



**T. C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YENİ TİP GENİŞLETİLMİŞ ESNEK KÜME İŞLEMLERİ:
TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ BİRLEŞİM, ARTI VE TETA
İŞLEMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AHMET MÜCAHİT DEMİRCİ

OCAK

AHMET MÜCAHİT DEMİRCİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OCAK 2024

**YENİ TİP GENİŞLETİLMİŞ ESNEK KÜME İŞLEMLERİ: TÜMLEYENLİ
GENİŞLETİLMİŞ BİRLEŞİM, ARTI VE TETA İŞLEMİ**

Ahmet Mücahit DEMİRCİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2024

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Ahmet Mücahit DEMİRCİ tarafından hazırlanan “Yeni Tip Genişletilmiş Esnek Küme İşlemleri: Tümlleyenli Genişletilmiş Birleşim, Artı ve Teta İşlemi” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç. Dr. Emin AYGÜN

Matematik Anabilim Dalı, Erciyes Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 18/01/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Ahmet Mücahit DEMİRCİ

(Tarih)

YENİ TİP GENİŞLETİLMİŞ ESNEK KÜME İŞLEMLERİ: TÜMLEYENLİ
GENİŞLETİLMİŞ BİRLEŞİM, ARTI VE TETA İŞLEMİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Ahmet Mücahit DEMİRCİ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2024

ÖZET

Molodtsov tarafından 1999 yılında bazı belirsizlik içeren problemleri modellemek için ortaya atılan esnek küme teorisinin temel yapı taşı esnek küme işlemleri oluşturmaktadır. Bu tez çalışmasında, teoriye katkıda bulunmak için, yeni bir esnek küme işlem formu olan tümleyenli genişletilmiş işlemler tanımlanmıştır. Bu kapsamda, tümleyenli genişletilmiş birleşim, tümleyenli genişletilmiş artı ve tümleyenli genişletilmiş teta işlemleri tanımlanmış, örnekleri verilmiş, işlemlerin tüm özellikleri detaylı bir şekilde ele alınmış, her bir işlemin diğer esnek küme işlemleri ile ilişkisini elde etmek amacıyla, bu işlemlerin diğer esnek küme işlemleri üzerine dağılmasına bakılmış ve sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde tümleyenli genişletilmiş birleşim işleminin hangi cebirsel yapılar oluşturduğu detaylı şekilde ele alınmıştır.

Altı bölümden oluşan tez çalışmasının ilk bölümünde esnek kümeler ve tezde adı geçen cebirsel yapılar ile ilgili literatür taraması yapılmış, ikinci bölümde, temel küme işlemleri, esnek kümeler ve bazı cebirsel yapılar ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir. Tezin özgün bölümünü oluşturan, üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerinde sırasıyla, tümleyenli genişletilmiş birleşim, tümleyenli genişletilmiş artı ve tümleyenli genişletilmiş teta işlemleri tanıtılmış, işlemlerin kapalılık, birleşme, birim eleman, ters eleman, değişme, idempotent gibi tüm özellikler incelenmiş, diğer işlemlerle ilişkisini görmek için, işlemlerin diğer işlemlere dağılmasına bakılmıştır. Klasik kümelerde de var olan birleşim işlemi ile tümleyenli genişletilmiş birleşim işleminin özellikleri karşılaştırılmış ve dikkat çekici sonuçlar elde edilmiştir. Üstelik sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde, tümleyenli genişletilmiş birleşim işleminin sınırlı bir yarı-kafes; yine tümleyenli genişletilmiş birleşim işleminin diğer esnek küme işlemleri ile birlikte komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halka, komutatif, idempotent, birimli bir hemihalka, Bool Cebiri, De Morgan Cebiri ve MV-cebiri olduğu gösterilerek, klasik cebire de katkıda bulunulmuştur. Sonuç ve öneriler bölümünde, elde edilen sonuçlara ve sonuçların önemine yer verilmiştir.

Sayfa Adedi : 204
Anahtar Kelimeler : Esnek kümeler, Tümleyenli genişletilmiş işlemler, Cebirsel yapılar
Danışman : Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

NEW TYPE OF EXTENDED OPERATIONS OF SOFT SETS: COMPLEMENTARY EXTENDED UNION, PLUS AND THETA OPERATION

(M. Sc. Thesis)

Ahmet MÜCAHİT DEMİRCİ

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2024

ABSTRACT

Soft set operations constitute the basic building block of soft set theory, which was introduced by Molodtsov in 1999 to model some problems involving uncertainty. In this thesis, in order to contribute to the theory, a new soft set operation form, called complementary extended operation, is defined. In this context, complementary extended union, complementary extended plus and complementary extended theta operations are defined, their examples are given, all the properties of these operations are discussed in detail, in order to obtain the relationship of each operation with other soft set operations, the distribution of these operations over other soft set operations are examined, and the algebraic structures that the complementary extended union operation form on the set of soft sets with a fixed parameter set are discussed in detail.

In the first part of the thesis, which consists of six sections, a literature review is made about soft sets and the algebraic structures mentioned in the thesis, and in the second part, basic concepts about basic set operations, soft sets and some algebraic structures are included. In the third, fourth and fifth chapters, which constitute the original part of the thesis, the complementary extended union, complement extended plus and complement expanded theta operations are introduced, respectively, and all properties of the operations such as closure, union, unit element, inverse element, commutation, the idempotent property are examined, and their relationships of these operations with other operations are investigated. For this purpose, the distributions of these operations over other soft set operations are taken into consideration. The properties of the union operation, which also exists in classical set theory, and the complementary extended union operation are compared and many remarkable results are obtained. Moreover, by showing that the complementary extended union operation, along with other soft set operations, are commutative, idempotent, unitary, non-zero semiring, commutative, idempotent, unitary hemiring, Boolean Algebra, De Morgan Algebra and MV-algebra, it has also contributed to classical algebra. In the results and recommendations section, the results obtained and the importance of the results are included.

Number of pages	: 204
KeyWords	: Soft set, Complementary extended soft set operations, Algebraic structures
Supervisor	: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Tezimi yaptığım süre boyunca benden yardımlarını ve ilgilerini esirgemeyen, her konuda desteğini hissettiren, meslek sevgisi ve sabrı ile bana örnek olan, tez danışmanlığından öte bilgi ve tecrübesi ile yoluma ışık olan çok değerli danışmanım Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN hocama en içten dileklerle teşekkür ederim. Tez çalışmam boyunca verdikleri destek ve gösterdikleri sabırdan dolayı kıymetli aileme teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	7
2.1. Kümeler.....	7
2.2. Bazı Cebirsel Yapılar	12
2.3. Esnek Kümeler.....	15
3. TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ BİRLEŞİM İŞLEMİ.....	23
4. TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ ARTI İŞLEMİ	85
5. TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ TETA İŞLEMİ	140
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	195
KAYNAKLAR	197
ÖZGEÇMİŞ	204

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
E	Parametre kümesi
U	Evrensel küme
$P(U)$	U nun kuvvet kümesi
(F,Z)	(F,Z) esnek kümesi
$(F,Z)^r$	(F,Z) esnek kümesinin tümleyeni
$\emptyset_Z$	Z ya göre boş esnek küme
$\emptyset_E$	E ye göre boş esnek küme
U_Z	Z ya göre evrensel küme
U_E	Mutlak esnek küme
$\emptyset_\emptyset$	Boş esnek küme
$S_E(U)$	U üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
$S_Z(U)$	Z kümesi üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
$\forall$	Evrensel niceleyici, her
$\exists$	Varlıksal niceleyici, en az bir
$+$	Artı işlemi
λ	Lamda işlemi
θ	Teta işlemi
$*$	Yıldız işlemi
γ	Gamma işlemi
Δ	Simetrik fark işlemi

1. GİRİŞ

Belirsizliklerin açıklanabilmesi için birçok teori ortaya atılmıştır. Bu alanda ortaya atılan teoriler arasında en önemlilerinden bir tanesi Zadeh (1965) ortaya attığı bulanık kümeler teorisidir. Bulanık küme üyelik fonksiyonu yoluyla tanımlanlanır. Üyelik derecesi $[0,1]$ arasındaki gerçek sayılardır. 0 üyeliğin olmadığını 1 ise tam üyelik olduğunu gösterir. Fakat üyelik fonksiyonunun getirdiği yapısal sorunlardan dolayı Molodtsov (1999) esnek küme teorisini öne sürmüştür. Esnek küme teorisi üyelik fonksiyonun yapısal sorunlarını ortadan kaldırmıştır. Molodtsov esnek küme teorisini sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, işlem araştırmaları, Riemann integrasyonu ve daha birçok alana başarılı bir şekilde uygulamıştır.

Esnek küme teorisinin ortaya atılmasıyla birlikte, Maji, Roy ve Biswas (2002) çok aralık değerli bulanık esnek küme kavramını vermiştir. Esnek kümeler için çok önemli kavramlar ise Maji, Roy ve Biswas (2003) tarafından verilmiştir. İki esnek kümenin eşitliği, bir esnek kümenin alt kümesi ve süper kümesi, bir esnek kümenin tümleyeni, boş esnek küme ve mutlak esnek küme örneklerle; “VE/VEYA” gibi esnek ikili işlemlerle birlikte birleşim, kesişim işlemleri tanımlanmış, bu işlemlere De Morgan yasaları uygulanmıştır. Maji ve diğerleri (2003) tarafından tanımlanan esnek alt küme tanımından daha yaygın kabul gören tanım ise Pei ve Miao (2005) tarafından verilmiştir. Bu çalışmada ayrıca, esnek alt küme, iki esnek kümenin birleşimi, kesişimi kavramlarını yeniden tanımlamıştır. Aktaş ve Çağman (2005), bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümeler kavramları ve bunların özellikleri üzerinde çalışmış, devamında Aktaş ve Çağman (2007) esnek grup, esnek altgrup ve esnek homomorfizma kavramını ilk defa vermişlerdir. Ali, Feng, Liu, Min ve Shabir (2009) esnek kümelerin kısıtlanmış birleşim, kesişim, fark ve genişletilmiş kesişim kavramlarını vermiş ve işlemlerin özellikleri incelemişlerdir. Yang, Lin, Yang, Li ve Yu (2009) aralık değerli bulanık esnek küme kavramını tanımlayarak, dağılma ve De Morgan kurallarını incelemişlerdir. Qin ve Hong (2010) yeni bir esnek eşitlik kavramını tanımlayarak, esnek küme işlemleri ile esnek eşitlik arasında ilişkilere bakmıştır. Babitha ve Sunil (2010) iki esnek kümenin kartezyen çarpımını, Gong, Xiao ve Zhang (2010) bijektif esnek küme ve işlemlerini, Feng, Li, Davvaz ve Ali (2010), yaklaşımlı bulanık kümeleri, Jiang, Tang, Chen, Wang ve Tang (2010) DL-kavramlarını kullanarak genişletilmiş esnek küme teorisini, Sezgin ve Atagün (2011a) esnek küme işlemleri arasındaki ilişkileri ve

kısıtlanmış simetrik farkı, Ali, Shabir ve Naz (2011) esnek kümeler ve işlemlerinin oluşturduğu bir takım cebirsel yapıları çalışmıştır. Neog ve Sut (2011) esnek kümeler için tümleyen kavramını yeniden tanımlayarak, De Morgan yasasının geçerli olduğunu göstermiştir. Singh ve Onyeozili (2012) ve Zhu ve Wen (2013) esnek işlemleri karşılaştırmalı olarak ele almıştır. Feng ve Yongming (2013) ve Abbas, Ali ve Romaguera (2014) esnek eşitlikler üzerine çalışmalar yapmıştır. Onyeozili ve Gwary (2014) klasik kümelerdeki işlemlerin özelliklerini, esnek kümeler teorisinde var olan işlemler ile karşılaştırmıştır. Abbas, Ali ve Romaguera (2017) genelleştirilmiş sonlu esnek eşitliği, birleşimi ve kesişimi tanımlamıştır. Sezgin, Ahmad ve Mehmood (2019) esnek kümeler için genişletilmiş fark adı verilen yeni bir işlem tanımlayarak özelliklerini incelemiştir. Al-shami (2019), genelleştirilmiş sonlu esnek birleşim ve kesişim çalışmasını detaylı olarak ele almıştır. Al-shami ve El-Shafer (2020) T-esnek eşitlik ve T-esnek alt küme ilişkileri tanımlamış, keyfi esnek küme ailesi için T-esnek birleşim ve T-esnek kesişim kavramları tanımlayarak, bunlar arasındaki ilişkiyi formüle etmiştir. Stojanovic (2021) genişletilmiş simetrik fark işlemini tanımlamış, bu işlemin özelliklerini incelemiştir. Ali, Saleem, Sundus, Khaleeq, Saeed ve George (2022), genelleştirilmiş yeni esnek eşitlik kavramları ile ilgili teorik çalışmalar sunmuşlardır.

Esnek küme teorisi ayrıca pek çok alana uygulanmış olup, özellikle karar verme problemlerinde sıklıkla kullanılır hale gelmiştir. Maji, Roy ve Biswas (2002) çok aralıklı değerli bulanık esnek küme kavramını verip tümleyen, “VE/VEYA” birleşim ve kesişim gibi temel işlemleri tanımlamış, bu tanımlarla karar verme problemlerinin uygulamasını gerçekleştirmişlerdir. Chen, Tsang ve Yeung (2003), Maji ve diğerlerinin (2002) yaptığı esnek küme indirgemesinin hatalı olduğunu söylemiş ve çözümü için yeni bir tanım yapmışlardır. Chen, Tsang, Yeung ve Wang (2005) esnek kümeler için parametre indirgemesinin yeni bir tanımını vermişlerdir. Xiao, Chen, Zhong ve Ye (2005) esnek bilgi örüntülerinin tanınmasına yönelik çözümler önermişlerdir. Mushrif, Sengupta ve Ray (2006) esnek küme teorisini kullanarak dokuların sınıflandırılmasına yönetmiştir. Herawan ve Deris (2010), esnek küme teorisinin uygulanabilirliğini grip hastalığına yakalandığı düşünülen hastaların karar verilmesine yönelik kullanmışlardır. Herawan (2010) esnek kümeleri kullanarak tıbbi karar verme konusu üzerinde çalışmalar yapmıştır. Çağman ve Enginoğlu (2010a), esnek küme teorisini, belirsizlik içeren problemlere başarılı bir şekilde uygulayarak, esnek maksimum-minimum karar verme yöntemini oluşturmuşlardır.

Çağman ve Enginoğlu (2010b) esnek kümeleri kullanarak, tek yönlü bir karar verme yöntemi oluşturmuşlardır. Feng, Li ve Çağman (2012) Çağman ve Enginoğlu (2010a) dan yola çıkarak klasik üniter karar vermenin, üniter karar verme yönteminin özel bir durumu olduğunu göstermiştir. Atagün, Kamacı ve Oktay (2018) birden fazla karar vericinin olduğu karar verme problemlerini tek bir ürün kullanarak çözüme ulaştırmışlardır. Kamacı, Saltık, Akız ve Atagün (2018) ters esnek kümenin matris gösterimini kullanarak yeni bir karar verme algoritması sunmuşlardır. Yang ve Yao (2020) kararsız bulanık kümeler aracılığıyla karar verme problemlerinin çözümü için yeni bir karar yöntemi sunmuşlardır. Petchimuthu, Garg, Kamacı ve Atagün (2020) verme sürecini hızlandırmak ve kolaylaştırmak için algoritmalar oluşturmuşlardır. Zorlutuna (2021) esnek kümelerin ters görüntülerini incelemiş ve bunu karar verme problemlerine uygulamıştır.

Esnek karar verme yöntemleri kadar, bir cebirsel yapının esnek cebirsel formu da pek çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Bu alandaki çalışmaların önünü açan çalışma, Aktaş ve Çağman (2007) esnek grup çalışmasıdır. Jun (2008) esnek BCK/BCI cebirlerini çalışmıştır. Feng, Jun ve Zhao (2008) esnek yarı halka tanımını yapmış ve cebirsel özelliklerini incelemiştir. Esnek idealler, idealist esnek yarı halkalar ve esnek yarı halka homomorfizmaları ile ilgili açıklayıcı örnekler vermiştir. Jun ve Park (2008) esnek BCK/BCI cebirlerinin cebirsel özelliklerini bakmış, esnek idealler ve idealist esnek BCK/BCI cebirleri kavramını tanıtarak örneklerini sunmuştur. Jun, Lee ve Zhan (2009) esnek küme kavramını BCI cebirlerindeki p-ideallerine uygulamışlar. Esnek p-ideali ve esnek p-idealist BCI-Cebiri kavramını tanımlamıştır. Bulanık p-ideali ve esnek p-idealist BCI-Cebiri arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Acar, Koyuncu ve Tanay (2010) esnek halkalar, esnek halka idealleri, idealist esnek halkalar, esnek halka homomorfizmaları ile ilgili temel özellikleri araştırmıştır. Kazancı, Yılmaz ve Yamak (2010) esnek BCH-Cebirini tanımlamış ve özelliklerini incelemiştir. Esnek BCH-Cebiri ve esnek BCH-Alt cebirinin genişletilmiş kesişimi, ikili kesişimi, kartezyen çarpımı, kısıtlanmış birleşimi kavramlarını ortaya koymuşlardır. Zhan ve Jun (2010) bulanık ve esnek küme teorilerini BL-Cebirine uyarlamıştır. Jun, Lee ve Khan (2010) esnek sıralı yarı grup, esnek sıralı alt yarı grup, idealist esnek sıralı yarı grup ve esnek sıralı bir yarı grubun esnek ideali kavramlarını tanımlamışlar ve özelliklerini incelemişlerdir. Jun, Song ve So (2011) bulanık esnek BCI cebiri, bulanık esnek idealleri ve bulanık esnek p-idealleri tanımlamışlardır. Sezgin ve Atagün (2011b), normalistik esnek grup ve normalistik esnek grup homomorfizmi

kavramlarını tanıtmışlardır. Sezgin, Atagün ve Aygün (2011) esnek yakın halkalar ile ilgili teorik çalışmaları geliştirmişlerdir. İdealist esnek yakın halkaları incelemiş ve özelliklerini araştırmış, yakın halka epimorfizmleri ile ilişkisini incelemişlerdir. Sezer, Çağman ve Atagün (2014) yarı gruplarda esnek kesişimli yarı ideallerleri, esnek kesişimli iç idealleri ve genelleştirilmiş ikili ideallerini tanımlamış ve oluşan ilişkiyi incelemişlerdir. Düzenli, yarı düzenli, tam düzenli ve zayıf düzenli yarı grupları tanımladıkları ideallerin özelliklerine göre belirlemişlerdir. Sezer, Çağman, Atagün, Ali ve Türkmen (2015) esnek kesişimsel yarı grup, esnek kesişimsel sol (sağ) idealler ve esnek yarı asal idealleri tanımlamış ve düzenli, yarı düzenli, tam düzenli ve zayıf düzenli yarı gruplar ile bu ideallerin özelliklerini karakterize etmişlerdir. Ullah, Ahmad, Hayat, Karaaslan, Rashad (2018) esnek küme teorisindeki esnek kesişimsel grup ve AG-gruplar ile ilgili bir çalışma yaparak esnek kesişimsel AG-grupları tanımlamıştır. Ullah, Karaaslan ve Ahmad (2018) esnek birleşimsel grup kavramını esnek birleşimsel AG-grubunu da kapsayacak şekilde genişletmişler. Konjuge esnek birleşimsel AG-grup, normal esnek birleşimsel AG-grup kavramlarını ortaya koyup özelliklerini detaylı araştırmışlardır. Karaaslan (2019) esnek kümelerde AG-grupoid, AG^* -groupoid ve AG-bant ve özelliklerini incelemiş, esnek idempotent eleman, esnek kesişimsel ideal ve esnek kesişimsel AG-grupoidin esnek asal ideali gibi kavramları literatüre kazandırmıştır. Karaaslan, Ullah ve Ahmad (2021) normal bipolar esnek alt grup, konjuge bipolar esnek alt grup, bipolar esnek grubun bipolar sol (sağ) kosetleri kavramlarını tanımlamışlardır.

Esnek küme işlemleri, esnek küme teorisinin temeli oluşturmakta olup, gerek enek cebirsel yapılar ile ilgili çalışmalar gerekse de esnek karar verme yöntemleri ile çalışmalar, esnek küme işlemleri temel alınarak yapılmaktadır. Maji ve diğerleri (2003), Ali ve diğerleri (2009), Sezgin ve diğerleri (2019), Stojanovic (2021) çalışmaları incelendiğinde, esnek küme işlemlerinin kısıtlanmış ve genişletilmiş işlemler olarak iki ayrı başlıkta ilerlediği görülmektedir. Eren (2019) esnek ikili parçalı fark işlemini tanımlamışıyla, yeni bir esnek küme işlem formu literatüre kazandırılmıştır. Sezgin ve Çalışıcı (2024), Eren (2019) çalışmasını geliştirerek, klasik kümelerde bulunan fark işleminin özelliklerini esnek ikili parçalı fark işleminde çalışmıştır. Çağman (2021) ve Sezgin, Çağman, Atagün ve Aybek (2023c) yeni ikili küme işlemlerini tanıtmalarıyla, bu işlemler esnek kümelere aktarılacak, yeni kısıtlanmış esnek küme işlemleri ve yeni genişletilmiş esnek küme işlemleri tanıtılmıştır (Aybek, 2024). Kısıtlanmış ve genişletilmiş işlem formlarından farklı çok yeni

esnek küme işlemleri çeşitli yazarlar (Sarılioğlu, 2024; Akbulut, 2024; Sezgin ve Aybek, 2023; Sezgin ve Akbulut, 2023; Sezgin ve Demirci, 2023; Sezgin ve Sarılioğlu, 2024; Sezgin ve Yavuz, 2023a; Sezgin, Aybek ve Atagün, 2023a; Sezgin, Aybek ve Güngör, 2023b; Sezgin ve Atagün, 2023; Sezgin ve Çağman, 2024) tarafından çalışılmış olup, esnek küme teorisinin en temel unsurlarından olan esnek küme işlemleri teori ortaya atıldığından bu yana araştırmacılar tarafından güncelliğini koruyan bir konu olarak çalışılmaktadır.

Cebirsel yapı bir veya daha fazla küme ile birlikte bir veya daha fazla işlemden oluşur. Cebirsel yapılar matematiğin birçok alanında önemli bir yere sahiptir. Grup, halka ve cisim gibi cebirsel yapılar modüler aritmetik, sayı teorisi, fizik, kimya ve bilgisayar uygulamaları gibi pek çok alanda uygulanmaktadır. Ortak özelliklere sahip cebirsel yapıların sınıflara ayrılarak, bir cebirsel yapının hangi belli yapı ailesine ait olduğunu bulabilmek, bu ailenin tüm elemanlarının hangi karakteristik özelliklere sahip olduğu sonucuna varabilmemize imkân verir. Örneğin belli bir yapının grup olduğunu anlayabiliyorsak bu yapının grupların tüm karakteristik özelliklerine sahip oldu sonucuna varırız. Sonuç olarak soyut matematik için cebirsel yapıların önemi oldukça önemlidir. Halkalar teorisi kadar yarı halka teorisi de güncelliğini koruyan bir teoridir. Vandiver (1934) yarı halkayı, Karvellas (1974) terslenebilir yarı halkayı, Reutenauer ve Straubing (1984) değişmeli yarı halkaları, Kim ve Park (1996) yarı halka ideallerini, Ebrahimi ve Ebrahimi (2008) sıfır olmayan özdeşliğe sahip değişmeli yarı halkaları çalışmıştır. Chang (1958), Lukasiewicz önerme mantığı teoremi kullanılarak, MV-cebiri kavramını, Clifford (1954) yarı kafes kavramını tanımlamıştır. Birkhoff (1967) kafes, sınırlı kafes, dağılmalı kafes, Boole cebiri, De Morgan cebiri ve Stone cebiri kavramlarını incelemiştir.

Bu tez çalışmasında, esnek küme teorisine katkıda bulunmak için, yeni bir esnek küme işlem formu olan tümleyenli genişletilmiş birleşim, tümleyenli genişletilmiş artı ve tümleyenli genişletilmiş teta işlemleri tanımlanmış, örnekleri verilmiş, işlemlerin tüm özellikleri ele alınmış, bu işlemlerin diğer esnek küme işlemleri üzerine dağılmasına bakılmış ve sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde tümleyenli genişletilmiş birleşim işleminin pek çok cebirsel yapıyı oluşturduğu gösterilerek, sadece esnek küme literatürüne değil, klasik cebire de katkıda bulunmak amaçlanmıştır.

Tez, altı bölümden oluşmakta olup, ilk bölümünde tezde kullanılan kavramlara yönelik literatür taraması yapılmış, ikinci bölümde yine tezde geçen kavramlarla ilgili bilgilere yer verilmiştir. Tezin üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerinde sırasıyla, tümleyenli genişletilmiş birleşim, tümleyenli genişletilmiş artı ve tümleyenli genişletilmiş teta işlemleri tanıtılmış, işlemlerin tüm özellikler incelenmiş, diğer işlemlerle ilişkisini görmek için, işlemlerin diğer işlemlere dağılmasına bakılmıştır. Ayrıca, tümleyenli esnek birleşim işleminin, klasik kümelerdeki birleşim işleminin sağladığı özellikleri sağlayıp sağlamadığına bakılmış, sonuçlar karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Ayrıca, sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde, tümleyenli genişletilmiş birleşim işleminin sınırlı bir yarı-kafes olduğu ve tümleyenli genişletilmiş birleşim işleminin diğer bazı esnek küme işlemleri ile birlikte komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halka, komutatif, idempotent, birimli bir hemihalka, Bool Cebiri, De Morgan Cebiri ve MV-cebiri olduğu gösterilmiştir. Bu anlamda, esnek kümeleri kullanarak, soyut cebirin amaçlarından biri olan cebirsel yapılar elde etmek ve üzerine çalışmalar sunmuş olmanın önemi sonuç bölümünde tartışılmıştır.



2. GENEL BİLGİLER

2.1. Kümeler

Cantor (1874) tarafından matematiğe kazandırılan küme, iyi tanımlanmış nesneler topluluğudur. Bir küme, birbirinden farklı nesnelerden oluşur. Bu nesneler somut veya soyut olabilir. Kümeyi oluşturan nesnelerin her birine “eleman(öge)” denir. Bir kümenin belirlenebilmesi için, elemanlarının iyi tanımlanmış olması gerekir.

Kümeler, $X, Y, Z, \dots$ gibi büyük harflerle; kümenin elemanları ise $x, y, z, \dots$ gibi küçük harflerle gösterilir. Eğer bir x elemanı bir A kümesine aitse bunu $x \in A$; aksi halde $x \notin A$ şeklinde gösterilir. Küme teorisinde, üzerinde çalışılan en geniş kümeye evrensel küme denir ve E ile; hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve $\emptyset$ ile gösterilir (Aydın ve Kandamar, 2013: 3-4).

Tezimiz boyunca, yeni bir esnek küme işlem formu olarak bazı tümleyenli genişletilmiş işlemler tanıtılıp özellikleri inceleneceği ve kümeye dayalı ispatlara yer verileceği için, bu bölümde klasik kümelerdeki temel küme işlemlerinin özelliklerinin verilmesi uygun görülmüştür.

2.1.1. Kesişim işlemi

V ve Z iki küme olmak üzere hem V kümesine hem de Z kümesine ait olan elemanların kümesine V ile Z nin kesişimi (arakesiti) denir ve $V \cap Z$ ile gösterilir.

$$V \cap Z = \{x: x \in V \text{ ve } x \in Z\}$$

Kesişim işleminin temel özellikleri aşağıda belirtilmiştir:

- $(V \cap Y) \cap Z = V \cap (Y \cap Z)$ (Birleşme özelliği)
- $V \cap Z = Z \cap V$ (Değişme özelliği)
- $V \cap \emptyset = \emptyset \cap V = \emptyset$ (Yutan eleman özelliği)
- $V \cap E = E \cap V = V$ (Etkisiz eleman özelliği)

- $V \cap V = V$ (Denk güçlülük özelliği)
- $V \cap Z = \emptyset \Leftrightarrow V \subseteq Z'$. Benzer şekilde, $V \cap Z = \emptyset \Leftrightarrow Z \subseteq V'$
- $\emptyset \subseteq V \cap Z, V \cap Z \subseteq E$
- $V \cap Z = E \Leftrightarrow V = Z = E$
- $V \cap Z = \emptyset \Rightarrow V = \emptyset \vee Z = \emptyset$ veya V ve Z ayrıktır.
- $V \cap Z \subseteq V, V \cap Z \subseteq Z$
- $V \subseteq Z \Leftrightarrow V \cap Z = V$
- $V \cap Z = V \cup Z \Leftrightarrow V = Z$
- $V \cap Z \subseteq V \cup Z$
- $V \subseteq Z \Rightarrow V \cap T \subseteq Z \cap T$. Tersi doğru değildir.
- $V \subseteq Y$ ve $Z \subseteq T \Rightarrow V \cap Z \subseteq Y \cap T$
- $V \cap (V \cup Z) = V \cup (V \cap Z) = V$ (Yutma Kuralı)
- $V \cap (Z \cup Y) = (V \cap Z) \cup (V \cap Y)$ (Kesişimin birleşim üzerine soldan dağılması)
- $(V \cup Z) \cap Y = (V \cap Y) \cup (Z \cap Y)$ (Kesişimin birleşim üzerine sağdan dağılması)
- $V \cap (Z - Y) = (V \cap Z) - (V \cap Y)$ (Kesişimin fark üzerine soldan dağılması)
- $(V - Z) \cap Y = (V \cap Y) - (Z \cap Y)$ (Kesişimin fark üzerine sağdan dağılması)

(Nesin, 2019: 7-59; Çallıalp, 1994: 1-7).

2.1.2. Birleşim işlemi

V ve Z iki küme olsun. V ye, Z ye veya her ikisine ait olan elemanların kümesine V ile Z nin birleşimi denir ve $V \cup Z$ ile gösterilir.

$$V \cup Z = \{x: x \in V \text{ veya } x \in Z\}$$

Birleşim işleminin özellikleri aşağıda belirtilmiştir:

- $(V \cup Y) \cup Z = V \cup (Y \cup Z)$ (Birleşme özelliği)

- $V \cup Z = Z \cup V$ (Değişme özelliği)
- $V \cup \emptyset = \emptyset \cup V = V$ (Birim eleman özelliği)
- $V \cup V = V$ (Denk güçlülük özelliği)
- $V \cup E = E \cup V = E$ (Yutan eleman özelliği)
- $V \subseteq V \cup Z, Z \subseteq V \cup Z$
- $\emptyset \subseteq V \cup Z, V \cup Z \subseteq E$
- $V \cup Z = Z \Leftrightarrow V \subseteq Z$
- $V \cap Z \subseteq V \cup Z$
- $V \cup Z = V \cap Z \Leftrightarrow V = Z$
- $V \cup Z = \emptyset \Rightarrow V = Z = \emptyset$
- $V \subseteq Z \Rightarrow V \cup K \subseteq Z \cup K$. Tersisi doğru değildir.
- $V \subseteq K$ ve $Z \subseteq T \Rightarrow V \cup Z \subseteq K \cup T$
- $V \cap (V \cup Z) = V \cup (V \cap Z) = V$ (Yutma kuralı)
- $V \cup (Z \cap Y) = (V \cup Z) \cap (V \cup Y)$ (Birleşimin kesişim üzerine soldan dağılması)
- $(V \cap Z) \cup Y = (V \cup Z) \cap (Z \cup Y)$ (Birleşimin kesişim üzerine sağdan dağılması)

(Nesin, 2019: 7-59; Çallıalp, 1994: 1-7).

2.1.3. Fark işlemi

V ve Y iki küme olsun. V da olup Y de olmayan elemanların kümesine V ile Y nin farkı denir ve $V \setminus Y$ veya $V - Y$ ile gösterilir.

$$V - Y = \{x: x \in V, x \notin Y\} = \{x \in V: x \notin Y\}$$

Bu tezimiz boyunca, V ile Y işlemlerinin farkı için $V - Y$ gösterimini tercih ediyoruz. Aşağıda fark işleminin özellikleri verilmiştir.

- $V - Y \neq Y - V$
- $(V - Y) - Z \neq V - (Y - Z)$

- $V - \emptyset = V$, $V - E = \emptyset$
- $\emptyset - V = \emptyset$ ve $V - V = \emptyset$
- $(V - Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$ ve $(Y - V) \cap (V \cap Y) = \emptyset$
- $V - (V - Y) = V \cap Y$ ve $Y - (Y - V) = Y \cap V$
- $V \cap Y = \emptyset$ ise $V - Y = V$. Buradan, $V \cap (Y - V) = \emptyset$ olup $V - (Y - V) = V$; $Y \cap (V - Y) = \emptyset$ olup $Y - (V - Y) = Y$; $(V - Y) \cap (Y - V) = \emptyset$ olup $(V - Y) - (Y - V) = V - Y$; $(Y - V) \cap (V - Y) = \emptyset$ olup $(Y - V) - (V - Y) = Y - V$; $(V - Y) \cap Y = \emptyset$ olup $(V - Y) - Y = V - Y$
- $(V - Y) \subseteq V$ ve $(Y - V) \subseteq Y$
- $V = (V - Y) \cup (V \cap Y)$ ve $Y = (Y - V) \cup (V \cap Y)$
- $V \cup Y = (V - Y) \cup (Y - V) \cup (V \cap Y) = (V - Y) \cup Y = (Y - V) \cup V$
- $V \subseteq Y \Leftrightarrow V - Y = \emptyset$
- $(V \cap Y) - Z = (V - Z) \cap (Y - Z)$ (Farkın kesişime sağdan dağılması)
- $(V \cup Y) - Z = (V - Z) \cup (Y - Z)$ (Farkın birleşime sağdan dağılması)
- $(V - Y) - Z = (V - Z) - (Y - Z)$ (Farkın farka sağdan dağılması)
- $V - (Y \cap Z) = (V - Y) \cup (V - Z)$
- $V - (Y \cup Z) = (V - Y) \cap (V - Z)$

(Nesin, 2019: 7-59; Çallıalp, 1994: 1-7).

2.1.4. Simetrik fark işlemi

V ve Y kümeleri verildiğinde, $V \cup Y$ ye ait olup $V \cap Y$ ye ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeye K ile Y kümelerinin simetrik farkı denir ve $X \Delta Y$ ile gösterilir.

$$V \Delta Y = \{x: x \in V \cup Y, x \notin V \cap Y\} = (V \cup Y) - (V \cap Y)$$

Bu tanımın bir sonucu olarak $V \Delta Y = (V - Y) \cup (Y - V)$ olduğu açıktır. Simetrik fark işleminin özellikleri aşağıda verilmiştir.

- $(V \Delta Y) \Delta Z = V \Delta (Y \Delta Z)$ (Birleşme özelliği)

- $V \Delta Y = Y \Delta V$ (Değişme özelliği)
- $V \Delta \emptyset = \emptyset \Delta V = V$ (Birim eleman özelliği)
- $V \Delta V = \emptyset$ (Ters eleman özelliği)
- $V \Delta V' = V' \Delta V = E$
- $(V \Delta Y) \Delta (Y \Delta Z) = V \Delta Z$
- $V' \Delta Y' = V \Delta Y$
- $V \Delta Y = V \Delta Z \Rightarrow Y = Z$ (Kısaltma kuralı)
- $V \Delta Y \subseteq V \cup Y$
- $V \Delta Y = \emptyset \Leftrightarrow V = Y$
- $V \subseteq Y \Rightarrow V \Delta Y = Y - V$
- $V \Delta (V \cap Y) = V - Y$
- $V \cup Y = (V \Delta Y) \cup (V \cap Y)$
- $V \cap (Y \Delta Z) = (V \cap Y) \Delta (V \cap Z)$ (Kesişimin simetrik fark işlemi üzerine soldan dağılıması)
- $(V \Delta Y) \cap Z = (V \cap Z) \Delta (Y \cap Z)$ (Kesişimin simetrik fark işlemi üzerine sağdan dağılıması) (Karaçay, Eş ve İbrahimoglu, 2017: 61-71).

2.1.5. Tümlen işlemleri

V bir küme olmak üzere, evrensel kümede olup, V de olmayan elemanların kümesine V nin tümleneni denir ve V' ile gösterilir. O halde:

$$V' = \{x: x \notin V\} = \{x \in E: x \notin V\} = E - V$$

Tümlen işleminin özellikleri aşağıda verilmiştir.

- $V \cup V' = E$ ve $V \cap V' = \emptyset$
- $E' = \emptyset$ ve $\emptyset' = E$

- $(V')' = V$
- $V \Delta E = E \Delta X = V'$
- $(V \cup Y)' = V' \cap Y'$ (De Morgan Kuralı)
- $(V \cap Y)' = V' \cup Y'$ (De Morgan Kuralı)

(Nesin, 2019: 7-59; Çallıalp, 1994: 1-7).

2.2. Bazı Cebirsel Yapılar

Bu bölümde, tezde geçen bazı cebirsel yapılar ile ilgili temel bilgiler verilecektir.

2.2.1. Tanım V boş olmayan bir küme olmak üzere

$$\odot: V \times V \rightarrow V$$

fonksiyonuna, V kümesi üzerinde bir (ikili) işlem denir (Aydın ve Kandamar, 2013:71). Bu açıdan, ikili işlemler iki değişkenli fonksiyondur (Hacısalıhoğlu, 2007: 163).

$\odot$ ikili işlemi, bir fonksiyon olduğundan $\forall a, b \in V$ için, $a \odot b \in V$ sağlandığı açıktır. Bu, V kümesinin $\odot$ işlemine göre kapalı olması demektir (Aydın ve Kandamar, 2013:71). Herhangi bir kümede tanımlanan işlem/işlemler bu küme ile birlikte cebirsel yapı oluşturur (Hacısalıhoğlu, 2007:181). Cebirsel yapıların diğer adı, matematiksel yapı ya da matematiksel sistemdir.

2.2.2. Tanım G boş olmayan bir küme ve $\odot$ bu küme üzerinde bir ikili işlem olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $(G, \odot)$ cebirsel yapısına bir grup denir.

$$G_1) \forall a, b, c \in G \text{ için } (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$$

$G_2)$ Öyle bir $e \in G$ vardır ki $\forall a \in G$ için $a \odot e = e \odot a = a$ olmalıdır (e elemanına G'nin birim elemanı denir).

$$G_3) e, G \text{ nin birim elemanı olmak üzere, } G \text{ kümesindeki her bir } a \text{ elemanı için}$$

$$a \odot a' = a' \odot a = e$$

olacak şekilde bir tek $a' \in G$ vardır (a' elemanına a elemanının tersi denir ve a^{-1} ile gösterilir). $\forall a, b \in G$ için $a \odot b = b \odot a$ şartını sağlayan $(G, \odot)$ grubuna ise değişmeli grup denir (Bayraktar, 2006:88).

Burada; (G_1) şartını sağlayan $(G, \odot)$ cebirsel yapısına yarı grup; (G_1) ve (G_2) şartlarını sağlayan $(G, \odot)$ cebirsel yapısına monoid; $\forall a, b \in G$ için $a \odot b \in G$ şartını sağlayan $(G, \odot)$ grubuna grupoid denir.

$(V, \odot)$ bir grupoid olsun. $\forall v \in V$ için $e \odot v = v$ olacak şekilde $e \in V$ var ise, e elemanına V nin sol birim elemanı; $v \odot e = v$ olacak şekilde $e \in V$ varsa, e elemanına V nin sağ birim elemanı denir. Birim eleman hem sağ birim, hem de sol birimdir ve tektir. $(V, \odot)$, birim elemanı e olan bir cebirsel yapı olsun. $v \in V$ için $v' \odot v = e$ olacak şekilde $v' \in V$ var ise, v' elemanına v elemanının sol ters elemanı; $v \odot v' = e$ olacak şekilde $v' \in V$ varsa, v' elemanına v elemanının sağ tersi denir. v elemanının tersi, hem sağ ters, hem de sol terstir ve tektir. $\forall v \in V$ için, $y \odot v = y$ olacak şekilde $y \in V$ varsa, y elemanına V nin sol yutan elemanı; $v \odot y = y$ olacak şekilde $y \in V$ varsa, y elemanına V nin sağ yutan elemanı denir. Yutan eleman hem sağ yutan, hem de sol yutan elemandır ve tektir (Kilp, Knauer and Mikhalev, 2001).

2.2.3. Tanım $(S, \odot)$ bir cebirsel yapı olsun. $s \in S$ için, $s^2 = s$ ise s elemanına idempotent eleman denir. $\forall s \in S$ için, $s^2 = s$ ise, $(S, \odot)$ cebirsel yapısına idempotentir denir. İdempotent yarı gruba bant; idempotent ve değişmeli yarıgruba yarı kafes, idempotent ve değişmeli monoide sınırlı yarı kafes denir (Clifford, 1954).

Bir monoidin birim elemanı tek olmasına rağmen bir yarıgrup/grupoid, bir veya birden çok sol birime sahip olabilir; fakat birden çok sol birime sahip ise, sağ birim elemanı yoktur, dolayısıyla birim elemanı yoktur. Benzer şekilde, bir yarıgrup/grupoid, bir veya birden çok sağ birime sahip olabilir; fakat birden çok sağ birime sahip ise, sol birim elemanı yoktur, dolayısıyla birim elemanı yoktur (Clifford, 1954).

Benzer şekilde, bir grupta her elemanın tersi tek olmasına rağmen, bir monoidde bir elemanın bir veya birden çok sol tersi olabilir; fakat o eleman birden çok sol terse sahip ise, sağ terse sahip değildir; dolayısıyla ters elemana sahip değildir. Benzer şekilde bir

monoidde bir elemanın bir veya birden çok sağ tersi olabilir; fakat o eleman birden çok sağ terse sahip ise, sol terse sahip değildir; dolayısıyla ters elemana sahip değildir (Clifford, 1954).

2.2.4. Tanım R boştan farklı bir küme, “+” ve “ $\odot$ ” R kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun. $(R, +, \odot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(R, +, \odot)$ üçlüsüne bir halka denir.

- $(R, +)$ değişmeli bir gruptur.
- $(R, \odot)$ yarıgruptur.
- $\forall x, y, z \in R$ için $x \odot (y + z) = x \odot y + x \odot z$ ve $(x + y) \odot z = x \odot z + y \odot z$

$(R, +, \odot)$ halkası kısaca R ile gösterilir. $(R, +)$ nın birim elemanı 0_R ile gösterilir ve R halkasının sıfırı denir. R halkası $\forall x, y \in R$ için $x \odot y = y \odot x$ şartını sağlıyorsa R’ye değişmeli halka denir. R halkasında $\forall x \in R$ için, $x \odot e = e \odot x = x$ olacak şekilde bir $e \in R$ var ise, e ye R nin birim elemanı denir ve 1_R ile gösterilir. Birim elemana sahip halkaya birimli halka denir. Birim elemana sahip halkaya birimli halka denir (Bayraktar, 2006:177).

2.2.5. Tanım S boştan farklı bir küme, “+” ve “ $\odot$ ” S kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun. $(S, +, \odot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(S, +, \odot)$ üçlüsüne bir yarıhalka denir.

- $(S, +)$ yarıgruptur.
- $(S, \odot)$ yarıgruptur.
- $\forall x, y, z \in S$ için $x \odot (y + z) = x \odot y + x \odot z$ ve $(x + y) \odot z = x \odot z + y \odot z$

Her $x, y \in S$ için, $x + y = y + x$ ise S yarı halkasına toplamsal değişmeli yarıhalka; her $x, y \in S$ için $x \odot y = y \odot x$ ise S yarı halkasına çarpımsal değişmeli yarıhalka; her $x \in S$ için, $x \odot 1 = 1 \odot x = x$ olacak şekilde $1 \in S$ varsa yani çarpımsal birimli yarıhalkaya birimli yarıhalka denir. Her $x \in S$ için $0 \odot x = x \odot 0 = 0$ ve $0 + x = x + 0 = x$ olacak şekilde $0 \in S$ varsa, $0 \in S$ elemanına S yarıhalkasının sıfırı denir. Toplamsal değişmeli ve sıfırlı yarıhalkaya hemihalka denir (Vandiver,1934).

2.2.6. Tanım L boştan farklı bir küme, “ $\vee$ ” ve “ $\wedge$ ” S kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun. $(L, \vee, \wedge)$ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $(L, \vee, \wedge)$ üçlüsüne bir kafes (latis) denir.

- $(L, \vee)$ değişmeli, idempotent bir yarı grup (yarı kafes)
- $(L, \wedge)$ değişmeli, idempotent bir yarı grup (yarı kafes)
- Her $a, b, c \in L$ için, $a \vee (a \wedge b) = a \wedge (a \vee b)$ (yutma kuralı)

Her iki işleme göre birim elemana sahip olan kafese sınırlı kafes denir. Sınırlı kafeste genellikle L nin $\wedge$ işlemine göre birim elemanı 1 ile gösterilirken, $\vee$ işlemine göre birim eleman 0 ile gösterilir. Sınırlı L kafesi, her $a \in L$ için $a \wedge a' = 0$ ve $a \vee a' = 1$ olacak şekilde bir a' elamanına sahip ise L ye tümlenmiş kafes denir. Dağılma kuralları geçerli olan kafese dağılmalı kafes denir. Sınırlı, dağılmalı, aynı zamanda tümlemeli olan kafese Boole cebri denir. De Morgan yasalarına yani her $x, y \in L$ için $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ ve $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ sahip kafese De Morgan cebiri denir. De Morgan cebiri her $x, y \in L$ için $x \wedge x' \leq y \vee y'$ şartını sağlıyorsa, Kleene cebiri denir. $x \in L$ olmak üzere, $x \wedge x^* = 0$ ve $x \wedge y = 0$ olduğunda $y \leq x^*$ ise x^* elemanına x in sözde tümleyeni denir. $x^* \vee (x^*)^* = 1$ eşitliğine Stone özelliği denir. Stone özelliğini sağlayan sözde tümlenmiş dağılmalı kafese Stone cebiri denir (Birkhoff, 1967).

2.2.7. Tanım M boştan farklı bir küme, “ $\odot$ ” M de bir ikili işlem ve “ $*$ ” M de bir birli işlem olsun. 0 herhangi bir $x, y \in M$ için aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir sabit ise $(M, \odot, *, 0)$ yapısına bir MV-cebiridir denir.

- $(M, \odot, 0)$ değişmeli monoiddir.
- $(x^*)^* = x$
- $0^* \odot x = 0^*$
- $(x^* \odot y)^* \odot y = (y^* \odot x)^* \odot x$ (Chang, 1958).

2.3. Esnek Kümeler

Bu bölümde, esnek küme teorisiyle ilgili temel kavramlara yer verilecektir.

2.3.1. Tanım U evrensel küme, E parametreler kümesi, $P(U)$ U'nun kuvvet kümesi ve $V \subseteq E$ olarak verilsin. Bir (F, V) sıralı ikilisi U üzerinde esnek küme olarak adlandırılır. Burada F,

$$F: V \rightarrow P(U)$$

ile verilen bir fonksiyondur. Başka bir şekilde ifade edecek olursak, U üzerinde bir esnek küme, U evreninin alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir. (Molodtsov, 1999).

(F, V) esnek kümesi gösterimi, bazı kaynaklarda F_V şeklinde gösterilse de Molodtsov (1999) ve Maji ve diğerleri (2003) çalışmasında da kullanılan esnek kümenin (F, V) gösterimi bu tez boyunca tercih edilmiştir. Molodtsov tarafından ortaya atılan bu tanım, Çağman ve Enginoğlu (2010a) tarafından yeniden düzenlenerek aşağıdaki tanıma vermişlerdir. Bu tezde, aslına sadık kalarak ilk olarak Molodtsov (1999) tarafından verilen esnek küme tanımını kullanılacaktır.

E parametreler kümesinin bir V alt kümesi ile birden fazla esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda bu esnek kümeler (F, V) , (G, V) , (H, V) vb. şeklinde gösterilecektir. Ayrıca, E parametreler kümesinin V, Y, Z vb. farklı alt kümeleri ile de birden fazla esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda esnek kümeler (F, V) , (F, Y) , (F, Z) vb şeklinde olur.

U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi (parametre kümesi ne olursa olsun) $S_E(U)$ ile gösterilecek olup; V, E kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, sabit V parametre kümesi ile U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi, $S_V(U)$ ile gösterilecektir. Yani, $S_V(U)$ kümesinde, parametre kümesi sadece V olan esnek kümeler yer alırken; $S_E(U)$ kümesinde, parametre kümesi herhangi bir küme olan U üzerindeki tüm esnek kümeler yer alabilir. $S_V(U)$ kümesinin $S_E(U)$ kümesinin alt kümesi olduğu açıktır. Tanım kümesi boş küme olacak şekildeki, $F: \emptyset \rightarrow V$ fonksiyonuna boş fonksiyon denildiği bilinmektedir. Esnek küme de bir fonksiyon olduğundan, tanım kümesi $\emptyset$ alınarak, $F: \emptyset \rightarrow P(U)$ olacak şekilde bir esnek küme tanımlanabileceği aşıkardır. Böyle esnek kümeye, boş esnek küme denilir ve $\emptyset_\emptyset$ ile gösterilir. $\emptyset_\emptyset$, parametre kümesi boş küme olan tek esnek kümedir (Ali ve diğerleri, 2011). Bu tez boyunca $(F, V) = \emptyset_\emptyset$ diye belirtilmediği sürece $V = \emptyset$ alınmayacaktır;

yani aksi belirtilmediği sürece, esnek kümelerin tümü boş esnek küme olan $\emptyset$ den farklıdır.

2.3.2. *Örnek* U satın almak için üzerinde düşünülen cep telefonların bir kümesi, E'nin de parametrelerin kümesi olduğunu kabul edelim. Her bir parametre bir kelime veya bir cümledir.

$$E = \{\text{kullanışlı, uygun fiyatlı, pil ömrü yüksek, yüksek depolama kapasiteli, gösterişli}\}$$

olsun. Bu durumda bir esnek küme tanımlamak, “kullanışlı telefon, uygun fiyatlı telefon vb.” oluşturmak demektir. (F,E); esnek kümesi Ömer Bey'in almayı düşündüğü “cep telefonların çekiciliği” olarak tanımlanır. U evrensel kümesinde aşağıdaki şekilde verilen altı tane telefon olduğunu düşünelim.

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\} \text{ ve } E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, V = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$$

olsun. Burada, α_1 "kullanışlı" parametresini; α_2 "uygun fiyatlı" parametresini; α_3 "pil ömrü yüksek" parametresini; α_4 "yüksek depolama kapasiteli"; α_5 "gösterişli" parametresini temsil etsin. Buna göre cep telefon almaya gelen Ömer Bey için (F,V) esnek kümesini oluşturalım. Bunun için önce verilen parametrelere göre cep telefonlarını sınıflandıralım:

$$F(\alpha_1) = \{u_2, u_3, u_4\}, F(\alpha_3) = \{u_4\}, F(\alpha_4) = U$$

Bu durumda esnek kümemiz,

$$(F, V) = \{(\alpha_1, \{u_2, u_3, u_4\}), (\alpha_3, \{u_4\}), (\alpha_4, U)\}$$

şeklinde olur.

2.3.3. Tanım $(F, V) \in S_E(U)$ olsun. Her $v \in V$ için; $F(v) = \emptyset$ ise (F,V) esnek kümesine V ye göre boş esnek küme denir ve $\emptyset_V$ ile gösterilir. (F,E), U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $v \in E$ için; $F(v) = \emptyset$ ise (F,E) esnek kümesine E ye göre boş esnek küme denir ve $\emptyset_E$ ile gösterilir (Ali ve diğerleri, 2009).

2.3.4. Tanım $(F,V) \in S_E(U)$ olsun. Her $v \in V$ için; $F(v)=U$ ise (F,V) esnek kümesine V ye göre mutlak esnek küme denir ve U_V ile gösterilir. (F,E) , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $v \in E$ için; $F(v)=U$ ise (F,E) esnek kümesine tam esnek küme denir ve U_E ile gösterilir (Ali ve diğerleri, 2009).

2.3.5. Tanım (F,V) ve $(G,Y) \in S_E(U)$ olsun. Eğer, $V \subseteq Y$ ve her $v \in V$ için $F(v)=G(v)$ ise (F,V) ye (G,Y) nin esnek alt kümesidir denir $(F,V) \subseteq (G,Y)$ gösterilir. Eğer (G,Y) , (F,V) nin esnek alt kümesi ise (F,V) ye (G,Y) nin esnek üst kümesidir denir ve $(F,V) \supseteq (G,Y)$ ile gösterilir. Eğer $(F,V) \subseteq (G,Y)$ ve $(G,Y) \subseteq (F,V)$ ise (F,V) ve (G,Y) esnek kümelerine esnek eşit kümeler denir (Pei ve Maio, 2005).

Alan yazındaki diğer esnek alt küme ve esnek eşit küme tanımları ve bu tanımlar arasındaki ilişkiler için, Maji ve diğerleri, 2003; Qin ve Hong, 2010; Jun ve Yang, 2011; Liu, Feng ve Jun, 2012; Feng ve Yongming, 2013; Abbas, Ali ve Romaguera, 2014; Abbas, Ali ve Romaguera, 2017; Al-shami, 2019; Al-shami ve El-Shafer, 2020; Ali, Saleem, Sundus ve Khaleew, 2022 çalışmalarından faydalanılabilir.

2.3.6. Tanım $(F,V) \in S_E(U)$ olsun. (F,V) esnek kümesinin esnek tümleyeni $(F,V)^r = (F^r,V)$ ve her $v \in V$ için; $F^r(v)=U-F(v)$ şeklinde tanımlanır. (Ali ve diğerleri, 2009).

Buradan, $(\emptyset_A)^r=U_A$, $(U_A)^r=\emptyset_A$, $(\emptyset_E)^r=U_E$, $(U_E)^r=\emptyset_E$, $(\emptyset_\emptyset)^r=\emptyset_\emptyset$ (Tümleyende parametre kümesi değişmediği ve parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğu için) $((F,Z))^r=(F,Z)$. Ayrıca, $\emptyset_A \subseteq (F,Z) \subseteq U_A \subseteq U_E$ olduğu açıktır. (Ali ve diğerleri, 2011).

Bu zamana kadar yapılan çalışmalar incelendiğinde, esnek küme işlemlerinin, aşağıda verildiği şekilde, kısıtlanmış ve genişletilmiş işlemler olmak üzere iki kategoride ilerlediği görülmektedir.

2.3.7. Tanım (F,V) ve $(G,Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin $(F,V) \cap_R (G,Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış kesişimi $Z = V \cap Y$ ve $\forall v \in Z$ için $H(v) = F(v) \cap G(v)$ olmak üzere $(F,V) \cap_R (G,Y) = (H,Z)$ olarak tanımlanır (Pei ve Miao, 2005). Burada, $Z = V \cap Y = \emptyset$ ise $(F,V) \cap_R (G,Y)=\emptyset_\emptyset$ (Ali ve diğerleri, 2011).

2.3.8. Tanım (F, V) ve $(G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin $(F, V) \cup_{\mathfrak{R}} (G, Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış birleşimi $Z = V \cap Y$ ve $\forall v \in Z$ için $H(v) = F(v) \cup G(v)$ olmak üzere $(F, V) \cup_{\mathfrak{R}} (G, Y) = (H, Z)$ olarak tanımlanır (Ali ve diğerleri, 2009). Burada, $Z = V \cap Y = \emptyset$ ise $(F, V) \cup_R (G, Y) = \emptyset_{\emptyset}$ (Ali ve diğerleri, 2011).

2.3.9. Tanım (F, V) ve $(G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin $(F, V) \setminus_{\mathfrak{R}} (G, Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış farkı $Z = V \cap Y$ ve $\forall v \in Z$ için $H(v) = F(v) \setminus G(v)$ olmak üzere $(F, V) \setminus_{\mathfrak{R}} (G, Y) = (H, Z)$ olarak tanımlanır (Ali ve diğerleri, 2009). Burada, $Z = V \cap Y = \emptyset$ ise $(F, V) \setminus_R (G, Y) = \emptyset_{\emptyset}$ (Ali ve diğerleri, 2011).

2.3.10. Tanım (F, V) ve $(G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin $(F, V) \Delta_{\mathfrak{R}} (G, Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış simetrik fark $Z = V \cap Y$ ve $\forall v \in Z$ için $H(v) = F(v) \Delta G(v)$ olmak üzere $(F, V) \Delta_{\mathfrak{R}} (G, Y) = (H, Z)$ olarak tanımlanır (Sezgin ve Atagün, 2011a). Burada, $Z = V \cap Y = \emptyset$ ise $(F, V) \Delta_R (G, Y) = \emptyset_{\emptyset}$ (Ali ve diğerleri, 2011).

2.3.11. Tanım (F, V) ve $(G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş birleşimi (H, Z) 'dir. Burada $Z = V \cup Y$ ve $\forall v \in Z$ için,

$$H(v) = \begin{cases} F(v), & v \in V - Y \\ G(v), & v \in Y - V \\ F(v) \cup G(v), & v \in V \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır, $(F, V) \cup_{\varepsilon} (G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Maji ve diğerleri, 2003).

2.3.12. Tanım (F, V) ve $(G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş kesişimi (H, Z) 'dir. Burada $Z = V \cup Y$ ve $\forall v \in Z$ için,

$$H(v) = \begin{cases} F(v), & v \in V - Y \\ G(v), & v \in Y - V \\ F(v) \cap G(v), & v \in V \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır, $(F, V) \cap_{\varepsilon} (G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Ali ve diğerleri, 2009).

2.3.13. Tanım (F, V) ve $(G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş fark (H, Z) 'dir. Burada, $Z = V \cup Y$ ve $\forall v \in Z$ için,

$$H(v) = \begin{cases} F(v), & v \in V - Y \\ G(v), & v \in Y - V \\ F(v) - G(v), & v \in V \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır, $(F, V) \setminus_\varepsilon (G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Sezgin ve diğerleri, 2019).

2.3.14. Tanım (F, V) ve $(G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş simetrik farkı (H, Z) 'dir. Burada, $Z = V \cup Y$ ve $\forall v \in Z$ için,

$$H(v) = \begin{cases} F(v), & v \in V - Y \\ G(v), & v \in Y - V \\ F(v) \Delta G(v), & v \in V \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır, $(F, V) \Delta_\varepsilon (G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Stojanovic, 2021).

2.3.15. *Örnek* $E = \{\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \aleph_4, \aleph_5, \aleph_6\}$ parametreler kümesi $V = \{\aleph_1, \aleph_2, \aleph_5, \aleph_6\}$ ve $Y = \{\aleph_1, \aleph_3, \aleph_4\}$, E nin iki alt kümesi olsun. (F, V) ve (G, Y) , $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlı iki esnek küme olsun:

$$(F, V) = \{(\aleph_1, \{h_2, h_3, h_4\}), (\aleph_2, \{h_1, h_2, h_5\}), (\aleph_5, \{h_2, h_3, h_5\}), (\aleph_6, \{h_1, h_4, h_5\})\},$$

$$(G, Y) = \{(\aleph_1, \{h_1, h_3, h_4\}), (\aleph_3, \{h_3, h_5\}), (\aleph_4, \{h_1, h_3, h_5\})\}$$

Bu durumda,

- $(F, V) \cup_\varepsilon (G, Y) = \{(\aleph_1, \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), (\aleph_2, \{h_1, h_2, h_5\}), (\aleph_3, \{h_3, h_5\}), (\aleph_4, \{h_1, h_3, h_5\}), (\aleph_5, \{h_2, h_3, h_5\}), (\aleph_6, \{h_1, h_4, h_5\})\}$
- $(F, V) \cap_\varepsilon (G, Y) = \{(\aleph_1, \{h_3, h_4\}), (\aleph_2, \{h_1, h_2, h_5\}), (\aleph_3, \{h_3, h_5\}), (\aleph_4, \{h_1, h_3, h_5\}), (\aleph_5, \{h_2, h_3, h_5\}), (\aleph_6, \{h_1, h_4, h_5\})\}$
- $(F, V) \setminus_\varepsilon (G, Y) = \{(\aleph_1, \{h_2\}), (\aleph_2, \{h_1, h_2, h_5\}), (\aleph_3, \{h_3, h_5\}), (\aleph_4, \{h_1, h_3, h_5\}), (\aleph_5, \{h_2, h_3, h_5\}), (\aleph_6, \{h_1, h_4, h_5\})\}$
- $(F, V) \Delta_\varepsilon (G, Y) = \{(\aleph_1, \{h_1, h_2\}), (\aleph_2, \{h_1, h_2, h_5\}), (\aleph_3, \{h_3, h_5\}), (\aleph_4, \{h_1, h_3, h_5\}), (\aleph_5, \{h_2, h_3, h_5\}), (\aleph_6, \{h_1, h_4, h_5\})\}$
- $(F, V) \cup_R (G, Y) = \{(\aleph_1, \{h_1, h_2, h_3, h_4\})\}$

- $(F, V) \cap_R (G, Y) = \{(\aleph_1, \{h_3, h_4\})\}$
- $(F, V) \setminus_R (G, Y) = \{(\aleph_1, \{h_2\})\}$
- $(F, V) \Delta_R (G, Y) = \{(\aleph_1, \{h_1, h_2\})\}$

Çağman (2021) kapsayıcı ve dışlayıcı tümleyen şeklinde iki yeni tümleyen tanımlamıştır. $+$ ve θ sırasıyla, kapsayıcı ve dışlayıcı tümleyenleri göstermek ve V ve Y iki küme olmak üzere, bu ikili işlemler, $V+Y=V'\cup Y$, $V\theta Y=V'\cap Y$ olarak tanımlanmıştır. Sezgin ve diğerleri (2023c), bu iki işlem arasındaki ilişkileri incelemiş ve ayrıca bunun gibi üç yeni ikili işlem tanımlayıp, bunların birbirleriyle olan ilişkisini incelemiştir. V ve Y iki küme olmak üzere $V*Y=V'\cup Y'$, $V\gamma Y=V'\cap Y$, $V\lambda Y=V\cup Y'$. $\odot$ kümelerdeki işlemleri göstermek üzere ($\odot$ burada $\cap$, $\cup$, $-$, Δ , λ , γ , θ , $+$, $*$ gibi küme işlemlerini göstermek üzere) esnek kümelerdeki kısıtlanmış işlemler, genişletilmiş işlemler, tümleyenli genişletilmiş işlemler, esnek ikili parçalı işlemler, tümleyenli esnek ikili parçalı işlemler aşağıda verilen genellenmiş tanımlar ile genel formda verilebilir:

2.3.16. Tanım (F, V) ve $(G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin $(F, V) \odot_{\mathfrak{R}} (G, Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış $\odot$ işlemi, $Z = V \cap Y$ ve $\forall v \in Z$ için $H(v) = F(v) \odot G(v)$ olmak üzere $(F, V) \odot_{\mathfrak{R}} (G, Y) = (H, Z)$ olarak tanımlanır. Burada, $Z = V \cap Y = \emptyset$ ise $(F, V) \odot_R (G, Y) = \emptyset_{\emptyset}$ (Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve Atagün, 2011a; Aybek, 2024).

2.3.17. Tanım (F, V) ve $(G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş $\odot$ işlemi (H, Z) 'dir. Burada, $Z = V \cup Y$ ve $\forall v \in Z$ için,

$$H(v) = \begin{cases} F(v), & v \in V - Y \\ G(v), & v \in Y - V \\ F(v) \odot G(v), & v \in V \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, V) \odot_{\varepsilon} (G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Maji ve diğerleri, 2003; Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve diğerleri, 2019; Stojanovic, 2021; Aybek, 2024).

2.3.18. Tanım (F, V) ve $(G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin tümleyenli genişletilmiş $\odot$ işlemi (H, Z) 'dir. Burada $Z = V \cup Y$ ve $\forall v \in Z$ için,

$$H(v) = \begin{cases} F'(v), & v \in V - Y \\ G'(v), & v \in Y - V \\ F(v) \odot G(v), & v \in V \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, V) \overset{*}{\odot}_{\varepsilon} (G, Y) = (H, Z)$ şeklinde yazılır (Sarıalioğlu, 2024; Akbulut, 2024).

2.3.19. Tanım (F, V) ve $(G, Y) \in S_E(U)$ olsun. Bu esnek kümelerin esnek ikili parçalı $\odot$ işlemi (H, V) 'dir ve $\forall v \in V$ için,

$$H(v) = \begin{cases} F(v), & v \in V - Y \\ F(v) \odot G(v), & v \in V \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, V) \overset{\sim}{\odot} (G, Y) = (H, V)$ şeklinde gösterilir (Eren, 2019; Sezgin ve Yavuz, 2023a; Sezgin ve Yavuz, 2023b; Sezgin ve Çalışıcı, 2024; Yavuz, 2024).

2.3.20. Tanım (F, V) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin tümleyenli esnek ikili parçalı $\odot$ işlemi (H, V) 'dir ve $\forall v \in V$ için,

$$H(v) = \begin{cases} F'(v), & v \in V - Y \\ F(v) \odot G(v), & v \in V \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, V) \overset{*}{\odot} (G, Y) = (H, V)$ şeklinde gösterilir (Sezgin ve Demirci, 2023;

Sezgin ve Aybek, 2023; Sezgin ve diğerleri, 2023a, 2023b; Sezgin ve Atagün, 2023; Sezgin ve Yavuz, 2023a; Sezgin ve Çağman, 2024; Sezgin ve Sarıalioğlu, 2024).

3. TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ BİRLEŞİM İŞLEMİ

Bu bölümde, tümleyenli genişletilmiş birleşim adı verilen yeni bir esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir.

3.1. Tanım (F, Z) ve (G, B) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümenin $(F, Z) \underset{U}{*} (G, B)$ ile gösterilen tümleyenli genişletilmiş birleşim işlemi $\mathcal{S} = Z \cup B$ ve $\forall \mathcal{X} \in \mathcal{S}$;

$$H(\mathcal{X}) = \begin{cases} F'(\mathcal{X}), & \mathcal{X} \in Z - B \\ G'(\mathcal{X}), & \mathcal{X} \in B - Z \\ F(\mathcal{X}) \cup G(\mathcal{X}), & \mathcal{X} \in Z \cap B \end{cases}$$

olmak üzere $(F, Z) \underset{U}{*} (G, B) = (H, \mathcal{S})$ ile tanımlanır.

3.2. Örnek $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi $Z = \{e_1, e_3\}$ ve $B = \{e_2, e_3, e_4\}$ E nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme olmak üzere (F, Z) ve (G, B) , U üzerinde $(F, Z) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, B) = \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, Z) \underset{U}{*} (G, B) = (H, Z \cup B)$ olmak üzere $\forall \mathcal{X} \in Z \cup B$;

$$H(\mathcal{X}) = \begin{cases} F'(\mathcal{X}), & \mathcal{X} \in Z - B \\ G'(\mathcal{X}), & \mathcal{X} \in B - Z \\ F(\mathcal{X}) \cup G(\mathcal{X}), & \mathcal{X} \in Z \cap B \end{cases}$$

Burada, $Z \cup B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $Z - B = \{e_1\}$, $B - Z = \{e_2, e_4\}$, $Z \cap B = \{e_3\}$ olmak üzere, $H(e_1) = F'(e_1) = \{h_1, h_3, h_4\}$, $H(e_2) = G'(e_2) = \{h_2, h_3\}$, $H(e_4) = G'(e_4) = \{h_1, h_2, h_4\}$ ve $H(e_3) = F(e_3) \cup G(e_3) = \{h_1, h_2, h_5\} \cup \{h_2, h_3, h_4\} = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$. Böylece, $(F, Z) \underset{U}{*} (G, B) = \{(e_1, \{h_1, h_3, h_4\}), (e_2, \{h_2, h_3\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_4\})\}$.

3.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $\cup_{\varepsilon}^*$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $\cup_{\varepsilon}^*$ işleminin, $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\begin{aligned} \cup_{\varepsilon}^* : S_E(U) \times S_E(U) &\rightarrow S_E(U) \\ ((F, Z), (G, B)) &\rightarrow (F, Z) \cup_{\varepsilon}^* (G, B) = (H, Z \cup B) \end{aligned}$$

olup, (F, Z) ve (G, B) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F, Z) \cup_{\varepsilon}^* (G, B)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir.

2) $[(F, Z) \cup_{\varepsilon}^* (G, B)] \cup_{\varepsilon}^* (H, \S) \neq (F, Z) \cup_{\varepsilon}^* [(G, B) \cup_{\varepsilon}^* (H, \S)]$.

İspat: Öncelikle sol tarafa bakalım. $(F, Z) \cup_{\varepsilon}^* (G, B) = (T, Z \cup B)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$(T, Z \cup B) \cup_{\varepsilon}^* (H, \S) = (M, Z \cup B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup B \cup \S$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} T'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup B) - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - (Z \cup B) \\ T(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in (Z \cup B) \cap \S \end{cases}$$

Buradan,

$$M(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z-B) - \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (B-Z) - \mathfrak{S} = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{X}) \cap G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z \cap B) - \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in \mathfrak{S} - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{X}) \cup H(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z-B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{X}) \cup H(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (B-Z) \cap \mathfrak{S} = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ (F(\mathfrak{X}) \cup G(\mathfrak{X})) \cup H(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z \cap B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $(F, Z) \underset{\mathfrak{U}_\varepsilon}{*} [(G, B) \underset{\mathfrak{U}_\varepsilon}{*} (H, \mathfrak{S})]$ bakalım.

$(G, B) \underset{\mathfrak{U}_\varepsilon}{*} (H, \mathfrak{S}) = (K, B \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{X} \in B \cup \mathfrak{S}$;

$$K(\mathfrak{X}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in B - \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in \mathfrak{S} - B \\ G(\mathfrak{X}) \cup H(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{\mathfrak{U}_\varepsilon}{*} (K, B \cup \mathfrak{S}) = (S, Z \cup B \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{X} \in Z \cup B \cup \mathfrak{S}$;

$$S(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Z - (B \cup \mathfrak{S}) \\ K'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (B \cup \mathfrak{S}) - Z \\ F(\mathfrak{X}) \cup K(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Z \cap (B \cup \mathfrak{S}) \end{cases}$$

Buradan,

$$S(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Z - (B \cup \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (B - \mathfrak{S}) - Z = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (\mathfrak{S} - B) - Z = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{X}) \cap H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (B \cap \mathfrak{S}) - Z = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ F(\mathfrak{X}) \cup G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Z \cap (B - \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F(\mathfrak{X}) \cup H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in Z \cap (\mathfrak{S} - B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ F(\mathfrak{X}) \cup (G(\mathfrak{X}) \cup H(\mathfrak{X})), & \mathfrak{X} \in Z \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Böylece, $M \neq S$ olduğu görülür. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\underset{\mathfrak{U}_\varepsilon}{*}$ işlemi birleşme özelliğine sahip değildir.

$$3) [(F, Z) \underset{\varepsilon}{*} (G, Z)] \underset{\varepsilon}{*} (H, Z) = (F, Z) \underset{\varepsilon}{*} [(G, Z) \underset{\varepsilon}{*} (H, Z)].$$

İspat: Öncelikle sol tarafa bakalım $(F, Z) \underset{\varepsilon}{*} (G, Z) = (T, Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup Z = Z$;

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ G'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(T, Z) \underset{\varepsilon}{*} (H, Z) = (M, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$M(x) = \begin{cases} T'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ H'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ T(x) \cup H(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan,

$$M(x) = \begin{cases} T'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ H'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ (F(x) \cup G(x)) \cup H(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Şimdi sağ tarafa yani $(F, Z) \underset{\varepsilon}{*} [(G, Z) \underset{\varepsilon}{*} (H, Z)]$ bakalım. $(G, Z) \underset{\varepsilon}{*} (H, Z) = (L, Z \cup Z)$ olsun.

Burada, $\forall x \in Z$;

$$L(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ H'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ G(x) \cup H(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{\varepsilon}{*} (L, Z) = (N, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ L'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ F(x) \cup L(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ L'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cup (G(\aleph) \cup H(\aleph)), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Böylece, $M=N$ olduğu görülür. Yani, $Z \subseteq E$ sabit bir paramere kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde $\bigcup_{\varepsilon}^*$ işleminin birleşme özelliği vardır.

$$4) (F, Z) \bigcup_{\varepsilon}^* (G, B) = (G, B) \bigcup_{\varepsilon}^* (F, Z).$$

İspat: Öncelikle eşitliğin her iki tarafındaki esnek kümenin parametere kümeleri $Z \cup B$ olup, esnek eşitliğin ilk şartı sağlanmış olur. Şimdi eşitliğin sol tarafına bakalım.

$(F, Z) \bigcup_{\varepsilon}^* (G, B) = (H, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $(G, B) \bigcup_{\varepsilon}^* (F, Z)$ bakalım. $(G, B) \bigcup_{\varepsilon}^* (F, Z) = (T, B \cup Z)$ olsun.

Burada $\forall \aleph \in B \cup Z$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G(\aleph) \cup F(\aleph), & \aleph \in B \cap Z \end{cases}$$

Böylece, $H=T$ olduğu görülür. Benzer şekilde, $(F, Z) \bigcup_{\varepsilon}^* (G, Z) = (G, Z) \bigcup_{\varepsilon}^* (F, Z)$. Yani, $S_E(U)$ ve $S_Z(U)$ kümeleri üzerinde $\bigcup_{\varepsilon}^*$ işleminin değişme özelliği vardır.

$$5) (F, Z) \bigcup_{\varepsilon}^* (F, Z) = (F, Z).$$

İspat: $(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (F, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cup F(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan, $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F(\aleph) \cup F(\aleph) = F(\aleph)$ olup $(H, Z) = (F, Z)$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde $\overset{*}{\cup}_{\varepsilon}$ işlemi denk güçlülük (idempotent) özelliğe sahiptir.

$$6) (F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} \emptyset_Z = \emptyset_Z \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (F, Z) = (F, Z).$$

İspat: $\emptyset_Z = (S, Z)$ olsun. $\forall \aleph \in Z$; $S(\aleph) = \emptyset$. $(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (S, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ S'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cup S(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F(\aleph) \cup S(\aleph) = F(\aleph) \cup \emptyset = F(\aleph)$ olup, $(H, Z) = (F, Z)$.

$S_Z(U)$ kümesi üzerinde $\overset{*}{\cup}_{\varepsilon}$ işleminin birim elemanı $\emptyset_Z$ esnek kümesidir.

3.3.1. *Sonuç* $Z \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, Teorem 3.3 (1), (3), (4), (5) ve (6) dan $(S_Z(U), \overset{*}{\cup}_{\varepsilon})$ cebirsel yapısı birimi $\emptyset_Z$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafestir. Teorem 3.3 (2) den, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\overset{*}{\cup}_{\varepsilon}$ işlemi birleşmeli olmadığı için bir yarıgrup oluşturamaz, $(S_E(U), \overset{*}{\cup}_{\varepsilon})$ cebirsel yapısı bir grupoiddir.

$$7) (F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} U_Z = U_Z \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (F, Z) = U_Z.$$

İspat: $U_Z = (T, Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$; $T(\aleph) = U$. $(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (T, A) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ T'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cup T(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F(\aleph) \cup T(\aleph) = F(\aleph) \cup U = U$ olup $(H, Z) = U_Z$.

$S_Z(U)$ kümesi üzerinde $\bigcup_{\varepsilon}^*$ işleminin yutan elemanı U_Z esnek kümesidir.

$$8) (F, Z) \bigcap_{\varepsilon}^* \emptyset_{\emptyset} = \emptyset_{\emptyset} \bigcap_{\varepsilon}^* (F, Z) = (F, Z)^r.$$

İspat: $\emptyset_{\emptyset} = (K, \emptyset)$ ve $(F, Z) \bigcup_{\varepsilon}^* (K, \emptyset) = (Q, Z \cup \emptyset) = (Q, Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$Q(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - \emptyset = Z \\ K'(\aleph), & \aleph \in \emptyset - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cup K(\aleph), & \aleph \in Z \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Buradan, $\forall \aleph \in Z$; $Q(\aleph) = F'(\aleph)$ olup $(Q, Z) = (F, Z)^r$.

$$9) (F, Z) \bigcup_{\varepsilon}^* (F, Z)^r = (F, Z)^r \bigcup_{\varepsilon}^* (F, Z) = U_Z.$$

İspat: $(F, Z)^r = (H, Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph)$. $(F, Z) \bigcup_{\varepsilon}^* (H, Z) = (T, Z \cup Z)$ olsun .

Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Burada $\forall \aleph \in Z$; $T(\aleph) = F(\aleph) \cup H(\aleph) = F(\aleph) \cup F'(\aleph) = U$ olup $(T, Z) = U_Z$.

$$10) [(F, Z) \bigcup_{\varepsilon}^* (G, B)]^r = (F, Z) \theta_{\varepsilon}(G, B).$$

İspat: $(F, Z) \overset{*}{\cup} (G, B) = (H, Z \cup B)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$(H, Z \cup B)^r = (T, Z \cup B)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

Buradan, $(T, Z \cup B) = (F, Z) \theta_\varepsilon (G, B)$ olur.

$$11) (F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, Z) = \emptyset_Z \Leftrightarrow (F, Z) = (G, Z) = \emptyset_Z.$$

İspat: $(F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, Z) = (T, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ G'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(T, Z) = \emptyset_Z$ olduğundan, $\forall \aleph \in Z$ için $T(\aleph) = \emptyset$ ve $\forall \aleph \in Z$; $F(\aleph) \cup G(\aleph) = \emptyset$. Buradan, $\forall \aleph \in Z$;
 $F(\aleph) = G(\aleph) = \emptyset$. Böylece, $(F, Z) = (G, Z) = \emptyset_Z$.

$$12) \emptyset_Z \subseteq (F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, B), \emptyset_B \subseteq (F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, B), \emptyset_{Z \cup B} \subseteq (F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, B), (F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, B) \\ \subseteq U_{Z \cup B}.$$

$$13) (F, Z) \subseteq (F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, Z) \text{ ve } (G, Z) \subseteq (F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, Z).$$

İspat: $(F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ G'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$\forall \aleph \in Z; H(\aleph) = F(\aleph) \subseteq F(\aleph) \cup G(\aleph)$. Böylece, $(F, Z) \cong (F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, Z)$. Benzer şekilde,

$\forall \aleph \in Z; H(\aleph) = G(\aleph) \subseteq F(\aleph) \cup G(\aleph)$. Böylece $(G, Z) \cong (F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, Z)$.

$$14) (F, Z) \cong (G, Z) \Leftrightarrow (F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, Z) = (G, Z).$$

İspat: $(F, Z) \cong (G, Z)$ ise her $\aleph \in Z$ için, $F(\aleph) \subseteq G(\aleph)$ ve $G'(\aleph) \subseteq F'(\aleph)$. $(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. $\forall \aleph \in Z;$

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ G'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Böylece, $\forall \aleph \in Z; H(\aleph) = F(\aleph) \cup G(\aleph) = G(\aleph)$. Böylece, $(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, Z) = (G, Z)$. Tersine, (F, Z)

$\overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, Z) = (G, Z)$ olsun. Buradan, $\forall \aleph \in Z$ için, $F(\aleph) \cup G(\aleph) = G(\aleph)$ olup, $F(\aleph) \subseteq G(\aleph)$. Böylece, $\forall \aleph \in Z; (F, Z) \cong (G, Z)$.

$$15) (F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, B) \cong (F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, B).$$

İspat: $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, B) = (H, Z \cup B)$ olsun. Burada $\aleph \in Z \cup B$,

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F(\aleph) \cap G(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, B) = (T, Z \cup B)$ olsun. Burada $\aleph \in Z \cup B;$

$$T(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z-B \\ G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B-Z \\ F(\mathfrak{N}) \cup G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap B \end{cases}$$

$\forall \mathfrak{N} \in Z-B; H(\mathfrak{N}) = F'(\mathfrak{N}) \subseteq F'(\mathfrak{N}) = T(\mathfrak{N}), \forall \mathfrak{N} \in B-Z; H(\mathfrak{N}) = G'(\mathfrak{N}) \subseteq G'(\mathfrak{N}) = T(\mathfrak{N}), \forall \mathfrak{N} \in Z \cap B; F(\mathfrak{N}) \cap G(\mathfrak{N}) \subseteq F(\mathfrak{N}) \cup G(\mathfrak{N})$. Böylece, $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, B) \cong (F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, B)$.

$$16) (F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, B) = (F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, B) \Leftrightarrow (F, Z \cap B) = (G, Z \cap B).$$

İspat: $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, B) \cong (F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, B)$ ve $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, B) = (H, Z \cup B)$ olsun. $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B$;

$$H(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z-B \\ G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B-Z \\ F(\mathfrak{N}) \cap G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap B \end{cases}$$

$$(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, B) = (K, Z \cup B) \text{ olsun. } \forall \mathfrak{N} \in Z \cup B;$$

$$K(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z-B \\ G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B-Z \\ F(\mathfrak{N}) \cup G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B \cap Z \end{cases}$$

$(H, Z \cup B) = (K, Z \cup B)$ olduğundan, $\forall \mathfrak{N} \in Z-B; F'(\mathfrak{N}) = F'(\mathfrak{N}), \forall \mathfrak{N} \in B-Z; G'(\mathfrak{N}) = G'(\mathfrak{N}), \forall \mathfrak{N} \in Z \cap B; F(\mathfrak{N}) \cap G(\mathfrak{N}) = F(\mathfrak{N}) \cup G(\mathfrak{N})$ olur. Buradan, $\forall \mathfrak{N} \in Z \cap B; F(\mathfrak{N}) = G(\mathfrak{N})$. Böylece, $(F, Z \cap B) = (G, Z \cap B)$ olur.

Tersine, $(F, Z \cap B) = (G, Z \cap B)$ olsun. Buradan, $\forall \mathfrak{N} \in Z \cap B; F(\mathfrak{N}) = G(\mathfrak{N})$. Böylece, $\forall \mathfrak{N} \in Z \cap B; F(\mathfrak{N}) \cap G(\mathfrak{N}) = F(\mathfrak{N}) \cup G(\mathfrak{N})$. $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, B) = (H, Z \cup B)$ olsun. $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B$;

$$H(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z-B \\ G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B-Z \\ F(\mathfrak{N}) \cap G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, B) = (K, Z \cup B)$ olsun. $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B$;

$$K(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - B \\ G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - Z \\ F(\mathfrak{N}) \cup G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B \cap Z \end{cases}$$

$\forall \mathfrak{N} \in Z \cap B$; $F(\mathfrak{N}) \cap G(\mathfrak{N}) = F(\mathfrak{N}) \cup G(\mathfrak{N})$ olduğundan, $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B$; $H(\mathfrak{N}) = K(\mathfrak{N})$ olur ve böylece,

$(H, Z \cup B) = (K, Z \cup B)$. Yani, $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, B) = (F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, B)$.

17) $(F, Z) \cong (G, Z)$ ise $(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, Z) \cong (G, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, Z)$.

İspat: $(F, Z) \cong (G, Z)$ olsun. Buradan, $\forall \mathfrak{N} \in Z$ için, $F(\mathfrak{N}) \subseteq G(\mathfrak{N})$. $(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, Z) = (W, Z)$ olsun.

Böylece, $\forall \mathfrak{N} \in Z$ için,

$$W(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - Z = \emptyset \\ F(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(G, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, Z) = (L, Z)$ olsun. Böylece, $\forall \mathfrak{N} \in Z$ için,

$$L(\mathfrak{N}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - Z = \emptyset \\ G(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Böylece, $\forall \mathfrak{N} \in Z$ için, $W(\mathfrak{N}) = F(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}) \subseteq G(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}) = L(\mathfrak{N})$ olup, $(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, Z) \cong$

$(G, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, Z)$.

18) $(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, Z) \cong (G, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, Z)$ ise $(F, Z) \cong (G, Z)$ olmak zorunda değildir. Yani

Teorem 3.3 (17) tersi doğru değildir.

İspat: Teorem 3.3 (17) in tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ parametre kümesi, $Z=\{e_1,e_3\}$, E 'nin alt kümesi, $U=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}$ evrensel küme, (F,Z) , (G,Z) ve (H,Z) , U üzerinde $(F,Z)=\{(e_1,\{h_2,h_5\}), (e_3,\{h_1,h_2,h_5\})\}$, $(G,Z)=\{(e_1,\{h_2\}), (e_3,\{h_1,h_2\})\}$, $(H,Z)=\{(e_1,U), (e_3,U)\}$ olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.

Buradan, $(F,Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (H,Z) = (L,Z)$ olup $(L,Z)=\{(e_1,U), (e_3,U)\}$ ve $(G,Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (H,Z) = (K,Z)$ olmak üzere $(K,Z)=\{(e_1,U), (e_3,U)\}$. Böylece, $(F,Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (H,Z) \subseteq (G,Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (H,Z)$; fakat $(F,Z) \not\subseteq (G,Z)$ olmadığı açıktır.

$$19) (F,Z) \subseteq (G,B) \text{ ve } (K,Z) \subseteq (L,B) \text{ ise } (F,Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (K,Z) \subseteq (G,B) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (L,B).$$

İspat: $(F,Z) \subseteq (G,B)$ ve $(K,Z) \subseteq (L,B)$ olsun. Buradan, $Z \subseteq B$ ve $\forall \aleph \in Z$ için, $F(\aleph) \subseteq G(\aleph)$ ve $K(\aleph) \subseteq L(\aleph)$. $(F,Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (K,Z) = (W,Z)$ olsun. Böylece, $\forall \aleph \in Z$ için,

$$W(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ K'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F(\aleph) \cup K(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(G,B) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (L,B) = (S,B)$ olsun. Böylece, $\forall \aleph \in B$ için,

$$S(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in B - B = \emptyset \\ L'(\aleph), & \aleph \in B - B = \emptyset \\ G(\aleph) \cup L(\aleph), & \aleph \in B \cap B = B \end{cases}$$

Böylece, $\forall \aleph \in Z$ için, $W(\aleph) = F(\aleph) \cup K(\aleph) \subseteq G(\aleph) \cup L(\aleph) = S(\aleph)$ olup, $(F,Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (K,Z) \subseteq (G,B) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (L,B)$.

20) $(F,Z) \overset{*}{\cap}_\varepsilon [(F,Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G,Z)] = (F,Z)$ ve $(F,Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon [(F,Z) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (G,Z)] = (F,Z)$. (Yutma yasası)

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, Z) = (T, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$ için;

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ G'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ F(x) \cap G(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (T, Z) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$ için;

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ T'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ F(x) \cap T(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Böylece,

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ F(x) \cup [F(x) \cap G(x)], & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan,

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ F(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Böylece, $(M, Z) = (F, Z)$ olup $(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} [(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, Z)] = (F, Z)$.

Benzer şekilde, $(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} [(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\varepsilon} (G, Z)] = (F, Z)$ sağlandığı da gösterilir. Burada, $\overset{*}{\cap}_{\varepsilon}$ işlemi yerine, kısıtlanmış kesişim, yani $\cap_R$, genişletilmiş kesişim yani $\cap_{\varepsilon}$ işlemi, ya da esnek ikili parçalı kesişim işlemi yani $\tilde{\cap}$ de getirilse bu özelliğin sağlanacağı Z, E evrensel kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde bu işlemlerin çakışık olduğundan aşıkardır.

3.4. Teorem $(F, Z), (G, B), (H, S)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş birleşim işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

3.4.1. Teorem $(F, Z), (G, B), (H, S)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş birleşim işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Birleşim İşleminin Kısıtlanmış İşlemler Üzerine Soldan Dağılması

$$1)(Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\cup_\varepsilon}^* [(G, B) \cap_R (H, S)] = [(F, Z)_{\cup_\varepsilon}^* (G, B)] \cup_R [(F, Z)_{\cup_\varepsilon}^* (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, B) \cap_R (H, S) = (M, B \cap S)$ olsun. Burada $\forall x \in B \cap S$; $M(x) = G(x) \cap H(x)$. $(F, Z)_{\cup_\varepsilon}^* (M, B \cap S) = (N, Z \cup (B \cap S))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup (B \cap S)$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cap S) \\ M'(x), & x \in (B \cap S) - Z \\ F(x) \cup M(x), & x \in Z \cap (B \cap S) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cap S) = Z - (B \cap S) \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B \cap S) - Z = Z' \cap B \cap S \\ F(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\cup_\varepsilon}^* (G, B)] \cap_R [(F, Z)_{\cup_\varepsilon}^* (H, S)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\cup_\varepsilon}^* (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in B - Z \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

Şimdi $(F, Z) \underset{\epsilon}{*} (H, Ş) = (W, Z \cup Ş)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup Ş$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Ş \\ H'(x), & x \in Ş - Z \\ F(x) \cup H(x), & x \in Z \cap Ş \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \cap_R (W, Z \cup Ş) = (T, (Z \cup B) \cap (Z \cup Ş))$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup (B \cap Ş)$;
 $T(x) = V(x) \cap W(x)$. Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cap F'(x), & x \in (Z - B) \cap (Z - Ş) = Z \cap B' \cap Ş' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z - B) \cap (Ş - Z) = \emptyset \\ F'(x) \cap (F(x) \cup H(x)), & x \in (Z - B) \cap (Z \cap Ş) = Z \cap B' \cap Ş \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (B - Z) \cap (Z - Ş) = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (B - Z) \cap (Ş - Z) = Z' \cap B \cap Ş \\ G'(x) \cap (F(x) \cup H(x)), & x \in (B - Z) \cap (Z \cap Ş) = \emptyset \\ (F(x) \cup G(x)) \cap F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z - Ş) = Z \cap B \cap Ş' \\ (F(x) \cup G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Ş - Z) = \emptyset \\ (F(x) \cup G(x)) \cap (F(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap Ş) = Z \cap B \cap Ş \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - B) \cap (Z - Ş) = Z \cap B' \cap Ş' \\ F'(x) \cap H(x), & x \in (Z - B) \cap (Z \cap Ş) = Z \cap B' \cap Ş \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (B - Z) \cap (Ş - Z) = Z' \cap B \cap Ş \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z - Ş) = Z \cap B \cap Ş' \\ (F(x) \cup G(x)) \cap (F(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap Ş) = Z \cap B \cap Ş \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki $Z - (B \cap Ş)$ ele alınırsa, $Z - (B \cap Ş) = Z - (B \cap Ş)'$ olup, bir eleman $(B \cap Ş)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $B - Ş$ de, ya $Ş - B$ de, ya da $B \cup Ş$ nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in Z - (B \cap Ş)$ ise $x \in Z \cap B \cap Ş'$ veya $x \in Z \cap B' \cap Ş$ veya $x \in Z \cap B' \cap Ş'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap B \cap Ş = Z \cap B' \cap Ş = Z \cap B \cap Ş' = \emptyset$ ise N ve T fonksiyonları birbirine eşit olur. $Z' \cap B \cap Ş = Z \cap B' \cap Ş = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap Ş = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2)(Z \Delta B) \cap Ş = Z \cap B \cap Ş' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\epsilon}{*} [(G, B) \cup_R (H, Ş)] = [(F, Z) \underset{\epsilon}{*} (G, B)] \cup_R [(F, Z) \underset{\epsilon}{*} (H, Ş)].$$

$$3) (Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\lambda_\epsilon}{*} [(G, B) *_R (H, S)] = [(F, Z) \underset{\lambda_\epsilon}{*} (G, B) \cup_R (F, Z) \underset{\lambda_\epsilon}{*} (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, B) *_R (H, S) = (M, B \cap S)$ olsun. Buradan $\forall x \in B \cap S; \quad M(x) = G'(x) \cup H'(x). \quad (F, Z) \underset{\lambda_\epsilon}{*} (M, B \cap S) = (N, Z \cup (B \cap S))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup (B \cap S);$

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cap S) \\ M'(x), & x \in (B \cap S) - Z \\ F(x) \cup M(x), & x \in Z \cap (B \cap S) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cap S) = Z - (B \cap S) \\ G(x) \cap H(x), & x \in (B \cap S) - Z = Z' \cap B \cap S \\ F(x) \cup (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \underset{\lambda_\epsilon}{*} (G, B)] \cup_R [(F, Z) \underset{\lambda_\epsilon}{*} (H, S)]$ bakalım. $(F, Z) \underset{\lambda_\epsilon}{*} (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup B;$

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in B - Z \\ F(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

Şimdi $(F, Z) \underset{\lambda_\epsilon}{*} (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S;$

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \cup_R (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B) \cap (Z \cup S))$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup (B \cap S);$
 $T(x) = V(x) \cup W(x)$. Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F'(X) \cup F'(X), & X \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(X) \cup H'(X), & X \in (Z-B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ F'(X) \cup (F(X) \cup H'(X)), & X \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(X) \cup F'(X), & X \in (B-Z) \cap (Z-S) = \emptyset \\ G'(X) \cup H'(X), & X \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(X) \cup (F(X) \cup H'(X)), & X \in (B-Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F(X) \cup G'(X)) \cup F'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F(X) \cup G'(X)) \cup H'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ (F(X) \cup G'(X)) \cup (F(X) \cup H'(X)), & X \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Böylece,

$$T(X) = \begin{cases} F'(X), & X \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ U, & X \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(X) \cup H'(X), & X \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ U, & X \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F(X) \cup G'(X)) \cup (F(X) \cup H'(X)), & X \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ ise $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4)(Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{U_\epsilon}{*} [(G, B) \theta_R(H, S)] = [(F, Z) \underset{\lambda_\epsilon}{*} (G, B)] \cap_R [(F, Z) \underset{\lambda_\epsilon}{*} (H, S)].$$

ii) Tümlenli Genişletilmiş Birleşim İşleminin Kısıtlanmış İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1)(Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \cup_R (G, B)] \underset{U_\epsilon}{*} (H, S) = [(F, Z) \underset{U_\epsilon}{*} (H, S)] \cup_R [(G, B) \underset{U_\epsilon}{*} (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \cup_R (G, B) = (M, Z \cap B)$ olsun. Burada $\forall X \in Z \cap B$; $M(X) = F(X) \cup G(X)$. $(M, Z \cap B) \underset{U_\epsilon}{*} (H, S) = (N, (Z \cap B) \cup S)$ olsun. Burada $\forall X \in (Z \cap B) \cup S$;

$$N(X) = \begin{cases} M'(X), & X \in (Z \cap B) - S \\ H'(X), & X \in S - (Z \cap B) \\ M(X) \cup H(X), & X \in Z \cap (B \cap S) \end{cases}$$

Böylece,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap B) - S = Z \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in S - (Z \cap B) = S - (Z \cap B) \\ (F(x) \cup G(x)) \cup H(x), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \cup_{\varepsilon}^* (H, S)] \cup_R [(G, B) \cup_{\varepsilon}^* (H, S)]$ bakalım. $(F, Z) \cup_{\varepsilon}^* (H, S) = (V, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

Şimdi, $(G, B) \cup_{\varepsilon}^* (H, S) = (W, B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in B \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B - S \\ H'(x), & x \in S - B \\ G(x) \cup H(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup S) \cup_R (W, B \cup S) = (T, (Z \cup S) \cap (B \cup S))$ olsun. Burada, $\forall x \in (Z \cap B) \cup S$; $T(x) = V(x) \cup W(x)$.

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z - S) \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - S) \cap (S - B) = \emptyset \\ F'(x) \cup (G(x) \cup H(x)), & x \in (Z - S) \cap (B \cap S) = \emptyset \\ H'(x) \cup G'(x), & x \in (S - Z) \cap (B - S) = \emptyset \\ H'(x) \cup H'(x), & x \in (S - Z) \cap (S - B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(x) \cup (G(x) \cup H(x)), & x \in (S - Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ (F(x) \cup H(x)) \cup G'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (B - S) = \emptyset \\ (F(x) \cup H(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ (F(x) \cup H(x)) \cup (G(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in (Z - \S) \cap (B - \S) = Z \cap B \cap \S' \\ H'(\aleph) & \aleph \in (\S - Z) \cap (\S - B) = Z' \cap B' \cap \S \\ U, & \aleph \in (\S - Z) \cap (B \cap \S) = Z' \cap B \cap \S \\ U, & \aleph \in (Z \cap \S) \cap (\S - B) = Z \cap B' \cap \S \\ F(\aleph) \cup H(\aleph) \cup (G(\aleph) \cup H(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \S) = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, $\S - (Z \cap B)$ 'yi ele alırsak, $\S - (Z \cap B) = \S \cap (Z \cap B)'$ olup, bir eleman $(Z \cap B)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $Z - B$ de, ya $B - Z$ da, ya da $Z \cup B$ nin tümleyenindedir. Burdan, $\aleph \in \S - (Z \cap B)$ ise $\aleph \in \S \cap Z \cap B'$ veya $\aleph \in \S \cap Z' \cap B$ veya $\aleph \in \S \cap Z' \cap B'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap B \cap \S = Z \cap B' \cap \S = Z \cap B \cap \S' = \emptyset$ şartı ile $N = T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap \S = Z \cap B' \cap \S = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta B) \cap \S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2)(Z \Delta B) \cap \S = Z \cap B \cap \S' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \cap_R (G, B)] \overset{*}{\cup}_\epsilon (H, \S) = [(F, Z) \overset{*}{\cup}_\epsilon (H, \S)] \cap_R [(G, B) \overset{*}{\cup}_\epsilon (H, \S)].$$

$$3)(Z \Delta B) \cap \S = Z \cap B \cap \S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \overset{*}{\cup}_\epsilon (G, B) = [(F, Z) \overset{*}{\cup}_\epsilon (H, \S)] \cup_R [(G, B) \overset{*}{\cup}_\epsilon (H, \S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \cap_R (G, B) = (M, Z \cap B)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cap B$; $M(\aleph) = F'(\aleph) \cup G'(\aleph)$. $(M, Z \cap B) \overset{*}{\cup}_\epsilon (H, \S) = (N, (Z \cap B) \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in (Z \cap B) \cup \S$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} M'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - (Z \cap B) \\ M(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap (B \cap \S) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph) \cap G(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - (Z \cap B) \\ (F'(\aleph) \cup G'(\aleph)) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap (B \cap \S) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \overset{*}{\cup}_\epsilon (H, \S)] \cup_R [(G, B) \overset{*}{\cup}_\epsilon (H, \S)]$ bakalım.

$(F, Z) \overset{*}{\cup}_\epsilon (H, \S) = (V, Z \cup \S)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$V(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathfrak{S} - Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$(G, B) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S}) = (W, B \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in B \cup \mathfrak{S}$;

$$W(\mathfrak{K}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B - \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathfrak{S} - B \\ G'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$(V, Z \cup \mathfrak{S}) \cup_R (W, B \cup \mathfrak{S}) = (T, (Z \cup \mathfrak{S}) \cap (B \cup \mathfrak{S}))$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cup \mathfrak{S}$; $T(\mathfrak{K}) = V(\mathfrak{K}) \cup W(\mathfrak{K})$.

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - \mathfrak{S}) \cap (B - \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S} - B) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cup (G'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z - \mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S} - Z) \cap (B - \mathfrak{S}) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S} - Z) \cap (\mathfrak{S} - B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}) \cup (G'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S} - Z) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ (F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cup G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B - \mathfrak{S}) = \emptyset \\ (F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S} - B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ (F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cup (G'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - \mathfrak{S}) \cap (B - \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S} - Z) \cap (\mathfrak{S} - B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ U, & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S} - Z) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ U, & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S} - B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ (F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cup (G'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset$ şartı ile $N = T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) (Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset, (F, Z) \theta_R (G, B) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S}) = [(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S})] \cap_R [(G, B) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S})].$$

3.4.1.1. Not Teorem 3.4.1 deki dağılmalar ve hangi şartlar altında sağlandığı dikkate alınırsa, Z , E parametre kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde aşağıdaki dağılmaların koşulsuz şartsız sağlandığı aşikardır:

- $(F, Z)_{U_\varepsilon}^* [(G, Z) \cap_R (H, Z)] = [(F, Z)_{U_\varepsilon}^* (G, Z)] \cap_R [(F, Z)_{U_\varepsilon}^* (H, Z)]$.
- $[(F, Z) \cap_R (G, Z)]_{U_\varepsilon}^* (H, Z) = [(F, Z)_{U_\varepsilon}^* (H, Z)] \cap_R [(G, Z)_{U_\varepsilon}^* (H, Z)]$.
- $(F, Z)_{U_\varepsilon}^* [(G, Z) \cup_R (H, Z)] = [(F, Z)_{U_\varepsilon}^* (G, Z)] \cup_R [(F, Z)_{U_\varepsilon}^* (H, Z)]$.
- $[(F, Z) \cup_R (G, Z)]_{U_\varepsilon}^* (H, Z) = [(F, Z)_{U_\varepsilon}^* (H, Z)] \cup_R [(G, Z)_{U_\varepsilon}^* (H, Z)]$.

3.4.2. Teorem $(F, Z), (G, B), (H, \mathcal{S}), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş birleşim işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Birleşim İşleminin Genişletilmiş İşlemler Üzerine Soldan Dağılması

$$1) (Z \Delta B) \cap \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S}' = \emptyset, (F, Z)_{U_\varepsilon}^* [(G, B) \cap_\varepsilon (H, \mathcal{S})] = [(F, Z)_{U_\varepsilon}^* (G, B)] \cap_\varepsilon [(F, Z)_{U_\varepsilon}^* (H, \mathcal{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B) \cap_\varepsilon (H, \mathcal{S}) = (M, BU\mathcal{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in BU\mathcal{S}$;

$$M(\mathfrak{N}) = \begin{cases} G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - \mathcal{S} \\ H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in \mathcal{S} - B \\ G(\mathfrak{N}) \cap H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

$(F, Z)_{U_\varepsilon}^* (M, BU\mathcal{S}) = (N, Z \cup (BU\mathcal{S}))$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup (BU\mathcal{S})$;

$$N(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - (BU\mathcal{S}) \\ M'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (BU\mathcal{S}) - Z \\ F(\mathfrak{N}) \cup M(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap (BU\mathcal{S}) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ G'(x), & x \in (B - S) - Z = Z' \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in (S - B) - Z = Z' \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B \cap S) - Z = Z' \cap B \cap S \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F(x) \cup H(x), & x \in Z \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ F(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, B)] \cap_\varepsilon [(F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (H, S)]$ bakalım.

$(F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in B - Z \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \cap_\varepsilon (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B) \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ W(x), & x \in (Z \cup S) - (Z \cup B) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \left\{ \begin{array}{l} F'(\mathfrak{K}), \\ G'(\mathfrak{K}), \\ F(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K}), \\ F'(\mathfrak{K}), \\ H'(\mathfrak{K}), \\ F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K}), \\ F'(\mathfrak{K}) \cap F'(\mathfrak{K}), \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), \\ F'(\mathfrak{K}) \cap (F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), \\ G'(\mathfrak{K}) \cap F'(\mathfrak{K}), \\ G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), \\ G'(\mathfrak{K}) \cap (F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), \\ (F(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K})) \cap F'(\mathfrak{K}), \\ (F(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K})) \cap H'(\mathfrak{K}), \\ (F(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K})) \cap F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K}), \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \mathfrak{K} \in (Z-B) - (Z \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ \mathfrak{K} \in (B-Z) - (Z \cup \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ \mathfrak{K} \in (Z \cap B) - (Z \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) - (Z \cup B) = \emptyset \\ \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) - (Z \cup B) = \emptyset \\ \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z-\mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (\mathfrak{S}-Z) = \emptyset \\ \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (Z-\mathfrak{S}) = \emptyset \\ \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (\mathfrak{S}-Z) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = \emptyset \\ \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{C}' \\ \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (\mathfrak{S}-Z) = \emptyset \\ \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{array}$$

Böylece,

$$T(\mathfrak{K}) = \left\{ \begin{array}{l} G'(\mathfrak{K}), \\ H'(\mathfrak{K}), \\ F'(\mathfrak{K}), \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K}), \\ G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), \\ G(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), \\ (F(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K})) \cap F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K}), \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \mathfrak{K} \in (B-Z) - (Z \cup \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z-\mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (\mathfrak{S}-Z) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{array}$$

$Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) (Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset \quad (F, Z) \underset{\mathfrak{E}}{*} [(G, B) \cup_{\mathfrak{E}} (H, \mathfrak{S})] = [(F, Z) \underset{\mathfrak{E}}{*} (G, B)] \cup_{\mathfrak{E}} [(F, Z) \underset{\mathfrak{E}}{*} (H, \mathfrak{S})].$$

$$3) (Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset, \quad (F, Z) \underset{\mathfrak{E}}{*} [(G, B) *_{\mathfrak{E}} (H, \mathfrak{S})] = [(F, Z) \underset{\lambda_{\mathfrak{E}}}{*} (G, B)] \cup_{\mathfrak{E}} [(F, Z) \underset{\lambda_{\mathfrak{E}}}{*} (H, \mathfrak{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B) *_{\mathfrak{E}} (H, \mathfrak{S}) = (M, B \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in B \cup \mathfrak{S}$;

$$M(x) = \begin{cases} G(x), & x \in B - S \\ H(x), & x \in S - B \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (M, B \cup S) = (N, Z \cup (B \cup S))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cup S) \\ M'(x), & x \in (B \cup S) - Z \\ F(x) \cup M(x), & x \in Z \cap (B \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ G'(x), & x \in (B - S) - Z = Z' \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in (S - B) - Z = Z' \cap B' \cap S \\ G(x) \cap H(x), & x \in (B \cap S) - Z = Z' \cap B \cap S \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F(x) \cup H(x), & x \in Z \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ F(x) \cup (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \overset{*}{\lambda}_{\varepsilon} (G, B)] \cup_{\varepsilon} [(F, Z) \overset{*}{\lambda}_{\varepsilon} (H, S)]$ bakalım.

$(F, Z) \overset{*}{\lambda}_{\varepsilon} (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in B - Z \\ F(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{\lambda}_{\varepsilon} (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \cup_{\varepsilon} (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B) \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$T(X) = \begin{cases} V(X), & X \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ W(X), & X \in (Z \cup S) - (Z \cup B) \\ V(X) \cap W(X), & X \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F'(X), & X \in (Z-B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G'(X), & X \in (B-Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(X) \cap G(X), & X \in (Z \cap B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F'(X), & X \in (Z-S) - (Z \cup B) = \emptyset \\ H'(X), & X \in (S-Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F(X) \cup H'(X), & X \in (Z \cap S) - (Z \cup B) = \emptyset \\ F'(X) \cup F'(X), & X \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(X) \cup H'(X), & X \in (Z-B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ F'(X) \cup (F(X) \cup H'(X)), & X \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(X) \cup F'(X), & X \in (B-Z) \cap (Z-S) = \emptyset \\ G'(X) \cup H'(X), & X \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(X) \cup (F(X) \cup H'(X)), & X \in (B-Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F(X) \cup G'(X)) \cup F'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F(X) \cup G'(X)) \cup H'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ (F(X) \cup G'(X)) \cup (F(X) \cup H'(X)), & X \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Böylece,

$$T(X) = \begin{cases} G'(X), & X \in (B-Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ H'(X), & X \in (S-Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F'(X), & X \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ U, & X \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(X) \cup H'(X), & X \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ U, & X \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F(X) \cup G'(X)) \cup (F(X) \cup H'(X)), & X \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4)(Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset, (F, Z) \underset{U_\varepsilon}{*} [(G, B) \theta_\varepsilon (H, S)] = [(F, Z) \underset{\lambda_\varepsilon}{*} (G, B)] \cap_\varepsilon [(F, Z) \underset{\lambda_\varepsilon}{*} (H, S)].$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Birleşim İşleminin Genişletilmiş İşlemler Üzerine Sağdan Dağılıması

$$1) Z \Delta B \cap \S = Z \cap B \cap \S' = \emptyset, [(F, Z) \cup_{\varepsilon} (G, B)] \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \S) = [(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \S)] \cup_{\varepsilon} [(G, B) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \cup_{\varepsilon} (G, B) = (M, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$M(x) = \begin{cases} F(x), & x \in Z - B \\ G(x), & x \in B - Z \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$$(M, Z \cup B) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \S) = (N, (Z \cup B) \cup \S) \text{ olsun. Burada } \forall x \in Z \cup B \cup \S;$$

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in (Z \cup B) - \S \\ H'(x), & x \in \S - (Z \cup B) \\ M(x) \cup H(x), & x \in (Z \cup B) \cap \S \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - B) - \S = Z \cap B' \cap \S' \\ G'(x), & x \in (B - Z) - \S = Z' \cap B \cap \S' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap B) - \S = Z \cap B \cap \S' \\ H'(x), & x \in \S - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \S \\ F(x) \cup H(x), & x \in (Z - B) \cap \S = Z \cap B' \cap \S \\ G(x) \cup H(x), & x \in (B - Z) \cap \S = Z' \cap B \cap \S \\ (F(x) \cup G(x)) \cup H(x), & x \in (Z \cap B) \cap \S = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \S)] \cup_{\varepsilon} [(G, B) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \S)]$ bakalım. $(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \S) = (V, Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup \S$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - \S \\ H'(x), & x \in \S - Z \\ F(x) \cup H(x), & x \in Z \cap \S \end{cases}$$

$(G, B) \stackrel{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, S) = (W, BU\mathcal{S})$ olsun. Burada $\forall \mathcal{N} \in BU\mathcal{S}$;

$$W(\mathcal{N}) = \begin{cases} G'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in B - \mathcal{S} \\ H'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in \mathcal{S} - B \\ G(\mathcal{N}) \cup H(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

$(V, Z \cup \mathcal{S}) \cup_{\varepsilon} (W, BU\mathcal{S}) = (T, Z \cup BU\mathcal{S})$ olsun. Burada $\forall \mathcal{N} \in Z \cup BU\mathcal{S}$;

$$T(\mathcal{N}) = \begin{cases} V(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z \cup \mathcal{S}) - (BU\mathcal{S}) \\ W(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (BU\mathcal{S}) - (Z \cup \mathcal{S}) \\ V(\mathcal{N}) \cup W(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z \cup \mathcal{S}) \cap (BU\mathcal{S}) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathcal{N}) = \begin{cases} F'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z - \mathcal{S}) - (BU\mathcal{S}) = Z \cap B' \cap \mathcal{S}' \\ H'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (\mathcal{S} - Z) - (BU\mathcal{S}) = \emptyset \\ F(\mathcal{N}) \cup H(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z \cap \mathcal{S}) - (BU\mathcal{S}) = \emptyset \\ G'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (B - \mathcal{S}) - (Z \cup \mathcal{S}) = Z' \cap B \cap \mathcal{S}' \\ H'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (\mathcal{S} - B) - (Z \cup \mathcal{S}) = \emptyset \\ G(\mathcal{N}) \cup H(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (B \cap \mathcal{S}) - (Z \cup \mathcal{S}) = \emptyset \\ F'(\mathcal{N}) \cup G'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z - \mathcal{S}) \cap (B - \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ F'(\mathcal{N}) \cup H'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z - \mathcal{S}) \cap (\mathcal{S} - B) = \emptyset \\ F'(\mathcal{N}) \cup (G(\mathcal{N}) \cup H(\mathcal{N})), & \mathcal{N} \in (Z - \mathcal{S}) \cap (B \cap \mathcal{S}) = \emptyset \\ H'(\mathcal{N}) \cup G'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (\mathcal{S} - Z) \cap (B - \mathcal{S}) = \emptyset \\ H'(\mathcal{N}) \cup H'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (\mathcal{S} - Z) \cap (\mathcal{S} - B) = Z' \cap B' \cap \mathcal{S}' \\ H'(\mathcal{N}) \cup (G(\mathcal{N}) \cup H(\mathcal{N})), & \mathcal{N} \in (\mathcal{S} - Z) \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z' \cap B \cap \mathcal{S}' \\ (F(\mathcal{N}) \cup H(\mathcal{N})) \cup G'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z \cap \mathcal{S}) \cap (B - \mathcal{S}) = \emptyset \\ (F(\mathcal{N}) \cup H(\mathcal{N})) \cup H'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z \cap \mathcal{S}) \cap (\mathcal{S} - B) = Z \cap B' \cap \mathcal{S}' \\ (F(\mathcal{N}) \cup H(\mathcal{N})) \cup (G(\mathcal{N}) \cup H(\mathcal{N})), & \mathcal{N} \in (Z \cap \mathcal{S}) \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S})-(B \cup \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-\mathfrak{S})-(Z \cup \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ U, & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ U, & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K}) \cup (G(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2)(Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset, [(F, Z) \cap_{\varepsilon} (G, B)] \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S}) = [(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S})] \cap_{\varepsilon} [(G, B) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S})].$$

$$3)(Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \theta_{\varepsilon} (G, B)] \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S}) = [(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S})] \cap_{\varepsilon} [(G, B) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \theta_{\varepsilon} (G, B) = (M, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup B$;

$$M(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z-B \\ G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B-Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap B \end{cases}$$

$$(M, Z \cup B) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S}) = (N, (Z \cup B) \cup \mathfrak{S}) \text{ olsun. Burada } \forall \mathfrak{K} \in Z \cup B \cup \mathfrak{S};$$

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} M'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup B) - \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathfrak{S} - (Z \cup B) \\ M(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup B) \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in (Z-B) - \S = Z \cap B' \cap \S' \\ G'(\aleph), & \aleph \in (B-Z) - \S = Z' \cap B \cap \S' \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) - \S = Z \cap B \cap \S' \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \S \\ F(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in (Z-B) \cap \S = Z \cap B' \cap \S \\ G(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in (B-Z) \cap \S = Z' \cap B \cap \S \\ (F'(\aleph) \cap G'(\aleph)) \cup H(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) \cap \S = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{+}^{*}(H, \S)] \cap_{\varepsilon} [(G, B)_{+}^{*}(H, \S)]$ bakalım. $(F, Z)_{+}^{*}(H, \S) = (V, Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - Z \\ F'(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap \S \end{cases}$$

$(G, B)_{+}^{*}(H, \S) = (W, B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in B \cup \S$;

$$W(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in B - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - B \\ G'(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in B \cap \S \end{cases}$$

$(V, Z \cup \S) \cap_{\varepsilon} (W, B \cup \S) = (T, Z \cup B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup B \cup \S$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} V(\aleph), & \aleph \in (Z \cup \S) - (B \cup \S) \\ W(\aleph), & \aleph \in (B \cup \S) - (Z \cup \S) \\ V(\aleph) \cap W(\aleph), & \aleph \in (Z \cup \S) \cap (B \cup \S) \end{cases}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
T(X) = \begin{cases} F'(X), \\ H'(X), \\ F(X) \cap H'(X), \\ G'(X), \\ H'(X), \\ G(X) \cap H'(X), \\ F'(X) \cap G'(X), \\ F'(X) \cap H'(X), \\ F'(X) \cap (G'(X) \cup H(X)) \\ H'(X) \cap G'(X), \\ H'(X) \cap H'(X), \\ H'(X) \cap (G'(X) \cup H(X)) \\ (F'(X) \cup H(X)) \cap G'(X), \\ (F'(X) \cup H(X)) \cap H'(X) \\ F'(X) \cup H(X) \cap (G'(X) \cup H(X)) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& X \in (Z - S) - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\
& X \in (S - Z) - (B \cup S) = \emptyset \\
& X \in (Z \cap S) - (B \cup S) = \emptyset \\
& X \in (B - S) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\
& X \in (S - B) - (Z \cup S) = \emptyset \\
& X \in (B \cap S) - (Z \cup S) = \emptyset \\
& X \in (Z - S) \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\
& X \in (Z - S) \cap (S - B) = \emptyset \\
& X \in (Z - S) \cap (B \cap S) = \emptyset \\
& X \in (S - Z) \cap (B - S) = \emptyset \\
& X \in (S - Z) \cap (S - B) = Z' \cap B' \cap S \\
& X \in (S - Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\
& X \in (Z \cap S) \cap (B - S) = \emptyset \\
& X \in (Z \cap S) \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\
& X \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(X) = \begin{cases} F'(X), \\ G'(X), \\ F'(X) \cap G'(X), \\ H'(X), \\ H'(X) \cap G'(X), \\ F'(X) \cap G'(X) \\ F'(X) \cup H(X) \cap (G'(X) \cup H(X)) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& X \in (Z - S) - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\
& X \in (B - S) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\
& X \in (Z - S) \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\
& X \in (S - Z) \cap (S - B) = Z' \cap B' \cap S \\
& X \in (S - Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\
& X \in (Z \cap S) \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\
& X \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S
\end{aligned}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta B) \cap S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4)(Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) *_{\epsilon} (G, B)] *_{\cup_{\epsilon}}^* (H, S) = [(F, Z) *_{+_{\epsilon}}^* (H, S)] \cup_{\epsilon} [(G, B) *_{+_{\epsilon}}^* (H, S)].$$

3.4.2.1. Not Teorem 3.4.2 deki dağılmalar ve hangi şartlar altında sağlandığı dikkate alınırsa, Z , E parametre kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde aşağıdaki dağılmaların koşulsuz şartsız sağlandığı aşikardır:

- $(F, Z) *_{\cup_{\epsilon}}^* [(G, Z) \cap_{\epsilon} (H, Z)] = [(F, Z) *_{\cup_{\epsilon}}^* (G, Z)] \cap_{\epsilon} [(F, Z) *_{\cup_{\epsilon}}^* (H, Z)].$
- $[(F, Z) \cap_{\epsilon} (G, Z)] *_{\cup_{\epsilon}}^* (H, Z) = [(F, Z) *_{\cup_{\epsilon}}^* (H, Z)] \cap_{\epsilon} [(G, Z) *_{\cup_{\epsilon}}^* (H, Z)].$

- $(F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* [(G, Z) \cup_{\varepsilon} (H, Z)] = [(F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* (G, Z)] \cup_{\varepsilon} [(F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* (H, Z)].$
- $[(F, Z) \cup_{\varepsilon} (G, Z)]_{\cup_{\varepsilon}}^* (H, Z) = [(F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* (H, Z)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* (H, Z)].$

3.4.3. Teorem $(F, Z), (G, B), (H, S), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş birleşim işleminin tümleyenli genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Birleşim İşleminin Tümleyenli Genişletilmiş İşlemler Üzerine Soldan Dağılımı

$$1) (Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* [(G, B)_{\cap_{\varepsilon}}^* (H, S)] = [(F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* (G, B)]_{\cap_{\varepsilon}}^* [(F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B)_{\cap_{\varepsilon}}^* ((H, S) = (M, B \cup S))$ olsun. Burada $\forall x \in B \cup S$;

$$M(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B - S \\ H'(x), & x \in S - B \\ G(x) \cap H(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* (M, B \cup S) = (N, Z \cup (B \cup S))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cup S) \\ M'(x), & x \in (B \cup S) - Z \\ F(x) \cup M(x), & x \in Z \cap (B \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ G(x), & x \in (B - S) - Z = Z' \cap B \cap S' \\ H(x), & x \in (S - B) - Z = Z' \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B \cap S) - Z = Z' \cap B \cap S \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F(x) \cup H(x), & x \in Z \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ F(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\cup_\varepsilon}^* (G, B)]_{\cap_\varepsilon}^* [(F, Z)_{\cup_\varepsilon}^* (H, S)]$ bakalım. $(F, Z)_{\cup_\varepsilon}^* (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in B - Z \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z)_{\cup_\varepsilon}^* (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B)_{\cap_\varepsilon}^* (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B) \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in (Z \cup B) \cup S$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ W'(x), & x \in (Z \cup S) - (Z \cup B) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) - (Z \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) - (Z \cup \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) - (Z \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ F(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) - (Z \cup B) = \emptyset \\ H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) - (Z \cup B) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z-\mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (\mathfrak{S}-Z) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap (F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{K}) \cap F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (Z-\mathfrak{S}) = \emptyset \\ G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (\mathfrak{S}-Z) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{K}) \cap (F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = \emptyset \\ (F(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K})) \cap F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ (F(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K})) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (\mathfrak{S}-Z) = \emptyset \\ (F(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K})) \cap (F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) - (Z \cup \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{K}) & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z-\mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K}) & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (\mathfrak{S}-Z) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{K}) \cap F'(\mathfrak{K}) & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ (F(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K})) \cap (F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\cup_{\mathfrak{E}}}^* [(G, B)_{\cup_{\mathfrak{E}}}^* (H, \mathfrak{S})] = [(F, Z)_{\cup_{\mathfrak{E}}}^* (G, B)]_{\cup_{\mathfrak{E}}}^* [(F, Z)_{\cup_{\mathfrak{E}}}^* (H, \mathfrak{S})].$$

$$3) (Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\cup_{\mathfrak{E}}}^* [(G, B)_{\cup_{\mathfrak{E}}}^* (H, \mathfrak{S})] = [(F, Z)_{\lambda_{\mathfrak{E}}}^* (G, B)]_{\cup_{\mathfrak{E}}}^* [(F, Z)_{\lambda_{\mathfrak{E}}}^* (H, \mathfrak{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B)_{\cup_{\mathfrak{E}}}^* (H, \mathfrak{S}) = (M, B \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in B \cup \mathfrak{S}$;

$$M(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B - S \\ H'(x), & x \in S - B \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{\cup_\varepsilon}{*} (M, B \cup S) = (N, Z \cup (B \cup S))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cup S) \\ M'(x), & x \in (B \cup S) - Z \\ F(x) \cup M(x), & x \in Z \cap (B \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ G(x), & x \in (B - S) - Z = Z' \cap B \cap S' \\ H(x), & x \in (S - B) - Z = Z' \cap B' \cap S \\ G(x) \cap H(x), & x \in (B \cap S) - Z = Z' \cap B \cap S \\ F(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ F(x) \cup (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \underset{\lambda_\varepsilon}{*} (G, B)] \underset{\cup_\varepsilon}{*} [(F, Z) \underset{\lambda_\varepsilon}{*} (H, S)]$ bakalım. $(F, Z) \underset{\setminus_\varepsilon}{*} (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in B - Z \\ F(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{\setminus_\varepsilon}{*} (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \underset{\cup_\varepsilon}{*} (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B) \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$T(X) = \begin{cases} V'(X), & X \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ W'(X), & X \in (Z \cup S) - (Z \cup B) \\ V(X) \cup W(X), & X \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F(X), & X \in (Z - B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G(X), & X \in (B - Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(X) \cap G(X), & X \in (Z \cap B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F(X), & X \in (Z - S) - (Z \cup B) = \emptyset \\ H(X), & X \in (S - Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F'(X) \cap H(X), & X \in (Z \cap S) - (Z \cup B) = \emptyset \\ F'(X) \cup F'(X), & X \in (Z - B) \cap (Z - S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(X) \cup H'(X), & X \in (Z - B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ F'(X) \cup (F(X) \cup H(X)), & X \in (Z - B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(X) \cup F'(X), & X \in (B - Z) \cap (Z - S) = \emptyset \\ G'(X) \cup H'(X), & X \in (B - Z) \cap (S - Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(X) \cup (F(X) \cup H(X)), & X \in (B - Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F(X) \cup G'(X)) \cup F'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (Z - S) = Z \cap B \cap S' \\ (F(X) \cup G'(X)) \cup H'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ (F(X) \cup G'(X)) \cup F(X) \cup H'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} G(X), & X \in (B - Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ H(X), & X \in (S - Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F(X), & X \in (Z - B) \cap (Z - S) = Z \cap B' \cap S' \\ U, & X \in (Z - B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(X) \cup H'(X), & X \in (B - Z) \cap (S - Z) = Z' \cap B \cap S \\ U, & X \in (Z \cap B) \cap (Z - S) = Z \cap B \cap S' \\ (F(X) \cup G'(X)) \cup F(X) \cup H'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta B) \cap S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) (Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{U_\epsilon}^* [(G, B)_{\theta_\epsilon}^* (H, S)] = [(F, Z)_{\lambda_\epsilon}^* (G, B)]_{\cap_\epsilon}^* [(F, Z)_{\lambda_\epsilon}^* (H, S)].$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Birleşim İşleminin Tümleyenli Genişletilmiş İşlemler Üzerine Soldan Dağılması

$$1)(Z \Delta B) \cap \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S}' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} (G, B)] \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} (H, \mathcal{S}) = [(F, Z) \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} (H, \mathcal{S})] \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} [(G, B) \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} (H, \mathcal{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} (G, B) = (M, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \mathcal{N} \in Z \cup B$;

$$M(\mathcal{N}) = \begin{cases} F'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in Z - B \\ G'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in B - Z \\ F(\mathcal{N}) \cup G(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in Z \cap B \end{cases}$$

$(M, Z \cup B) \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} (H, \mathcal{S}) = (N, (Z \cup B) \cup \mathcal{S})$ olsun. Burada $\forall \mathcal{N} \in Z \cup B \cup \mathcal{S}$;

$$N(\mathcal{N}) = \begin{cases} M'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z \cup B) - \mathcal{S} \\ H'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in \mathcal{S} - (Z \cup B) \\ M(\mathcal{N}) \cup H(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z \cup B) \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\mathcal{N}) = \begin{cases} F(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z - B) - \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S}' \\ G(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (B - Z) - \mathcal{S} = Z' \cap B \cap \mathcal{S}' \\ F'(\mathcal{N}) \cap G'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z \cap B) - \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ H'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in \mathcal{S} - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \mathcal{S} \\ F'(\mathcal{N}) \cup H(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z - B) \cap \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S} \\ G'(\mathcal{N}) \cup H(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (B - Z) \cap \mathcal{S} = Z' \cap B \cap \mathcal{S} \\ (F(\mathcal{N}) \cup G(\mathcal{N})) \cup H(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z \cap B) \cap \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} (H, \mathcal{S})] \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} [(G, B) \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} (H, \mathcal{S})]$ bakalım. $(F, Z) \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} (H, \mathcal{S}) = (V, Z \cup \mathcal{S})$ olsun. Burada $\forall \mathcal{N} \in Z \cup \mathcal{S}$;

$$V(\mathcal{N}) = \begin{cases} F'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in Z - \mathcal{S} \\ H'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in \mathcal{S} - Z \\ F(\mathcal{N}) \cup H(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in Z \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

$(G, B) \underset{\varepsilon}{*} (H, \S) = (W, B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in B \cup \S$;

$$W(\mathfrak{N}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - \S \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in \S - B \\ G(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B \cap \S \end{cases}$$

$(V, Z \cup \S) \underset{\varepsilon}{*} (W, B \cup \S) = (T, Z \cup B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B \cup \S$;

$$T(\mathfrak{N}) = \begin{cases} V'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cup \S) - (B \cup \S) \\ W'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B \cup \S) - (Z \cup \S) \\ V(\mathfrak{N}) \cup W(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cup \S) \cap (B \cup \S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z - \S) - (B \cup \S) = Z \cap B' \cap \S' \\ H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (\S - Z) - (B \cup \S) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{N}) \cap H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap \S) - (B \cup \S) = \emptyset \\ G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B - \S) - (Z \cup \S) = Z' \cap B \cap \S' \\ H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (\S - B) - (Z \cup \S) = \emptyset \\ G'(\mathfrak{N}) \cap H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B \cap \S) - (Z \cup \S) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{N}) \cup G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z - \S) \cap (B - \S) = Z \cap B \cap \S' \\ F'(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z - \S) \cap (\S - B) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{N}) \cup (G(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in (Z - \S) \cap (B \cap \S) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{N}) \cup G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (\S - Z) \cap (B - \S) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (\S - Z) \cap (\S - B) = Z' \cap B' \cap \S \\ H'(\mathfrak{N}) \cup (G(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in (\S - Z) \cap (B \cap \S) = Z' \cap B \cap \S \\ (F(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N})) \cup G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap \S) \cap (B - \S) = \emptyset \\ (F(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N})) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap \S) \cap (\S - B) = Z \cap B' \cap \S \\ (F(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N})) \cup (G(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in (Z \cap \S) \cap (B \cap \S) = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in (Z-\aleph) - (B \cup \aleph) = Z \cap B' \cap \aleph' \\ G(\aleph), & \aleph \in (B-\aleph) - (Z \cup \aleph) = Z' \cap B \cap \aleph' \\ F'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in (Z-\aleph) \cap (B-\aleph) = Z \cap B \cap \aleph' \\ H'(\aleph), & \aleph \in (\aleph-Z) \cap (\aleph-B) = Z' \cap B' \cap \aleph \\ U, & \aleph \in (\aleph-Z) \cap (B \cap \aleph) = Z' \cap B \cap \aleph \\ U, & \aleph \in (Z \cap \aleph) \cap (\aleph-B) = Z \cap B' \cap \aleph \\ (F(\aleph) \cup H(\aleph)) \cup (G(\aleph) \cup H(\aleph)) & \aleph \in (Z \cap \aleph) \cap (B \cap \aleph) = Z \cap B \cap \aleph \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap \aleph = Z \cap B' \cap \aleph = Z \cap B \cap \aleph' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap B \cap \aleph = Z \cap B' \cap \aleph = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap \aleph$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) (Z \Delta B) \cap \aleph = Z \cap B \cap \aleph' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z)_{\cap \aleph}^* (G, B)]_{\cup \aleph}^* (H, \aleph) = [(F, Z)_{\cup \aleph}^* (H, \aleph)]_{\cap \aleph}^* [(G, B)_{\cup \aleph}^* (H, \aleph)].$$

$$3) (Z \Delta B) \cap \aleph = Z \cap B \cap \aleph' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z)_{\theta \aleph}^* (G, B)]_{\cup \aleph}^* (H, \aleph) = [(F, Z)_{\lambda \aleph}^* (H, \aleph)]_{\cap \aleph}^* [(G, B)_{\lambda \aleph}^* (H, \aleph)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z)_{\theta \aleph}^* (G, B) = (M, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-B \\ G'(\aleph), & \aleph \in B-Z \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$$(M, Z \cup B)_{\cup \aleph}^* (H, \aleph) = (N, (Z \cup B) \cup \aleph) \text{ olsun. Burada } \forall \aleph \in Z \cup B \cup \aleph;$$

$$N(\aleph) = \begin{cases} M'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup B) - \aleph \\ H'(\aleph), & \aleph \in \aleph - (Z \cup B) \\ M(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in (Z \cup B) \cap \aleph \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-B) - S = Z \cap B' \cap S' \\ G(x), & x \in (B-Z) - S = Z' \cap B \cap S' \\ F(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap B) - S = Z \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in S - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-B) \cap S = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B-Z) \cap S = Z' \cap B \cap S \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap B) \cap S = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \stackrel{*}{\lambda_\varepsilon} (H, S)] \stackrel{*}{\cap_\varepsilon} [(G, B) \stackrel{*}{\lambda_\varepsilon} (H, S)]$ bakalım. $(F, Z) \stackrel{*}{\lambda_\varepsilon} (H, S) = (V, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(G, B) \stackrel{*}{\lambda_\varepsilon} (H, S) = (W, B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in B \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B - S \\ H'(x), & x \in S - B \\ G(x) \cup H'(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup S) \stackrel{*}{\cap_\varepsilon} (W, B \cup S) = (T, Z \cup B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup S) - (B \cup S) \\ W'(x), & x \in (B \cup S) - (Z \cup S) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup S) \cap (B \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S})-(B \cup \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z)-(B \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S})-(B \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-\mathfrak{S})-(Z \cup \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-B)-(Z \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ G'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B \cap \mathfrak{S})-(Z \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap (G(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B-\mathfrak{S}) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}) \cap (G(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ (F(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K})) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = \emptyset \\ (F(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K})) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ (F(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K})) \cap (G(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S})-(B \cup \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-\mathfrak{S})-(Z \cup \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ (F(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K})) \cap (G(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap \mathfrak{S}$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4)(Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset, [(F, Z) \overset{*}{*}_{\varepsilon} (G, B)] \overset{*}{*}_{\cup_{\varepsilon}} (H, \mathfrak{S}) = [(F, Z) \overset{*}{*}_{+\varepsilon} (H, \mathfrak{S})] \overset{*}{*}_{\cup_{\varepsilon}} [(G, B) \overset{*}{*}_{+\varepsilon} (H, \mathfrak{S})].$$

3.4.3.1. Not Teorem 3.4.3 deki dağılmalar ve hangi şartlar altında sağlandığı dikkate alınırsa, Z , E parametre kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde aşağıdaki dağılmaların koşulsuz şartsız sağlandığı aşıkardır:

- $(F, Z) \overset{*}{*}_{\cup_{\varepsilon}} [(G, Z) \overset{*}{*}_{\cap_{\varepsilon}} (H, Z)] = [(F, Z) \overset{*}{*}_{\cup_{\varepsilon}} (G, Z)] \overset{*}{*}_{\cap_{\varepsilon}} [(F, Z) \overset{*}{*}_{\cup_{\varepsilon}} (H, Z)].$

- $[(F,Z) \cap_{\varepsilon}^* (G,Z)] \cap_{\varepsilon}^* (H,Z) = [(F,Z) \cap_{\varepsilon}^* (H,Z)] \cap_{\varepsilon}^* [(G,Z) \cap_{\varepsilon}^* (H,Z)].$
- $(F,Z) \cap_{\varepsilon}^* [(G,Z) \cap_{\varepsilon}^* (H,Z)] = [(F,Z) \cap_{\varepsilon}^* (G,Z)] \cap_{\varepsilon}^* [(F,Z) \cap_{\varepsilon}^* (H,Z)].$
- $[(F,Z) \cap_{\varepsilon}^* (G,Z)] \cap_{\varepsilon}^* (H,Z) = [(F,Z) \cap_{\varepsilon}^* (H,Z)] \cap_{\varepsilon}^* [(G,Z) \cap_{\varepsilon}^* (H,Z)].$

3.4.4. Teorem $(F,Z), (G,B), (H,\S), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş birleşim işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Birleşim İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Soldan Dağılımı

$$1)(Z \Delta B) \cap \S = Z \cap B \cap \S' = \emptyset \text{ ise } (F,Z) \cap_{\varepsilon}^* [(G,B) \cap (H,\S)] = [(F,Z) \cap_{\varepsilon}^* (G,B)] \cap [(F,Z) \cap_{\varepsilon}^* (H,\S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G,B) \cap (H,\S) = (M,B)$ olsun. Buradan $\forall \aleph \in B$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} G(\aleph), & \aleph \in B - \S \\ G(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in B \cap \S \end{cases}$$

$(F,Z) \cap_{\varepsilon}^* (M,B) = (N,Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ M'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F(\aleph) \cup M(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G'(\aleph), & \aleph \in (B - \S) - Z = Z' \cap B \cap \S' \\ G'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (B \cap \S) - Z = Z' \cap B \cap \S \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap (B - \S) = Z \cap B \cap \S' \\ F(\aleph) \cup (G(\aleph) \cap H(\aleph)), & \aleph \in Z \cap (B \cap \S) = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \underset{\epsilon}{*} (G, B)] \underset{\sim}{\cap} [(F, Z) \underset{\epsilon}{*} (H, S)]$ bakalım.

$(F, Z) \underset{\epsilon}{*} (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in B - Z \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{\epsilon}{*} (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \underset{\sim}{\cap} (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (B - Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F'(x) \cap F'(x), & x \in (Z - B) \cap (Z - S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z - B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ F'(x) \cap (F(x) \cup H(x)), & x \in (Z - B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (B - Z) \cap (Z - S) = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (B - Z) \cap (S - Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(x) \cap (F(x) \cup H(x)), & x \in (B - Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F(x) \cup G(x)) \cap F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z - S) = Z \cap B \cap S' \\ (F(x) \cup G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ (F(x) \cup G(x)) \cap (F(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in (B-Z) - (Z \cup \S) = Z' \cap B \cap \S' \\ F'(\aleph), & \aleph \in (Z-B) \cap (Z-\S) = Z \cap B' \cap \S' \\ F'(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in (Z-B) \cap (Z \cap \S) = Z \cap B' \cap \S \\ G'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (B-Z) \cap (\S-Z) = Z' \cap B \cap \S \\ G(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) \cap (Z-\S) = Z \cap B \cap \S' \\ (F(\aleph) \cup G(\aleph)) \cap (F(\aleph) \cup H(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \S) = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, Z-B ele alırsak, Z-B=Z∩B' olup, bir eleman B nin tümleyeninde ise o eleman ya Ş-B de, ya da B∪Ş nin tümleyenindedir. Burdan, $\aleph \in \S-B$ ise $\aleph \in Z \cap B' \cap \S$ veya $\aleph \in Z \cap B' \cap \S'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap B \cap \S = Z \cap B' \cap \S = Z \cap B \cap \S' = \emptyset$ şartı ile N=T olduğu görülür. $Z' \cap B \cap \S = Z \cap B' \cap \S = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap \S$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta B) \cap \S = Z \cap B \cap \S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\cup_\epsilon}{*} [(G, B) \underset{\cup}{\sim} (H, \S)] = [(F, Z) \underset{\cup_\epsilon}{*} (G, B)] \underset{\cup}{\sim} [(F, Z) \underset{\cup_\epsilon}{*} (H, \S)].$$

$$3) (Z \Delta B) \cap C = Z \cap B \cap \S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\cup_\epsilon}{*} [(G, B) \underset{*}{\sim} (H, \S)] = [(F, Z) \underset{\lambda_\epsilon}{*} (G, B)] \underset{\cup}{\sim} [(F, Z) \underset{\lambda_\epsilon}{*} (H, \S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B) \underset{*}{\sim} (H, \S) = (M, B)$ olsun. Buradan $\forall \aleph \in B$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} G(\aleph), & \aleph \in B - \S \\ G'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in B \cap \S \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{\cup_\epsilon}{*} (M, B) = (N, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ M'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F(\aleph) \cup M(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-B \\ G'(x), & x \in (B-S)-Z = Z' \cap B \cap S' \\ G(x) \cap H(x), & x \in (B \cap S)-Z = Z' \cap B \cap S \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap (B-S) = Z \cap B \cap S' \\ F(x) \cup (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\lambda_\varepsilon}^*(G, B)] \sim [(F, Z)_{\lambda_\varepsilon}^*(H, S)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\lambda_\varepsilon}^*(G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-B \\ G'(x), & x \in B-Z \\ F(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z)_{\lambda_\varepsilon}^*(H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-S \\ H'(x), & x \in S-Z \\ F(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \sim (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cup F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cup (F(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(\mathfrak{K}) \cup F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (Z-S) = \emptyset \\ G'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(\mathfrak{K}) \cup (F(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K})) \cup F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K})) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ (F(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K})) \cup (F(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ U, & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ U, & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K})) \cup (F(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap S$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) (Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\epsilon}{\cap}^* [(G, B) \underset{\theta}{\sim} (H, S)] = [(F, Z) \underset{\lambda_\epsilon}{\cap}^* (G, B)] \underset{\cap}{\sim} [(F, Z) \underset{\lambda_\epsilon}{\cap}^* (H, S)].$$

ii) Tümlenli Genişletilmiş Birleşim İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) (Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\cup}{\sim} (G, B) \underset{\cup_\epsilon}{\cap}^* (H, S) = [(F, Z) \underset{\cap_\epsilon}{\cap}^* (H, S)] \underset{\cup}{\sim} [(G, B) \underset{\cup_\epsilon}{\cap}^* (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \underset{\cup}{\sim} (G, B) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z$,

$$M(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z-B \\ F(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap B \end{cases}$$

$(M, Z) \stackrel{*}{\cup} (H, \mathfrak{S}) = (N, Z \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup \mathfrak{S}$;

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} M'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathfrak{S} - Z \\ M(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) - \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) - \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathfrak{S} - Z \\ F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ (F(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K})) \cup H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z) \stackrel{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S})] \widetilde{\cup} [(G, B) \stackrel{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S})]$.

$(F, Z) \stackrel{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S}) = (V, Z \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup \mathfrak{S}$;

$$V(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathfrak{S} - Z \\ F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Şimdi $(G, B) \stackrel{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S}) = (W, B \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in B \cup \mathfrak{S}$;

$$W(\mathfrak{K}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B - \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathfrak{S} - B \\ G(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$(V, Z \cup \mathfrak{S}) \widetilde{\cup} (W, B \cup \mathfrak{S}) = (T, (Z \cup \mathfrak{S}))$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup \mathfrak{S}$;

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} V(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup \mathfrak{S}) - (B \cup \mathfrak{S}) \\ V(\mathfrak{K}) \cup W(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup \mathfrak{S}) \cap (B \cup \mathfrak{S}) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in (Z-\aleph) - (B \cup \aleph) = Z \cap B' \cap \aleph' \\ H'(\aleph), & \aleph \in (\aleph-Z) - (B \cup \aleph) = \emptyset \\ F(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in (Z \cap \aleph) - (B \cup \aleph) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in (Z-\aleph) \cap (B-\aleph) = Z \cap B \cap \aleph' \\ F'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (Z-\aleph) \cap (\aleph-B) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup (G(\aleph) \cup H(\aleph)), & \aleph \in (Z-\aleph) \cap (B \cap \aleph) = \emptyset \\ H'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in (\aleph-Z) \cap (B-\aleph) = \emptyset \\ H'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (\aleph-Z) \cap (\aleph-B) = Z' \cap B' \cap \aleph \\ H'(\aleph) \cup (G(\aleph) \cup H(\aleph)), & \aleph \in (\aleph-Z) \cap (B \cap \aleph) = Z' \cap B \cap \aleph \\ (F(\aleph) \cup H(\aleph)) \cup G'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap \aleph) \cap (B-\aleph) = \emptyset \\ (F(\aleph) \cup H(\aleph)) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap \aleph) \cap (\aleph-B) = Z \cap B' \cap \aleph \\ (F(\aleph) \cup H(\aleph)) \cup (G(\aleph) \cup H(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap \aleph) \cap (B \cap \aleph) = Z \cap B \cap \aleph \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in (Z-\aleph) - (B \cup \aleph) = Z \cap B' \cap \aleph' \\ F'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in (Z-\aleph) \cap (B-\aleph) = Z \cap B \cap \aleph' \\ H'(\aleph), & \aleph \in (\aleph-Z) \cap (\aleph-B) = Z' \cap B' \cap \aleph \\ U, & \aleph \in (\aleph-Z) \cap (B \cap \aleph) = Z' \cap B \cap \aleph \\ U, & \aleph \in (Z \cap \aleph) \cap (\aleph-B) = Z \cap B' \cap \aleph \\ (F(\aleph) \cup H(\aleph)) \cup (G(\aleph) \cup H(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap \aleph) \cap (B \cap \aleph) = Z \cap B \cap \aleph \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, $\aleph-Z$ ele alırsak, $\aleph-Z = \aleph \cap Z'$ olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya B-Z de, ya da B $\cup$ Z nin tümleyenindedir. Burdan, $\aleph \in Z' \cap B \cap \aleph$ veya $\aleph \in Z' \cap B' \cap \aleph$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap B \cap \aleph = Z \cap B' \cap \aleph = Z \cap B \cap \aleph' = \emptyset$ şartı ile N=T olduğu görülür. $Z' \cap B \cap \aleph = Z \cap B' \cap \aleph = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap \aleph$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2)(Z \Delta B) \cap \aleph = Z \cap B \cap \aleph' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\cap}{\sim} (G, B) \underset{U_{\epsilon}}{*} (H, \aleph) = [(F, Z) \underset{U_{\epsilon}}{*} (H, \aleph)] \underset{\cap}{\sim} [(G, B) \underset{U_{\epsilon}}{*} (H, \aleph)].$$

$$3)(Z \Delta B) \cap \aleph = Z \cap B \cap \aleph' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{\cap}{\sim} (G, B)] \underset{U_{\epsilon}}{*} (H, \aleph) = [(F, Z) \underset{+_{\epsilon}}{*} (H, \aleph)] \underset{\cap}{\sim} [(G, B) \underset{+_{\epsilon}}{*} (H, \aleph)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \underset{\cap}{\sim} (G, B) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$,

$$M(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in Z-B \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$(M, Z) \stackrel{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \S) = (N, Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} M'(\aleph), & \aleph \in Z-\S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S-Z \\ M(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap \S \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in (Z-B)-\S = Z \cap B' \cap \S' \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B)-\S = Z \cap B \cap \S' \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S-Z \\ F(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in (Z-B) \cap \S = Z \cap B' \cap \S \\ (F'(\aleph) \cap G'(\aleph)) \cup H(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) \cap \S = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (H, \S)] \tilde{\cap} [(G, B) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (H, \S)]$. $(F, Z) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (H, \S)$

$(V, Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-\S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S-Z \\ F'(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap \S \end{cases}$$

Şimdi $(G, B) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (H, \S) = (W, B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in B \cup \S$;

$$W(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in B-\S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S-B \\ G'(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in B \cap \S \end{cases}$$

$(V, Z \cup \S) \tilde{\cap} (W, B \cup \S) = (T, (Z \cup \S))$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} V(\aleph), & \aleph \in (Z \cup \S) - (B \cup \S) \\ V(\aleph) \cap W(\aleph), & \aleph \in (Z \cup \S) \cap (B \cup \S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S})-(B \cup \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z)-(B \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S})-(B \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap (G'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B-\mathfrak{S}) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}) \cup (G'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ (F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = \emptyset \\ (F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ (F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cap (G'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S})-(B \cup \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ U, & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ (F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cap (G'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap \mathfrak{S}$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4)(Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{*}{\sim} (G, B)] \underset{*}{\cap}_{\epsilon} (H, \mathfrak{S}) = [(F, Z) \underset{+}{\cap}_{\epsilon} (H, \mathfrak{S})] \underset{*}{\cup} [(G, B) \underset{+}{\cap}_{\epsilon} (H, \mathfrak{S})].$$

3.4.4.1. Not Teorem 3.4.4 deki dağılmalar ve hangi şartlar altında sağlandığı dikkate alınırsa, Z , E parametre kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde aşağıdaki dağılmaların koşulsuz şartsız sağlandığı aşıkardır:

- $(F, Z) \underset{*}{\cup}_{\epsilon} [(G, Z) \underset{*}{\cap} (H, Z)] = [(F, Z) \underset{*}{\cup}_{\epsilon} (G, Z)] \underset{*}{\cap} [(F, Z) \underset{*}{\cup}_{\epsilon} (H, Z)].$
- $[(F, Z) \underset{*}{\cap} (G, Z)] \underset{*}{\cap}_{\epsilon} (H, Z) = [(F, Z) \underset{*}{\cup}_{\epsilon} (H, Z)] \underset{*}{\cap} [(G, Z) \underset{*}{\cup}_{\epsilon} (H, Z)].$

- $(F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* [(G, Z) \sim (H, Z)] = [(F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* (G, Z)] \sim [(F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* (H, Z)]$.
- $[(F, Z) \sim (G, Z)]_{\cup_{\varepsilon}}^* (H, Z) = [(F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* (H, Z)] \sim [(G, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* (H, Z)]$.

3.4.5. Teorem $(F, Z), (G, B), (H, S)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş birleşim işleminin tümleyenli esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Birleşim İşleminin Tümleyenli Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Soldan Dağılıması

$$1) (Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* [(G, B) \underset{\cap}{\sim} (H, S)] = [(F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* (G, B)] \underset{\cap}{\sim} [(F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B) \underset{\cap}{\sim} (H, S) = (M, B)$ olsun. Buradan $\forall x \in B$;

$$M(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B - S \\ G(x) \cap H(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* (M, B) = (N, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ M'(x), & x \in B - Z \\ F(x) \cup M(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G(x), & x \in (B - S) - Z = Z' \cap B \cap S' \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B \cap S) - Z = Z' \cap B \cap S \\ F(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \underset{\cap}{*} (G, B)] \underset{\cap}{*} [(F, Z) \underset{\cap}{*} (H, S)]$ bakalım.

$(F, Z) \underset{\cap}{*} (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in B - Z \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{\cap}{*} (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \underset{\cap}{*} (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B) \cap (Z \cup S))$ olsun. Burada $\forall x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S)$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G(x), & x \in (B - Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F'(x) \cap F'(x), & x \in (Z - B) \cap (Z - S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z - B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ F'(x) \cap (F(x) \cup H(x)), & x \in (Z - B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (B - Z) \cap (Z - S) = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (B - Z) \cap (S - Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(x) \cap (F(x) \cup H(x)), & x \in (B - Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F(x) \cup G(x)) \cap F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z - S) = Z \cap B \cap S' \\ (F(x) \cup G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ ((F(x) \cup G(x)) \cap (F(x) \cup H(x))), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} G(\aleph), & \aleph \in (B-Z) - (Z \cup \aleph) = Z' \cap B \cap \aleph' \\ F'(\aleph), & \aleph \in (Z-B) \cap (Z-\aleph) = Z \cap B' \cap \aleph' \\ F'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z-B) \cap (Z \cap \aleph) = Z \cap B' \cap \aleph \\ G'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (B-Z) \cap (\aleph-Z) = Z' \cap B \cap \aleph \\ G(\aleph) \cap F'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) \cap (Z-\aleph) = Z \cap B \cap \aleph' \\ ((F(\aleph) \cup G(\aleph)) \cap (F(\aleph) \cup H(\aleph))), & \aleph \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \aleph) = Z \cap B \cap \aleph \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, Z-B ele alırsak, Z-B=Z∩B' olup, bir eleman B nin tümleyeninde ise o eleman ya Ş-B de, ya da B∪Ş nin tümleyenindedir. Burdan, $\aleph \in \aleph-B$ ise $\aleph \in Z \cap B' \cap \aleph$ veya $\aleph \in Z \cap B' \cap \aleph'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap B \cap \aleph = Z \cap B' \cap \aleph = Z \cap B \cap \aleph' = \emptyset$ şartı ile N=T olduğu görülür. $Z' \cap B \cap \aleph = Z \cap B' \cap \aleph = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap \aleph$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2)(Z \Delta B) \cap \aleph = Z \cap B \cap \aleph' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{U_\epsilon}{*} [(G, B) \underset{U}{*} (H, \aleph)] = [(F, Z) \underset{U_\epsilon}{*} (G, B)] \underset{U}{*} [(F, Z) \underset{U_\epsilon}{*} (H, \aleph)].$$

$$3)(Z \Delta B) \cap \aleph = Z \cap B \cap \aleph' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{U_\epsilon}{*} [(G, B) \underset{*}{*} (H, \aleph)] = [(F, Z) \underset{\lambda_\epsilon}{*} (G, B)] \underset{U}{*} [(F, Z) \underset{\lambda_\epsilon}{*} (H, \aleph)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B) \underset{*}{*} (H, \aleph) = (M, B)$ olsun. Buradan $\forall \aleph \in B$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in B - \aleph \\ G'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in B \cap \aleph \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{U_\epsilon}{*} (M, B) = (N, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ M'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F(\aleph) \cup M(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-B \\ G(x), & x \in (B-S)-Z = Z' \cap B \cap S' \\ G(x) \cap H(x), & x \in (B \cap S)-Z = Z' \cap B \cap S \\ F(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap (B-S) = Z \cap B \cap S' \\ F(x) \cup (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\lambda_\epsilon}^* (G, B)] \underset{U}{\sim} [(F, Z)_{\lambda_\epsilon}^* (H, S)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\lambda_\epsilon}^* (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-B \\ G'(x), & x \in B-Z \\ F(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z)_{\lambda_\epsilon}^* (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-S \\ H'(x), & x \in S-Z \\ F(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \underset{U}{\sim} (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F(X), & X \in (Z-B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G(X), & X \in (B-Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(X) \cap G(X), & X \in (Z \cap B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F'(X) \cup F'(X), & X \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(X) \cup H'(X), & X \in (Z-B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ F'(X) \cup (F(X) \cup H'(X)), & X \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(X) \cup F'(X), & X \in (B-Z) \cap (Z-S) = \emptyset \\ G'(X) \cup H'(X), & X \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(X) \cup (F(X) \cup H'(X)), & X \in (B-Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F(X) \cup G'(X)) \cup F'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F(X) \cup G'(X)) \cup H'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ ((F(X) \cup G'(X)) \cup (F(X) \cup H'(X))), & X \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} G(X), & X \in (B-Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(X), & X \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ U, & X \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(X) \cup H'(X), & X \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ U, & X \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ ((F(X) \cup G'(X)) \cup (F(X) \cup H'(X))), & X \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4)(Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\theta}{\overset{*}{\cup_{\epsilon}}} [(G, B) \underset{\theta}{\sim} (H, S)] = [(F, Z) \underset{\lambda_{\epsilon}}{\overset{*}{\cup_{\epsilon}}} (G, B)] \underset{\cap}{\overset{*}{\sim}} [(F, Z) \underset{\lambda_{\epsilon}}{\overset{*}{\cup_{\epsilon}}} (H, S)].$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Birleşim İşleminin Tümleyenli Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1)(Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{U}{\overset{*}{\sim}} (G, B) \underset{U_{\epsilon}}{\overset{*}{\cup}} (H, S) = [(F, Z) \underset{U_{\epsilon}}{\overset{*}{\cup}} (H, S)] \underset{U}{\overset{*}{\sim}} [(G, B) \underset{U_{\epsilon}}{\overset{*}{\cup}} (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \underset{U}{\overset{*}{\sim}} (G, B) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall X \in Z$,

$$M(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-B \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$(M, Z) \underset{U_\epsilon}{*} (H, \S) = (N, Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} M'(\aleph), & \aleph \in Z-\S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S-Z \\ M(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap \S \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in (Z-B)-\S = Z \cap B' \cap \S' \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B)-\S = Z \cap B \cap \S' \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S-Z \\ F'(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in (Z-B) \cap \S = Z \cap B' \cap \S \\ (F(\aleph) \cup G(\aleph)) \cup H(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) \cap \S = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım: $[(F, Z) \underset{U_\epsilon}{*} (H, \S)] \underset{U}{*} [(G, B) \underset{U_\epsilon}{*} (H, \S)]$.

$(F, Z) \underset{U_\epsilon}{*} (H, \S) = (V, Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-\S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S-Z \\ F(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap \S \end{cases}$$

Şimdi $(G, B) \underset{U_\epsilon}{*} (H, \S) = (W, B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in B \cup \S$;

$$W(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in B-\S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S-B \\ G(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in B \cap \S \end{cases}$$

$(V, Z \cup \S) \underset{U}{*} (W, B \cup \S) = (T, (Z \cup \S) \cup (B \cup \S))$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} V'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup \S) - (B \cup \S) \\ V(\aleph) \cup W(\aleph), & \aleph \in (Z \cup \S) \cap (B \cup \S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in (Z - \S) - (B \cup \S) = Z \cap B' \cap \S' \\ H(\aleph), & \aleph \in (\S - Z) - (B \cup \S) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap \S) - (B \cup \S) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in (Z - \S) \cap (B - \S) = Z \cap B \cap \S' \\ F'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (Z - \S) \cap (\S - B) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup (G(\aleph) \cup H(\aleph)), & \aleph \in (Z - \S) \cap (B \cap \S) = \emptyset \\ H'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in (\S - Z) \cap (B - \S) = \emptyset \\ H'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (\S - Z) \cap (\S - B) = Z' \cap B' \cap \S \\ H'(\aleph) \cup (G(\aleph) \cup H(\aleph)), & \aleph \in (\S - Z) \cap (B \cap \S) = Z' \cap B \cap \S \\ (F(\aleph) \cup H(\aleph)) G'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap \S) \cap (B - \S) = \emptyset \\ (F(\aleph) \cup H(\aleph)) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap \S) \cap (\S - B) = Z \cap B' \cap \S \\ (F(\aleph) \cup H(\aleph)) \cup (G(\aleph) \cup H(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap \S) \cap (B \cap \S) = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in (Z - \S) - (B \cup \S) = Z \cap B' \cap \S' \\ F'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in (Z - \S) \cap (B - \S) = Z \cap B \cap \S' \\ H'(\aleph), & \aleph \in (\S - Z) \cap (\S - B) = Z' \cap B' \cap \S \\ U, & \aleph \in (\S - Z) \cap (B \cap \S) = Z' \cap B \cap \S \\ U, & \aleph \in (Z \cap \S) \cap (\S - B) = Z \cap B' \cap \S \\ (F(\aleph) \cup H(\aleph)) \cup (G(\aleph) \cup H(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap \S) \cap (B \cap \S) = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, $\S - Z$ ele alırsak, $\S - Z = \S \cap Z'$ olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya B-Z de, ya da B $\cup$ Z nin tümleyenindedir. Burdan, $\aleph \in Z' \cap B \cap \S$ veya $\aleph \in Z' \cap B' \cap \S$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap B \cap \S = Z \cap B' \cap \S = Z \cap B \cap \S' = \emptyset$ şartı ile N=T sağlanır. $Z' \cap B \cap \S = Z \cap B' \cap \S = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap \S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2)(Z \Delta B) \cap \S = Z \cap B \cap \S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\cap}{\sim}^* (G, B) \underset{\cup_{\epsilon}}{=}^* (H, \S) = [(F, Z) \underset{\cup_{\epsilon}}{=}^* (H, \S)] \underset{\cap}{\sim}^* [(G, B) \underset{\cup_{\epsilon}}{=}^* (H, \S)].$$

$$3)(Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{\theta}{\sim} (G, B)] \underset{\epsilon}{\cup}^* (H, S) = [(F, Z) \underset{+}{\epsilon}^* (H, S)] \underset{\cap}{\sim}^* [(G, B) \underset{+}{\epsilon}^* (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \underset{\theta}{\sim}^* (G, B) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$,

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(M, Z) \underset{\epsilon}{\cup}^* (H, S) = (N, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ M(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - B) - S = Z \cap B' \cap S' \\ F(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap B) - S = Z \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F'(x) \cup H(x), & x \in (Z - B) \cap S = Z \cap B' \cap S \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup H(x), & x \in (Z \cap B) \cap S = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z) \underset{+}{\epsilon}^* (H, S)] \underset{\cap}{\sim}^* [(G, B) \underset{+}{\epsilon}^* (H, S)]$. $(F, Z) \underset{+}{\epsilon}^* (H, S)$

$(V, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

Şimdi $(G, B) \underset{+}{\epsilon}^* (H, S) = (W, B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in B \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B - S \\ H'(x), & x \in S - B \\ G'(x) \cup H(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

*
 $(V, Z \cup S) \sim (W, B \cup S) = (T, (Z \cup S))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;
 $\cap$

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup S) - (B \cup S) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup S) \cap (B \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - S) - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ H(x), & x \in (S - Z) - (B \cup S) = \emptyset \\ F(x) \cap H'(x), & x \in (Z \cap S) - (B \cup S) = \emptyset \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z - S) \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z - S) \cap (S - B) = \emptyset \\ F'(x) \cap (G'(x) \cup H(x)), & x \in (Z - S) \cap (B \cap S) = \emptyset \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (S - Z) \cap (B - S) = \emptyset \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (S - Z) \cap (S - B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(x) \cap (G'(x) \cup H(x)), & x \in (S - Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ (F'(x) \cup H(x)) \cap G'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (B - S) = \emptyset \\ (F'(x) \cup H(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ (F'(x) \cup H(x)) \cap (G'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - S) - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z - S) \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in (S - Z) \cap (S - B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (S - Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ (F'(x) \cup H(x)) \cap (G'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartı ile $N = T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap S = \emptyset$ denk olduğu aşikardır.

$$4)(Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{*}{\sim} (G, B)] \underset{*}{\cup_\epsilon} (H, S) = [(F, Z) \underset{+_\epsilon}{*} (H, S)] \underset{*}{\sim} [(G, B) \underset{+_\epsilon}{*} (H, S)].$$

3.4.5.1. Not Teorem 3.4.5 deki dağılmalar ve hangi şartlar altında sağlandığı dikkate alınırsa, Z , E parametre kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde aşağıdaki dağılmaların koşulsuz şartsız sağlandığı aşıkardır:

- $(F, Z) \underset{*}{\cup_\epsilon} [(G, Z) \underset{*}{\cap} (H, Z)] = [(F, Z) \underset{*}{\cup_\epsilon} (G, Z)] \underset{*}{\cap} [(F, Z) \underset{*}{\cup_\epsilon} (H, Z)].$
- $[(F, Z) \underset{*}{\cap} (G, Z)] \underset{*}{\cup_\epsilon} (H, Z) = [(F, Z) \underset{*}{\cap_\epsilon} (H, Z)] \underset{*}{\cap} [(G, Z) \underset{*}{\cup_\epsilon} (H, Z)].$
- $(F, Z) \underset{*}{\cup_\epsilon} [(G, Z) \underset{*}{\cup} (H, Z)] = [(F, Z) \underset{*}{\cup_\epsilon} (G, Z)] \underset{*}{\cup} [(F, Z) \underset{*}{\cup_\epsilon} (H, Z)].$
- $[(F, Z) \underset{*}{\cup} (G, Z)] \underset{*}{\cup_\epsilon} (H, Z) = [(F, Z) \underset{*}{\cup_\epsilon} (H, Z)] \underset{*}{\cup} [(G, Z) \underset{*}{\cup_\epsilon} (H, Z)].$

3.4.6. Teorem $(S_Z(U), \cup_R, \underset{*}{\cup_\epsilon})$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halkadır.

İspat: Ali ve diğerleri (2011), Z , E evrensel kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $(S_Z(U), \cup_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_Z$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 3.3.1’de $(S_Z(U), \underset{*}{\cup_\epsilon})$ cebirsel yapısının da birimi $\emptyset_Z$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu gösterildi. Not 3.4.5.1’den, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde, $\underset{*}{\cup_\epsilon}$ işleminin $\cup_R$ işlemine sağdan ve soldan dağıldığı bilinmektedir. Böylece, $(S_Z(U), \cup_R, \underset{*}{\cup_\epsilon})$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halkadır.

3.4.7. Teorem $(S_Z(U), \cap_R, \underset{*}{\cup_\epsilon})$ cebirsel yapıları, komutatif, idempotent, birimli bir hemihalkadır.

İspat: Ali ve diğerleri (2011), $(S_Z(U), \cap_R)$ cebirsel yapısının birimi U_Z olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 3.3.1 de $(S_Z(U), \cup_\epsilon^*)$ cebirsel yapısının, birimi $\emptyset_Z$ olan, komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes olduğu, Not 3.4.5.1'den $\cup_\epsilon^*$ işleminin $\cap_R$ işlemine sağdan ve soldan dağıldığı bilinmektedir.

Ayrıca, $(F, Z) \cup_\epsilon^* U_Z = U_Z \cup_\epsilon^* (F, Z) = U_Z, (F, Z) \cap_R U_Z = U_Z \cap_R (F, Z) = (F, Z), (S_Z(U), \cap_R, \cup_\epsilon^*)$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli bir hemihalkadır.

3.4.8. Teorem $(S_Z(U), U_Z, \emptyset_Z, \cap_R, \cup_\epsilon^*)$ bir Bool ve De Morgan Cebiridir.

İspat: $(S_Z(U), \cap_R)$ cebirsel yapısı, birimi U_Z olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes dolayısıyla bir yarıgruptur. $(S_Z(U), \cup_\epsilon^*)$ cebirsel yapısı, birimi $\emptyset_Z$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes dolayısıyla bir yarıgruptur. Teorem 3.3 (24) de, $\cup_\epsilon^*$ ve $\cap_R$ işlemlerinin yutan kuralını sağladığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, $(S_Z(U), U_Z, \emptyset_Z, \cap_R, \cup_\epsilon^*)$ sınırlı bir kafestir. Ayrıca, $\forall (F, Z) \in S_Z(U)$ için, $(F, Z) \cap_R (F, Z)^r = \emptyset_Z$ ve $(F, Z) \cup_\epsilon^* (F, Z)^r = U_Z$ olduğundan, $(S_Z(U), U_Z, \emptyset_Z, \cap_R, \cup_\epsilon^*)$ tümlemeli sınırlı bir kafestir. Üstelik, Not 3.4.5.1'den $\cup_\epsilon^*$ işleminin $\cap_R$ işlemine sağdan ve soldan dağıldığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, $(S_Z(U), U_Z, \emptyset_Z, \cap_R, \cup_\epsilon^*)$ dağılmalı, tümlemeli, sınırlı bir kafes, dolayısıyla bir Bool cebiridir. Üstelik, $[(F, Z) \cup_\epsilon^* (G, Z)]^r = (F, Z)^r \cap_R (G, Z)^r$ ve $[(F, Z) \cap_R (G, Z)]^r = (F, Z)^r \cup_\epsilon^* (G, Z)^r$ yani De Morgan kuralı da sağladığından, $(S_Z(U), \emptyset_Z, U_Z, \cap_R, \cup_\epsilon^*)$ De Morgan Cebiridir.

Burada hemen not edelim ki, $(S_E(U), \cup_\epsilon^*)$ cebirsel yapısı birleşmeli olmadığından, $\cap_R$ işlemi ile birlikte $S_E(U)$ kümesi üzerinde bir kafes oluşturma durumu söz konusu olamaz.

3.4.9. *Sonuç* $(S_Z(U), \cup_\varepsilon, \overset{*}{\cup}_\varepsilon), (S_Z(U), \overset{*}{\cup}_\varepsilon, \overset{*}{\cup}_\varepsilon), (S_Z(U), \sim, \overset{*}{\cup}_\varepsilon), (S_Z(U), \overset{*}{\sim}, \overset{*}{\cup}_\varepsilon)$ cebirsel yapıları

birer komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halkadır.

3.4.10. *Sonuç* $(S_Z(U), \cap_R, \overset{*}{\cap}_\varepsilon), (S_Z(U), \overset{*}{\cap}_\varepsilon, \overset{*}{\cap}_\varepsilon), (S_Z(U), \sim, \overset{*}{\cap}_\varepsilon), (S_Z(U), \overset{*}{\sim}, \overset{*}{\cap}_\varepsilon)$ cebirsel

yapıları birer komutatif, idempotent, birimli bir hemihalkadır.

3.4.11. *Sonuç* $(S_Z(U), U_Z, \emptyset_Z, \cap_\varepsilon, \overset{*}{\cup}_\varepsilon), (S_Z(U), U_Z, \emptyset_Z, \overset{*}{\cap}_\varepsilon, \overset{*}{\cup}_\varepsilon), (S_Z(U), U_Z, \emptyset_Z, \sim, \overset{*}{\cap}_\varepsilon),$

$(S_Z(U), U_Z, \emptyset_Z, \overset{*}{\sim}, \overset{*}{\cap}_\varepsilon)$ bir Bool ve De Morgan cebiridir.

3.4.12. Teorem $(S_Z(U), \overset{*}{\cup}_\varepsilon, \emptyset_Z)$ bir MV-cebiridir.

İspat: $(S_Z(U), \overset{*}{\cup}_\varepsilon, \emptyset_Z)$ bir MV-cebiri olduğunu görmek için, MV-cebiri şartları sağladığını gösterelim.

- (MV1) $(S_Z(U), \overset{*}{\cup}_\varepsilon, \emptyset_Z)$ değişmeli bir monoiddir. (Sonuç 3.3.1)
- (MV2) $((F, Z)^r)^r = (F, Z)$. (Ali ve diğerleri, 2011)
- (MV3) $(\emptyset_Z)^r \overset{*}{\cup}_\varepsilon (F, Z) = U_Z \overset{*}{\cup}_\varepsilon (F, Z) = U_Z = (\emptyset_Z)^r$.
- (MV4) $[(F, Z)^r \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, Z)]^r \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, Z) = ((G, Z)^r \overset{*}{\cup}_\varepsilon (F, Z)^r)^r \overset{*}{\cup}_\varepsilon (F, Z)$. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
 [(F, Z)^r \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, Z)]^r \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, Z) &= [((F, Z)^r)^r \overset{*}{\cap}_\varepsilon (G, Z)^r]^r \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, Z) \\
 &= [(F, Z) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (G, Z)^r]^r \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, Z) \\
 &= [(F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, Z)] \overset{*}{\cap}_\varepsilon [(G, Z)^r \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, Z)] \\
 &= [(F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, Z)] \overset{*}{\cap}_\varepsilon [(F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (F, Z)^r] \\
 &= (F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon [(G, Z) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (F, Z)^r] \\
 &= (F, Z) \overset{*}{\cup}_\varepsilon [(G, Z)^r \overset{*}{\cup}_\varepsilon (F, Z)]^r
 \end{aligned}$$

$$=[(G,Z)^r \underset{U_\varepsilon}{*} (F,Z)]^r \underset{U_\varepsilon}{*} (F,Z)$$

Böylelikle, $(S_Z(U), \underset{U_\varepsilon}{*}, \emptyset_Z)$ bir MV-cebiridir.



4. TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ ARTI İŞLEMİ

Bu bölümde, tümleyenli genişletilmiş artı adı verilen yeni bir esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir.

4.1. Tanım (F, Z) ve (G, B) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümenin

$(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (G, B)$ ile gösterilen tümleyenli genişletilmiş artı işlemi $\mathcal{S} = Z \cup B$ ve $\forall \mathcal{X} \in \mathcal{S}$;

$$H(\mathcal{X}) = \begin{cases} F'(\mathcal{X}), & \mathcal{X} \in Z - B \\ G'(\mathcal{X}), & \mathcal{X} \in B - Z \\ F(\mathcal{X}) + G(\mathcal{X}), & \mathcal{X} \in Z \cap B \end{cases}$$

olmak üzere $(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (G, B) = (H, \mathcal{S})$ ile tanımlanır.

4.2. Örnek $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi $Z = \{e_1, e_3\}$ ve $B = \{e_2, e_3, e_4\}$ E nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme olmak üzere (F, Z) ve (G, B) , U üzerinde $(F, Z) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, B) = \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (G, B) = (H, Z \cup B)$ olmak üzere $\forall \mathcal{X} \in Z \cup B$;

$$H(\mathcal{X}) = \begin{cases} F'(\mathcal{X}), & \mathcal{X} \in Z - B \\ G'(\mathcal{X}), & \mathcal{X} \in B - Z \\ F'(\mathcal{X}) \cup G(\mathcal{X}), & \mathcal{X} \in Z \cap B \end{cases}$$

Burada, $Z \cup B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $Z - B = \{e_1\}$, $B - Z = \{e_2, e_4\}$, $Z \cap B = \{e_3\}$ olmak üzere, $H(e_1) = F'(e_1) = \{h_1, h_3, h_4\}$, $H(e_2) = G'(e_2) = \{h_2, h_3\}$, $H(e_4) = G'(e_4) = \{h_1, h_2, h_4\}$ ve $H(e_3) = F'(e_3) \cup G(e_3) = \{h_3, h_4\} \cup \{h_2, h_3, h_4\} = \{h_2, h_3, h_4\}$. Böylece, $(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (G, B) = \{(e_1, \{h_1, h_3, h_4\}), (e_2, \{h_2, h_3\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_4\})\}$.

4.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $\ast_{+\varepsilon}$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $\ast_{+\varepsilon}$ işleminin, $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\begin{aligned} \ast_{+\varepsilon} : S_E(U) \times S_E(U) &\rightarrow S_E(U) \\ ((F,Z), (G,B)) &\rightarrow (F,Z) \ast_{+\varepsilon} (G,B) = (H,Z \cup B) \end{aligned}$$

olup, (F,Z) ve (G,B) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F,Z) \ast_{+\varepsilon} (G,B)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir.

$$2) [(F,Z) \ast_{+\varepsilon} (G,B)] \ast_{+\varepsilon} (H,\S) \neq (F,Z) \ast_{+\varepsilon} [(G,B) \ast_{+\varepsilon} (H,\S)].$$

İspat: Öncelikle sol tarafa bakalım. $(F,Z) \ast_{+\varepsilon} (G,B) = (T,Z \cup B)$ olsun. Burada, $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B$;

$$T(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - B \\ G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - Z \\ F'(\mathfrak{N}) \cup G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap B \end{cases}$$

$(T,Z \cup B) \ast_{+\varepsilon} (H,\S) = (M,Z \cup B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B \cup \S$;

$$M(\mathfrak{N}) = \begin{cases} T'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cup B) - \S \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in \S - (Z \cup B) \\ T'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cup B) \cap \S \end{cases}$$

Buradan,

$$M(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-B) - \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B-Z) - \mathfrak{S} = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F(\mathfrak{N}) \cap G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap B) - \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in \mathfrak{S} - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B-Z) \cap \mathfrak{S} = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ (F(\mathfrak{N}) \cap G'(\mathfrak{N})) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} [(G, B) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S})]$ bakalım.

$(G, B) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S}) = (K, B \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in B \cup \mathfrak{S}$;

$$K(\mathfrak{N}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in \mathfrak{S} - B \\ G'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (K, B \cup \mathfrak{S}) = (S, Z \cup B \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B \cup \mathfrak{S}$;

$$S(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - (B \cup \mathfrak{S}) \\ K'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B \cup \mathfrak{S}) - Z \\ F'(\mathfrak{N}) \cup K(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap (B \cup \mathfrak{S}) \end{cases}$$

Buradan,

$$S(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - (B \cup \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B - \mathfrak{S}) - Z = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (\mathfrak{S} - B) - Z = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G(\mathfrak{N}) \cap H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B \cap \mathfrak{S}) - Z = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{N}) \cup G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap (B - \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap (\mathfrak{S} - B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{N}) \cup (G'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in Z \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Böylece, $M \neq S$ olduğu görülür. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\overset{*}{+}_{\varepsilon}$ işlemi birleşme özelliğine sahip değildir.

$$3) [(F, Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (G, Z)] \overset{*}{+}_\varepsilon (H, Z) \neq (F, Z) \overset{*}{+}_\varepsilon [(G, Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (H, Z)].$$

İspat: Öncelikle sol tarafa bakalım $(F, Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (G, Z) = (T, Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup Z = Z$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ G'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(T, Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (H, Z) = (M, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} T'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ T'(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan,

$$M(\aleph) = \begin{cases} T'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ (F(\aleph) \cap G'(\aleph)) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Şimdi sağ tarafa yani $(F, Z) \overset{*}{+}_\varepsilon [(G, Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (H, Z)]$ bakalım. $(G, Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (H, Z) = (L, Z \cup Z)$ olsun.

Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$L(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ G'(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (L, Z) = (N, Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ L'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup L(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ L'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup (G'(\aleph) \cup H(\aleph)), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Böylece, $M \neq N$ olduğu görülür. Yani, $Z \subseteq E$ sabit bir paramere kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde $^*_{+\varepsilon}$ işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F, Z) ^*_{+\varepsilon} (G, B) \neq (G, B) ^*_{+\varepsilon} (F, Z).$$

İspat: Öncelikle eşitliğin her iki tarafındaki esnek kümenin parametere kümeleri $Z \cup B$ olup, esnek eşitliğin ilk şartı sağlanmış olur. Şimdi eşitliğin sol tarafına bakalım.

$(F, Z) ^*_{+\varepsilon} (G, B) = (H, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F'(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $(G, B) ^*_{+\varepsilon} (F, Z)$ bakalım. $(G, B) ^*_{+\varepsilon} (F, Z) = (T, B \cup Z)$ olsun.

Burada $\forall \aleph \in B \cup Z$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G'(\aleph) \cup F(\aleph), & \aleph \in B \cap Z \end{cases}$$

Böylece, $H \neq T$ olduğu görülür. Benzer şekilde, $(F, Z) ^*_{+\varepsilon} (G, Z) \neq (G, Z) ^*_{+\varepsilon} (F, Z)$.

Yani, $S_E(U)$ ve $S_Z(U)$ kümeleri üzerinde $^*_{+\varepsilon}$ işleminin değişme özelliği yoktur.

$$5) (F, Z) ^*_{+\varepsilon} (F, Z) = U_Z.$$

İspat: $(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (F, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup F(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan, $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph) \cup F(\aleph) = U$ olup $(H, Z) = U_Z$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde $\overset{*}{+}_{\varepsilon}$ işlemi denk güçlülük (idempotent) özelliğine sahip değildir.

6) $(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} \emptyset_Z = (F, Z)^r$.

İspat: $\emptyset_Z = (S, Z)$ olsun. $\forall \aleph \in Z$; $S(\aleph) = \emptyset$. $(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (S, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ S'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup S(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph) \cup S(\aleph) = F'(\aleph) \cup \emptyset = F'(\aleph)$ olup, $(H, Z) = (F, Z)^r$.

7) $\emptyset_Z \overset{*}{+}_{\varepsilon} (F, Z) = U_Z$.

İspat: $\emptyset_Z = (S, Z)$ olsun. $\forall \aleph \in Z$; $S(\aleph) = \emptyset$. $(S, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (F, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} S'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ S'(\aleph) \cup F(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = S'(\aleph) \cup F(\aleph) = U \cup F(\aleph) = U$ olup, $(H, Z) = U_Z$.

8) $\emptyset_E \overset{*}{+}_{\varepsilon} (F, Z) = U_E$.

İspat: $\emptyset_E = (S, E)$ olsun. $\forall \aleph \in E$; $S(\aleph) = \emptyset$. $(S, E) \overset{*}{+}_\varepsilon (F, Z) = (H, E \cup Z = E)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in E$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} S'(\aleph), & \aleph \in E - Z = Z' \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - E = \emptyset \\ S'(\aleph) \cup F(\aleph), & \aleph \in Z \cap E = Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = S'(\aleph) \cup F(\aleph) = U \cup F(\aleph) = U$ olup,

$$H(\aleph) = \begin{cases} U, & \aleph \in E - Z = Z' \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - E = \emptyset \\ U, & \aleph \in Z \cap E = Z \end{cases}$$

Böylece, $\forall \aleph \in E$; $H(\aleph) = U$, dolayısıyla $(H, E) = U_E$.

$$9) (F, Z) \overset{*}{+}_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \overset{*}{+}_\varepsilon (F, Z) = (F, Z)^r.$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (K, \emptyset)$ ve $(F, Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (K, \emptyset) = (Q, Z \cup \emptyset) = (Q, Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$Q(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - \emptyset = Z \\ K'(\aleph), & \aleph \in \emptyset - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup K(\aleph), & \aleph \in Z \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Buradan, $\forall \aleph \in Z$; $Q(\aleph) = F'(\aleph)$ olup $(Q, Z) = (F, Z)^r$.

Benzer şekilde, $\emptyset_\emptyset \overset{*}{+}_\varepsilon (F, Z) = (W, \emptyset \cup Z) = (W, Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$W(\aleph) = \begin{cases} K'(\aleph), & \aleph \in \emptyset - Z = \emptyset \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - \emptyset = Z \\ K'(\aleph) \cup F(\aleph), & \aleph \in \emptyset \cap Z = \emptyset \end{cases}$$

Buradan, $\forall \aleph \in Z$; $W(\aleph) = F'(\aleph)$ olup $(W, Z) = (F, Z)^r$.

$$10) U_Z \overset{*}{+}_\varepsilon (F, Z) = (F, Z).$$

İspat: $U_Z=(T,Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$; $T(\aleph)=U$. $(T,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (F,Z)=(H,Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph)=\begin{cases} T'(\aleph), & \aleph \in Z-Z=\emptyset \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z-Z=\emptyset \\ T'(\aleph) \cup F(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z=Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph)=T'(\aleph) \cup F(\aleph)=\emptyset \cup F(\aleph)=F(\aleph)$ olup $(H,Z)=(F,Z)$.

$S_Z(U)$ kümesi üzerinde $\overset{*}{+}_\varepsilon$ işleminin sol birim elemanı U_Z esnek kümesidir.

$$11) (F,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon U_Z = U_Z.$$

İspat: $U_Z=(T,Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$; $T(\aleph)=U$. $(F,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (T,Z)=(H,Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph)=\begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-Z=\emptyset \\ T'(\aleph), & \aleph \in Z-Z=\emptyset \\ F'(\aleph) \cup T(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z=Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph)=F'(\aleph) \cup T(\aleph)=F'(\aleph) \cup U=U$ olup $(H,Z)=U_Z$.

Yani, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde $\overset{*}{+}_\varepsilon$ işlemi için, her elemanın sol birim eleman olan U_Z ye göre sağ tersi, U_Z esnek kümesidir. Ayrıca, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde $\overset{*}{+}_\varepsilon$ işleminin sağ yutan elemanı U_Z esnek kümesidir.

$$12) (F,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (F,Z)^r = (F,Z)^r.$$

İspat: $(F,Z)^r=(H,Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph)=F'(\aleph)$. $(F,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (H,Z)=(T,Z \cup Z)$ olsun .

Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Burada $\forall \aleph \in Z$; $T(\aleph) = F'(\aleph) \cup H(\aleph) = F'(\aleph) \cup F'(\aleph) = F'(\aleph)$ olup $(T, Z) = (F, Z)^r$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde, her esnek kümenin tümleyeni $^*_{+\varepsilon}$ işlemi için kendisinin sağda yutan elemanıdır.

$$13) (F, Z)^r \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (F, Z) = (F, Z).$$

İspat: $(F, Z)^r = (H, Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph)$. $(H, Z) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (F, Z) = (T, Z \cup Z)$ olsun .

Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} H'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\aleph) \cup F(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Burada $\forall \aleph \in Z$; $T(\aleph) = H'(\aleph) \cup F(\aleph) = F(\aleph) \cup F(\aleph) = F(\aleph)$ olup $(T, Z) = (F, Z)$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde, her esnek kümenin tümleyeni $^*_{+\varepsilon}$ işlemi için kendisinin solda birim elemanıdır.

$$14) [(F, Z) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (G, B)]^r = (F, Z) \setminus_{\varepsilon} (G, B).$$

İspat: $(F, Z) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (G, B) = (H, Z \cup B)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F'(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$(H, Z \cup B)^r = (T, Z \cup B)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in Z-B \\ G(\aleph), & \aleph \in B-Z \\ F(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

Buradan, $(T, Z \cup B) = (F, Z) \setminus_{\varepsilon} (G, B)$ olur.

$$15) (F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (G, Z) = \emptyset_Z \Leftrightarrow (F, Z) = U_Z \text{ ve } (G, Z) = \emptyset_Z.$$

İspat: $(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (G, Z) = (T, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-Z = \emptyset \\ G'(\aleph), & \aleph \in Z-Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(T, Z) = \emptyset_Z$ olduğundan, $\forall \aleph \in Z$ için $T(\aleph) = \emptyset$ ve $\forall \aleph \in Z$; $F'(\aleph) \cup G(\aleph) = \emptyset$. Burdan, $\forall \aleph \in Z$; $F'(\aleph) = \emptyset$ ve $G(\aleph) = \emptyset$. Böylece, $(F, Z) = U_Z$ ve $(G, Z) = \emptyset_Z$.

$$16) \emptyset_Z \cong (F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (G, B), \emptyset_B \cong (F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (G, B), \emptyset_{Z \cup B} \cong (F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (G, B), (F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (G, B) \cong U_{Z \cup B}.$$

$$17) (F, Z)^r \cong (F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (G, B) \text{ ve } (G, Z) \cong (F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (G, Z).$$

İspat: $(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (G, B) = (H, Z \cup B)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-B \\ G'(\aleph), & \aleph \in B-Z \\ F'(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$\forall \aleph \in Z-B; H(\aleph)=F'(\aleph) \subseteq F'(\aleph)$ ve $\forall \aleph \in Z \cap B; H(\aleph)=F'(\aleph) \subseteq F'(\aleph) \cup G(\aleph)$. Böylece, $(F,Z)^r \cong (F,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (G,B)$. Benzer şekilde, $\forall \aleph \in Z; G(\aleph) \subseteq F'(\aleph) \cup G(\aleph)$. Böylece $(G,Z) \cong (F,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (G,Z)$.

18) $(F,Z) \cong (G,Z)$ ise $(H,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (F,Z) \cong (H,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (G,Z)$.

İspat: $(F,Z) \cong (G,Z)$ olsun. Buradan, $\forall \aleph \in Z$ için, $F(\aleph) \subseteq G(\aleph)$. $(H,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (F,Z) = (W,Z)$ olsun.

Böylece, $\forall \aleph \in Z$ için,

$$W(\aleph) = \begin{cases} H'(\aleph), & \aleph \in Z-Z=\emptyset \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z-Z=\emptyset \\ H'(\aleph) \cup F(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z=Z \end{cases}$$

$(H,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (G,Z) = (L,Z)$ olsun. Böylece, $\forall \aleph \in Z$ için,

$$L(\aleph) = \begin{cases} H'(\aleph), & \aleph \in Z-Z=\emptyset \\ G'(\aleph), & \aleph \in Z-Z=\emptyset \\ H'(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z=Z \end{cases}$$

Böylece, $\forall \aleph \in Z$ için, $W(\aleph) = H'(\aleph) \cup F(\aleph) \subseteq H'(\aleph) \cup G(\aleph) = L(\aleph)$ olup, $(H,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (F,Z) \cong$

$(H,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (G,Z)$.

19) $(H,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (F,Z) \cong (H,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (G,Z)$ ise $(F,Z) \cong (G,Z)$ olmak zorunda değildir. Yani

Teorem 4.3 (18) tersi doğru değildir.

İspat: Teorem 4.3 (18) in tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim.

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $Z = \{e_1, e_3\}$, E 'nin alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F,Z) , (G,Z) ve (H,Z) , U üzerinde $(F,Z) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$,

$(G,Z)=\{(e_1,\{h_2\}), (e_3,\{h_1,h_2\})\}$, $(H,Z)=\{(e_1,\emptyset), (e_3,\emptyset)\}$ olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.

Buradan, $(H,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (F,Z)=(L,Z)$ olup, $(L,Z)=\{(e_1,U), (e_3,U)\}$ ve $(H,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (F,Z)=(K,Z)$ olmak üzere $(K,Z)=\{(e_1,U), (e_3,U)\}$. Böylece, $(H,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (F,Z) \cong (H,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (G,Z)$; fakat $(F,Z) \cong (G,Z)$ olmadığı açıktır.

20) $(G,Z) \cong (F,B)$ ve $(K,Z) \cong (L,B)$ ise $(F,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (K,Z) \cong (G,B) \overset{*}{+}_\varepsilon (L,B)$.

İspat: $(G,Z) \cong (F,B)$ ve $(K,Z) \cong (L,B)$ olsun. Buradan, $Z \subseteq B$ ve $\forall \aleph \in Z$ için, $G(\aleph) \subseteq F(\aleph)$ ve $K(\aleph) \subseteq L(\aleph)$. $(F,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (K,Z) = (W,Z)$ olsun. Böylece, $\forall \aleph \in Z$ için,

$$W(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ K'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup K(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(G,B) \overset{*}{+}_\varepsilon (L,B) = (S,B)$ olsun. Böylece, $\forall \aleph \in B$ için,

$$S(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in B - B = \emptyset \\ L'(\aleph), & \aleph \in B - B = \emptyset \\ G'(\aleph) \cup L(\aleph), & \aleph \in B \cap B = B \end{cases}$$

Böylece, $\forall \aleph \in Z$ için, $G(\aleph) \subseteq F(\aleph)$ olduğu için $F'(\aleph) \subseteq G'(\aleph)$ ve $W(\aleph) = F'(\aleph) \cup K(\aleph) \subseteq G'(\aleph) \cup L(\aleph) = S(\aleph)$ olup, $(F,Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (K,Z) \cong (G,B) \overset{*}{+}_\varepsilon (L,B)$.

4.4. Teorem $(F,Z), (G,B), (H,\mathcal{S})$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş artı işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

4.4.1. Teorem $(F,Z), (G,B), (H,\mathcal{S})$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş artı işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Artı İşleminin Kısıtlanmış İşlemler Üzerine Soldan Dağılımı

$$1) Z' \cap B \cap S = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{+\varepsilon}^* [(G, B) \cap_R (H, S)] = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B)] \cap_R [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, B) \cap_R (H, S) = (M, B \cap S)$ olsun. Burada $\forall x \in B \cap S$; $M(x) = G(x) \cap H(x)$. $(F, Z)_{+\varepsilon}^* (M, B \cap S) = (N, Z \cup (B \cap S))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup (B \cap S)$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cap S) \\ M'(x), & x \in (B \cap S) - Z \\ F'(x) \cup M(x), & x \in Z \cap (B \cap S) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cap S) = Z - (B \cap S) \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B \cap S) - Z = Z' \cap B \cap S \\ F'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B)] \cap_R [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, S)]$ bakalım.

$(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in B - Z \\ F'(x) \cup G(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

Şimdi $(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \cap_R (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B) \cap (Z \cup S))$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup (B \cap S)$;

$T(x) = V(x) \cap W(x)$. Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cap F'(x), & x \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (B-Z) \cap (Z-S) = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(x) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (B-Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ (F'(x \cup G(x))) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x), & x \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki $Z-(B \cap S)$ ele alınırsa, $Z-(B \cap S) = Z-(B \cap S)'$ olup, bir eleman $(B \cap S)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $B-S$ de, ya $S-B$ de, ya da $B \cup S$ nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in Z - (B \cap S)$ ise $x \in Z \cap B \cap S'$ veya $x \in Z \cap B' \cap S$ veya $x \in Z \cap B' \cap S'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap B \cap S = \emptyset$ ise N ve T fonksiyonları birbirine eşit olur.

$$2) Z' \cap B \cap S = Z \cap B \cap S = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{+\varepsilon}^* [(G, B) \cup_R (H, S)] = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B)] \cap_R [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, S)].$$

$$3) Z' \cap B \cap S = Z \cap B \cap S = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{+\varepsilon}^* [(G, B) * _R (H, S)] = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B)] \cap_R [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, S)]$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, B) * _R (H, S) = (M, B \cap S)$ olsun. Burada $\forall x \in B \cap S$; $M(x) = G'(x) \cup H'(x)$. $(F, Z)_{+\varepsilon}^* (M, B \cap S) = (N, Z \cup (B \cap S))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup (B \cap S)$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - (B \cap S) \\ M'(\aleph), & \aleph \in (B \cap S) - Z \\ F'(\aleph) \cup M(\aleph), & \aleph \in Z \cap (B \cap S) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - (B \cap S) = Z - (B \cap S) \\ G(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in (B \cap S) - Z = Z' \cap B \cap S \\ F'(\aleph) \cup (G'(\aleph) \cup H'(\aleph)), & \aleph \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \overset{*}{*}_{\varepsilon} (G, B)] \cap_R [(F, Z) \overset{*}{*}_{\varepsilon} (H, S)]$ bakalım.

$(F, Z) \overset{*}{*}_{\varepsilon} (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

Şimdi $(F, Z) \overset{*}{*}_{\varepsilon} (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup S$;

$$W(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - S \\ H'(\aleph), & \aleph \in S - Z \\ F'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \cap_R (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B) \cap (Z \cup S))$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup (B \cap S)$;

$T(\aleph) = V(\aleph) \cap W(\aleph)$. Buradan;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph) \cap F'(\aleph), & \aleph \in (Z - B) \cap (Z - S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z - B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap (F'(\aleph) \cup H'(\aleph)), & \aleph \in (Z - B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(\aleph) \cap F'(\aleph), & \aleph \in (B - Z) \cap (Z - S) = \emptyset \\ G'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (B - Z) \cap (S - Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(\aleph) \cap (F'(\aleph) \cup H'(\aleph)), & \aleph \in (B - Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F'(\aleph) \cup G'(\aleph)) \cap F'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) \cap (Z - S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(\aleph) \cup G'(\aleph)) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ (F'(\aleph) \cup G'(\aleph)) \cap (F'(\aleph) \cup H'(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) & x \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cap (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$$4) Z' \cap B \cap S = Z \cap B \cap S = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} [(G, B) \theta_R(H, S)] = [(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (G, B)] \cup_R [(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (H, S)].$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Artı İşleminin Kısıtlanmış İşlemler Üzerine Sağdan Dağılıması

$$1) (Z \Delta B) \cap S = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \cup_R (G, B)] \overset{*}{+}_{\varepsilon} (H, S) = [(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (H, S)] \cap_R [(G, B) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \cup_R (G, B) = (M, Z \cap B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cap B; M(x) = F(x) \cup G(x)$. $(M, Z \cap B) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (H, S) = (N, (Z \cap B) \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in (Z \cap B) \cup S;$

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in (Z \cap B) - S \\ H'(x), & x \in S - (Z \cap B) \\ M'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap (B \cap S) \end{cases}$$

Böylece,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap B) - S = Z \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in S - (Z \cap B) = S - (Z \cap B) \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup H(x), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (H, S)] \cap_R [(G, B) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (H, S)]$ bakalım. $(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (H, S) = (V, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S;$

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

Şimdi, $(G, B)_{+\epsilon}^* (H, S) = (W, B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in B \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B - S \\ H'(x), & x \in S - B \\ G'(x) \cup H(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup S) \cap_R (W, B \cup S) = (T, (Z \cup S) \cap (B \cup S))$ olsun. Burada, $\forall x \in (Z \cap B) \cup S$; $T(x) = V(x) \cap W(x)$.

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z - S) \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z - S) \cap (S - B) = \emptyset \\ F'(x) \cap (G'(x) \cup H(x)), & x \in (Z - S) \cap (B \cap S) = \emptyset \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (S - Z) \cap (B - S) = \emptyset \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (S - Z) \cap (S - B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(x) \cap (G'(x) \cup H(x)), & x \in (S - Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ (F'(x) \cup H(x)) \cap G'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (B - S) = \emptyset \\ (F'(x) \cup H(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ (F'(x) \cup H(x)) \cap (G'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z - S) \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ H'(x) & x \in (S - Z) \cap (S - B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(x) \cap G'(x) & x \in (S - Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ F'(x) \cap H'(x) & x \in (Z \cap S) \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ (F'(x) \cup H(x)) \cap (G'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, $S - (Z \cap B)$ 'yi ele alırsak, $S - (Z \cap B) = S \cap (Z \cap B)'$ olup, bir eleman $(Z \cap B)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $Z - B$ de, ya $B - Z$ da, ya da $Z \cup B$ nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in S - (Z \cap B)$ ise $x \in S \cap Z \cap B'$ veya $x \in S \cap Z' \cap B$ veya $x \in S \cap Z' \cap B'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartı ile $N = T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta B) \cap S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta B) \cap \mathcal{S} = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \cap_R (G, B)]_{+\varepsilon}^* (H, \mathcal{S}) = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, \mathcal{S})] \cup_R [(G, B)_{+\varepsilon}^* (H, \mathcal{S})].$$

$$3) Z \cap B \cap \mathcal{S}' = (Z \Delta B) \cap \mathcal{S} = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \theta_R (G, B)]_{+\varepsilon}^* (H, \mathcal{S}) = [(F, Z)_{\cup \varepsilon}^* (H, \mathcal{S})] \cup_R [(G, B)_{\cup \varepsilon}^* (H, \mathcal{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \theta_R (G, B) = (M, Z \cap B)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z \cap B$; $M(\mathfrak{N}) = F'(\mathfrak{N}) \cap G'(\mathfrak{N})$. $(M, Z \cap B)_{+\varepsilon}^* (H, \mathcal{S}) = (N, (Z \cap B) \cup \mathcal{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in (Z \cap B) \cup \mathcal{S}$;

$$N(\mathfrak{N}) = \begin{cases} M'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap B) - \mathcal{S} \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in \mathcal{S} - (Z \cap B) \\ M'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap (B \cap \mathcal{S}) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F(\mathfrak{N}) \cup G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap B) - \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in \mathcal{S} - (Z \cap B) = \mathcal{S} - (Z \cap B) \\ (F(\mathfrak{N}) \cup G(\mathfrak{N})) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\cup \varepsilon}^* (H, \mathcal{S})] \cup_R [(G, B)_{\cup \varepsilon}^* (H, \mathcal{S})]$ bakalım.

$(F, Z)_{\cup \varepsilon}^* (H, \mathcal{S}) = (V, Z \cup \mathcal{S})$ olsun. Burada, $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup \mathcal{S}$;

$$V(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - \mathcal{S} \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in \mathcal{S} - Z \\ F(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

$(G, B)_{\cup \varepsilon}^* (H, \mathcal{S}) = (W, B \cup \mathcal{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in B \cup \mathcal{S}$;

$$W(\mathfrak{N}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - \mathcal{S} \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in \mathcal{S} - B \\ G(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

$(V, Z \cup \mathcal{S}) \cup_R (W, B \cup \mathcal{S}) = (T, (Z \cup \mathcal{S}) \cap (B \cup \mathcal{S}))$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in (Z \cap B) \cup \mathcal{S}$; $T(\mathfrak{N}) = V(\mathfrak{N}) \cup W(\mathfrak{N})$.

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cup (G(\mathfrak{K})H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B-\mathfrak{S}) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}) \cup (G(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ (F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cup G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = \emptyset \\ (F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ (F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cup (G(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ U, & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ U, & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ (F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cup (G(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4) Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = (Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = \emptyset \text{ ise } (F, Z) *_{\mathbf{R}} (G, B) \big|_{+\varepsilon}^* (H, \mathfrak{S}) = [(F, Z) \big|_{\mathbf{U}_\varepsilon}^* (H, \mathfrak{S})] \cap_{\mathbf{R}} [(G, B) \big|_{\mathbf{U}_\varepsilon}^* (H, \mathfrak{S})].$$

4.4.2. Teorem $(F, Z), (G, B), (H, \mathfrak{S}), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş artı işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Artı İşleminin Genişletilmiş İşlemler Üzerine Soldan Dağılması

$$1) Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = (Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \big|_{+\varepsilon}^* [(G, B) \cap_\varepsilon (H, \mathfrak{S})] = [(F, Z) \big|_{+\varepsilon}^* (G, B)] \cap_\varepsilon [(F, Z) \big|_{+\varepsilon}^* (H, \mathfrak{S})]$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B) \cap_\varepsilon (H, \mathfrak{S}) = (M, B \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in B \cup \mathfrak{S}$;

$$M(x) = \begin{cases} G(x), & x \in B - S \\ H(x), & x \in S - B \\ G(x) \cap H(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (M, B \cup S) = (N, Z \cup (B \cup S))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cup S) \\ M'(x), & x \in (B \cup S) - Z \\ F'(x) \cup M(x), & x \in Z \cap (B \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ G'(x), & x \in (B - S) - Z = Z' \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in (S - B) - Z = Z' \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B \cap S) - Z = Z' \cap B \cap S \\ F'(x) \cup G(x), & x \in Z \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ F'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (G, B)] \cap_{\varepsilon} [(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (H, S)]$ bakalım.

$(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in B - Z \\ F'(x) \cup G(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{+}_{\varepsilon} (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \cap_{\varepsilon} (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B) \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$T(X) = \begin{cases} V(X), & X \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ W(X), & X \in (Z \cup S) - (Z \cup B) \\ V(X) \cap W(X), & X \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F'(X), & X \in (Z - B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G'(X), & X \in (B - Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(X) \cup G(X), & X \in (Z \cap B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F'(X), & X \in (Z - S) - (Z \cup B) = \emptyset \\ H'(X), & X \in (S - Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F'(X) \cup H(X), & X \in (Z \cap S) - (Z \cup B) = \emptyset \\ F'(X) \cap F'(X), & X \in (Z - B) \cap (Z - S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(X) \cap H'(X), & X \in (Z - B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ F'(X) \cap (F'(X) \cup H(X)), & X \in (Z - B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(X) \cap F'(X), & X \in (B - Z) \cap (Z - S) = \emptyset \\ G'(X) \cap H'(X), & X \in (B - Z) \cap (S - Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(X) \cap (F'(X) \cup H(X)), & X \in (B - Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F'(X) \cup G(X)) \cap F'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (Z - S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(X) \cup G(X)) \cap H'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ (F'(X) \cup G(X)) \cap (F'(X) \cup H(X)), & X \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Böylece,

$$T(X) = \begin{cases} G'(X), & X \in (B - Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ H'(X), & X \in (S - Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F'(X), & X \in (Z - B) \cap (Z - S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(X), & X \in (Z - B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(X) \cap H'(X), & X \in (B - Z) \cap (S - Z) = Z' \cap B \cap S \\ F'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (Z - S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(X) \cup G(X)) \cap (F'(X) \cup H(X)), & X \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = \emptyset$ şartı ile $N = T$ sağlanır.

$$2) Z \cap B \cap S' = (Z \Delta B) \cap S = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{+\varepsilon}^* [(G, B) \cup_\varepsilon (H, S)] = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B)] \cup_\varepsilon [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, S)].$$

$$3) Z \cap B \cap \mathcal{S}' = (Z \Delta B) \cap \mathcal{S} = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} [(G, B) *_{\varepsilon} (H, \mathcal{S})] = [(F, Z) \stackrel{*}{*}_{\varepsilon} (G, B)] \cup_{\varepsilon} [(F, Z) \stackrel{*}{*}_{\varepsilon} (H, \mathcal{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B) *_{\varepsilon} (H, \mathcal{S}) = (M, B \cup \mathcal{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in B \cup \mathcal{S}$;

$$M(\mathfrak{N}) = \begin{cases} G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - \mathcal{S} \\ H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in \mathcal{S} - B \\ G'(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

$$(F, Z) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (M, B \cup \mathcal{S}) = (N, Z \cup (B \cup \mathcal{S})) \text{ olsun. Burada } \forall \mathfrak{N} \in Z \cup B \cup \mathcal{S};$$

$$N(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - (B \cup \mathcal{S}) \\ M'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B \cup \mathcal{S}) - Z \\ F'(\mathfrak{N}) \cup M(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap (B \cup \mathcal{S}) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - (B \cup \mathcal{S}) = Z \cap B' \cap \mathcal{S}' \\ G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B - \mathcal{S}) - Z = Z' \cap B \cap \mathcal{S}' \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (\mathcal{S} - B) - Z = Z' \cap B' \cap \mathcal{S} \\ G(\mathfrak{N}) \cap H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B \cap \mathcal{S}) - Z = Z' \cap B \cap \mathcal{S} \\ F'(\mathfrak{N}) \cup G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap (B - \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ F'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap (\mathcal{S} - B) = Z \cap B' \cap \mathcal{S} \\ F'(\mathfrak{N}) \cup (G'(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in Z \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \stackrel{*}{*}_{\varepsilon} (G, B)] \cup_{\varepsilon} [(F, Z) \stackrel{*}{*}_{\varepsilon} (H, \mathcal{S})]$ bakalım.

$$(F, Z) \stackrel{*}{*}_{\varepsilon} (G, B) = (V, Z \cup B) \text{ olsun. Burada } \forall \mathfrak{N} \in Z \cup B;$$

$$V(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - B \\ G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - Z \\ F'(\mathfrak{N}) \cup G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap B \end{cases}$$

$$(F, Z) \stackrel{*}{*}_{\varepsilon} (H, \mathcal{S}) = (W, Z \cup \mathcal{S}) \text{ olsun. Burada } \forall \mathfrak{N} \in Z \cup \mathcal{S};$$

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \cup_{\varepsilon} (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B) \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ W(x), & x \in (Z \cup S) - (Z \cup B) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (B - Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z \cap B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F'(x), & x \in (Z - S) - (Z \cup B) = \emptyset \\ H'(x), & x \in (S - Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z \cap S) - (Z \cup B) = \emptyset \\ F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z - B) \cap (Z - S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z - B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (B - Z) \cap (Z - S) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B - Z) \cap (S - Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(x) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (B - Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z - S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in (B - Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in (S - Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F'(x), & x \in (Z - B) \cap (Z - S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B - Z) \cap (S - Z) = Z' \cap B \cap S \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z - S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S}' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S} = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta B) \cap \mathcal{S} = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) Z \cap B \cap \mathcal{S}' = (Z \Delta B) \cap \mathcal{S} = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{+_{\varepsilon}}{*} [(G, B) \theta_{\varepsilon}(H, \mathcal{S})] = [(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (G, B)] \cap_{\varepsilon} [(F, Z) \underset{*_{\varepsilon}}{*} (H, \mathcal{S})].$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Artı İşleminin Genişletilmiş İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) (Z \Delta B) \cap \mathcal{S} = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \cup_{\varepsilon} (G, B)] \underset{+_{\varepsilon}}{*} (H, \mathcal{S}) = [(F, Z) \underset{+_{\varepsilon}}{*} (H, \mathcal{S})] \cap_{\varepsilon} [(G, B) \underset{+_{\varepsilon}}{*} (H, \mathcal{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \cup_{\varepsilon} (G, B) = (M, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B$;

$$M(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - B \\ G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - Z \\ F(\mathfrak{N}) \cup G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap B \end{cases}$$

$$(M, Z \cup B) \underset{+_{\varepsilon}}{*} (H, \mathcal{S}) = (N, (Z \cup B) \cup \mathcal{S}) \text{ olsun. Burada } \forall \mathfrak{N} \in Z \cup B \cup \mathcal{S};$$

$$N(\mathfrak{N}) = \begin{cases} M'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cup B) - \mathcal{S} \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in \mathcal{S} - (Z \cup B) \\ M'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cup B) \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z - B) - \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S}' \\ G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B - Z) - \mathcal{S} = Z' \cap B \cap \mathcal{S}' \\ F'(\mathfrak{N}) \cap G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap B) - \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in \mathcal{S} - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \mathcal{S} \\ F'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z - B) \cap \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S} \\ G'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B - Z) \cap \mathcal{S} = Z' \cap B \cap \mathcal{S} \\ (F'(\mathfrak{N}) \cap G'(\mathfrak{N})) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap B) \cap \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{+\varepsilon}^*(H, S)] \cap_\varepsilon [(G, B)_{+\varepsilon}^*(H, S)]$ bakalım. $(F, Z)_{+\varepsilon}^*(H, S) = (V, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(G, B)_{+\varepsilon}^*(H, S) = (W, B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in B \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B - S \\ H'(x), & x \in S - B \\ G'(x) \cup H(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup S) \cap_\varepsilon (W, B \cup S) = (T, Z \cup B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup S) - (B \cup S) \\ W(x), & x \in (B \cup S) - (Z \cup S) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup S) \cap (B \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - S) - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ H'(x), & x \in (S - Z) - (B \cup S) = \emptyset \\ F'(x) \cup H(x), & x \in (Z \cap S) - (B \cup S) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (B - S) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in (S - B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G'(x) \cup H(x), & x \in (B \cap S) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z - S) \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z - S) \cap (S - B) = \emptyset \\ F'(x) \cap (G'(x) \cup H(x)), & x \in (Z - S) \cap (B \cap S) = \emptyset \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (S - Z) \cap (B - S) = \emptyset \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (S - Z) \cap (S - B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(x) \cap (G'(x) \cup H(x)), & x \in (S - Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ (F'(x) \cup H(x)) \cap G'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (B - S) = \emptyset \\ (F'(x) \cup H(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ (F'(x) \cup H(x)) \cap (G'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-S) - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ G'(x), & x \in (B-S) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-S) \cap (B-S) = Z \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in (S-Z) \cap (S-B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (S-Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ F'(x) \cap H'(x) & x \in (Z \cap S) \cap (S-B) = Z \cap B' \cap S \\ (F'(x) \cup H(x)) \cap (G'(x) \cup H(x)) & x \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta B) \cap S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta B) \cap S = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \cap_{\varepsilon} (G, B)]_{+\varepsilon}^* (H, S) = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, S)] \cup_{\varepsilon} [(G, B)_{+\varepsilon}^* (H, S)].$$

$$3) (Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \theta_{\varepsilon} (G, B)]_{+\varepsilon}^* (H, S) = [(F, Z)_{\cup_{\varepsilon}}^* (H, S)] \cup_{\varepsilon} [(G, B)_{\cup_{\varepsilon}}^* (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \theta_{\varepsilon} (G, B) = (M, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$M(x) = \begin{cases} F(x), & x \in Z - B \\ G(x), & x \in B - Z \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$$(M, Z \cup B)_{+\varepsilon}^* (H, S) = (N, (Z \cup B) \cup S) \text{ olsun. Burada } \forall x \in Z \cup B \cup S;$$

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in (Z \cup B) - S \\ H'(x), & x \in S - (Z \cup B) \\ M'(x) \cup H(x), & x \in (Z \cup B) \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-B) - S = Z \cap B' \cap S' \\ G'(x), & x \in (B-Z) - S = Z' \cap B \cap S' \\ F(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap B) - S = Z \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in S - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F'(x) \cup H(x), & x \in (Z-B) \cap S = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup H(x), & x \in (B-Z) \cap S = Z' \cap B \cap S \\ (F(x) \cup G(x)) \cup H(x), & x \in (Z \cap B) \cap S = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \cup_\varepsilon^* (H, S)] \cup_\varepsilon [(G, B) \cup_\varepsilon^* (H, S)]$ bakalım. $(F, Z) \cup_\varepsilon^* (H, S) = (V, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(G, B) \cup_\varepsilon^* (H, S) = (W, B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in B \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B - S \\ H'(x), & x \in S - B \\ G(x) \cup H(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup S) \cup_\varepsilon (W, B \cup S) = (T, Z \cup B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup S) - (B \cup S) \\ W(x), & x \in (B \cup S) - (Z \cup S) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup S) \cap (B \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F'(X), \\ H'(X), \\ F(X) \cup H(X), \\ G'(X), \\ H'(X), \\ G(X) \cup H(X), \\ F'(X) \cup G'(X), \\ F'(X) \cup H'(X), \\ F'(X) \cup (G(X) \cup H(X)), \\ H'(X) \cup G'(X), \\ H'(X) \cup H'(X), \\ H'(X) \cup (G(X) \cup H(X)) \\ F(X) \cup H(X) \cup G'(X), \\ F(X) \cup H(X) \cup H'(X) \\ F(X) \cup H(X) \cup (G(X) \cup H(X)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X \in (Z-S) - (B \cup S) &= Z \cap B' \cap S' \\ X \in (S-Z) - (B \cup S) &= \emptyset \\ X \in (Z \cap S) - (B \cup S) &= \emptyset \\ X \in (B-S) - (Z \cup S) &= A' \cap B \cap S' \\ X \in (S-B) - (Z \cup S) &= \emptyset \\ X \in (B \cap S) - (Z \cup S) &= \emptyset \\ X \in (Z-S) \cap (B-S) &= Z \cap B \cap S' \\ X \in (Z-S) \cap (S-B) &= \emptyset \\ X \in (Z-S) \cap (B \cap S) &= \emptyset \\ X \in (S-Z) \cap (B-S) &= \emptyset \\ X \in (S-Z) \cap (S-B) &= A' \cap B' \cap S \\ X \in (S-Z) \cap (B \cap S) &= Z' \cap B \cap S \\ X \in (Z \cap S) \cap (B-S) &= \emptyset \\ X \in (Z \cap S) \cap (S-B) &= Z \cap B' \cap S \\ X \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) &= Z \cap B \cap S \end{aligned}$$

Böylece,

$$T(X) = \begin{cases} F'(X), \\ G'(X), \\ F'(X) \cup G'(X), \\ H'(X), \\ U, \\ U, \\ F(X) \cup H(X) \cap (G(X) \cup H(X)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X \in (Z-S) - (B \cup S) &= Z \cap B' \cap S' \\ X \in (B-S) - (Z \cup S) &= Z' \cap B \cap S' \\ X \in (Z-S) \cap (B-S) &= Z \cap B \cap S' \\ X \in (S-Z) \cap (S-B) &= Z \cap B' \cap S \\ X \in (S-Z) \cap (B \cap S) &= Z' \cap B \cap S \\ X \in (Z \cap S) \cap (S-B) &= Z \cap B' \cap S \\ X \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) &= Z \cap B \cap S \end{aligned}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta B) \cap S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) Z \Delta B \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) *_{\varepsilon} (G, B)]_{+\varepsilon}^* (H, S) = [(F, Z) *_{\cup \varepsilon}^* (H, S)] \cap_{\varepsilon} [(G, B) *_{\cup \varepsilon}^* (H, S)].$$

4.4.3. Teorem $(F, Z), (G, B), (H, S), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş artı işleminin tümleyenli genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Artı İşleminin Tümleyenli Genişletilmiş İşlemler Üzerine Soldan Dağılımı

$$1) (Z \Delta B) \cap \S = Z \cap B \cap \S' = \emptyset \text{ is } (F, Z)_{+\varepsilon}^* [(G, B)_{\cap\varepsilon}^* (H, \S)] = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B)]_{\cap\varepsilon}^* [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, \S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B)_{\cap\varepsilon}^* ((H, \S) = (M, B \cup \S))$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in B \cup \S$;

$$M(\mathfrak{N}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - \S \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in \S - B \\ G(\mathfrak{N}) \cap H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B \cap \S \end{cases}$$

$(F, Z)_{+\varepsilon}^* (M, B \cup \S) = (N, Z \cup (B \cup \S))$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B \cup \S$,

$$N(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - (B \cup \S) \\ M'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B \cup \S) - Z \\ F'(\mathfrak{N}) \cup M(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap (B \cup \S) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - (B \cup \S) = Z \cap B' \cap \S' \\ G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B - \S) - Z = Z' \cap B \cap \S' \\ H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (\S - B) - Z = Z' \cap B' \cap \S \\ G'(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B \cap \S) - Z = Z' \cap B \cap \S \\ F'(\mathfrak{N}) \cup G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap (B - \S) = Z \cap B \cap \S' \\ F'(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap (\S - B) = Z \cap B' \cap \S \\ F'(\mathfrak{N}) \cup (G(\mathfrak{N}) \cap H(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in Z \cap (B \cap \S) = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B)]_{\cap\varepsilon}^* [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, \S)]$ bakalım. $(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B$;

$$V(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - B \\ G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - Z \\ F'(\mathfrak{N}) \cup G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, \S) = (W, Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup \S$;

$$W(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathfrak{S} - Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \stackrel{*}{\cap}_{\varepsilon} (W, Z \cup \mathfrak{S}) = (T, (Z \cup B) \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup B \cup \mathfrak{S}$;

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} V'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup B) - (Z \cup \mathfrak{S}) \\ W'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup \mathfrak{S}) - (Z \cup B) \\ V(\mathfrak{K}) \cap W(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup B) \cap (Z \cup \mathfrak{S}) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - B) - (Z \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B - Z) - (Z \cup \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) - (Z \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ F(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - \mathfrak{S}) - (Z \cup B) = \emptyset \\ H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S} - Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ F(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) - (Z \cup B) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - B) \cap (Z - \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - B) \cap (\mathfrak{S} - Z) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap (F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z - B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{K}) \cap F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B - Z) \cap (Z - \mathfrak{S}) = \emptyset \\ G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B - Z) \cap (\mathfrak{S} - Z) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{K}) \cap (F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (B - Z) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = \emptyset \\ (F'(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K})) \cap F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z - \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ (F'(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K})) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (\mathfrak{S} - Z) = \emptyset \\ (F'(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K})) \cap (F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B - Z) - (Z \cup \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S} - Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - B) \cap (Z - \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B - Z) \cap (\mathfrak{S} - Z) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z - \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ (F'(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K})) \cap (F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S}' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S} = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta B) \cap \mathcal{S} = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta B) \cap \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S}' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{+\varepsilon}^* [(G, B)_{\cup\varepsilon}^* (H, \mathcal{S})] = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B)]_{\cup\varepsilon}^* [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, \mathcal{S})].$$

$$3) Z' \cap B \cap \mathcal{S} = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{+\varepsilon}^* [(G, B)_{*\varepsilon}^* (H, \mathcal{S})] = [(F, Z)_{*\varepsilon}^* (G, B)]_{\cup\varepsilon}^* [(F, Z)_{*\varepsilon}^* (H, \mathcal{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B)_{*\varepsilon}^* ((H, \mathcal{S}) = (M, B \cup \mathcal{S}))$ olsun. Burada $\forall \mathcal{K} \in B \cup \mathcal{S}$;

$$M(\mathcal{K}) = \begin{cases} G'(\mathcal{K}), & \mathcal{K} \in B - \mathcal{S} \\ H'(\mathcal{K}), & \mathcal{K} \in \mathcal{S} - B \\ G'(\mathcal{K}) \cup H'(\mathcal{K}), & \mathcal{K} \in B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

$(F, Z)_{+\varepsilon}^* (M, B \cup \mathcal{S}) = (N, Z \cup (B \cup \mathcal{S}))$ olsun. Burada $\forall \mathcal{K} \in Z \cup B \cup \mathcal{S}$;

$$N(\mathcal{K}) = \begin{cases} F'(\mathcal{K}), & \mathcal{K} \in Z - (B \cup \mathcal{S}) \\ M'(\mathcal{K}), & \mathcal{K} \in (B \cup \mathcal{S}) - Z \\ F'(\mathcal{K}) \cup M(\mathcal{K}), & \mathcal{K} \in Z \cap (B \cup \mathcal{S}) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\mathcal{K}) = \begin{cases} F'(\mathcal{K}), & \mathcal{K} \in Z - (B \cup \mathcal{S}) = Z \cap B' \cap \mathcal{S}' \\ G(\mathcal{K}), & \mathcal{K} \in (B - \mathcal{S}) - Z = Z' \cap B \cap \mathcal{S}' \\ H(\mathcal{K}), & \mathcal{K} \in (\mathcal{S} - B) - Z = Z' \cap B' \cap \mathcal{S} \\ G(\mathcal{K}) \cap H(\mathcal{K}), & \mathcal{K} \in (B \cap \mathcal{S}) - Z = Z' \cap B \cap \mathcal{S} \\ F'(\mathcal{K}) \cup G'(\mathcal{K}), & \mathcal{K} \in Z \cap (B - \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ F'(\mathcal{K}) \cup H'(\mathcal{K}), & \mathcal{K} \in Z \cap (\mathcal{S} - B) = Z \cap B' \cap \mathcal{S} \\ F'(\mathcal{K}) \cup (G'(\mathcal{K}) \cup H'(\mathcal{K})), & \mathcal{K} \in Z \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{*\varepsilon}^* (G, B)]_{\cup\varepsilon}^* [(F, Z)_{*\varepsilon}^* (H, \mathcal{S})]$ bakalım.

$(F, Z)_{*\varepsilon}^* (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \mathcal{K} \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-B \\ G'(x), & x \in B-Z \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z) \stackrel{*}{\underset{\varepsilon}{*}} (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-S \\ H'(x), & x \in S-Z \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \stackrel{*}{\underset{\varepsilon}{*}} (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B) \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ W'(x), & x \in (Z \cup S) - (Z \cup B) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G(x), & x \in (B-Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F(x) \cap G(x), & x \in (Z \cap B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F(x), & x \in (Z-S) - (Z \cup B) = \emptyset \\ H(x), & x \in (S-Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F(x) \cap H(x), & x \in (Z \cap S) - (Z \cup B) = \emptyset \\ F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (B-Z) \cap (Z-S) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(x) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (B-Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) - (Z \cup \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z-\mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (\mathfrak{S}-Z) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ (F'(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K})) \cup (F'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır.

$$4) Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S} = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{+\varepsilon}^* [(G, B)_{\theta_\varepsilon}^* (H, \mathfrak{S})] = [(F, Z)_{*\varepsilon}^* (G, B)]_{\cup_\varepsilon}^* [(F, Z)_{*\varepsilon}^* (H, \mathfrak{S})].$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Artı İşleminin Tümleyenli Genişletilmiş İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) (Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = \emptyset \text{ ise } [(F, Z)_{\cup_\varepsilon}^* (G, B)]_{+\varepsilon}^* (H, \mathfrak{S}) = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, \mathfrak{S})]_{\cap_\varepsilon}^* [(G, B)_{+\varepsilon}^* (H, \mathfrak{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z)_{\cup_\varepsilon}^* (G, B) = (M, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup B$;

$$M(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z-B \\ G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B-Z \\ F(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap B \end{cases}$$

$$(M, Z \cup B)_{+\varepsilon}^* (H, \mathfrak{S}) = (N, (Z \cup B) \cup \mathfrak{S}) \text{ olsun. Burada } \forall \mathfrak{K} \in Z \cup B \cup \mathfrak{S};$$

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} M'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup B) - \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathfrak{S} - (Z \cup B) \\ M'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup B) \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-B) - S = Z \cap B' \cap S' \\ G(x), & x \in (B-Z) - S = Z' \cap B \cap S' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap B) - S = Z \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in S - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F(x) \cup H(x), & x \in (Z-B) \cap S = Z \cap B' \cap S \\ G(x) \cup H(x), & x \in (B-Z) \cap S = Z' \cap B \cap S \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup H(x), & x \in (Z \cap B) \cap S = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{+\varepsilon}^*(H, S)]_{\cap\varepsilon}^* [(G, B)_{+\varepsilon}^*(H, S)]$ bakalım. $(F, Z)_{+\varepsilon}^*(H, S) = (V, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(G, B)_{+\varepsilon}^*(H, S) = (W, B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in B \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B - S \\ H'(x), & x \in S - B \\ G'(x) \cup H(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup S)_{\cap\varepsilon}^*(W, B \cup S) = (T, Z \cup B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup S) - (B \cup S) \\ W'(x), & x \in (B \cup S) - (Z \cup S) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup S) \cap (B \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-S) - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ H(x), & x \in (S-Z) - (B \cup S) = \emptyset \\ F(x) \cap H'(x), & x \in (Z \cap S) - (B \cup S) = \emptyset \\ G(x), & x \in (B-S) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ H(x), & x \in (S-B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G(x) \cap H'(x), & x \in (B \cap S) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-S) \cap (B-S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-S) \cap (S-B) = \emptyset \\ F'(x) \cap (G'(x) \cup H(x)), & x \in (Z-S) \cap (B \cap S) = \emptyset \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (S-Z) \cap (B-S) = \emptyset \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (S-Z) \cap (S-B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(x) \cap (G'(x) \cup H(x)), & x \in (S-Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ (F'(x) \cup H(x)) \cap G'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (B-S) = \emptyset \\ (F'(x) \cup H(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (S-B) = Z \cap B' \cap S \\ (F'(x) \cup H(x)) \cap (G'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-S) - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ G(x), & x \in (B-S) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-S) \cap (B-S) = Z \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in (S-Z) \cap (S-B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (S-Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (S-B) = Z \cap B' \cap S \\ (F'(x) \cap H(x)) \cap (G'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta B) \cap S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) (Z \Delta B) \cap S = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\epsilon} (G, B)] \overset{*}{+}_{\epsilon} (H, S) = [(F, Z) \overset{*}{+}_{\epsilon} (H, S)] \overset{*}{\cap}_{\epsilon} [(G, B) \overset{*}{+}_{\epsilon} (H, S)].$$

$$3) (Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\theta_{\epsilon}} (G, B)] \overset{*}{+}_{\epsilon} (H, S) = [(F, Z) \overset{*}{\cup}_{\epsilon} (H, S)] \overset{*}{\cup}_{\epsilon} [(G, B) \overset{*}{\cup}_{\epsilon} (H, S)]$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \overset{*}{\cap}_{\theta_{\epsilon}} (G, B) = (M, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-B \\ G'(\aleph), & \aleph \in B-Z \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$(M, Z \cup B) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (H, \S) = (N, (Z \cup B) \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup B \cup \S$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} M'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup B) - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - (Z \cup B) \\ M'(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in (Z \cup B) \cap \S \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in (Z-B) - \S = Z \cap B' \cap \S' \\ G(\aleph), & \aleph \in (B-Z) - \S = Z' \cap B \cap \S' \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) - \S = Z \cap B \cap \S' \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \S \\ F(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in (Z-B) \cap \S = Z \cap B' \cap \S \\ G(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in (B-Z) \cap \S = Z' \cap B \cap \S \\ (F(\aleph) \cup G(\aleph)) \cap H(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) \cap \S = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \stackrel{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \S)] \stackrel{*}{\cup}_{\varepsilon} [(G, B) \stackrel{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \S)]$ bakalım. $(F, Z) \stackrel{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \S) = (V, Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - Z \\ F(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap \S \end{cases}$$

$(G, B) \stackrel{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \S) = (W, B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in B \cup \S$;

$$W(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in B - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - B \\ G(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in B \cap \S \end{cases}$$

$(V, Z \cup \S) \stackrel{*}{\cup}_{\varepsilon} (W, B \cup \S) = (T, Z \cup B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup B \cup \S$;

$$T(X) = \begin{cases} V'(X), & X \in (Z \cup S) - (B \cup S) \\ W'(X), & X \in (B \cup S) - (Z \cup S) \\ V(X) \cup W(X), & X \in (Z \cup S) \cap (B \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F(X), & X \in (Z - S) - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ H(X), & X \in (S - Z) - (B \cup S) = \emptyset \\ F'(X) \cap H'(X), & X \in (Z \cap S) - (B \cup S) = \emptyset \\ G(X), & X \in (B - S) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ H(X), & X \in (S - B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G'(X) \cap H'(X), & X \in (B \cap S) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F'(X) \cup G'(X), & X \in (Z - S) \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(X) \cup H'(X), & X \in (Z - S) \cap (S - B) = \emptyset \\ F'(X) \cup (G(X) \cup H(X)), & X \in (Z - S) \cap (B \cap S) = \emptyset \\ H'(X) \cup G'(X), & X \in (S - Z) \cap (B - S) = \emptyset \\ H'(X) \cup H'(X), & X \in (S - Z) \cap (S - B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(X) \cup (G(X) \cup H(X)), & X \in (S - Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ (F(X) \cup H(X)) \cup G'(X), & X \in (Z \cap S) \cap (B - S) = \emptyset \\ (F(X) \cup H(X)) \cup H'(X), & X \in (Z \cap S) \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ (F(X) \cup H(X)) \cup (G(X) \cup H(X)), & X \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F(X), & X \in (Z - S) - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ G(X), & X \in (B - S) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(X) \cup G'(X), & X \in (Z - S) \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ H'(X), & X \in (S - Z) \cap (S - B) = Z' \cap B' \cap S \\ U, & X \in (S - Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ U, & X \in (Z \cap S) \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ (F(X) \cup H(X)) \cup (G(X) \cup H(X)), & X \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta B) \cap S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4)(Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \overset{*}{\underset{\epsilon}{*}} (G, B)] \overset{*}{\underset{+}{+}} (H, S) = [(F, Z) \overset{*}{\underset{U}{U}} (H, S)] \overset{*}{\underset{N}{N}} [(G, B) \overset{*}{\underset{U}{U}} (H, S)].$$

4.4.4. Teorem $(F, Z), (G, B), (H, S), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş artı işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Artı İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Soldan Dağılımı

$$1) Z \cap B \cap S = Z \cap (B \Delta S) = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{+\varepsilon}^* [(G, B) \widetilde{\cap} (H, S)] = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B)] \widetilde{\cup} [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B) \widetilde{\cap} (H, S) = (M, B)$ olsun. Buradan $\forall x \in B$;

$$M(x) = \begin{cases} G(x), & x \in B - S \\ G(x) \cap H(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(F, Z)_{+\varepsilon}^* (M, B) = (N, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ M'(x), & x \in B - Z \\ F'(x) \cup M(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in (B - S) - Z = Z' \cap B \cap S' \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B \cap S) - Z = Z' \cap B \cap S \\ F'(x) \cup G(x), & x \in Z \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B)] \widetilde{\cup} [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, S)]$ bakalım.

$(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in B - Z \\ F'(x) \cup G(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{+}_\varepsilon (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \overset{\sim}{\cup} (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (B - Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z - B) \cap (Z - S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z - B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (B - Z) \cap (Z - S) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B - Z) \cap (S - Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(x) \cup (F'(x) \cup H(x)), & x \in (B - Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z - S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cup G(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G(x)) \cup (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in (B - Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(x), & x \in (Z - B) \cap (Z - S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cup H(x), & x \in (Z - B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B - Z) \cap (S - Z) = Z' \cap B \cap S \\ F'(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z - S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cup G(x)) \cup (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, Z-B ele alırsak, $Z-B=Z\cap B'$ olup, bir eleman B nin tümleyeninde ise o eleman ya $\S-B$ de, ya da $B\cup \S$ nin tümleyenindedir. Burdan, $\aleph \in \S-B$ ise $\aleph \in Z\cap B'\cap \S$ veya $\aleph \in Z\cap B'\cap \S'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z\cap B\cap \S = Z\cap B\cap \S' = Z\cap B'\cap \S = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z\cap B'\cap \S = Z\cap B\cap \S' = \emptyset$ şartının $Z\cap (B\Delta \S) = \emptyset$ denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z\Delta B)\cap \S = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{+\epsilon}^* [(G, B) \widetilde{\cup} (H, \S)] = [(F, Z)_{+\epsilon}^* (G, B)] \widetilde{\cup} [(F, Z)_{+\epsilon}^* (H, \S)].$$

$$3) (Z\Delta B)\cap \S = Z\cap B\cap \S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{+\epsilon}^* [(G, B) \widetilde{*} (H, \S)] = [(F, Z)_{+\epsilon}^* (G, B)] \widetilde{\cup} [(F, Z)_{+\epsilon}^* (H, \S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B) \widetilde{*} (H, \S) = (M, B)$ olsun. Buradan $\forall \aleph \in B$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} G(\aleph), & \aleph \in B-\S \\ G'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in B\cap \S \end{cases}$$

$(F, Z)_{+\epsilon}^* (M, B) = (N, Z\cup B)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z\cup B$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-B \\ M'(\aleph), & \aleph \in B-Z \\ F'(\aleph) \cup M(\aleph), & \aleph \in Z\cap B \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-B \\ G'(\aleph), & \aleph \in (B-\S)-Z = Z'\cap B\cap \S' \\ G(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in (B\cap \S)-Z = Z'\cap B\cap \S \\ F'(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z\cap (B-\S) = Z\cap B\cap \S' \\ F'(\aleph) \cup (G'(\aleph) \cup H'(\aleph)), & \aleph \in Z\cap (B\cap \S) = Z\cap B\cap \S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{+\epsilon}^* (G, B)] \widetilde{\cup} [(F, Z)_{+\epsilon}^* (H, \S)]$ bakalım.

$(F, Z)_{+\epsilon}^* (G, B) = (V, Z\cup B)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z\cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-B \\ G'(x), & x \in B-Z \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z) \stackrel{*}{*_{\varepsilon}} (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-S \\ H'(x), & x \in S-Z \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \widetilde{\cup} (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (B-Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z \cap B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (B-Z) \cap (Z-S) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(x) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (B-Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in (B-Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(x), & x \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4) (Z \Delta B) \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{+\varepsilon}^* [(G, B)_{\emptyset}^{\sim} (H, S)] = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B)]_{\cap}^{\sim} [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, S)].$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Artı İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) (Z \Delta B) \cap S = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\cup}^{\sim} [(G, B)]_{+\varepsilon}^* (H, S) = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, S)]_{\cap}^{\sim} [(G, B)]_{+\varepsilon}^* (H, S).$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z)_{\cup}^{\sim} (G, B) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$,

$$M(x) = \begin{cases} F(x), & x \in Z-B \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(M, Z)_{+\varepsilon}^* (H, S) = (N, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in Z-S \\ H'(x), & x \in S-Z \\ M'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-B) - S = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap B) - S = Z \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F'(x) \cup H(x), & x \in (Z-B) \cap S = Z \cap B' \cap S \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup H(x), & x \in (Z \cap B) \cap S = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z)_{+\varepsilon}^*(H, S)] \tilde{\cap} [(G, B)_{+\varepsilon}^*(H, S)]$.

$(F, Z)_{+\varepsilon}^*(H, S) = (V, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

Şimdi $(G, B)_{+\varepsilon}^*(H, S) = (W, B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in B \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B - S \\ H'(x), & x \in S - B \\ G'(x) \cup H(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup S) \tilde{\cap} (W, B \cup S) = (T, (Z \cup S))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup S) - (B \cup S) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup S) \cap (B \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-\mathfrak{S})-(B \cup \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (\mathfrak{S}-Z)-(B \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap \mathfrak{S})-(B \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{N}) \cap G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{N}) \cap H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{N}) \cap (G'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{N}) \cap G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B-\mathfrak{S}) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{N}) \cap H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{N}) \cap (G'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ (F'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N})) \cap G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = \emptyset \\ (F'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N})) \cap H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ (F'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N})) \cap (G'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-\mathfrak{S})-(B \cup \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{N}) \cap G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{N}) \cap G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{N}) \cap G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ (F'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N})) \cap (G'(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, $\mathfrak{S}-Z$ ele alırsak, $\mathfrak{S}-Z = \mathfrak{S} \cap Z'$ olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya B-Z de, ya da $B \cup Z$ nin tümleyenindedir. Burdan, $\mathfrak{N} \in Z' \cap B \cap \mathfrak{S}$ veya $\mathfrak{N} \in Z' \cap B' \cap \mathfrak{S}$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) (Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \tilde{\cap} (G, B) \big|_{+\varepsilon}^* (H, \mathfrak{S}) = [(F, Z) \big|_{+\varepsilon}^* (H, \mathfrak{S})] \tilde{\cup} [(G, B) \big|_{+\varepsilon}^* (H, \mathfrak{S})].$$

$$3) (Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset, [(F, Z) \tilde{\cap} (G, B) \big|_{+\varepsilon}^* (H, \mathfrak{S})] = [(F, Z) \big|_{\cup \varepsilon}^* (H, \mathfrak{S})] \tilde{\cup} [(G, B) \big|_{\cup \varepsilon}^* (H, \mathfrak{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \tilde{\cap} (G, B) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z$,

$$M(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in Z-B \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$(M, Z) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (H, \S) = (N, Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} M'(\aleph), & \aleph \in Z - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - Z \\ M'(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap \S \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in (Z-B) - \S = Z \cap B' \cap \S' \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) - \S = Z \cap B \cap \S' \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - Z \\ F'(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in (Z-B) \cap \S = Z \cap B' \cap \S \\ (F(\aleph) \cup G(\aleph)) \cup H(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) \cap \S = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (H, \S)] \sim [(G, B) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (H, \S)]$. $(F, Z) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (H, \S)$ $(V, Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - Z \\ F(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap \S \end{cases}$$

Şimdi $(G, B) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (H, \S) = (W, B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in B \cup \S$;

$$W(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in B - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - B \\ G(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in B \cap \S \end{cases}$$

$(V, Z \cup \S) \sim (W, B \cup \S) = (T, (Z \cup \S))$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} V(\aleph), & \aleph \in (Z \cup \S) - (B \cup \S) \\ V(\aleph) \cup W(\aleph), & \aleph \in (Z \cup \S) \cap (B \cup \S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S})-(B \cup \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z)-(B \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S})-(B \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cup (G(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B-\mathfrak{S}) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}) \cup (G(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ (F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cup G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = \emptyset \\ (F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ (F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cup (G(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S})-(B \cup \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ U, & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ U, & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ (F(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cup (G(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4)(Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset, [(F, Z) \underset{*}{\sim} (G, B)]_{+\varepsilon}^* (H, \mathfrak{S}) = [(F, Z) \underset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S})] \underset{*}{\cap} [(G, B) \underset{*}{\cup}_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S})].$$

4.4.5. Teorem $(F, Z), (G, B), (H, \mathfrak{S}), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş artı işleminin tümleyenli esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Artı İşleminin Tümleyenli Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Soldan Dağılıması

$$1) (Z \Delta S) \cap B = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{+\varepsilon}^* [(G, B) \underset{\cap}{\sim} (H, S)] = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B)] \underset{\cap}{\sim} [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B) \underset{\cap}{\sim} (H, S) = (M, B)$ olsun. Buradan $\forall x \in B$;

$$M(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B - S \\ G(x) \cap H(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(F, Z)_{+\varepsilon}^* (M, B) = (N, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ M'(x), & x \in B - Z \\ F'(x) \cup M(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G(x), & x \in (B - S) - Z = Z' \cap B \cap S' \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B \cap S) - Z = Z' \cap B \cap S \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(x) \cup (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B)] \underset{\cap}{\sim} [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, S)]$ bakalım.

$(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in B - Z \\ F'(x) \cup G(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

*
(V, Z ∪ B) ~ (W, Z ∪ S) = (T, (Z ∪ B)) olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;
 $\cap$

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G(x), & x \in (B - Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F'(x) \cap F'(x), & x \in (Z - B) \cap (Z - S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z - B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ F'(x) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z - B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cap F'(x), & x \in (B - Z) \cap (Z - S) = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (B - Z) \cap (S - Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(x) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (B - Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z - S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G(x), & x \in (B - Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(x), & x \in (Z - B) \cap (Z - S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x), & x \in (Z - B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (B - Z) \cap (S - Z) = Z' \cap B \cap S \\ F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z - S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cup G(x)) \cap (F'(x) \cup H(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, Z-B ele alırsak, Z-B = Z ∩ B' olup, bir eleman B nin tümleyeninde ise o eleman ya S-B de, ya da B ∪ S nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in S - B$ ise $x \in Z \cap B' \cap S$ veya $x \in Z \cap B' \cap S'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap B \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$

şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S}' = \emptyset$ şartının $(Z \Delta \mathcal{S}) \cap B = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) (Z \Delta B) \cap \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S}' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{+\varepsilon}^* [(G, B) \underset{U}{\sim} (H, \mathcal{S})] = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B)] \underset{U}{\sim} [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, \mathcal{S})].$$

$$3) (Z \Delta B) \cap \mathcal{S} = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{+\varepsilon}^* [(G, B) \underset{*}{\sim} (H, \mathcal{S})] = [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B)] \underset{U}{\sim} [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, \mathcal{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B) \underset{*}{\sim} (H, \mathcal{S}) = (M, B)$ olsun. Buradan $\forall \mathfrak{N} \in B$;

$$M(\mathfrak{N}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - \mathcal{S} \\ G'(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

$(F, Z)_{+\varepsilon}^* (M, B) = (N, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B$;

$$N(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - B \\ M'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - Z \\ F'(\mathfrak{N}) \cup M(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap B \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - B \\ G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B - \mathcal{S}) - Z = Z' \cap B \cap \mathcal{S}' \\ G(\mathfrak{N}) \cap H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B \cap \mathcal{S}) - Z = Z' \cap B \cap \mathcal{S} \\ F'(\mathfrak{N}) \cup G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap (B - \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ F'(\mathfrak{N}) \cup (G'(\mathfrak{N}) \cup H'(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in Z \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B)] \underset{U}{\sim} [(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, \mathcal{S})]$ bakalım.

$(F, Z)_{+\varepsilon}^* (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-B \\ G'(x), & x \in B-Z \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z) \stackrel{*}{\underset{\varepsilon}{*}} (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-S \\ H'(x), & x \in S-Z \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \stackrel{*}{\underset{U}{\sim}} (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G(x), & x \in (B-Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F(x) \cap G(x), & x \in (Z \cap B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (B-Z) \cap (Z-S) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(x) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (B-Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G(x), & x \in (B-Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(x), & x \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cup G'(x)) \cup (F'(x) \cup H'(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4) (Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{+_\epsilon}{*} [(G, B) \underset{\theta}{\sim} (H, S)] = [(F, Z) \underset{*_\epsilon}{*} (G, B)] \underset{\cap}{\sim} [(F, Z) \underset{*_\epsilon}{*} (H, S)].$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Artı İşleminin Tümleyenli Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) (Z \Delta B) \cap S = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\cup}{\sim} [(G, B) \underset{+_\epsilon}{*} (H, S)] = [(F, Z) \underset{+_\epsilon}{*} (H, S)] \underset{\cap}{\sim} [(G, B) \underset{+_\epsilon}{*} (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \underset{\cup}{\sim} [(G, B) \underset{+_\epsilon}{*} (H, S)] = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$,

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-B \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(M, Z) \underset{+_\epsilon}{*} (H, S) = (N, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in Z-S \\ H'(x), & x \in S-Z \\ M'(x) \cup H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in (Z-B) - \S = Z \cap B' \cap \S' \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) - \S = Z \cap B \cap \S' \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - Z \\ F(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in (Z-B) \cap \S = Z \cap B' \cap \S \\ (F'(\aleph) \cap G'(\aleph)) \cup H(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) \cap \S = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, \S)] \underset{\cap}{\sim} [(G, B)_{+\varepsilon}^* (H, \S)]$.

$(F, Z)_{+\varepsilon}^* (H, \S) = (V, Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - Z \\ F'(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap \S \end{cases}$$

Şimdi $(G, B)_{+\varepsilon}^* (H, \S) = (W, B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in B \cup \S$;

$$W(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in B - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - B \\ G'(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in B \cap \S \end{cases}$$

$(V, Z \cup \S) \underset{\cap}{\sim} (W, B \cup \S) = (T, (Z \cup \S))$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} V'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup \S) - (B \cup \S) \\ V(\aleph) \cap W(\aleph), & \aleph \in (Z \cup \S) \cap (B \cup \S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S})-(B \cup \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z)-(B \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ F(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S})-(B \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap (G'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B-\mathfrak{S}) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}) \cap (G'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ (F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = \emptyset \\ (F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ (F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cap (G'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S})-(B \cup \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ (F'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})) \cap (G'(\mathfrak{K}) \cup H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, $\mathfrak{S}-Z$ ele alırsak, $\mathfrak{S}-Z = \mathfrak{S} \cap Z'$ olup, bir eleman Z nın tümleyeninde ise o eleman ya $B-Z$ de, ya da $B \cup Z$ nin tümleyenindedir. Burdan, $\mathfrak{K} \in Z' \cap B \cap \mathfrak{S}$ veya $\mathfrak{K} \in Z' \cap B' \cap \mathfrak{S}$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\cap}{\sim}^*_{+\varepsilon} (G, B) \underset{+}{\sim}^*_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S}) = [(F, Z) \underset{+}{\sim}^*_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S})] \underset{\cup}{\sim}^*_{\varepsilon} [(G, B) \underset{+}{\sim}^*_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S})].$$

$$3) (Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset, [(F, Z) \underset{\emptyset}{\sim}^*_{\theta} (G, B)] \underset{+}{\sim}^*_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S}) = [(F, Z) \underset{\cup}{\sim}^*_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S})] \underset{\cup}{\sim}^*_{\varepsilon} [(G, B) \underset{\cup}{\sim}^*_{\varepsilon} (H, \mathfrak{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \underset{\emptyset}{\sim}^*_{\theta} (G, B) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z$,

$$M(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-B \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$(M, Z) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (H, \S) = (N, Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} M'(\aleph), & \aleph \in Z-\S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S-Z \\ M'(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap \S \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in (Z-B)-\S = Z \cap B' \cap \S' \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B)-\S = Z \cap B \cap \S' \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S-Z \\ F(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in (Z-B) \cap \S = Z \cap B' \cap \S \\ (F(\aleph) \cup G(\aleph)) \cup H(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) \cap \S = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (H, \S)] \sim \underset{U}{\stackrel{*}{+}} [(G, B) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (H, \S)]$. $(F, Z) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (H, \S)$

$(V, Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-\S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S-Z \\ F(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in Z \cap \S \end{cases}$$

Şimdi $(G, B) \stackrel{*}{+}_{\varepsilon} (H, \S) = (W, B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in B \cup \S$;

$$W(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in B-\S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S-B \\ G(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in B \cap \S \end{cases}$$

$(V, Z \cup \S) \underset{U}{\stackrel{*}{+}} (W, B \cup \S) = (T, (Z \cup \S))$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$T(X) = \begin{cases} V'(X), & X \in (Z \cup S) - (B \cup S) \\ V(X) \cup W(X), & X \in (Z \cup S) \cap (B \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F(X), & X \in (Z - S) - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ H(X), & X \in (S - Z) - (B \cup S) = \emptyset \\ F'(X) \cap H'(X), & X \in (Z \cap S) - (B \cup S) = \emptyset \\ F'(X) \cup G'(X), & X \in (Z - S) \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(X) \cup H'(X), & X \in (Z - S) \cap (S - B) = \emptyset \\ F'(X) \cup (G(X) \cup H(X)), & X \in (Z - S) \cap (B \cap S) = \emptyset \\ H'(X) \cup G'(X), & X \in (S - Z) \cap (B - S) = \emptyset \\ H'(X) \cup H'(X), & X \in (S - Z) \cap (S - B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(X) \cup (G(X) \cup H(X)), & X \in (S - Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ (F(X) \cup H(X)) \cup G'(X), & X \in (Z \cap S) \cap (B - S) = \emptyset \\ (F(X) \cup H(X)) \cup H'(X), & X \in (Z \cap S) \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ (F(X) \cup H(X)) \cup (G(X) \cup H(X)), & X \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F(X), & X \in (Z - S) - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(X) \cup G'(X), & X \in (Z - S) \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ H'(X), & X \in (S - Z) \cap (S - B) = Z' \cap B' \cap S \\ U, & X \in (S - Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ U, & X \in (Z \cap S) \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ (F(X) \cup H(X)) \cup (G(X) \cup H(X)), & X \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) (Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset, [(F, Z) \underset{*}{\sim} (G, B)]_{+\epsilon}^* (H, S) = [(F, Z) \underset{*}{\cup}_{\epsilon} (H, S)] \underset{*}{\sim} [(G, B) \underset{*}{\cup}_{\epsilon} (H, S)].$$

5. TÜMLEYENLİ GENİŞLETİLMİŞ TETA İŞLEMİ

Bu bölümde, tümleyenli genişletilmiş teta adı verilen yeni bir esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir.

5.1. Tanım (F, Z) ve (G, B) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümenin

$(F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (G, B)$ ile gösterilen tümleyenli genişletilmiş teta işlemi $\mathcal{S} = Z \cup B$ ve $\forall \mathcal{X} \in \mathcal{S}$;

$$H(\mathcal{X}) = \begin{cases} F'(\mathcal{X}), & \mathcal{X} \in Z - B \\ G'(\mathcal{X}), & \mathcal{X} \in B - Z \\ F(\mathcal{X}) \theta G(\mathcal{X}), & \mathcal{X} \in Z \cap B \end{cases}$$

olmak üzere $(F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (G, B) = (H, \mathcal{S})$ ile tanımlanır.

5.2. Örnek $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi $Z = \{e_1, e_3\}$ ve $B = \{e_2, e_3, e_4\}$ E nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme olmak üzere (F, Z) ve (G, B) , U üzerinde

$(F, Z) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, B) = \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$

olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (G, B) = (H, Z \cup B)$ olmak üzere $\forall \mathcal{X} \in Z \cup B$;

$$H(\mathcal{X}) = \begin{cases} F'(\mathcal{X}) & \mathcal{X} \in Z - B \\ G'(\mathcal{X}), & \mathcal{X} \in B - Z \\ F'(\mathcal{X}) \cap G'(\mathcal{X}), & \mathcal{X} \in Z \cap B \end{cases}$$

Burada, $Z \cup B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $Z - B = \{e_1\}$, $B - Z = \{e_2, e_4\}$, $Z \cap B = \{e_3\}$ olmak üzere, $H(e_1) = F'(e_1) = \{h_1, h_3, h_4\}$, $H(e_2) = G'(e_2) = \{h_2, h_3\}$, $H(e_4) = G'(e_4) = \{h_1, h_2, h_4\}$ ve $H(e_3) = F'(e_3) \cap G'(e_3) = \{h_3, h_4\} \cap \{h_1, h_4, h_5\} = \{h_4\}$.

Böylece, $(F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (G, B) = \{(e_1, \{h_1, h_3, h_4\}), (e_2, \{h_2, h_3\}), (e_3, \{h_4\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_4\})\}$

5.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $\overset{*}{\theta}_\varepsilon$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $\overset{*}{\theta}_\varepsilon$ işleminin, $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\begin{aligned} \overset{*}{\theta}_\varepsilon : S_E(U) \times S_E(U) &\rightarrow S_E(U) \\ ((F,Z), (G,B)) &\rightarrow (F,Z) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (G,B) = (H,Z \cup B) \end{aligned}$$

olup, (F,Z) ve (G,B) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F,Z) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (G,B)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir.

2) $[(F,Z) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (G,B)] \overset{*}{\theta}_\varepsilon (H,\S) \neq (F,Z) \overset{*}{\theta}_\varepsilon [(G,B) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (H,\S)]$.

İspat: Öncelikle sol tarafa bakalım. $(F,Z) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (G,B) = (T,Z \cup B)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$(T,Z \cup B) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (H,\S) = (M,Z \cup B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup B \cup \S$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} T'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup B) - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - (Z \cup B) \\ T'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup B) \cap \S \end{cases}$$

Buradan,

$$M(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-B) - \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B-Z) - \mathfrak{S} = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F(\mathfrak{N}) \cup G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap B) - \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{N}) & \mathfrak{N} \in \mathfrak{S} - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ F(\mathfrak{N}) \cap H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z-B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G(\mathfrak{N}) \cap H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B-Z) \cap \mathfrak{S} = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ (F(\mathfrak{N}) \cup G(\mathfrak{N})) \cap H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (Z \cap B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $(F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} [(G, B) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, \mathfrak{S})]$ bakalım.

$(G, B) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, \mathfrak{S}) = (K, B \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in B \cup \mathfrak{S}$;

$$K(\mathfrak{N}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in \mathfrak{S} - B \\ G'(\mathfrak{N}) \cap H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (K, B \cup \mathfrak{S}) = (S, Z \cup B \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B \cup \mathfrak{S}$;

$$S(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - (B \cup \mathfrak{S}) \\ K'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B \cup \mathfrak{S}) - Z \\ F'(\mathfrak{N}) \cap K'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap (B \cup \mathfrak{S}) \end{cases}$$

Buradan,

$$S(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - (B \cup \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B - \mathfrak{S}) - Z = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H(\mathfrak{N}) & \mathfrak{N} \in (\mathfrak{S} - B) - Z = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in (B \cap \mathfrak{S}) - Z = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{N}) \cap G(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap (B - \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{N}) \cap H(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap (\mathfrak{S} - B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{N}) \cap (G(\mathfrak{N}) \cup H(\mathfrak{N})), & \mathfrak{N} \in Z \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Böylece, $M \neq S$ olduğu görülür. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\overset{*}{\theta_\varepsilon}$ işlemi birleşme

özellğine sahip değildir.

$$3) [(F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (G, Z)] \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, Z) \neq (F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} [(G, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, Z)].$$

İspat: Öncelikle sol tarafa bakalım $(F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (G, Z) = (T, Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall x \in Z \cup Z = Z$;

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ G'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(T, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, Z) = (M, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$M(x) = \begin{cases} T'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ H'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ T'(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan,

$$M(x) = \begin{cases} T'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ H'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ (F(x) \cup G(x)) \cap H'(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Şimdi sağ tarafa yani $(F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} [(G, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, Z)]$ bakalım. $(G, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, Z) = (L, Z \cup Z)$ olsun.

Burada, $\forall x \in Z$;

$$L(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ H'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (L, Z) = (N, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ L'(x), & x \in Z - Z = \emptyset \\ F'(x) \cap L'(x), & x \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ L'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap (G(\aleph) \cup H(\aleph)), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Böylece, $M \neq N$ olduğu görülür. Yani, $Z \subseteq E$ sabit bir paramere kümesi olmak üzere, $S_Z(U)$ kümesi üzerinde $\overset{*}{\theta}_\varepsilon$ işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F, Z) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (G, B) = (G, B) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (F, Z).$$

İspat: Öncelikle eşitliğin her iki tarafındaki esnek kümenin parametere kümeleri $Z \cup B$ olup, esnek eşitliğin ilk şartı sağlanmış olur. Şimdi eşitliğin sol tarafına bakalım.

$(F, Z) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (G, B) = (H, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $(G, B) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (F, Z)$ bakalım. $(G, B) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (F, Z) = (T, B \cup Z)$ olsun.

Burada $\forall \aleph \in B \cup Z$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G'(\aleph) \cap F'(\aleph), & \aleph \in B \cap Z \end{cases}$$

Böylece, $H = T$ olduğu görülür. Benzer şekilde, $(F, Z) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (G, Z) = (G, Z) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (F, Z)$. Yani, $S_E(U)$

ve $S_Z(U)$ kümeleri üzerinde $\overset{*}{\theta}_\varepsilon$ işleminin değişme özelliği vardır.

$$5) (F, Z) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (F, Z) = (F, Z)^r.$$

İspat: $(F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (F, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap F'(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan, $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph) \cap F'(\aleph) = F'(\aleph)$ olup $(H, Z) = (F, Z)^r$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde $\overset{*}{\theta_\varepsilon}$ işlemi denk güçlülük (idempotent) özelliğine sahip değildir.

$$6) (F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} \emptyset_Z = \emptyset_Z \overset{*}{\theta_\varepsilon} (F, Z) = (F, Z)^r.$$

İspat: $\emptyset_Z = (S, Z)$ olsun. $\forall \aleph \in Z$; $S(\aleph) = \emptyset$. $(F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (S, Z) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ S'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap S'(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph) \cap S'(\aleph) = F'(\aleph) \cap U = F'(\aleph)$ olup, $(H, Z) = (F, Z)^r$.

$$7) (F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \overset{*}{\theta_\varepsilon} (F, Z) = (F, Z)^r.$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (K, \emptyset)$ ve $(F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (K, \emptyset) = (Q, Z \cup \emptyset) = (Q, Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$Q(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - \emptyset = Z \\ K'(\aleph), & \aleph \in \emptyset - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap K'(\aleph), & \aleph \in Z \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Buradan, $\forall \aleph \in Z$; $Q(\aleph) = F'(\aleph)$ olup $(Q, Z) = (F, Z)^r$.

$$8) (F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} U_Z = U_Z \overset{*}{\theta_\varepsilon} (F, Z) = \emptyset_Z.$$

İspat: $U_Z=(T,Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$; $T(\aleph)=U$. $(F,Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (T,Z)=(H,Z \cup Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph)=\begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-Z=\emptyset \\ T'(\aleph), & \aleph \in Z-Z=\emptyset \\ F'(\aleph) \cap T'(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z=Z \end{cases}$$

Buradan $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph)=F'(\aleph) \cap T'(\aleph)=F'(\aleph) \cap \emptyset=\emptyset$ olup $(H,Z)=\emptyset_Z$.

$$9) (F,Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} U_E=U_E \overset{*}{\theta_\varepsilon} (F,Z)=\emptyset_E.$$

İspat: $U_E=(S,E)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in E$; $S(\aleph)=U$. $(F,Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (S,E)=(H,Z \cup E)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup E=E$;

$$H(\aleph)=\begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-E=\emptyset \\ S'(\aleph), & \aleph \in E-Z=Z' \\ F'(\aleph) \cap S'(\aleph), & \aleph \in Z \cap E=Z \end{cases}$$

Burada $\forall \aleph \in Z \cap E=Z$, $F'(\aleph) \cap S'(\aleph)=F'(\aleph) \cap \emptyset=\emptyset$ olup,

$$H(\aleph)=\begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-E=\emptyset \\ \emptyset, & \aleph \in E-Z=Z' \\ \emptyset, & \aleph \in Z \cap E=Z \end{cases}$$

Böylece, $\forall \aleph \in E$ için, $(H,Z)=\emptyset_E$.

$$10) (F,Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (F,Z)^r=(F,Z)^r \overset{*}{\theta_\varepsilon} (F,Z)=\emptyset_Z.$$

İspat: $(F,Z)^r=(H,Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph)=F'(\aleph)$. $(F,Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H,Z)=(T,Z \cup Z)$ olsun .

Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ H'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

Burada $\forall \aleph \in Z$; $T(\aleph) = F'(\aleph) \cap H'(\aleph) = F'(\aleph) \cap F(\aleph) = \emptyset$ olup $(T, Z) = \emptyset_Z$.

$$11) [(F, Z) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (G, B)]^r = (F, Z) \cup_\varepsilon (G, B).$$

İspat: $(F, Z) \overset{*}{\theta}_\emptyset (G, B) = (H, Z \cup B)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$(H, Z \cup B)^r = (T, Z \cup B)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

Buradan, $(T, Z \cup B) = (F, Z) \cup_\varepsilon (G, B)$ olur.

$$12) (F, Z) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (G, B) = U_{Z \cup B} \Leftrightarrow (F, Z) = \emptyset_Z \text{ ve } (G, B) = \emptyset_B.$$

İspat: $(F, Z) \overset{*}{\theta}_\varepsilon (G, B) = (T, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$(T, Z \cup B) = U_{Z \cup B}$ olduğundan, $\forall \aleph \in Z \cup B$ için $T(\aleph) = U$. Buradan, $\forall \aleph \in Z - B$; $F'(\aleph) = U$, $\forall \aleph \in B - Z$; $G'(\aleph) = U$ ve $\forall \aleph \in Z \cap B$; $F'(\aleph) \cap G'(\aleph) = U$. Buradan, $\forall \aleph \in Z - B$; $F(\aleph) = \emptyset$, $\forall \aleph \in B - Z$;

$G(\aleph)=\emptyset \ \forall \aleph \in Z \cap B$; $F'(\aleph) = U$, $G'(\aleph) = U$. Buradan, $\forall \aleph \in Z \cap B$; $F(\aleph) = \emptyset$, $G(\aleph) = \emptyset$. Böylece, $\forall \aleph \in Z$; $F(\aleph)=\emptyset$ ve $\forall \aleph \in B$; $G(\aleph)=\emptyset$. Böylece, $(F, Z) = \emptyset_Z$ ve $(G, B) = \emptyset_B$.

$$13) \emptyset_Z \cong_{\theta_\varepsilon}^*(F, Z) (G, B), \quad \emptyset_B \cong_{\theta_\varepsilon}^*(F, Z) (G, B), \quad \emptyset_{Z \cup B} \cong_{\theta_\varepsilon}^*(F, Z) (G, B), \quad (F, Z) \cong_{\theta_\varepsilon}^*(G, B) \\ \cong U_{Z \cup B}.$$

$$14) (F, Z) \cong_{\theta_\varepsilon}^*(G, Z) \cong (F, Z)^r \text{ ve } (F, Z) \cong_{\theta_\varepsilon}^*(G, Z) \cong (G, Z)^r.$$

İspat: $(F, Z) \cong_{\theta_\varepsilon}^*(G, B) = (H, Z \cup Z)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ G'(\aleph), & \aleph \in Z - Z = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap Z = Z \end{cases}$$

$\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph) \cap G'(\aleph) \subseteq F'(\aleph)$. Böylece, $(F, Z) \cong_{\theta_\varepsilon}^*(G, Z) \cong (F, Z)^r$. Benzer şekilde,

$\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph) \cap G'(\aleph) \subseteq G'(\aleph)$. Böylece $(F, Z) \cong_{\theta_\varepsilon}^*(G, Z) \cong (G, Z)^r$.

$$15) (F, Z) \cong (G, B) \text{ ise } (F, Z) \cong_{\theta_\varepsilon}^*(G, B) = (G, B)^r \text{ ve } (F, Z) \cong (G, Z) \text{ ise } (F, Z) \cong_{\theta_\varepsilon}^*(G, Z) = (G, Z)^r.$$

İspat: $(F, Z) \cong (G, B)$ ise $Z \subseteq B$ ve her $\aleph \in Z$ için, $F(\aleph) \subseteq G(\aleph)$. $(F, Z) \cong_{\theta_\varepsilon}^*(G, B) = (H, Z \cup B = B)$ olsun. $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$H(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B = \emptyset \\ G'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B = Z \end{cases}$$

Her $\aleph \in Z$ için, $F(\aleph) \subseteq G(\aleph)$ ise $G'(\aleph) \subseteq F'(\aleph)$. Böylece, $\forall \aleph \in Z$; $H(\aleph) = F'(\aleph) \cap G'(\aleph) = G'(\aleph)$.

Buradan, $\forall \aleph \in B$; $H(\aleph) = G'(\aleph)$ olur. Böylece, $(F, Z) \cong_{\theta_\varepsilon}^*(G, B) = (G, B)^r$. $(F, Z) \cong (G, Z)$ ise

$(F, Z) \cong_{\theta_\varepsilon}^*(G, Z) = (G, Z)^r$ olacağı açıktır.

$$16) (F, Z) \cong (G, Z) \text{ ise } (G, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, B) \cong (F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, B).$$

İspat: $(F, Z) \cong (G, Z)$ olsun. Buradan, $\forall \mathfrak{N} \in Z$ için, $F(\mathfrak{N}) \subseteq G(\mathfrak{N})$ ve böylece $\forall \mathfrak{N} \in Z$ için $G'(\mathfrak{N}) \subseteq F'(\mathfrak{N})$ olur. $(G, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, B) = (W, Z \cup B)$ olsun. Böylece, $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B$ için,

$$W(\mathfrak{N}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - B \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - Z \\ G'(\mathfrak{N}) \cap H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, B) = (L, Z \cup B)$ olsun. Böylece, $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B$ için,

$$L(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - B \\ H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - Z \\ F'(\mathfrak{N}) \cap H'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap B \end{cases}$$

Böylece, $\forall \mathfrak{N} \in Z - B$; $W(\mathfrak{N}) = G'(\mathfrak{N}) \subseteq F'(\mathfrak{N}) = L(\mathfrak{N})$, $\forall \mathfrak{N} \in B - Z$; $W(\mathfrak{N}) = H'(\mathfrak{N}) \subseteq H'(\mathfrak{N}) = L(\mathfrak{N})$,
 $\forall \mathfrak{N} \in Z \cap B$; $W(\mathfrak{N}) = G'(\mathfrak{N}) \cap H'(\mathfrak{N}) \subseteq F'(\mathfrak{N}) \cap H'(\mathfrak{N}) = L(\mathfrak{N})$ olup, $(G, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, B) \cong$
 $(F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, B).$

17) $(G, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, B) \cong (F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, B)$ ise $(F, Z) \cong (G, Z)$ olmak zorunda değildir. Yani Teorem 5.3. (16) tersi doğru değildir.

İspat: Teorem 5.3 (16) nın tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $Z = \{e_1, e_3\}$ ve $B = \{e_1, e_3, e_5\}$ E'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, Z) , (G, Z) ve (H, B) , U üzerinde $(F, Z) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, Z) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$, $(H, B) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_2, h_5\})\}$ olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.

Buradan, $(G, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, B) = (L, Z \cup B)$ olmak üzere $(L, Z \cup B) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_1, h_5\})\}$ ve $(F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, B) = (K, Z \cup B)$ olmak üzere $(K, Z \cup B) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_1, h_5\})\}$. Buradan, $(G, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, B) \cong (F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, B)$; fakat $(F, Z) \not\cong (G, Z)$ olmadığı açıktır.

18) $(F, Z) \cong (G, Z)$ ve $(K, B) \cong (L, B)$ ise $(G, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (L, B) \cong (F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (K, B)$.

İspat: $(F, Z) \cong (G, Z)$ ve $(K, B) \cong (L, B)$ olsun. Buradan, $\forall \mathfrak{N} \in Z$ için, $F(\mathfrak{N}) \subseteq G(\mathfrak{N})$ ve böylece $G'(\mathfrak{N}) \subseteq F'(\mathfrak{N})$ ve $\forall \mathfrak{N} \in B$ için, $K(\mathfrak{N}) \subseteq L(\mathfrak{N})$ ve böylece $L'(\mathfrak{N}) \subseteq K'(\mathfrak{N})$ olur.

$(G, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (L, B) = (W, Z \cup B)$ olsun. Böylece, $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B$ için,

$$W(\mathfrak{N}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - B \\ L'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - Z \\ G'(\mathfrak{N}) \cap L'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (K, B) = (S, Z \cup B)$ olsun. Böylece, $\forall \mathfrak{N} \in Z \cup B$ için,

$$S(\mathfrak{N}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z - B \\ K'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in B - Z \\ F'(\mathfrak{N}) \cap K'(\mathfrak{N}), & \mathfrak{N} \in Z \cap B \end{cases}$$

Böylece, $\forall \mathfrak{N} \in Z - B$; $W(\mathfrak{N}) = G'(\mathfrak{N}) \subseteq F'(\mathfrak{N}) = S(\mathfrak{N})$, $\forall \mathfrak{N} \in B - Z$; $W(\mathfrak{N}) = L'(\mathfrak{N}) \subseteq K'(\mathfrak{N}) = S(\mathfrak{N})$, $\forall \mathfrak{N} \in Z \cap B$; $W(\mathfrak{N}) = G'(\mathfrak{N}) \cap L'(\mathfrak{N}) \subseteq F'(\mathfrak{N}) \cap K'(\mathfrak{N}) = S(\mathfrak{N})$ olup, $(G, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (L, B) \cong (F, Z) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (K, B)$.

5.4. Teorem $(F, Z), (G, B), (H, \mathfrak{S})$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş teta işleminin diğer esnek küme işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

5.4.1. Teorem $(F, Z), (G, B), (H, \mathfrak{S})$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş teta işleminin kısıtlanmış işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Teta İşleminin Kısıtlanmış İşlemler Üzerine Soldan Dağılması

$$1) (F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* [(G, B) \cap_R (H, \S)] = [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, B)] \cup_R [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, \S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, B) \cap_R (H, \S) = (M, B \cap \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in B \cap \S$; $M(\aleph) = G(\aleph) \cap H(\aleph)$. $(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (M, B \cap \S) = (N, Z \cup (B \cap \S))$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup (B \cap \S)$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - (B \cap \S) \\ M'(\aleph), & \aleph \in (B \cap \S) - Z \\ F'(\aleph) \cap M'(\aleph), & \aleph \in Z \cap (B \cap \S) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - (B \cap \S) = Z - (B \cap \S) \\ G'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (B \cap \S) - Z = Z' \cap B \cap \S \\ F'(\aleph) \cap (G'(\aleph) \cup H'(\aleph)), & \aleph \in Z \cap (B \cap \S) = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, B)] \cup_R [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, \S)]$ bakalım. $(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

Şimdi $(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, \S) = (W, Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$W(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - Z \\ F'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap \S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \cup_R (W, Z \cup \S) = (T, (Z \cup B) \cap (Z \cup \S))$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup (B \cap \S)$;

$T(\aleph) = V(\aleph) \cup W(\aleph)$. Buradan;

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z-B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (B-Z) \cap (Z-S) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(x) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (B-Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x), & x \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki $Z-(B \cap S)$ ele alınırsa, $Z-(B \cap S) = Z-(B \cap S)'$ olup, bir eleman $(B \cap S)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $B-S$ de, ya $S-B$ de, ya da $B \cup S$ nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in Z - (B \cap S)$ ise $x \in Z \cap B \cap S'$ veya $x \in Z \cap B' \cap S$ veya $x \in Z \cap B' \cap S'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap B \cap S = \emptyset$ ise N ve T fonksiyonları birbirine eşit olur.

$$2) Z' \cap B \cap S = Z \cap B \cap S = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* [(G, B) \cup_R (H, S)] = [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, B)] \cup_R [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, S)].$$

$$3) Z' \cap B \cap S = Z \cap B \cap S = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* [(G, B) *_{\mathcal{R}} (H, S)] = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, B)] \cup_R [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, S)]$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, B) *_{\mathcal{R}} (H, S) = (M, B \cap S)$ olsun. Burada $\forall x \in B \cap S$; $M(x) = G'(x) \cup H'(x)$. $(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (M, B \cap S) = (N, Z \cup (B \cap S))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup (B \cap S)$;

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - (B \cap \mathfrak{S}) \\ M'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B \cap \mathfrak{S}) - Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cap M'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap (B \cap \mathfrak{S}) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - (B \cap \mathfrak{S}) = Z - (B \cap \mathfrak{S}) \\ G(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B \cap \mathfrak{S}) - Z = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{K}) \cap (G(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in Z \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^*(G, B)] \cup_R [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^*(H, \mathfrak{S})]$ bakalım. $(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^*(G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada, $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup B$;

$$V(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - B \\ G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B - Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap B \end{cases}$$

Şimdi $(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^*(H, \mathfrak{S}) = (W, Z \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup \mathfrak{S}$;

$$W(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathfrak{S} - Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \cup_R (W, Z \cup \mathfrak{S}) = (T, (Z \cup B) \cap (Z \cup \mathfrak{S}))$ olsun. Burada, $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup (B \cap \mathfrak{S})$;

$T(\mathfrak{K}) = V(\mathfrak{K}) \cup W(\mathfrak{K})$. Buradan;

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}) \cup F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - B) \cap (Z - \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - B) \cap (\mathfrak{S} - Z) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cup (F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z - B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{K}) \cup F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B - Z) \cap (Z - \mathfrak{S}) = \emptyset \\ G'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B - Z) \cap (\mathfrak{S} - Z) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{K}) \cup (F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (B - Z) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = \emptyset \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K})) \cup F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z - \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K})) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (\mathfrak{S} - Z) = \emptyset \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K})) \cup (F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z-\mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (\mathfrak{S}-Z) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K})) \cup (F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ ise $N=T$ sağlanır.

$$4) Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} [(G, B) \theta_R(H, \mathfrak{S})] = [(F, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (G, B)] \cup_R [(F, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H, \mathfrak{S})]$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Teta İşleminin Kısıtlanmış İşlemler Üzerine Sağdan Dağılıması

$$1) (Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \cup_R (G, B)] \underset{\theta_\varepsilon}{*} (H, \mathfrak{S}) = [(F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (H, \mathfrak{S})] \cap_R [(G, B) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (H, \mathfrak{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \cup_R (G, B) = (M, Z \cap B)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cap B$; $M(\mathfrak{K}) = F(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K})$. $(M, Z \cap B) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (H, \mathfrak{S}) = (N, (Z \cap B) \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cup \mathfrak{S}$;

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} M'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) - \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathfrak{S} - (Z \cap B) \\ M'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap (B \cap \mathfrak{S}) \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) - \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathfrak{S} - (Z \cap B) = \mathfrak{S} - (Z \cap B) \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K})) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (H, \mathfrak{S})] \cap_R [(G, B) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (H, \mathfrak{S})]$ bakalım. $(F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (H, \mathfrak{S}) = (V, Z \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup \mathfrak{S}$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-S \\ H'(x), & x \in S-Z \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

Şimdi, $(G, B) \stackrel{*}{\theta_\varepsilon} (H, S) = (W, B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in B \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B-S \\ H'(x), & x \in S-B \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup S) \cap_R (W, B \cup S) = (T, (Z \cup S) \cap (B \cup S))$ olsun. Burada, $\forall x \in (Z \cap B) \cup S$;

$T(x) = V(x) \cap W(x)$. Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-S) \cap (B-S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-S) \cap (S-B) = \emptyset \\ F'(x) \cap (G'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z-S) \cap (B \cap S) = \emptyset \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (S-Z) \cap (B-S) = \emptyset \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (S-Z) \cap (S-B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(x) \cap (G'(x) \cap H'(x)), & x \in (S-Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ (F'(x) \cap H'(x)) \cap G'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (B-S) = \emptyset \\ (F'(x) \cap H'(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (S-B) = Z \cap B' \cap S \\ (F'(x) \cap H'(x)) \cap (G'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z-S) \cap (B-S) = Z \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in (S-Z) \cap (S-B) = Z' \cap B' \cap S \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (S-Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap S) \cap (S-B) = Z \cap B' \cap S \\ (F'(x) \cap H'(x)) \cap (G'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, $S-(Z \cap B)$ 'yi ele alırsak, $S-(Z \cap B) = S \cap (Z \cap B)'$ olup, bir eleman $(Z \cap B)$ nin tümleyeninde ise o elemanın ya $Z-B$ de, ya $B-Z$ da, ya da $Z \cup B$ nin tümleyenindedir. Burdan, $x \in S-(Z \cap B)$ ise $x \in S \cap Z \cap B'$ veya $x \in S \cap Z' \cap B$ veya $x \in S \cap Z' \cap B'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta B) \cap S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) [(F, Z) \cap_R (G, B)]^*_{\theta_\varepsilon} (H, \S) = [(F, Z)^*_{\theta_\varepsilon} (H, \S)] \cup_R [(G, B)^*_{\theta_\varepsilon} (H, \S)].$$

$$3) Z \cap B \cap \S' = Z \cap B \cap \S = \emptyset \text{ ise } (F, Z) *_{\theta_\varepsilon} (G, B)^*_{\theta_\varepsilon} (H, \S) = [(F, Z)^*_{\theta_\varepsilon} (H, \S)] \cup_R [(G, B)^*_{\theta_\varepsilon} (H, \S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) *_{\theta_\varepsilon} (G, B) = (M, Z \cap B)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cap B; \quad M(\aleph) = F'(\aleph) \cup G'(\aleph). \quad (M, Z \cap B)^*_{\theta_\varepsilon} (H, \S) = (N, (Z \cap B) \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in (Z \cap B) \cup \S;$

$$N(\aleph) = \begin{cases} M'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - (Z \cap B) \\ M'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap (B \cap \S) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph) \cap G(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) - \S = Z \cap B \cap \S' \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - (Z \cap B) = \S - (Z \cap B) \\ (F(\aleph) \cap G(\aleph)) \cap H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap (B \cap \S) = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)^*_{\theta_\varepsilon} (H, \S)] \cup_R [(G, B)^*_{\theta_\varepsilon} (H, \S)]$ bakalım.

$(F, Z)^*_{\theta_\varepsilon} (H, \S) = (V, Z \cup \S)$ olsun. Burada, $\forall \aleph \in Z \cup \S;$

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - Z \\ F(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap \S \end{cases}$$

$(G, B)^*_{\theta_\varepsilon} (H, \S) = (W, B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in B \cup \S;$

$$W(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in B - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - B \\ G(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in B \cap \S \end{cases}$$

$(V, Z \cup \mathcal{S}) \cup_R (W, B \cup \mathcal{S}) = (T, (Z \cup \mathcal{S}) \cap (B \cup \mathcal{S}))$ olsun. Burada $\forall \mathcal{N} \in (Z \cap B) \cup \mathcal{S}$; $T(\mathcal{N}) = V(\mathcal{N}) \cup W(\mathcal{N})$. Buradan,

$$T(\mathcal{N}) = \begin{cases} F'(\mathcal{N}) \cup G'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z - \mathcal{S}) \cap (B - \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ F'(\mathcal{N}) \cup H'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z - \mathcal{S}) \cap (\mathcal{S} - B) = \emptyset \\ F'(\mathcal{N}) \cup (G(\mathcal{N}) \cap H'(\mathcal{N})), & \mathcal{N} \in (Z - \mathcal{S}) \cap (B \cap \mathcal{S}) = \emptyset \\ H'(\mathcal{N}) \cup G'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (\mathcal{S} - Z) \cap (B - \mathcal{S}) = \emptyset \\ H'(\mathcal{N}) \cup H'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (\mathcal{S} - Z) \cap (\mathcal{S} - B) = Z' \cap B' \cap \mathcal{S} \\ H'(\mathcal{N}) \cup (G(\mathcal{N}) \cap H'(\mathcal{N})), & \mathcal{N} \in (\mathcal{S} - Z) \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z' \cap B \cap \mathcal{S} \\ (F(\mathcal{N}) \cap H'(\mathcal{N})) \cup G'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z \cap \mathcal{S}) \cap (B - \mathcal{S}) = \emptyset \\ (F(\mathcal{N}) \cap H'(\mathcal{N})) \cup H'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z \cap \mathcal{S}) \cap (\mathcal{S} - B) = Z \cap B' \cap \mathcal{S} \\ (F(\mathcal{N}) \cap H'(\mathcal{N})) \cup (G(\mathcal{N}) \cap H'(\mathcal{N})), & \mathcal{N} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\mathcal{N}) = \begin{cases} F'(\mathcal{N}) \cup G'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z - \mathcal{S}) \cap (B - \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ H'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (\mathcal{S} - Z) \cap (\mathcal{S} - B) = Z' \cap B' \cap \mathcal{S} \\ H'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (\mathcal{S} - Z) \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z' \cap B \cap \mathcal{S} \\ H'(\mathcal{N}), & \mathcal{N} \in (Z \cap \mathcal{S}) \cap (\mathcal{S} - B) = Z \cap B' \cap \mathcal{S} \\ (F(\mathcal{N}) \cap H'(\mathcal{N})) \cup (G(\mathcal{N}) \cap H'(\mathcal{N})), & \mathcal{N} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S}' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S} = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta B) \cap \mathcal{S} = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) Z \cap B \cap \mathcal{S}' = Z \cap B \cap \mathcal{S} = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \theta_R (G, B) \Big|_{\theta_\varepsilon}^* (H, \mathcal{S}) = [(F, Z) \Big|_{\varepsilon}^* (H, \mathcal{S})] \cup_R [(G, B) \Big|_{\varepsilon}^* (H, \mathcal{S})].$$

5.4.2. Teorem $(F, Z), (G, B), (H, \mathcal{S})$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş teta işleminin genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılmaları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Teta İşleminin Genişletilmiş İşlemler Üzerine Soldan Dağılması

$$1) Z' \cap B \cap \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S} = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \Big|_{\theta_\varepsilon}^* [(G, B) \cap_\varepsilon (H, \mathcal{S})] = [(F, Z) \Big|_{\theta_\varepsilon}^* (G, B)] \cap_\varepsilon [(F, Z) \Big|_{\theta_\varepsilon}^* (H, \mathcal{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G,B)\cap_{\varepsilon}(H,\S)=(M,B\cup\S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in B\cup\S$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} G(\aleph), & \aleph \in B-\S \\ H(\aleph), & \aleph \in \S-B \\ G(\aleph) \cap H(\aleph), & \aleph \in B \cap \S \end{cases}$$

$(F,Z) \overset{*}{\theta_{\varepsilon}} (M,B\cup\S) = (N,Z\cup(B\cup\S))$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z\cup B\cup\S$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-(B\cup\S) \\ M'(\aleph), & \aleph \in (B\cup\S)-Z \\ F'(\aleph) \cap M'(\aleph), & \aleph \in Z \cap (B\cup\S) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-(B\cup\S) = Z \cap B' \cap \S' \\ G'(\aleph), & \aleph \in (B-\S)-Z = Z' \cap B \cap \S' \\ H'(\aleph), & \aleph \in (\S-B)-Z = Z' \cap B' \cap \S \\ G'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (B \cap \S)-Z = Z' \cap B \cap \S \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap (B-\S) = Z \cap B \cap \S' \\ F'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap (\S-B) = Z \cap B' \cap \S \\ F'(\aleph) \cap (G'(\aleph) \cup H'(\aleph)), & \aleph \in Z \cap (B \cap \S) = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z) \overset{*}{\theta_{\varepsilon}} (G,B)] \cap_{\varepsilon} [(F,Z) \overset{*}{\theta_{\varepsilon}} (H,\S)]$ bakalım.

$(F,Z) \overset{*}{\theta_{\varepsilon}} (G,B) = (V,Z\cup B)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z\cup B$;

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-B \\ G'(\aleph), & \aleph \in B-Z \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F,Z) \overset{*}{\theta_{\varepsilon}} (H,\S) = (W,Z\cup\S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z\cup\S$;

$$W(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathfrak{S} - Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \cap_{\varepsilon} (W, Z \cup \mathfrak{S}) = (T, (Z \cup B) \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup B \cup \mathfrak{S}$;

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} V(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup B) - (Z \cup \mathfrak{S}) \\ W(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup \mathfrak{S}) - (Z \cup B) \\ V(\mathfrak{K}) \cap W(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup B) \cap (Z \cup \mathfrak{S}) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - B) - (Z \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B - Z) - (Z \cup \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) - (Z \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - \mathfrak{S}) - (Z \cup B) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S} - Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) - (Z \cup B) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - B) \cap (Z - \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - B) \cap (\mathfrak{S} - Z) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap (F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z - B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{K}) \cap F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B - Z) \cap (Z - \mathfrak{S}) = \emptyset \\ G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B - Z) \cap (\mathfrak{S} - Z) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{K}) \cap (F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (B - Z) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = \emptyset \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K})) \cap F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z - \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K})) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (\mathfrak{S} - Z) = \emptyset \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K})) \cap (F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Böylece,

$$T(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in (B-Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in (S-Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F'(x), & x \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cap (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B \cap S = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır.

$$2) (F, Z) \overset{*}{\underset{\theta_\varepsilon}{} [(G, B) \cup_\varepsilon (H, S)] = [(F, Z) \overset{*}{\underset{\theta_\varepsilon}{} (G, B)] \cap_\varepsilon [(F, Z) \overset{*}{\underset{\theta_\varepsilon}{} (H, S)]}.$$

$$3) (Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \overset{*}{\underset{\theta_\varepsilon}{} [(G, B) *_\varepsilon (H, S)] = [(F, Z) \overset{*}{\underset{\gamma_\varepsilon}{} (G, B)}] \cap_\varepsilon [(F, Z) \overset{*}{\underset{\gamma_\varepsilon}{} (H, S)}]$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B) *_\varepsilon (H, S) = (M, B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in B \cup S$;

$$M(x) = \begin{cases} G(x), & x \in B - S \\ H(x), & x \in S - B \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{\underset{\theta_\varepsilon}{} (M, B \cup S) = (N, Z \cup (B \cup S))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cup S) \\ M'(x), & x \in (B \cup S) - Z \\ F'(x) \cap M'(x), & x \in Z \cap (B \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ G'(x), & x \in (B - S) - Z = Z' \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in (S - B) - Z = Z' \cap B' \cap S \\ G(x) \cap H(x), & x \in (B \cap S) - Z = Z' \cap B \cap S \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ F'(x) \cap (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (G, B)] \cap_\varepsilon [(F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (H, S)]$ bakalım.

$(F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in B - Z \\ F'(x) \cap G(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z) \overset{*}{\gamma_\varepsilon} (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \cap_\varepsilon (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B) \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ W(x), & x \in (Z \cup S) - (Z \cup B) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F'(X), & X \in (Z-B)-(Z \cup S) = \emptyset \\ G'(X), & X \in (B-Z)-(Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(X) \cap G(X), & X \in (Z \cap B)-(Z \cup S) = \emptyset \\ F'(X), & X \in (Z-S)-(Z \cup B) = \emptyset \\ H'(X), & X \in (S-Z)-(Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F'(X) \cap H(X), & X \in (Z \cap S)-(Z \cup B) = \emptyset \\ F'(X) \cap F'(X), & X \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(X) \cap H'(X), & X \in (Z-B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ F'(X) \cap (F'(X) \cap H(X)), & X \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(X) \cap F'(X), & X \in (B-Z) \cap (Z-S) = \emptyset \\ G'(X) \cap H'(X), & X \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(X) \cap (F'(X) \cap H(X)), & X \in (B-Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F'(X) \cap G(X)) \cap F'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(X) \cap G(X)) \cap H'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ (F'(X) \cap G(X)) \cap (F'(X) \cap H(X)), & X \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Böylece,

$$T(X) = \begin{cases} G'(X), & X \in (B-Z)-(Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ H'(X), & X \in (S-Z)-(Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F'(X), & X \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(X) \cap H(X), & X \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(X) \cap H'(X), & X \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ F'(X) \cap G(X), & X \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(X) \cap G(X)) \cap (F'(X) \cap H(X)), & X \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4)(Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* [(G, B)_{\theta_\varepsilon}(H, S)] = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, B)] \cup_\varepsilon [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, S)]$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Teta İşleminin Genişletilmiş İşlemler Üzerin Sağdan Dağılıması

$$1) [(F,Z) \cup_{\varepsilon} (G,B)] \overset{*}{\theta_{\varepsilon}} (H,\S) = [(F,Z) \overset{*}{\theta_{\varepsilon}} (H,\S)] \cap_{\varepsilon} [(G,B) \overset{*}{\theta_{\varepsilon}} (H,\S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,Z) \cup_{\varepsilon} (G,B) = (M,Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ G(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$$(M,Z \cup B) \overset{*}{\theta_{\varepsilon}} (H,\S) = (N,(Z \cup B) \cup \S) \text{ olsun. Burada } \forall \aleph \in Z \cup B \cup \S;$$

$$N(\aleph) = \begin{cases} M'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup B) - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - (Z \cup B) \\ M'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup B) \cap \S \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in (Z - B) - \S = Z \cap B' \cap \S' \\ G'(\aleph), & \aleph \in (B - Z) - \S = Z' \cap B \cap \S' \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) - \S = Z \cap B \cap \S' \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \S \\ F'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z - B) \cap \S = Z \cap B' \cap \S \\ G'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (B - Z) \cap \S = Z' \cap B \cap \S \\ (F'(\aleph) \cap G'(\aleph)) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) \cap \S = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F,Z) \overset{*}{\theta_{\varepsilon}} (H,\S)] \cap_{\varepsilon} [(G,B) \overset{*}{\theta_{\varepsilon}} (H,\S)]$ bakalım. $(F,Z) \overset{*}{\theta_{\varepsilon}} (H,\S) = (V,Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - \S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S - Z \\ F'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap \S \end{cases}$$

$$(G,B) \overset{*}{\theta_{\varepsilon}} (H,\S) = (W,B \cup \S) \text{ olsun. Burada } \forall \aleph \in B \cup \S;$$

$$W(\mathfrak{K}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B-\mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathfrak{S}-B \\ G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$(V, Z \cup \mathfrak{S}) \cap_{\varepsilon} (W, B \cup \mathfrak{S}) = (T, Z \cup B \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup B \cup \mathfrak{S}$;

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} V(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup \mathfrak{S}) - (B \cup \mathfrak{S}) \\ W(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B \cup \mathfrak{S}) - (Z \cup \mathfrak{S}) \\ V(\mathfrak{K}) \cap W(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup \mathfrak{S}) \cap (B \cup \mathfrak{S}) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) - (B \cup \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) - (B \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) - (B \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-\mathfrak{S}) - (Z \cup \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-B) - (Z \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B \cap \mathfrak{S}) - (Z \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap (G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B-\mathfrak{S}) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}) \cap (G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K})) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = \emptyset \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K})) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K})) \cap (G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) - (B \cup \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-\mathfrak{S}) - (Z \cup \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-\mathfrak{S}) \cap (B-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S}-Z) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}-B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K})) \cap (G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap \mathfrak{S}) \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$$2) Z \cap B \cap \mathcal{S}' = Z \cap B \cap \mathcal{S} = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \cap_{\varepsilon} (G, B)]_{\theta_{\varepsilon}}^* (H, \mathcal{S}) = [(F, Z)_{\theta_{\varepsilon}}^* (H, \mathcal{S})] \cap_{\varepsilon} [(G, B)_{\theta_{\varepsilon}}^* (H, \mathcal{S})].$$

$$3) (Z \Delta B) \cap \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S}' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \theta_{\varepsilon} (G, B)]_{\theta_{\varepsilon}}^* (H, \mathcal{S}) = [(F, Z)_{\setminus \varepsilon}^* (H, \mathcal{S})] \cup_{\varepsilon} [(G, B)_{\setminus \varepsilon}^* (H, \mathcal{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \theta_{\varepsilon} (G, B) = (M, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup B$;

$$M(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - B \\ G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B - Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap B \end{cases}$$

$$(M, Z \cup B)_{\theta_{\varepsilon}}^* (H, \mathcal{S}) = (N, (Z \cup B) \cup \mathcal{S}) \text{ olsun. Burada } \forall \mathfrak{K} \in Z \cup B \cup \mathcal{S};$$

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} M'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup B) - \mathcal{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathcal{S} - (Z \cup B) \\ M'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup B) \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - B) - \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S}' \\ G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B - Z) - \mathcal{S} = Z' \cap B \cap \mathcal{S}' \\ F(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) - \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathcal{S} - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap \mathcal{S} \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - B) \cap \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S} \\ G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B - Z) \cap \mathcal{S} = Z' \cap B \cap \mathcal{S} \\ (F(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K})) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\setminus \varepsilon}^* (H, \mathcal{S})] \cup_{\varepsilon} [(G, B)_{\setminus \varepsilon}^* (H, \mathcal{S})]$ bakalım. $(F, Z)_{\setminus \varepsilon}^* (H, \mathcal{S}) = (V, Z \cup \mathcal{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup \mathcal{S}$;

$$V(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - \mathcal{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathcal{S} - Z \\ F(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

$(G,B) \setminus_{\varepsilon}^* (H,\S)=(W,B\cup\S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in B\cup\S$;

$$W(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in B-\S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S-B \\ G(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in B \cap \S \end{cases}$$

$(V,Z\cup\S) \cup_{\varepsilon} (W,B\cup\S)=(T,Z\cup B\cup\S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z\cup B\cup\S$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} V(\aleph), & \aleph \in (Z\cup\S)-(B\cup\S) \\ W(\aleph), & \aleph \in (B\cup\S)-(Z\cup\S) \\ V(\aleph) \cup W(\aleph), & \aleph \in (Z\cup\S) \cap (B\cup\S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in (Z-\S)-(B\cup\S) = Z \cap B' \cap \S' \\ H'(\aleph), & \aleph \in (\S-Z)-(B\cup\S) = \emptyset \\ F(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap \S)-(B\cup\S) = \emptyset \\ G'(\aleph), & \aleph \in (B-\S)-(Z\cup\S) = Z' \cap B \cap \S' \\ H'(\aleph), & \aleph \in (\S-B)-(Z\cup\S) = \emptyset \\ G(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (B \cap \S)-(Z\cup\S) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in (Z-\S) \cap (B-\S) = Z \cap B \cap \S' \\ F'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (Z-\S) \cap (\S-B) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cup (G(\aleph) \cap H'(\aleph)), & \aleph \in (Z-\S) \cap (B \cap \S) = \emptyset \\ H'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in (\S-Z) \cap (B-\S) = \emptyset \\ H'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (\S-Z) \cap (\S-B) = Z' \cap B' \cap \S \\ H'(\aleph) \cup (G(\aleph) \cap H'(\aleph)), & \aleph \in (\S-Z) \cap (B \cap \S) = Z' \cap B \cap \S \\ F(\aleph) \cap H'(\aleph) \cup G'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap \S) \cap (B-\S) = \emptyset \\ (F(\aleph) \cap H'(\aleph)) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap \S) \cap (\S-B) = Z \cap B' \cap \S \\ (F(\aleph) \cap H'(\aleph)) \cup (G(\aleph) \cap H'(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap \S) \cap (B \cap \S) = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z-S) - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ G'(x), & x \in (B-S) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z-S) \cap (B-S) = Z \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in (S-Z) \cap (S-B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(x), & x \in (S-Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ H'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (S-B) = Z \cap B' \cap S \\ F(x) \cap H'(x) \cup (G(x) \cap H'(x)) & x \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B' \cap S = \emptyset$ şartının, $(Z \Delta B) \cap S = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) (Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) *_{\epsilon} (G, B)]_{\theta_{\epsilon}}^* (H, S) = [(F, Z) \bigwedge_{\epsilon}^* (H, S)] \cap_{\epsilon} [(G, B) \bigwedge_{\epsilon}^* (H, S)].$$

5.4.3. Teorem $(F, Z), (G, B), (H, S), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş teta işleminin tümleyenli genişletilmiş işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Teta İşleminin Tümleyenli Genişletilmiş İşlemler Üzerine Soldan Dağılıması

$$1) Z \cap (B \Delta S) = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\theta_{\epsilon}}^* [(G, B) \cap_{\epsilon}^* (H, S)] = [(F, Z)_{\theta_{\epsilon}}^* (G, B)] \cup_{\epsilon} [(F, Z)_{\theta_{\epsilon}}^* (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B) \cap_{\epsilon}^* ((H, S) = (M, B \cup S))$ olsun. Burada $\forall x \in B \cup S$;

$$M(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B-S \\ H'(x), & x \in S-B \\ G(x) \cap H(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$$(F, Z)_{\theta_{\epsilon}}^* (M, B \cup S) = (N, Z \cup (B \cup S)) \text{ olsun. Burada } \forall x \in Z \cup B \cup S;$$

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cup S) \\ M'(x), & x \in (B \cup S) - Z \\ F'(x) \cap M'(x), & x \in Z \cap (B \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ G(x), & x \in (B - S) - Z = Z' \cap B \cap S' \\ H(x), & x \in (S - B) - Z = A' \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B \cap S) - Z = Z' \cap B \cap S \\ F'(x) \cap G(x), & x \in Z \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ F'(x) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, B)] \cup_\varepsilon [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, S)]$ bakalım. $(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in B - Z \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \cup_\varepsilon (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B) \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ W'(x), & x \in (Z \cup S) - (Z \cup B) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F(X), & X \in (Z-B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G(X), & X \in (B-Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F(X) \cup G(X), & X \in (Z \cap B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F(X), & X \in (Z-S) - (Z \cup B) = \emptyset \\ H(X), & X \in (S-Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F(X) \cup H(X), & X \in (Z \cap S) - (Z \cup B) = \emptyset \\ F'(X) \cup F'(X), & X \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(X) \cup H'(X), & X \in (Z-B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ F'(X) \cup (F'(X) \cap H'(X)), & X \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(X) \cup F'(X), & X \in (B-Z) \cap (Z-S) = \emptyset \\ G'(X) \cup H'(X), & X \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(X) \cup (F'(X) \cap H'(X)), & X \in (B-Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F'(X) \cap G'(X)) \cup F'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(X) \cap G'(X)) \cup H'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (S-Z) = \emptyset \\ (F'(X) \cap G'(X)) \cup (F'(X) \cap H'(X)), & X \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} G(X), & X \in (B-Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ H(X), & X \in (S-Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F'(X) & X \in (Z-B) \cap (Z-S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(X) & X \in (Z-B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(X) \cup H'(X), & X \in (B-Z) \cap (S-Z) = Z' \cap B \cap S \\ F'(X) & X \in (Z \cap B) \cap (Z-S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(X) \cap G'(X)) \cup (F'(X) \cap H'(X)), & X \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartının, $Z \cap (B \Delta S) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) Z \cap (B \Delta S) = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* [(G, B)_{\cup_\varepsilon}^* (H, S)] = [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, B)]_{\cap_\varepsilon}^* [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, S)].$$

$$3) Z' \cap B \cap S = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* [(G, B)_{*_\varepsilon}^* (H, S)] = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, B)]_{\cap_\varepsilon}^* [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B)_{*_\varepsilon}^* (H, S) = (M, B \cup S)$ olsun. Burada $\forall X \in B \cup S$;

$$M(\mathfrak{K}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B - \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathfrak{S} - B \\ G'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (M, B \cup \mathfrak{S}) = (N, Z \cup (B \cup \mathfrak{S}))$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup B \cup \mathfrak{S}$;

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - (B \cup \mathfrak{S}) \\ M'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B \cup \mathfrak{S}) - Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cap M'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap (B \cup \mathfrak{S}) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - (B \cup \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B - \mathfrak{S}) - Z = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (\mathfrak{S} - B) - Z = Z' \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B \cap \mathfrak{S}) - Z = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap (B - \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap (\mathfrak{S} - B) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{K}) \cap (G(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in Z \cap (B \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, B)]_{\cap_\varepsilon}^* [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, \mathfrak{S})]$ bakalım. $(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup B$;

$$V(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - B \\ G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B - Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, \mathfrak{S}) = (W, Z \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup \mathfrak{S}$;

$$W(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - \mathfrak{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathfrak{S} - Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$(V, Z \cup B)_{\cap_\varepsilon}^* (W, Z \cup \mathfrak{S}) = (T, (Z \cup B) \cup \mathfrak{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup B \cup \mathfrak{S}$;

$$T(X) = \begin{cases} V'(X), & X \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ W'(X), & X \in (Z \cup S) - (Z \cup B) \\ V(X) \cap W(X), & X \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F(X), & X \in (Z - B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G(X), & X \in (B - Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F(X) \cup G'(X), & X \in (Z \cap B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F(X), & X \in (Z - S) - (Z \cup B) = \emptyset \\ H(X), & X \in (S - Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F(X) \cap H'(X), & X \in (Z \cap S) - (Z \cup B) = \emptyset \\ F'(X) \cap F'(X), & X \in (Z - B) \cap (Z - S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(X) \cap H'(X), & X \in (Z - B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ F'(X) \cap (F'(X) \cap H(X)), & X \in (Z - B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(X) \cap F'(X), & X \in (B - Z) \cap (Z - S) = \emptyset \\ G'(X) \cap H'(X), & X \in (B - Z) \cap (S - Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(X) \cap (F'(X) \cap H(X)), & X \in (B - Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F'(X) \cap G(X)) \cap F'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (Z - S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(X) \cap G(X)) \cap H'(X), & X \in (Z \cap B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ (F'(X) \cap G(X)) \cap (F'(X) \cap H(X)), & X \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} G(X), & X \in (B - Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ H(X), & X \in (S - Z) - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F'(X) \cap H(X), & X \in (Z - B) \cap (Z - S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(X), & X \in (Z - B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(X) \cap H(X), & X \in (B - Z) \cap (S - Z) = Z' \cap B \cap S \\ F'(X) \cap G(X), & X \in (Z \cap B) \cap (Z - S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(X) \cap G(X)) \cap H(X), & X \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = \emptyset$ ise şartı ile $N = T$ sağlanır.

$$4) Z' \cap B \cap S = Z \cap B \cap S = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* [(G, B)_{\theta_\varepsilon}^* (H, S)] = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, B)]_{\cap_\varepsilon}^* [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, S)].$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Teta İşleminin Tümleyenli Genişletilmiş İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) Z \cap (B \Delta S) = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} (G, B)]_{\theta_{\varepsilon}}^{*} (H, S) = [(F, Z) \underset{\theta_{\varepsilon}}{*} (H, S)] \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} [(G, B) \underset{\theta_{\varepsilon}}{*} (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \underset{\cup_{\varepsilon}}{*} (G, B) = (M, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in B - Z \\ F(x) \cup G(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(M, Z \cup B) \underset{\theta_{\varepsilon}}{*} (H, S) = (N, (Z \cup B) \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in (Z \cup B) - S \\ H'(x), & x \in S - (Z \cup B) \\ M'(x) \cap H'(x), & x \in (Z \cup B) \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - B) - S = Z \cap B' \cap S' \\ G(x), & x \in (B - Z) - S = Z' \cap B \cap S' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap B) - S = Z \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in S - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F(x) \cap H'(x), & x \in (Z - B) \cap S = Z \cap B' \cap S \\ G(x) \cap H'(x), & x \in (B - Z) \cap S = Z' \cap B \cap S \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap B) \cap S = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \underset{\theta_{\varepsilon}}{*} (H, S)] \underset{\cap_{\varepsilon}}{*} [(G, B) \underset{\theta_{\varepsilon}}{*} (H, S)]$ bakalım. $(F, Z) \underset{\theta_{\varepsilon}}{*} (H, S) = (V, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(G, B) \overset{*}{\theta_\varepsilon} (H, \S) = (W, B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{X} \in B \cup \S$;

$$W(\mathfrak{X}) = \begin{cases} G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in B - \S \\ H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in \S - B \\ G'(\mathfrak{X}) \cap H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in B \cap \S \end{cases}$$

$(V, Z \cup \S) \overset{*}{\cap_\varepsilon} (W, B \cup \S) = (T, Z \cup B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{X} \in Z \cup B \cup \S$;

$$T(\mathfrak{X}) = \begin{cases} V'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z \cup \S) - (B \cup \S) \\ W'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (B \cup \S) - (Z \cup \S) \\ V(\mathfrak{X}) \cap W(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z \cup \S) \cap (B \cup \S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{X}) = \begin{cases} F(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z - \S) - (B \cup \S) = Z \cap B' \cap \S' \\ H(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (\S - Z) - (B \cup \S) = \emptyset \\ F(\mathfrak{X}) \cup H(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z \cap \S) - (B \cup \S) = \emptyset \\ G(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (B - \S) - (Z \cup \S) = Z' \cap B \cap \S' \\ H(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (\S - B) - (Z \cup \S) = \emptyset \\ G(\mathfrak{X}) \cup H(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (B \cap \S) - (Z \cup \S) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{X}) \cap G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z - \S) \cap (B - \S) = Z \cap B \cap \S' \\ F'(\mathfrak{X}) \cap H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z - \S) \cap (\S - B) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{X}) \cap (G'(\mathfrak{X}) \cap H'(\mathfrak{X})), & \mathfrak{X} \in (Z - \S) \cap (B \cap \S) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{X}) \cap G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (\S - Z) \cap (B - \S) = \emptyset \\ H'(\mathfrak{X}) \cap H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (\S - Z) \cap (\S - B) = Z' \cap B' \cap \S \\ H'(\mathfrak{X}) \cap (G'(\mathfrak{X}) \cap H'(\mathfrak{X})), & \mathfrak{X} \in (\S - Z) \cap (B \cap \S) = Z' \cap B \cap \S \\ (F'(\mathfrak{X}) \cap H'(\mathfrak{X})) \cap G'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z \cap \S) \cap (B - \S) = \emptyset \\ (F'(\mathfrak{X}) \cap H'(\mathfrak{X})) \cap H'(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \in (Z \cap \S) \cap (\S - B) = Z \cap B' \cap \S \\ (F'(\mathfrak{X}) \cap H'(\mathfrak{X})) \cap (G'(\mathfrak{X}) \cap H'(\mathfrak{X})), & \mathfrak{X} \in (Z \cap \S) \cap (B \cap \S) = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in (Z-\$)-(B \cup \$) = Z \cap B' \cap \$' \\ G(\aleph), & \aleph \in (B-\$)-(Z \cup \$) = Z' \cap B \cap \$' \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in (Z-\$) \cap (B-\$) = Z \cap B \cap \$' \\ H'(\aleph), & \aleph \in (\$-Z) \cap (\$-B) = Z' \cap B' \cap \$ \\ G'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (\$-Z) \cap (B \cap \$) = Z' \cap B \cap \$ \\ F'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap \$) \cap (\$-B) = Z \cap B' \cap \$ \\ (F'(\aleph) \cap H'(\aleph)) \cap (G'(\aleph) \cap H'(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap \$) \cap (B \cap \$) = Z \cap B \cap \$ \end{cases}$$

$Z \cap B' \cap \$ = Z \cap B \cap \$' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z \cap B' \cap \$ = Z \cap B \cap \$' = \emptyset$ şartının, $Z \cap (B \Delta \$) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) (Z \Delta B) \cap \$ = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \overset{*}{\underset{\theta_\epsilon}{\cap}} (G, B)] \overset{*}{\underset{\theta_\epsilon}{\cap}} (H, \$) = [(F, Z) \overset{*}{\underset{\theta_\epsilon}{\cap}} (H, \$)] \overset{*}{\underset{\theta_\epsilon}{\cup}} [(G, B) \overset{*}{\underset{\theta_\epsilon}{\cap}} (H, \$)].$$

$$3) Z \cap B \cap \$ = Z \cap B \cap \$' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \overset{*}{\underset{\theta_\epsilon}{\cap}} (G, B)] \overset{*}{\underset{\theta_\epsilon}{\cap}} (H, \$) = [(F, Z) \overset{*}{\underset{\theta_\epsilon}{\cap}} (H, \$)] \overset{*}{\underset{\theta_\epsilon}{\cap}} [(G, B) \overset{*}{\underset{\theta_\epsilon}{\cap}} (H, \$)]$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, Z) \overset{*}{\underset{\theta_\epsilon}{\cap}} (G, B) = (M, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-B \\ G'(\aleph), & \aleph \in B-Z \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$$(M, Z \cup B) \overset{*}{\underset{\theta_\epsilon}{\cap}} (H, \$) = (N, (Z \cup B) \cup \$) \text{ olsun. Burada } \forall \aleph \in Z \cup B \cup \$;$$

$$N(\aleph) = \begin{cases} M'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup B) - \$ \\ H'(\aleph), & \aleph \in \$ - (Z \cup B) \\ M'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup B) \cap \$ \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z-B) - S = Z \cap B' \cap S' \\ G(x), & x \in (B-Z) - S = Z' \cap B \cap S' \\ F(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap B) - S = Z \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in S - (Z \cup B) = Z' \cap B' \cap S \\ F(x) \cap H'(x), & x \in (Z-B) \cap S = Z \cap B' \cap S \\ G(x) \cap H'(x), & x \in (B-Z) \cap S = Z' \cap B \cap S \\ (F(x) \cup G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap B) \cap S = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \setminus_{\varepsilon}^* (H, S)] \cap_{\varepsilon}^* [(G, B) \setminus_{\varepsilon}^* (H, S)]$ bakalım. $(F, Z) \setminus_{\varepsilon}^* (H, S) = (V, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(G, B) \setminus_{\varepsilon}^* (H, S) = (W, B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in B \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B - S \\ H'(x), & x \in S - B \\ G(x) \cap H'(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup S) \cap_{\varepsilon}^* (W, B \cup S) = (T, Z \cup B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B \cup S$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup S) - (B \cup S) \\ W'(x), & x \in (B \cup S) - (Z \cup S) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup S) \cap (B \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F(X), & X \in (Z-S)-(B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ H(X), & X \in (S-Z)-(B \cup S) = \emptyset \\ F'(X) \cup H(X), & X \in (Z \cap S)-(B \cup S) = \emptyset \\ G(X), & X \in (B-S)-(Z \cup S) = Z \cap B \cap S' \\ H(X), & X \in (S-B)-(Z \cup S) = \emptyset \\ G'(X) \cup H(X), & X \in (B \cap S)-(Z \cup S) = \emptyset \\ F'(X) \cap G'(X), & X \in (Z-S) \cap (B-S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(X) \cap H'(X), & X \in (Z-S) \cap (S-B) = \emptyset \\ F'(X) \cap (G(X) \cap H'(X)), & X \in (Z-S) \cap (B \cap S) = \emptyset \\ H'(X) \cap G'(X), & X \in (S-Z) \cap (B-S) = \emptyset \\ H'(X) \cap H'(X), & X \in (S-Z) \cap (S-B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(X) \cap (G(X) \cap H'(X)) & X \in (S-Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ (F(X) \cap H'(X)) \cap G'(X), & X \in (Z \cap S) \cap (B-S) = \emptyset \\ (F(X) \cap H'(X)) \cap H'(X) & X \in (Z \cap S) \cap (S-B) = Z \cap B' \cap S \\ (F(X) \cap H'(X)) \cap (G(X) \cap H'(X)) & X \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(X) = \begin{cases} F(X), & X \in (Z-S)-(B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ G(X), & X \in (B-S)-(Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(X) \cap G'(X), & X \in (Z-S) \cap (B-S) = Z \cap B \cap S' \\ H'(X), & X \in (S-Z) \cap (S-B) = Z' \cap B' \cap S \\ G(X) \cap H'(X), & X \in (S-Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ F(X) \cap H'(X), & X \in (Z \cap S) \cap (S-B) = Z \cap B' \cap S \\ (F(X) \cap H'(X)) \cap (G(X) \cap H'(X)) & X \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z \cap B \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır.

$$4) Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{*}{*}_{\epsilon} (G, B)]_{\theta_{\epsilon}}^* (H, S) = [(F, Z) \underset{*}{*}_{\epsilon} (H, S)]_{\cap_{\epsilon}}^* [(G, B) \underset{*}{*}_{\epsilon} (H, S)].$$

5.4.4. Teorem $(F, Z), (G, B), (H, S), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş teta işleminin esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Teta İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Soldan Dağılımı

$$1) Z \cap B \cap \mathcal{S}' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} [(G, B) \underset{\sim}{\cap} (H, \mathcal{S})] = [(F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (G, B)] \underset{\sim}{\cup} [(F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (H, \mathcal{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B) \underset{\sim}{\cap} (H, \mathcal{S}) = (M, B)$ olsun. Buradan $\forall \mathfrak{K} \in B$;

$$M(\mathfrak{K}) = \begin{cases} G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B - \mathcal{S} \\ G(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

$$(F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (M, B) = (N, Z \cup B) \text{ olsun. Burada } \forall \mathfrak{K} \in Z \cup B;$$

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - B \\ M'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B - Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cap M'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap B \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - B \\ G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B - \mathcal{S}) - Z = Z' \cap B \cap \mathcal{S}' \\ G'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B \cap \mathcal{S}) - Z = Z' \cap B \cap \mathcal{S} \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap (B - \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap (G'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in Z \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (G, B)] \underset{\sim}{\cup} [(F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (H, \mathcal{S})]$ bakalım.

$$(F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (G, B) = (V, Z \cup B) \text{ olsun. Burada } \forall \mathfrak{K} \in Z \cup B;$$

$$V(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - B \\ G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B - Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap B \end{cases}$$

$$(F, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{*} (H, \mathcal{S}) = (W, Z \cup \mathcal{S}) \text{ olsun. Burada } \forall \mathfrak{K} \in Z \cup \mathcal{S};$$

$$W(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - \mathcal{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathcal{S} - Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \sim (W, Z \cup \S) = (T, (Z \cup B))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup B) - (Z \cup \S) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup \S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - B) - (Z \cup \S) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (B - Z) - (Z \cup \S) = Z' \cap B \cap \S' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z \cap B) - (Z \cup \S) = \emptyset \\ F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z - B) \cap (Z - \S) = Z \cap B' \cap \S' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - B) \cap (\S - Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z - B) \cap (Z \cap \S) = Z \cap B' \cap \S \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (B - Z) \cap (Z - \S) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B - Z) \cap (\S - Z) = Z' \cap B \cap \S \\ G'(x) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (B - Z) \cap (Z \cap \S) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z - \S) = Z \cap B \cap \S' \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (\S - Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \S) = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in (B - Z) - (Z \cup \S) = Z' \cap B \cap \S' \\ F'(x), & x \in (Z - B) \cap (Z - \S) = Z \cap B' \cap \S' \\ F'(x), & x \in (Z - B) \cap (Z \cap \S) = Z \cap B' \cap \S \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B - Z) \cap (\S - Z) = Z' \cap B \cap \S \\ F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z - \S) = Z \cap B \cap \S' \\ (F'(x) \cap G'(x)) \cup (F'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \S) = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, Z-B ele alırsak, Z-B=Z∩B' olup, bir eleman B nin tümleyeninde ise o eleman ya S-B de, ya da B∪S nin tümleyenindedir. Burdan, x ∈ S-B ise x ∈ Z ∩ B' ∩ S veya x ∈ Z ∩ B' ∩ S' olduğuna dikkat edecek olursak, Z∩B∩S'=∅ şartı ile N=T sağlanır.

$$2) Z \cap B' \cap \S = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \overset{*}{\underset{\theta_e}{\sim}} [(G, B) \overset{*}{\underset{\theta_e}{\sim}} (H, \S)] = [(F, Z) \overset{*}{\underset{\theta_e}{\sim}} (G, B)] \overset{*}{\underset{\theta_e}{\sim}} [(F, Z) \overset{*}{\underset{\theta_e}{\sim}} (H, \S)].$$

$$3) (Z \Delta S) \cap B = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* [(G, B) \underset{*}{\sim} (H, S)] = [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, B)] \underset{\cup}{\sim} [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B) \underset{*}{\sim} (H, S) = (M, B)$ olsun. Buradan $\forall x \in B$;

$$M(x) = \begin{cases} G(x), & x \in B - S \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (M, B) = (N, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ M'(x), & x \in B - Z \\ F'(x) \cap M'(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in (B - S) - Z = Z' \cap B \cap S' \\ G(x) \cap H(x), & x \in (B \cap S) - Z = Z' \cap B \cap S \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(x) \cap (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, B)] \underset{\cup}{\sim} [(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, S)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G'(x), & x \in B - Z \\ F'(x) \cap G(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z)_{\gamma_\varepsilon}^* (H, S) = (W, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \widetilde{\cup} (W, Z \cup S) = (T, (Z \cup B))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup B) - (Z \cup S) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ G'(x), & x \in (B - Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(x) \cap G(x), & x \in (Z \cap B) - (Z \cup S) = \emptyset \\ F'(x) \cup F'(x), & x \in (Z - B) \cap (Z - S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ F'(x) \cup (F'(x) \cap H(x)), & x \in (Z - B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup F'(x), & x \in (B - Z) \cap (Z - S) = \emptyset \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B - Z) \cap (S - Z) = Z' \cap B \cap S \\ G'(x) \cup (F'(x) \cap H(x)), & x \in (B - Z) \cap (Z \cap S) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G(x)) \cup F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z - S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cap G(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (S - Z) = \emptyset \\ (F'(x) \cap G(x)) \cup (F'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in (B - Z) - (Z \cup S) = Z' \cap B \cap S' \\ F'(x), & x \in (Z - B) \cap (Z - S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x), & x \in (Z - B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B' \cap S \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B - Z) \cap (S - Z) = Z' \cap B \cap S \\ F'(x), & x \in (Z \cap B) \cap (Z - S) = Z \cap B \cap S' \\ (F'(x) \cap G(x)) \cup (F'(x) \cap H(x)), & x \in (Z \cap B) \cap (Z \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartı ile $N = T$ olduğu görülür. $Z' \cap B \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartının $(Z \Delta S) \cap B = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4)(Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z)_{\theta_\epsilon}^* [(G, B)_{\theta} \widetilde{\cup} (H, S)] = [(F, Z)_{\gamma_\epsilon}^* (G, B)] \widetilde{\cup} [(F, Z)_{\gamma_\epsilon}^* (H, S)].$$

ii) Tümleyenli Genişletilmiş Teta İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) Z' \cap B \cap \mathcal{S} = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\theta}{\sim} (G, B) \underset{\theta}{\ast} (H, \mathcal{S}) = [(F, Z) \underset{\theta}{\ast} (H, \mathcal{S})] \underset{\theta}{\sim} [(G, B) \underset{\theta}{\ast} (H, \mathcal{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \underset{\theta}{\sim} (G, B) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z$,

$$M(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - B \\ F(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap B \end{cases}$$

$(M, Z) \underset{\theta}{\ast} (H, \mathcal{S}) = (N, Z \cup \mathcal{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup \mathcal{S}$;

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} M'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - \mathcal{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathcal{S} - Z \\ M'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - B) - \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) - \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathcal{S} - Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - B) \cap \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S} \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K})) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z) \underset{\theta}{\ast} (H, \mathcal{S})] \underset{\theta}{\sim} [(G, B) \underset{\theta}{\ast} (H, \mathcal{S})]$.

$(F, Z) \underset{\theta}{\ast} (H, \mathcal{S}) = (V, Z \cup \mathcal{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup \mathcal{S}$;

$$V(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - \mathcal{S} \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \mathcal{S} - Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Şimdi $(G, B) \underset{\theta}{\ast} (H, \mathcal{S}) = (W, B \cup \mathcal{S})$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in B \cup \mathcal{S}$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B - \mathcal{S} \\ H'(x), & x \in \mathcal{S} - B \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

$(V, Z \cup \mathcal{S}) \sim (W, B \cup \mathcal{S}) = (T, (Z \cup \mathcal{S}))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup \mathcal{S}$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup \mathcal{S}) - (B \cup \mathcal{S}) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup \mathcal{S}) \cap (B \cup \mathcal{S}) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - \mathcal{S}) - (B \cup \mathcal{S}) = Z \cap B' \cap \mathcal{S}' \\ H'(x), & x \in (\mathcal{S} - Z) - (B \cup \mathcal{S}) = \emptyset \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z \cap \mathcal{S}) - (B \cup \mathcal{S}) = \emptyset \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z - \mathcal{S}) \cap (B - \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ F'(x) \cap H'(x), & x \in (Z - \mathcal{S}) \cap (\mathcal{S} - B) = \emptyset \\ F'(x) \cap (G'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z - \mathcal{S}) \cap (B \cap \mathcal{S}) = \emptyset \\ H'(x) \cap G'(x), & x \in (\mathcal{S} - Z) \cap (B - \mathcal{S}) = \emptyset \\ H'(x) \cap H'(x), & x \in (\mathcal{S} - Z) \cap (\mathcal{S} - B) = Z' \cap B' \cap \mathcal{S} \\ H'(x) \cap (G'(x) \cap H'(x)) & x \in (\mathcal{S} - Z) \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z' \cap B \cap \mathcal{S} \\ (F'(x) \cap H'(x)) \cap G'(x), & x \in (Z \cap \mathcal{S}) \cap (B - \mathcal{S}) = \emptyset \\ (F'(x) \cap H'(x)) \cap H'(x) & x \in (Z \cap \mathcal{S}) \cap (\mathcal{S} - B) = Z \cap B' \cap \mathcal{S} \\ (F'(x) \cap H'(x)) \cap (G'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap \mathcal{S}) \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - \mathcal{S}) - (B \cup \mathcal{S}) = Z \cap B' \cap \mathcal{S}' \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in (Z - \mathcal{S}) \cap (B - \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ H'(x), & x \in (\mathcal{S} - Z) \cap (\mathcal{S} - B) = Z' \cap B' \cap \mathcal{S} \\ G'(x) \cap H'(x), & x \in (\mathcal{S} - Z) \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z' \cap B \cap \mathcal{S} \\ F'(x) \cap H'(x) & x \in (Z \cap \mathcal{S}) \cap (\mathcal{S} - B) = Z \cap B' \cap \mathcal{S} \\ (F'(x) \cap H'(x)) \cap (G'(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap \mathcal{S}) \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, $\mathcal{S} - Z$ ele alırsak, $\mathcal{S} - Z = \mathcal{S} \cap Z'$ olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya B-Z de, ya da B $\cup$ Z nin tümleyenindedir. Burdan,

$\aleph \in Z' \cap B \cap \mathcal{S}$ veya $\aleph \in Z' \cap B' \cap \mathcal{S}$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap B \cap \mathcal{S} = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır.

$$2) (Z \Delta B) \cap \mathcal{S} = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\theta}{\sim} (G, B) \underset{\theta}{\ast} (H, \mathcal{S}) = [(F, Z) \underset{\theta_{\varepsilon}}{\ast} (H, \mathcal{S})] \underset{\theta}{\cup} [(G, B) \underset{\theta_{\varepsilon}}{\ast} (H, \mathcal{S})].$$

$$3) Z \cap (B \Delta \mathcal{S}) = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{\theta}{\sim} (G, B)] \underset{\theta_{\varepsilon}}{\ast} (H, \mathcal{S}) = [(F, Z) \underset{\theta_{\varepsilon}}{\ast} (H, \mathcal{S})] \underset{\theta}{\cup} [(G, B) \underset{\theta_{\varepsilon}}{\ast} (H, \mathcal{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \underset{\theta}{\sim} (G, B) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z$,

$$M(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$(M, Z) \underset{\theta_{\varepsilon}}{\ast} (H, \mathcal{S}) = (N, Z \cup \mathcal{S})$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \mathcal{S}$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} M'(\aleph), & \aleph \in Z - \mathcal{S} \\ H'(\aleph), & \aleph \in \mathcal{S} - Z \\ M'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in (Z - B) - \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S}' \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) - \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ H'(\aleph), & \aleph \in \mathcal{S} - Z \\ F'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z - B) \cap \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S} \\ (F(\aleph) \cup G(\aleph)) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) \cap \mathcal{S} = Z \cap B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z) \underset{\theta_{\varepsilon}}{\ast} (H, \mathcal{S})] \underset{\theta}{\cup} [(G, B) \underset{\theta_{\varepsilon}}{\ast} (H, \mathcal{S})]$. $(F, Z) \underset{\theta_{\varepsilon}}{\ast} (H, \mathcal{S}) = (V, Z \cup \mathcal{S})$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \mathcal{S}$;

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - \mathcal{S} \\ H'(\aleph), & \aleph \in \mathcal{S} - Z \\ F(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Şimdi $(G, B) \stackrel{*}{\setminus}_{\varepsilon} (H, S) = (W, B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in B \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B - S \\ H'(x), & x \in S - B \\ G(x) \cap H'(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(V, Z \cup S) \widetilde{\cup} (W, B \cup S) = (T, (Z \cup S))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$T(x) = \begin{cases} V(x), & x \in (Z \cup S) - (B \cup S) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup S) \cap (B \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - S) - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ H'(x), & x \in (S - Z) - (B \cup S) = \emptyset \\ F(x) \cap H'(x), & x \in (Z \cap S) - (B \cup S) = \emptyset \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z - S) \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - S) \cap (S - B) = \emptyset \\ F'(x) \cup (G(x) \cap H'(x)), & x \in (Z - S) \cap (B \cap S) = \emptyset \\ H'(x) \cup G'(x), & x \in (S - Z) \cap (B - S) = \emptyset \\ H'(x) \cup H'(x), & x \in (S - Z) \cap (S - B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(x) \cup (G(x) \cap H'(x)), & x \in (S - Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ (F(x) \cap H'(x)) \cup G'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (B - S) = \emptyset \\ (F(x) \cap H'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ (F(x) \cap H'(x)) \cup (G(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in (Z - S) - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z - S) \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in (S - Z) \cap (S - B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(x), & x \in (S - Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ F(x), & x \in (Z \cap S) \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ (F(x) \cap H'(x)) \cup (G(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartı ile $N=T$ sağlanır. $Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartının $Z \cap (B \Delta S) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) (Z \Delta B) \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{*}{\sim} (G, B)]_{\theta_\epsilon}^* (H, S) = [(F, Z) \underset{*}{\setminus}_\epsilon (H, S)]_{\cap}^* [(G, B) \underset{*}{\setminus}_\epsilon (H, S)].$$

5.4.5. Teorem $(F, Z), (G, B), (H, S), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, tümleyenli genişletilmiş teta işleminin tümleyenli esnek ikili parçalı işlemlere aşağıdaki dağılımları mevcuttur:

i) Tümleyenli Genişletilmiş Teta İşleminin Tümleyenli Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Soldan Dağılıması

$$1) Z \cap B \cap S' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{*}{\theta_\epsilon} [(G, B) \underset{*}{\sim} (H, S)]_{\cap} = [(F, Z) \underset{*}{\theta_\epsilon} (G, B)] \underset{*}{\sim} [(F, Z) \underset{*}{\theta_\epsilon} (H, S)]_{\cup}.$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B) \underset{*}{\sim} (H, S) = (M, B)$ olsun. Buradan $\forall x \in B$;

$$M(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B - S \\ G(x) \cap H(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{*}{\theta_\epsilon} (M, B) = (N, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ M'(x), & x \in B - Z \\ F'(x) \cap M'(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ G(x), & x \in (B - S) - Z = Z' \cap B \cap S' \\ G'(x) \cup H'(x), & x \in (B \cap S) - Z = Z' \cap B \cap S \\ F'(x) \cap G(x), & x \in Z \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(x) \cap (G'(x) \cup H'(x)), & x \in Z \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, B)] \underset{U}{\sim} [(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, \S)]$ bakalım.

$(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup B$;

$$V(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - B \\ G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in B - Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z)_{\theta_\varepsilon}^* (H, \S) = (W, Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup \S$;

$$W(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z - \S \\ H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in \S - Z \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in Z \cap \S \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \underset{U}{\sim} (W, Z \cup \S) = (T, (Z \cup B))$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z \cup B$;

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} V'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup B) - (Z \cup \S) \\ V(\mathfrak{K}) \cup W(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cup B) \cap (Z \cup \S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - B) - (Z \cup \S) = \emptyset \\ G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B - Z) - (Z \cup \S) = Z' \cap B \cap \S' \\ F(\mathfrak{K}) \cup G'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) - (Z \cup \S) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cup F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - B) \cap (Z - \S) = Z \cap B' \cap \S' \\ F'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z - B) \cap (\S - Z) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cup (F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z - B) \cap (Z \cap \S) = Z \cap B' \cap \S \\ G'(\mathfrak{K}) \cup F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B - Z) \cap (Z - \S) = \emptyset \\ G'(\mathfrak{K}) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B - Z) \cap (\S - Z) = Z' \cap B \cap \S \\ G'(\mathfrak{K}) \cup (F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (B - Z) \cap (Z \cap \S) = \emptyset \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K})) \cup F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z - \S) = Z \cap B \cap \S' \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K})) \cup H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (\S - Z) = \emptyset \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K})) \cup (F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \S) = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} G(\aleph), & \aleph \in (B-Z) - (Z \cup \S) = Z' \cap B \cap \S' \\ F'(\aleph), & \aleph \in (Z-B) \cap (Z-\S) = Z \cap B' \cap \S' \\ F'(\aleph), & \aleph \in (Z-B) \cap (Z \cap \S) = Z \cap B' \cap \S \\ G'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in (B-Z) \cap (\S-Z) = Z' \cap B \cap \S \\ F'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) \cap (Z-\S) = Z \cap B \cap \S' \\ (F'(\aleph) \cap G(\aleph)) \cup (F'(\aleph) \cap H(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \S) = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, Z-B ele alırsak, Z-B=Z∩B' olup, bir eleman B nin tümleyeninde ise o eleman ya Ş-B de, ya da B∪Ş nin tümleyenindedir. Burdan, $\aleph \in \S-B$ ise $\aleph \in Z \cap B' \cap \S$ veya $\aleph \in Z \cap B' \cap \S'$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z \cap B \cap \S' = \emptyset$ şartı ile N=T sağlanır.

$$2) Z \cap (B \Delta \S) = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\theta_\epsilon}{*} [(G, B) \underset{\cup}{*} (H, \S)] = [(F, Z) \underset{\theta_\epsilon}{*} (G, B)] \underset{\cap}{*} [(F, Z) \underset{\theta_\epsilon}{*} (H, \S)].$$

$$3) (Z \Delta B) \cap \S = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\theta_\epsilon}{*} [(G, B) \underset{*}{*} (H, \S)] = [(F, Z) \underset{\gamma_\epsilon}{*} (G, B)] \underset{\cap}{*} [(F, Z) \underset{\gamma_\epsilon}{*} (H, \S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(G, B) \underset{*}{*} (H, \S) = (M, B)$ olsun. Buradan $\forall \aleph \in B$;

$$M(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in B - \S \\ G'(\aleph) \cup H'(\aleph), & \aleph \in B \cap \S \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{\theta_\epsilon}{*} (M, B) = (N, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup B$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z - B \\ M'(\aleph), & \aleph \in B - Z \\ F'(\aleph) \cap M'(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-B \\ G(x), & x \in (B-\mathcal{S})-Z = Z' \cap B \cap \mathcal{S}' \\ G(x) \cap H(x), & x \in (B \cap \mathcal{S})-Z = Z' \cap B \cap \mathcal{S} \\ F'(x) \cap G(x), & x \in Z \cap (B-\mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ F'(x) \cap (G(x) \cap H(x)), & x \in Z \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani $[(F, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (G, B)] \underset{\cap}{*} [(F, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H, \mathcal{S})]$ bakalım.

$(F, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (G, B) = (V, Z \cup B)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-B \\ G'(x), & x \in B-Z \\ F'(x) \cap G(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(F, Z) \underset{\gamma_\varepsilon}{*} (H, \mathcal{S}) = (W, Z \cup \mathcal{S})$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup \mathcal{S}$;

$$W(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z-\mathcal{S} \\ H'(x), & x \in \mathcal{S}-Z \\ F'(x) \cap H(x), & x \in Z \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

$(V, Z \cup B) \underset{\cap}{*} (W, Z \cup \mathcal{S}) = (T, (Z \cup B))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup B$;

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup B) - (Z \cup \mathcal{S}) \\ V(x) \cap W(x), & x \in (Z \cup B) \cap (Z \cup \mathcal{S}) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} F(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) - (Z \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) - (Z \cup \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F(\mathfrak{K}) \cup G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) - (Z \cup \mathfrak{S}) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z-\mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (\mathfrak{S}-Z) = \emptyset \\ F'(\mathfrak{K}) \cap (F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{K}) \cap F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (Z-\mathfrak{S}) = \emptyset \\ G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (\mathfrak{S}-Z) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{K}) \cap (F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = \emptyset \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K})) \cap F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K})) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (\mathfrak{S}-Z) = \emptyset \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K})) \cap (F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\mathfrak{K}) = \begin{cases} G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) - (Z \cup \mathfrak{S}) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z-\mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S}' \\ F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z-B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} \\ G'(\mathfrak{K}) \cap H'(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (B-Z) \cap (\mathfrak{S}-Z) = Z' \cap B \cap \mathfrak{S} \\ F'(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K}), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z-\mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' \\ (F'(\mathfrak{K}) \cap G(\mathfrak{K})) \cap (F'(\mathfrak{K}) \cap H(\mathfrak{K})), & \mathfrak{K} \in (Z \cap B) \cap (Z \cap \mathfrak{S}) = Z \cap B \cap \mathfrak{S} \end{cases}$$

$Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartı ile $N=T$ olduğu görülür. $Z' \cap B \cap \mathfrak{S} = Z \cap B' \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4) (Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = Z \cap B \cap \mathfrak{S}' = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\theta}{*} [(G, B) \underset{\theta}{*} (H, \mathfrak{S})] = [(F, Z) \underset{\gamma_{\epsilon}}{*} (G, B)] \underset{U}{*} [(F, Z) \underset{\gamma_{\epsilon}}{*} (H, \mathfrak{S})].$$

ii) Tümlenli Genişletilmiş Teta İşleminin Tümlenli Esnek İkili Parçalı İşlemler Üzerine Sağdan Dağılması

$$1) (Z \Delta B) \cap \mathfrak{S} = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{U}{*} (G, B) \underset{\theta_{\epsilon}}{*} (H, \mathfrak{S}) = [(F, Z) \underset{\theta_{\epsilon}}{*} (H, \mathfrak{S})] \underset{\cap}{*} [(G, B) \underset{\theta_{\epsilon}}{*} (H, \mathfrak{S})].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \underset{U}{*} (G, B) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall \mathfrak{K} \in Z$,

$$M(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-B \\ F(\aleph) \cup G(\aleph), & \aleph \in Z \cap B \end{cases}$$

$(M, Z) \stackrel{*}{\theta_\varepsilon} (H, \S) = (N, Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$N(\aleph) = \begin{cases} M'(\aleph), & \aleph \in Z-\S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S-Z \\ M'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap \S \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in (Z-B)-\S = Z \cap B' \cap \S' \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B)-\S = Z \cap B \cap \S' \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S-Z \\ F(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z-B) \cap \S = Z \cap B' \cap \S \\ (F'(\aleph) \cap G'(\aleph)) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap B) \cap \S = Z \cap B \cap \S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z) \stackrel{*}{\theta_\varepsilon} (H, \S)] \underset{\cap}{\sim} [(G, B) \stackrel{*}{\theta_\varepsilon} (H, \S)]$.

$(F, Z) \stackrel{*}{\theta_\varepsilon} (H, \S) = (V, Z \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$V(\aleph) = \begin{cases} F'(\aleph), & \aleph \in Z-\S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S-Z \\ F'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in Z \cap \S \end{cases}$$

Şimdi $(G, B) \stackrel{*}{\theta_\varepsilon} (H, \S) = (W, B \cup \S)$ olsun. Burada $\forall \aleph \in B \cup \S$;

$$W(\aleph) = \begin{cases} G'(\aleph), & \aleph \in B-\S \\ H'(\aleph), & \aleph \in \S-B \\ G'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in B \cap \S \end{cases}$$

$(V, Z \cup \S) \underset{\cap}{\sim} (W, B \cup \S) = (T, (Z \cup \S))$ olsun. Burada $\forall \aleph \in Z \cup \S$;

$$T(\aleph) = \begin{cases} V'(\aleph), & \aleph \in (Z \cup \mathcal{S}) - (B \cup \mathcal{S}) \\ V(\aleph) \cap W(\aleph), & \aleph \in (Z \cup \mathcal{S}) \cap (B \cup \mathcal{S}) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in (Z - \mathcal{S}) - (B \cup \mathcal{S}) = Z \cap B' \cap \mathcal{S}' \\ H(\aleph), & \aleph \in (\mathcal{S} - Z) - (B \cup \mathcal{S}) = \emptyset \\ F(\aleph) \cup H(\aleph), & \aleph \in (Z \cap \mathcal{S}) - (B \cup \mathcal{S}) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in (Z - \mathcal{S}) \cap (B - \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ F'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z - \mathcal{S}) \cap (\mathcal{S} - B) = \emptyset \\ F'(\aleph) \cap (G'(\aleph) \cap H'(\aleph)), & \aleph \in (Z - \mathcal{S}) \cap (B \cap \mathcal{S}) = \emptyset \\ H'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in (\mathcal{S} - Z) \cap (B - \mathcal{S}) = \emptyset \\ H'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (\mathcal{S} - Z) \cap (\mathcal{S} - B) = Z' \cap B' \cap \mathcal{S} \\ H'(\aleph) \cap (G'(\aleph) \cap H'(\aleph)), & \aleph \in (\mathcal{S} - Z) \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z' \cap B \cap \mathcal{S} \\ (F'(\aleph) \cap H'(\aleph)) \cap G'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap \mathcal{S}) \cap (B - \mathcal{S}) = \emptyset \\ (F'(\aleph) \cap H'(\aleph)) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap \mathcal{S}) \cap (\mathcal{S} - B) = Z \cap B' \cap \mathcal{S} \\ (F'(\aleph) \cap H'(\aleph)) \cap (G'(\aleph) \cap H'(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap \mathcal{S}) \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\aleph) = \begin{cases} F(\aleph), & \aleph \in (Z - \mathcal{S}) - (B \cup \mathcal{S}) = Z \cap B' \cap \mathcal{S}' \\ F'(\aleph) \cap G'(\aleph), & \aleph \in (Z - \mathcal{S}) \cap (B - \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S}' \\ H'(\aleph), & \aleph \in (\mathcal{S} - Z) \cap (\mathcal{S} - B) = Z' \cap B' \cap \mathcal{S} \\ G'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (\mathcal{S} - Z) \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z' \cap B \cap \mathcal{S} \\ F'(\aleph) \cap H'(\aleph), & \aleph \in (Z \cap \mathcal{S}) \cap (\mathcal{S} - B) = Z \cap B' \cap \mathcal{S} \\ (F'(\aleph) \cap H'(\aleph)) \cap (G'(\aleph) \cap H'(\aleph)), & \aleph \in (Z \cap \mathcal{S}) \cap (B \cap \mathcal{S}) = Z \cap B \cap \mathcal{S} \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki, $\mathcal{S} - Z$ ele alırsak, $\mathcal{S} - Z = \mathcal{S} \cap Z'$ olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya B-Z de, ya da B $\cup$ Z nin tümleyenindedir. Burdan, $\aleph \in Z' \cap B \cap \mathcal{S}$ veya $\aleph \in Z' \cap B' \cap \mathcal{S}$ olduğuna dikkat edecek olursak, $Z' \cap B \cap \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S} = \emptyset$ şartı ile N=T sağlanır. $Z' \cap B \cap \mathcal{S} = Z \cap B' \cap \mathcal{S} = \emptyset$ şartının $(Z \Delta B) \cap \mathcal{S} = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) (Z \Delta B) \cap \mathcal{S} = \emptyset \text{ ise } (F, Z) \underset{\cap}{\sim}_{\theta_{\epsilon}}^* (G, B) \underset{\theta_{\epsilon}}^* (H, \mathcal{S}) = [(F, Z) \underset{\theta_{\epsilon}}^* (H, \mathcal{S})] \underset{\cup}{\sim}^* [(G, B) \underset{\theta_{\epsilon}}^* (H, \mathcal{S})].$$

$$3) Z \cap (B \Delta S) = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{\theta}{\sim}^* (G, B)] \underset{\theta_\varepsilon}{\sim}^* (H, S) = [(F, Z) \underset{\varepsilon}{\setminus}^* (H, S)] \underset{U}{\sim}^* [(G, B) \underset{\varepsilon}{\setminus}^* (H, S)].$$

İspat: Önce eşitliğin sol tarafını ele alalım $(F, Z) \underset{\theta}{\sim}^* (G, B) = (M, Z)$ olsun. Burada $\forall x \in Z$,

$$M(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - B \\ F'(x) \cap G'(x), & x \in Z \cap B \end{cases}$$

$(M, Z) \underset{\theta_\varepsilon}{\sim}^* (H, S) = (N, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$N(x) = \begin{cases} M'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ M'(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$N(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - B) - S = Z \cap B' \cap S' \\ F(x) \cup G(x), & x \in (Z \cap B) - S = Z \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F(x) \cap H'(x), & x \in (Z - B) \cap S = Z \cap B' \cap S \\ (F(x) \cup G(x)) \cap H'(x), & x \in (Z \cap B) \cap S = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, Z) \underset{\varepsilon}{\setminus}^* (H, S)] \underset{U}{\sim}^* [(G, B) \underset{\varepsilon}{\setminus}^* (H, S)]$. $(F, Z) \underset{\varepsilon}{\setminus}^* (H, S) =$

$(V, Z \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;

$$V(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in Z - S \\ H'(x), & x \in S - Z \\ F(x) \cap H'(x), & x \in Z \cap S \end{cases}$$

Şimdi $(G, B) \underset{\varepsilon}{\setminus}^* (H, S) = (W, B \cup S)$ olsun. Burada $\forall x \in B \cup S$;

$$W(x) = \begin{cases} G'(x), & x \in B - S \\ H'(x), & x \in S - B \\ G(x) \cap H'(x), & x \in B \cap S \end{cases}$$

*
 $(V, Z \cup S) \sim (W, B \cup S) = (T, (Z \cup S))$ olsun. Burada $\forall x \in Z \cup S$;
 $\cup$

$$T(x) = \begin{cases} V'(x), & x \in (Z \cup S) - (B \cup S) \\ V(x) \cup W(x), & x \in (Z \cup S) \cap (B \cup S) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - S) - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ H(x), & x \in (S - Z) - (B \cup S) = \emptyset \\ F'(x) \cup H(x), & x \in (Z \cap S) - (B \cup S) = \emptyset \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z - S) \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ F'(x) \cup H'(x), & x \in (Z - S) \cap (S - B) = \emptyset \\ F'(x) \cup (G(x) \cap H'(x)), & x \in (Z - S) \cap (B \cap S) = \emptyset \\ H'(x) \cup G'(x), & x \in (S - Z) \cap (B - S) = \emptyset \\ H'(x) \cup H'(x), & x \in (S - Z) \cap (S - B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(x) \cup (G(x) \cap H'(x)), & x \in (S - Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ (F(x) \cap H'(x)) \cup G'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (B - S) = \emptyset \\ (F(x) \cap H'(x)) \cup H'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ (F(x) \cap H'(x)) \cup (G(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

Buradan,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (Z - S) - (B \cup S) = Z \cap B' \cap S' \\ F'(x) \cup G'(x), & x \in (Z - S) \cap (B - S) = Z \cap B \cap S' \\ H'(x), & x \in (S - Z) \cap (S - B) = Z' \cap B' \cap S \\ H'(x), & x \in (S - Z) \cap (B \cap S) = Z' \cap B \cap S \\ H'(x), & x \in (Z \cap S) \cap (S - B) = Z \cap B' \cap S \\ (F(x) \cap H'(x)) \cup (G(x) \cap H'(x)), & x \in (Z \cap S) \cap (B \cap S) = Z \cap B \cap S \end{cases}$$

$Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartı ile $N = T$ sağlanır. $Z \cap B' \cap S = Z \cap B \cap S' = \emptyset$ şartının $Z \cap (B \Delta S) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4) (Z \Delta S) \cap B = \emptyset \text{ ise } [(F, Z) \underset{*}{\sim} (G, B)]_{\theta_\varepsilon}^* (H, S) = [(F, Z) \underset{*}{\setminus}_\varepsilon (H, S)]_{\underset{*}{\cap}}^* [(G, B) \underset{*}{\setminus}_\varepsilon (H, S)].$$



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Esnek küme işlemleri, esnek küme teorisinin hem teorik hem de pratik alanda ilerlemesi için esnek küme teorisinin en temel yapıtaşdır. Teori 1999 yılında ortaya atıldığından bu yana, pek çok kısıtlanmış ve genişletilmiş işlem tanıtılmıştır. Bu tez çalışmasında, yeni bir esnek küme formu olan, tümleyenli genişletilmiş esnek küme işlemleri çalışılmıştır. Bu bağlamda, tümleyenli genişletilmiş birleşim, tümleyenli genişletilmiş artı ve tümleyenli genişletilmiş teta ile adlandırılan yeni esnek küme işlemleri tanımlanmış, bu işlemlerin tüm özellikleri detaylı şekilde incelenmiş; bu işlemlerin diğer işlemler ile olan ilişkilerine dağılma kuralları yardımıyla bakılmış, tümleyenli genişletilmiş birleşim işleminin, sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde, diğer esnek küme işlemleri ile birlikte cebirde bilinen çeşitli cebirsel yapılar oluşturduğu gösterilmiştir.

Tez altı bölümden oluşmakta olup, ilk bölümde esnek kümeler ve tezde adı geçen cebirsel yapılar ile ilgili literatür taraması yapılmış; ikinci bölümde, tez boyunca özellikle ispatlarda kullanılan kümelerde işlemler, bazı cebirsel yapılar ve esnek kümelerle ilgili temel kavramlar hatırlatılmış, tezin özgün bölümleri olan üçüncü dördüncü ve beşinci bölümlerinde sırasıyla, tümleyenli genişletilmiş birleşim, tümleyenli genişletilmiş artı, tümleyenli genişletilmiş teta işlemleri tanıtılmış, işlemlerin kapalılık, birleşme, birim eleman, ters eleman, değişme, idempotent gibi tüm özellikler incelenmiş, diğer işlemlerle ilişkisini görmek için, işlemlerin diğer işlemlere dağılmasına bakılmıştır. Klasik kümelerde de var olan birleşim işlemi ile tümleyenli genişletilmiş birleşim işleminin özellikleri karşılaştırılmış ve dikkat çekici sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, tümleyenli genişletilmiş birleşim işleminin diğer esnek kümeler ile birlikte sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde bir takım cebirsel yapılar oluşturduğu gösterilmiştir.

Bu bağlamda,

- $(S_Z(U), \bigcup_{\varepsilon}^*)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_Z$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes;

- $(S_Z(U), U_R, \overset{*}{U_\varepsilon}), (S_Z(U), U_\varepsilon, \overset{*}{U_\varepsilon}), (S_Z(U), \overset{*}{U_\varepsilon}, \overset{*}{U_\varepsilon}), (S_Z(U), \tilde{U}, \overset{*}{U_\varepsilon}), (S_Z(U), \overset{*}{U}, \overset{*}{U_\varepsilon})$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halkadır.
- $(S_Z(U), \cap_R, \overset{*}{U_\varepsilon}), (S_Z(U), \overset{*}{\cap_\varepsilon}, \overset{*}{U_\varepsilon}), (S_Z(U), \overset{\sim}{\cap}, \overset{*}{U_\varepsilon}), (S_Z(U), \overset{*}{\cap}, \overset{*}{U_\varepsilon})$ cebirsel yapılarının komutatif, idempotent, birimli bir hemihalka;
- $(S_Z(U), U_Z, \emptyset_Z, \cap_R, \overset{*}{U_\varepsilon}), (S_Z(U), U_Z, \emptyset_Z, \cap_\varepsilon, \overset{*}{U_\varepsilon}), (S_Z(U), U_Z, \emptyset_Z, \overset{*}{\cap_\varepsilon}, \overset{*}{U_\varepsilon}), (S_Z(U), U_Z, \emptyset_Z, \overset{\sim}{\cap}, \overset{*}{U_\varepsilon})$
 $(S_Z(U), U_Z, \emptyset_Z, \overset{*}{\cap}, \overset{*}{U_\varepsilon})$ bir Bool ve De Morgan Cebiri;
- $(S_Z(U), \overset{r}{\cap}, \overset{*}{U_\varepsilon}, \emptyset_Z)$ bir MV-cebiri olduğu gösterilmiştir.

Soyut cebirin amacı, cebirsel yapıları sınıflandırarak, aynı sınıf içinde olan cebirsel yapıların, onları oluşturan küme ve ikili işlemlerden bağımsız olarak, orta özelliklerini bulmak, sergilemek ve bu özelliklerden bazı sonuçlar çıkarmaktır. Cebirsel yapıların incelenmesi, farklı cebirsel sistemler tarafından paylaşılan ortak özellikleri ve yapıları araştıran soyut cebirde, matematikçilerin bu yapıların özelliklerini anlayarak karmaşık problemleri çözebilmesi, yeni teoriler geliştirip, kavramları matematiğin, bilimin ve mühendisliğin çeşitli alanlarına uygulayabilmesi açısından çok önemlidir. Bu açıdan yeni esnek küme işlemlerinin tanımlandığı bu çalışmanın işlemleriyle pek çok cebirsel yapının elde edilmiş olmasının, gelecekte yapılacak esnek küme ve klasik cebir ile ilgili çalışmaların önünü açacağını umut ediyoruz.

KAYNAKLAR

- Abbas, M., Ali, B. and Romaguera, S. (2014). On Generalized Soft Equality and Soft Lattice Structure. *Filomat*, 28(6), 1191-1203.
- Abbas, M., Ali, M. I. and Romaguera, S. (2017). Generalized Operations in Soft Set Theory via Relaxed Conditions on Parameters. *Filomat*, 31(19), 5955–5964.
- Acar, U., Koyuncu, F. and Tanay, B. (2010). Soft Sets and Soft Rings. *Computers Mathematics Applications*, 59(11), 3458-3463.
- Akbulut, E. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Difference and Lambda Operation*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Science, Amasya.
- Aktaş, H. and Çağman, N. (2005). Bulanık ve Yaklaşımlı Kümeler. *Journal of Art and Science*, (3), 13-25.
- Aktaş, H. and Çağman, N. (2007). Soft Sets and Soft Groups. *Information Sciences*, 177 (1), 2726-2735.
- Ali, B., Saleem, N., Sundus, N., Khaleeq, S., Saeed, M. and George, R. A. (2002). Contribution to the Theory of Soft Sets via Generalized Relaxed Operations. *Mathematics*, 10(15), 2636.
- Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K. and Shabir, M. (2009). On Some New Operations in Soft set Theory. *Computers Mathematics with Applications*, 57(9), 1547-1553.
- Ali, M. I., Shabir, M. and Naz, M. (2011). Algebraic Structures of Soft Sets Associated with New Operations. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(9), 2647–2654.
- Al-shami, T.M. (2019). Investigation and Corrigendum to Some Results Related to g-Soft Equality and f-Soft Equality Relations. *Filomat*, 33(11), 3375–3383.
- Al-shami, T. M. and El-Shafer, M. (2020). T-soft Equality Relation. *Turkish Journal of Mathematics*, 44(4), 1427-1441.
- Atagün, A.O., Kamacı, H. and Oktay, O. (2018). Reduced Soft Matrices and Generalized Products with Applications in Decision Making. *Neural Computing and Applications*, 29(9), 445-456.
- Aybek, F. (2024). *New Restricted and Extended Soft Set Operations*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Aydın, N. ve Kandamar, H. (2013). *Soyut Cebir* (Birinci Baskı). İstanbul: Kriter Yayınevi, 3-71.

- Babitha, K. V. and Sunil, J. J. (2010). Soft Set Relations And Functions. *Computers and Mathematics with Applications*, 60(7), 1840-1849.
- Bayraktar, M. (2006). *Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi* (Birinci Baskı). Türkiye: Gazi Kitabevi, 87-185.
- Birkhoff, G. (1967). Lattice Theory, *American Mathematical Society, Providence, Rhode*
- Cantor, G. (1874). Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (77), 258–262.
- Chang, C. C. (1958). A New Proof of the Completeness of the Łukasiewicz Axioms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 93(1), 460–490.
- Chen, D., Tsang, E. C. C. and Yeung, D.S. (2003). Some Notes on the Parameterization Reduction of Soft Sets. *International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, 3, 1442-1445.
- Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S. and Wang, X. (2005). The Parametrization Reduction of Soft Sets and its Applications. *Computers Mathematics Applications*, 49(5-6), 757-763.
- Clifford, A. H. (1954). Bands of Semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5(3), 499-504.
- Çağman, N. (2021). Conditional Complements of Sets and Their Application to Group Theory. *Journal of New Results in Science*, 10(3), 67-74.
- Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010a) Soft set Theory and Uni-int Decision Making. *European Journal of Operational Research*, 207(2), 848-855.
- Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010b). Soft Matrix Theory and its Decision Making. *Computers Mathematics with Applications*, 59(10), 3308-3314.
- Çallıalp, F. (1994). *Örneklerle Soyut Matematik* (Altıncı Baskı). Türkiye: Birsen Yayınevi, 1-7.
- Çallıalp, F. (1994). *Cebir*. Sakarya Üniversitesi Matbaası , 1-7.
- Ebrahimi Atani, R. and Ebrahimi Atani S. E. (2008). Ideal Theory in Commutative Semirings. *Buletinul Academiei De Stiinte A Republicii Moldova. Matematica*, 57(2), 14-23.
- Eren, Ö. F. (2019). *Esnek Küme Teorisi Üzerine*. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Feng, F., Jun, Y. B. and Zhao, X. (2008). Soft Semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, 56 (10), 2621-2628.

- Feng, F., Li, C., Davvaz, B. and Ali, M. I. (2010). Soft Sets Combined with Fuzzy Sets and Rough Sets: A Tentative Approach. *Soft Computing- A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications*, 14(9), 899–911.
- Feng, F., Li, Y., & Çağman, N. (2012). Generalized uni-int decision making schemes based on choice value soft sets. *European Journal of Operational Research*, 220(1), 162-170.
- Feng, F. and Yongming, L. (2013). Soft Subsets and Soft Product Operations. *Information Sciences*, 232(20), 44-57.
- Gong, K., Xiao, Z. and Zhang, X. (2010). The Bijective Soft Set with its Operations. *Computers Mathematics Applications*, 60(8), 2270-2278.
- Hacısalıhoğlu, H. (2007). *Soyut Matematik* (İkinci Baskı). Türkiye: Üniversite Yayınevi, 163-181.
- Herawan T. (2010). Soft Set-Based Decision Making for Patients Suspected Influenza-Like Illness. *International Journal of Modern Physics Conference Series*, 1(1), 1–5.
- Herawan, T. and Deris M. M. (2010). Soft Decision Making for Patients Suspected Influenza. *Lecture Notes in Computer Science, Springer* 6018, 405–418.
- Jiang, Y., Tang, Y., Chen, Q., Wang, J. and Tang, S. (2010). Extending Soft Sets with Descriptionlogics. *Computers Mathematics Applications*, 59(6), 2087-2096.
- Jun, Y. B. (2008). Soft BCK-BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(5), 1408-1413.
- Jun, Y. B. and Park, C. H. (2008). Applications Of Soft Sets in Ideal Theory of BCK-BCI-algebras. *Information Sciences: An International Journal*, 178 (11), 2466-2475.
- Jun, Y. B., Lee, K. J. and Zhan, J. (2009). Soft p-ideals of Soft BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(10), 2060-2068.
- Jun, Y. B., Lee K. J. and Khan, A. (2010). Soft Ordered Semigroups. *Mathematical Logic Quarterly*, 56(1), 42–50.
- Jun, Y. B., Song S. Z. and So, K. S. (2011). Soft Set Theory Applied to p-Ideals of BCI-algebras Related to Fuzzy Points. *Neural Computing and Applications*, 20(8), 1313-1320.
- Jun Y.B., Yang X. (2011). A Note On The Paper “Combination of Interval-Valued Fuzzy Set and Soft Set” [Comput. Math. Appl. 58 (2009) 521-527]. *Computers and Mathematics with Applications*, 61 1468-1470.
- Kamacı, H., Saltık, K., Akız, H. F. and Atagün, A. O. (2018). Cardinality Inverse Soft Matrix Theory and its Applications in Multicriteria Group Decision Making. *Journal of Intelligent Fuzzy Systems*, 34(3), 2031-2049.

- Karaaslan, F. (2019). Some Properties of AG*-groupoids and AG-bands Under SI-product Operation. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(1), 231-239.
- Karaaslan, F., Ullah, A. and Ahmad, I. (2021). Normal Bipolar Soft Subgroups. *Fuzzy Information and Engineering*, 13(1), 79-98.
- Karaçay, T., Eş, H. ve İbrahimoglu, İ. (2017). *Calculus* (Birinci Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık, 61-71.
- Karvellas, P. H. (1974). Inversive Semirings. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 18(3), 277-288.
- Kazancı, O., Yılmaz, S. and Yamak, S. (2010). Soft Sets and Soft BCH-algebras. *Hacettepe Journal of Mathematics Statistics*, 39(2), 205-217.
- Kilp, M., Knauer, U., and Mikhalev, A. V. (2001). *Monoids, Acts and Categories* (Second edition). Berlin: De Gruyter Expositions in Mathematics, (29).
- Kim, C. B. and Park, M. (1996). K-Fuzzy Ideals in Semirings. *Fuzzy Sets Systems*, 81, 281-286.
- Liu, X. Y., Feng F. and Jun, Y. B. (2012). A Note on Generalized Soft Equal Relations. *Computers and Mathematics with Applications*, 64(4), 572-578.
- Maji, P. K., Roy, A. R. and Biswas, R. (2002). An Application of Soft Sets in a Decision Making Problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 44(8-9), 1077-1083.
- Maji, P. K., Biswas, R. and Roy, A. R. (2003). Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 555-562.
- Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory-First results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19-31.
- Mushrif, M., Sengupta, S. and Ray, A. K. (2006). Texture Classification Using a Novel, Soft-Set Theory Based Classification, Algorithm. *Lecture Notes Computer Science*, 3851, 246-254.
- Neog, T. J. and Sut, D. K. (2011). A New Approach to the Theory of Soft Set. *International Journal of Computer Applications*, 32(2), 1-6.
- Nesin, A. (2019). *Sezgisel Kümeler Kuramı* (Altıncı Baskı). Türkiye: Nesin Yayıncılık, 7-59.
- Onyeozili, I. A. and Gwary, T. M. A. (2014). Study of the Fundamentals of Soft Set Theory. *International Journal Of Scientific and Technology Research*, 3(4), 132-143.
- Pei, D. and Miao, D. (2005). From Soft Sets to Information Systems. In *2005 IEEE International Conference on Granular Computing*, 2, 617-621.

- Petchimuthu, S., Garg, H., Kamacı, H. and Atagün, A.O. (2020). The Mean Operators and Generalized Products of Fuzzy Soft Matrices and Their Applications in MCGDM. *Computational and Applied Mathematics*, 39 (2), 1-32.
- Reutenauer, C. and Straubing, H. (1984). Inversion of Matrices over a Commutative Semiring. *Journal of Algebra*, 88(2), 350-360.
- Qin, K. and Hong, Z. (2010). On Soft Equality. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(5), 1347-1355.
- Sarılioğlu M., (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Intersection, Gamma and Star Operation*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Sezer A.S., Çağman, N. and Atagün, A. O. (2014). Soft Intersection Interior Ideals, Quasi-ideals and Generalized Bi-Ideals; a New Approach to Semigroup Theory II. *Journal of Multiple-valued Logic and Soft Computing*, 23(1-2), 161-207.
- Sezer A.S., Çağman, N., Atagün, A.O., Irfan Ali, M. and Türkmen, E. (2015). Soft Intersection Semigroups, Ideals and Bi-Ideals; a New Application on Semigroup Theory I. *Filomat*, 29(5), 917-946.
- Sezgin A, Ahmad S. and Mehmood A. (2019). New Operation on Soft Sets: Extended Difference of Soft Sets. *Journal of New Theory*, (27), 33-42.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011a). On Operations of Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5), 1457-1467.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011b). Soft Groups and Normalistic Soft Groups. *Computers and Mathematics with Applications*, 62 (2), 685-698.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Plus Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 110-127.
- Sezgin, A., Atagün, A. O. and Aygün, E. (2011). A Note on Soft Near-Rings and Idealistic Soft Near-Rings, *Filomat*, 25(1), 53-68.
- Sezgin, A. and Aybek, F. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Gamma Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(1), 27-45.
- Sezgin, A., Aybek, F. and Atagün, A. O. (2023a). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Intersection Operation. *Black Sea Journal of Engineering and Science*, 6(4), 330-346.
- Sezgin, A., Aybek, F. and Güngör N. B. (2023b). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Union Operation. *Acta Informatica Malaysia*, (7)1, 38-53.
- Sezgin, A. and Çağman, N. (2024). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 7(1), 1-37.

- Sezgin, A., Çağman, N., Atagün, A. O. and Aybek, F. (2023c). Complementary Binary Operations of Sets and Their Application to Group Theory. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 99-106.
- Sezgin, A. and Çalışıcı, H. (2024) A Comprehensive Study on Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(1), 1-23.
- Sezgin, A. and Demirci, A. M. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Star Operation. *Ikonion Journal of Mathematics*, 5(2), 24-52.
- Sezgin, A. and Sarıalioğlu, M. (2024). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Theta Operation. *Kadirli Uygulamalı Bilimler Fakültesi Dergisi*, 4(1), 1-33.
- Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023a). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Lambda Operation. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 8(2), 101-133.
- Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023b). A New Soft Set Operation: Soft Binary Piecewise Symmetric Difference Operation. *Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 5(2), 150-168.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012). On Some New Properties on Soft Set Operations. *International Journal of Computer Applications*, 59(4), 39-44.
- Stojanovic, N. S. (2021). A New Operation on Soft Sets: Extended Symmetric Difference of Soft Sets. *Military Technical Courier*, 69(4), 779-791.
- Ullah, A., Ahmad, I., Hayat, F., Karaaslan, F. and Rashad, M. (2018). Soft Intersection Abel-Grassmann's Groups. *Journal of Hyperstructures*, 7 (2), 149-173.
- Ullah, A., Karaaslan, F. and Ahmad, I. (2018). Soft uni-Abel-Grassmann's groups. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 11(2), 517-536.
- Vandiver, H. S. (1934). Note on a Simple Type of Algebra in which The Cancellation Law Of Addition Does Not Hold. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 40, (12) 914-920.
- Xiao Z., Chen L., Zhong B. and Ye S. (2005). Recognition for Soft Information Based on The Theory of Soft Sets. *Proceedings of ICSSSM'05. 2005 International Conference on Services Systems and Services Management*, 2, 1104– 1106.
- Yang, J. and Yao, Y. (2020). Semantics of Soft Sets and Three-way Decision with Soft Sets. *Knowledge Based Systems*, 194, 105538.
- Yang X., Lin T. S., Yang J., Li Y. and Yu D. (2009). Combination of Interval-Valued Fuzzy Set and Soft Set. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(3), 521–527.

- Yavuz E., (2024). *Soft Binary Piecewise Operations and Their Properties*, Unpublished Master's Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.
- Zhan, J. and Jun, Y. B. (2010). Soft BL-algebras Based on Fuzzy Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(6), 2037–2046.
- Zhu, P. and Wen, Q. (2013). Operations on Soft Sets Revisited. *Journal of Applied Mathematics* 2013(5), 1-7.
- Zorlutuna, I. (2021). Soft Set-Valued Mappings and their Application in Decision Making Problems. *Filomat*, 35(5), 1725-1733.



ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı: Ahmet Mücahit DEMİRCİ

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

- 1-) Sezgin, A. and Demirci, A. M. (2023). A New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Star Operation. *Ikonion Journal of Mathematics*, 5(2), 24-52.
- 2-) Sezgin, A., Sarıalioğlu M. and Demirci A.M. (2024). Distributions of Soft Binary Piecewise Operations over Complementary Soft Binary Piecewise Star and Theta Operations. *Journal of Kadirli Faculty of Applied Sciences*, 4(2), 1-35.

Eğitim Durumu:

Turhal Şeker Anadolu Öğretmen Lisesi (2011-2015)

Amasya Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği (2016-2020)