

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



YENİ λ^m – SINIRLI VE λ^m – MUTLAK
 p - TOPLANABİLİR DİZİ UZAYLARI

DOLUNAY BURÇ

Yüksek Lisans Tezi
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

TEMMUZ, 2020

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

**YENİ λ^m –SINIRLI VE λ^m – MUTLAK
 p -TOPLANABİLİR DİZİ UZAYLARI**

Tez Yazarı

Dolunay BURÇ

Danışman

Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ

TEMMUZ, 2020
ELAZIĞ

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Yeni λ^m –Sınırlı ve λ^m – Mutlak p -Toplanabilir Dizi Uzayları” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum ve kuruluşları belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

2/7/2020

Dolunay BURÇ



ÖNSÖZ

l_∞ , c ve c_0 sırası ile sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak dizi uzayları ve $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ dir. Kızmaz $l_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzaylarını tanımlayıp bu uzaylara ait bazı özellikleri verdi. Et bu dizi uzaylarını genişletti ve $l_\infty(\Delta^2)$, $c(\Delta^2)$ ve $c_0(\Delta^2)$ dizi uzaylarını tanımladı. Et ve Çolak bu dizi uzaylarını m. dereceden genişleterek $l_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ dizi uzaylarını tanımlamışlardır.

Bu çalışmada Bektaş tarafından incelenen m. dereceden dizi uzaylarının α -, β - γ - duallerine yer verildi.

Bu çalışmayı hazırlamamda bana destek olan ve her safhasında yardımını esirgemeyen tez danışmanım değerli hocam Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ' a ve eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Dolunay BURÇ

Elazığ, 2020

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
SİMGE VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
3. BAZI DİZİ UZAYLARI VE MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ	11
4. λ^m – YAKINSAKLIK λ^m –SINIRLILIK.....	21
4.1. λ^m –Dizi Uzayları	26
5. BAZI İÇERME BAĞINTILARI	31
6. $l_p(\lambda^m), l_\infty(\lambda^m), c_0(\lambda^m)$ VE $c(\lambda^m)$ UZAYLARININ α–, β – γ –DUALLERİ.....	36
7. BAZI MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ.....	42
KAYNAKLAR.....	47
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Yeni λ^m –Sınırlı ve λ^m – Mutlak p -Toplanabilir Dizi Uzayları

Dolunay BURÇ

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi
Temmuz 2020, Sayfa: viii+48

Bu çalışma yedi bölümden oluşmuştur.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde; tez boyunca kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; bs, cs, cs_0 dizi uzayları ve bu uzaylar arasındaki bazı matris dönüşümleri tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde; λ^m –yakınsaklık ve λ^m –sınırlılık kavramları tanımlandı. Klasik anlamda yakınsaklık ve sınırlılık ile aralarındaki ilişki incelendi. $l_p(\lambda^m), c_0(\lambda^m), c(\lambda^m), l_\infty(\lambda^m)$ ($0 < p < \infty$) mutlak olmayan tipten yeni dizi uzayları tanımlayıp bazı topolojik özellikleri verildi.

Beşinci bölümde; $l_p(\lambda^m), c_0(\lambda^m), c(\lambda^m), l_\infty(\lambda^m)$ ($0 < p < \infty$) dizi uzaylarının bazı içme bağıntıları verildi.

Altıncı bölümde; bu uzayların $\alpha - \beta - \gamma$ – dualleri hesaplandı ve bu tezin son bölümünde bu uzayların bazı klasik dizi uzaylarına matris dönüşümleri incelendi.

Anahtar Kelimeler: BK -uzayı, bs, cs, cs_0 dizi uzayları, matris dönüşümleri

ABSTRACT

New Sequence Spaces of λ^m – Bounded and λ^m – Absolutely p –Summable

Dolunay BURÇ

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Analysis and Function Theory

July 2020, Pages : viii+48

This study consists of seven chapters.

The first is the introduction.

In the second part, basic definitions and theorems that we will use throughout the thesis are given.

In the third chapter, bs, cs, cs_0 sequence spaces and matrix transformations between these spaces are defined.

In the fourth chapter, the concepts of λ^m – convergence and λ^m – limitation are defined. Convergence and limitation.

In classical sense were examined. $l_p(\lambda^m), c_0(\lambda^m), c(\lambda^m), l_\infty(\lambda^m)$ ($0 < p < \infty$) non-absolute type sequence spaces are defined and some topological properties are given.

In the sixth chapter, the $\alpha - \beta - \gamma$ duals of these extensions are calculated and in the last part of this thesis, matrix transformations of some of these spaces into classical sequence spaces are examined.

Keywords: BK-space , bs, cs, cs_0 sequence spaces , matrix transformations

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$\mathcal{W}$	: Reel veya Kompleks terimli tüm dizilerin uzayı
$\mathcal{C}$	: Yakınsak dizilerin uzayı
F	: Doğal sayılar cümlesinin bütün sonlu alt cümlelerinin ailesi
$\mathcal{C}_0$	: Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
l_∞	: Sınırlı dizi uzayı
l_1	: Mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
l_p	: p. kuvvetten mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
$\mathcal{CS}_0$	: Sıfıra yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
$\mathcal{CS}$	: Yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
$\mathcal{BS}$	: Sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı
X_A	: A sonsuz matrisinin bir X dizi uzayına etki alanı
Δ	: Fark operatörü
Δ^m	: m. dereceden fark operatörü

1. GİRİŞ

Dizi uzayları çalışmalarında esas mesele yeni dizi uzayları tanımlayabilmektir. Bu manada dizi uzayları araştırmacıları, bir sonsuz üçgensel matrisin standart dizi uzayları üzerindeki etki alanını kullanarak bir çok yeni dizi uzayları oluşturmuşlardır. Bunlardan en iyi bilinenler, Ng ve Lee (1978) nin Cesáro matrisini kullanarak yaptıkları çalışma ve Wang (1978) ın Nörlund matrisinin kullanarak verdiği çalışmadır. Daha sonra üçgensel matrisler kullanılarak birçok çalışma yapılmıştır.

Fark dizi uzayı kavramı ilk olarak Kızmaz (1981) tarafından tanımlandı. Kızmaz $X = l_\infty, c$ ve c_0 olmak üzere

$$X(\Delta) = \{x = (x_k) \in w: \Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1}) \in X\}$$

dizi uzaylarını tanımladı ve bu dizi uzaylarının bazı özelliklerini inceledi. Et (1993) bu Δ dizi uzaylarını genişletilerek

$$X(\Delta^2) = \{x = (x_k) \in w: \Delta^2 x = (\Delta^2 x_k) = (x_k - x_{k+1}) \in X\}$$

uzaylarını tanımladı. Et ve Çolak (1995) bu dizi uzaylarını pozitif bir m sayısı için tekrar genelleştirdiler ve

$$X(\Delta^m) = \{x = (x_k) \in w: \Delta^m x \in X\}$$

dizi uzaylarını elde ettiler. Bu uzayın $m = 1$ hali Kızmaz'ın tanımladığı uzayları, $m = 2$ hali Et'in çalışmalarındaki uzayları özel olarak vermektedir. Et ve Esi (2000), sıfırdan farklı kompleks sayıların $a = (a_k)$ dizisi için $m \in \mathbb{N}$, $\Delta_a^0(x) = (a_k x_k)$, $\Delta_a x = (a_k x_k - a_{k+1} x_{k+1})$, $\Delta_a^m x = (\Delta_a^m x) = (\Delta_a^{m-1} x_k - \Delta_a^{m-1} x_{k+1})$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\Delta_a^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} a_{k+i} x_{k+i}$$

olmak üzere bu uzayları

$$X(\Delta_a^m) = \{x = (x_k) \in w: \Delta_a^m x \in X\}$$

şeklindeki uzaylara genelleştirdiler.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölüm de tez boyunca kullanacağımız temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1: X boş olmayan bir küme ve F reel ya da kompleks sayıların cismi olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise X kümesine bir vektör uzayı denir.

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

ve

$$\cdot : F \times X \rightarrow X$$

olmak üzere her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in F$ için

- i. $x + y = y + x$
- ii. $(x + y) + z = x + (y + z)$
- iii. $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.
- iv. $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.
- v. $1 \cdot x = x$
- vi. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- vii. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- viii. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

şartları sağlanıyorsa, X kümesine F cismi üzerinde bir lineer uzay denir [1].

Tanım 2.2: X, F ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir lineer uzay ve Y, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Her $y_1, y_2 \in Y$ ve her $a, b \in F$ için $ay_1 + by_2 \in Y$ olması halinde Y ye X uzayının bir alt uzayı denir [1].

Tanım 2.3: Tanım kümesi N doğal sayılar kümesi olan fonksiyona dizi denir ve (x_n) ile gösterilir [2].

Tanım 2.4: Kompleks ya da reel terimli bütün dizilerin uzayı w ile gösterilsin. w dizilerin toplama ve skalerle çarpma işlemine göre vektör uzayı yapısına sahiptir. w vektör uzayının herhangi bir alt vektör uzayına ise dizi uzayı denir [1].

Tanım 2.5: Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} > a_n$ ise (a_n) dizisine monoton artan, $a_{n+1} < a_n$ ise (a_n) dizisine monoton azalan dizi denir [3].

Tanım 2.6 : Her $n \in N$ için $x_n \leq M$ reel sayısı varsa (x_n) dizisine üstten sınırlıdır denir. M sayısına bu dizinin üst sınırıdır denir. Üst sınırlarının en küçüğüne dizinin en küçük üst sınırı veya supremumu adı verilir ve $\sup x_n$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.7: Her $n \in N$ için $x_n \geq K$ olacak şekilde K reel sayısı varsa (x_n) dizisine alttan sınırlıdır denir. K sayısına bu dizinin bir alt sınırıdır denir. Alt sınırlarının en büyüğüne dizinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir. $\inf x_n$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.8: Her $n \in N$ için $|x_n| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa (x_n) dizisine sınırlıdır denir [2].

Tanım 2.9: F bir cisim X ve Y de F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $x, y \in X$ ve $c \in F$ olmak üzere $T: X \rightarrow Y$ dönüşümü

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

$$T(cx) = cT(x)$$

şartlarını sağlıyorsa T ye X üzerinde lineer dönüşüm denir [1].

Tanım 2.10: X bir lineer vektör uzayı olsun. X nin her x vektörüne $\|x\|$ reel sayısına karşı getiren ve aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli $\|\cdot\|: X \rightarrow R^+$ fonksiyonuna X de bir norm $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ ve λ skaleri için

i. $\|x\| \geq 0$

ii. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

iii. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

dir. Eğer (iii) yerine (iii)* $\|ax\| = |a|^p \|x\|$ alınırsa X bir p-normlu uzay olur [4].

Tanım 2.11: $(X, \|\cdot\|_1)$ ve $(Y, \|\cdot\|_2)$ birer normlu uzay ve $T: X \rightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. T dönüşümü normu koruyorsa, yani $x \in X$ için $\|Tx\|_2 = \|x\|_1$ oluyorsa T dönüşümüne lineer izometri denir. Böyle bir dönüşümün birebir olacağı açıktır. Eğer bu dönüşüm örten ise T ye lineer izomorfizim denir. Bu durumda X ile Y normlu uzayları izomorfik uzaylar adını alırlar ve $X \cong Y$ yazılır [5].

Tanım 2.12: $X \neq \emptyset$ bir cümle olsun. $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in X$ için

i. $d(x, y) \geq 0$

ii. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri özelliği)

iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa d ye X de bir metrik ve d ile birlikte X e metrik uzay denir ve (X, d) ile gösterilir [1].

Tanım 2.13: (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer X de her Cauchy dizisi X de bir noktaya yakınsıyorsa X e tam metrik uzay denir [1].

Tanım 2.14 : K bir cisim ve X bir vektör uzayı olmak üzere $\langle ., . \rangle : X \times X \rightarrow K$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\langle ., . \rangle$ dönüşümüne X üzerinde bir iç çarpım ve $(X, \langle ., . \rangle)$ ikilisine de bir iç çarpım uzayı denir. Her $x, y, z \in X$ ve α skaleri için

- i. $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,
- ii. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (kompleks eşlenik),
- iii. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
- iv. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ dir.

X üzerinde tanımlanan bir iç çarpım, X üzerinde

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} \quad (2.1)$$

ile verilen bir norm tanımlar. Buna göre, iç çarpım uzayları birer normlu uzaylardır [6].

Tanım 2.15: Bir $(X, \langle ., . \rangle)$ iç çarpım uzayı (2.1) normuna göre tam ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [6].

Tanım 2.16: X normlu uzay ve (x_n) de bu uzayda bir dizi olsun. Eğer X uzayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir x elemanı içeriyorsa, (x_n) dizisi yakınsaktır denir. Bu durum $(x_n) \rightarrow x$ olarak yazılır ve x noktasına (x_n) dizisinin limiti adı verilir [7].

Tanım 2.17: $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında $x = (x_n)$ bir dizi olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| \leq M$ olacak şekilde en az bir $M \in \mathbb{R}^+$ varsa $x = (x_n)$ dizisine sınırlı dizi denir [1].

Tanım 2.18: Normlu bir (x_n) dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n, k > N$ iken $\|x_n - x_k\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir [7].

Tanım 2.19: Normlu bir uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsak ise bu uzaya tam uzay denir [8].

Tanım 2.20: X ve Y iki normlu uzay ve $T: X \rightarrow Y$ lineer dönüşümü olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$\|T(x)\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa T ye sınırlı lineer dönüşüm denir. Bir sınırlı lineer dönüşümün normu

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

şeklinde tanımlanır.

X uzayından Y uzayına olan bütün sınırlı lineer operatörlerinin cümlesi $B(X, Y)$ ile gösterilir. Özel olarak $Y = \mathbb{C}$ alınırsa, bu durumda $B(X, \mathbb{C})$ cümlesi X üzerindeki bütün sınırlı lineer fonksiyonların cümlesine karşılık gelir. Bu cümleye X in sürekli duali denir ve X^* ile gösterilir [1].

Tanım 2.21 : $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında Cauchy dizisi yakınsak ise yani X normlu uzayı tam ise bu uzaya Banach uzayı denir [9].

Tanım 2.22: Tam lineer metrik uzaya Frechet uzayı (F – uzayı) denir [10].

Tanım 2.23: X herhangi bir cümle olsun. $P(x)$ kuvvet kümesinin bir alt cümlesi olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa τ ya X cümlesi üzerinde bir topoloji (topolojik yapı) denir.

$$T_1) \emptyset, x \in \tau$$

$$T_2) \tau \text{ da alınan sonlu sayıda elamanların kesişimi } \tau \text{ ya aittir. Yani } \forall \{A_i\}_{i \in J} \subset \tau \text{ için}$$

$$\bigcap_{i \in J} A_i \in \tau \text{ dir.}$$

$$T_3) \tau \text{ da alınan her sayıda elamanların birleşimi } \tau \text{ ya aittir. Yani } \forall \{A_i\}_{i \in J} \subset \tau \text{ için}$$

$$\bigcup_{i \in J} A_i \in \tau \text{ dir.}$$

(X, τ) ikilisine de topolojik uzay adı verilir [9].

Tanım 2.24: X bir topolojik uzay olsun. $n \in N$ için,

$$\rho_n: X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \rightarrow \rho_n(x) = x_n$$

şeklinde tanımlı koordinat fonksiyonellerini sürekli kılan topolojiye sahip X dizi uzayına K - uzayı denir. K -uzayı olan F -uzayı FK – uzayı olarak adlandırılır. Topolojisi bir normdan elde edilen FK uzayına BK – uzayı denir [11].

Tanım 2.25: Tanım bölgesi X vektör uzayında, değer bölgesi ise X in bir F skaler cismi içinde bulunan lineer bir f operatörüne bir lineer fonksiyonel adı verilir; dolayısıyla, X reel ise $F = \mathbb{R}$ ve X kompleks ise $F = \mathbb{C}$ olmak üzere

$$f: D(f) \rightarrow F$$

yazılır.

Lineer fonksiyonellerin oluşturduğu $X^* = L(X, \mathbb{R})$ lineer uzayına da X uzayının cebirsel duali adı verilir [6].

Tanım 2.26 : $D(f)$ tanım bölgesi, normlu bir X uzayında, değer bölgesi ise, bu normlu X uzayının skaler cismi içinde bulunan, sınırlı lineer bir f operatörüne sınırlı lineer fonksiyonel adı verilir. Buna göre her $x \in D(f)$ için

$$|f(x)| \leq c \|x\|$$

olacak şekilde reel bir $c > 0$ sayısı vardır. Ayrıca f nin normu,

$$\|f\| = \sup_{x \in D(f)} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

ya da

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

dir [6].

Teorem 2.27: Bir X Banach uzayının bir Y alt uzayının tam olması için gerek ve yeter şart Y nin X de kapalı olmasıdır.

Teorem 2.28: X Banach uzayından Y normlu uzayına sınırlı lineer operatörlerin bir dizisi (T_n) olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\sup_n \|T_n(x)\| < \infty$$

ise

$$\sup_n \|T_n\| < \infty$$

dir. Bu taktirde $(\|T_n\|)$ normlar dizisi sınırlıdır [4].

Tanım 2.29: Terimleri reel ya da karmaşık sayılardan oluşan ve terimlerinin salt değerlerinin toplamı yakınsak olan $x = (x_n)$ dizilerinin oluşturduğu kümeye l_1 uzayı denir [1].

$$l_1 = \left\{ x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

Tanım 2.30: Terimleri reel ya da karmaşık sayılardan oluşan ve terimlerinin salt değerlerinin karelerinin toplamı yakınsak olan bütün dizilerin oluşturduğu uzaya l_2 uzayı denir [1].

$$l_2 = \left\{ x = (x_n) : \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right) < \infty \right\}$$

Tanım 2.31: $x \in w$ olmak üzere sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak dizi uzayları sırasıyla

$$l_\infty = \left\{ x = (x_n) : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

$$c = \{ x = (x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ mevcut} \}$$

$$c_0 = \{ x = (x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaylar,

$$d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$$

metriği ile birer tam metrik uzaydır. Bu uzaylar aynı zamanda

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$$

normu ile BK –uzayıdır [1].

Tanım 2.32: $1 \leq p < \infty$ için p . dereceden mutlak yakınsak serilerin uzayını l_p ile göstereceğiz, yani

$$l_p = \left\{ x = (x_n) \in w : \sum_n |x_n|^p < \infty \right\}$$

dir. Bu uzay

$$\|x\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

normuyla bir BK –uzayıdır [1].

Tanım 2.33: X bir dizi uzayı ve A sonsuz bir matris olmak üzere

$$X_A = \{x = (x_k) \in w : Ax \in X\} \quad (2.2)$$

cümlesi A matrisinin etki alanı olarak tanımlanır [12].

Tanım 2.34: $T = (t_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. Eğer $T = (t_{nk})$ sonsuz matrisi

$$t_{nk} = \begin{cases} 0, & k > n \\ t_{kn} \neq 0, & k = n \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanıyorsa T matrisine üçgensel matris denir [11].

Teorem 2.35: X bir BK - uzayı ve T de bir üçgensel matris olsun. Bu takdirde, X_T cümlesi her $x \in X_T$ için,

$$\|x\|_T = \|Tx\|$$

normuna göre bir BK - uzayıdır [11].

Tanım 2.36: $A = (a_{nk})$ matrisi, $c \subset c_A$ ($x \in c$ iken $Ax \in c$) ve $\lim_n (Ax)_n = \lim_n x_n$ şartlarını sağlıyorsa regüler matris olarak adlandırılır [13].

Tanım 2.37: $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks terimli sonsuz bir matris ve $x = (x_k) \in w$ olsun. Her $n \in N$ için,

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^n a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise $((Ax)_n)$ dizisine (x_k) dizisinin A matrisi ile elde edilen A dönüşümü denir. Ayrıca x dizisine A -toplanabilirdir denir [13].

Teorem 2.38 : (Steinhaus Teoremi) A regüler bir matris olsun. Bu takdirde sınırlı olup A – toplanabilir olmayan bir dizi mevcuttur [12].

Tanım 2.39: $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında $(b_n) \subset X$ dizisi verilsin. Her $x \in X$ dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=0}^n a_k b_k \right\| = 0$$

olacak şekilde bir tek (a_n) skalerler dizisi varsa (b_n) cümlesine X uzayının Schauder bazı denir ve

$$x = \sum_n a_n b_n$$

yazılır [4].

Teorem 2.40: Schauder bazına sahip her Banach uzayı ayrılabiliridir.

Teorem 2.41: T üçgensel bir matris ve tersi de S olsun. (b_n) bir X normlu uzayının Schauder bazı ise X_T normlu uzayının Schauder bazı $(S(b^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$ olur [14].

Tanım 2.42: A ve B sonsuz matrisleri olsun. Eğer AB mevcut ve $AB = I$ olursa A ya B nin sol tersi ve B ye de A nın bir sağ tersi denir. Buna ek olarak, eğer BA da mevcut ve $AB = BA = I$ olursa B ye A nın tersi denir [15].

Tanım 2.43: $A = (a_{nk})$ reel yada kompleks terimli bir sonsuz matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $n \in N$ için,

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serileri yakınsak ise, $((Ax)_n)$ dizisine (x_k) dizisini A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir.

X ve Y herhangi iki dizi uzayı ve A da bir sonsuz matris olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi mevcut ve Y uzayında ise A matrisi, X uzayından Y uzayına tanımlıdır denir ve $A \in (X, Y)$ yazılır. X uzayından Y uzayına tanımlı bütün matrislerin sınıfı (X, Y) ile gösterilir [11].

Teorem 2.44 (Paralel kenar kanunu): Herhangi bir iç çarpım uzayında

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

eşitliği sağlanır [6].

Tanım 2.45 (Abel kısmi toplamlar formülü): $(a_k), (b_k) \in w$ olsun.

$$x_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

ve $x_{-1} = 0$ olmak üzere her $n, k \in N$ için

$$\sum_{k=v}^{n+v} a_k b_k = \sum_{k=v}^{n+v} x_k (b_k - b_{k+1}) - x_{v-1} b_v + x_{n+v} b_{n+v+1}$$

sağlanır [16].

Tanım 2.46: $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $x = (x_k) \in l_p, y = (y_k) \in l_q$ alalım. Bu takdirde

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliğe Hölder Eşitsizliği denir [4].

Tanım 2.47: $p > 1$ olmak üzere $x = (x_k)$ ve $y = (y_k) \in l_p$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^p \right)^{1/p}$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliğe Minkowski Eşitsizliği denir [4].

Tanım 2.48: (x_n) bir dizi olsun. Bu dizinin terimlerinin sonsuz toplamına seri denir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

şeklinde gösterilir [2].

Tanım 2.49 : X bir dizi uzayı olsun. X in $\alpha -$, $\beta -$ ve $\gamma -$ duali

$$X^\alpha = \left\{ \alpha = (\alpha_k) \in w: \text{her } x = (x_k) \in X \text{ için } \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k x_k| < \infty \right\},$$

$$X^\beta = \left\{ \alpha = (\alpha_k) \in w: \text{her } x = (x_k) \in X \text{ için } \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k x_k) \text{ yakınsak} \right\},$$

$$X^\gamma = \left\{ \alpha = (\alpha_k) \in w: \text{her } x = (x_k) \in X \text{ için } \sup_n \left| \sum_{k=0}^n (\alpha_k x_k) \right| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. α -, β - ve γ - duallerine sırasıyla Köthe-Toeplitz duali, genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz duali ve Garling duali de denir [16].



3. BAZI DİZİ UZAYLARI VE MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Tanım 3.1: bs sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı

$$bs = \left\{ x = (x_n) : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n x_k \right| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. bs uzayı üzerindeki metrik her $x, y \in bs$ için

$$d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n (x_k - y_k) \right|$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu uzay

$$\|x\|_{bs} = \sup_n \left| \sum_{k=1}^n x_k \right|$$

normu ile bir normlu uzaydır [19].

Tanım 3.2: cs yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı

$$cs = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=0}^n x_k - l \right| = 0, \exists l \in \mathbb{C} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzay üzerindeki metrik

$$\|x\|_{cs} = \sup_k \left| \sum_{n=1}^k x_n \right|$$

dir [19].

Özel olarak $l = 0$ alınırsa cs_0 uzayı elde edilir [19].

Tanım 3.3 : λ bir dizi uzayı, A da sonsuz bir matris olmak üzere,

$$\lambda_A = \{x = (x_k) \in w : Ax \in \lambda\}$$

olarak tanımlanan cümleye λ – etki alanı denir. Burada λ_A da bir dizi uzayıdır [15].

Lemma 3.4: i) $A = (a_{nk}) \in (c_0, l_1) = (c, l_1) = (l_\infty, l_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{K \in F} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in K} a_{nk} \right| < \infty \quad (3.1)$$

şartının sağlanmasıdır.

ii) $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $A \in (l_\infty, l_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{K \in F} \sum_k \left| \sum_{n \in F} a_{nk} \right|^q < \infty \quad (3.2)$$

şartının sağlanmasıdır.

iii) $A \in (l_1, l_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_k \sum_n |a_{nk}| < \infty \quad (3.3)$$

şartının sağlanmasıdır [17].

Lemma 3.5: i) $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $A \in (l_p, c)$ olması için gerek ve yeter şart her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} \text{ mevcut} \quad (3.4)$$

ve

$$\sup_k \sum_n |a_{nk}|^q < \infty \quad (3.5)$$

şartının sağlanmasıdır.

ii) $A \in (l_1, c)$ olması için gerek ve yeter şart (3.4) ve

$$\sup_{n,k} |a_{nk}| < \infty \quad (3.6)$$

şartının sağlanmasıdır.

iii) $A \in (l_\infty, c)$ olması için gerek ve yeter şart (3.4) ve

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty \quad (3.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |a_{nk} - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk}| = 0 \quad (3.8)$$

şartının sağlanmasıdır [18].

Lemma 3.6: i) $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $A \in (l_p, c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (3.5)

ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 \quad (3.9)$$

ii) $A \in (l_1, c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (3.6) ve (3.9) şartlarının sağlanmasıdır.

iii) $A \in (l_\infty, c_0)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}| = 0 \quad (3.10)$$

şartının sağlanmasıdır [18].

Lemma 3.7: i) $A = (a_{nk}) \in (c_0, l_\infty) = (c, l_\infty) = (l_\infty, l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \right) < \infty \quad (3.11)$$

şartının sağlanmasıdır.

ii) $1 < p < \infty$ iken $A = (a_{nk}) \in (l_p, l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (3.5) şartının sağlanmasıdır.

iii) $p=1$ iken $A = (a_{nk}) \in (l_p, l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (3.6) şartının sağlanmasıdır [18].

Lemma 3.8: $1 < p < \infty$, $A \in (l_1, l_p)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_k \sum_n |a_{nk}|^p < \infty$$

olmasıdır [15].

Teorem 3.9: (Kojima –Schur) $A = (a_{nk}) \in (c, c)$ olması için gerek ve yeter şart (3.4), (3.7) ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} \text{ mevcut} \quad (3.12)$$

şartlarının sağlanmasıdır [19].

Lemma 3.10: $a = (a_{nk}) \in (c_0, c)$ olması için gerek ve yeter şart (3.4) ve (3.7) şartlarının sağlanmasıdır.

Şimdi sonsuz matrislerin etki alanı aracılığıyla tanımlanan dizi uzaylarına ait bazı çalışmalar ile ilgili bilgi verelim. $\Delta = (a_{nk})$ fark matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$a_{nk} = f(x) = \begin{cases} -1, & k = n \\ 1, & k = n - 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.13)$$

olmak üzere Kızmaz [16], l_∞ , c , c_0 klasik dizi uzaylarını

$$l_\infty(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+1} (-1)^{n-k} x_k \right| < \infty \right\},$$

$$c(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{n+1} (-1)^{n-k} x_k \text{ mevcut} \right\},$$

$$c_0(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{n+1} (-1)^{n-k} x_k = 0 \right\}$$

uzaylarına genelleştirdi. Et [20], ikinci mertebeden $\Delta^2 = (a_{nk}^2)$ fark matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$a_{nk}^2 = \begin{cases} 1 & , k = n \\ -2 & , k = n - 1 \\ 1 & , k = n - 2 \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere

$$l_\infty(\Delta^2) = \left\{ x = (x_k) \in w: \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{v=0}^2 (-1)^v \binom{2}{v} x_{k-v} \right| < \infty \right\},$$

$$c_0(\Delta^2) = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=0}^2 (-1)^v \binom{2}{v} x_{k-v} \right) = 0 \right\},$$

$$c(\Delta^2) = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=0}^2 (-1)^v \binom{2}{v} x_{k-v} \right) \text{ mevcut} \right\}$$

uzaylarını tanımladı. Daha sonrasında Malkowsky [21], m. dereceden genelleştirilmiş $\Delta^m = (a_{nk})$ fark matrisi

$$a_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k} \binom{m}{n-k}, & \text{maks}\{0, n-m\} \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere, bu uzayları

$$l_\infty(\Delta^{(m)}) = \left\{ x = (x_k) \in w: \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k-v} \right| < \infty \right\},$$

$$c_0(\Delta^{(m)}) = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k-v} \right) = 0 \right\},$$

$$c(\Delta^{(m)}) = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k-v} \right) \text{ mevcut} \right\}$$

uzaylarına genelleştirdi. Çolak ve Et [22], m. dereceden genelleştirilmiş Δ^m fark operatörünü, $m \in \mathbb{N}$ için

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere

$$l_\infty(\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \right| < \infty \right\},$$

$$c(\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \right) \text{ mevcut} \right\},$$

$$c_0(\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \right) = 0 \right\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar.

Teorem 3.11: $l_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ fark dizi uzayları

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + \sup_k |\Delta x_k - \Delta y_k|$$

metriği ile birlikte birer tam metrik uzaydır [16].

Teorem 3.12 : $l_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birlikte birer normlu uzaydır, hatta birer Banach uzayıdır [16].

Tanım 3.13: Başar ve Aydın [21] de a_0^r ve a_c^r dizi uzaylarını tanımladı.

$$a_0^r = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (1+r^k)(x_k - x_{k-1}) = 0 \right\}$$

$$a_c^r = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (1+r^k)(x_k - x_{k-1}) \text{ mevcut} \right\}$$

Tanım 3.14: $0 < r < 1$ ve her $k, n \in \mathbb{N}$ için $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ olmak üzere r -inci sıradan $E^r -$

Euler ortalamaları her $k, n \in \mathbb{N}$ için $E^r = (e_{nk}^r)$ matrisi ile

$$e_{nk}^r = \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot (1-r)^{n-k} \cdot r^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.15: λ dizi uzayları l_∞, c, c_0 ve l_p klasik dizi uzaylarından herhangi birini göstermek üzere λ_{E^r} etki alanına Euler dizi uzayı denir. Euler dizi uzayları Başar ve Altay [23] Altay v.d [24] ve Mursaleen v.d [25] başta olmak üzere birçok yazar tarafından incelenmiştir.

Bir $x = (x_k) \in w$ dizisinin E^r –dönüşümü $y = (y_k)$ dizisi her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$y_k = (E^r x)_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j$$

dir.

Mutlak olmayan tipten e_p^r, e_0^r, e_c^r ve e_∞^r Euler dizi uzayları; E^r – dönüşümleri sırası ile l_p, c_0, c ve l_∞ uzaylarında olan bütün dizilerin kümesidir:

$$e_p^r = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_n \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \right|^p < \infty \right\},$$

$$e_0^r = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k = 0 \right\},$$

$$e_c^r = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \text{ mevcut} \right\},$$

$$e_\infty^r = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \right| < \infty \right\}$$

(2.2) gösterimi ile birlikte e_p^r, e_0^r, e_c^r ve e_∞^r dizi uzayları

$$e_p^r = (l_p)_{E^r}, e_0^r = (c_0)_{E^r}, e_c^r = (c)_{E^r} \text{ ve } e_\infty^r = (l_\infty)_{E^r}$$

olarakta gösterilebilir [19].

Başar, Altay ve Mursaleen [26] de her $k, n \in \mathbb{N}$ ve sabit $m \in \mathbb{N}$ için $\Delta^{(m)} = (\delta_{nk}^{(m)})$ üçgen matrisini

$$\delta_{nk}^{(m)} = \begin{cases} (-1)^{n-k} \binom{m}{n-k} & , \max\{0, n-m\} \leq k \leq n \\ 0 & , 0 \leq k \leq \max\{0, n-m\} \text{ veya } k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlandı.

Kızmaz [16] de e_0^r, e_c^r ve e_∞^r dizi uzaylarını $\Delta^{(m)}$ dönüşümünü kullanarak $e_0^r(\Delta^{(m)})$, $e_c^r(\Delta^{(m)})$ ve $e_\infty^r(\Delta^{(m)})$

$$e_0^r(\Delta^{(m)}) = \{x = (x_k) \in w: \Delta^{(m)}x \in e_0^r\},$$

$$e_c^r(\Delta^{(m)}) = \{x = (x_k) \in w: \Delta^{(m)}x \in e_c^r\},$$

$$e_\infty^r(\Delta^{(m)}) = \{x = (x_k) \in w: \Delta^{(m)}x \in e_\infty^r\}$$

şeklinde tanımlandı.

Tanım 3.3 ile $e_0^r(\Delta^{(m)})$, $e_c^r(\Delta^{(m)})$ ve $e_\infty^r(\Delta^{(m)})$ dizi uzaylarını sırasıyla $e_0^r(\Delta^{(m)}) = (e_0^r)_{\Delta^{(m)}}$, $e_c^r(\Delta^{(m)}) = (e_c^r)_{\Delta^{(m)}}$ ve $e_\infty^r(\Delta^{(m)}) = (e_\infty^r)_{\Delta^{(m)}}$ şeklinde yeniden tanımlayabiliriz.

Mursaleen ve Noman (2010), $\lambda = (\lambda_k)$ pozitif gerçel sayıların kesin artan ve ∞ a yakınsayan bir dizisi yani;

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \quad \text{ve} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty \quad (3.14)$$

olmak üzere $\forall n, k \in N$ için

$$\lambda_{nk} = \begin{cases} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_k}, & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n, \end{cases} \quad (3.15)$$

ile tanımlı $\Lambda = (\lambda_{nk})$ üçgensel matrisinin c_0 , c ve l_∞ uzayları üzerindeki etki alanını kullanarak, c_0^λ, c^λ ve l_∞^λ uzaylarını tanımladı ve bu matrisin cs, cs_0 ve bs dizi uzayları üzerindeki etki alanını kullanarak,

$$c^\lambda = (c)_\Lambda = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \text{ mevcut} \right\},$$

$$c_0^\lambda = (c_0)_\Lambda = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k = 0 \right\},$$

$$cs^\lambda = (cs)_\Lambda = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \text{ mevcut} \right\},$$

$$cs_0^\lambda = (cs_0)_\Lambda = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k = 0 \right\},$$

$$bs^\lambda = (bs)_\Lambda = \left\{ x = (x_k) \in w : \left| \sup_m \sum_{n=0}^m \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \right| < \infty \right\},$$

$$l_\infty^\lambda = (l_\infty)_\Lambda = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \right| < \infty \right\},$$

$$l_p^\lambda = (l_p)_\Lambda = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{n=0}^\infty \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \right|^p < \infty \right\}$$

dizi uzaylarını inşa ettiler. Daha sonra Numan ve Mursalaen [28], (3.13) ile verilen Δ fark operatöründen yararlanarak, bu uzayları

$$cs_0^\lambda(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) (x_k - x_{k-1}) = 0 \right\},$$

$$cs^\lambda(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) (x_k - x_{k-1}), \text{mevcut} \right\},$$

$$bs^\lambda(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w : \left| \sup_m \sum_{n=0}^m \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) (x_k - x_{k-1}) \right| < \infty \right\},$$

$$c_0^\lambda(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) (x_k - x_{k-1}) = 0 \right\},$$

$$c^\lambda(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) (x_k - x_{k-1}) \text{mevcut} \right\}$$

uzaylarına genişlettiler. Burada $\bar{\Lambda} = (\bar{\lambda}_{nk})$ matrisi her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$\bar{\lambda}_{nk} = \begin{cases} \frac{(\lambda_k - \lambda_{k-1}) - (\lambda_{k+1} - \lambda_k)}{\lambda_n} & , \quad k < n \\ \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} & , \quad k = n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

alınırsa bu matrisinin etki alanı

$$c_0^\lambda(\Delta) = (c_0)_{\bar{\Lambda}} \quad \text{ve} \quad c^\lambda(\Delta) = (c)_{\bar{\Lambda}}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Başar ve Sönmez [29] her $k, n \in \mathbb{N}$ için $B(r, s) = (b_{nk}(r, s))$

$$b_{nk}(r, s) = \begin{cases} r, & k = n \\ s, & k = n - 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı olmak üzere

$$c^\lambda(B) = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1})(rx_k - sx_{k-1}) \text{ mevcut} \right\},$$

$$c_0^\lambda(B) = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1})(rx_k - sx_{k-1}) = 0 \right\}$$

uzaylarını tanımladılar.

Burada $\bar{B}(r, s) = (\bar{b}_{nk}(r, s))$ matrisi

$$\bar{b}_{nk}(r, s) = \begin{cases} \frac{r(\lambda_k - \lambda_{k-1}) + s(\lambda_{k+1} - \lambda_k)}{\lambda_n}, & k < n \\ r \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}, & k = n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

ile tanımlanırsa, bu dizi uzayları $\bar{B}$ matrisinin etki alanı olarak

$$c^\lambda(B) = (c)_{\bar{B}} \text{ ve } c_0^\lambda(B) = (c_0)_{\bar{B}}$$

şeklinde verilebilir.

Numan ve Mursalaen [28] $\bar{r} = (r_n)_{n=0}^\infty$ ve $\bar{s} = (s_n)_{n=0}^\infty$ ile pozitif ve yakınsak diziler ve

$$\bar{B}(\bar{r}, \bar{s}) = (\bar{b}_{nk}(\bar{r}, \bar{s}))$$

matrisi her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$\bar{b}_{nk}(\bar{r}, \bar{s}) = \begin{cases} r_n, & k = n \\ s_n, & k = n - 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

tanımlıdır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $r_n = r$ ve $s_n = s$ alınarak $B(r, s)$ matrisine indirgemişlerdir.

Başar ve Sönmez [29] $c_0^\lambda(B)$ ve $c^\lambda(B)$ uzaylarının genelleştirmeleri olan $c_0^\lambda(\bar{B})$ ve $c^\lambda(\bar{B})$ fark dizi uzaylarını aşağıdaki gibi tanımladılar.

$$c_0^\lambda(\bar{B}) = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1})(r_k x_k + s_{k-1} x_{k-1}) = 0 \right\},$$

$$c^\lambda(\bar{B}) = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1})(r_k x_k + s_{k-1} x_{k-1}) \text{ mevcut} \right\}$$

Tanım 2.3 kullanılarak $c_0^\lambda(\bar{B}) = (c_0^\lambda)_{\bar{B}}$ ve $c^\lambda(\bar{B}) = (c^\lambda)_{\bar{B}}$ şeklinde yazabiliriz.

Başar ve Braha [30] bir $\lambda = (\lambda_k)$ dizisi $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\lambda_{k+1} \geq 2\lambda_k$ olmak üzere, bir $A(\lambda) = (a_{nk}(\lambda))$ matrisini her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$a_{nk}(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda_k - 2\lambda_{k-1} + \lambda_{k-2}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımladılar. Bu matris yardımıyla

$$A_\lambda(c_0) = \{x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} (A_\lambda x)_n = 0\},$$

$$A_\lambda(c) = \{x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} (A_\lambda x)_n \text{ mevcut}\},$$

$$A_\lambda(l_\infty) = \{x = (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} |(A_\lambda x)_n| < \infty\}$$

uzaylarını tanımladılar. Bu uzaylar $A(\lambda)$ matrisinin etki alanı vasıtasıyla

$$A_\lambda(c_0) = (c_0)_{A(\lambda)}, \quad A_\lambda(c) = (c)_{A(\lambda)} \quad \text{ve} \quad A_\lambda(l_\infty) = (l_\infty)_{A(\lambda)}$$

şeklinde tanımlanabilir.

4. λ^m –YAKINSAKLIK VE λ^m –SINIRLILIK

Bu bölümde λ^m –yakınsaklık ve λ^m –sınırlılık kavramlarını ifade ve ispat edeceğiz.

$\lambda = (\lambda_k)$ pozitif reel sayıların kesin artan bir dizisi, her $k \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 2$ için $\lambda_{k+1} \geq m\lambda_k$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$ olsun. Burada

$$\Delta^m \lambda_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} \lambda_{k-v}$$

ve $\Delta^m \lambda_k \geq 0$ dır. Ayrıca $\lambda_{-1} = \lambda_{-2} = \dots = \lambda_{-m} = 0$ olduğu kabul edilmiştir. λ dizisinden faydalananak sonsuz Λ^m matrisini, $\Lambda^m = (\lambda_{nk}^m)$ olmak üzere ;

$$\lambda_{nk}^m = \begin{cases} \frac{\Delta^m \lambda_k}{\Delta^{m-1} \lambda_n} & , 0 \leq k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlayalım. Her $k > n$ için $\lambda_{nk}^m = 0$ ve $\lambda_{nn}^m \neq 0$ olduğundan Λ^m matrisi üçgensel bir matristir. Λ^m matrisi yardımı ile bir $x = (x_k) \in w$ dizisinin $\Lambda^m(x) = (\Lambda_n^m(x))$ dönüşümünü her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\Lambda_n^m(x) = \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k) x_k \quad (4.2)$$

şeklinde verebiliriz [31].

Tanım 4.1 : Bir $x = (x_k) \in w$ dizisi ve bir $l \in \mathbb{C}$ sayısı verilsin. Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $\Lambda_n^m(x) \rightarrow l$ ise x dizisine l sayısına λ^m –yakınsak dizi denir.

Tanım 4.2: Bir $x = (x_k) \in w$ dizisi verilsin. Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $\Lambda_n^m(x) \rightarrow 0$ ise (x_k) dizisine sıfıra λ^m –yakınsak dizi denir.

Tanım 4.3 : Bir $x = (x_k) \in w$ dizisi verilsin. Eğer $\sup_n |\Lambda_n^m(x)| < \infty$ ise (x_k) dizisine λ^m –sınırlı dizi denir.

Tanım 4.4: Eğer $0 < p < \infty$ iken

$$\sum_n |\Lambda_n^m(x)|^p < \infty$$

ise

$$\sum_k x_k$$

serisine λ^m tipinde p-mutlak yakınsak bir seridir denir [31].

Teorem 4. 5: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ve

$$\sup_n \frac{\Delta^{m-2}\lambda_n}{\Delta^{m-1}\lambda_n} < \infty \quad (4.3)$$

ise, bu taktirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)(x_k - a) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n^m(x) - a| = 0$$

eşitliği mevcuttur.

İspat: İlk olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)(x_k - a) \right| = 0$$

olduğunu gösterelim. $m = 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) |x_k - a| \right) = 0$$

olur [23]. $m = 2$ alırsak, (3.3) den

$$\left| \frac{1}{\Delta \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^2 \lambda_k)(x_k - a) \right| \leq \frac{1}{\Delta \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta \lambda_k) |x_k - a| + \frac{1}{\Delta \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta \lambda_{k-1}) |x_k - a|$$

olur ve buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^2 \lambda_k)(x_k - a) \right| = 0$$

elde ederiz. $m = r - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{r-2}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^{r-1}\lambda_k)(x_k - a) \right| = 0$$

olsun. Bu taktirde $m=r$ için aşağıda verilen eşitsizliği yazabiliriz;

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\Delta^{r-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^r \lambda_k)(x_k - a) \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{\Delta^{r-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^{r-1}\lambda_k)(x_k - a) \right| + \left| \frac{1}{\Delta^{r-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^{r-1}\lambda_{k-1})(x_k - a) \right| \end{aligned}$$

ve buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)(x_k - a) \right| = 0$$

elde ederiz. Şimdi de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)(x_k - a) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\Lambda_n^m(x) - a|$$

olduğunu gösterelim. Toplam açılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)(x_k - a) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} [\Delta^m \lambda_0 (x_0 - a) + \Delta^m \lambda_1 (x_1 - a) + \dots + \Delta^m \lambda_n (x_n - a)] \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} [(\Delta^{m-1} \lambda_0 - \Delta^{m-1} \lambda_{-1})(x_0 - a) \right. \\ &\quad \left. + (\Delta^{m-1} \lambda_1 - \Delta^{m-1} \lambda_0)(x_1 - a) + \dots + (\Delta^{m-1} \lambda_n - \Delta^{m-1} \lambda_{n-1})(x_n - a)] \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} [(\Delta^{m-1} \lambda_0)x_0 - (\Delta^{m-1} \lambda_0)a + (\Delta^{m-1} \lambda_1)x_1 - (\Delta^{m-1} \lambda_0)x_1 - (\Delta^{m-1} \lambda_1)a \right. \\ &\quad \left. - (\Delta^{m-1} \lambda_0)a + \dots - (\Delta^{m-1} \lambda_{n-1})x_n + (\Delta^{m-1} \lambda_{n-1})a] \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\Lambda_n^m(x) - a| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu teoremden aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 4.6 : Eğer (4.3) ile verilen eşitsizlik sağlanıyorsa, $m \geq 2$ için klasik anlamda bir a sayısına yakınsak her dizi a sayısına λ^m -yakınsaktır.

Teorem 4.7 : Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 2$ için (4.3) sağlanıyorsa, λ^{m-1} -yakınsak bir (x_k) dizisi aynı zamanda λ^m -yakınsaktır.

İspat : $x = (x_n)$ dizisi λ^{m-1} -yakınsak bir dizi olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)(x_k - a) \right| \\
& \leq \left| \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^{m-1} \lambda_k)(x_k - a) \right| + \left| \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^{m-1} \lambda_{k-1})(x_k - a) \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten ve (4.3) den λ^{m-1} –yakınsak bir dizinin aynı zamanda λ^m –yakınsak olduğu görülür.

Sonuç 4.8: $r, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $0 < r < m$ ve (4.3) sağlanıyorsa λ^r –yakınsak bir dizi aynı zamanda λ^m –yakınsaktır. (4.2) ile verilen ifadeyi kullanarak her $x = (x_k) \in w$ ve $n \geq 1$ için aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned}
x_n - \Lambda_n^m(x) &= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{i=0}^n (\Delta^m \lambda_i)(x_n - x_i) \\
&= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta^m \lambda_i)(x_n - x_i) \\
&= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta^m \lambda_i) \sum_{k=i+1}^n (x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \sum_{i=0}^{k-1} (\Delta^m \lambda_i) \\
&= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=1}^n (\Delta^{m-1} \lambda_{k-1}) (x_k - x_{k-1})
\end{aligned}$$

Buradan bir $x = (x_k) \in w$ dizisi için $S(x) = (S_n(x))$ dizisini $n \geq 1$ olmak üzere

$$S_n(x) = \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=1}^n (\Delta^{m-1} \lambda_{k-1}) (x_k - x_{k-1}) \quad (4.4)$$

ve

$$S_0(x) = 0 \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Dolayısıyla

$$x_n - \Lambda_n^m(x) = S_n(x) \quad (4.6)$$

olur. Buradan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.9: λ^m – yakınsak bir dizinin λ^m – limit değerine klasik anlamda yakınsak olması için gerek ve yeter şart $S(x) \in c_0$ olmasıdır.

Sonuç 4.10: Klasik anlamda her sınırlı dizi λ^m – sınırlıdır.

İspat : $x = (x_k) \in l_\infty$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|\Lambda_n^m(x)| \leq \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k) |x_k| = M$$

olduğundan x sınırlı dizisi aynı zamanda λ^m – sınırlıdır.

Sonuç 4.11 : λ^m –sınırlı bir dizinin klasik anlamda sınırlı olması için gerek ve yeter şart $S(x) \in l_\infty$ olmasıdır.

4.1 . λ^m –Dizi Uzayları

$l_\infty(\lambda^m), c_0(\lambda^m), c(\lambda^m)$ ve $l_p(\lambda^m)$ ($0 < p < \infty$) dizi uzaylarını

$$l_\infty(\lambda^m) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_n |\Lambda_n^m(x)| < \infty \right\},$$

$$c(\lambda^m) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n^m(x) \text{ mevcut} \right\},$$

$$c_0(\lambda^m) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n^m(x) = 0 \right\},$$

$$l_p(\lambda^m) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{n=0}^{\infty} |\Lambda_n^m(x)|^p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu uzayları $\Lambda^m = (\lambda_{nk}^m)$ sonsuz matrisinin etki alanı olarak (2.2) den

$$l_\infty(\lambda^m) = (l_\infty)_{\Lambda^m}, c(\lambda^m) = (c)_{\Lambda^m} \text{ ve } c_0(\lambda^m) = (c_0)_{\Lambda^m} \quad (4.7)$$

şeklinde ifade edebiliriz [31].

Teorem 4.1.1 :

i. $l_p(\lambda^m)$ dizi uzayı, $0 < p < 1$ iken

$$\|x\|_{l_p(\lambda^m)} = \sum_n |\Lambda_n^m(x)|^p$$

p – normlu uzayıdır.

ii. $l_p(\lambda^m)$ dizi uzayı, $1 \leq p < \infty$ iken

$$\|x\|_{l_p(\lambda^m)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\Lambda_n^m(x)|^p \right)^{1/p}$$

normu ile birer BK – uzayıdır [31].

İspat: i)

$$\|x\|_{l_p(\lambda^m)} = \sum_{n=0}^{\infty} |\Lambda_n^m(x)|^p$$

normu Tanım 2.10 ile verilen p -norm özelliklerini sağlar. Ayrıca Tanım 2.19 dan bu uzay bir tam uzayıdır.

ii) Aynı şekilde $l_p(\lambda^m)$ dizi uzayının da (ii) de verilen norm ile bir BK –uzayı olduğu görülür.

Tanım 4.1.2: X bir dizi uzayı, $x = (x_k) \in w$ ve $|x| = (|x_k|)$ olsun. X dizi uzayında tanımlı $\|\cdot\|$ normuna göre bu uzaydan alınan bir $x = (x_k)$ dizisi için $\|x\| \neq \| |x| \|$ oluyorsa, X dizi uzayı mutlak olmayan tipten bir dizi uzayı olarak tanımlanır.

Örneğin $c_0(\lambda^m)$ uzayının mutlak olmayan tipten bir dizi uzayı olduğunu gösterelim. $m = 2$ olsun ve $\lambda = (\lambda_k)$ dizisini $\lambda_k = 2^k$ şeklinde tanımlayalım. O zaman $\Delta\lambda_k = 2^{k-1}$ ve $\Delta^2\lambda_k = 2^{k-2}$ olur. Bu durumda $c_0(\lambda^2)$ uzayı

$$c_0(\lambda^2) = \left\{ x \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^n (2^{k-2})x_k = 0 \right\}$$

şeklinde elde edilir.

$x = (x_k) = (4, -2, 0, 0, \dots)$ olmak üzere $x = (x_k) \in c_0(\lambda^2)$ dizisini göz önüne alalım.

Bu takdirde

$$\begin{aligned} \|\Lambda_n^m(x)\|_\infty &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^n (2^{k-2})x_k \right| \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $|x| = (|x_k|) = (4, 2, 0, 0, \dots)$ için

$$\begin{aligned} \|\Lambda_n^m(|x|)\|_\infty &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^n (2^{k-2})x_k \right| \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{2}{2^{n-1}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak $\|x\|_{c_0(\lambda^m)} \neq \| |x| \|_{c_0(\lambda^m)}$ elde edilir. Dolayısıyla $c_0(\lambda^m)$ uzayının mutlak olmayan tipten bir dizi uzayı olduğu görülür. Benzer şekilde $c(\lambda^m)$ ve $l_\infty(\lambda^m)$ uzaylarının da mutlak olmayan tipten dizi uzayları olduğu gösterilebilir.

Teorem 4.1.3: $l_\infty(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$, $c(\lambda^m)$ ve $l_p(\lambda^m)$ ($0 < p < \infty$) dizi uzayları sırasıyla l_∞, c_0, c ve l_p dizi uzaylarına lineer olarak izomorfiktir. Yani $l_\infty(\lambda^m) \cong l_\infty$, $c_0(\lambda^m) \cong c_0$, $c(\lambda^m) \cong c$ ve $l_p(\lambda^m) \cong l_p$ ($0 < p < \infty$) dir [31].

İspat : $0 < p < \infty$ için $l_p(\lambda^m) \cong l_p$ olduğunu gösterelim. Öncelikle $l_p(\lambda^m)$ uzayı ile l_p uzayı arasında birebir ve örten lineer bir dönüşümün varlığını gösterelim. $l_p(\lambda^m)$ uzayından l_p uzayına bir T dönüşümünü

$$Tx = \Lambda^m(x)$$

şeklinde tanımlayalım. $x = (x_k), z = (z_k) \in l_p(\lambda^m)$ olsun. Bu takdirde

$$T(x + z) = \Lambda^m(x + z)$$

$$= \left(\frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)(x_k + z_k) \right) \quad (4.8)$$

$$= \Lambda^m(x) + \Lambda^m(z)$$

elde edilir. Herhangi bir $a \in \mathbb{C}$ için

$$T(ax) = \Lambda^m(ax)$$

$$= \left(\frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)(ax_k) \right) \quad (4.9)$$

$$= a\Lambda^m(x)$$

dir. (4.8) ve (4.9) eşitliklerinden T dönüşümünün bir lineer dönüşüm olduğu görülür.

Şimdi $Tx = 0$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)x_k = 0$$

dır. Buradan $x = 0$ bulunur. Dolayısıyla $Tx = 0$ iken $x = 0$ olduğunda T bire-bir olur. Örtlenliği göstermek için bir $y = (y_k) \in l_p$ alalım ve $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} \frac{\Delta^{m-1}\lambda_j}{\Delta^m \lambda_k} y_j \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \Lambda_n^m(x) &= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)x_k \\ &= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n \sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} (\Delta^{m-1}\lambda_j)y_j \\ &= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n [(\Delta^{m-1}\lambda_k)y_k - (\Delta^{m-1}\lambda_{k-1})y_{k-1}] \\ &= y_n \end{aligned}$$

dir. $y \in l_p$ olduğundan $\Lambda^m(x) = y$ eşitliğinden $\Lambda^m(x) \in l_p$ bulunur. Dolayısıyla $x \in l_p(\lambda^m)$ ve $T(x) = y$ olduğundan T dönüşümü örtlen olur. Ayrıca $x \in l_p(\lambda^m)$ için Teorem 4.1 (i) ve (ii) gereğince

$$\|T(x)\|_{l_p} = \|\Lambda^m(x)\|_{l_p} = \|x\|_{l_p(\lambda^m)}$$

olup, T dönüşümü $0 < p < 1$ için p -normu ve $1 \leq p < \infty$ için normu koruyan bir dönüşümdür.

Sonuç olarak T lineer, birebir ve örten bir dönüşümdür. Ayrıca $0 < p < \infty$ için $l_p(\lambda^m) \cong l_p$ dir. $l_\infty(\lambda^m) \cong l_\infty$, $c(\lambda^m) \cong c$ ve $c_0(\lambda^m) \cong c_0$ için ispat benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 2.41 den c, c_0 ve l_p uzaylarının Schuader bazının T dönüşümü altındaki ters görüntüsü bize sırasıyla $l_p(\lambda^m)$ ($1 \leq p < \infty$), $c_0(\lambda^m)$ ve $c(\lambda^m)$ uzaylarının Schuader bazını verir. Teorem 4.1.3 de tanımlanan $T = \Lambda^m(x)$ operatöründen $\Lambda^m(e) = e$ ve $\Lambda^m(e^{(k)}(\lambda^m)) = e^{(k)}$ ve aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.1.4 : Her $k, n \in \mathbb{N}$ için $e^{(k)}(\lambda^m) \in l_p(\lambda^m)$ ve

$$\{e^{(k)}(\lambda^m)\}_n = \begin{cases} (-1)^{n-k} \frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_n} & , \quad k \leq n \leq k+1 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.11)$$

olsun.

i. $\{e^{(0)}(\lambda^m), e^{(1)}(\lambda^m), \dots\}$ dizisi $c_0(\lambda^m)$ ve $l_p(\lambda^m)$ ($1 \leq p < \infty$) uzaylarının bir Schauder bazıdır ve her $x \in c_0(\lambda^m)$, $x \in l_p(\lambda^m)$ dizisi

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k^m(x) e^{(k)}(\lambda^m)$$

olacak şekilde bir tek gösterime sahiptir [31].

ii. $\{e, e^{(0)}(\lambda^m), e^{(1)}(\lambda^m), \dots\}$ dizisi $c(\lambda^m)$ uzayının bir Schauder bazıdır ve her $x \in c(\lambda^m)$ dizisi $l = \lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k^m(x)$ olmak üzere

$$x = le + \sum_{k=0}^{\infty} (\Lambda_k^m(x) - l) e^{(k)}(\lambda^m)$$

olacak şekilde bir tek gösterime sahiptir.

Sonuç 4.1.5: Mutlak olmayan tipten $c_0(\lambda^m)$, $c(\lambda^m)$ ve $l_p(\lambda^m)$ ($1 \leq p < \infty$) uzayları ayrılabilir.

Teorem 4.1.6: $l_p(\lambda^m)$ uzayı $p \neq 2$ için bir iç çarpım uzayı değildir. Dolayısıyla bir Hilbert uzayı da değildir [31].

İspat: Öncelikle $l_2(\lambda^m)$ uzayının Hilbert uzayı olduğunu gösterelim. Teorem 4.1.1 de $l_2(\lambda^m)$ uzayının $\|x\|_{l_2(\lambda^m)} = \|(\Lambda^m(x))\|_{l_2}$ normu ile birer BK-uzayı olduğunu gösterdik. $l_2(\lambda^m)$ uzayının normu bir iç çarpımdan elde edilebilir. Yani her $x \in l_2(\lambda^m)$ için

$$\|x\|_{l_2(\lambda^m)} = \langle x, x \rangle^{1/2} = \langle \Lambda^m(x), \Lambda^m(x) \rangle_2^{1/2}$$

eşitliği mevcuttur. Burada $\langle ., . \rangle_2, l_2$ uzayı üzerindeki iç çarpımı göstermedik. Dolayısıyla $l_2(\lambda^m)$ uzayı bir Hilbert uzayı olur.

Şimdi $u = (u_k)$ ve $v = (v_k)$ dizilerini sırasıyla

$$u = \left(1, 1, -\frac{\Delta^{m-1}\lambda_1}{\Delta^m\lambda_2}, 0, 0, \dots \right),$$

$$v = \left(1, -\frac{\Delta^{m-1}(\lambda_1 + \lambda_0)}{\Delta^m\lambda_1}, \frac{\Delta^{m-1}\lambda_1}{\Delta^m\lambda_2}, 0, 0, \dots \right)$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan $\Lambda^m(u) = (1, 1, 0, 0, \dots)$ ve $\Lambda^m(v) = (1, -1, 0, 0, \dots)$ elde edilir. Ayrıca $p \neq 2$ iken $l_p(\lambda^m)$ uzayı üzerindeki norm paralelkenar kanunu sağlamadığından bu norm iç çarpımdan elde edilemez. Dolayısıyla $l_p(\lambda^m)$ uzayı $p \neq 2$ için Hilbert uzayı olmayan bir Banach uzayı olur.

5. BAZI İÇERME BAĞINTILARI

Bu bölümde bazı dizi uzaylarının içirme bağıntıları ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 5.1: $0 < p < \infty$ olmak üzere $l_p(\lambda^m) \subset c_0(\lambda^m) \subset c(\lambda^m) \subset l_\infty(\lambda^m)$ içermeleri kesindir.

İspat : $c_0(\lambda^m) \subset c(\lambda^m) \subset l_\infty(\lambda^m)$ içermelerinin mevcut olduğu açıktır. Ayrıca $c_0 \subset c$ içermesinin kesin olduğunu biliyoruz. Sonuç 4.6 göz önüne alındığında $c_0(\lambda^m) \subset c(\lambda^m)$ içermesinin kesin olduğu elde edilir.

$0 < p < \infty$ iken $l_p(\lambda^m) \subset c_0(\lambda^m)$ içermesi mevcuttur. Çünkü $x \in l_p(\lambda^m)$ aldığımızda $\Lambda^m(x) \in l_p$ ve $\Lambda^m(x) \in c_0$ bulunur. Dolayısıyla $x \in c_0(\lambda^m)$ elde edilir. Bu içermenin kesin olduğunu gösterelim. (4.3) ile verilen ifade sağlansın. Bir $x = (x_k)$ dizisini her $k \in \mathbb{N}$ ve $0 < p < \infty$ için

$$x_k = \frac{1}{(k+1)^{1/p}}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $x \in c_0 \subset c_0(\lambda^m)$ olduğu açık olarak görülür. Diğer taraftan $n \in \mathbb{N}$ için

$$|\Lambda_n^m(x)| = \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^m \lambda_k}{(k+1)^{1/p}}$$

$$\geq \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n(n+1)^{1/p}} \sum_{k=0}^n \Delta^m \lambda_k$$

$$= \frac{1}{(n+1)^{1/p}}$$

elde edilir. Buradan $\Lambda_n^m(x) \notin l_p$ ve $x \notin l_p(\lambda^m)$ bulunur. Sonuç olarak $l_p(\lambda^m) \subset c_0(\lambda^m)$ içermesi kesindir.

Şimdi $c_0(\lambda^m) \subset l_\infty(\lambda^m)$ içermesinin kesin olduğunu gösterelim. Bunun için bir $y = (y_k)$ dizisini $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$y_k = (-1)^k \frac{\Delta^{m-1}(\lambda_k + \lambda_{k-1})}{\Delta^m \lambda_k}$$

şeklinde tanımlayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\Lambda_n^m(y) = \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (-1)^k [\Delta^{m-1}(\lambda_k + \lambda_{k-1})] = (-1)^n$$

ulunur. Bu eşitlikten $\Lambda_n^m(x) \in l_\infty$ ve $\Lambda_n^m(x) \notin c$ elde edilir. Dolayısıyla $x \in l_\infty(\lambda^m)$ ve $x \notin c(\lambda^m)$ bulunur. Yani $c(\lambda^m) \subset l_\infty(\lambda^m)$ içermesi kesindir.

Teorem 5.2: $0 < p < q < \infty$ için $l_p(\lambda^m) \subset l_q(\lambda^m)$ içermesi kesindir [31].

İspat: $0 < p < q < \infty$ olsun. $l_p \subset l_q$ olduğundan $l_p(\lambda^m) \subset l_q(\lambda^m)$ elde edilir. Bu içermenin kesin olduğunu göstermek için bir $x \in l_q/l_p$ dizisi alalım. Bu x dizisine bağlı olarak y dizisini her $k \in \mathbb{N}$ için

$$y_k = \frac{(\Delta^{m-1}\lambda_k)x_k - (\Delta^{m-1}\lambda_{k-1})x_{k-1}}{\Delta^m\lambda_k}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \Lambda_n^m(y) &= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n [(\Delta^{m-1}\lambda_k)x_k - (\Delta^{m-1}\lambda_{k-1})x_{k-1}] \\ &= x_n \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\Lambda^m(y) \in l_q/l_p$ bulunur. Dolayısıyla $y \in l_q(\lambda^m)/l_p(\lambda^m)$ olur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.3:

- i) Eğer (4.3) sağlanıyorsa $c_0 \subset c_0(\lambda^m)$ ve $c \subset c(\lambda^m)$ içermeleri mevcuttur.
- ii) Her $x \in c_0(\lambda^m)$ için $S(x) \in c_0$ ise $c_0(\lambda^m) \subset c_0$ içermesi mevcuttur.
- iii) Her $x \in c(\lambda^m)$ için $S(x) \in c$ ise $c(\lambda^m) \subset c$ içermesi mevcuttur.

İspat:

- i) $c_0 \subset c_0(\lambda^m)$ ve $c \subset c(\lambda^m)$ içermeleri Sonuç 4.6 dan görülür.
- ii) $x \in c_0(\lambda^m)$ alalım. Kabulümüzden $S(x) \in c_0$ olur. Sonuç 4.9 dan $c_0(\lambda^m) \subset c_0$ olur.
- iii) $x \in c(\lambda^m)$ olsun. $S(x) \in c$ alalım. (4.6) dan $c(\lambda^m) \subset c$ içermesi sağlanır.

Teorem 5.4 : (4.3) şartı sağlandığında $c(\lambda^m) \cap l_\infty \neq \emptyset$ olur ve $c(\lambda^m)$ uzayı l_∞ uzayını içermez.

İspat : Teorem 5.3 ile verilen ifadeden $c \subset c(\lambda^m) \cap l_\infty$ kapsaması elde edilir. Ayrıca Steinhaus Teoreminden, sınırlı olup Λ^m –toplanabilir olmayan, yani $\Lambda^m(x) \notin c$ olacak şekilde bir $x \in l_\infty$ dizisi mevcuttur. Dolayısıyla $l_\infty \subset c(\lambda^m)$ içermesi sağlanmaz.

Teorem 5.5: $l_\infty \subset l_\infty(\lambda^m)$ içermesi sağlanır. Ayrıca $l_\infty = l_\infty(\lambda^m)$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $x \in l_\infty(\lambda^m)$ için $S(x) \in l_\infty$ olmasıdır.

İspat: Sonuç 4.10 ve Sonuç 4.11 den ispat yapılabilir.

Teorem 4.7 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.6: $r, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $0 < r < m$ iken (4.3) sağlanıyorsa $c(\lambda^r) \subset c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^r) \subset c_0(\lambda^m)$ ve $l_\infty(\lambda^r) \subset l_\infty(\lambda^m)$ içermeleri mevcuttur.

Teorem 5.7: $l_p(\lambda^m) \subset l_p$ içermesinin sağlanması için gerek ve yeter şart $x \in l_p(\lambda^m)$ için $S(x) \in l_p$ ($0 < p < \infty$) olmasıdır.

İspat: $l_p(\lambda^m) \subset l_p$ alalım. $x \in l_p(\lambda^m)$ ise $x \in l_p$ elde edilir. (4.6) deki ifadeden

$$\begin{aligned} \|S(x)\|_{l_p} &\leq \|x\|_{l_p} + \|\Lambda^m(x)\|_{l_p} \\ &= \|x\|_{l_p} + \|x\|_{l_p(\lambda^m)} \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde edilir ve $S(x) \in l_p$ ifadesi bulunur.

Şimdi $x \in l_p(\lambda^m)$ alalım. Dolayısıyla $S(x) \in l_p$ olur. (4.5) den

$$\begin{aligned} \|x\|_{l_p} &\leq \|S(x)\|_{l_p} + \|\Lambda^m(x)\|_{l_p} \\ &= \|S(x)\|_{l_p} + \|x\|_{l_p(\lambda^m)} \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $x \in l_p$ olur ve $l_p(\lambda^m) \subset l_p$ içermesi sağlanır.

Teorem 5.8: (4.3) sağlanıyorsa $c_0 \subset c_0(\lambda^m) \cap c$ içermesi mevcut olur.

İspat: Teorem 5.3 ile verilen ifadeden $c_0 \subset c_0(\lambda^m) \cap c$ olduğu görülür. Şimdi $x \in w$ ve $n \geq 1$ için (4.4) ve (4.5) ile ifade edilen eşitlikleri verelim.

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=1}^n (\Delta^{m-1}\lambda_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \left[\sum_{k=1}^n (\Delta^{m-1}\lambda_{k-1})x_k - \sum_{k=1}^n (\Delta^{m-1}\lambda_{k-1})x_{k-1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \left[\sum_{k=0}^n (\Delta^{m-1}\lambda_{k-1})x_k - \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta^{m-1}\lambda_k)x_k \right] \\
&= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \left[\Delta^{m-1}\lambda_{n-1}x_n - \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta^m\lambda_k)x_k \right] \\
&= \frac{\Delta^{m-1}\lambda_{n-1}}{\Delta^{m-1}\lambda_n} [S(x) + \Lambda_n^m(x) - \Lambda_{n-1}^m(x)]
\end{aligned}$$

yani

$$S_n(x) = \frac{\Delta^{m-1}\lambda_{n-1}}{\Delta^m\lambda_n} [\Lambda_n^m(x) - \Lambda_{n-1}^m(x)] \quad (5.1)$$

dir. λ dizisi tanımından

$$\lambda_k \geq m\lambda_{k-1} \Rightarrow \Delta^m\lambda_k \geq 0 \Rightarrow \Delta^{m-1}\lambda_k \geq \Delta^{m-1}\lambda_{k-1} \Rightarrow \frac{\Delta^m\lambda_k}{\Delta^{m-1}\lambda_{k-1}} \geq 0$$

elde edilir. Burada iki durum mevcuttur. Birincisi $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^m\lambda_k / \Delta^{m-1}\lambda_{k-1} > 0$ ve ikincisi $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^m\lambda_k / \Delta^{m-1}\lambda_{k-1} = 0$ dır. Birinci ifadenin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{\Delta^{m-1}\lambda_{k-1}}{\Delta^m\lambda_k} \right)_{k=1}^{\infty}$$

ifadesinin sınırlı, ikinci ifadenin sağlanması için gerek ve yeter şart $\left(\frac{\Delta^{m-1}\lambda_{k-1}}{\Delta^m\lambda_k} \right)_{k=1}^{\infty}$ ifadesini sınırsız olmalıdır.

Sonuç 5.9:

$$\text{i) } \left(\frac{\Delta^{m-1}\lambda_{k-1}}{\Delta^m\lambda_k} \right)_{k=1}^{\infty} \in l_{\infty} \text{ için gerek ve yeter şart } \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \Delta^m\lambda_{k+1} / \Delta^{m-1}\lambda_k > 0$$

olmasıdır.

$$\text{ii) } \left(\frac{\Delta^{m-1}\lambda_{k-1}}{\Delta^m\lambda_k} \right)_{k=1}^{\infty} \notin l_{\infty} \text{ için gerek ve yeter şart } \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \Delta^m\lambda_{k+1} / \Delta^{m-1}\lambda_k = 0$$

olmasıdır.

Teorem 5.10: $l_{\infty} \subset l_{\infty}(\lambda^m)$ içermesinin kesin olması için gerek ve yeter şart $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf \Delta^m\lambda_{k+1} / \Delta^{m-1}\lambda_k = 0$ olmasıdır.

İspat : $l_{\infty} \subset l_{\infty}(\lambda^m)$ içermesinin kesin olduğunu kabul edelim. Teorem 5.5 ten $x \in l_{\infty}(\lambda^m)$ ve $S(x) = (S_n(x))_{n=0}^{\infty} \notin l_{\infty}$ elde edilir. $x \in l_{\infty}(\lambda^m)$ dan dolayı $(\Lambda_n^m(x) - \Lambda_{n-1}^m(x)) \in l_{\infty}$ elde edilir. (5.1) den $\left(\frac{\Delta^{m-1}\lambda_{n-1}}{\Delta^m\lambda_n} \right) \notin l_{\infty}$ elde edilir. Sonuç 5.9 (ii) den $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf \Delta^m\lambda_{k+1} / \Delta^{m-1}\lambda_k = 0$ bulunur.

Tersine $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf \Delta^m \lambda_{k+1} / \Delta^{m-1} \lambda_k = 0$ olduğunu kabul edelim ve $l_\infty \subset l_\infty(\lambda^m)$ içermesinin kesin olduğunu gösterelim. Sonuç 5.9 (ii) den $\left(\frac{\Delta^{m-1} \lambda_{k-1}}{\Delta^m \lambda_k}\right)_{k=1}^\infty \notin l_\infty$ elde edilir ve bu ifade $\left[(\Delta^{m-1} \lambda_{k-1} + \frac{\Delta^m \lambda_k}{\Delta^m \lambda_k})\right] \notin l_\infty$ şeklinde yazılabilir.

$x = (x_k)$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$x_k = (-1)^k \left(\frac{\Delta^{m-1} \lambda_{k-1} + \Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_k} \right)$$

şeklinde ifade edilirse $n \in \mathbb{N}$ için

$$|\Lambda_n^m(x)| = \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \Delta^{m-1} \lambda_{k-1} + \Delta^{m-1} \lambda_k \right| = 1$$

elde edilir ve Teorem 5.5 ten $l_\infty \subset l_\infty(\lambda^m)$ içermesinin kesin olduğu görülür.

Teorem 5.11: $l_\infty(\lambda^m) = l_\infty$ ifadesinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf \frac{\Delta^m \lambda_{k+1}}{\Delta^{m-1} \lambda_k} > 0$ olmasıdır.

İspat : $l_\infty(\lambda^m) = l_\infty$ olduğunu kabul edelim. $l_\infty \subset l_\infty(\lambda^m)$ içermesi kesin değildir. Teorem 5.10 dan $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf \Delta^m \lambda_{k+1} / \Delta^{m-1} \lambda_k \neq 0$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf \Delta^m \lambda_{k+1} / \Delta^{m-1} \lambda_k > 0$ olduğu elde edilir. Şimdi $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf \Delta^m \lambda_{k+1} / \Delta^{m-1} \lambda_k > 0$ olduğunu kabul edelim. Sonuç 5.9 (i) den $\left(\frac{\Delta^{m-1} \lambda_{k-1}}{\Delta^m \lambda_k}\right)_{k=1}^\infty \in l_\infty$ elde edilir. $x \in l_\infty(\lambda^m)$ alalım. Buradan $\Lambda^m(x) = (\Lambda_n^m(x)) \in l_\infty$ ve $(\Lambda_n^m(x) - \Lambda_{n-1}^m(x)) \in l_\infty$ elde edilir. Dolayısıyla (5.1) den $(S_n(x)) \in l_\infty$ dir ve her $x \in l_\infty(\lambda^m)$ için $S(x) \in l_\infty$ olduğu gösterilir. Dolayısıyla Teorem 5.5 den $l_\infty(\lambda^m) = l_\infty$ bulunur.

6. $l_p(\lambda^m), l_\infty(\lambda^m), c_0(\lambda^m), c(\lambda^m)$ UZAYLARININ $\alpha-, \beta-$ γ –DUALLERİ

Bu bölümde $1 < p < \infty$ için $l_p(\lambda^m), l_\infty(\lambda^m), c_0(\lambda^m)$ ve $c(\lambda^m)$ uzaylarının $\alpha-, \beta-$ ve γ –duallerini göstereceğiz.

Teorem 6.1: A, C ve $B(q)$ cümleleri

$$A = \left\{ a = (a_n) \in w : \sum_n \frac{\Delta^{m-1}\lambda_n}{\Delta^m\lambda_n} |a_n| < \infty \right\},$$

$$C = \left\{ a = (a_n) \in w : \sup_n \left| \frac{\Delta^{m-1}\lambda_n}{\Delta^m\lambda_n} a_n \right| < \infty \right\},$$

$$B(q) = \left\{ a = (a_n) \in w : \left| \sum_n \frac{\Delta^{m-1}\lambda_n}{\Delta^m\lambda_n} a_n \right|^q < \infty \right\},$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde $1 < p < \infty$ için $l_p(\lambda^m), l_\infty(\lambda^m), c_0(\lambda^m)$ ve $c(\lambda^m)$ uzaylarının α – dualleri

- i) $\{c_0(\lambda^m)\}^\alpha = \{c(\lambda^m)\}^\alpha = \{l_\infty(\lambda^m)\}^\alpha = A$
- ii) $\{l_p(\lambda^m)\}^\alpha = B(q)$
- iii) $\{l_1(\lambda^m)\}^\alpha = C$

şeklinde tanımlanır [31].

İspat: i) $a = (a_n) \in w$ olsun. Her $n, k \in \mathbb{N}$ için $B = (b_{nk})$ matrisini

$$b_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k} \frac{\Delta^{m-1}\lambda_k}{\Delta^m\lambda_n} a_n, & n-1 \leq k \leq n \\ 0, & k < n-1 \text{ ya da } k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için (4.10) dan

$$a_n x_n = \sum_{k=n-1}^n (-1)^{n-k} \frac{\Delta^{m-1}\lambda_k}{\Delta^m\lambda_n} a_n y_k = (By)_n \quad (6.1)$$

elde edilir. Bu eşitlikten “ $x \in c_0(\lambda^m)$ iken $ax = (a_n x_n) \in l_1$ olması için gerek ve yeter şart $y \in c_0$ iken $By \in l_1$ olmasıdır” sonucu elde edilir. Buradan $a \in \{c_0(\lambda^m)\}^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart

$B \in (c_0, l_1)$ olmasıdır. Lemma 3.4 (i) den $a \in \{c_0(\lambda^m)\}^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{K \in F} \left| \sum_n \sum_{k \in K} b_{nk} \right| < \infty \quad (6.2)$$

ifadesinin sağlanmasıdır. Ayrıca $K \in F$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \sum_{k \in K} b_{nk} \right| = \begin{cases} 0 & , \quad n-1 \text{ ve } n \notin K \\ \frac{\Delta^{m-1}\lambda_{n-1}}{\Delta^m\lambda_n} |a_n| & , \quad n-1 \in K \text{ ve } n \notin K \\ \frac{\Delta^{m-1}\lambda_n}{\Delta^m\lambda_n} |a_n| & , \quad n-1 \notin K \text{ ve } n \in K \\ |a_n| & , \quad n-1 \text{ ve } n \in K \end{cases}$$

elde edilir. (6.2) nin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^{m-1}\lambda_n}{\Delta^m\lambda_n} |a_n| < \infty$$

olması demektir. Buradan $\{c_0(\lambda^m)\}^\alpha = A$ elde edilir.

Lemma 3.4(i) den faydalananarak benzer şekilde $\{c(\lambda^m)\}^\alpha = \{l_\infty(\lambda^m)\}^\alpha = A$ olduğu gösterilebilir.

ii) Lemma 3.4 (ii) dikkate alınırsa $a \in \{l_p(\lambda^m)\}^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{F \in F} \sum_k \left| \sum_{n \in F} b_{nk} \right|^q < \infty \quad (6.3)$$

olmasıdır. Ayrıca $F \in F$ için

$$\sum_{n \in F} b_{nk} = \begin{cases} 0 & , \quad k \notin F \text{ ve } k+1 \notin F \\ \frac{\Delta^{m-1}\lambda_k}{\Delta^m\lambda_k} a_k & , \quad k \in F \text{ ve } k+1 \notin F \\ -\frac{\Delta^{m-1}\lambda_k}{\Delta^m\lambda_{k+1}} a_{k+1} & , \quad k \notin F \text{ ve } k+1 \in F \\ \left(\frac{a_k}{\Delta^m\lambda_k} - \frac{a_{k+1}}{\Delta^m\lambda_{k+1}} \right) (\Delta^{m-1}\lambda_k) & , \quad k \in F \text{ ve } k+1 \in F \end{cases}$$

dir. Buradan (6.3) ün sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\sum_k \left| \frac{\Delta^{m-1}\lambda_k}{\Delta^m\lambda_k} a_k \right|^q < \infty$$

olması demektir. Yani $1 < p < \infty$ için $\{l_p(\lambda^m)\}^\alpha = B(q)$ elde edilir.

iii) (ii) deki ispatın benzeri yapılarak ve (6.1) ile verilen ifadeden ve Lemma 3.4 (iii) de verilenlerden $a \in \{l_p(\lambda^m)\}^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_k \sum_n |b_{nk}| < \infty \quad (6.4)$$

olduğu görülür. B matrisinin tanımından her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_n |b_{nk}| = \sum_{n=k}^{k+1} \left| \frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_n} a_n \right|$$

yazılabilir. Sonuç olarak (6.4) nın sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\sup_k \left| \frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_k} a_k \right| < \infty$$

ifadesinin sağlanmasıdır. Buradan da $\{l_1(\lambda^m)\}^\alpha = C$ elde edilir.

Teorem 6.2: D, E, F, G ve $H(q)$ cümlelerini

$$D = \left\{ a = (a_k) \in w: \sum_{k=0}^{\infty} \left| \tilde{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) \Delta^{m-1} \lambda_k \right| < \infty \right\},$$

$$E = \left\{ a = (a_k) \in w: \sup_k \left| \frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_k} a_k \right| < \infty \right\},$$

$$F = \left\{ a = (a_k) \in w: \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_k} a_k \right) \text{ mevcut} \right\},$$

$$G = \left\{ a = (a_k) \in w: \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_k} a_k \right) = 0 \right\},$$

$$H(q) = \left\{ a = (a_k) \in w: \sum_k \left| \tilde{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) \Delta^{m-1} \lambda_k \right|^q < \infty \right\}$$

tanımlansın. $1 < p < \infty$ olmak üzere $c_0(\lambda^m)$, $c(\lambda^m)$, $l_p(\lambda^m)$ ve $l_\infty(\lambda^m)$ uzaylarının β -dulleri

$$\textbf{i)} \quad \{c(\lambda^m)\}^\beta = D \cap F, \{c_0(\lambda^m)\}^\beta = D \cap E$$

$$\textbf{ii)} \quad \{l_1(\lambda^m)\}^\beta = C, \{l_p(\lambda^m)\}^\beta = C \cap H(q), \{l_\infty(\lambda^m)\}^\beta = D \cap G$$

şeklindedir [31].

İspat : i) $a = (a_k) \in w$ kabul edelim. Bu durumda (4.10) dan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k x_k &= \sum_{k=0}^n a_k \left(\sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} \frac{\Delta^{m-1} \lambda_j}{\Delta^m \lambda_k} y_j \right) \\ &= \sum_{k=0}^n (\Delta^{m-1} \lambda_k) \tilde{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) y_k + \frac{\Delta^{m-1} \lambda_n}{\Delta^m \lambda_n} a_n y_n \\ &= (Ty)_n \end{aligned} \quad (6.5)$$

yazılabilir. Buradan $\tilde{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) = \frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} - \frac{a_{k+1}}{\Delta^m \lambda_{k+1}}$ ve $T = (t_{nk})$ matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$t_{nk} = \begin{cases} \tilde{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_k), & k < n \\ \frac{\Delta^{m-1} \lambda_n}{\Delta^m \lambda_n} a_n, & k = n \\ 0, & k > n \end{cases}, \quad (6.6)$$

şeklinde tanımlanabilir. (6.5) dan " $x = (x_k) \in c(\lambda^m)$ iken $ax = (a_k x_k) \in cs$ olması için gerek ve yeter şart $y = (y_k) \in c$ iken $Ty \in c$ olmasıdır sonucu elde edilir ki bu ise $a \in \{c_0(\lambda^m)\}^\beta$ olması için gerek ve yeter şart $T \in (c, c)$ olmasıdır." Teorem 3.9 den $\{c(\lambda^m)\}^\beta = D \cap F$ bulunur. Benzer şekilde $\{c_0(\lambda^m)\}^\beta = D \cap E$ olduğu Lemma 3.10 dan gösterilebilir.

ii) (6.6) dan T matrisinin sütunları c dizi uzayının elamanıdır, yani her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_n t_{nk} = \tilde{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_k) \quad (6.7)$$

dir. (6.5) den ve Lemma 3.5 den " $x = (x_k) \in l_p(\lambda^m)$ iken $ax = (a_k x_k) \in cs$ olması için gerek ve yeter şart $y = (y_k) \in l_p$ iken $Ty \in c$ olmasıdır" sonucu elde edilir. Yani $a = (a_k) \in \{l_p(\lambda^m)\}^\beta$

$1 < p < \infty$ olması için gerek ve yeter şart $T \in (l_p, c)$ olmasıdır. $1 < p < \infty$ için $T \in (l_p, c)$ iken (3.5) den

$$\sum_k \left| \tilde{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_k) \right|^q < \infty$$

ve

$$\sup_n \left| \frac{\Delta^{m-1} \lambda_n}{\Delta^m \lambda_n} a_n \right| < \infty \quad (6.8)$$

elde edilir. Buradan da $\{l_p(\lambda^m)\}^\beta = C \cap H(q)$ sonucu elde edilir.

$p=1$ iken (3.6) dan ve (6.8) ve

$$\sup_k \left| \tilde{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_k) \right| < \infty \quad (6.9)$$

elde edilir. (6.9), (6.8) in bir sonucudur. Buradan da $\{l_1(\lambda^m)\}^\beta = C$ elde edilir.

Son olarak $p = \infty$ için (3.7) den (6.8) ve

$$\sum_k \left| \tilde{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_k) \right| < \infty \quad (6.10)$$

elde edilir ve her $n \in \mathbb{N}$ için (6.7) den

$$\begin{aligned} \sum_k |t_{nk} - \lim_n t_{nk}| &= \sum_{k=n}^{\infty} \left| t_{nk} - \tilde{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_k) \right| \\ &= \left| \frac{\Delta^{m-1} \lambda_n}{\Delta^m \lambda_n} a_n - \tilde{\Delta} \left(\frac{a_n}{\Delta^m \lambda_n} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_n) \right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \tilde{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_k) \right| \end{aligned}$$

elde edilir. (6.10) den yararlanarak $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_n \sum_k |t_{nk} - \lim_n t_{nk}| = \lim_n \left| \frac{\Delta^{m-1} \lambda_n}{\Delta^m \lambda_n} a_n \right|$$

elde edilir ve (3.8) den

$$\lim_n \frac{\Delta^{m-1} \lambda_n}{\Delta^m \lambda_n} a_n = 0$$

yazılabilir. Yani buradan da $\{l_\infty(\lambda^m)\}^\beta = D \cap G$ sonucu elde edilir.

Teorem 6.3: $c_0(\lambda^m), c(\lambda^m), l_1(\lambda^m), l_p(\lambda^m)$ ve $l_\infty(\lambda^m)$ ($1 < p < \infty$) uzaylarının γ – dualleri

$$\text{i)} \quad \{c(\lambda^m)\}^\gamma = \{c_0(\lambda^m)\}^\gamma = \{l_\infty(\lambda^m)\}^\gamma = D \cap E$$

$$\text{ii)} \quad \{l_1(\lambda^m)\}^\gamma = C$$

$$\text{iii)} \quad \{l_p(\lambda^m)\}^\gamma = C \cap H(q)$$

şeklinde ifade edilir [31].

İspat: i) $a = (a_n) \in w$ olsun. (4.10) dan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k x_k &= \sum_{k=0}^n a_k \left(\sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} \frac{\Delta^{m-1} \lambda_j}{\Delta^m \lambda_k} y_j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta^{m-1} \lambda_k) \tilde{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) y_k + \frac{\Delta^{m-1} \lambda_n}{\Delta^m \lambda_n} a_n y_n \\ &= (Ty)_n \end{aligned}$$

olduğundan “ $x = (x_k) \in c_0(\lambda^m), c(\lambda^m), l_\infty(\lambda^m)$ iken $ax = (a_k x_k) \in bs$ olması için gerek ve yeter şart $y = (y_k) \in X$, $X = c_0, c, l_\infty$ iken $Ty \in cs$ olmasıdır” ifadesi elde edilir. Buradan $a \in \{c(\lambda^m)\}^\gamma, \{c_0(\lambda^m)\}^\gamma, \{l_\infty(\lambda^m)\}^\gamma$ olması için gerek ve yeter şart $T \in (c, l_\infty), (c_0, l_\infty)$ ve (l_∞, l_∞)

olmasıdır. Lemma 3.7 (i) den $\{c(\lambda^m)\}^\gamma = \{c_0(\lambda^m)\}^\gamma = \{l_\infty(\lambda^m)\}^\gamma = D \cap E$ elde edilir.

(ii) ve (iii) nin ispatları benzer şekilde yapılabilir.

7. BAZI MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde $c_0(\lambda^m), c(\lambda^m), l_1(\lambda^m), l_p(\lambda^m)$ ve $l_\infty(\lambda^m)$ ($1 \leq p < \infty$) uzaylarından bazı klasik dizi uzaylarına matris dönüşümlerini göstereceğiz. Her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$\tilde{a}_{nk} = (\Delta^{m-1}\lambda_k)\tilde{\Delta}\left(\frac{a_{nk}}{\Delta^m\lambda_k}\right) = (\Delta^{m-1}\lambda_k)\left(\frac{a_{nk}}{\Delta^m\lambda_k} - \frac{a_{n,k+1}}{\Delta^m\lambda_{k+1}}\right)$$

ifadesini kullanacağız.

Teorem 7.1:

i) $A \in (l_\infty(\lambda^m), l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\frac{\Delta^{m-1}\lambda_k}{\Delta^m\lambda_k}a_{nk}\right)_{k=0}^\infty \in c_0 \quad (7.1)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\tilde{a}_{nk}| < \infty \quad (7.2)$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

ii) $A \in (c(\lambda^m), l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (7.2),

$$\left(\frac{\Delta^{m-1}\lambda_k}{\Delta^m\lambda_k}a_{nk}\right)_{k=0}^\infty \in c \quad (7.3)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty \quad (7.4)$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

iii) $A \in (c_0(\lambda^m), l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart $n \in \mathbb{N}$ için (7.2) ve

$$\left(\frac{\Delta^{m-1}\lambda_k}{\Delta^m\lambda_k}a_{nk}\right)_{k=0}^\infty \in l_\infty \quad (7.5)$$

ifadelerinin sağlanmasıdır [32].

İspat: i) Öncelikle (7.1) ve (7.2) şartlarının sağlandığını kabul edelim. $x = (x_k) \in l_\infty(\lambda^m)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in \{l_\infty(\lambda^m)\}^\beta$ dir ve x dizisi bir A dönüşümüne sahip olur. (4.10) dan yararlanarak $l, n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^l a_{nk}x_k = \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{a}_{nk}y_k + \frac{\Delta^{m-1}\lambda_l}{\Delta^m\lambda_l}a_{nl}y_l \quad (7.6)$$

elde edilir. (7.6) eşitliğinde $l \rightarrow \infty$ için her iki tarafın limiti alınır ve (7.1) eşitliği kullanılırsa her

$n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_k a_{nk} x_k = \sum_k \tilde{a}_{nk} y_k \quad (7.7)$$

elde ederiz. Yani

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |(Ax)_n| \leq \|y\|_\infty \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\tilde{a}_{nk}| < \infty$$

olur. Dolayısıyla $A \in (l_\infty(\lambda^m), l_\infty)$ elde edilir.

Tersine $A \in (l_\infty(\lambda^m), l_\infty)$ alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk})_{n \in \mathbb{N}} \in \{l_\infty(\lambda^m)\}^\beta$ sağlandığından (7.1) ifadesinin sağlandığı açıkça görülür ve (7.7) ifadesi sağlanır. $l_\infty(\lambda^m)$ uzayında her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = (a_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi

$$f_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$$

şeklinde sürekli lineer f_n fonksiyonellerini tanımlar. Teorem 4.1.3 den $l_\infty(\lambda^m) \cong l_\infty$ olduğundan (7.7) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|f_n\| = \|\tilde{a}_n\|_\infty = \sup_n |\tilde{a}_n|$$

elde ederiz. Teorem 2.28 den her $n \in \mathbb{N}$ ve $M > 0$ sabiti için $\|f_n\| \leq M$ olur. Buradan da (7.2) ifadesi sağlanır.

(ii) ve (iii) şartları benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 7.2:

i) $A \in (l_1(\lambda^m), l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (7.5) ifadesiyle

$$\sup_{n,k} |\tilde{a}_{nk}| < \infty \quad (7.8)$$

şartının sağlanmasıdır.

ii) $1 < p < \infty$ iken $A \in (l_p(\lambda^m), l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (7.5) ifadesiyle

$$\sup_n \sum_k |\tilde{a}_{nk}|^q < \infty \quad (7.9)$$

şartının sağlanmasıdır [32].

İspat: (i) nin ispatı Lemma 3.7 (iii) ve Teorem 6.2 den yararlanılarak gösterilebilir. (ii) nin ispatı da Teorem 7.1 dekine benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 7.3:

i) $1 < p < \infty$ iken $A \in (l_p(\lambda^m), c)$ olması için gerek ve yeter şart (7.5), (7.9) ifadeleriyle her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_n \tilde{a}_{nk} = a_k \quad (7.10)$$

şartının sağlanmasıdır.

ii) $A \in (l_1(\lambda^m), c)$ olması için gerek ve yeter şart (7.1), (7.2) ve (7.10) ifadelerinin sağlanmasıdır.

iii) $A \in (l_\infty(\lambda^m), c)$ olması için gerek ve yeter şart (7.1), (7.2) ve (7.10) ifadelerinin ve

$$\lim_n \sum_k |\tilde{a}_{nk} - a_k| = 0$$

şartının sağlanmasıdır [32].

İspat: i) A matrisi öncelikle (7.5), (7.9) ve (7.10) ifadelerini sağlasın. $x \in l_p(\lambda^m)$ dizisini alalım. (7.5) ve (7.9) ifadelerinden Ax dönüşüm dizisi mevcuttur. Her $k \in \mathbb{N}$ için (7.10) ifadesinden $n \rightarrow \infty$ iken $|\tilde{a}_{nk}|^q \rightarrow |a_k|^q$ elde edilir. (7.9) ifadesinden her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{j=0}^k |a_j|^q \leq \sup_n \sum_j |\tilde{a}_{nj}|^q = M < \infty$$

elde edilir ve $(a_k) \in l_q$ olur. $x \in l_p(\lambda^m)$ kabulünden $y \in l_p$ yazılabilir. Ayrıca Hölder eşitsizliğinden ise $(a_k y_k) \in l_1$ elde edilir.

$k_0 \in \mathbb{N}$ sabit ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere x dizisine karşılık y dizisi için

$$\left[\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |y_k|^p \right]^{1/p} < \frac{\varepsilon}{4M^{1/q}}$$

yazılabilir ve (7.10) ifadesinden $n_0 \in \mathbb{N}$ için $n > n_0$ olmak üzere

$$\left| \sum_{k=0}^{k_0} (\tilde{a}_{nk} - a_k) y_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bulunur. $n > n_0$ (7.7) ifadesinde yeterince büyük alınırsa

$$\begin{aligned} \left| \sum_k a_{nk} y_k - \sum_k a_k y_k \right| &= \left| \sum_k (\tilde{a}_{nk} - a_k) y_k \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{k_0} (\tilde{a}_{nk} - a_k) y_k \right| + \left| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (\tilde{a}_{nk} - a_k) y_k \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left[\sum_{k=k_0+1}^{\infty} (|\tilde{a}_{nk}| + |a_k|)^q \right]^{1/q} \left[\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |y_k|^p \right]^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M^{1/q}} \left[\left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}|^q \right)^{1/q} + \left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |a_k|^q \right)^{1/q} \right] \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M^{1/q}} 2M^{1/q} = \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak $(Ax)_n \rightarrow \sum_k a_k x_k$ elde edilir. Dolayısıyla $Ax \in c$ ve buradan $A \in (l_p(\lambda^m), c)$ olur.

Şimdi de $A \in (l_p(\lambda^m), c)$ olsun. $c \subset l_\infty$ için $A \in (l_p(\lambda^m), l_\infty)$ elde edilir. Teorem 7.2 (ii) den (7.5) ve (7.9) ifadeleri sağlanır. Dolayısıyla (4.10) ifadesinden her $x \in l_p(\lambda^m)$ ve $y \in l_p$ için (7.7) ifadesi sağlanır. Şimdi x dizisini (4.10) daki şeklinde tanımlayalım ve $y \in l_p$ olsun. Bu takdirde $y = \Lambda^m(x)$ dir ve buradan $x \in l_p(\lambda^m)$ olur. Hipotezden $Ax \in c$ ve (7.7) ifadesinden $\tilde{A}y \in c$ yazılabilir. $\tilde{A} = (\tilde{a}_{nk})$ olmak üzere $\tilde{A} \in (l_p, c)$ dir. Lemma 3.5 de verdiğimiz (3.4) ifadesinden (7.10) sağlanır.

Benzer şekilde (ii) ve (iii) ispatlanabilir.

Theorem 7.4:

i) $A \in (l_1(\lambda^m), c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (7.5),(7.8) ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_n \tilde{a}_{nk} = 0 \quad (7.11)$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

ii) $1 < p < \infty$ iken $A \in (l_p(\lambda^m), c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (7.5), (7.9) ve (7.11) ifadelerinin sağlanmasıdır.

iii) $A \in (l_\infty(\lambda^m), c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (7.1) ve

$$\lim_n \sum_k |\tilde{a}_{nk}| = 0 \quad (7.12)$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

İspat : Teorem 7.3 deki ispattaki yol izlenerek ve Lemma 3.6 dan yararlanarak ispat yapılabilir.

Theorem 7.5: $1 < p < \infty$ iken $A \in (l_1(\lambda^m), l_p)$ olması için gerek ve yeter şart (7.5) ve

$$\sup_k \sum_n |\tilde{a}_{nk}|^p < \infty \quad (7.13)$$

ifadelerinin sağlanmasıdır [32].

İspat: A matrisi (7.5) ve (7.13) ifadeleri sağlasın ve $x \in l_1(\lambda^m)$ olsun. (4.10) dan $y \in l_1$ elde ederiz. Ayrıca Teorem 6.2 den her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk})_{k=0}^{\infty} \in \{l_1(\lambda^m)\}^{\beta}$ yazılabilir ve dolayısıyla Ax dönüşüm dizisi mevcut olur. (7.13) ifadesinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_k |\tilde{a}_{nk}| \leq \sup_k \left(\sum_n |\tilde{a}_{nk}|^p \right)^{1/p} < \infty$$

elde edilir. Buradan da her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_k \tilde{a}_{nk} y_k$$

serisi yakınsak olur. (7.6) ifadesinde $l \rightarrow \infty$ için (7.5) ve (7.7) ifadeleri elde edilir. (7.7) ve (7.13) ifadelerinden ve Minkowski eşitsizliğinden faydalanarak

$$\left(\sum_n |A_n(x)|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_n \left| \sum_k \tilde{a}_{nk} y_k \right|^p \right)^{1/p} \leq \sum_k |y_k| \left(\sum_n |\tilde{a}_{nk}|^p \right)^{1/p} < \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla $Ax \in l_p$ ve $A \in (l_1(\lambda^m), l_p)$ elde edilir.

Şimdi de $A \in (l_1(\lambda^m), l_p)$ olsun. Buradan $A \in (l_1(\lambda^m), l_{\infty})$ olur. Teorem 7.1 den (7.1) ve (7.2) ifadeleri sağlanır. (7.1) ve (7.2) ifadelerini göz önüne alındığında her $x \in l_1(\lambda^m)$ ve buradan $y \in l_1$ için (7.7) ifadesi sağlanır. Hipotezden de $\tilde{A} = (\tilde{a}_{nk}) \in (l_1, l_p)$ elde edilir. Sonuç olarak Lemma 3.8 den (7.13) ifadesi elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] Maddox I.J, 1970. Elements Of Functional Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 246p, London.
- [2] Balcı, M. 1999. Matematik Analiz I, 6. Basım, Balcı Yayınları, Ankara.
- [3] Suhubi E.2001. Fonksiyonel Analiz, ITU Vakf.
- [4] Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis With Applications. John Wiley & Sons, New York.
- [5] Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P., 1982. Functional Analysis. Pergamon Press, Oxford.
- [6] Çakar, Ö. 2007. Fonksiyonel Analize Giriş 1. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.
- [7] Jain, P. K.; Ahmad, K., 1993. Metric spaces, Narosa Publishing House, New Delhi, INDIA.
- [8] Basar, F., 2011. Summability Theory And Its Applications. Bentham Science Publishers, e-Boks Monographs, Istanbul.
- [9] Aslım, G., 1988, Genel Topoloji, Ege Üniversitesi, 229s.
- [10] Bhardwaj, V.K., 2003. A Generalization of a Sequence Space of Ruckle. Bull. Calcutta Math. Soc., 95(5), 411-420.
- [11] Wilansky, A., 1984. Summability Through Functional Analysis. Mathematics Studies, Amsterdam, North-Holland.
- [12] Mursaleen, M., 2014, Applied Summability Methods, Springer Cham Heidelberg, New York, Bordrecht, London.
- [13] Mursaleen, M., Noman, A. K., 2010. On The Spaces Of α -Convergent And Bounded Sequences, Thai. J. Math., 8(2), 311-329.
- [14] Jarrah, A. M., Malkowsky, E., 2003. Ordinary, Absolute And Strong Summability And Matrix Transformations, Filomat, 17, 59-78.
- [15] Boos, J., 2000. Classical And Modern Method in Summability. Oxford University Press.
- [16] Kızmaz, H., 1981, On Certain Sequence Spaces, Canad. Math. Bull., 24(2), 169-176.
- [17] Duyar, O., Demiriz, S., Özdemir, O., 2014. On Some New Generalized Difference Sequence Spaces Of Non –Absolute Type, J. Math., 2014. Article ID 876813.
- [18] Stieglitz, M., Tietz, H., 1977. Matrix Transformationen Von Folgenraumeneine Ergebnisübersich, Math. Z., (154), 1-16.
- [19] Basar F., 2012. Summability Theory And Its Applications. Bentham Science Publishers, Istanbul. ISBN:978-1-60805-252-3.
- [20] Et, M., 1993. On Some Difference Sequence Spaces, Turkish J. Math., 17, 18-24.
- [21] Malkowsky, E., Parashar, S. D., 1997. Matrix Transformations in Space Of Bounded And Convergent Difference Sequence Of Order, Analysis, 17,87-97.
- [22] Et, M., Çolak, R., 1995. On Some Generalized Difference Sequence Spaces, Soochow Journal Of Mathematics, Soochow j. Math. 31(1), 107-119.
- [23] Móricz, F., 1989. On α -Strong Convergence Of Numerical Sequences And Fourier Series, Acta Math.

- Hung., 54(3-4), 319-327.
- [24] Ganie, A. H., Sheikh, A. N., 2013. On Some New Sequence Spaces Of Non-Absolute Type And Matrix Transformations, J.Egyptian Math. Soc.,21,108-114.
 - [25] Candan, M., 2014. Domain Of The Double Sequential Band Matrix In The Space Of Convergent And Null Sequences, Adv. Difference Equ., 163.
 - [26] Altay B., 2006. On The Space Of p -Summable Difference Sequences Of Order m , ($1 \leq p < \infty$), Studia Sci. Math. Hungar., 43no.4, 387-402.
 - [27] Polat H., 2006. B.Altay.On Some New Euler Difference Sequence Spaces, Southeast Asian Bull. Math.30, no.2, 209-220.
 - [28] Mursaleen, M., Noman, A. K., 2010. On Some New Difference Sequence Spaces Of Non- Absolute Type, Math. Comput. Modelling, 52, 603-617.
 - [29] Sonmez, A, Basar, F 2012. Generalized Difference Spaces Of Non-Absolute Type Of Convergent And Null Sequences. Abstr.Appl. Anal. 2012, Article ID 435076.
 - [30] Braha N. L., Başar F., 2013. On The Domain Of The Triangle On The spaces Of Null, Convergent And Bounded Sequences, Abstr. Appl. Anal., Article ID 47636.
 - [31] Ercan S, .Bektaş Ç, 2017. On The Spaces Of λ^m – Bounded And λ^m – Absolutely p –Summable Sequences Ser. Math. Inform Vol.32, No 3, 303-318.
 - [32] Mursaleen, M., Noman, A.K., 2011. On Some New Sequence Spaces Of Non-Absolute Type Related To The Spaces l_p And l_∞ I, Filomat, 25(2).

ÖZGEÇMİŞ

Dolunay BURÇ

KİŞİSEL BİLGİLER

Doğum Yeri : Elazığ
Doğum Yılı : 1990
Uyruğu : T.C
E Posta : burcdolunay_23@hotmail.com
Yabancı Dil : İngilizce (Başlangıç)

EĞİTİM BİLGİLERİ

Lisans : Fırat Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2012)
Lise : Elazığ Balakgazi Lisesi (2007)

İŞ DENEYİMİ

2014 - ... : MEB kurumunda matematik öğretmenliği