = (M, C)$ olsun. Buradan $\forall x \in C$;

$$M(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (M, C) = (N, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ M'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cap M(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G(x), & x \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, C)] \underset{U}{\sim}^* [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ G'(x), & x \in C-Z \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \underset{U}{*} [(W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C))]$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartının $(Z \Delta R) \cap C = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* [(G, C) \underset{\theta}{\sim} (H, R)] = [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, C)] \underset{\cap}{\sim} [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, R)].$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Gamma İşleminin Tümleyenli Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{\cup}{\sim} (G, C)]_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R) = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)] \underset{\cap}{\sim} [(G, C)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \underset{\cup}{\sim} (G, C) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(M, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R) = (N, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ M'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-C) - R = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F(x) \cap H(x), & x \in (Z-C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cap H(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F,Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H,R)] \underset{\cap}{\sim} [(G,C)_{\gamma_\varepsilon}^* (H,R)]$.

$(F,Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H,R) = (V,Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Şimdi $(G,C)_{\gamma_\varepsilon}^* (H,R) = (W,C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ H'(x), & x \in R - C \\ G'(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V,Z \cup R) \underset{\cap}{\sim} (W,C \cup R) = (T,(Z \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H(x), & x \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F(x) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(x) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ \emptyset, & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ \emptyset, & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap (G'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, R-Z ele alırsak, $R-Z = R \cap Z'$ olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya C-Z de, ya da $C \cup Z$ nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in Z' \cap C \cap R$ veya $x \in Z' \cap C' \cap R$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta C) \cap R = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{\cap}{\sim}^* (G, C)]_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R) = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)] \underset{\cup}{\sim}^* [(G, C)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset, [(F, Z) \underset{\emptyset}{\sim}^* (G, C)]_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R) = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)] \underset{\cup}{\sim}^* [(G, C)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \underset{\emptyset}{\sim}^* (G, C) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(M, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H, R) = (N, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ M'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-C)-R = Z \cap C' \cap R' \\ F(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap C)-R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F(x) \cap H(x), & x \in (Z-C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cup G(x)) \cap H(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H, R)] \underset{U}{*} [(G, C) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H, R)]$.

$(F, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H, R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F(x) \cap H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Şimdi $(G, C) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H, R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C-R \\ H'(x), & x \in R-C \\ G(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \underset{U}{*} (W, C \cup R) = (T, (Z \cup R) \cup (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H(x), & x \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cup G'(x), & x \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(x) \cup H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F(x) \cap H(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cup G(x), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ F(x) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cap H(x)) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{*}{\sim} (G, C)] \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H, R) = [(F, Z) \underset{*}{\cap_\varepsilon} (H, R)] \underset{\cap}{\sim} [(G, C) \underset{*}{\cap_\varepsilon} (H, R)].$$

5. TÖMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ YILDIZ İŞLEMİ

Bu bölümde, tümleyenli genişletilmiş yıldız adı verilen yeni bir esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir.

5.1. Tanım $(F, Z), (G, C) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümenin $(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (G, C)$ ile gösterilen tümleyenli genişletilmiş yıldız işlemi $K=Z \cup C$ ve $\forall X \in K$;

$$H(X) = \begin{cases} F'(X), & X \in Z - C \\ G'(X), & X \in C - Z \\ F(X) * G(X), & X \in Z \cap C \end{cases}$$

olmak üzere $(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (G, C) = (H, K)$ ile tanımlanır.

5.2. Örnek $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi $Z = \{e_1, e_3\}$ ve $C = \{e_2, e_3, e_4\}$ E nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme olmak üzere (F, Z) ve (G, C) , $(F, Z) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, C) = \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (G, C) = (L, Z \cup C)$ olmak üzere $\forall X \in Z \cup C$;

$$L(X) = \begin{cases} F'(X), & X \in Z - C \\ G'(X), & X \in C - Z \\ F'(X) \cup G'(X), & X \in Z \cap C \end{cases}$$

Burada, $Z \cup C = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $Z - C = \{e_1\}$, $C - Z = \{e_2, e_4\}$, $Z \cap C = \{e_3\}$ olmak üzere, $L(e_1) = F'(e_1) = \{h_1, h_3, h_4\}$, $L(e_2) = G'(e_2) = \{h_2, h_3\}$, $L(e_4) = G'(e_4) = \{h_1, h_2, h_4\}$ ve $H(e_3) = F'(e_3) \cup G'(e_3) = \{h_3, h_4\} \cup \{h_1, h_5\} = \{h_1, h_3, h_4, h_5\}$.

Böylece,

$$(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (G, C) = \{(e_1, \{h_1, h_3, h_4\}), (e_2, \{h_2, h_3\}), (e_3, \{h_1, h_3, h_4, h_5\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_4\})\}$$

5.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $\begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix}$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $\begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix}$ işleminin, $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix} : S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((F,Z), (G,T)) \rightarrow (F,Z) \begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix} (G,T) = (L, Z \cup T)$$

olup, $(F,Z), (G,T) \in S_E(U)$ olduğunda $(F,Z) \begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix} (G,T) \in S_E(U)$ olur.

2) $[(F,Z) \begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix} (G,C)] \begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix} (H,R) \neq (F,Z) \begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix} [(G,C) \begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix} (H,R)]$.

İspat: Öncelikle sol tarafa bakalım. $(F,Z) \begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix} (G,C) = (T, Z \cup C)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ G'(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$(T, Z \cup C) \begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix} (H,R) = (M, Z \cup C \cup R)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup C \cup R$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} T'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup C) - R \\ H'(\aleph), & \aleph \in R - (Z \cup C) \\ T'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup C) \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$M(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-C)-R = Z \cap C' \cap R' \\ G(x), & x \in (C-Z)-R = Z' \cap C \cap R' \\ F(x) \cap G(x), & x \in (Z \cap C)-R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x) & x \in R-(Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F(x) \cup H'(x), & x \in (Z-C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ G(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap R = Z' \cap C \cap R \\ (F(x) \cap G(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} [(G, C) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (H, R)]$ bakalım.

$(G, C) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (H, R) = (K, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$K(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C-R \\ H'(x), & x \in R-C \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (K, C \cup R) = (S, Z \cup C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$S(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-(C \cup R) \\ K'(x), & x \in (C \cup R)-Z \\ F'(x) \cup K'(x), & x \in Z \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$S(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-(C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G(x), & x \in (C-R)-Z = Z' \cap C \cap R' \\ H(x) & x \in (R-C)-Z = Z' \cap C' \cap R \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R)-Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cup G(x), & x \in Z \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ F'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece, $M \neq S$ olduğu görülür. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\underset{*_{\varepsilon}}{*}$ işlemi birleşme özelliğine sahip değildir.

$$3) [(F,Z) *_{\varepsilon} (G,Z)] *_{\varepsilon} (H,Z) \neq (F,Z) *_{\varepsilon} [(G,Z) *_{\varepsilon} (H,Z)].$$

İspat: Öncelikle sol tarafa bakalım $(F,Z) *_{\varepsilon} (G,Z) = (T, Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup Z = Z$;

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ G'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(T,Z) *_{\varepsilon} (H,Z) = (M, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$M(x) = \begin{cases} T'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ H'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ T'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan,

$$M(x) = \begin{cases} T'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ H'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ (F(x) \cap G(x)) \cup H'(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Şimdi sağ tarafa yani $(F,Z) *_{\varepsilon} [(G,Z) *_{\varepsilon} (H,Z)]$ bakalım. $(G,Z) *_{\varepsilon} (H,Z) = (L, Z \cup Z)$ olsun.

Burada, $\forall x \in Z$;

$$L(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ H'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(F,Z) *_{\varepsilon} (L,Z) = (N, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ L'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ F'(x) \cup L'(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ L'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup (G(\aleph) \cap H(\aleph)), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Böylece, $M \neq N$ olduğu görülür. Yani, $Z \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde $\begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix}$ işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F, Z) \begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix} (G, C) = (G, C) \begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix} (F, Z).$$

İspat: Öncelikle eşitliğin her iki tarafındaki esnek kümenin parametre kümeleri $Z \cup C$ olup, esnek eşitliğin ilk şartı sağlanmış olur. Şimdi eşitliğin sol tarafına bakalım.

$(F, Z) \begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix} (G, C) = (H, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ G'(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $(G, C) \begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix} (F, Z)$ bakalım. $(G, C) \begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix} (F, Z) = (T, C \cup Z)$ olsun.

Burada $\forall \aleph \in C \cup Z$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ G'(\aleph) \cup F'(\aleph), & \aleph \in C \cap Z \end{cases}$$

Böylece, $H = T$ olduğu görülür. Benzer şekilde, $(F, Z) \begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix} (G, Z) = (G, Z) \begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix} (F, Z)$. Yani, $S_E(U)$

ve $S_Z(U)$ kümeleri üzerinde $\begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix}$ işleminin değişme özelliği vardır.

$$5) (F, Z) \begin{smallmatrix} * \\ *_{\varepsilon} \end{smallmatrix} (F, Z) = (F, Z)^r.$$

İspat: $(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (F, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup F'(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan, $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph) \cup F'(\aleph) = F'(\aleph)$ olup $(H, Z) = (F, Z)^r$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{*_{\varepsilon}}{*}$ işlemi denk güçlülük (idempotent) özelliğine sahip değildir.

$$6) (F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} \emptyset_Z = \emptyset_Z \underset{*_{\varepsilon}}{*} (F, Z) = U_Z.$$

İspat: $\emptyset_Z = (S, Z)$ olsun. $\forall \aleph \in Z$; $S(\aleph) = \emptyset$. $(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (S, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ S'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup S'(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph) \cup S'(\aleph) = F'(\aleph) \cup U = U$ olup, $(H, Z) = U_Z$.

$$7) (F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} \emptyset_E = \emptyset_E \underset{*_{\varepsilon}}{*} (F, Z) = U_E.$$

İspat: $\emptyset_E = (S, E)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in E$; $S(\aleph) = \emptyset$. $(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (S, E) = (H, Z \cup E)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup E = E$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - E = \emptyset \\ S'(\aleph), & \aleph \in E - Z = Z' \\ F'(\aleph) \cup S'(\aleph), & \aleph \in Z \cap E = Z \end{cases}$$

Burada $\forall \aleph \in Z \cap E = Z$, $F'(\aleph) \cup S'(\aleph) = F'(\aleph) \cup U = U$ olup,

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - E = \emptyset \\ U, & \aleph \in E - Z = Z' \\ U, & \aleph \in Z \cap E = Z \end{cases}$$

Böylece, $\forall \aleph \in E$ için $(H, Z) = U_E$.

$$8) (F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} \emptyset = \emptyset \underset{*_{\varepsilon}}{*} (F, Z) = (F, Z)^r.$$

İspat: $\emptyset = (K, \emptyset)$ ve $(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (K, \emptyset) = (Q, Z \cup \emptyset) = (Q, A)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$Q(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - \emptyset = Z \\ K'(\aleph), & \aleph \in \emptyset - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup K'(\aleph), & \aleph \in Z \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Buradan, $\forall \aleph \in Z$; $Q(\aleph) = F'(\aleph)$ olup $(Q, Z) = (F, Z)^r$.

$$9) (F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} U_Z = U_Z \underset{*_{\varepsilon}}{*} (F, Z) = (F, Z)^r.$$

İspat: $U_Z = (T, Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$; $T(\aleph) = U$. $(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (T, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ T'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup T'(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph) \cup T'(\aleph) = F'(\aleph) \cup \emptyset = F'(\aleph)$ olup $(H, Z) = (F, Z)^r$.

$$10) (F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (F, Z)^r = (F, Z)^r \underset{*_{\varepsilon}}{*} (F, Z) = U_Z.$$

İspat: $(F, Z)^r = (H, Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph)$. $(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (H, Z) = (T, Z \cup Z)$ olsun .

Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Burada $\forall \aleph \in Z$; $T(\aleph) = F'(\aleph) \cup H'(\aleph) = F'(\aleph) \cup F(\aleph) = U$ olup $(T, Z) = U_Z$.

$$11) [(F, Z) \overset{*}{*}_{\varepsilon} (G, C)]^r = (F, Z) \cap_{\varepsilon} (G, C).$$

İspat: $(F, Z) \overset{*}{*}_{\varepsilon} (G, C) = (H, Z \cup C)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ G'(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$(H, Z \cup C)^r = (T, Z \cup C)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ G(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F(\aleph) \cap G(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

Buradan, $(T, Z \cup C) = (F, Z) \cap_{\varepsilon} (G, C)$ olur.

$$12) (F, Z) \overset{*}{*}_{\varepsilon} (G, C) = \emptyset_{Z \cup C} \Leftrightarrow (F, Z) = U_Z \text{ ve } (G, C) = U_C.$$

İspat: $(F, Z) \overset{*}{*}_{\varepsilon} (G, C) = (T, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ G'(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$(T, Z \cup C) = \emptyset_{Z \cup C}$ olduğundan, $\forall \aleph \in Z \cup C$ için $T(\aleph) = \emptyset$. Buradan, $\forall \aleph \in Z - C$; $F'(\aleph) = \emptyset$, $\forall \aleph \in C - Z$; $G'(\aleph) = \emptyset$ ve $\forall \aleph \in Z \cap C$; $F'(\aleph) \cup G'(\aleph) = \emptyset$. Buradan, $\forall \aleph \in Z - C$; $F(\aleph) = U$, $\forall \aleph \in C - Z$;

$G(\aleph)=U \ \forall \aleph \in Z \cap C$; $F'(\aleph) = \emptyset$, $G'(\aleph) = \emptyset$. Buradan, $\forall \aleph \in Z \cap C$; $F(\aleph) = U$, $G(\aleph) = U$. Böylece, $\forall \aleph \in Z$; $F(\aleph)=U$ ve $\forall \aleph \in B$; $G(\aleph)=U$. Böylece, $(F, Z) = U_Z$ ve $(G, B) = U_C$.

$$13) \ \emptyset_Z \cong_{(F,Z)}^*_{*\varepsilon} (G,C), \quad \emptyset_C \cong_{(F,Z)}^*_{*\varepsilon} (G,C), \quad \emptyset_{Z \cup C} \cong_{(F,Z)}^*_{*\varepsilon} (G,C), \quad (F,Z) \cong_{*\varepsilon}^* (G,C) \\ \cong U_{Z \cup C}.$$

$$14) \ (F,Z)^r \cong_{*\varepsilon}^* (F,Z) \cong_{*\varepsilon}^* (G,C) \text{ ve } (G,C)^r \cong_{*\varepsilon}^* (F,Z) \cong_{*\varepsilon}^* (G,C).$$

İspat: $(F,Z) \cong_{*\varepsilon}^* (G,C) = (H, Z \cup C)$ olsun. Burada $Z \subseteq Z \cup C$ ve $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ G'(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$\forall \aleph \in Z - C$; $F'(\aleph) \subseteq F'(\aleph) = H(\aleph)$ ve $\forall \aleph \in Z \cap C$; $F'(\aleph) \subseteq F'(\aleph) \cup G'(\aleph) = H(\aleph)$. Böylece $\forall \aleph \in Z$; $F'(\aleph) \subseteq H(\aleph)$. Öyleyse $(F,Z)^r \cong_{*\varepsilon}^* (F,Z) \cong_{*\varepsilon}^* (G,C)$. Benzer şekilde, $\forall \aleph \in C - Z$; $G'(\aleph) \subseteq G'(\aleph) = H(\aleph)$ ve $\forall \aleph \in C \cap Z$; $G'(\aleph) \subseteq F'(\aleph) \cup G'(\aleph) = H(\aleph)$. Böylece $\forall \aleph \in B$; $G'(\aleph) \subseteq H(\aleph)$. Öyleyse $(G,C)^r \cong_{*\varepsilon}^* (F,Z) \cong_{*\varepsilon}^* (G,C)$.

$$15) \ (F,Z) \cong (G,Z) \text{ ise } (F,Z) \cong_{*\varepsilon}^* (G,Z) = (F,Z)^r.$$

İspat: $(F,Z) \cong (G,Z)$ ise her $\aleph \in Z$ için, $F(\aleph) \subseteq G(\aleph)$. $(F,Z) \cong_{*\varepsilon}^* (G,Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ G'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Her $\aleph \in Z$ için, $F(\aleph) \subseteq G(\aleph)$ ise $G'(\aleph) \subseteq F'(\aleph)$. Böylece, $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph) \cup G'(\aleph) = F'(\aleph)$.

Buradan, $(F,Z) \cong_{*\varepsilon}^* (G,Z) = (F,Z)^r$.

$$16) (F, Z) \cong (G, Z) \text{ ise } (G, Z) \stackrel{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (H, C) \cong (F, Z) \stackrel{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (H, C).$$

İspat: $(F, Z) \cong (G, Z)$ olsun. Buradan, $\forall \aleph \in Z$ için, $F(\aleph) \subseteq G(\aleph)$ ve böylece $\forall \aleph \in Z$ için $G'(\aleph) \subseteq F'(\aleph)$ olur. $(G, Z) \stackrel{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (H, C) = (W, Z \cup C)$ olsun. Böylece, $\forall \aleph \in Z \cup C$ için,

$$W(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ H'(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ G'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z) \stackrel{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (H, C) = (L, Z \cup C)$ olsun. Böylece, $\forall \aleph \in Z \cup C$ için,

$$L(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ H'(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

Böylece, $\forall \aleph \in Z - C$; $W(\aleph) = G'(\aleph) \subseteq F'(\aleph) = L(\aleph)$, $\forall \aleph \in C - Z$; $W(\aleph) = H'(\aleph) \subseteq F'(\aleph) = L(\aleph)$,
 $\forall \aleph \in Z \cap C$; $W(\aleph) = G'(\aleph) \cup H'(\aleph) \subseteq F'(\aleph) \cup H'(\aleph) = L(\aleph)$ olup, $(G, Z) \stackrel{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (H, C) \cong$
 $(F, Z) \stackrel{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (H, C).$

17) $(G, Z) \stackrel{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (H, C) \cong (F, Z) \stackrel{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (H, C)$ ise $(F, Z) \cong (G, Z)$ olmak zorunda değildir. Yani Teorem 5.3 (16) tersi doğru değildir.

İspat: Teorem 5.3 (16) nın tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $A = \{e_1, e_3\}$ ve $\mathfrak{C} = \{e_1, e_3, e_5\}$ E'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, Z) , (G, Z) ve (H, C) ,
 $(F, Z) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, Z) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$, $(H, C) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_2, h_5\})\}$ olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.

Buradan, $(G, Z) \overset{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (H, B) = (L, Z \cup C)$ olmak üzere $(L, Z \cup C) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_1, h_5\})\}$ ve $(F, Z) \overset{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (H, C) = (K, Z \cup C)$ olmak üzere $(K, Z \cup C) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_1, h_5\})\}$. Buradan, $(G, Z) \overset{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (H, C) \cong (F, Z) \overset{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (H, C)$; fakat $(F, Z) \not\cong (G, Z)$ olmadığı açıktır.

18) $(F, Z) \cong (G, Z)$ ve $(K, C) \cong (L, C)$ ise $(G, Z) \overset{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (L, C) \cong (F, Z) \overset{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (K, C)$.

İspat: $(F, Z) \cong (G, Z)$ ve $(K, C) \cong (L, C)$ olsun. Buradan, $\forall \mathfrak{N} \in Z$ için, $F(\mathfrak{N}) \subseteq G(\mathfrak{N})$ ve böylece $G'(\mathfrak{N}) \subseteq F'(\mathfrak{N})$ ve $\forall \mathfrak{N} \in B$ için, $K(\mathfrak{N}) \subseteq L(\mathfrak{N})$ ve böylece $L'(\mathfrak{N}) \subseteq K'(\mathfrak{N})$ olur.

$(G, Z) \overset{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (L, C) = (W, Z \cup C)$ olsun. Böylece, $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup C$ için,

$$W(\mathfrak{N}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - C \\ L'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in C - Z \\ G'(\mathfrak{N}) \cup L'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (K, C) = (S, Z \cup C)$ olsun. Böylece, $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup C$ için,

$$S(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - C \\ K'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in C - Z \\ F'(\mathfrak{N}) \cup K'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap C \end{cases}$$

Böylece, $\forall \mathfrak{N} \in Z - C$; $W(\mathfrak{N}) = G'(\mathfrak{N}) \subseteq F'(\mathfrak{N}) = S(\mathfrak{N})$, $\forall \mathfrak{N} \in C - Z$; $W(\mathfrak{N}) = L'(\mathfrak{N}) \subseteq K'(\mathfrak{N}) = S(\mathfrak{N})$, $\forall \mathfrak{N} \in Z \cap C$; $W(\mathfrak{N}) = G'(\mathfrak{N}) \cup L'(\mathfrak{N}) \subseteq F'(\mathfrak{N}) \cup K'(\mathfrak{N}) = S(\mathfrak{N})$ olup, $(G, Z) \overset{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (L, C) \cong (F, Z) \overset{*}{\underset{*_{\varepsilon}}{}} (K, C)$.

5.4. Teorem Tümleyenli genişletilmiş yıldız işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

5.4.1. Teorem Tümleyenli genişletilmiş yıldız işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümlenli Genişletilmiş Yıldız İşleminin Kısıtlanmış İşlemler Üzerine Soldan Dağılması

$$1) Z' \cap C \cap R = Z \cap C \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*\varepsilon}^* [(G, C) \cap_R (H, R)] = [(F, Z)_{*\varepsilon}^* (G, C)] \cap_R [(F, Z)_{*\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, C) \cap_R (H, R) = (M, C \cap R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cap R$; $M(x) = G(x) \cap H(x)$. $(F, Z)_{*\varepsilon}^* (M, C \cap R) = (N, Z \cup (C \cap R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup (C \cap R)$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cap R) \\ M'(x), & x \in (C \cap R) - Z \\ F'(x) \cup M'(x), & x \in Z \cap (C \cap R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cap R) = Z - (C \cap R) \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cup (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{*\varepsilon}^* (G, C)] \cap_R [(F, Z)_{*\varepsilon}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{*\varepsilon}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

Şimdi $(F, Z)_{*\varepsilon}^* (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \cap_R (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cap (Z \cup R))$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup (C \cap R)$;
 $T(x) = V(x) \cup W(x)$. Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cap F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cap (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cap (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cap F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cap (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cap (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki $Z-(C \cap R)$ ele alınırsa, $Z-(C \cap R) = Z \cap (C \cap R)'$ olup, bir eleman $(C \cap R)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $C-R$ de, ya $R-C$ de, ya da $C \cup R$ nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in Z - (C \cap R)$ ise $x \in Z \cap C \cap R'$ veya $x \in Z \cap C' \cap R$ veya $x \in Z \cap C' \cap R'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap C \cap R = \emptyset$ ise N ve T fonksiyonları birbirine eşit olur.

$$2) (F, Z)_{*\varepsilon}^* [(G, C) \cup_R (H, R)] = [(F, Z)_{*\varepsilon}^* (G, C)] \cap_R [(F, Z)_{*\varepsilon}^* (H, R)].$$

$$3) Z' \cap C \cap R = Z \cap C \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*\varepsilon}^* [(G, C) *_R (H, R)] = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, C)] \cap_R [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, C) *_R (H, R) = (M, C \cap R)$ olsun.

Burada $\forall x \in C \cap R$; $M(t) = G'(t) \cup H'(t)$. $(F, Z)_{\theta\varepsilon}^* (M, C \cap R) = (N, Z \cup (C \cap R))$ olsun. Burada

$\forall x \in Z \cup (C \cap R)$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cap R) \\ M'(x), & x \in (C \cap R) - Z \\ F'(x) \cap M'(x), & x \in Z \cap (C \cap R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cap R) = Z - (C \cap R) \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cap (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, C)] \cap_R [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cup G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

Şimdi $(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \cap_R (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cap (Z \cup R))$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup (C \cap R)$;

$T(x) = V(x) \cap W(x)$. Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cap F'(x), & x \in (Z - C) \cap (Z - R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z - C) \cap (R - Z) = \emptyset \\ F'(x) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z - C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (C - Z) \cap (Z - R) = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C - Z) \cap (R - Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (C - Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z - R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R - Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(\aleph) & \aleph \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(\aleph) \cup G(\aleph)) \cap (F'(\aleph) \cup H(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C \cap R = \emptyset$ ise $N=T$ sağlanır.

$$4) Z' \cap C \cap R = Z \cap C \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*\varepsilon}^* [(G, C) \theta_R (H, R)] = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, C)] \cap_R [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, R)]$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Yıldız İşleminin Kısıtlanmış İşlemler Üzerine Sağdan Dağılıması

$$1) [(F, Z) \cup_R (G, C)]_{*\varepsilon}^* (H, R) = [(F, Z)_{*\varepsilon}^* (H, R)] \cap_R [(G, C)_{*\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \cup_R (G, C) = (M, Z \cap C)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cap C; M(\aleph) = F(\aleph) \cup G(\aleph)$. $(M, Z \cap C)_{*\varepsilon}^* (H, R) = (N, (Z \cap C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in (Z \cap C) \cup R;$

$$N(\aleph) = \begin{cases} M'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) - R \\ H'(\aleph), & \aleph \in R - (Z \cap C) \\ M'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap (C \cap R) \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(\aleph), & \aleph \in R - (Z \cap C) = R - (Z \cap C) \\ (F'(\aleph) \cap G'(\aleph)) \cup H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{*\varepsilon}^* (H, R)] \cap_R [(G, C)_{*\varepsilon}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{*\varepsilon}^* (H, R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup R;$

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Şimdi, $(G, C)_{*\varepsilon}^* (H, R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C-R \\ H'(x), & x \in R-C \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \cap_R (W, C \cup R) = (T, (Z \cup R) \cap (C \cup R))$ olsun. Burada, $\forall x \in (Z \cap C) \cup R$;

$T(x) = V(x) \cap W(x)$. Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(x) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F'(x) \cup H'(x)) \cap G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F'(x) \cup H'(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cup H'(x)) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cup H'(x)) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, $R-(Z \cap C)$ 'yi ele alırsak, $R-(Z \cap C) = R \cap (Z \cap C)'$ olup, bir eleman $(Z \cap C)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $Z-C$ de, ya $C-Z$ da, ya da $Z \cup C$ nin tümleyenindedir. Buradan, $x \in R - (Z \cap C)$ ise $x \in R \cap Z \cap C'$ veya $x \in R \cap Z' \cap C$ veya $x \in R \cap Z' \cap C'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) Z \cap C \cap R' = Z \cap C \cap R = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \cap_R (G, C)]_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = [(F, Z)]_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) \cap_R [(G, C)]_{*_{\varepsilon}}^* (H, R).$$

$$3) Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) *_{\mathbf{R}} (G, C)]_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = [(F, Z)]_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H, R) \cap_R [(G, C)]_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H, R).$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) *_{\mathbf{R}} (G, C) = (M, Z \cap C)$ olsun. Burada $\forall \mathbf{x} \in Z \cap B$; $M(\mathbf{x}) = F'(\mathbf{x}) \cup G'(\mathbf{x})$. $(M, Z \cap C)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = (N, (Z \cap C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall \mathbf{x} \in (Z \cap C) \cup R$;

$$N(\mathbf{x}) = \begin{cases} M'(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in (Z \cap C) - R \\ H'(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in R - (Z \cap C) \\ M'(\mathbf{x}) \cup H'(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in Z \cap (C \cap R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\mathbf{x}) = \begin{cases} F(\mathbf{x}) \cap G(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in R - (Z \cap C) = R - (Z \cap C) \\ (F(\mathbf{x}) \cap G(\mathbf{x})) \cup H'(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)]_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H, R) \cap_R [(G, C)]_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H, R)$ bakalım.

$(F, Z)_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H, R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada, $\forall \mathbf{x} \in Z \cup R$;

$$V(\mathbf{x}) = \begin{cases} F'(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in Z - R \\ H'(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in R - Z \\ F(\mathbf{x}) \cup H'(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in Z \cap R \end{cases}$$

$(G, C)_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H, R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall \mathbf{x} \in C \cup R$;

$$W(\mathbf{x}) = \begin{cases} G'(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in C - R \\ H'(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in R - C \\ G(\mathbf{x}) \cup H'(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \cap_R (W, C \cup R) = (T, (Z \cup R) \cap (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in (Z \cap C) \cup R$;
 $T(x) = V(x) \cap W(x)$. Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(x) \cap (G(x) \cup H'(x)), & x \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cap (G(x) \cup H'(x)), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F(x) \cup H'(x)) \cap G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F(x) \cup H'(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cup H'(x)) \cap (G(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cup H'(x)) \cap (G(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z \cap C \cap R' = \emptyset$ ise $N=T$ sağlanır.

$$4) Z \cap C \cap R' = Z \cap C \cap R = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \theta_R (G, C)]_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = [(F, Z)_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H, R)] \cap_R [(G, C)_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

5.4.2. Teorem Tümleyenli genişletilmiş yıldız işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Yıldız İşleminin Genişletilmiş İşlemler Üzerine Soldan Dağılımı

$$1) (F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* [(G, C) \cap_{\varepsilon} (H, R)] = [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (G, C)] \cup_{\varepsilon} [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C) \cap_{\varepsilon} (H, R) = (M, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$M(x) = \begin{cases} G(x), & x \in C-R \\ H(x), & x \in R-C \\ G(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z) \stackrel{*}{\theta_\varepsilon} (M, C \cup R) = (N, Z \cup (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) \\ M'(x), & x \in (C \cup R) - Z \\ F'(x) \cup M'(x), & x \in Z \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G'(x), & x \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R - C) - Z = Z' \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ F'(x) \cup (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \stackrel{*}{\theta_\varepsilon} (G, C)] \cup_\varepsilon [(F, Z) \stackrel{*}{\theta_\varepsilon} (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z) \stackrel{*}{\theta_\varepsilon} (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z) \stackrel{*}{\theta_\varepsilon} (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \cup_\varepsilon (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ W(x), & x \in (Z \cup R) - (Z \cup C) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x), & x \in (Z-R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ H'(x), & x \in (R-Z) - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$N=T$ sağlanır.

$$2) Z \cap (C \Delta R) = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* [(G, C) \cup_{\varepsilon} (H, R)] = [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (G, C)] \cap_{\varepsilon} [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* [(G, C) *_{\varepsilon} (H, R)] = [(F, Z)_{+_{\varepsilon}}^* (G, C)] \cap_{\varepsilon} [(F, Z)_{+_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C) *_{\varepsilon} (H, R) = (M, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$M(x) = \begin{cases} G(x), & x \in C - R \\ H(x), & x \in R - C \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (M, C \cup R) = (N, Z \cup (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) \\ M'(x), & x \in (C \cup R) - Z \\ F'(x) \cup M'(x), & x \in Z \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G'(x), & x \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R - C) - Z = Z \cap C' \cap R \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ F'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{+_{\varepsilon}}^* (G, C)] \cap_{\varepsilon} [(F, Z)_{+_{\varepsilon}}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{+_{\varepsilon}}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cup G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \cap_{\varepsilon} (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ W(x), & x \in (Z \cup R) - (Z \cup C) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x), & x \in (Z-R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ H'(x), & x \in (R-Z) - (Z \cup C) = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cup H(x), & x \in (Z \cap R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ F'(x) \cap F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$\begin{cases} G'(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap H(x), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cap G(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* [(G, C) \theta_{\varepsilon}(H, R)] = [(F, Z)_{+_{\varepsilon}}^* (G, C)] \cup_{\varepsilon} [(F, Z)_{+_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

ii) Tümlenli Genişletilmiş Yıldız İşleminin Genişletilmiş İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) Z \cap C \cap R' = Z \cap C \cap R = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \cup_{\varepsilon} (G, C)]_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)] \cup_{\varepsilon} [(G, C)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \cup_{\varepsilon} (G, C) = (M, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$M(x) = \begin{cases} F(x), & x \in Z - C \\ G(x), & x \in C - Z \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$$(M, Z \cup C)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = (N, (Z \cup C) \cup R) \text{ olsun. Burada } \forall x \in (Z \cup C) \cup R;$$

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in (Z \cup C) - R \\ H'(x), & x \in R - (Z \cup C) \\ M'(x) \cup H'(x), & x \in (Z \cup C) \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - C) - R = Z \cap C' \cap R' \\ G'(x), & x \in (C - Z) - R = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C - Z) \cap R = Z' \cap C \cap R \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z)_{*\varepsilon}^*(H,R)] \cup_\varepsilon [(G,C)_{*\varepsilon}^*(H,R)]$ bakalım.

$(F,Z)_{*\varepsilon}^*(H,R)=(V,Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cup H'(x) & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(G,C)_{*\varepsilon}^*(H,R)=(W,C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ H'(x), & x \in R - C \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V,Z \cup R) \cup_\varepsilon (W,C \cup R) = (T,Z \cup C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ W(x), & x \in (C \cup R) - (Z \cup R) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H'(x), & x \in (R - Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (C - R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R - C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z - R) \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - R) \cap (R - C) = \emptyset \\ F'(x) \cup (G'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z - R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cup G'(x), & x \in (R - Z) \cap (C - R) = \emptyset \\ H'(x) \cup H'(x), & x \in (R - Z) \cap (R - C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cup (G'(x) \cup H'(x)) & x \in (R - Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F'(x) \cup H'(x)) \cup G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C - R) = \emptyset \\ (F'(x) \cup H'(x)) \cup H'(x) & x \in (Z \cap R) \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cup H'(x)) \cup (G'(x) \cup H'(x)) & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G'(\aleph), & \aleph \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(\aleph), & \aleph \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ G'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ F'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(\aleph) \cup H'(\aleph)) \cup (G'(\aleph) \cup H'(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z \cap C \cap R' = Z \cap C \cap R = \emptyset$ ise $N=T$ sağlanır.

$$2) [(F,Z) \cap_{\varepsilon} (G,C)]_{*_{\varepsilon}}^* (H,R) = [(F,Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H,R)] \cap_{\varepsilon} [(G,C)_{*_{\varepsilon}}^* (H,R)].$$

$$3) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F,Z) \theta_{\varepsilon} (G,C)]_{*_{\varepsilon}}^* (H,R) = [(F,Z)_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H,R)] \cup_{\varepsilon} [(G,C)_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H,R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,Z) \theta_{\varepsilon} (G,C) = (M, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ G(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$$(M, Z \cup C)_{*_{\varepsilon}}^* (H,R) = (N, (Z \cup C) \cup R) \text{ olsun. Burada } \forall \aleph \in Z \cup C \cup R;$$

$$N(\aleph) = \begin{cases} M'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup C) - R \\ H'(\aleph), & \aleph \in R - (Z \cup C) \\ M'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup C) \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-C)-R = Z \cap C' \cap R' \\ G'(x), & x \in (C-Z)-R = Z' \cap C \cap R' \\ F(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap C)-R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R-(Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap R = Z' \cap C \cap R \\ (F(x) \cup G(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z)_{\lambda_\varepsilon}^*(H,R)] \cup_\varepsilon [(G,C)_{\lambda_\varepsilon}^*(H,R)]$. bakalım.

$(F,Z)_{\lambda_\varepsilon}^*(H,R) = (V,Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(G,C)_{\lambda_\varepsilon}^*(H,R) = (W,C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C-R \\ H'(x), & x \in R-C \\ G(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V,Z \cup R) \cup_\varepsilon (W,C \cup R) = (T,Z \cup C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ W(x), & x \in (C \cup R) - (Z \cup R) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$\begin{array}{lcl}
T(X) = \left\{ \begin{array}{l} F'(X), \\ H'(X), \\ F(X) \cup H'(X), \\ G'(X), \\ H'(X), \\ G(X) \cup H'(X), \\ F'(X) \cup G'(X), \\ F'(X) \cup H'(X), \\ F'(X) \cup (G(X) \cup H'(X)), \\ H'(X) \cup G'(X), \\ H'(X) \cup H'(X), \\ H'(X) \cup (G(X) \cup H'(X)) \\ (F(X) \cup H'(X)) \cup G'(X), \\ (F(X) \cup H'(X)) \cup H'(X) \\ (F(X) \cup H'(X)) \cup (G(X) \cup H'(X)) \end{array} \right. & & \begin{array}{l} X \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ X \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ X \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ X \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ X \in (R-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ X \in (C \cap R) - (Z \cup R) = \emptyset \\ X \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ X \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ X \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ X \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ X \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ X \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ X \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ X \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ X \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{array}
\end{array}$$

Böylece,

$$\begin{array}{lcl}
T(X) = \left\{ \begin{array}{l} F'(X), \\ G'(X), \\ F'(X) \cup G'(X), \\ H'(X) \\ H'(X) \cup G(X) \\ H'(X) \cup F(X) \\ (F(X) \cup H'(X)) \cup (G(X) \cup H'(X)) \end{array} \right. & & \begin{array}{l} X \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ X \in (C-R) - (Z \cup R) = Z \cap C \cap R' \\ X \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ X \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap B' \cap R \\ X \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ X \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ X \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{array}
\end{array}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) *_{\varepsilon} (G, C)] *_{\varepsilon} (H, R) = [(F, Z) \lambda_{\varepsilon}^* (H, R)] \cap_{\varepsilon} [(G, C) \lambda_{\varepsilon}^* (H, R)].$$

5.4.3. Teorem Tümleyenli genişletilmiş yıldız işleminin tümleyenli genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Yıldız İşleminin Tümleyenli Genişletilmiş İşlemler Üzerine Soldan Dağılıması

$$1) Z \cap (C \Delta R) = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* [(G, C)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, R)] = [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (G, C)]_{\cup_{\varepsilon}}^* [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C)_{\cap_{\varepsilon}}^* ((H, R) = (M, C \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$M(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ H'(x), & x \in R - C \\ G(x) \cap H(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (M, C \cup R) = (N, Z \cup (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) \\ M'(x), & x \in (C \cup R) - Z \\ F'(x) \cup M'(x), & x \in Z \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G(x), & x \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ H(x), & x \in (R - C) - Z = Z' \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cup G(x), & x \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ F'(x) \cup (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (G, C)]_{\cup_{\varepsilon}}^* [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \stackrel{*}{\cup}_{\varepsilon} (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ W'(x), & x \in (Z \cup R) - (Z \cup C) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F(x) \cap G(x), & x \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F(x), & x \in (Z-R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ H(x), & x \in (R-Z) - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F(x) \cap H(x), & x \in (Z \cap R) - (Z \cup C) = \emptyset \\ F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} G(\aleph), & \aleph \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H(\aleph), & \aleph \in (R-Z) - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(\aleph) & \aleph \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(\aleph) \cup H'(\aleph) & \aleph \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \\ G'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(\aleph) \cup G'(\aleph) & \aleph \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(\aleph) \cup G'(\aleph)) \cap (F'(\aleph) \cup H'(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartının, $Z \cap (C \Delta R) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) Z' \cap C \cap R = Z \cap C \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*\epsilon}^* [(G, C)_{\cup\epsilon}^* (H, R)] = [(F, Z)_{*\epsilon}^* (G, C)]_{\cup\epsilon}^* [(F, Z)_{*\epsilon}^* (H, R)].$$

$$3) Z' \cap C \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*\epsilon}^* [(G, C)_{*\epsilon}^* (H, R)] = [(F, Z)_{+\epsilon}^* (G, C)]_{\cap\epsilon}^* [(F, Z)_{+\epsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C)_{*\epsilon}^* ((H, R) = (M, C \cup R))$ olsun. Burada $\forall \aleph \in C \cup R$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in C - R \\ H'(\aleph), & \aleph \in R - C \\ G'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z)_{+\epsilon}^* (M, C \cup R) = (N, Z \cup (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup C \cup R$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - (C \cup R) \\ M'(\aleph), & \aleph \in (C \cup R) - Z \\ F'(\aleph) \cup M(\aleph), & \aleph \in Z \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G(x), & x \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ H(x), & x \in (R - C) - Z = Z' \cap C' \cap R \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ F'(x) \cup (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (G, C)] \cup_{\varepsilon} [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C)_{*_{\varepsilon}}^* (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in (Z \cup C) \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ W'(x), & x \in (Z \cup R) - (Z \cup C) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F(X), & X \in (Z-C)-(Z \cup R) = \emptyset \\ G(X), & X \in (C-Z)-(Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F(X) \cap G(X), & X \in (Z \cap C)-(Z \cup R) = \emptyset \\ F(X), & X \in (Z-R)-(Z \cup C) = \emptyset \\ H(X), & X \in (R-Z)-(Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F(X) \cap H(X), & X \in (Z \cap R)-(Z \cup C) = \emptyset \\ F'(X) \cup F'(X), & X \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(X) \cup H'(X), & X \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(X) \cup (F'(X) \cup H'(X)), & X \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(X) \cup F'(X), & X \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(X) \cup H'(X), & X \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(X) \cup (F'(X) \cup H'(X)), & X \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(X) \cup G'(X)) \cup F'(X), & X \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(X) \cup G'(X)) \cup H'(X), & X \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F'(X) \cup G'(X)) \cup (F'(X) \cup H'(X)), & X \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} G(X), & X \in (C-Z)-(Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H(X), & X \in (R-Z)-(Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F'(X), & X \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(X) \cup H'(X), & X \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(X) \cup H'(X), & X \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(X) \cup G'(X), & X \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(X) \cup G'(X)) \cup (F'(X) \cup H'(X)), & X \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır.

$$4) Z' \cap C \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* [(G, C)_{\theta_{\varepsilon}}^* (H, R)] = [(F, Z)_{+_{\varepsilon}}^* (G, C)]_{\cup_{\varepsilon}}^* [(F, Z)_{+_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

ii) Tümlenlenli Genişletilmiş Yıldız İşleminin Tümlenlenli Genişletilmiş İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) Z \cap (B \Delta R) = \emptyset \text{ ise } [(FA)_{\cup_{\varepsilon}}^* (G, C)]_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)]_{\cap_{\varepsilon}}^* [(G, C)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (G, C) = (M, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(M, Z \cup C) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (H, R) = (N, (Z \cup C) \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in (Z \cup C) - R \\ H'(x), & x \in R - (Z \cup C) \\ M'(x) \cup H'(x), & x \in (Z \cup C) \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - C) - R = Z \cap C' \cap R' \\ G(x), & x \in (C - Z) - R = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F(x) \cup H'(x), & x \in (Z - C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ G(x) \cup H'(x), & x \in (C - Z) \cap R = Z' \cap C \cap R \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (H, R)] \underset{*_{\varepsilon}}{*} [(G, C) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (H, R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(G, C) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (H, R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ H'(x), & x \in R - C \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (W, C \cup R) = (T, Z \cup C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ W'(x), & x \in (C \cup R) - (Z \cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H(x), & x \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F(x) \cap H(x), & x \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ G(x), & x \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H(x), & x \in (R-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(x) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cap (G'(x) \cup H'(x)) & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F'(x) \cup H'(x)) \cap G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F'(x) \cup H'(x)) \cap H'(x) & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cup H'(x)) \cap (G'(x) \cup H'(x)) & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G(x), & x \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cup H'(x)) \cap (G'(x) \cup H'(x)) & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartının, $Z \cap (C \Delta R) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta C) \cap R = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} (G, C)] \underset{*_{\varepsilon}}{*} (H, R) = [(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (H, R)] \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} [(G, C) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (H, R)].$$

$$3) Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{\theta_{\varepsilon}}{*} (G, C)] \underset{*_{\varepsilon}}{*} (H, R) = [(F, Z) \underset{\lambda_{\varepsilon}}{*} (H, R)] \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} [(G, C) \underset{\lambda_{\varepsilon}}{*} (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \underset{\theta_{\varepsilon}}{*} (G, C) = (M, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - C \\ G'(\aleph), & \aleph \in C - Z \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$$(M, Z \cup C) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (H, R) = (N, (Z \cup C) \cup R) \text{ olsun. Burada } \forall \aleph \in Z \cup C \cup R;$$

$$N(\aleph) = \begin{cases} M'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup C) - R \\ H'(\aleph), & \aleph \in R - (Z \cup C) \\ M'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup C) \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in (Z - C) - R = Z \cap C' \cap R' \\ G(\aleph), & \aleph \in (C - Z) - R = Z' \cap C \cap R' \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(\aleph), & \aleph \in R - (Z \cup C) = Z' \cap C' \cap R \\ F(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (Z - C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ G(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (C - Z) \cap R = Z' \cap C \cap R \\ (F(\aleph) \cup G(\aleph)) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \underset{\lambda_{\varepsilon}}{*} (H, R)] \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} [(G, C) \underset{\lambda_{\varepsilon}}{*} (H, R)]$ bakalım.

$$(F, Z) \underset{\lambda_{\varepsilon}}{*} (H, R) = (V, Z \cup R) \text{ olsun. Burada } \forall \aleph \in Z \cup R ;$$

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - R \\ H'(\aleph), & \aleph \in R - Z \\ F(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap R \end{cases}$$

$(G, C) \stackrel{*}{\lambda_\varepsilon} (H, R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ H'(x), & x \in R - C \\ G(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \stackrel{*}{\cup_\varepsilon} (W, C \cup R) = (T, Z \cup C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ W'(x), & x \in (C \cup R) - (Z \cup R) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - R) - (C \cup R) = Z \cap C \cap R' \\ H(x), & x \in (R - Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap H(x), & x \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ G(x), & x \in (C - R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ H(x), & x \in (R - C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z - R) \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - R) \cap (R - C) = \emptyset \\ F'(x) \cup (G(x) \cup H'(x)), & x \in (Z - R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cup G'(x), & x \in (R - Z) \cap (C - R) = \emptyset \\ H'(x) \cup H'(x), & x \in (R - Z) \cap (R - C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cup (G(x) \cup H'(x)) & x \in (R - Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F(x) \cup H'(x)) \cup G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C - R) = \emptyset \\ (F(x) \cup H'(x)) \cup H'(x) & x \in (Z \cap R) \cap (R - C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cup H'(x)) \cup (G(x) \cup H'(x)) & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (C-R) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(\mathfrak{N}) \cup G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ G(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ F(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N})) \cup (G(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır.

$$4) Z \cap C \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z)_{*\varepsilon}^* (G, C)]_{*\varepsilon}^* (H, R) = [(F, Z)_{\lambda\varepsilon}^* (H, R)]_{\cup\varepsilon}^* [(G, C)_{\lambda\varepsilon}^* (H, R)].$$

5.4.4. Teorem Tümleyenli genişletilmiş yıldız işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Yıldız İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Soldan Dağılıması

$$1) Z \cap C' \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*\varepsilon}^* [(G, C) \widetilde{\cap} (H, R)] = [(F, Z)_{*\varepsilon}^* (G, C)] \widetilde{\cap} [(F, Z)_{*}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C) \widetilde{\cap} (H, R) = (M, C)$ olsun. Buradan $\forall \mathfrak{N} \in C$;

$$M(\mathfrak{N}) = \begin{cases} G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in C-R \\ G(\mathfrak{N}) \cap H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z)_{*\varepsilon}^* (M, C) = (N, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup C$;

$$N(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z-C \\ M'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in C-Z \\ F'(\mathfrak{N}) \cup M'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap C \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ G'(x), & x \in (C-R)-Z = Z' \cap C \cap R' \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C \cap R)-Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z)_{*\varepsilon}^*(G,C)] \widetilde{\cup} [(F,Z)_{*\varepsilon}^*(H,R)]$ bakalım.

$(F,Z)_{*\varepsilon}^*(G,C) = (V,Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-C \\ G'(x), & x \in C-Z \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F,Z)_{*\varepsilon}^*(H,R) = (W,Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V,Z \cup C) \widetilde{\cup} (W,Z \cup R) = (T,(Z \cup C))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F(x) \cap G(x), & x \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, Z-C ele alırsak, Z-C=Z∩C' olup, bir eleman C nin tümleyeninde ise o eleman ya R-C de, ya da C ∪ R nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in R - C$ ise $x \in Z \cap C' \cap R$ veya $x \in Z \cap C' \cap R'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartı ile N=T sağlanır.

$$2) Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* [(G, C) \widetilde{\cup} (H, R)] = [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (G, C)] \widetilde{\cap} [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta R) \cap C = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* [(G, C) \widetilde{*} (H, R)] = [(F, Z)_{+_{\varepsilon}}^* (G, C)] \widetilde{\cap} [(F, Z)_{+_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C) \widetilde{*} (H, R) = (M, C)$ olsun. Buradan $\forall x \in C$;

$$M(x) = \begin{cases} G(x), & x \in C-R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (M, C) = (N, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ M'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cup M'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (G, C)] \tilde{\cap} [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cup G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \tilde{\cap} (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (C-Z) \cap (Z-R) = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (C-Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R-Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in (C-Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z-R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z-C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C-Z) \cap (R-Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z-R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartının $(Z \Delta R) \cap C = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* [(G, C)_{\emptyset}^* (H, R)] = [(F, Z)_{+}^* (G, C)] \cup [(F, Z)_{+_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

ii) Tümlenli Genişletilmiş Yıldız İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) Z \cap C' \cap R = \emptyset \text{ ise } [(F, Z)_{\cup}^* (G, C)]_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)] \cap [(G, C)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z)_{\cup}^* (G, C) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$M(x) = \begin{cases} F(x), & x \in Z-C \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(M, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = (N, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ M'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - C) - R = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)] \widetilde{\cap} [(G, C)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)]$.

$(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Şimdi $(G, C)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ H'(x), & x \in R - C \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \widetilde{\cap} (W, C \cup R) = (T, (Z \cup R) \cap (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R)$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H'(\aleph), & \aleph \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap (G'(\aleph) \cup H'(\aleph)), & \aleph \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(\aleph) \cap (G'(\aleph) \cup H'(\aleph)), & \aleph \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F'(\aleph) \cup H'(\aleph)) \cap G'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F'(\aleph) \cup H'(\aleph)) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(\aleph) \cup H'(\aleph)) \cap (G'(\aleph) \cup H'(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(\aleph), & \aleph \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(\aleph), & \aleph \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(\aleph) \cup H'(\aleph)) \cap (G'(\aleph) \cup H'(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, R-Z ele alırsak, R-Z=R∩Z' olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya C-Z de, ya da C∪Z nin tümleyenindedir. Burdan, $\aleph \in Z' \cap C \cap R$ veya $\aleph \in Z' \cap C' \cap R$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartı ile N=T sağlanır.

$$2) Z' \cap C \cap R = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \widetilde{\cap} (G, C)]_{*\epsilon}^* (H, R) = [(F, Z)_{*\epsilon}^* (H, R)] \widetilde{\cup} [(G, C)_{*\epsilon}^* (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta C) \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \widetilde{\cap} (G, C)]_{*\epsilon}^* (H, R) = [(F, Z)_{\lambda_\epsilon}^* (H, R)] \widetilde{\cup} [(G, C)_{\lambda_\epsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \widetilde{\cap} (G, C) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in Z-C \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$(M, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = (N, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ M'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - C) - R = Z \cap C' \cap R' \\ F(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cup G(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z)_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H, R)] \widetilde{\cup} [(G, C)_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H, R)]$.

$(F, Z)_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H, R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Şimdi $(G, C)_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H, R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ H'(x), & x \in R - C \\ G(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \widetilde{\cup} (W, C \cup R) = (T, (Z \cup R) \cap (C \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R)$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{N}) \cup G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{N}) \cup (G(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{N}) \cup G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(\mathfrak{N}) \cup (G(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N})) \cup G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N})) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N})) \cup (G(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(\mathfrak{N}) \cup G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ G(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ F(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N})) \cup (G(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartının $(Z \Delta C) \cap R = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) Z \cap (C \Delta R) = \emptyset \text{ ise } [(F, Z)_{*}^{\sim} (G, C)]_{*}^{\sim} (H, R) = [(F, Z)_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H, R)]_{\cap}^{\sim} [(G, C)_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

5.4.5. Teorem Tümleyenli genişletilmiş yıldız işleminin tümeleyenli esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur

i) Tümleyenli Genişletilmiş Yıldız İşleminin Tümleyenli Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Soldan Dağılıması

$$1) Z \cap (C \Delta R) = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* [(G, C)_{\cap}^{\sim} (H, R)] = [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (G, C)]_{\cup}^{\sim} [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G,C) \underset{\cap}{\overset{*}{\sim}} (H,R)=(M,C)$ olsun. Buradan $\forall \aleph \in C$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in C-R \\ G(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in C \cap R \end{cases}$$

$(F,Z) \underset{*_{\varepsilon}}{(M,C)} = (N,Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-C \\ M'(\aleph), & \aleph \in C-Z \\ F'(\aleph) \cup M'(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-C \\ G(\aleph), & \aleph \in (C-R)-Z = Z' \cap C \cap R' \\ G'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (C \cap R)-Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(\aleph) \cup (G'(\aleph) \cup H'(\aleph)), & \aleph \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z) \underset{*_{\varepsilon}}{(G,C)}] \underset{\cup}{\overset{*}{\sim}} [(F,Z) \underset{*_{\varepsilon}}{(H,R)}]$ bakalım.

$(F,Z) \underset{*_{\varepsilon}}{(G,C)} = (V,Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup C$;

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-C \\ G'(\aleph), & \aleph \in C-Z \\ F'(\aleph) \cup G''(\aleph), & \aleph \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F,Z) \underset{*_{\varepsilon}}{(H,R)} = (W,Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup R$;

$$W(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-R \\ H'(\aleph), & \aleph \in R-Z \\ F'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap R \end{cases}$$

*
 $(V, Z \cup C) \sim (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;
 U

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G(x), & x \in (C - Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F(x) \cap G(x), & x \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z - C) \cap (Z - R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - C) \cap (R - Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z - C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (C - Z) \cap (Z - R) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C - Z) \cap (R - Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (C - Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z - R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R - Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G(x), & x \in (C - Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z - C) \cap (Z - R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (C - Z) \cap (R - Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z - R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, Z-C ele alırsak, Z-C=Z∩C' olup, bir eleman C nin tümleyeninde ise o eleman ya R-C de, ya da C ∪ R nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in R - C$ ise $x \in Z \cap C' \cap R$ veya $x \in Z \cap C' \cap R'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile N=T sağlanır. $Z \cap C' \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartının $Z \cap (C \Delta R) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) Z \cap C \cap R' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*\varepsilon}^* [(G, C) \underset{U}{\sim} (H, R)] = [(F, Z)_{*\varepsilon}^* (G, C)] \underset{\cap}{\sim} [(F, Z)_{*\varepsilon}^* (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta R) \cap C = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*\varepsilon}^* [(G, C) \underset{*}{\sim} (H, R)] = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, C)] \underset{\cap}{\sim} [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, C) \underset{*}{\sim} (H, R) = (M, C)$ olsun. Buradan $\forall x \in C$;

$$M(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C - R \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(F, Z)_{*\varepsilon}^* (M, C) = (N, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ M'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cup M'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G(x), & x \in (C - R) - Z = Z' \cap C \cap R' \\ G(x) \cap H(x), & x \in (C \cap R) - Z = Z' \cap C \cap R \\ F'(x) \cup G(x), & x \in Z \cap (C - R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, C)] \underset{\cap}{\sim} [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, R)]$ bakalım.

$(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, C) = (V, Z \cup C)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ G'(x), & x \in C - Z \\ F'(x) \cup G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(F, Z) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (H, R) = (W, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup C) \stackrel{*}{\cap} (W, Z \cup R) = (T, (Z \cup C))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup C$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup C) - (Z \cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup C) \cap (Z \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ G(x), & x \in (C - Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap C) - (Z \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap F'(x), & x \in (Z - C) \cap (Z - R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z - C) \cap (R - Z) = \emptyset \\ F'(x) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z - C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (C - Z) \cap (Z - R) = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C - Z) \cap (R - Z) = Z' \cap C \cap R \\ G'(x) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (C - Z) \cap (Z \cap R) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z - R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (R - Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G(x), & x \in (C - Z) - (Z \cup R) = Z' \cap C \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z - C) \cap (Z - R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x), & x \in (Z - C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C' \cap R \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (C - Z) \cap (R - Z) = Z' \cap C \cap R \\ F'(x), & x \in (Z \cap C) \cap (Z - R) = Z \cap C \cap R' \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap C) \cap (Z \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartının $(Z \Delta R) \cap C = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) (Z \Delta C) \cap R = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{*\varepsilon}^* [(G, C)_{\theta}^* \sim (H, C)] = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, C)] \sim_{\cup}^* [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, R)].$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Yıldız İşleminin Tümleyenli Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) Z \cap C' \cap R = \emptyset \text{ ise } [(F, Z)_{\cup}^* \sim (G, C)]_{*\varepsilon}^* (H, R) = [(F, Z)_{*\varepsilon}^* (H, R)] \sim_{\cap}^* [(G, C)_{*\varepsilon}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z)_{\cup}^* \sim (G, C) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(M, Z)_{*\varepsilon}^* (H, R) = (N, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ M'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - C) - R = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap C) - R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R - Z \\ F(x) \cup H'(x), & x \in (Z - C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z)_{*\varepsilon}^* (H, R)] \sim_{\cap}^* [(G, C)_{*\varepsilon}^* (H, R)]$.

$(F, Z)_{*\varepsilon}^* (H, R) = (V, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Şimdi $(G, C) \stackrel{*}{\sim}_{\varepsilon} (H, R) = (W, C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C-R \\ H'(x), & x \in R-C \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V, Z \cup R) \stackrel{*}{\sim}_{\cap} (W, C \cup R) = (T, (Z \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H(x), & x \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F(x) \cap H(x), & x \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(x) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F'(x) \cup H'(x)) \cap G'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F'(x) \cup H'(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cup H'(x)) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(x), & x \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ H'(x), & x \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F'(x) \cup H'(x)) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, R-Z ele alırsak, R-Z=R∩Z' olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya C-Z de, ya da C ∪ Z nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in Z' \cap C \cap R$ veya $x \in Z' \cap C' \cap R$ olduğuna dikkat edecek olursak $Z \cap C' \cap R = \emptyset$ şartı ile N=T sağlanır.

$$2) (Z \Delta C) \cap R = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{\cap}{\sim} (G, C)]_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = [(F, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)] \underset{\cup}{\sim} [(G, C)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

$$3) (Z \Delta R) \cap C = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{\theta}{\sim} (G, C)]_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = [(F, Z)_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H, R)] \underset{\cup}{\sim} [(G, C)_{\lambda_{\varepsilon}}^* (H, R)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \underset{\theta}{\sim} (G, C) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - C \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap C \end{cases}$$

$(M, Z)_{*_{\varepsilon}}^* (H, R) = (N, Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in Z - R \\ H'(x), & x \in R - Z \\ M'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-C)-R = Z \cap C' \cap R' \\ F(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap C)-R = Z \cap C \cap R' \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F(x) \cup H'(x), & x \in (Z-C) \cap R = Z \cap C' \cap R \\ (F(x) \cup G(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap C) \cap R = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F,Z)_{\lambda_\varepsilon}^*(H,R)] \sim_U [(G,C)_{\lambda_\varepsilon}^*(H,R)]$.

$(F,Z)_{\lambda_\varepsilon}^*(H,R) = (V,Z \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-R \\ H'(x), & x \in R-Z \\ F(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap R \end{cases}$$

Şimdi $(G,C)_{\lambda_\varepsilon}^*(H,R) = (W,C \cup R)$ olsun. Burada $\forall x \in C \cup R$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in C-R \\ H'(x), & x \in R-C \\ G(x) \cup H'(x), & x \in C \cap R \end{cases}$$

$(V,Z \cup R) \sim_U^* (W,C \cup R) = (T,(Z \cup R))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup R$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup R) - (C \cup R) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup R) \cap (C \cup R) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F(X), & X \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ H(X), & X \in (R-Z) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(X) \cap H(X), & X \in (Z \cap R) - (C \cup R) = \emptyset \\ F'(X) \cup G'(X), & X \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ F'(X) \cup H'(X), & X \in (Z-R) \cap (R-C) = \emptyset \\ F'(X) \cup (G(X) \cup H'(X)), & X \in (Z-R) \cap (C \cap R) = \emptyset \\ H'(X) \cup G'(X), & X \in (R-Z) \cap (C-R) = \emptyset \\ H'(X) \cup H'(X), & X \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ H'(X) \cup (G(X) \cup H'(X)), & X \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ (F(X) \cup H'(X)) \cup G'(X), & X \in (Z \cap R) \cap (C-R) = \emptyset \\ (F(X) \cup H'(X)) \cup H'(X), & X \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(X) \cup H'(X)) \cup (G(X) \cup H'(X)), & X \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F(X), & X \in (Z-R) - (C \cup R) = Z \cap C' \cap R' \\ F'(X) \cup G'(X), & X \in (Z-R) \cap (C-R) = Z \cap C \cap R' \\ H'(X), & X \in (R-Z) \cap (R-C) = Z' \cap C' \cap R \\ G(X) \cup H'(X), & X \in (R-Z) \cap (C \cap R) = Z' \cap C \cap R \\ F(X) \cup H'(X), & X \in (Z \cap R) \cap (R-C) = Z \cap C' \cap R \\ (F(X) \cup H'(X)) \cup (G(X) \cup H'(X)), & X \in (Z \cap R) \cap (C \cap R) = Z \cap C \cap R \end{cases}$$

$Z' \cap C \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap C \cap R = Z \cap C \cap R' = \emptyset$ şartının $(Z \Delta R) \cap C = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4) Z \cap (C \Delta R) = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{*}{\sim} (G, C)]_{*_{\epsilon}}^* (H, R) = [(F, Z) \underset{\cap}{\sim} (H, R)]_{\lambda_{\epsilon}}^* \underset{\cap}{\sim} [(G, C) \underset{\cap}{\sim} (H, R)]_{\lambda_{\epsilon}}^*.$$

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Esnek kümelerdeki işlem formundan olan genişletilmiş işlemlerden, genişletilmiş birleşim, genişletilmiş kesişim, genişletilmiş fark ve genişletilmiş simetrik fark sırasıyla Maji ve diğerleri (2003), Ali ve diğerleri (2009), Sezgin ve diğerleri (2019), Stojanovic (2021) tarafından çalışılmıştır. Bu tez çalışmasında ise yeni bir esnek küme işlem formu olan, tümleyenli genişletilmiş esnek küme işlemler çalışılmıştır. Tümleyenli genişletilmiş kesişim, tümleyenli genişletilmiş gamma ve tümleyenli genişletilmiş yıldız adı verilen yeni işlemler tanıtılmış, bu işlemlerin özellikleri incelenmiş; bu işlemlerin diğer işlemler ile olan ilişkilerine bakılmış, sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde, tümleyenli genişletilmiş kesişim işleminin, diğer esnek küme işlemleri ile birlikte çok çeşitli cebirsel yapılar oluşturduğu gösterilmiştir.

Altı bölümden oluşan tezin ilk bölümünde, esnek kümeler ve bazı cebirsel yapılar ile ilgili kaynak taraması yapılmış; ikinci bölümde, kümelerde işlemler, bazı cebirsel yapılar ve esnek kümelerle ilgili temel kavramlara yer verilmiş, üçüncü bölümde tümleyenli genişletilmiş kesişim, dördüncü bölümde tümleyenli genişletilmiş gamma, dördüncü bölümde tümleyenli genişletilmiş yıldız işlemleri tanıtılmış, tüm özellikleri ve diğer işlemlere olan dağılmasına bakılmış, bu kapsamda tümleyenli genişletilmiş kesişim işleminin diğer esnek kümeler ile birlikte sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde bir takım cebirsel yapılar oluşturduğu gösterilmiştir. İşlemlerin özelliklerine bakılırken, kapalılık, birleşme, birim eleman, ters eleman, değişme, idempotent gibi tüm özellikler detaylı şekilde incelenmiş olup, özellikle kesişim işlemi klasik kümelerde de var olan bir işlem olduğu için, klasik kümelerdeki kesişim işleminin, yeni esnek küme işlemi ile ne gibi benzer özellikler oluşturduğu dikkatli şekilde ele alınmış ve oldukça ilginç sonuçlar elde edilmiştir.

Bu kapsamda,

- $(S_Z(U), \bigcap_\epsilon^*)$ cebirsel yapısının birimi U_Z olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes;

- $(S_Z(U), \cap_R, \overset{*}{\cap}_\epsilon), (S_Z(U), \cap_\epsilon, \overset{*}{\cap}_\epsilon), (S_Z(U), \overset{*}{\cap}_\epsilon, \overset{*}{\cap}_\epsilon), (S_Z(U), \sim, \overset{*}{\cap}_\epsilon)$, cebirsel yapılarının komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halka;
- $(S_Z(U), \cup_R, \overset{*}{\cap}_\epsilon), (S_Z(U), \Delta_R, \overset{*}{\cap}_\epsilon), (S_Z(U), \cup_\epsilon, \overset{*}{\cap}_\epsilon), (S_Z(U), \overset{*}{\cup}_\epsilon, \overset{*}{\cap}_\epsilon), (S_Z(U), \sim, \overset{*}{\cup}_\epsilon), (S_Z(U), \sim, \overset{*}{\cup}_\epsilon)$ cebirsel yapılarının komutatif, idempotent, birimli bir hemihalka;
- $(S_Z(U), \Delta_R, \overset{*}{\cap}_\epsilon), (S_Z(U), \sim, \overset{*}{\cap}_\epsilon), (S_Z(U), \Delta_\epsilon, \overset{*}{\cap}_\epsilon), (S_Z(U), \sim, \overset{*}{\Delta}_\epsilon), (S_Z(U), \sim, \overset{*}{\Delta}_\epsilon)$ cebirsel yapısının bir Boole halkası
- $(S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \cup_R, \overset{*}{\cap}_\epsilon), (S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \cup_\epsilon, \overset{*}{\cap}_\epsilon), (S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \overset{*}{\cup}_\epsilon, \overset{*}{\cap}_\epsilon), (S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \sim, \overset{*}{\cup}_\epsilon), (S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \sim, \overset{*}{\cup}_\epsilon)$ yapılarının, Boole, De Morgan, Kleene ve Stone cebiri;
- $(S_Z(U), \overset{*}{\cap}_\epsilon, U_Z)$ bir MV-cebiri olduğu gösterilmiştir.

Esnek kümelerin cebirsel yapısını ve işlemlerini incelemek, esnek küme cebirinin nasıl çalıştığını anlamak için kapsamlı bir bakış açısı sağlar ve esnek kümeleri klasik ve klasik olmayan mantığı uygulamamıza olanak tanır. Bu açıdan yeni esnek küme işlemlerinin tanımlandığı bu çalışmanın işlemlerin gelecekte yapılacak esnek küme işlemleri ile ilgili çalışmaların önünü açarak gelecekte yapılacak araştırmalara yol göstermesini umuyoruz. Ayrıca, matematikçiler tarafından yüzyıllardır çalışılan cebirsel yapılarla ilgili çalışmaların, matematiksel nesneleri genel ve soyut bir şekilde inceleme ve anlamının bir yolunu sağladığından, esnek kümeler yardımıyla bu tezde elde edilen cebirsel yapıların klasik cebir teorisine de katkı sunacağını düşünüyoruz.

KAYNAKLAR

- Abbas, M., Ali, B. and Romaguera, S. (2014). On Generalized Soft Equality and Soft Lattice Structure. *Filomat*, 28(6), 1191-1203.
- Abbas, M., Ali, M. I and Romaguera, S. (2017). Generalized Operations in Soft Set Theory via Relaxed Conditions on Parameters. *Filomat*, 31(19), 5955–5964.
- Acar, U., Koyuncu, F. and Tanay, B. (2010). Soft Sets and Soft Rings. *Computers Mathematics Applications*, 59(11), 3458-3463.
- Akbulut, E. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Lambda and Difference Operation*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Aktaş, H. and Çağman, N. (2005). Bulanık ve Yaklaşımlı Kümeler. *Journal of Art and Science*, (3), 13-25.
- Aktaş, H. and Çağman, N. (2007). Soft Sets and Soft Groups. *Information Sciences*, 177 (1), 2726-2735.
- Aktaş H. and Özlü Ş. (2014). Cyclic Soft Groups and Their Applications on Groups. *The Scientific World Journal*, 2014.
- Ali, B., Saleem, N., Sundus, N., Khaleeq, S., Saeed, M. and George, R. A. (2022). Contribution to the Theory of Soft Sets via Generalized Relaxed Operations. *Mathematics*, 10(15), 2636.
- Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K. and Shabir, M. (2009). On Some New Operations in Soft set Theory. *Computers Mathematics with Applications*, 57(9), 1547-1553.
- Ali, M. I., Shabir, M. and Naz, M. (2011). Algebraic Structures of Soft Sets Associated with New Operations. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(9), 2647–2654.
- Al-shami, T.M. (2019). Investigation and Corrigendum to Some Results Related to g-Soft Equality and f-Soft Equality Relations. *Filomat*, 33(11), 3375–3383.
- Al-shami, T. M. and El-Shafer, M. (2020). T-soft Equality Relation. *Turkish Journal of Mathematics*, 44(4), 1427-1441.
- Atagün, A.O., Kamacı, H. and Oktay, O. (2018). Reduced Soft Matrices and Generalized Products with Applications in Decision Making. *Neural Computing and Applications*, 29(9), 445-456.
- Aybek, F. (2024). *New Restricted and Extended Soft Set Operations*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.

- Aydın, N. ve Kandamar, H. (2013). *Soyut Cebir* (Birinci Baskı). İstanbul: Kriter Yayınevi, 3-71.
- Babitha, K. V. and Sunil, J. J. (2010). Soft Set Relations and Functions. *Computers and Mathematics with Applications*, 60(7), 1840-1849.
- Bayraktar, M. (2006). *Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi* (Birinci Baskı). Türkiye: Gazi Kitabevi, 87-185.
- Birkhoff, G. (1967). *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode
- Cantor, G. (1874). Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (77), 258–262.
- Chang, C. C. (1958). A New Proof of the Completeness of the Łukasiewicz Axioms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 93(1), 460–490.
- Chen, D., Tsang, E. C. C. and Yeung, D.S. (2003). Some Notes on the Parameterization Reduction of Soft Sets. *International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, 3, 1442-1445.
- Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S. and Wang, X. (2005). The Parametrization Reduction of Soft Sets and its Applications. *Computers Mathematics Applications*, 49(5-6), 757-763.
- Clay, J. R. and Lawver, D. A. (1969). Boolean Near-Rings. *Canadian Mathematical Bulletin*, 12(3), 265-273.
- Clifford, A. H. (1954). Bands of Semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5(3), 499-504.
- Çağman, N. (2021). Conditional Complements of Sets and Their Application to Group Theory. *Journal of New Results in Science*, 10(3), 67-74.
- Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010a) Soft set Theory and Uni-int Decision Making. *European Journal of Operational Research*, 207(2), 848-855.
- Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010b). Soft Matrix Theory and its Decision Making. *Computers Mathematics with Applications*, 59(10), 3308-3314.
- Çallıalp, F. (1994). *Örneklerle Soyut Matematik* (Altıncı Baskı). Türkiye: Birsan Yayınevi, 1-7.
- Demirci, A. M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Union, Plus and Theta Operation*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Science, Amasya.
- Eren, Ö. F. (2019). *Esnek Küme Teorisi Üzerine*. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.

- Feng, F., Jun, Y. B. and Zhao, X. (2008). Soft Semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, 56 (10), 2621-2628.
- Feng, F., Li, C., Davvaz, B. and Ali, M. I. (2010). Soft Sets Combined with Fuzzy Sets and Rough Sets: A Tentative Approach. *Soft Computing- A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications*, 14(9), 899–911.
- Feng, F., Li, Y., & Çağman, N. (2012). Generalized uni-int decision making schemes based on choice value soft sets. *European Journal of Operational Research*, 220(1), 162-170.
- Feng, F. and Li, Y. (2013). Soft Subsets and Soft Product Operations. *Information Sciences*, 232(20), 44-57.
- Feng, Q., & Zhou, Y. (2014). Soft Discernibility Matrix and its Applications in Decision Making. *Applied Soft Computing*, 24, 749-756.
- Ge, X. and Yang, S. (2011). Investigations on Some Operations of Soft Sets. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 75, 1113-1116.
- Gong, K., Xiao, Z. and Zhang, X. (2010). The Bijective Soft Set with its Operations. *Computers Mathematics Applications*, 60(8), 2270-2278.
- Hacısalıhoğlu, H. (2007). *Soyut Matematik (İkinci Baskı)*. Türkiye: Üniversite Yayınevi, 163-204.
- Herawan T. (2010). Soft Set-Based Decision Making for Patients Suspected Influenza-Like Illness. *International Journal of Modern Physics Conference Series*, 1(1), 1–5.
- Herawan, T. and Deris M. M. (2010). Soft Decision Making for Patients Suspected Influenza. *Lecture Notes in Computer Science, Springer* 6018, 405–418.
- Hoorn, W. G. V. and Rootselaar, V. B. (1967). Fundamental Notions in the Theory of Seminearrings. *Compositio Mathematica*, 18(1-2), 65-78.
- Husain, S. and Shivani K. M. (2018). A Study of Properties of Soft Set And Its Applications. *International Research Journal of Engineering and Technology*, 5(1), 363-372.
- James, T. C. (2006). *Fizikte Felsefi Kavramlar*, Ö.Sarioğlu (çev.). İstanbul: Sabancı Üniversitesi. Yayınları.
- Jiang, Y., Tang, Y., Chen, Q., Wang, J. and Tang, S. (2010). Extending Soft Sets with Descriptionlogics. *Computers Mathematics Applications*, 59(6), 2087-2096.
- Jun, Y. B. (2008). Soft BCK-BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(5), 1408-1413.
- Jun, Y. B. and Park, C. H. (2008). Applications of Soft Sets in Ideal Theory of BCK-BCI-algebras. *Information Sciences: An International Journal*, 178 (11), 2466-2475.

- Jun, Y. B., Lee, K. J. and Zhan, J. (2009). Soft p-ideals of Soft BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(10), 2060-2068.
- Jun, Y. B., Lee K. J. and Khan, A. (2010). Soft Ordered Semigroups. *Mathematical Logic Quarterly*, 56(1), 42–50.
- Jun, Y. B., Song S. Z. and So, K. S. (2011). Soft Set Theory Applied to p-Ideals of BCI-algebras Related to Fuzzy Points. *Neural Computing and Applications*, 20(8), 1313-1320.
- Jun, Y.B. and Yang, X. (2011) A note on the paper “Combination of interval-valued fuzzy set and soft set” [*Comput. Math. Appl.* 58 (2009) 521-527], *Computers and Mathematics with Applications* 61 1468-1470,
- Kamacı, H., Saltık, K., Akız, H. F. and Atagün, A. O. (2018). Cardinality Inverse Soft Matrix Theory and its Applications in Multicriteria Group Decision Making. *Journal of Intelligent Fuzzy Systems*, 34(3), 2031-2049.
- Karaaslan, F. (2019). Some Properties of AG*-groupoids and AG-bands Under SI-product Operation. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(1), 231-239.
- Karaaslan, F., Ullah, A. and Ahmad, I. (2021). Normal Bipolar Soft Subgroups. *Fuzzy Information and Engineering*, 13(1), 79-98.
- Karaçay, T., Eş, H. ve İbrahimoglu, İ. (2017). *Calculus* (Birinci Baskı). Ankara:Seçkin Yayıncılık, 61-71.
- Karvellas, P. H. (1974). Inversive Semirings. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 18(3), 277-288.
- Kazancı, O., Yılmaz, S. and Yamak, S. (2010). Soft Sets and Soft BCH-algebras. *Hacettepe Journal of Mathematics Statistics*, 39(2), 205-217.
- Kharal, A. (2014). Soft Approximations and Uni-Int Decision Making. *The Scientific World Journal*, 10(2), 143-162.
- Kilp, M., Knauer, U., and Mikhalev, A. V. (2001). *Monoids, Acts and Categories* (Second edition). Berlin: *De Gruyter Expositions in Mathematics*, (29).
- Kim, C. B. and Park, M. (1996). K-Fuzzy Ideals in Semirings. *Fuzzy Sets Systems*, 81, 281-286.
- Li, F. (2011). Notes on Soft Set Operations. *ARNP Journal of Systems and Softwares*, 1(6), 205-208.
- Liu, X. Y., Feng F. and Jun, Y. B. (2012). A Note on Generalized Soft Equal Relations. *Computers and Mathematics with Applications*, 64(4), 572-578.

- Maji, P. K., Roy, A. R. and Biswas, R. (2002). An Application of Soft Sets in a Decision Making Problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 44(8-9), 1077-1083.
- Maji, P. K., Biswas, R. and Roy, A. R. (2003). Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 555-562.
- Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory-First results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19–31.
- Mujahid Abbas, Ali, B. and Romaguer, S. (2014) On Generalized Soft Equality and Soft Lattice Structure, *Filomat* 28:6,1191–1203.
- Mujahid Abbasa, Ali,M., İ. and Romaguerac, S. (2017) Generalized Operations in Soft Set Theory via Relaxed Conditions on Parameters *Filomat* 31:19, 5955–5964.
- Mushrif, M., Sengupta, S. and Ray, A. K. (2006). Texture Classification Using a Novel, Soft-Set Theory Based Classification, Algorithm. *Lecture Notes Computer Science*, 3851, 246-254.
- Neog,T. J. and Sut D. K. (2011). A New Approach to the Theory of Soft Set. *International Journal of Computer Applications*, 32(2), 1-6.
- Nesin, A. (2019). *Sezgisel Kümeler Kuramı* (Altıncı Baskı). Türkiye: Nesin Yayıncılık,7-59.
- Onyeozili, I. A. and Gwary T. M., A. (2014) Study of The Fundamentals of Soft Set Theory, *International Journal of Scientific & Technology Research* , 3 (4),198-203.
- Özer, O., Çoker, D. ve Taş, D. (1999) *Soyut Matematik* (Üçüncü Bakı). Türkiye: İzgi Yayınevi, 36-52.
- Park, C. H., Jun, Y. B.and Öztürk, M. A. (2008). Soft WS-algebras. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 23(2), 313-324.
- Pei, D. and Miao, D. (2005). From Soft Sets to Information Systems. In *2005 IEEE International Conference on Granular Computing*, 2, 617-621.
- Petchimuthu, S., Garg, H., Kamacı, H. and Atagün, A.O. (2020). The Mean Operators and Generalized Products of Fuzzy Soft Matrices and Their Applications in MCGDM. *Computational and Applied Mathematics*, 39 (2), 1-32.
- Pilz, G. (1983). *Near-rings*. North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 470.
- Reutenauer, C. and Straubing, H. (1984). Inversion of Matrices over a Commutative Semiring. *Journal of Algebra*, 88(2), 350-360.
- Qin, K. and Hong, Z. (2010). On Soft Equality. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(5), 1347-1355.

- Sen, J. (2014). On Algebraic Structure of Soft Sets. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 7(6), 1013-1020.
- Sezer, A. S., Çağman, N. and Atagün, A. O. (2014). Soft Intersection Interior Ideals, Quasi-ideals and Generalized Bi-Ideals; A New Approach to Semigroup Theory II. *Journal of Multiple-valued Logic and Soft Computing*, 23(1-2), 161-207.
- Sezer, A. S., Çağman, N., Atagün, A.O., Irfan Ali, M. and Türkmen, E. (2015). Soft Intersection Semigroups, Ideals and Bi-Ideals; a New Application on Semigroup Theory I. *Filomat*, 29(5), 917-946.
- Sezgin A, Ahmad S. and Mehmood A. (2019). New Operation on Soft Sets: Extended Difference of Soft Sets. *Journal of New Theory*, (27), 33-42.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011a). On Operations of Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5), 1457-1467.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011b). Soft Groups and Normalistic Soft Groups. *Computers and Mathematics with Applications*, 62 (2), 685-698.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Plus Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 110-127.
- Sezgin, A., Atagün, A. O. and Aygün, E. (2011). A note on soft near-rings and idealistic soft near-rings, *Filomat*, 25(1), 53-68.
- Sezgin, A. and Aybek, F. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Gamma Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(1), 27-45.
- Sezgin, A., Aybek, F. and Atagün, A. O. (2023a). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Intersection Operation. *Black Sea Journal of Engineering and Science*, 6(4), 330-346.
- Sezgin, A., Aybek, F. and Güngör N. B. (2023b). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Union Operation. *Acta Informatica Malaysia*, (7)1, 38-53.
- Sezgin, A. and Çağman, N. (2024). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 7(1), 1-37.
- Sezgin, A., Çağman, N., Atagün, A. O. and Aybek, F. (2023c). Complementary Binary Operations Of Sets And Their Application To Group Theory. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 99-106.
- Sezgin, A. and Çalışıcı, H. (2024) A Comprehensive Study on Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(1), 1-23.
- Sezgin, A. and Demirci, A. M. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Star Operation. *Ikonion Journal of Mathematics*, 5(2), 24-52.

- Sezgin, A. and Sarialioğlu, M. (2024). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Theta Operation. *Kadirli Uygulamalı Bilimler Fakültesi Dergisi*, 4(1), 1-33.
- Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023a). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Lambda Operation. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 8(2), 101-133.
- Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023b). A New Soft Set Operation: Soft Binary Piecewise Symmetric Difference Operation. *Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 5(2), 150-168.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012). On Some New Properties on Soft Set Operations. *International Journal of Computer Applications*, 59(4), 39-44.
- Stojanovic, N. S. (2021). A New Operation on Soft Sets: Extended Symmetric Difference of Soft Sets. *Military Technical Courier*, 69(4), 779-791.
- Sun, Q. M., Zhang, Z. L. and Liu, J. (2008). Soft Sets and Soft Modules, *Lecture Notes in Computer Science*, 5009, 403-409.
- Ullah, A., Ahmad, I., Hayat, F., Karaaslan, F. and Rashad, M. (2018). Soft Intersection Abel-Grassmann's Groups. *Journal of Hyperstructures*, 7 (2), 149-173.
- Ullah, A., Karaaslan, F. and Ahmad, I. (2018). Soft uni-Zbel-Grassmann's groups. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 11(2), 517-536.
- Vandiver, H. S. (1934). Note on a Simple Type of Algebra in which The Cancellation Law Of Addition Does Not Hold. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 40, (12) 914-920.
- Xiao Z., Chen L., Zhong B. and Ye S. (2005). Recognition for Soft Information Based on The Theory of Soft Sets. *Proceedings of ICSSSM'05. 2005 International Conference on Services Systems and Services Management*, 2, 1104– 1106.
- Xiao Z., Gong K., Xia S. and Zou Y. (2010). Exclusive Disjunctive Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(6), 2128–2137.
- Yang, C. F. (2008). "A Note on: "Soft set theory" [*Computers and Mathematics with Applications*, 45(4-5) (2003) 555-562]," *Computers and Mathematics with Applications*, 56(7), 1899-1900.
- Yang, J. and Yao, Y. (2020). Semantics of Soft Sets and Three-way Decision with Soft Sets. *Knowledge Based Systems*, 194, 105538.
- Yang X., Lin T. S., Yang J., Li Y. and Yu D. (2009). Combination of Interval-Valued Fuzzy Set and Soft Set. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(3), 521–527.

- Yavuz E., 2024. *Soft Binary Piecewise Operations and Their Properties*, Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.
- Zhan, J. and Jun, Y. B. (2010). Soft BL-algebras Based on Fuzzy Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(6), 2037–2046.
- Zhu, P. and Wen, Q. (2013). Operations on Soft Sets Revisited. *Journal of Applied Mathematics* 2013(5), 1-7.
- Zorlutuna, I. (2021). Soft Set-Valued Mappings and their Application in Decision Making Problems. *Filomat*, 35(5), 1725-1733.



ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Murat SARIALİOĞLU

Eğitim:

Kademe	Eğitim Birimi	Yıl
Lise	Of Taşhan Pazarı Lisesi	1995-1998
Üniversite	Ondokuzmayıs Üniversitesi	1998-2002

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

- 1) Sezgin, A. Sarıalioğlu M. ve Demirci A.M. (2024). Distributions of Soft Binary Piecewise Operations over Complementary Soft Binary Piecewise Star and Theta Operations. *Journal of Kadirli Faculty of Applied Sciences*, 4(2), 1-35.
- 2) Sezgin, A. and Sarıalioğlu M. (2024). A New Soft Set Operation Complementary Soft Binary Piecewise Theta Operation. *Journal of Kadirli Faculty of Applied Sciences*, 4(1), 1-33.