

YEREL OLMAYAN ELASTİSİTEDE ÇATLAK PROBLEMİ

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Kamil ORUÇOĞLU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 23 Eylül 1991

Tezin Savunulduğu Tarih : 23 Aralık 1991

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Esin İNAN

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Hilmi DEMİRAY

Prof. Dr. Atilla AŞKAR

ARALIK 1991

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince değerli bilgi ve yardımlarını gördüğüm sayın danışmanım Prof.Dr. Esin İnan'a teşekkür ederek, yaşamım boyunca kendisine minnet ve şükran hisleri içinde olacağımı ifade etmeyi bir görev saymaktayım. Ayrıca bilgi ve yardımlarını gördüğüm Prof.Dr. Metin Demiralp, değerli ağabeyim ve meslektaşım Ali Ercengiz'e teşekkür ederim. Öğrenim hayatım boyunca emeği olan tüm saygıdeğer hocalarıma ve bilimsel alana yönelmemde ayrı bir yeri olan Mühendislik Bilimleri Bölümü öğretim üyelerine ve çalışanlarına teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	IV
SUMMARY	V
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE	9
2.1 Giriş	9
2.2 Korunum Denklemleri	9
2.3 Termodinamiğin II Yasası	13
2.4 Yerel Olmayan Elastik Katıların Bünye Denklemleri	14
2.5 Bünye Denklemlerinin Lineerleştirilmesi	19
2.6 Alan Denklemleri	24
BÖLÜM 3. YEREL OLMAYAN ELASTİSİTEDE ÇATLAK PROBLEMİ	27
3.1 Giriş	27
3.2 Düzlem Dışı Kaymaya Maruz Çift Çatlak Problemi	27
3.3 Üçlü İntegral Denklemlerin Çözümü	34
BÖLÜM 4. GERİLME ANALİZİ	48
4.1 Giriş	48
4.2 Yerel Elastisitede Gerilme Analizi	49
4.3 Klasik Çözüm Kullanılarak Çift ve Tek Çatlak için Yerel	
Olmayan Elastisitede Gerilme Analizi	55
4.4 Yerel Olmayan Elastisitede Tek Çatlak Problemi	65
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	73
EKLER	76
KAYNAKLAR	82
ÖZGEÇMİŞ	86

ÖZET

Bu çalışmada yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak düzlem dışı kayma gerilmesine maruz lineer izotrop sonsuz elastik bir katıda doğrusal çift çatlak problemi incelenmiştir. Çalışma, dört ana bölüm, sonuçlar ve öneriler kısmı ve iki ekten oluşmaktadır.

Birinci bölümde, yapılan çalışma tanıtılarak, çatlak probleminin önemi ve bu konudaki temel çalışmalar ve yerel olmayan elastisite teorisi ile ilgili bilgiler verilerek, bu teori ile çözülmüş çatlak problemlerinden elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. Son olarak yapılan çalışma kısaca anlatılarak kaynaklarda mevcut benzer çalışmalardan olan farklılıkları ve elde edilen sonuçlar üzerinde durulmuştur.

İkinci bölüm, yerel olmayan elastisite teorisinin bünye ve alan denklemlerinin elde edilmesine ayrılmıştır. Bu amaçla ilk önce yerel olmayan ortamlar için korunum yasalarının yerelleştirilmiş ifadeleri ve benzer şekilde entropi yasası verilmiştir. Daha sonra ise sırası ile yerel olmayan elastik katıların bünye denklemlerinin elde edilmesi, lineer teori kullanılarak bu bünye denklemlerinin lineerleştirilmiş ifadeleri ve alan denklemleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, problemin tanıtımı, formülasyonu, çözümü konuları incelenmiştir. İlk ayıta kısa bir girişten sonra ikinci ayıta problem tanıtılmış ve yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak formüle edilmiştir. Sınır koşulları uygulanarak problemin çözümü üçlü (triple) integral denklemlerin çözümlerine indirgenmiştir. Sonraki ayıta ise sırası ile elde edilen üçlü integral denklemlerin çözümü tekil Fredholm integral denkleminin çözümüne getirilerek, integral denklemin çözümü ardışık (rekürsiv) tekil integral denklemlerin çözümüne indirgenmiştir. Ardışık tekil integral denklemlere sonlu Hilbert dönüşümü uygulanarak çözüm ifadeleri formüle edilmiş ve sayısal olarak ilk iki adımdaki çözüm ifadeleri sabit yükleme hali için hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde gerilme analizi yapılmıştır. İlk ayıta girişten sonra ikinci ayıta yerel elastisite teorisi için sırası ile düzgün dağılılı yükleme durumunda çift ve tek çatlak problemi incelenmiştir. Üçüncü ayıta yerel çözüm kullanılarak yerel olmayan teori için çift ve tek çatlak problemi incelenmiştir. Son olarak ise birinci ve ikinci adımda elde edilen çözüm ifadeleri kullanılarak yerel olmayan teoride tek çatlak için problem incelenmiştir. Sonuçlar ve öneriler kısmında ise elde edilen sonuçlar ve bu konudaki düşüncelere yer verilmektedir.

SUMMARY

CRACK PROBLEMS OF NONLOCAL ELASTICITY

In the present work, the problem of two collinear cracks in an isotropic, homogeneous elastic medium which is subjected to uniform shear loading at infinity is investigated in the context of nonlocal theory of elasticity.

Crack problems are investigated by many authors. Among many others, Griffith's [1, 2] works are of great importance. Classical elasticity solution of problems predicts a stress singularity at the crack tip no matter how small the applied load is. The major discrepancy that exists between experimental observations and the theory led Griffith to propose his celebrated fracture criterion which results from equating the elastic energy to the surface tension energy. The past half century registered many other advances in this field. They are mostly influenced by the idea of Griffith. But the problem basically remained unresolved until recently. Eringen [25-27] gave a solution of this problem by solving nonlocal field equations which take into account long-range influences between the particles.

Fundamental Equations of Nonlocal Elasticity

Taking into account the long-range influences, the constitutive equations of linear, homogeneous elastic solids are given as

$$t_{ki} = \int_v (\lambda' e_{rr}(x') \delta_{ki} + 2\mu' e_{ki}(x')) dv(x'). \quad (1)$$

Here, it is considered that the nonlocal moduli are to be distributions with bounded supports. They are positive functions in a finite domain about $\underline{x}$ and vanishing outside of this domain. In the limit when these distributions become "Dirac delta" function, equations (1) reduce to the classical form of the constitutive equations of local elasticity. The form of $\lambda'(|\underline{x}' - \underline{x}|)$ and $\mu'(|\underline{x}' - \underline{x}|)$ may be determined by matching the dispersion relation of the plane waves by its corresponding relation known from lattice dynamics. Among several possible curves the following has been found very useful to describe the nonlocal elastic moduli as

$$(\lambda', \mu') = (\lambda, \mu) \alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|). \quad (2)$$

Here λ and μ Lamé constants and $\alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|)$ is an attenuation factor which brings the influence of the strain field in the neighbouring direction and sub-

jected to normalization condition

$$\int_v \alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|) dv' = 1. \quad (3)$$

Substituting equation (2) into equation (1) we find

$$t_{kl} = \int_v \alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|) \sigma'_{kl} dv'. \quad (4)$$

Here σ'_{kl} is given by the classical Hooke's law

$$\sigma'_{kl} = \sigma_{kl}(\underline{x}') = \lambda e_{rr}(\underline{x}') \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}(\underline{x}'). \quad (5)$$

e_{kl} is the component of strain tensor. With vanishing body forces, equations of equilibrium reduce to

$$t_{kl,k} = 0. \quad (6)$$

The attenuation factor $\alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|)$ may be determined by the use of lattice dynamics. A more useful candidate for two dimensional problem is Gaussian function

$$\alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|) = \alpha_0 \exp\left[-\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 (\underline{x}' - \underline{x}) \cdot (\underline{x}' - \underline{x})\right] \quad (7)$$

where β is a constant, a is the internal characteristic length (lattice parameter). The constant α_0 is determined by the normalization condition (3). Now, substituting the form of t_{kl} given by equation (4) into equation (6) and using Green-Gauss theorem we obtain

$$\int_v \alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|) \sigma_{kl,k}(\underline{x}') dv(\underline{x}') - \oint_{\partial v} \alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|) \sigma_{kl}(\underline{x}') da_k(\underline{x}') = 0. \quad (8)$$

Formulation of the Problem

In this work a problem of two collinear cracks in elastic plane which is subjected to a uniform anti-plane shear load is considered. Thus, we consider an elastic medium in the $(x_1 = x, x_2 = y)$ plane weakened by two line cracks each of length $|b - c|$ along x axis. Since the anti-plane shear loads are acting, the only non-zero displacement component of the displacement vector is u_z . Then we may write

$$u_x = u_y = 0, \quad u_z = W(x, y). \quad (9, a - b)$$

Thus, the non-zero stress components are

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial W}{\partial y}. \quad (10, a - b)$$

To obtain the field equations we may substitute the equations (10, a-b) together with the equation (5) into the equation (8) and write

$$\begin{aligned} & \mu \int \int_s \alpha(|x' - x|, |y' - y|) \nabla'^2 W(x', y') dx' dy' \\ & - \int_{-b}^{-c} \alpha(|x' - x|, |y|) [\sigma_{yz}(x', 0)] dx' - \int_b^c \alpha(|x' - x|, |y|) [\sigma_{yz}(x', 0)] dx' = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

This is the only field equation of the present problem. Here, brackets in the last two terms indicate the jump at the crack line. As it is known the displacement field possesses the following symmetry condition.

$$W(x, -y) = -W(x, y) \quad (12)$$

Using this result in (11) we find that

$$[\sigma_{yz}(x', 0)] = 0. \quad (13)$$

By this result the line integral in (11) vanishes. Now, taking Fourier transform of equation (11) with respect to x' we obtain the following differential equation

$$\frac{d^2 \overline{W}(\xi, y)}{dy^2} - \xi^2 \overline{W}(\xi, y) = 0. \quad (14)$$

Here superposed bar indicates the Fourier transform of the related function. The boundary conditions of the problem are

$$\begin{aligned} W(x, 0) &= 0 & 0 < x < b \\ t_{yz} &= \sigma_0 & b < x < c \\ W(x, 0) &= 0 & x > c \\ W(x, y) &= 0 & (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (15, a - d)$$

The solution of equation (14) for $y \geq 0$ satisfying the boundary condition (15, d) is

$$W(x, y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty A(\xi) \exp(-\xi y) \cos(\xi x) d\xi. \quad (16)$$

Here, the unknown function $A(\xi)$ will be determined by using the remaining three boundary conditions (15). The non-zero stress components of the stress tensor for two dimensional medium may be written by considering the constitutive equations given by expression (4) as follows

$$\begin{aligned} t_{xx} &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \alpha(|x' - x|, |y' - y|) \sigma_{xx}(x', y') dx' dy' \\ t_{yz} &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \alpha(|x' - x|, |y' - y|) \sigma_{yz}(x', y') dx' dy'. \end{aligned} \quad (17, a - b)$$

These components can be expressed in terms of the displacement vector $\underline{u}$. Choosing the Gaussian function given by equation (7) as the attenuation function $\alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|)$ and substituting equation (12) into the equations (17, a-b) and carrying out the integrals, we get

$$t_{xx} = - (2\pi)^{-1/2} \mu \int_0^\infty A(\xi) \xi [\exp(-\xi y) \operatorname{erfc}(\frac{\xi - 2py}{2\sqrt{p}}) - \exp(\xi y) \operatorname{erfc}(\frac{\xi + 2py}{2\sqrt{p}})] \sin(\xi x) d\xi \quad (18)$$

$$t_{yy} = - (2\pi)^{-1/2} \mu \int_0^\infty A(\xi) \xi [\exp(-\xi y) \operatorname{erfc}(\frac{\xi - 2py}{2\sqrt{p}}) + \exp(\xi y) \operatorname{erfc}(\frac{\xi + 2py}{2\sqrt{p}})] \cos(\xi x) d\xi. \quad (19)$$

Here

$$p = (\frac{\beta}{a})^2, \quad (20)$$

and $\Phi(z)$ is the error function defined by

$$\Phi(z) = 2\pi^{-1/2} \int_0^z \exp(-t^2) dt, \quad \operatorname{erfc}(z) = 1 - \Phi(z). \quad (21, a - b)$$

Using these final forms of stress components, the boundary conditions (15, a-c) may be expressed as

$$\begin{aligned} \int_0^\infty A(\zeta) \cos(s\zeta) d\zeta &= 0 & 0 < s < k \\ \int_0^\infty \zeta A(\zeta) \operatorname{erfc}(\epsilon\zeta) \cos(s\zeta) d\zeta &= \frac{\pi}{2} P_0 & k < s < 1 \\ \int_0^\infty A(\zeta) \cos(s\zeta) d\zeta &= 0 & s > 1 \end{aligned} \quad (22, a - c)$$

where we have introduced

$$s = \frac{x}{c}, \quad \zeta = \xi c, \quad \epsilon = \frac{a}{2\beta c}, \quad k = \frac{b}{c} \quad \text{ve} \quad P_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_0 c^2}{\mu}. \quad (23)$$

Now, we define a new function $K(\epsilon\zeta)$ as

$$K(\epsilon\zeta) = \operatorname{erfc}(\epsilon\zeta). \quad (24)$$

Here ϵ is a nonlocal parameter and characterizes the nonlocal effects. The function $K(\epsilon\zeta)$ becomes one for the limit case which is $\epsilon = 0$, and then the equation (22) characterizes the corresponding problem in local theory. To determine the unknown function $A(\zeta)$ we must solve the triple integral equations (22). For this purpose we write

$$A(\zeta) = \zeta^{-1} \int_k^1 h(t^2) \sin(\zeta t) dt. \quad (25)$$

It can be easily shown that equation (22, c) is satisfied identically by the substitution of (25) into the equation (22, c) and by noting the integral

$$\int_0^\infty \zeta^{-1} \sin(\zeta t) \cos(s\zeta) d\zeta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |s| < t \\ 0 & |s| > t. \end{cases} \quad (26)$$

On the other hand, equation (22, a) gives us the following conditional equation

$$\int_k^1 h(t^2) dt = 0. \quad (27)$$

The remaining equation (22, b) may be expressed as

$$\int_k^1 h(t^2) K_1(s, t) dt = \frac{\pi}{2} P(s) \quad k < s < 1. \quad (28)$$

Here we have introduced

$$K_1(s, t) = \int_0^\infty [1 - \Phi(\epsilon\zeta)] \cos(s\zeta) \sin(t\zeta) d\zeta \quad (29)$$

and replaced P_0 by $P(s)$, a known function of s . Now, defining a new kernel $K_2(s, t)$ as

$$K_2(s, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{(s+t) \exp(-\frac{(s-t)^2}{4\epsilon^2}) - (s-t) \exp(-\frac{(s+t)^2}{4\epsilon^2})}{t^2 - s^2} \right] \quad (30)$$

we arrive at

$$\int_k^1 \frac{th(t^2)dt}{t^2 - s^2} - \int_k^1 K_2(s, t)h(t^2)dt = \frac{\pi}{2} P(s) \quad k < s < 1. \quad (31)$$

Thus, the solution of the triple integral equations (22) is reduced to the solution of a singular Fredholm integral equation with conditional equation (27). The kernel K_2 in equation (31) has an essential singularity which does not allow us to expand this function into series with respect to its argument or parameter ϵ for instance. Then we introduce an artificial parameter ν by considering that the contribution to the solution of the second term of equation (31) which includes kernel function $K_2(s, t)$ is too small comparing to the equation (31) as

$$\int_k^1 \frac{th(t^2)dt}{t^2 - s^2} - \int_k^1 \nu K_2(s, t)h(t^2)dt = \frac{\pi}{2} P(s). \quad (32)$$

Now writing $h(t^2)$ in the following form

$$h(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n h_n(t^2) \quad (33)$$

and substituting it into the equations (32) and (27) and rearranging gives us

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_k^1 \frac{t h_n(t^2) dt}{t^2 - s^2} &= R_n(s) \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ k &< s < 1 \end{aligned} \quad (34, a - b)$$

$$\int_k^1 h_n(t^2) dt = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Here

$$R_n(s) = \begin{cases} P(s) & n = 0 \\ \frac{2}{\pi} \int_k^1 h_{n-1}(t^2) K_2(s, t) dt & n \geq 1. \end{cases} \quad (35)$$

Since $P(s)$ is a known function, integral equation (34) can be solved successively. It is also possible to apply Hilbert transformation to this equation. Solution may be given in the following form

$$\begin{aligned} h_n(t^2) &= -\frac{2}{\pi} \left(\frac{t^2 - k^2}{1 - t^2} \right)^{1/2} \int_k^1 \left(\frac{1 - s^2}{s^2 - k^2} \right)^{1/2} \frac{s R_n(s) ds}{s^2 - t^2} \\ &+ \frac{C_n}{\sqrt{(t^2 - k^2)(1 - t^2)}} \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (36)$$

Here, unknown constant C_n can be calculated by considering condition (34, b) as

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{\pi F} \int_k^1 \left(\frac{t^2 - k^2}{1 - t^2} \right)^{1/2} dt \int_k^1 \left(\frac{1 - s^2}{s^2 - k^2} \right)^{1/2} \frac{s R_n(s) ds}{s^2 - t^2} \\ &n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (37)$$

where F is the complete elliptic function of the first kind. It is also possible to write $h_n(t^2)$ in the form of

$$\begin{aligned} h_n(t^2) &= -\frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - t^2}{t^2 - k^2} \right)^{1/2} \int_k^1 \left(\frac{s^2 - k^2}{1 - s^2} \right)^{1/2} \frac{s R_n(s) ds}{s^2 - t^2} \\ &+ \frac{D_n}{\sqrt{(t^2 - k^2)(1 - t^2)}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Here

$$D_n = \frac{2}{\pi F} \int_k^1 \left(\frac{1 - t^2}{t^2 - k^2} \right)^{1/2} dt \int_k^1 \left(\frac{s^2 - k^2}{1 - s^2} \right)^{1/2} \frac{s R_n(s) ds}{s^2 - t^2}. \quad (39)$$

For constant loading we write $P(s) = P_0$. For $n = 0$ we find

$$\begin{aligned} C_0 &= P_0 \left(k^2 - \frac{E}{F} \right) \\ D_0 &= P_0 \left(1 - \frac{E}{F} \right) \\ h_0(t^2) &= P_0 \frac{t^2 - E/F}{\sqrt{(t^2 - k^2)(1 - t^2)}}. \end{aligned} \quad (40, a - c)$$

Here E is the complete elliptic function of the second kind. For $n = 1$ we write

$$R_1(y) = \frac{2}{\pi} \int_k^1 h_0(u^2) K_2(y, u) du. \quad (41)$$

Substituting expressions (40, c) and (30) into equation (41) gives

$$R_1(y) = \frac{P_0}{\pi} \int_k^1 \frac{\left\{ (y+u) \exp\left(-\frac{(u-y)^2}{4\epsilon^2}\right) + (u-y) \exp\left(-\frac{(u+y)^2}{4\epsilon^2}\right) \right\} (u^2 - \frac{E}{F}) du}{\sqrt{(u^2 - k^2)(1 - u^2)(u^2 - y^2)}}. \quad (42)$$

Introducing $I(t^2)$ as

$$I(t^2) = \int_{k^2}^1 \frac{[(y - k^2)R_1(\sqrt{y}) - (t^2 - k^2)R_1(t^2)] dy}{\sqrt{(1-y)(y - k^2)(y - t^2)}} \quad (43)$$

we obtain

$$h_1(t^2) = -\frac{1}{\pi \sqrt{(1-t^2)(t^2 - k^2)}} \left[(1-t^2)I(t^2) - \frac{1}{4F} \int_{k^2}^1 \frac{(1-t)I(t)dt}{\sqrt{t}\sqrt{(1-t)(t - k^2)}} \right]. \quad (44)$$

Similar calculations can be done for $n = 2, 3, \dots$. It is observed that the functions $h_0(t^2)$ and $h_0(t^2) + h_1(t^2)$ are approaching to each other for decreasing value of the parameter ϵ . For $\epsilon = 0$, we find $h_1(t^2) = 0$. Thus we may conclude that $h_1(t^2)$ denotes the nonlocal effects which appear when $\epsilon \neq 0$.

Stress Analysis

Most important part of the problem is the determination of the stress distribution in the neighbourhood of the crack tip. For this purpose we write $y = 0$ in equations (18) and (19)

$$\hat{t}_{yz}(s, 0) = -\frac{2}{\pi} \left[\int_k^1 \frac{th(t^2)dt}{t^2 - s^2} - \int_k^1 h(t^2)K_2(s, t)dt \right] \quad (45)$$

where

$$\hat{t}_{yz}(s, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{t}_{yz}(s, 0)}{\mu}. \quad (46)$$

To find the solution for local theory we write $\epsilon = 0$ in equation (45)

$$\begin{aligned} \hat{t}_{yz}(s, 0) &= -\frac{2}{\pi} \int_k^1 \frac{th(t^2)dt}{t^2 - s^2} & 0 < s < k \\ \hat{t}_{yz}(s, 0) &= \frac{2}{\pi} \int_k^1 \frac{th(t^2)dt}{s^2 - t^2} & s > 1. \end{aligned} \quad (47)$$

Calculations can be carried out by writing $n = 0$ in equations (36), (38) to obtain $h_0(t^2)$. Using obtained result in equation (47) and rearranging gives us

$$\begin{aligned}\hat{t}_{yz}(s, 0) &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1-s^2}{k^2-s^2} \right)^{1/2} \int_k^1 \left(\frac{y^2-k^2}{1-y^2} \right)^{1/2} \frac{yP(y)dy}{y^2-s^2} \\ &\quad - \frac{D_0}{\sqrt{(1-s^2)(k^2-s^2)}} \quad 0 < s < k \\ \hat{t}_{yz}(s, 0) &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{s^2-k^2}{s^2-1} \right)^{1/2} \int_k^1 \left(\frac{1-y^2}{y^2-k^2} \right)^{1/2} \frac{yP(y)dy}{s^2-y^2} \\ &\quad - \frac{C_0}{\sqrt{(1-s^2)(k^2-s^2)}} \quad s > 1.\end{aligned}\tag{48, a-b}$$

As it can be observed from expression (48) that the values of stress go to infinity for the approaching values of s to k and 1 . But this is not possible for practical problems. To determine the stress state at the tip of the crack, we use the concept of stress intensity factors which are given simply as

$$N_k = \lim_{s \rightarrow k^-} \sqrt{(k-s)} \hat{t}_{yz}(s, 0), \quad N_1 = \lim_{s \rightarrow 1^+} \sqrt{(s-1)} \hat{t}_{yz}(s, 0). \tag{49, a-b}$$

For the present problem calculations give us

$$\begin{aligned}N_k &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2k(1-k^2)}} \left[(1-k^2) \int_k^1 \frac{yP(y)dy}{\sqrt{(1-y^2)(y^2-k^2)}} - \frac{\pi}{2} D_0 \right] \\ N_1 &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}} \left[(1-k^2) \int_k^1 \frac{yP(y)dy}{\sqrt{(1-y^2)(y^2-k^2)}} + \frac{\pi}{2} C_0 \right].\end{aligned}\tag{50, a-b}$$

We find the corresponding solutions of particular case which is $P(y) = P_0 = \text{constant}$

$$N_k = \frac{P_0}{\sqrt{2k(1-k^2)}} \left[\frac{E}{F} - k^2 \right], \quad N_1 = \frac{P_0}{\sqrt{2(1-k^2)}} \left[1 - \frac{E}{F} \right]. \tag{51, a-b}$$

Another particular solutions may be obtained by writing $k = 0$ for unique crack. After some mathematical manipulations we arrive

$$\hat{t}_{yz}(s, 0) = \frac{P_0}{\sqrt{s^2-1}} (s - \sqrt{s^2-1}) \quad s > 1. \tag{52}$$

Similar result for a crack which is subjected to anti-plane uniform loading at infinity may be calculated as

$$\hat{t}_{yz}(s, 0) = \frac{P_0 s}{\sqrt{s^2-1}} \quad s > 1 \tag{53}$$

and the stress intensity factor at crack tip is

$$\frac{t_{yz}(c, 0)}{\mu} = \sigma_0 \sqrt{c} \tag{54}$$

which is a very well-known result as Griffith criterion . To find the stress distribution for non-local case, we may use the result given for local case by equation (40, c) and substitute this form of $h_0(t^2)$ into the equation (45) to obtain

$$\begin{aligned}\frac{\hat{t}_{yz}(s, 0)}{P_0} &= -\frac{2}{\pi} \left\{ \int_k^1 \frac{t^2 - \frac{E}{F}}{\sqrt{(t^2 - k^2)(1 - t^2)(t^2 - s^2)}} \left[t - \frac{1}{2} \left[(s + t) \exp\left(-\frac{(s - t)^2}{4\epsilon^2}\right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + (t - s) \exp\left(-\frac{(s + t)^2}{4\epsilon^2}\right) \right] \right] dt \right\} \quad 0 < s < k \\ \frac{\hat{t}_{yz}(s, 0)}{P_0} &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_k^1 \frac{t^2 - \frac{E}{F}}{\sqrt{(t^2 - k^2)(1 - t^2)(s^2 - t^2)}} \left[t - \frac{1}{2} \left[(s + t) \exp\left(-\frac{(s - t)^2}{4\epsilon^2}\right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + (t - s) \exp\left(-\frac{(s + t)^2}{4\epsilon^2}\right) \right] \right] dt \right\} \quad s > 1.\end{aligned}\tag{55, a - b}$$

The value of the stress at the crack tip for unique crack can be calculated simply by writing $k = 0$ in equation (55, b) which gives

$$\begin{aligned}\frac{\hat{t}_{yz}(s, 0)}{P_0} &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\left[t - \frac{1}{2} \left[(s + t) \exp\left(-\frac{(s - t)^2}{4\epsilon^2}\right) - (s - t) \exp\left(-\frac{(s + t)^2}{4\epsilon^2}\right) \right] \right] t dt}{\sqrt{1 - t^2}(s^2 - t^2)} \\ &\quad s > 1.\end{aligned}\tag{56}$$

Numerical calculation have been carried on for several values of parameter ϵ . It is observed that the maximum stress occurs at the crack tip but it is finite as it is expected. It is also possible to obtain the known classical solution by considering limit case which ϵ tends to zero. As the last step of this work, we shall give the stress analysis of the crack problem by taking the function $h(t^2)$ as the sum of two functions namely $h_0(t^2)$ and $h_1(t^2)$. To this end, we write $k = 0$ in the equations (40) and (44) and define following functions

$$G(y, u) = \left\{ \left(1 + \frac{y}{\sqrt{u}}\right) \exp\left(-\frac{(\sqrt{u} - y)^2}{4\epsilon^2}\right) + \left(1 - \frac{y}{\sqrt{u}}\right) \exp\left(-\frac{(\sqrt{u} + y)^2}{4\epsilon^2}\right) - 2 \right\} \tag{57}$$

$$\bar{R}_1(y^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{u}{1 - u}} \frac{G(y, u) du}{u - y^2}.\tag{58}$$

Then we write

$$h_0(t^2) + h_1(t^2) = \frac{P_0 t}{\sqrt{1 - t^2}} \left[1 - \frac{1}{\pi} (F(t^2) - \pi(1 + \bar{R}_1(t^2))) \right]. \tag{59}$$

Here

$$F(t^2) = \int_0^1 \sqrt{\frac{y}{1 - y}} [\bar{R}_1(1 - y) - \bar{R}_1(t^2)] dy.$$

Substituting (59) into the equation (45) and writing $k = 0$ gives us

$$\frac{\hat{t}_{yz}(s, 0)}{P_0} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1 - t}} \frac{\left[1 - \frac{1}{\pi} \{ F(t) - \pi(1 + \bar{R}_1(t)) \} \right] G(s, t) dt}{t - s^2}.\tag{60}$$

Numerical calculations have been carried out for different values of ϵ and it has been observed that the obtained results are very close to the ones found in the first step of the problem. The difference between the results due to two solutions goes rapidly to zero by increasing value of the distance of the point under consideration to the crack tip.

Stress intensity factor at the crack tip may be given as [26]

$$\frac{t_{yz}(c, 0)}{\sigma_0} = \frac{c_3}{\sqrt{\epsilon}} \quad \epsilon = \frac{a}{2\beta c}. \quad (61)$$

Using (56) and (60) we find for $\epsilon = 1/100$

$$c_3 = -0.30. \quad (62)$$

Now we may conclude following results:

1: Maximum shear stress occurs at the crack tip and it is finite. 2: The shear stress at crack tip becomes infinite as the atomic distance a tends to zero. This is the very-well known classical result. 3: When $t_{yz}(c, 0) = t_c$ (cohesive shear stress) fracture will occur and crack begins to propagate. In this case (61) gives

$$\sigma_0^2 c = C_G \quad (63)$$

where

$$C_G = \left(\frac{a}{2\beta c_3^2}\right)t_c^2. \quad (64)$$

Here, we have found the Griffith criterion by direct method. Cohesive shear stress t_c may be predicted by using the concept of surface energy γ given by Griffith. Thus we write

$$C_G = \frac{4\mu\gamma}{\pi(1-\nu)} \quad (65)$$

and equate this quantity to (64) to obtain

$$t_c^2 = K_c \gamma. \quad (66)$$

Here

$$K_c = \frac{8\mu c_3^2 \beta}{\pi(1-\nu)}. \quad (67)$$

Now considering the known values of γ and the elastic constants for steel [26] as

$$\gamma = 1975 \text{ CGS}, \mu = 6.92 \times 10^{11} \text{ CGS}, \nu = 0.291, a = 2.48 \text{ \AA} \quad (68)$$

we find

$$\frac{t_c}{\mu} = 0.1928736\beta^{1/2}. \quad (69)$$

Assuming that, in n atomic distance, $x = na$, the nonlocal effects attenuate to %1 of its value at $x = 0$ from (7) we find

$$\beta = 2.145966/n. \quad (70)$$

For $n = 6$, we have

$$\frac{t_c}{\mu} = 0.1153. \quad (71)$$

This value is found as 0.14 by Eringen [27]. Our result is closer to the result given by physicists and metallurgists based on other considerations. For instance, Kelly [53] gives this result as 0.11 which may be regarded as a perfect agreement.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu çalışmada yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak sonsuzda düzgün dağılı düzlem dışı kayma gerilmesine maruz lineer izotrop sonsuz elastik bir katıda doğrusal çift çatlak problemi incelenmiştir.

Malzeme içinde çatlak oluşması ve yayılması problemleri deneysel ve teorik olarak çeşitli araştırmacılar tarafından incelenmiştir. Çatlakların oluşması ve ilerlemesi genellikle ortama etkiyen dış kuvvetler ve gerilmeler yolu ile ortaya çıkar ve ortam içinde önemli ölçüde mukavemet kaybına yol açar. Çatlakların katı bir cisim içinde gerilme dağılışına etkisi ile ilgili ilk önemli çalışmalar Griffith [1, 2] tarafından yapılmıştır. Griffith katı bir cismin sınır yüzeyinde bir yüzey gerilimi olduğunu ve bir çatlak yayılınca şekil değiştirme enerjisindeki azalmanın bu yüzey geriliminden dolayı potansiyel enerjideki artma ile dengelendiğini kabul etmiştir. Griffith, elastik katıların gevrek kırılması için termodinamiğin birinci yasasını kullanarak dış yükler altında çatlak yayılması için gerekli kırılma kriterini elde etmiştir. Bu kriter

$$\frac{\partial}{\partial c}(W - U)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada W ve U sırası ile şekil değiştirme enerjisi ve yüzey gerilimi dolayısı ile yapılan iş, c ise yarı çatlak uzunluğunu göstermektedir. Bu kırılma kriterinden gevrek malzemeler için deneylerle uyumlu sonuçlar elde edilmesine karşın sünek malzemede örneğin metal tipi malzemelerde uygun olmayan sonuçlar elde edilmektedir. Griffith kriterinin ortaya konmasından sonra pek çok teori önerilmiştir. En tanınmış çalışmalar Irwin [3, 4] ve Sander [5] tarafından yapılmıştır.

Irwin, çatlak ucunun yakın civarındaki gerilme alanını incelemeyi önermiştir. Çatlak ucunda gerilmenin sonsuz olduğunu kabul ederek gerilme durumunu belirleyen kritik değeri gerilme şiddeti çarpanı olarak tanımlamıştır.

Sander ise çatlak ucunu çevreleyen kapalı bir yol boyunca şekil değiştirme enerjisi integralini tanımlamıştır. Bu integral J- integrali olarak bilinir ve yoldan bağımsızdır. Bu teoriye göre J- integrali kritik bir değere ulaştığında çatlak yayılmaya başlayacaktır. Bu teorilerin hepsi Griffith teorisi ile ilişkilidir ve çatlak ucunda sonsuz gerilme yığılmasını kabul ederler. Gerilme şiddeti çarpanı , J- integrali ve kırılma mekaniğindeki diğer enerji yaklaşımlarındaki temel amaç klasik elastisite teorisinden kaynaklanan çatlak ucundaki tekil gerilme davranışından kaçınmaktır. Doğal olarak pek çok araştırmacı olası yeni teoriler düşünmeye başlamışlardır. Barenblatt [6], çatlak ucundan itibaren kohezyonlu bir bölgenin varlığını kabul ederek gerilmedeki tekilliği ortadan kaldırmıştır. Bu model çatlağın ilerisindeki muhtemel kırılma yüzeylerinin uygulanan yükün etkisi ile ayrılacağını ve ayrılmaya atomlar veya moleküler arası çekmenin karşı koyacağını söyler. Sih ve Liebowitz [7] ise büyük deformasyon teorilerini önermişlerdir. Lineer olmayan teori veya polar teoriler gibi diğer elastisite teorileri çatlak ucundaki gerilmenin sonluluğunu göstermek için uygulanmış fakat başarısız kalmışlardır. Bunun en makul nedenlerinden birisi olarak çatlağın ucundaki eğriliğin küçüklüğü gösterilmiştir. Bu eğrilik o kadar küçüktür ki süreklilik limitinin dışında kalmaktadır.

Yerel olmayan elastisite teorisi klasik elastisite teorisinin yetersiz kaldığı durumları gidermeyi amaçlayan bir teoridir. Bu teoride genel sürekli ortamlar mekaniğinin temel aksiyomları arasında yer alan ilkelere dayanmaktadır. Yalnızca yerel etkilerin gözönüne alındığı klasik teorilerin sürekli ortamlara uygulanması ile pek çok teorik ve uygulamalı problem çözülmüştür. Yerel sürekli ortamlar mekaniği iki temel aksiyomun özelleştirilmesi ile elde edilir. Bunlardan birincisi cismin tümü için doğru olan her eşitliğin, cismin istenildiği kadar küçük alınabilecek her maddesel parçası içinde geçerli olduğudur. İkincisi ise gerilme, ısı akısı gibi bağlı büyüklüklerin bağımsız büyüklüklerin yalnız aynı noktadaki değerlerine bağlı olacağı varsayımıdır. Klasik sürekli ortamlar mekaniği teorisi, cismin içinde etkilerin yayılma dalgasının boyu moleküler boyutlara inmeyen büyük dalga boylu dış etkiler olması durumunda başarılı bir biçimde kullanılabilir. Klasik teorisinin sonuçlarının deney sonuçlarına uymadığı durumlara bakıldığında bazı ortak noktalar gözlenir. Örneğin dalga yayılımı

problemlerinde yerel elastisite teorisi, uzun dalga boyu limitinde başarılı olduğu halde, kısa dalga boyu limitinde yani ultrasonik dalgalar için farklı sonuç vererek deneylerden elde edilen yayılım hızının frekansa bağlı olduğu dispersif dalga gerçeğini açıklayamaz. Dalga boylarının küçülerek malzemenin iç yapısında gözlenebilecek mikroskopik uzaklıklar mertebesine inmesi halinde atomik parçacıklar arasındaki etkileşimler önem kazanmaktadır. Benzer tür örnekler kırılma, dislokasyon mekaniği, sıvı kristallerin veya polimerlerin dinamiğinden de verilebilir. Dislokasyon mekaniğinde vida veya kenar dislokasyonları ve benzeri problemlerdeki gerilme tekillikleri [8-10], kırılma mekaniğinde özellikle çatlak problemlerindeki çatlak uçlarındaki gerilme tekillikleri [11-16] doğrudan doğruya klasik teori yardımı ile açıklanamaz. Klasik sürekli ortamlar mekaniğinin yetersiz kaldığı noktalar bazı karşılaştırmalarla aşağıdaki biçimde de açıklanabilir. Cismin iç yapısı ile ilgili karakteristik boy örneğin atomlar arası uzaklık (atomik mesafe) veya taneli cisimler için tane boyutu olan l alınabilir. Benzer şekilde dış tesirlere bağlanabilecek karakteristik boy yayılımın dalga boyu olan λ olarak alınırsa, $\lambda/l \gg 1$ olması halinde iç yapının önemi azalacağından yukarıda belirtildiği gibi klasik teori geçerli olur. Eğer $\lambda/l \sim 1$ ise yani dış etki iç yapı ile aynı mertebede karakteristik boya sahip ise artık iç yapı önem kazanmaktadır. Bu durumda klasik teori varsayımlarından uzaklaşan teorilere gereksinim vardır. Dolayısı ile yerel olmayan elastisite teorisi, sürekli ortamlar mekaniğinde yeni bir yaklaşımdır. İkinci varsayımı kabul etmeyerek, atomlar arası uzak erişimli kuvvetleri gözönüne almaktadır. Yerel olmayan teorinin gelişimi sırasında yapılan çalışmalar kısaca aşağıda verilmiştir.

Kunin [17] de mikroyapılı elastik ortamlar incelenmiştir. Körner [18] de ise çeşitli sürekli ortamlar mekaniği ile ilgili çeşitli teoriler arasında yerel olmayan teorinin yeri belirtilmektedir. Eringen [19], yerel olmayan polar elastik ortamlar için bünye denklemlerini elde ederek, özel hal olarak yerel olmayan elastitenin bünye denklemlerini çıkarmıştır. Eringen ve Edelen [20] de direkt mekanik ve varyasyonel yollarla elastik katılar ele alınarak benzer bünye denklemleri elde etmişlerdir. Eringen [21] nolu çalışmasında ise yerel olmayan lineer elastisite teorisi için denklemleri çıkarmış ve tek boyutlu elastik dalga yayılımı problemi ele alınarak fiziksel gerçeklere uygun, klasik yollarla elde edilemeyen

sonuçlar elde etmiştir. Yine Eringen [22] de yerel olmayan elastitenin sırası ile korunum yasaları, bünve denklemleri, alan denklemleri verilerek, birtakım dalga yayılımı problemlerine uygulanan çalışmalarından örnekler sunmuştur. Dislokasyon ve çatlak problemlerinin yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak çözümlerini içeren çalışmalar yapılmıştır. Daha sonra çatlak problemleri ile ilgili çalışmalardan söz edilecektir. Örneğin dislokasyon problemlerinin bu teori kullanılarak çözümleri için Eringen [23, 24] ile verilen çalışmalar gösterilebilir.

Yerel olmayan elastitenin temel varsayımlarından biri, bir noktadaki bağımlı değişken örneğin gerilme yalnızca o noktanın termoenerjik faktörüne bağılı değil de o noktanın belli yakınlığındaki tüm noktalarında termoenerjik faktörüne bağılı olacaktır. Elastik cismin sınırında da komşu noktalar arasında etkileşimler süreceğinden, klasik elastisite teorisinden alıştığımız biçimde komşu noktalarda birbirinden bağımsız yerdeğiştirme ve gerilme sınır koşullarının bulunması, genelde çok bağılı çözümü olmayan bir denklem sistemine yol açmaktadır. Bu nedenle kendi içinde uyumlu kabul edilebilir sınır koşullarının üretilmesi de yerel olmayan elastite teorisinin önemli bir kısmını oluşturmaktadır. Yerel olmayan denklemlere geçildiğinde çözüm uzayı genişletilmekte ve bu uzay içinde seçim yapabilmek için problemin fiziğinden kaynaklanan çeşitli kısıtlayıcı koşullar gerekmektedir. Bu kısıtların başında ise etkileşme uzaklığının sıfıra gitmesi ile yerel olmayan teori ile yerel teorisinin çakışması gelmektedir.

Aşağıda yerel olmayan elastisite teorisinin çatlak problemlerine uygulanması ile ilgili bazı çalışmalardan kısaca söz edilmiştir. Eringen ve Kim [25] çalışmalarında sonsuzda düzgün dağılı çekme gerilmesine maruz Griffith çatlaklarını incelemişlerdir. yerel olmayan etkileşmeleri çatlak doğrultusundaki eksen üzerinde varsayarak çatlak ucundaki gerilmeyi

$$\frac{t}{t_0} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2c}{a}}$$

şeklinde elde etmişlerdir. Burada t_0 sonsuzdaki çekme gerilmesini $2c$ çatlak uzunluğunu a ise atomik uzaklığı göstermektedir. Bu sonuca göre çatlak ucundaki gerilme yığılması sonludur, $a = 0$ ise yani süreklilik limitinde sonsuz olmaktadır. Bu $a = 0$ daki karekök tekilliği klasik teori ile aynıdır. Eringen [26]

ve [27] deki çalışmalarında sırası ile kaymaya ve düzlem dışı kaymaya maruz çatlak problemlerini inceleyerek yukarıdaki benzer sonuçlara ulaşmıştır. Yine Arı ve Eringen [28], Griffith çatlak problemini farklı bir etkileşme çekirdeği kullanılarak incelemişler ve benzer sonuçlar elde etmişlerdir. Ayrıca Eringen [29], dislokasyon ve çatlak etkileşmesi problemini inceleyerek yerel olmayan elastisite teorisinin üstünlüğünü göstermiştir. Benzer şekilde Eringen ve çalışma arkadaşları tarafından yapılan yerel olmayan elastik katılarda çatlak problemleri için [30], [31] nolu çalışmalardan söz edilebilir.

Bu çalışmada sonsuzda düzlem dışı kayma gerilmesine maruz lineer, izotrop sonsuz elastik katıda, doğrusal çift çatlak problemi incelenecektir. Elastik katı, homojen varsayıldığında problem süperpozisyon ilkesi kullanarak iki problemin toplamı şeklinde ayrılabilir. Birinci problem, içinde çatlak bulunmayan sonsuzda düzgün dağılı düzlem dışı kayma gerilmesine maruz sonsuz elastik katı cisim problemidir. Burada elastik katı homojen varsayıldığı için gerilme her yerde sabit olacaktır. İkinci problem ise sonsuzda yüksüz içinde çatlak yüzeylerine ters yönde etkiyen düzgün dağılı kayma gerilmesine maruz aynı düzlemde iki doğrusal çatlak ihtiva eden sonsuz elastik katı problemidir. Bu ve benzeri problemlerin çözümü matematikte karışık sınır değer problemlerinin çözümüne karşı gelmektedir. Sınır koşullarının sağlatılması ile elde edilen denklemleri analitik olarak çözmek oldukça zordur. Dolayısı ile burada ikinci problemin çözümü incelenmiştir.

Problemde sınır koşullarının sağlatılması ile üçlü integral denklemler elde edilmiştir. Bu denklemlerin çözümü uygun bir dönüşüm ile tekil Fredholm integral denkleminin çözümüne indirgenmiştir. Bu tekil Fredholm integral denklemini analitik olarak çözmek mümkün olamamıştır. Bu durum gerek integral denklemin tekil olması gerekse çekirdek fonksiyonun yapısından kaynaklanmaktadır. Burada klasik yani yerel teori kullanılarak bulunabilecek olan çözümün daha etkin olduğu varsayılmış çözüm fonksiyonu bir pertürbasyon serisine açılarak, tekil Fredholm integral denklemine yerleştirilmiş ve ardışık olarak çözülebilecek olan tekil integral denklemler elde edilmiştir. Bu tekil integral denklemler sonlu Hilbert dönüşümü uygulanarak çözülebilecek bir yapıya sahiptirler.

Dolayısı ile formel olarak bu denklemleri çözmek mümkün olmaktadır. Adım sayısı artırıldıkça problemin çözümü o derece zorlaşmaktadır. Burada sabit yükleme durumu için ilk iki adımda hesaplar yapılmıştır. Birinci adım için elde edilen çözüm klasik çözümdür. Yani elastisite teorisinden elde edilebilecek çözüme karşı gelmektedir. İlk iki adımda elde edilen çözümlerin toplamı yerel olmayan yapıyı ifade eden parametrenin çeşitli değerleri için hesaplanarak klasik çözüm ile karşılaştırılmıştır. Bu parametrenin küçük değerleri için toplam çözüm klasik çözüme yaklaşmaktadır. Bu ise yerel olmayan teoriden elde edilen çözüm ifadelerinin limit durumunda yerel teori ile elde edilebilecek olan çözüm ifadeleri ile çakışacağını göstermektedir. Daha sonra gerilme analizine geçilerek, sırası ile çift ve tek çatlak olması halleri için problem incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar kaynaklarda mevcut sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Yerel elastisite teorisinin aksine, çatlak uçlarında gerilme maksimum değerlere ulaşmasına rağmen sonlu bir değere sahiptir. Yerel olmayan yapıyı ifade eden parametre değeri sıfır alındığında klasik gerilme tekilliği oluşmaktadır. Yani çatlak ucu civarında gerilme değeri sonsuza gitmektedir.

Üçlü integral denklemler, çok bağlı bir denklem sistemidir. Bilinmeyen fonksiyon üç ayrı bölgede üç ayrı integral denklemi sağlayacak şekilde belirlenmelidir. İntegral denklemlerin çekirdek yapısına ve tanım aralığına bağlı olarak bu denklemlerin çözümü oldukça zordur. Bu nedenle genelde bu tür denklem sistemleri için yaklaşık çözüm metotlarına başvurulmaktadır. Özellikle izlenen yol bu denklemleri tek bir Fredholm integral denklemine ya da simültane Fredholm integral denklemlerine indirgeyerek çözmektir. Çok defa indirgenmiş integral denklemleri analitik olarak çözmek mümkün değildir. Dolayısı ile problemin yaklaşık çözümü ön plana çıkmaktadır. Tranter [32] iç basınç ile açılmaya çalışılan doğrusal çift çatlak problemini incelediği çalışmasında sınır koşullarından elde ettiği üçlü integral denklemleri dual seri denklemlere indirgemiş ve düzgün dağılı iç basınç özel hali için çözümü tamamlayabilmiştir. Daha sonra Cooke [33], [34] bu konuda çalışmalar yapmıştır. Cooke [33] deki çalışmasında Tranter [32] ile verilen üçlü integral denklemleri genelleştirerek Fredholm tipi integral denklemlere indirgemıştır. Bu yöntemi elektrostatik problemlere uygulamıştır. [34] deki çalışmasında ise Erdelyi ve Sneddon [35]

tarafından tanımlanan operatörler yardımı ile üçlü integral denklemleri çeşitli durumlar için incelemiştir. Lowengrub ve Srivastava [36] sonsuz uzunluklu elastik bir şerit içinde aynı düzlemde bulunan iki Griffith çatlak problemi incelemişlerdir. Sınır koşullarından elde edilen üçlü integral denklemleri tekil Fredholm integral denklemine indirgenmişlerdir. İndirgenmiş tekil Fredholm integral denkleminde çekirdek fonksiyonunu şerit genişliğini büyük varsayarak seriye açmışlar ve yaklaşık bir çözüm vermişlerdir. Srivastava, Palaiya ve Karaulia [37] çalışmalarında sonsuz uzunluklu elastik bir şeritte aynı düzlemde yerleşmiş iki Griffith çatlakları ile kayma dalgalarının etkileşimlerini incelemişlerdir. Elde ettikleri üçlü integral denklemleri Fredholm integral denklemine indirgeyerek sayısal olarak çözmüşlerdir. Tekil integral denklemlerle ilgili temel bilgiler ve elastisite teorisindeki uygulamaları [38, 39] ile verilmiştir. Tekil integral denklem sistemlerinin sayısal çözümleri için gerekli bilgiler [40] ile verilen çalışmadan elde edilebilir.

Sonuç olarak bu çalışmada yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak düzlem dışı kaymaya maruz sonsuz elastik bir katıda aynı düzlemde iki doğrusal çatlak problemi incelenmiştir. Problemin sınır koşullarından elde edilen üçlü integral denklemler tekil Fredholm integral denklemine indirgenmiştir. İndirgenmiş tekil Fredholm denkleminin çözümü için yukarıda kısaca açıklanmaya çalışılan çalışmalardan farklı olarak yaklaşık bir çözüm şeması verilmiştir. Çeşitli durumlar için gerilme analizi yapılarak gerek yerel gerekse yerel olmayan teoride çift çatlak ve tek çatlak özel hali için kaynaklarda mevcut olan çalışmalara uygun sonuçlar elde edilmiştir.

Bölüm 2 ayıt 2.1 de kısa bir giriş yapılarak ayıt 2.2 de yerel olmayan sürekli ortamlar için korunum yasalarının yerelleştirilmiş ifadeleri verilmiştir. Ayıt 2.3 de termodinamiğin II. yasası verilmiştir. Ayıt 2.4 de ise yerel olmayan elastik katıların bünye denklemlerine yer verilmiş ve ayıt 2.5 ise bünye denklemlerinin lineerleştirilmesine ayrılmıştır. Ayıt 2.6 da 2.5 de elde edilen homojen izotrop elastik katıların bünye denklemleri kullanılarak alan denklemleri elde edilmiştir.

Bölüm 3 ayıt 3.1 de çok kısa bir girişten sonra ayıt 3.2 de yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak çatlak probleminin formülasyonu yapılmış ve sınır

koşulları uygulanarak problemin çözümünü verecek olan üçlü integral denklemler elde edilmiştir. Ayıt 3.3 üçlü integral denklemin çözümüne ayrılmıştır.

Bölüm 4 gerilme analizine ayrılmıştır. Bu amaçla ayıt 4.1 deki girişte çatlakların bulundukları düzlemde yerel ve yerel olmayan elastisite teorisinde gerilme bünye denklemleri verilmiştir. Ayıt 4.2 de yerel elastisite teorisinde sırası ile çift ve tek çatlak olması halleri için çatlak ucu civarında gerilme analizi yapılmıştır. Ayıt 4.3 te yerel elastik çözüm ifadesi yerel olmayan elastitenin gerilme bünye denkleminde kullanılarak yine sırası ile çift ve tek çatlak olması hallerinde çatlak ucu civarında gerilme analizi yapılmıştır. Ayıt 4.4 de ise yerel olmayan elastisite teorisinde yerel olmayan katkıları içeren çözüm ifadesi de kullanılarak tek çatlak için gerilme analizi yapılmıştır.



BÖLÜM 2

YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE

2.1 GİRİŞ

Bu bölümde yerel olmayan elastisite teorisinin bünye ve alan denklemleri üzerinde durulmuştur. İlk ayıtta genel olarak sürekli ortamlar mekaniğinin korunum yasasının integral formdaki ifadesi kullanılarak yerel olmayan ortamlar için korunum (denklik) denklemlerinin yerelleştirilmiş ifadeleri verilmiştir. Sonraki ayıtta ise termodinamiğin II ci yasasının yerel olmayan ortamlardaki ifadesi verilmiştir. Diğer ayıtlarda ise sırası ile yerel olmayan elastik katıların bünye denklemleri ve bünye denklemlerinin lineerleştirilmiş ifadeleri verilmiştir. Son olarak lineerleştirilmiş bünye denklemleri kullanılarak lineer izotrop elastik katılar için alan denklemleri çıkarılmıştır.

2.2 KORUNUM DENKLEMLERİ

Bir maddesel cismin, $t = 0$ anında dik koordinat takımı X^K ($K = 1, 2, 3$) olan üç boyutlu Euclid uzayı E^3 ün, yine üç boyutlu, açık, basit bağımlı bir alt uzayının Euclid topolojisine göre kapanışı olan bir B bölgesini işgal ettiği kabul edilir. Yani cisim B bölgesi olarak düşünülür ve cismin maddesel noktaları, $t = 0$ anına karşı gelen X^K koordinatları ile ifade edilir. Böylece $t = 0$ anı maddesel cismin başlangıç durumu olarak alınmış olur.

Cismin hareketi, B bölgesinde X^K koordinatları ile verilen P noktasını, x^k ($k = 1, 2, 3$) dik koordinatlarına sahip p “uzaysal nokta” sına götüren

$$x^k = x^k(X^K, t), \quad \forall X^K \in B \quad (2.2.1)$$

tek parametrelili bir dönüşüm ile verilebilir. (2.2.1) dönüşümünün bire-bir ve tersinin olabilmesi için hareketin jakobiyenin sıfırdan farklı olması gereklidir. Yani

$$j = \det(x^k,_{,K}) > 0, \quad \forall t, X^K \in B \quad (2.2.2)$$

olmalıdır. (2.2.2) koşulu altında (2.2.1) ' in tersi

$$X^K = X^K(x^k, t), \quad \forall t, x^k \in V \quad (2.2.3)$$

şeklinde yazılabilir. V B ' nin (2.2.1) dönüşümü altındaki görüntüsüdür. Benzer şekilde ∂B sınır yüzeyinin görüntüsü S ile gösterilecektir. Burada

$$x^k, K = \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \quad X^K, k = \frac{\partial X^K}{\partial x^k} \quad \dot{v}^k = \frac{Dv^k}{Dt} = \frac{\partial v^k(\underline{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\underline{x}=\text{sabit}} = v^k, t + v^k_i \dot{x}^i$$

dir. $\frac{D}{Dt}$ maddesel türevi göstermektedir. Tekrarlanan indisler aksi söylenmedikçe indisler üzerinde toplamı gösterirler. Genel olarak sürekli ortamlar mekaniğinde, bir S yüzeyi ile sınırlı, V hacmine sahip bir cisim içinde $\underline{u}$ hızı ile ilerleyen bir $\sigma(t)$ süreksizlik yüzeyine sahip ise kaynağı ϕ ve akısı τ olan, skaler, vektör, tansör olabilen bir ψ büyüklüğü için korunum yasası integral formda

$$\frac{d}{dt} \int_{V-\sigma} \psi dV - \oint_{S-\sigma} \underline{\tau} \cdot d\underline{a} - \int_{V-\sigma} \phi dV \quad (2.2.4)$$

şeklinde yazılabilir. (2.2.4) ifadesinde genelleştirilmiş Green-Gauss teoremi kullanılığında korunum yasası,

$$\int_{V-\sigma} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v} - \underline{\tau}) - \phi \right\} dV + \int_{\sigma} [\phi(\underline{v} - \underline{u}) - \underline{\tau}] \underline{n} da = 0 \quad (2.2.5)$$

yazılabilir [41]. Burada $\underline{v}$ hız vektörüdür. $[]$ ise süreksizlik yüzeyi üzerinde ilgili büyüklüğün yüzeyin ilerleme yönündeki değer değişimini yani sıçramasını göstermektedir. Sürekli ortamlar mekaniğinde (2.2.5) ifadesi cismin her parçası için geçerlidir. Bu yüzden (2.2.5) in integrandını sıfıra eşitleyerek yerel korunum yasaları elde edilebilir. Yerel olmayan teoride ise yerelleştirme yani cismin her parçası için geçerli olma varsayımı biraz daha yumuşatılarak, yerel olmayan etkileşimleri de içerecek şekilde korunum yasası

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi v^k), k - \tau^k, k - \phi = \hat{\phi} \quad V - \sigma \text{ içinde}$$

$$[\psi(v^k - u^k) - \tau^k - \hat{\Phi}^k] n_k = 0 \quad \sigma \text{ üzerinde} \quad (2.2.6)$$

$$\int_{V-\sigma} \hat{\phi} dV + \int_{\sigma} [\hat{\Phi}^k] da_k = 0 \quad (2.2.7)$$

şeklinde verilir [22], [42]. Burada $\hat{\phi}$ ve $\hat{\Phi}^k$ alanları yerelleştirme artıklarını veya yerel olmayan etkileşimleri ifade ederler. Yerel teoride $\hat{\phi}$ ve $\hat{\Phi}^k$ alanları cismin her t anında bütün noktalarında ihmal edilmişlerdir. Eğer cismin bu yerelleştirme artıkları birbirinden bağımsız veya zayıf etkileşim içinde ise o zaman (2.2.7) ifadesi

$$\int_{V-\sigma} \hat{\phi} dV = 0 \quad \int_{\sigma} [\hat{\Phi}^k] da_k = 0 \quad (2.2.8)$$

şeklinde yazılabilir. Bu genel gösterilime göre çeşitli korunum yasaları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

i) Kütlenin korunumu : (2.2.6) ifadesinde $\psi = \rho$, $\tau^k = \phi = 0$ alındığında kütlenin korunumu yasası

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{,k} = \hat{\rho} \quad V - \sigma \text{ içinde}$$

$$[\rho(v^k - u^k) - \hat{R}^k]n_k = 0 \quad \sigma \text{ üzerinde} \quad (2.2.9)$$

$$\int_{V-\sigma} \hat{\phi} dV + \int_{\sigma} [\hat{\Phi}^k] da_k = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\hat{\rho}$ ve $\hat{R}^k$ büyüklükleri sırası ile $V - \sigma$ içinde ve σ üzerinde yerel olmayan kütle etkileşimlerini göstermektedir.

ii) Momentumun korunumu : (2.2.6) ifadesinde $\psi = \rho \underline{v}$, $\tau^k = \underline{t}^k$ ve $\phi = \rho \underline{f}$ alınırsa, momentumun korunumu yasası

$$\underline{t}_{,k}^k + \rho(\underline{f} - \underline{\dot{v}}) = \hat{\rho} \underline{v} - \rho \hat{\underline{f}} \quad V - \sigma \text{ içinde}$$

$$[\rho \underline{v}(v^k - u^k) - \underline{t}^k - \hat{\underline{F}}^k]n_k = 0 \quad \sigma \text{ üzerinde} \quad (2.2.10)$$

$$\int_{V-\sigma} \rho \hat{\underline{f}} dV + \int_{\sigma} [\hat{\underline{F}}^k] da_k = 0$$

şeklinde elde edilir. Burada $\rho \hat{\underline{f}}$ ve $\hat{\underline{F}}^k$ sırası ile $V - \sigma$ içinde ve σ üzerindeki yerel olmayan kuvvet etkileşimlerini göstermektedir. $\underline{t}^k$ gerilme vektörü, $\underline{f}$

birim kütle başına cisim kuvvetidir. Gerilme vektörü $\underline{t}^k$, t^{kl} gerilme tansörü cinsinden

$$\underline{t}^k = t^{kl} \underline{i}_l \quad (2.2.11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\underline{i}_l$, $\underline{x}^k$ uzaysal sistemdeki birim baz vektörüdür.

iii) Momentum momentinin korunumu : Yine (2.2.6) ifadesinde $\psi = \underline{x} \times \rho \underline{v}$, $\underline{\tau}^k = \underline{x} \times \underline{t}^k$, $\hat{\phi} = \underline{x} \times \rho \underline{f}^k$, $\hat{\Phi}^k = \underline{x} \times \hat{F}^k$ alınarak, (2.2.9) ve (2.2.10) ifadeleri kullanıldığında

$$\underline{i}_k \times \underline{t}^k \quad \text{veya} \quad t^{kl} = t^{lk} \quad (2.2.12)$$

$$\int_{V-\sigma} \underline{x} \times \rho \underline{f} dV + \int_{\sigma} \underline{x} \times \hat{F}^k da_k$$

elde edilir. Burada gerilme tansörünün simetrik olduğu ortaya çıkmaktadır. Geneline yerel olmayan teoride gerilme tansörü simetrik değildir. Bu klasik sonuç yerel olmayan teoride momentumun momentinin korunumunda ortaya çıkan $\hat{\phi}$, $\hat{\Phi}$ artıklarının yukarıdaki gibi özel seçiminden kaynaklanmaktadır. Aynı nedenle $[x] = 0$ gerçeğinden yani hareketin σ süreksizlik yüzeyi boyunca sürekli olduğu varsayımından dolayı sıçrama koşulu özdeş olarak sağlatılabilir.

iv) Enerjinin korunumu : Yerel olmayan teoride enerjinin korunumunu elde etmek için yine (2.2.6) ifadesinde

$$\psi = \rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho \underline{v} \cdot \underline{v}, \quad \underline{\tau}^k = \underline{t}^k \cdot \underline{v} + q^k, \quad \phi = \rho \underline{f} \cdot \underline{v} + \rho h, \quad \hat{\phi} = \rho \hat{h}, \quad \hat{\Phi}^k = \hat{H}^k$$

alınır ve (2.2.9) ve (2.2.10) ifadeleri kullanılır ise

$$\rho \dot{\epsilon} - \underline{t}^k \cdot \underline{v}_{,k} - q^k_{,k} - \rho h + \hat{\rho} \left(\epsilon - \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} \right) + \rho \hat{f} \cdot \underline{v} = \rho \hat{h} \quad V - \sigma \text{ içinde}$$

$$\left[\left(\rho \epsilon + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} \right) (v^k - u^k) - \underline{t}^k \cdot \underline{v} - q^k - \hat{H}^k \right] n_k = 0 \quad \sigma \text{ üzerinde}$$

$$\int_{V-\sigma} \rho \hat{h} dV + \int_{\sigma} [\hat{H}^k] da_k = 0 \quad (2.2.13)$$

sonuçları elde edilir. Burada ϵ birim kütle başına iç enerji yoğunluğu, q^k yüzey enerji akısı, h ise birim kütle başına enerji kaynağıdır. (2.2.9), (2.2.10), (2.2.12) ve (2.2.13) ifadeleri yerel olmayan sürekli ortamların temel korunum yasalarıdır. Bu korunum yasaları cisimlerin geometrileri ve yapıları düşünülmezsizin her çeşit cisim için geçerlidir. Yerel olmayan artık terimler ihmal edildiğinde yerel korunum yasaları elde edilir. Bazı yumuşatıcı varsayımlarla yerel korunum yasaları yerel olmayan teoride de kullanılabilir.

2.3 TERMODİNAMİĞİN II. YASASI

Termodinamiğin ikinci yasası yani entropinin artımı yasasının integral formdaki ifadesi (2.2.4) ifadesi ile benzer yapıdadır. Yalnızca eşitlik yerine eşitsizlik kullanılacaktır. Bu nedenle

$$\psi = \rho\eta, \quad \tau^k = \frac{q^k}{\theta}, \quad \phi = \frac{\rho h}{\theta}$$

tanımları ile (2.2.6) ve (2.2.7) den

$$\rho\hat{\eta} - \left(\frac{q^k}{\theta}\right)_{,k} - \frac{\rho h}{\theta} \geq \rho\hat{b} - \hat{\rho}\eta$$

$$[\rho\eta(\underline{v}^k - \underline{u}^k) - \frac{q^k}{\theta} - \hat{B}^k]n_k \geq 0 \quad (2.3.1)$$

$$\int_{V-\sigma} \rho\hat{b}dV + \int_{\sigma} [\hat{B}^k]da_k \geq 0$$

sonuçları elde edilir. Burada η ve θ sırası ile birim kütle başına entropi yoğunluğu ve mutlak sıcaklıktır. $\hat{b}$ ve $\hat{B}$ ise sırası ile hacim ve yüzeyin yerel olmayan artıkları veya yerelleştirme artıklarıdır. Burada

$$\theta > 0, \quad \inf \theta = 0$$

dır. (2.3.1) ifadesinde

$$\psi = \epsilon - \theta\eta \quad (2.3.2)$$

şeklinde Helmholtz serbest enerji fonksiyonun tanımı kullanılır ve (2.2.13)₁ denkleminde h ' bulunarak (2.3.1) de yerine konursa

$$-\frac{\rho}{\theta}(\hat{\psi} + \hat{\theta}\eta) + \frac{1}{\theta} \hat{t}^k \cdot \hat{v}_{,k} + \frac{1}{\theta^2} q^k \theta_{,k} - \frac{\hat{\rho}}{\theta}(\psi - \frac{1}{2}(\hat{v} \cdot \hat{v})) \quad (2.3.3)$$

$$-\frac{\rho}{\theta} \hat{f} \cdot \hat{v} + \rho(\frac{\hat{h}}{\theta} - \hat{b}) \geq 0 \quad V - \sigma \quad \text{içinde}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.3.3) sonucu Clausius-Duhem eşitsizliğinin genelleştirilmiş şeklidir. Bünye denklemlerinin elde edilmesinde (2.3.3) eşitsizliğinin sağlatılmasının önemli bir yeri vardır. (2.3.3) eşitsizliği termodinamik büyüklüklerin süreksizlik göstermesi veya tekilliklerin olması durumunda ve faz geçişlerinde geçerli değildir.

2.4 YEREL OLMAYAN ELASTİK KATILARIN BÜNYE DENKLEMLERİ

Yerel olmayan teori ile elastik katıların hareketinin belirlenmesi için ayıt 2.2 de formülasyonu verilen korunum yasalarının yanı sıra katının yapısını yansıtan bünye denklemlerine gereksinim vardır. Bunun için bünye bağımlı değişkenleri t_{kl} , q^k , ψ ve η 'ya ek olarak yerel olmayan artıkları ifade eden $\hat{\rho}$, $\hat{f}$, $\hat{h}$ larında belirlenmesi gereklidir. Böylece bir anlamda klasik bünye denklemleri bütün noktalardaki alan etkilerini içerecek şekilde genelleştirilmiş olacaktır. Yerel olmayan elastik katıların bünye bağımlı değişkenleri formel olarak

$$\psi = \psi(\hat{x}', \hat{x}'_{,K}, \theta') \quad (2.4.1)$$

şeklinde gösterilebilir. Buradaki üs işareti cismin bütün X' noktalarındaki fonksiyonel bağılılığı göstermektedir. Yani

$$\hat{x}' \equiv x(X', t) \quad \hat{x}'_{,K} \equiv x_{,K}(X', t) \quad \theta' \equiv \theta(X', t)$$

yerel değişkenler ise

$$\hat{x} \equiv x(X, t) \quad \hat{x}_{,K} \equiv x_{,K}(X, t) \quad \theta \equiv \theta(X, t)$$

şeklinde gösterilmektedir. Şekilsel olarak (2.4.1) de verilen form bünye bağımlı değişkenleri t^k , q^k ve η için yazılacaktır. Yerel olmayan artıklar, bünye bağımlı değişkenlerindeki argümanların bazılarına bağlı olmayabilir.

i) Yerel olmazlık aksiyomu : Yerel olmayan artıklar cismin $\underline{X}$ deki durumuna açık olarak bağlı değildir. Bu artıklar cismin bütün $\underline{X}'$ noktalarının $\underline{X}$ noktasına olan etkisi sonucu ortaya çıktıklarına göre bunlar ancak $\underline{X}'$ noktaları ile $\underline{X}$ maddesel noktası arasındaki farka bağlı olabilirler. Örnek olarak Newton mekaniğinde iç atomik kuvvetlerin yalnız $\underline{x}$ in bir fonksiyonu değil $|\underline{x}' - \underline{x}|$ uzaklığının bir fonksiyonu olduğu gösterilebilir.

ii) Objektivite aksiyomu : Objektivite aksiyomuna göre bünye bağımlı değişkenleri ve yerel olmayan artıklar, uzaysal koordinat sisteminin keyfi zamana bağlı hareketleri ve zaman değişimleri altında şekilsel değişmez kalmalıdır. Bu aksiyom

$$\bar{\underline{x}}(\underline{X}, \bar{t}) = \underline{Q}(t) \underline{x}(\underline{X}, t) + \underline{b}(t) \quad \underline{Q} \underline{Q}^T = \underline{Q}^T \underline{Q} = I \quad \det \underline{Q} = 1 \quad \bar{t} = t - a \quad (2.4.2)$$

şeklinde yazılabilir. Yerel olmayan artıklar uzun erişimli iç atomik etkilerin sonucu olarak ortaya çıktıklarından cismin keyfi rijit hareketlerinde değişmezler. Objektivite aksiyomu gereğince ψ bünye bağımlı değişkenin şekilsel değişmez kalması için

$$\psi(\underline{Q} \underline{x}' + \underline{b}, \underline{Q} \underline{x}'_{,K}, \theta') = \psi(\underline{x}', \underline{x}'_{,K}, \theta')$$

koşulunu gerçeklemelidir. Bu koşul gereği keyfi $\underline{b}$ öteleme vektörlerinin ψ nin $\underline{x}'$ nün fonksiyoneli değil de $\underline{x} \equiv \underline{x}' - \underline{b}$ ' in bir fonksiyoneli olması sonucunu doğurur. $(2.4.2)_{2,3}$ ' ü sağlayan keyfi $\underline{Q}$ lar yani dönmeler için ψ fonksiyoneli

$$\underline{x}' \cdot \underline{x}', \quad C'_K = \underline{x}' \cdot \underline{x}'_{,K}, \quad C'_{KL} \equiv \underline{x}'_{,K} \cdot \underline{x}'_{,L} \quad (2.4.3)$$

şeklinde skaler çarpımlarla tanımlanan fonksiyonların fonksiyoneli olmalıdır. $(2.4.3)_1$ deki skaler çarpım C'_K ve C'_{KL} cinsinden

$$\underline{x}' \cdot \underline{x}' = (C'_K \underline{x}'^K) \cdot (C'_L \underline{x}'^L) = C'_K C'_L C'^{KL}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece ψ

$$\psi = \psi(C'_K, C'_{KL}, \theta') \quad (2.4.4)$$

şeklinde ifade edilir. Yerel etkiler ayrıldığında $(2.4.4)$ ifadesi

$$\psi = \psi(C'^X_K, C'^X_{KL}, \theta'^X; C_{KL}, \theta) \quad (2.4.5)$$

şeklini alır. Burada

$$C_{KL}'^{\tilde{X}} = C_{KL}' - C_{KL}, \quad \theta'^{\tilde{X}} = \theta' - \theta, \quad C_K'^{\tilde{X}} = C_K' - C_K \quad (2.4.6)$$

dır. Ayrıca

$$F' \equiv \{C_K'^{\tilde{X}}, C_{KL}'^{\tilde{X}}, \theta'^{\tilde{X}}\} \quad G \equiv \{C_{KL}', \theta\} \quad (2.4.7)$$

tanımı ile (2.4.5) ifadesi

$$\psi = \psi(F'; G) \quad (2.4.8)$$

şeklinde yazılabilir. Burada F' ve G fonksiyonlarının argümanlarına göre sürekli ve türevlerinin var olduğu kabul edilir. F' fonksiyonellerinin oluşturduğu uzay lineer normlu bir uzay varsayılmıştır. Gerçekten bu uzay bir H Hilbert uzayı olarak alınabilir [22],[42]. F'_1 ve F'_2 iki fonksiyonelin iç çarpımı

$$\langle F'_1, F'_2 \rangle = \int_{V-\Sigma} H(|\tilde{X}' - \tilde{X}|) F'_1(\tilde{X}') F'_2(\tilde{X}') dV(\tilde{X}') \quad (2.4.9)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $H(|\tilde{X}' - \tilde{X}|)$, $|\tilde{X}' - \tilde{X}|$ uzaklığı ile pozitif olarak azalan bir fonksiyondur. $H(|\tilde{X}' - \tilde{X}|)$ etki fonksiyonu yardımı ile $\tilde{X}$ noktasına civarındaki maddesel noktaların hareketlerinin etkisi gösterilmektedir. Bu etkiler $\tilde{X}$ den yeterince uzaklaşıldığında yok olurlar. H etki fonksiyonu olarak

$$H(|\tilde{X}' - \tilde{X}|) = \exp\{-\alpha(\tilde{X})|\tilde{X}' - \tilde{X}|\}, \quad \alpha(\tilde{X}) > 0 \quad (2.4.10)$$

$$H(|\tilde{X}' - \tilde{X}|) = \{1 + K(\tilde{X})|\tilde{X}' - \tilde{X}|\}^{-1}, \quad K(\tilde{X}) > 0$$

örnekleri verilebilir. Çeşitli etki fonksiyonları fiziksel gerçeklere dayanılarak atomik lattis dinamiği teorisi yardımı ile verilmiştir [28], [43]. (2.4.10)_{1,2} den gözlenebileceği gibi $H(0) = 1$ dir. Bir $\psi(F')$ fonksiyoneli için $\delta\psi(F'|\Omega')$ Fréchet türevi

$$\lim_{\|\Omega'\|_H} |\psi(F' + \Omega') - \psi(F') - \delta\psi(F'|\Omega')| = 0 \quad F', \Omega' \in H \quad (2.4.11)$$

ve $\|\Omega'\|_H$ normu

$$\|\Omega'\|_H = \langle \Omega', \Omega' \rangle_H^{1/2} \quad (2.4.12)$$

şeklinde tanımlanır. Fréchet türevi de bir lineer fonksiyonel olduğundan F', Ω' lineer fonksiyonelleri Hilbert uzayının elamanlarıdır. Dolayısı ile Riesz-Fréchet gösterilim teoremi yardımı ile $\delta\psi(F'|\Omega')$ Fréchet türevi

$$\delta\psi(F'|\Omega') = \int_{V-\Sigma} \frac{\delta\psi}{\delta F'}(F'; \underline{X}') \Omega'(\underline{X}') dV(\underline{X}') \quad (2.4.13)$$

şeklinde bir iç çarpım ile ifade edilebilir [44]. Burada $\frac{\delta\psi}{\delta F'}$, F' ve $\underline{X}'$ fonksiyonlarının bir fonksiyonelidir. V ve Σ ise sırası ile cismin $t = 0$ anına karşı gelen hacmini ve süreksizlik yüzeyini göstermektedirler. Benzer şekilde ψ ve G 'ye göre de sürekli ve türetilebilir olduğu kabul edilir. Buna göre ψ 'nin zamana göre türevi

$$\dot{\psi} = \frac{\delta\psi}{\delta G} \dot{G} + \int_{V-\Sigma} \frac{\delta\psi}{\delta F'}(F'; G, \underline{X}') \dot{F}'(\underline{X}') dV' \quad (2.4.14)$$

yazılabilir. Burada kısalık amacı ile

$$dV(\underline{X}') = dV' \quad (2.4.15)$$

yazılmıştır. Şimdi (2.4.8) ele alınarak (2.3.3) eşitsizliği yeniden yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho}{\theta} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \int_{V-\Sigma} \frac{\delta\psi}{\delta\theta' \underline{X}'} dV' + \eta \right) \dot{\theta} + \frac{1}{\theta} [t^{k,l} - 2\rho \left(\frac{\partial\psi}{\partial C_{KL}} \right. \\ & \quad \left. - \int_{V-\Sigma} \frac{\delta\psi}{\delta C_{KL}' \underline{X}'} \right) x_{,K}^k x_{,l}^l] v_{l,k} - \frac{\hat{\rho}}{\theta} \left(\psi - \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} \right) \\ & \quad - \frac{\rho}{\theta} \left(\hat{f}^k - \int_{V-\Sigma} \frac{\delta\psi}{\delta C_K' \underline{X}'} x_{,K}^k dV' \right) v_k + \frac{1}{\theta^2} q^k \theta_{,k} \\ & \quad - \frac{\rho}{\theta} \int_{V-\Sigma} \left\{ \frac{\delta\psi}{\delta\theta' \underline{X}'} \dot{\theta}' + \frac{\delta\psi}{\delta C_{KL}' \underline{X}'} \dot{C}_{KL}' + \frac{\delta\psi}{\delta C_K' \underline{X}'} [v_k' + (x_l' - x_l) v_{,k}^l] x_{,k}^k \right\} dV' \\ & \quad + \frac{\rho \hat{h}}{\theta} - \rho \hat{b} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik v_k kuadratiği ve $\dot{\theta}$, $v_{l,k}$, θ_k cinsinden lineerdir. Bünye bağımlı değişkenleri ve yerel olmayan artıklar, bu değişkenlerin değişimlerinden

etkilenmemelidir. Buna göre öncelikle (2.4.16) dan

$$\begin{aligned}\eta &= -\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \int_{V-\Sigma} \frac{\delta\psi}{\delta\theta'^X} dV' \\ t^{kl} &= 2\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial C_{KL}} - \int_{V-\Sigma} \frac{\delta\psi}{\delta C'_{KL}}\right) x^k_{,K} x^l_{,l} \\ q^k &= 0\end{aligned}\tag{2.4.17}$$

$$\hat{f}^k = \int_{V-\Sigma} \frac{\delta\psi}{\delta C'_K} x'^k_{,K} dV'$$

$$\hat{\rho} = 0$$

sonuçları elde edilir. Burada $\theta > 0$ ve (2.2.9)₃ denklemi ile $\hat{\rho} = 0$ sonucuna ulaşılmıştır. (2.4.17) sonuçlarına göre (2.4.16) eşitsizliğinin sağlanabilmesi için

$$\frac{\rho}{\theta}(\hat{h} - \hat{D}) - \rho\hat{b} \geq 0\tag{2.4.18}$$

gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Burada $\hat{D}$ yerel olmayan disipasyon fonksiyonudur ve

$$\hat{D} \equiv \int_{V-\Sigma} \left\{ \frac{\delta\psi}{\delta\theta'^X} \dot{\theta}' + \frac{\delta\psi}{\delta C'_{KL}} \dot{C}'_{KL} + \frac{\delta\psi}{\delta C'_K} [v'_k + (x'_l - x_l)v''_{,k}] x'^k_{,k} \right\} dV' \tag{2.4.19}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Objektivite aksiyomu gereğince $\hat{h}$ ve $\hat{b}$ de cismin rijit hareketi altında şekilsel değişmez kalmalıdır. Bunun sonucu olarak $\hat{D}$ da şekilsel değişmez olmalıdır. Buradan

$$\frac{\delta\psi}{\delta C'_K} = 0\tag{2.4.20}$$

elde edilir. Dolayısı ile ψ , C'_K 'ya bağlı değildir. Bu sonuç (2.4.17) de kullanılırsa $\hat{f} \equiv 0$ olduğu ortaya çıkar. Böylece bünye bağımlı değişkenlerini

$$\psi = \psi(C'_{KL}, \theta'^X; C_{KL}, \theta), \quad \hat{f} = 0\tag{2.4.21}$$

şeklinde yazabiliriz. Sonuç olarak termodinamiğin ikinci yasasının ve objektivite aksiyomunun gerçekleştirilmesi için (2.4.18) ve (2.4.20) koşullarının sağlanması

gerektiği düşünülerek yerel olmayan teori ile elastik katıların bünye denklemleri (2.4.17) ifadeleri ile verilirler.

2.5 BÜNYE DENKLEMLERİNİN LINEERLEŞTİRİLMESİ

Lineer yerel olmayan elastitenin bünye denklemlerini elde edebilmek için bünye denklemlerini değişkenlerine lineer bağlı ifadeler şeklinde yazmak gerekir. Bünye denklemlerinin bağımlı oldukları değişkenler fonksiyonlar ise bu fonksiyonları lineer fonksiyonlar, bağımlı oldukları değişkenler fonksiyoneller ise katsayıları ilgili değişkenlerin lineer fonksiyonları olan fonksiyoneller olarak yazılmalıdır. Bu amaçla $\rho_0 \psi$,

$$\begin{aligned} \rho_0 \psi = \Sigma = \Sigma_0(\zeta, \theta, \underline{X}) + \int_{V-\Sigma} [\Sigma'_0(\zeta, \theta, \underline{X}, \underline{X}') \theta'^{\underline{X}}(\underline{X}') \\ + \Sigma'^{KL}_2(\zeta, \theta, \underline{X}, \underline{X}') C'^{\underline{X}}_{KL}(\underline{X}')] dV' \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

şeklinde yazılır ve (2.4.17)_{1,2} ifadelerinde kullanılacak olursa

$$\begin{aligned} \eta = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho_0} \int_{V-\Sigma} \left[\frac{\partial \Sigma'_0}{\partial \theta} (\theta' - \theta) + \frac{\partial \Sigma'^{KL}_2}{\partial \theta} (C'_{KL} - C_{KL}) - \Sigma'_0 \right] dV' \\ T^{KL} \equiv \frac{\rho_0}{\rho} t^{kl} X^K_{,k} x^L_{,l} = 2 \frac{\partial \Sigma_0}{\partial C_{KL}} + 2 \int_{V-\Sigma} \left[\frac{\partial \Sigma'_0}{\partial C_{KL}} (\theta' - \theta) \right. \\ \left. + \frac{\partial \Sigma'^{MN}_2}{\partial C_{KL}} (C'_{MN} - C_{MN}) - \Sigma'^{KL}_2 \right] dV' \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

elde edilir. Lineerleştirmek için (2.5.1) deki katsayı fonksiyonları

$$\Sigma_0 = \Sigma_{00} + \Sigma^{KL}_{01} E_{KL} + \frac{1}{2} \Sigma^{KLMN}_{02} E_{KL} E_{MN}$$

$$\Sigma'_0 = \Sigma'_{00} + \Sigma'^{KL}_{01} E_{KL} \quad (2.5.3)$$

$$\Sigma'^{KL}_2 = \Sigma'^{KL}_{20} + \frac{1}{2} \Sigma'^{KLMN}_{21} E_{MN}$$

şeklinde seçilebilir. Burada Σ_{00} , Σ_{01}^{KL} , Σ_{02}^{KLMN} θ ve $\mathcal{X}$ in Σ'_{00} , Σ'_{01}^{KL} , Σ'_{20}^{KL} ve Σ'_{21}^{KLMN} , θ , $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{X}'$ nün fonksiyonlarıdır. Ayrıca

$$\Sigma_{01}^{KL} = \Sigma_{01}^{LK}, \quad \Sigma_{02}^{KLMN} = \Sigma_{02}^{LKMN} = \Sigma_{02}^{MNKL}$$

$$\Sigma'_{01}^{KL} = \Sigma'_{01}^{LK}, \quad \Sigma'_{20}^{KL} = \Sigma'_{20}^{LK} \quad (2.5.4)$$

$$\Sigma'_{21}^{KLMN} = \Sigma'_{21}^{LKMN} = \Sigma'_{21}^{MNKL}$$

simetri özellikleri yazılabilir. Bilindiği gibi lineer teoride [45]

$$C_{KL} \cong \delta_{KL} + 2E_{KL} = \delta_{KL} + U_{K,L} + U_{L,K} \quad (2.5.5)$$

dir. Burada U_K yerdeğiştirme vektörü bileşenidir.

$$\begin{aligned} \eta = & -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma_{00}}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma_{01}^{KL}}{\partial \theta} E_{KL} - \frac{1}{\rho_0} \int_{V-\Sigma} \left[\frac{\partial \Sigma'_{00}}{\partial \theta} (\theta' - \theta) \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Sigma'_{20}^{KL}}{\partial \theta} (E'_{KL} - E_{KL}) - \Sigma'_{00} - \Sigma'_{01}^{KL} E_{KL} \right] dV' \\ t^{kl} = & \frac{\rho}{\rho_0} \{ \Sigma_{01}^{KL} + \Sigma_{02}^{KLMN} E_{MN} + \int_{V-\Sigma} [\Sigma'_{01}^{KL} (\theta' - \theta) \\ & + \Sigma'_{21}^{KLMN} (E'_{MN} - E_{MN}) - 2\Sigma'_{20}^{KL} - \Sigma'_{21}^{KLMN} E_{MN}] dV' \} x^k_K x^l_L \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

elde edilir. Lineer teori için

$$\frac{\rho}{\rho_0} \cong 1 - e^k_k \quad e_{kl} \cong \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad r_{kl} \cong \frac{1}{2}(u_{k,l} - u_{l,k})$$

$$x^k_K \cong (\delta_{MK} + U_{M,K}) \delta^M_k \quad X^K_{,k} \cong (\delta_{mk} - u_{m,k}) \delta^m_K \quad (2.5.7)$$

$$E_{KL} \cong e_{kl} x^k_K x^l_L \quad u^k \cong U^K \delta^k_K$$

yaklaşımları kullanılabilir [45]. Burada δ_K^k , δ_k^K koordinat çeviricilerini ve δ_{MK} Kronecker deltasını, e_{kl} ve r_{kl} ise sırası ile Euler şekil değiştirme ve dönme tansörlerini göstermektedir. (2.5.6)₂ denkleminde (2.5.7) ile verilen yaklaşımlar kullanılır ve lineer olmayan terimler atılırsa

$$t^{kl} = \alpha^{kl}(1 - e_r^r) + \alpha^{km}(e_m^l + r_m^l) + \alpha^{lm}(e_m^k + r_m^k) + \sigma^{klmn}e_{mn} + \int_{v-\sigma} [\sigma'^{kl}(\theta' - \theta) + \sigma'^{klmn}e'_{mn}]dv' \quad (2.5.8)$$

sonucu elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \alpha^{kl} &\equiv (\Sigma_{01}^{KL} - 2 \int_{V-\Sigma} \Sigma_{20}'^{KL} dV') \delta_K^k \delta_L^l \\ \sigma^{klmn} &\equiv (\Sigma_{02}^{KLMN} - 2 \int_{V-\Sigma} \Sigma_{21}'^{KLMN} dV') \delta_K^k \delta_L^l \delta_M^m \delta_N^n \\ \sigma'^{kl} &\equiv \Sigma_{01}'^{KL} \delta_K^k \delta_L^l \\ \sigma'^{klmn} &\equiv \Sigma_{21}'^{KLMN} \delta_K^k \delta_L^l \delta_M^m \delta_N^n \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

tanımları kullanılmıştır. Ayrıca dv' ile dV' nün uzaysal koordinatlardaki ifadesi gösterilmektedir.

$$dV' = \left(\frac{\rho'}{\rho}\right) dv' \cong (1 - e'_{kk}) dv'$$

dir. Sıcaklığın cismin tümünde düzgün dağılı olduğu varsayıldığında (2.5.8) denklemi

$$t^{kl} = \alpha^{kl}(1 - e_r^r) + \alpha^{km}(e_m^l + r_m^l) + \alpha^{lm}(e_m^k + r_m^k) + \sigma^{klmn}e_{mn} + \int_{v-\sigma} \sigma'^{klmn}e'_{mn}]dv' \quad (2.5.10)$$

şeklinde yazılabilir. (2.5.10) denklemi izotermal anizotropik homojen olmayan elastik katılar için yerel olmayan teori ile elde edilen bünye denklemdir. Burada

$\alpha(\underline{x})$, $\sigma^{klmn}(\underline{x})$ malzeme fonksiyonları ile yerel olmayan etkileşimleri ifade eden $\sigma'^{klmn}(\underline{x}, \underline{x}')$ fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \alpha^{kl} &= \alpha^{lk}, & \sigma^{klmn} &= \sigma^{lkmn} = \sigma^{klnm} = \sigma^{mnlk} \\ \sigma'^{klmn} &= \sigma'^{lkmn} = \sigma'^{klnm} = \sigma'^{mnlk} \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

şeklinde simetrilere sahiptirler. İzotrop katılar için

$$\begin{aligned} \alpha^{kl} &= \alpha \delta^{kl}, & \sigma^{klmn} &= \lambda \delta^{kl} \delta^{mn} + \mu (\delta^{km} \delta^{ln} + \delta^{kn} \delta^{lm}) \\ \sigma'^{klmn} &= \lambda' \delta^{kl} \delta^{mn} + \mu' (\delta^{km} \delta^{ln} + \delta^{kn} \delta^{lm}) \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

dir. (2.5.12) ifadeleri (2.5.10) denkleminde yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned} t_{kl} &= \alpha (1 - e_r^r) \delta_{kl} + \lambda e_{rr} \delta_{kl} + 2(\mu + \alpha) e_{kl} \\ &+ \int_{v-\sigma} (\lambda' e_{rr}' \delta_{kl} + 2\mu' e_{kl}') dv' \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

denklemini elde edilir. (2.5.13) denklemini izotrop elastik katıların yerel olmayan teori ile elde edilen bünge denklemleridir. λ , μ , α sadece $\underline{x}$ in fonksiyonları, λ' , μ' ise $\underline{x}$ ve $\underline{x}'$ nün fonksiyonlarıdır. Eğer doğal durumda cisim gerilmemiş ise yani ön gerilme yok ise $\alpha \equiv 0$ olur. Malzeme homojen ise α , μ , λ sabit μ' , λ' ise $|x_k - x'_k|$ 'nün fonksiyonlarıdır. Yani

$$\lambda' = \lambda'(|x_k - x'_k|), \quad \mu' = \mu'(|x_k - x'_k|) \quad (2.5.14)$$

Burada λ' , μ' malzeme fonksiyonları $|x_k - x'_k|$ uzaklığı arttıkça hızla azalan yapıdadır. Örneğin

$$\lambda' = \lambda_0 \exp(-k|\underline{x} - \underline{x}'|) \quad \text{reel } k > 0 \quad (2.5.15)$$

bu özelliği gösteren bir fonksiyondur. Bazen (2.5.13) denklemini

$$t_{kl} = \int_{v-\sigma} (\lambda' e_{rr}' \delta_{kl} + 2\mu' e_{kl}') dv' \quad (2.5.16)$$

şeklinde yazmak daha uygun olabilir. Bu halde tanımlanan λ' ve μ' fonksiyonları klasik limitte λ ve μ malzeme katsayılarını veren türde fonksiyonlardır. λ' ve μ' fonksiyonları

$$(\lambda', \mu') = (\lambda, \mu) \alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|) \quad (2.5.17)$$

ve

$$\int_{v-\sigma} \alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|) dv' = 1 \quad (2.5.18)$$

şeklinde tanımlandığında (2.5.16) denklemi

$$t_{kl} = \int_{v-\sigma} \alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|) \sigma'_{kl} dv' \quad (2.5.19)$$

şeklinde yazılabilir. Burada σ'_{kl} gerilme tansörüdür ve Hooke yasası ile

$$\sigma'_{kl} = \sigma_{kl}(\underline{x}') = \lambda e_{rr}(\underline{x}') \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}(\underline{x}') \quad (2.5.20)$$

şeklinde tanımlanır. $\alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|)$ çekirdek fonksiyonu etki fonksiyonudur. Çeşitli $\underline{x}'$ noktalarındaki şekil değiştirmelerin $\underline{x}$ noktasına etkilerini ifade etmektedir. $\alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|)$ fonksiyonu komşuluk hafıza aksiyomuna uygun olarak maksimum değerini $\underline{x} \equiv \underline{x}$ de aldığı ve $\underline{x}$ den uzaklaştıkça suretle azaldığı varsayılır. (2.5.19) denkleminde $\alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|)$ fonksiyonun boyutunun

$$[(\alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|))] = \text{gerilme}/(\text{uzunluk})^3$$

olduğu görülebilir. Dolayısı ile bu fonksiyonun bir ϵ uzaklık ölçeğine bağlılığı açıktır. Bu bir iç karakteristik uzunluktur. Lattis dinamiğinden yararlanarak çeşitli etki fonksiyonları elde edilebilir. Uygun bir lattis parametresi a olmak üzere tek kristaller için ϵ

$$\epsilon = e_0 a \quad (2.5.21)$$

şeklinde seçilebilir. e_0 boyutsuz, deneyle belirlenebilecek olan bir sabittir. $\epsilon \rightarrow 0$ gittiğinde (2.5.19) denklemi (2.5.20) denklemini verecektir. Bunun sonucu olarak $\alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|)$ fonksiyonu bir Dirac-Delta dizisidir ve limit durumunda yerel olmayan teori yerel teori ile üst üste düşecektir. Örnek olarak aşağıdaki etki fonksiyonları verilebilir. Bir boyutlu ortamlarda [21],

$$\alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|) = (2\epsilon)^{-1} \exp -\left(\frac{|\underline{x}' - \underline{x}|}{\epsilon}\right) \quad (2.5.22)$$

iki boyutlu ortamlarda [28] ,

$$\alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|) = (2\pi\epsilon^2)^{-1} K_0\left(\frac{|\underline{x}' - \underline{x}|}{\epsilon}\right) \quad (2.5.23)$$

alınabilir. Burada $K_0\left(\frac{|\underline{x}' - \underline{x}|}{\epsilon}\right)$ modifiye bessel fonksiyonudur. Üç boyutlu ortamlarda ise [42]

$$\alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|) = (4\pi\epsilon^2 |\underline{x}' - \underline{x}|)^{-1} \exp -\left(\frac{|\underline{x}' - \underline{x}|}{\epsilon}\right) \quad (2.5.24)$$

etki fonksiyonu kullanılabilir. Benzer şekilde iki veya üç boyutlu ortamlar için

$$\alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|) = \alpha_0 \exp\left[-\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 (\underline{x}' - \underline{x}) \cdot (\underline{x}' - \underline{x})\right] \quad (2.5.25)$$

şeklinde Gauss fonksiyonu etki fonksiyonu olarak alınabilir. (2.5.25) de α_0 , (2.5.18) normalizasyon koşulundan belirlenebilecek olan bir sabit, β 'yine bir sabit, a ise lattis parametresidir. $v - \sigma = R^n$ için

$$\alpha_0 = \pi^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{\beta}{a}\right)^n \quad (2.5.26)$$

elde edilebilir. Bu çekirdeklerin ayrıntılı yapısı yerel olmayan teori ile dalga yayılımı problemlerinin incelenmesi ve sonuçların lattis dinamiği verileri ile karşılaştırılması ile daha iyi belirlenebilir. Bu sonuçlarla ortalama etkileşme uzaklığı ve sönüm hızı tahmin edilerek yerel olmayan yapı yeterince tanımlanabilir.

2.6 ALAN DENKLEMLERİ

Ayıt 2.2 de momentumun korunumu yasasından elde edilen (2.2.10)₁ denkleminde $\hat{p} = 0$, $\hat{f} = 0$ alınır ve (2.2.11) ifadesi (2.2.10)₁ de kullanılırsa

$$t_{,k}^{kl} + \rho(f_l - \bar{u}_l) = 0 \quad (2.6.1)$$

şeklinde alan denklemi yazılabilir. Bilindiği gibi bu Cauchy hareket denklemidir. Bu ayıt ta lineer yerel olmayan teori ile elde edilen, homojen izotrop elastik katıların bünye denklemleri kullanılarak elde edilen alan denklemleri üzerinde durulacaktır. (2.5.13) bünye denklemi ön gerilmesiz hal için yani $\alpha \equiv 0$ için

(2.6.1) denkleminde yerine yazılır ve ayrıca λ ve μ $|\underline{x}' - \underline{x}|$ in fonksiyonları oldukları için

$$\frac{\partial}{\partial x'^k}(\lambda', \mu') = -\frac{\partial}{\partial x^k}(\lambda', \mu') \quad (2.6.2)$$

türev bağıntısı kullanılırsa alan denklemi

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu)u_{k,k} + \mu u_{l,kk} + \int_{v-\sigma} [(\lambda' + \mu')u'_{k,kl} + \mu' u'_{l,kk}] dv' \\ & - \int_{s-\sigma} \sigma'_{kl} da'_k + \int_{\sigma} [\sigma'_{kl}] da'_k + \rho(f_l - \ddot{u}_l) = 0 \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

elde edilir. Burada Green-Gauss teoreminden yararlanılmıştır. (2.6.3) alan denklemi yerel olmayan teori ile elde edilen lineer izotrop elastik katıların alan denklemleridir. Ayrıca (2.5.19) ile verilen bünye denklemi (2.6.1) de yerine yazıldığında, benzer şekilde Green-Gauss teoremi ve

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x^k} \sigma'_{kl} = -\frac{\partial(\alpha \sigma'_{kl})}{\partial x'^k} + \alpha \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial x'^k} \quad (2.6.4)$$

türev bağıntısı kullanıldığında alan denklemleri

$$\begin{aligned} & \int_{v-\sigma} \alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|) \sigma'_{kl,k} dv' - \int_{s-\sigma} \alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|) \sigma'_{kl} da'_k \\ & + \int_{\sigma} [\alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|) \sigma'_{kl}] da'_k + \rho(f_l - \ddot{u}_l) = 0 \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

şeklinde de elde edilebilir. Eğer sonsuz bir ortam için $\alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|)$ etki fonksiyonu

$$(1 - \epsilon^2 \nabla^2) \alpha = \delta(|\underline{x}' - \underline{x}|) \quad (2.6.6)$$

diferansiyel denkleminin bir çözümü ise (2.5.19) bünye denklemine yerleştirildiğinde bu denklemler

$$(1 - \epsilon^2 \nabla^2) t_{kl} = \sigma_{kl} \quad (2.6.7)$$

şeklinde bir diferansiyel denklem sistemi ile verilebilir [46]. (2.6.5) alan denklemlerinde yüzey gerilmelerinin ve σ süreksizlik yüzeylerinin olmadığı düşünülerek (2.6.7) bünye denklemleri kullanılırsa

$$\sigma_{kl,k} + (1 - \epsilon^2 \nabla^2)(\rho f_l - \rho \ddot{u}_l) = 0 \quad (2.6.8)$$

sonucu elde edilir. Bu denklemler statik halde ve $f_i = 0$ alındığında

$$\sigma_{kl,k} = 0 \quad (2.6.9)$$

şeklinde bilinen Navier-Lame denklemlerine indirgenir. Bu durumda yerdeğiştirme alanı (2.6.9) denklemleri çözülerek elde edilebilir. Gerilme alanı ise artık (2.6.7) diferansiyel denklemleri çözülerek elde edilebilir. Sonuç olarak sınır ve başlangıç koşulları yerdeğiştirme ve hız alanları yerel olmayan elastisitede yerel elastisite ile özdeştir. gerilme sınır koşulunda ise esas gerilme t_{kl} dir. Yani

$$t_{kl}n_k = t_{(\underline{n})_l} \quad (2.6.10)$$

yazılmalıdır. Burada $t_{(\underline{n})_l}$ terimi sınırdaki verilen gerilme kuvvetini göstermektedir.

BÖLÜM 3

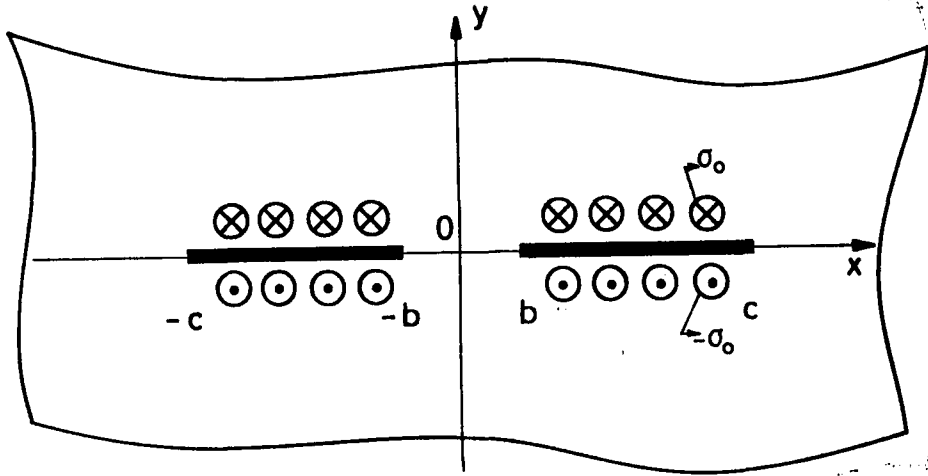
YEREL OLMAYAN ELASTİTEDE ÇATLAK PROBLEMİ

3.1 GİRİŞ

Bu bölümde problemin çözümü verilmiştir. Problemin tanıtımı yapıldıktan sonra yerel olmayan elastisite teorisinin bünve ve alan denklemleri kullanılarak formüle edilmiştir. Daha sonra sınır koşulları uygulanarak çözümü verecek denklemler elde edilmiştir. Son ayıttta ise sınır koşullarından elde edilen denklemlerin çözüm şeması verilmiştir. Verilen bu çözüm şeması içinde ilk adımda elde edilebilecek olan çözüm klasik yani yerel elastite teorisindeki çözümü ifade etmektedir. Bu şema ile ilk iki adımdaki çözüm ifadeleri, düzgün dağılı yüklenme özel hali için sayısal olarak hesaplanarak karşılaştırılmıştır.

3.2 DÜZLEM DIŞI KAYMAYA MARUZ ÇİFT ÇATLAK PROBLEMİ

Aynı düzlemde iki doğrusal çatlak ile zayıflatılmış sonsuz elastik bir katı düşünelim . Elastik katının $(x_1 = x, x_2 = y)$ düzlemsel kesitini göz önüne alalım (Şekil 3.2.1). Çatlakları x - eksenı boyunca ve uzunlukları $|b - c|$ olacak şekilde seçelim ve çatlak yüzeylerinde $t_{yz} = \sigma_0 = \text{sabit}$ düzgün dağılı düzlem dışı yüklenme olsun



Şekil 3.2.1 Sonsuz elastik katıda çift çatlak

Yerdeğiştirme alanı

$$u_x = u_y = 0, \quad u_z = W(x, y) \quad (3.2.1)$$

şeklinde alındığında klasik gerilme alanı (2.5.20) den

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial W}{\partial x} \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial W}{\partial y} \quad (3.2.2)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer gerilme bileşenleri sıfırdır. (3.2.2)_{1,2} ifadelerini (2.6.6) ifadesi ile verilen alan denkleminde yerleştirilir ve $\sigma(t)$ süreksizlik yüzeyi ihmal edilir ise

$$\begin{aligned} & \mu \int \int_S \alpha(|x' - x|, |y' - y|) \nabla'^2 W(x', y') dx' dy' \\ & - \int_{-b}^{-c} \alpha(|x' - x|, |y|) [\sigma_{yz}(x', 0)] dx' - \int_b^c \alpha(|x' - x|, |y|) [\sigma_{yz}(x', 0)] dx' = 0 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

şeklinde alan denklemi yazılabilir. Çatlaklar $y = 0$ $-c \leq x \leq -b$ ve $b \leq x \leq c$ de yerleşmişlerdir. (3.2.3) ifadesindeki köşeli parantez çatlak çizgileri boyunca sıçramayı ifade etmektedir. Burada yerdeğiştirme alanı

$$W(x, -y) = -W(x, y) \quad (3.2.4)$$

simetri koşulunu gerçeklemelidir. (3.2.2) ve (3.2.4) den

$$[\sigma_{yz}(x', 0)] = 0 \quad (3.2.5)$$

elde edilir. Dolayısı ile (3.2.3) deki çizgisel integraller ortadan kalkar. (3.2.3) denkleminde x' değişkenine göre Fourier dönüşümü uygulanırsa [47]

$$\frac{d^2 \bar{W}(\xi, y)}{dy^2} - \xi^2 \bar{W}(\xi, y) = 0 \quad (3.2.6)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Burada

$$\bar{W}(\xi, y) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y) \exp(i\xi x) dx$$

dir. Problemin yerdeğiştirme ve gerilme sınır koşulları

$$W(x, 0) = 0 \quad 0 < x < b$$

$$t_{yz} = \sigma_0 \quad b < x < c$$

$$W(x, 0) = 0 \quad x > c \quad (3.2.7)$$

$$W(x, y) = 0 \quad (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.6) diferansiyel denkleminin (3.2.7)₄ koşulunu sağlayan çözüümü ($y \geq 0$ için)

$$W(x, y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty A(\xi) \exp(-\xi y) \cos(\xi x) d\xi \quad (3.2.8)$$

dir. (3.2.8) yerdeğiştirme ifadesindeki $A(\xi)$ fonksiyonu (3.2.7)_{1,2,3} sınır koşulları kullanılarak elde edilecektir. Bunun için gerilme bileşenlerinin ifadelerine gereksinim vardır. (2.5.19) ile verilen bünye denklemlerinden sıfır olmayan gerilme bileşenleri

$$t_{xz} = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \alpha(|x' - x|, |y' - y|) \sigma_{xz}(x', y') dx' dy' \quad (3.2.9)$$
$$t_{yz} = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \alpha(|x' - x|, |y' - y|) \sigma_{yz}(x', y') dx' dy'$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.9)_{1,2} gerilme bileşenleri (2.5.20) yardımı ile yerdeğiştirme bileşenleri cinsinden yazılır ve y' değişkenine göre integraller iki toplam

şeklinde ifade edilir ise

$$\begin{aligned}
 t_{xz} &= \mu \int_{-\infty}^0 dy' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(|x' - x|, |y' - y|) \frac{\partial W(x', y')}{\partial x'} dx' \\
 &\quad + \mu \int_0^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(|x' - x|, |y' - y|) \frac{\partial W(x', y')}{\partial x'} dx' \\
 t_{yz} &= \mu \int_{-\infty}^0 dy' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(|x' - x|, |y' - y|) \frac{\partial W(x', y')}{\partial y'} dx' \\
 &\quad + \mu \int_0^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(|x' - x|, |y' - y|) \frac{\partial W(x', y')}{\partial y'} dx'
 \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

bulunur. (3.2.19)_{1,2} ifadelerinin ilk toplamlarında y' yerine $-y'$ yazılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}
 t_{xz} &= \mu \int_0^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(|x' - x|, |y' - y|) - \alpha(|x' - x|, |y' + y|)] \frac{\partial W(x', y')}{\partial x'} dx' \\
 t_{yz} &= \mu \int_0^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(|x' - x|, |y' - y|) + \alpha(|x' - x|, |y' + y|)] \frac{\partial W(x', y')}{\partial y'} dx'
 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

şeklinde gerilme ifadeleri elde edilir. (3.2.8) deki yerdeğiştirme ifadesi (3.2.11)_{1,2} ile verilen gerilme ifadelerinde yerleştirildiğinde

$$\begin{aligned}
 t_{xz} &= -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \mu \int_0^{\infty} A(\xi) \xi d\xi \int_0^{\infty} dy' \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(|x' - x|, |y' - y|) - \alpha(|x' - x|, |y' + y|)] \exp(-\xi y') \sin(\xi x') dx' \\
 t_{yz} &= -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \mu \int_0^{\infty} A(\xi) \xi d\xi \int_0^{\infty} dy' \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(|x' - x|, |y' - y|) + \alpha(|x' - x|, |y' + y|)] \exp(-\xi y') \cos(\xi x') dx'
 \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

sonuçlarına ulaşılır. $\alpha(|x' - x|, |y' - y|)$ etki fonksiyonu olarak (2.5.25) ile verilen Gauss fonksiyonu alınarak iki boyutlu ortamlar için

$$\alpha(|x' - x|, |y' - y|) = \alpha_0 \exp[-(\frac{\beta}{a})^2((x' - x)^2 + (y' - y)^2)] \quad (3.2.13)$$

yazılabilir. Burada α_0 sabiti (2.5.26) dan

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}(\frac{\beta}{a})^2 \quad (3.2.14)$$

dir. (3.2.13) ile verilen etki fonksiyonunda

$$(\frac{\beta}{a})^2$$

yerine

$$p = (\frac{\beta}{a})^2 \quad (3.2.15)$$

yazılır ve (3.2.12)_{1,2} ifadelerine yerleştirilerek,

$$\eta = x' - x \quad (3.2.16)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} t_{xz} = & -(\frac{2}{\pi})^{1/2} \mu \alpha_0 \int_0^\infty A(\xi) \xi d\xi \int_0^\infty dy' \\ & \times \int_{-\infty}^\infty [\exp(-p(y' - y)^2) - \exp(-p(y' + y)^2)] \\ & \times \exp(-\xi y') \exp(-p\eta^2) \sin \xi(\eta + x) d\eta \\ t_{yz} = & -(\frac{2}{\pi})^{1/2} \mu \alpha_0 \int_0^\infty A(\xi) \xi d\xi \int_0^\infty dy' \\ & \times \int_{-\infty}^\infty [\exp(-p(y' - y)^2) + \exp(-p(y' + y)^2)] \\ & \times \exp(-\xi y') \exp(-p\eta^2) \cos \xi(\eta + x) d\eta \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

sonuçları elde edilir. (3.2.17)_{1,2} ifadelerinde

$$\gamma = \xi - 2py \quad \bar{\gamma} = \xi + 2py \quad (3.2.18)$$

tanımlanır ve yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} t_{xz} &= -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \mu \alpha_0 \int_0^\infty A(\xi) \xi d\xi \\ &\times \int_0^\infty \exp(-py^2) [\exp(-py'^2 - \gamma y') - \exp(-py'^2 - \bar{\gamma} y')] dy' \\ &\times \int_{-\infty}^\infty \exp(-p\eta^2) \sin \xi(\eta + x) d\eta \\ t_{yz} &= -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \mu \alpha_0 \int_0^\infty A(\xi) \xi d\xi \\ &\times \int_0^\infty \exp(-py^2) [\exp(-py'^2 - \gamma y') + \exp(-py'^2 - \bar{\gamma} y')] dy' \\ &\times \int_{-\infty}^\infty \exp(-p\eta^2) \cos \xi(\eta + x) d\eta \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

elde edilir. Burada

$$I_1 = \int_{-\infty}^\infty \exp(-p\eta^2) \begin{Bmatrix} \sin \xi(\eta + x) \\ \cos \xi(\eta + x) \end{Bmatrix} d\eta = \left(\frac{\pi}{p}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\xi^2}{4p}\right) \begin{Bmatrix} \sin(\xi x) \\ \cos(\xi x) \end{Bmatrix}$$

$$I_2 = \int_0^\infty \exp(-py'^2 - \gamma y') dy' = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{p}\right) \exp\left(\frac{\gamma^2}{4p}\right) [1 - \Phi\left(\frac{\gamma}{2\sqrt{p}}\right)]$$

$$\Phi(z) = 2\pi^{-1/2} \int_0^z \exp(-t^2) dt$$

(3.2.20)

integralleri gözönüne alındığında ve

$$\exp\left(-\frac{\xi^2}{4p}\right) \exp(-py^2) \exp\left(\frac{\gamma^2}{4p}\right) = \exp(-\xi y)$$

$$\exp\left(-\frac{\xi^2}{4p}\right) \exp(-py^2) \exp\left(\frac{\bar{\gamma}^2}{4p}\right) = \exp(\xi y)$$

eşitlikleri kullanıldığında (3.2.19)_{1,2} ifadeleri

$$\begin{aligned} t_{xz} = & - (2\pi)^{-1/2} \mu \int_0^\infty A(\xi) \xi [\exp(-\xi y) (1 - \Phi(\frac{\xi - 2py}{2\sqrt{p}}) \\ & - \exp(\xi y) (1 - \Phi(\frac{\xi + 2py}{2\sqrt{p}}))] \sin(\xi x) d\xi \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

$$\begin{aligned} t_{yz} = & - (2\pi)^{-1/2} \mu \int_0^\infty A(\xi) \xi [\exp(-\xi y) (1 - \Phi(\frac{\xi - 2py}{2\sqrt{p}}) \\ & + \exp(\xi y) (1 - \Phi(\frac{\xi + 2py}{2\sqrt{p}}))] \cos(\xi x) d\xi \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \Phi(z) \quad (3.2.22)$$

olduğundan gerilme ifadeleri

$$\begin{aligned} t_{xz} = & - (2\pi)^{-1/2} \mu \int_0^\infty A(\xi) \xi [\exp(-\xi y) \operatorname{erfc}(\frac{\xi - 2py}{2\sqrt{p}}) \\ & - \exp(\xi y) \operatorname{erfc}(\frac{\xi + 2py}{2\sqrt{p}})] \sin(\xi x) d\xi \end{aligned} \quad (3.2.23)$$
$$\begin{aligned} t_{yz} = & - (2\pi)^{-1/2} \mu \int_0^\infty A(\xi) \xi [\exp(-\xi y) \operatorname{erfc}(\frac{\xi - 2py}{2\sqrt{p}}) \\ & + \exp(\xi y) \operatorname{erfc}(\frac{\xi + 2py}{2\sqrt{p}})] \cos(\xi x) d\xi \end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada sonuç olarak (3.2.7)_{1,2,3} sınır koşulları kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} A(\xi) \cos(\xi x) d\xi &= 0 \quad 0 < x < b \\ \int_0^{\infty} \xi A(\xi) \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{p}}\right) \cos(\xi x) d\xi &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\sigma_0}{\mu} \quad b < x < c \\ \int_0^{\infty} A(\xi) \cos(\xi x) d\xi &= 0 \quad x > c \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

üçlü integral denklemi elde edilir. Bu integral denklemlerden $A(\xi)$ bulunabilirse yerdeğiştirme ve gerilme alanı tamamı ile belirlenmiş olur. Burada

$$s = \frac{x}{c}, \quad \zeta = \xi c, \quad \epsilon = \frac{a}{2\beta c}, \quad k = \frac{b}{c} \quad \text{ve} \quad P_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_0 c^2}{\mu} \quad (3.2.25)$$

tanımları yapılarak (3.2.24)_{1,2,3} denklemleri

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} A(\zeta) \cos(s\zeta) d\zeta &= 0 \quad 0 < s < k \\ \int_0^{\infty} \zeta A(\zeta) \operatorname{erfc}(\epsilon\zeta) \cos(s\zeta) d\zeta &= \frac{\pi}{2} P_0 \quad k < s < 1 \\ \int_0^{\infty} A(\zeta) \cos(s\zeta) d\zeta &= 0 \quad s > 1 \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

şeklinde de yazılabilir.

3.3 ÜÇLÜ İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Ayıt 3.2 de sunulan çatlak probleminin çözümü (3.2.26) ile verilen üçlü integral denklemlerin çözümüne indirgenmiştir. Bu denklemlerde genelliği sağlamak için P_0 yerine $P(s)$ şeklinde s ' nin bir fonksiyonu yerleştirilir ve

$$K(\epsilon\zeta) = \operatorname{erfc}(\epsilon\zeta) \quad (3.3.1)$$

tanımı yapılırsa (3.2.26) integral denklemleri daha genel bir formda

$$\begin{aligned} \int_0^\infty A(\zeta) \cos(s\zeta) d\zeta &= 0 \quad 0 < s < k \\ \int_0^\infty \zeta A(\zeta) K(\epsilon\zeta) \cos(s\zeta) d\zeta &= \frac{\pi}{2} P(s) \quad k < s < 1 \\ \int_0^\infty A(\zeta) \cos(s\zeta) d\zeta &= 0 \quad s > 1 \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ϵ parametresi yerel olmayan yapıyı tanımlayan parametredir. $\epsilon = 0$ için $K(0) = 1$ olduğundan, (3.3.2) ile verilen denklemler bu durumda yerel elastisite teorisinden elde edilebilecek olan denklemleri vermektedir.

Üçlü integral denklemleri çözmek için genel olarak izlenen yol bu integral denklemleri Fredholm integral denklemine veya simültane Fredholm integral denklem takımlarına indirgeyerek çözmektir. Burada da önce bu üçlü integral denklemler Fredholm integral denklemine indirgenecek ve indirgenmiş integral denklemin çözümü üzerinde durulacaktır. Bu amaçla (3.3.2)_{1,2,3} denklemlerinde $A(\zeta)$ bilinmeyen fonksiyonu yerine

$$A(\zeta) = \zeta^{-1} \int_k^1 h(t^2) \sin(\zeta t) dt \quad (3.3.3)$$

şeklinde tanımlanan ifade yazılır ve [48]

$$\int_0^\infty \zeta^{-1} \sin(\zeta t) \cos(s\zeta) d\zeta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |s| < t \\ 0, & |s| > t \end{cases} \quad (3.3.4)$$

sonucu kullanılır ise (3.3.2)₃ denklemi $s > t$ olduğu için kendiliğinden sağlanır. (3.3.2)₁ denklemi ise

$$\int_k^1 h(t^2) dt \int_0^\infty \zeta^{-1} \sin(\zeta t) \cos(s\zeta) d\zeta = 0 \quad 0 < s < k$$

şeklinde yazılabilir. Burada $s < t$ olduğundan (3.3.4) ile verilen integralin sonucu dikkate alındığında

$$\int_k^1 h(t^2) dt = 0 \quad (3.3.5)$$

koşulu elde edilir. (3.3.5) koşulunun $h(t^2)$ fonksiyonu üzerine getirdiği kısıtlama fiziksel olarak yerdeğiştirme fonksiyonun tek değerli olmasına karşı gelmektedir. Sağlanması gereken son denklem (3.3.2)₂ dir. Bu denklem (3.2.3) tanımı ile

$$\int_k^1 h(t^2) dt \int_0^\infty K(\epsilon\zeta) \cos(s\zeta) \sin(t\zeta) d\zeta = \frac{\pi}{2} P(s) \quad k < s < 1 \quad (3.3.6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $K(\epsilon\zeta)$ yerine (3.3.1) deki ifadesi (3.2.22) bağıntısı gözönünde bulundurularak yazılır ve

$$K_1(s, t) = \int_0^\infty [1 - \Phi(\epsilon\zeta)] \cos(s\zeta) \sin(t\zeta) d\zeta \quad (3.3.7)$$

tanımı yapılırsa (3.3.6) integral denklemi

$$\int_k^1 h(t^2) K_1(s, t) dt = \frac{\pi}{2} P(s) \quad k < s < 1 \quad (3.3.8)$$

şekline dönüşür. Böylece (3.3.2) ile verilen üçlü integral denklem sisteminin çözümü (3.3.5) koşulu altında (3.3.8) integral denkleminin çözümüne indirgenmiş olur. Burada

$$\begin{aligned} \cos(s\zeta) \sin(\zeta t) &= \frac{1}{2} \{ \sin \zeta(s + t) - \sin \zeta(s - t) \} \\ \int_0^\infty [1 - \Phi(ax)] \sin(bx) dx &= \frac{1}{b} (1 - \exp(-\frac{b^2}{4a^2})) \quad a > 0, b > 0 \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

sonuçları (3.3.7) ifadesinde kullanılır ise $K_1(s, t)$ çekirdek fonksiyonu

$$K_1(s, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s+t} (1 - \exp(-\frac{(s+t)^2}{4\epsilon^2})) - \frac{1}{s-t} (1 - \exp(-\frac{(s-t)^2}{4\epsilon^2})) \right] \quad (3.3.10)$$

olarak elde edilir. Burada

$$K_2(s, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{(s+t) \exp(-\frac{(s-t)^2}{4\epsilon^2}) - (s-t) \exp(-\frac{(s+t)^2}{4\epsilon^2})}{t^2 - s^2} \right] \quad (3.3.11)$$

tanımlandığında (3.3.10) ifadesi

$$K_1(s, t) = \frac{t}{t^2 - s^2} + K_2(s, t) \quad (3.3.12)$$

yazılabilir. (3.3.12) ifadesi (3.3.8) deki integral denklemde yerine yazıldığında

$$\int_k^1 \frac{th(t^2)dt}{t^2 - s^2} - \int_k^1 K_2(s, t)h(t^2)dt = \frac{\pi}{2} P(s) \quad k < s < 1 \quad (3.3.13)$$

tekil Fredholm integrali denklemi elde edilir. Bulunan bu integral denklemin (3.3.5) koşulu altında çözümünü incelenecektir. (3.3.13) tekil integral denkleminde $K_2(s, t)$ çekirdek fonksiyonu esaslı bir tekilliğe sahiptir. Bu nedenle çekirdek fonksiyonu herhangi bir şekilde yani değişkenlere veya parametreye göre seriye açarak ardışık bir şema oluşturma olasılığı yoktur. Burada $K_2(s, t)$ çekirdek fonksiyonunun bulunduğu terimin çözüme olan katkısının integral denklemin diğer kısmı yani dominant (güçlü) parçasının yanında çok az olduğu varsayılarak $K_2(s, t)$ çekirdek fonksiyonun içine ν şeklinde yapay bir parametre yerleştirilirse (3.3.13) denklemi

$$\int_k^1 \frac{th(t^2)dt}{t^2 - s^2} - \int_k^1 \nu K_2(s, t)h(t^2) dt = \frac{\pi}{2}P(s) \quad (3.3.14)$$

şeklinde yazılabilir. $h(t^2)$ fonksiyonu

$$h(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n h_n(t^2) \quad (3.3.15)$$

olarak seçilir ve (3.3.5) ve (3.3.14) denklemlerinde yerine yazılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} \int_k^1 \frac{th(t^2)dt}{t^2 - s^2} &= \int_k^1 h_{n-1}(t^2)K_2(s, t) dt \quad n \geq 1 \\ \int_k^1 \frac{th_0(t^2)dt}{t^2 - s^2} &= \frac{\pi}{2}P(s) \quad n = 0 \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

$$\int_k^1 h_n(t^2)dt = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

denklemleri elde edilir. $P(s)$ verilen bir fonksiyon olduğundan (3.3.16)_{2,3} den $h_0(t^2)$ bulunabilir ise (3.3.16)₁ denkleminin sağ tarafı belirlenmiş olacaktır. Yani rekürsif olarak $h_0(t^2), h_1(t^2), h_2(t^2), \dots, h_n(t^2)$ fonksiyonlarını elde etmek mümkün olabilecektir. Burada ν yapay parametresi gerçekte bir olması gereken bir parametredir. (3.3.16) ile verilen ifadeleri toplu bir şekilde yazabilmek amacı ile

$$R_n(s) = \begin{cases} P(s) & n = 0 \\ \frac{2}{\pi} \int_k^1 h_{n-1}(t^2)K_2(s, t)dt & n \geq 1 \end{cases} \quad (3.3.17)$$

tanımlandığında (3.3.16) denklemleri

$$\frac{2}{\pi} \int_k^1 \frac{t h_n(t^2) dt}{t^2 - s^2} = R_n(s) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$k < s < 1$$

(3.3.18)

$$\int_k^1 h_n(t^2) dt = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde yazılabilir. (3.3.18) denkleminin çözümü, sonlu Hilbert dönüşümü kullanılarak ifade edilebilir. Bunun için aşağıda verilen teoremden yararlanılabilir [49], [50].

Teorem: Eğer $R(s) \in L_2(k, 1)$ ise

$$H[h(t)] = \frac{1}{\pi} \int_k^1 \frac{h(t) dt}{t - s} = R(s) \quad k < s < 1$$

denkleminin çözümü

$$H^{-1}[R(s)] = h(t) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{t-k}{1-t} \right)^{1/2} \int_k^1 \left(\frac{1-s}{s-k} \right)^{1/2} \frac{R(s) ds}{s-t} \\ + \frac{C}{\sqrt{(t-k)(1-t)}}$$

şeklindedir. Burada $L_2(k, 1)$, $(k, 1)$ aralığında karesi integre edilebilen fonksiyonların oluşturduğu uzaydır. Bu teoremden yararlanarak (3.3.18) denklemlerinin çözüm ifadeleri

$$h_n(t^2) = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{t^2 - k^2}{1 - t^2} \right)^{1/2} \int_k^1 \left(\frac{1 - s^2}{s^2 - k^2} \right)^{1/2} \frac{s R_n(s) ds}{s^2 - t^2} \\ + \frac{C_n}{\sqrt{(t^2 - k^2)(1 - t^2)}} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.19)$$

şeklinde yazılabilir. Burada C_n sabitleri (3.3.18)₂ koşulları kullanılarak elde edilebilirler. $n = 0$ için (3.3.17) ve (3.3.19) dan $h_0(t^2)$ fonksiyonu

$$h_0(t^2) = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{t^2 - k^2}{1 - t^2} \right)^{1/2} \int_k^1 \left(\frac{1 - s^2}{s^2 - k^2} \right)^{1/2} \frac{sP(s)ds}{s^2 - t^2} + \frac{C_0}{\sqrt{(t^2 - k^2)(1 - t^2)}} \quad (3.3.20)$$

yazılabilir. Buradaki C_0 sabiti (3.3.18)₂ den $n = 0$ için

$$C_0 = \frac{2}{\pi F} \int_k^1 \left(\frac{t^2 - k^2}{1 - t^2} \right)^{1/2} dt \int_k^1 \left(\frac{1 - s^2}{s^2 - k^2} \right)^{1/2} \frac{sP(s)ds}{s^2 - t^2} \quad (3.3.21)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$F = F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1 - k^2}\right)$$

fonksiyonu birinci tür eliptik fonksiyondur. Ayrıca

$$\left\{ \frac{(t^2 - k^2)(1 - s^2)}{(1 - t^2)(s^2 - k^2)} \right\}^{1/2} \left(1 + \frac{s^2 - t^2}{t^2 - k^2} \right) \equiv \left\{ \frac{(1 - t^2)(s^2 - k^2)}{(t^2 - k^2)(1 - s^2)} \right\}^{1/2} \left(1 - \frac{s^2 - t^2}{1 - t^2} \right) \quad (3.3.22)$$

özdeşliği kullanıldığında (3.3.20) ifadesi

$$h_0(t^2) = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - t^2}{t^2 - k^2} \right)^{1/2} \int_k^1 \left(\frac{s^2 - k^2}{1 - s^2} \right)^{1/2} \frac{sP(s)ds}{s^2 - t^2} + \frac{D_0}{\sqrt{(t^2 - k^2)(1 - t^2)}} \quad (3.3.23)$$

şeklinde yazılabilir. D_0 sabiti ise yine (3.3.18)₂ koşulu kullanılarak

$$D_0 = \frac{2}{\pi F} \int_k^1 \left(\frac{1 - t^2}{t^2 - k^2} \right)^{1/2} dt \int_k^1 \left(\frac{s^2 - k^2}{1 - s^2} \right)^{1/2} \frac{sP(s)ds}{s^2 - t^2} \quad (3.3.24)$$

olarak elde edilir. Verilen $P(s)$ fonksiyonuna göre $h_0(t^2)$ (3.3.20) veya (3.3.24) den hesaplandıktan sonra diğer adıma geçilerek (3.3.17) den $R_1(s)$ hesaplanır ve

(3.3.19) ve (3.3.18)₂ den $h_1(t^2)$ hesaplanabilir. Yani formel olarak $n = 1, 2, \dots$ içinde $h_1(t^2), h_2(t^2), \dots$ fonksiyonları hesaplanabilir.

$P(s) = P_0$ yani sabit fonksiyon alınır ise sırası ile (3.3.21) ve (3.3.24) den C_0 ve D_0 sabitleri hesaplanabilir. (3.3.20) veya (3.3.23) de yerlerine yazılarak $h_0(t^2)$ fonksiyonu tam olarak belirlenmiş olur. Hesaplamalar sırasında kullanılan

$$J_1 = \int_k^1 \frac{s f(s) ds}{\sqrt{(1-s^2)(s^2-k^2)(s^2-t^2)}} \quad k < t < 1 \quad (3.3.25)$$

integrali gözönüne alınır ve J_1 integrali Cauchy asal değerli olduğu düşünülürde

$$J_1 = \int_k^1 \frac{s(f(s) - f(t^2)) ds}{\sqrt{(1-s^2)(s^2-k^2)(s^2-t^2)}} + f(t^2) \int_k^1 \frac{s ds}{\sqrt{(1-s^2)(s^2-k^2)(s^2-t^2)}}$$

yazılabilir. (A.16, 24) den yukarıdaki ikinci toplamdaki integral özdeş olarak sıfırdır. Dolayısı ile (3.3.25) integrali

$$J_1 = \int_k^1 \frac{s(f(s) - f(t^2)) ds}{\sqrt{(1-s^2)(s^2-k^2)(s^2-t^2)}} \quad k < t < 1 \quad (3.3.26)$$

yazılabilir. Buradan

$$\int_k^1 \left(\frac{s^2 - k^2}{1 - s^2} \right)^{1/2} \frac{s ds}{s^2 - t^2} = \frac{\pi}{2} \quad (3.3.27)$$

ve

$$\int_k^1 \left(\frac{1 - s^2}{s^2 - k^2} \right)^{1/2} \frac{s ds}{s^2 - t^2} = -\frac{\pi}{2} \quad (3.3.28)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Öte yandan

$$E = E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1 - k^2}\right)$$

ikinci tür eliptik fonksiyon olmak üzere [51]

$$\int_k^1 \left(\frac{t^2 - k^2}{1 - t^2} \right)^{1/2} dt = E - k^2 F$$

ve

$$\int_k^1 \left(\frac{1-t^2}{t^2-k^2} \right)^{1/2} dt = F - E$$

sonuçları ve (3.3.27, 28) gözönüne alındığında sırası ile

$$C_0 = P_0 \left(k^2 - \frac{E}{F} \right) \quad (3.3.29)$$

$$D_0 = P_0 \left(1 - \frac{E}{F} \right) \quad (3.3.30)$$

$$h_0(t^2) = P_0 \frac{t^2 - E/F}{\sqrt{(t^2 - k^2)(1 - t^2)}} \quad (3.3.31)$$

elde edilir. $n=1$ olması halinde (3.3.17) den

$$R_1(y) = \frac{2}{\pi} \int_k^1 h_0(u^2) K_2(y, u) du \quad (3.3.32)$$

yazılabilir. (3.3.31) den $h(u^2)$ ifadesi ve (3.3.11) den $K_2(y, u)$ nun ifadesi (3.3.32) de yerlerine yazıldıklarında

$$R_1(y) = \frac{P_0}{\pi} \int_k^1 \frac{\left\{ (y+u) \exp\left(-\frac{(u-y)^2}{4\epsilon^2}\right) + (u-y) \exp\left(-\frac{(u+y)^2}{4\epsilon^2}\right) \right\} \left(u^2 - \frac{E}{F}\right) du}{\sqrt{(u^2 - k^2)(1 - u^2)(u^2 - y^2)}} \quad (3.3.33)$$

elde edilir. (3.3.19) dan ise

$$h_1(t^2) = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{t^2 - k^2}{1 - t^2} \right)^{1/2} \int_k^1 \left(\frac{1 - y^2}{y^2 - k^2} \right)^{1/2} \frac{y R_1(y) dy}{y^2 - t^2} + \frac{C_1}{\sqrt{(t^2 - k^2)(1 - t^2)}} \quad (3.3.34)$$

yazılabilir. C_1 sabiti ise (3.3.18)₂ koşulundan

$$C_1 = \frac{2}{\pi F} \int_k^1 \left(\frac{t^2 - k^2}{1 - t^2} \right)^{1/2} dt \int_k^1 \left(\frac{1 - y^2}{y^2 - k^2} \right)^{1/2} \frac{y R_1(y) dy}{y^2 - t^2} \quad (3.3.35)$$

şeklinde elde edilir. Yine (3.3.22) özdeşliği kullanılır ise

$$h_1(t^2) = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{1-t^2}{t^2-k^2} \right)^{1/2} \int_k^1 \left(\frac{y^2-k^2}{1-y^2} \right)^{1/2} \frac{yR_1(y)dy}{y^2-t^2} + \frac{D_1}{\sqrt{(t^2-k^2)(1-t^2)}} \quad (3.3.36)$$

yazılabilir. D_1 sabiti ise yine (3.3.18)₂ koşulundan

$$D_1 = \frac{2}{\pi F} \int_k^1 \left(\frac{1-t^2}{t^2-k^2} \right)^{1/2} dt \int_k^1 \left(\frac{y^2-k^2}{1-y^2} \right)^{1/2} \frac{yR_1(y)dy}{y^2-t^2} \quad (3.3.37)$$

olarak bulunur. (3.3.36) ve (3.3.37) ifadeleri (3.3.26) sonucundan yararlanılarak

$$h_1(t^2) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1-t^2}{t^2-k^2} \right)^{1/2} \int_{k^2}^1 \frac{[(y^2-k^2)R_1(\sqrt{y}) - (t^2-k^2)R_1(t^2)]dy}{\sqrt{(1-y)(y-k^2)(y^2-t^2)}} + \frac{D_1}{\sqrt{(t^2-k^2)(1-t^2)}} \quad (3.3.38)$$

ve

$$D_1 = \frac{1}{4\pi F} \int_{k^2}^1 \frac{(1-t)dt}{\sqrt{t}\sqrt{(1-t)(t-k^2)}} \times \int_{k^2}^1 \frac{[(y^2-k^2)R_1(\sqrt{y}) - (t^2-k^2)R_1(t^2)]dy}{\sqrt{(1-y)(y-k^2)(y^2-t^2)}} \quad (3.3.39)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

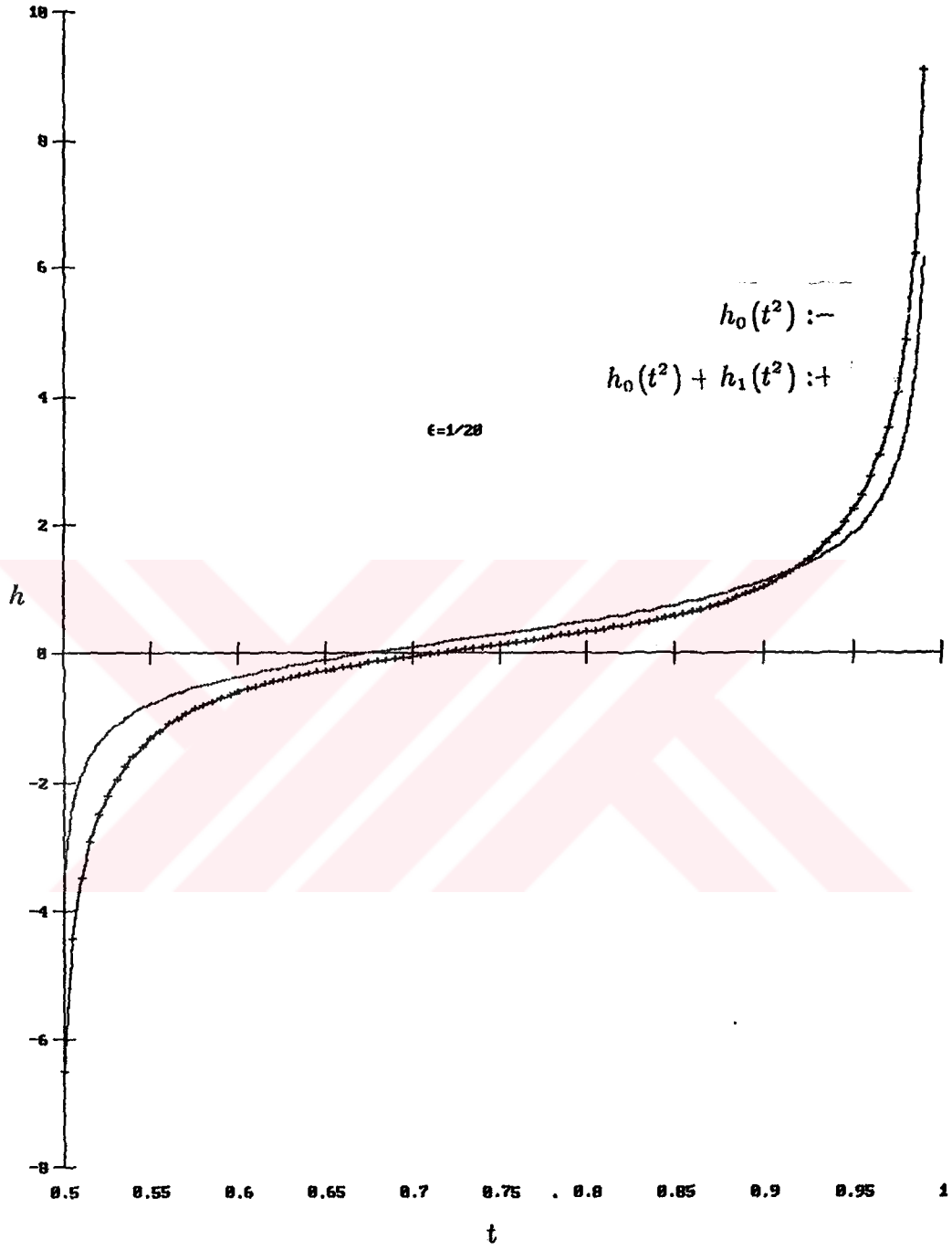
$$I(t^2) = \int_{k^2}^1 \frac{[(y-k^2)R_1(\sqrt{y}) - (t^2-k^2)R_1(t^2)]dy}{\sqrt{(1-y)(y-k^2)(y-t^2)}} \quad (3.3.40)$$

tanımlanır ve (3.3.39) ile verilen D_1 ifadesi (3.3.38) ifadesinde yerleştirilir ise

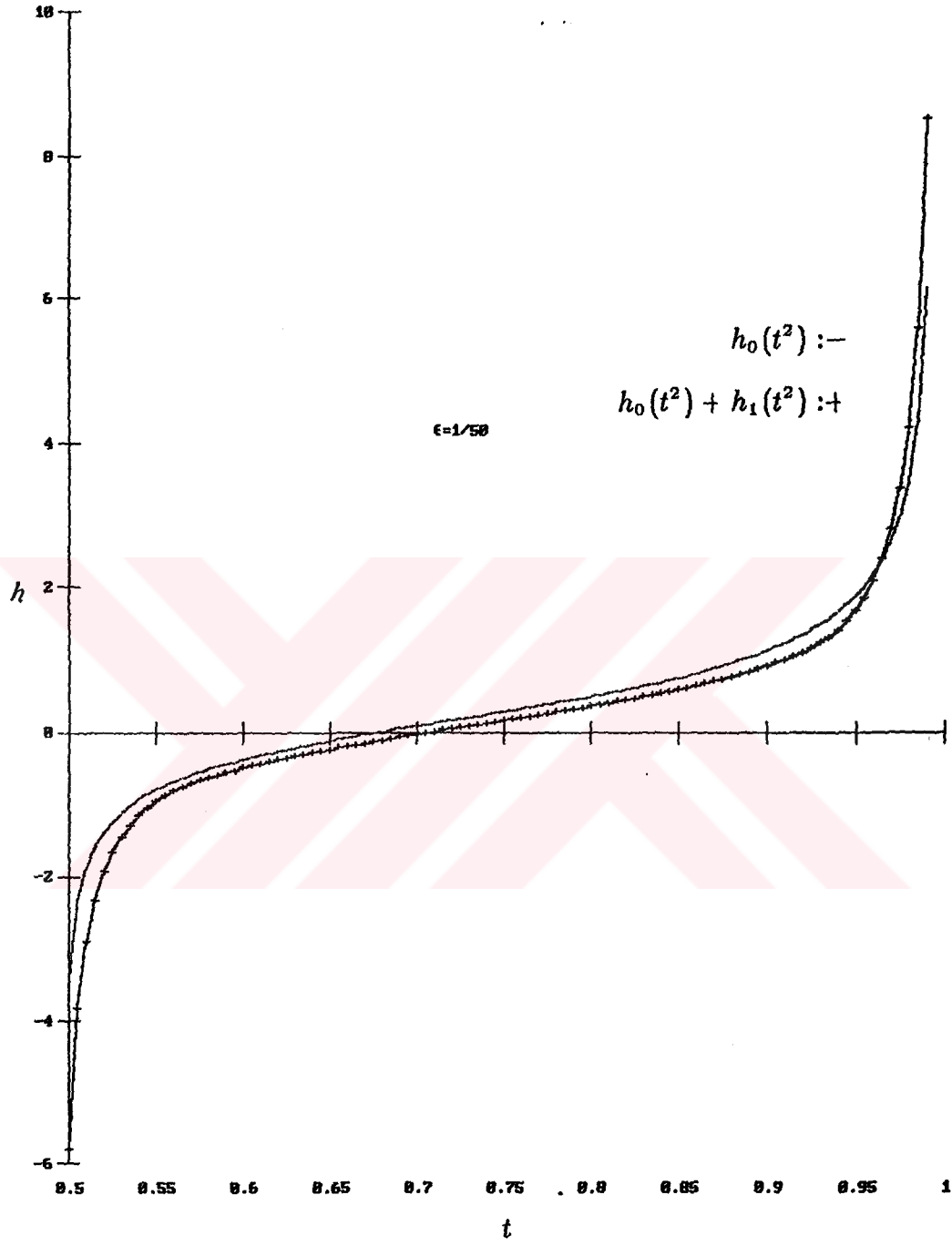
$$h_1(t^2) = -\frac{1}{\pi \sqrt{(1-t^2)(t^2-k^2)}} \left[(1-t^2)I(t^2) - \frac{1}{4F} \int_{k^2}^1 \frac{(1-t)I(t)dt}{\sqrt{t}\sqrt{(1-t)(t-k^2)}} \right] \quad (3.3.41)$$

elde edilir. Benzer işlemler $n = 2, 3, \dots$ için $h_2(t^2), h_3(t^2), \dots$ fonksiyonlarının hesaplamaları içinde yapılabilir. Burada $h_0(t^2)$ fonksiyonun ifade ettiği çözüm klasik çözümdür. Yani yerel elastisite teorisindeki çözüme karşı gelmektedir. Yerel olmayan elastisite teorisinden gelen katkıları ise diğer adımlardan elde edilebilecek olan çözümler ifade etmektedir. Yerel olmayan yapıyı ifade eden ϵ parametresi sıfır alındığında bu çözümlerde sıfır olmaktadır. Dolayısı ile geriye yalnız klasik çözüm kalmaktadır. ϵ parametresinin sıfıra yaklaşan değerlerinde toplam çözümün klasik çözüme yaklaşacağı rahatlıkla söylenebilir. Bu amaçla burada yalnızca $h_0(t^2)$ ve $h_1(t^2)$ fonksiyonlarının sabit yükleme durumu için çözümleri ile yetinilmiştir.

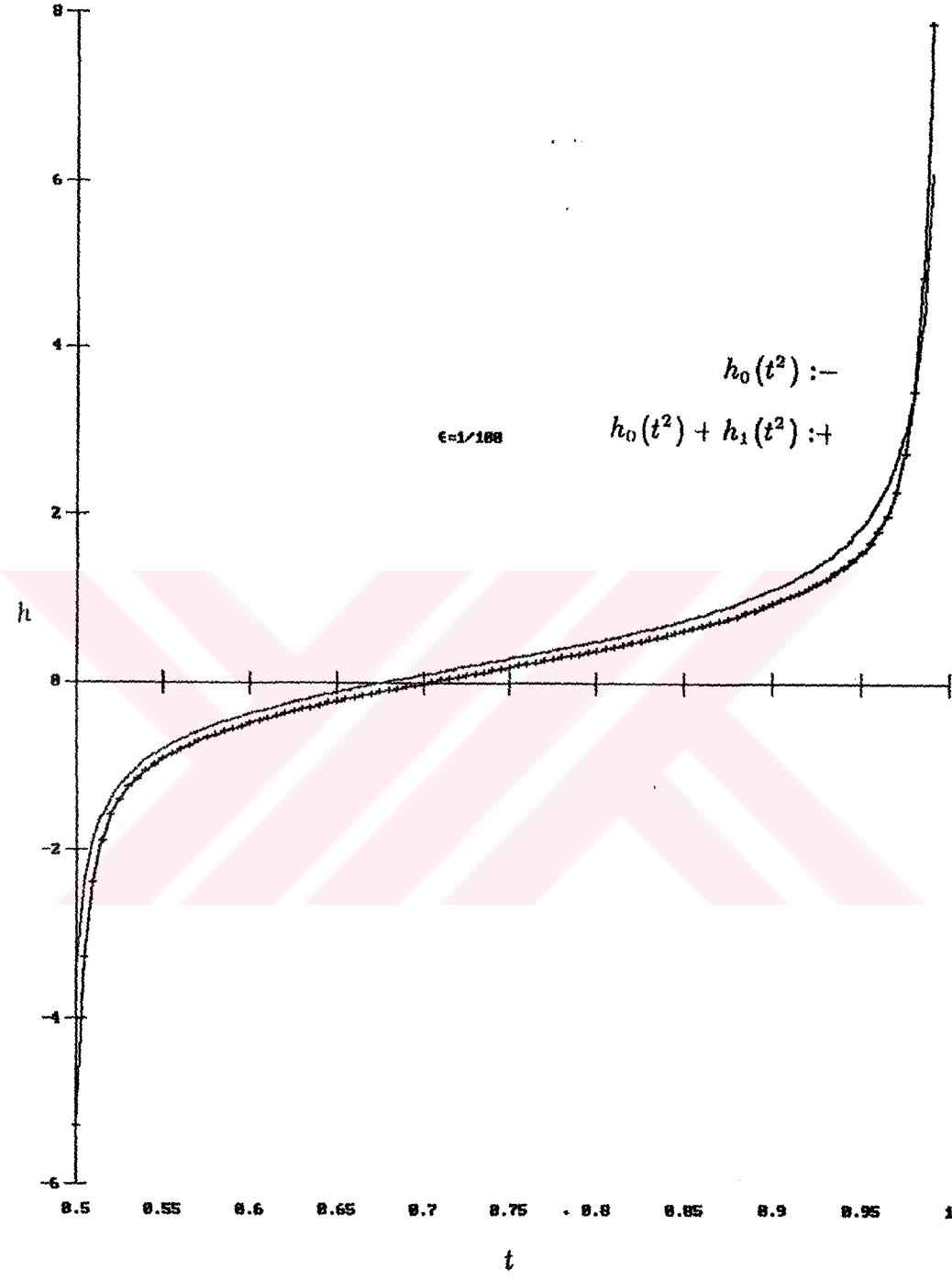
$k = 1/2$ alınarak çatlak üzerinde yani $t \in (1/2, 1)$ aralığında $h_0(t^2)$ ve $h_0(t^2) + h_1(t^2)$ fonksiyonları (3.3.31) ve (3.3.41) ifadeleri kullanılarak ϵ nun $1/20, 1/50, 1/100, 1/200$ değerleri için hesaplanmıştır. Bu parametre değerleri için $h_0(t^2)$ ve $h_0(t^2) + h_1(t^2)$ nin dağılımlarını ifade eden grafikler Şekil 3.3.1–4 ile verilmişlerdir. Grafiklerden de görülebileceği gibi ϵ parametresi küçüldükçe $h_0(t^2)$ ve $h_0(t^2) + h_1(t^2)$ eğrileri birbirine yaklaşmaktadır.



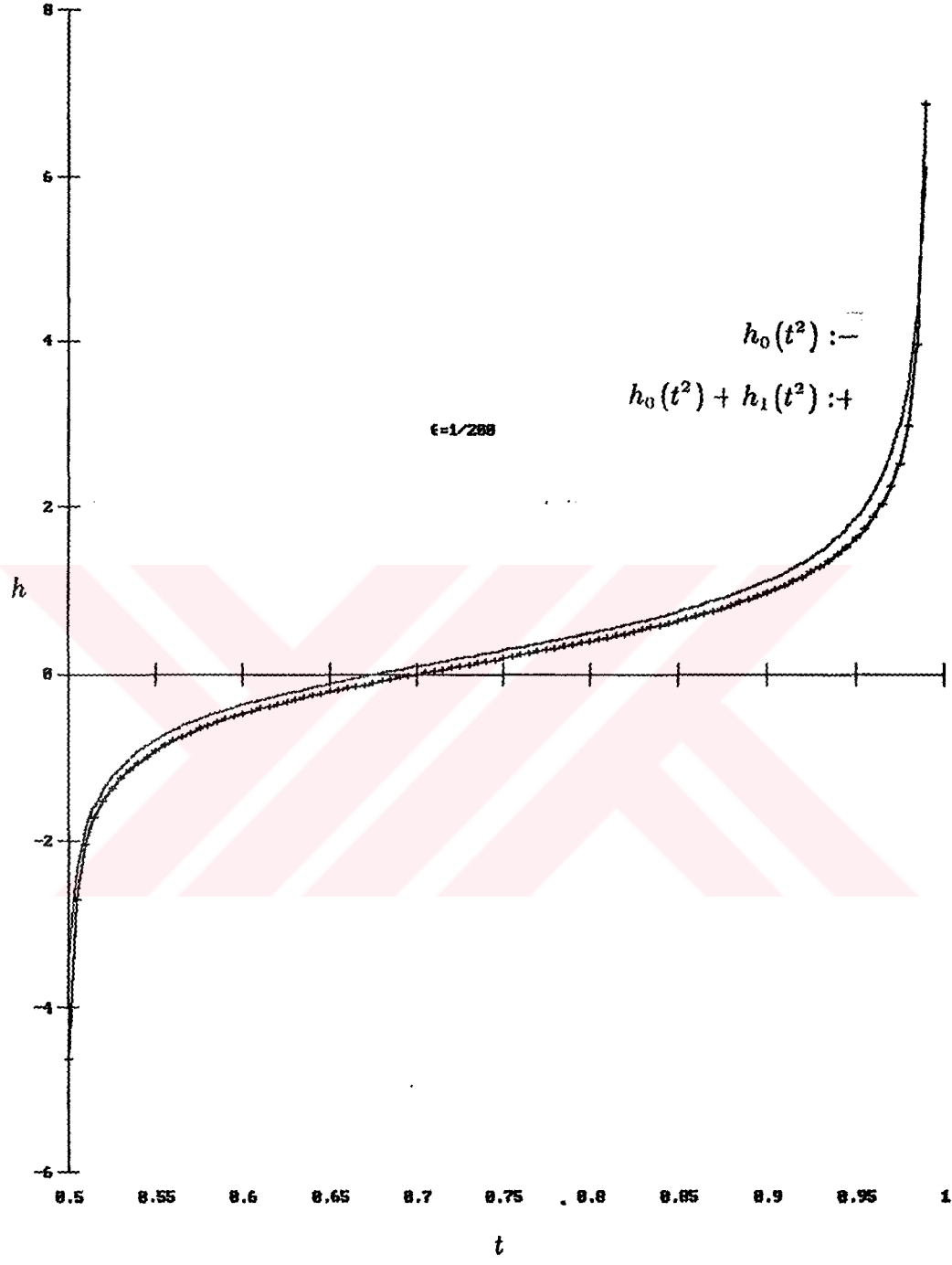
Şekil 3.3.1 $\epsilon = 1/20$ için
 $h_0(t^2)$ ve $h_0(t^2) + h_1(t^2)$ fonksiyonlarının değişimi



Şekil 3.3.2 $\epsilon = 1/50$ için
 $h_0(t^2)$ ve $h_0(t^2) + h_1(t^2)$ fonksiyonlarının değişimi



Şekil 3.3.3 $\epsilon = 1/100$ için
 $h_0(t^2)$ ve $h_0(t^2) + h_1(t^2)$ fonksiyonlarının değişimi



Şekil 3.3.4 $\epsilon = 1/200$ için
 $h_0(t^2)$ ve $h_0(t^2) + h_1(t^2)$ fonksiyonlarının değişimi

BÖLÜM 4

GERİLME ANALİZİ

4.1 GİRİŞ

Çatlak ucu civarında gerilme dağılımının belirlenmesi, çatlak probleminin en önemli kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde bir önceki bölümde formülasyonu ve çözüm şeması verilen çift çatlak problemi için çatlak ucu civarındaki gerilme dağılımı incelenmiştir. Bu amaçla $y = 0$ için (3.2.8) ve (3.2.23)_{1,2} ile verilen yerdeğiştirme ve gerilme bileşenleri

$$W(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty A(\xi) \cos(\xi x) d\xi$$

$$t_{yz}(x, 0) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu \int_0^\infty \xi A(\xi) \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{p}}\right) \cos(\xi x) d\xi \quad (4.1.1)$$

$$t_{xz}(x, 0) = 0$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.15) ile verilen boyutsuz büyüklükler kullanılır ise

$$\bar{W}(s, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty A(\zeta) \cos(\zeta s) d\zeta$$

$$\bar{t}_{yz}(s, 0) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu \int_0^\infty \zeta A(\zeta) \operatorname{erfc}(\epsilon \zeta) \cos(\zeta s) d\zeta \quad (4.1.2)$$

elde edilir. Bu ifadelerde $A(\zeta)$ fonksiyonu yerine (3.3.3) ile verilen ifade yerleştirilir ve yine benzer biçimde (3.3.4) integralinin sonuçlarından yararlanılır ise

$$\bar{W}(s, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_s^1 h(t^2) dt \quad k < s < 1$$

$$\bar{t}_{yz}(s, 0) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu \left[\int_k^1 \frac{th(t^2) dt}{t^2 - s^2} - \int_k^1 h(t^2) K_2(s, t) dt \right] \quad (4.1.3)$$

bulunur. Burada $K_2(s, t)$ fonksiyonu daha önce (3.3.11) ile tanımlanmıştır. Ayrıca

$$\hat{t}_{yz}(s, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{t}_{yz}(s, 0)}{\mu} \quad (4.1.4)$$

yazılırsa (4.1.3)₂ ifadesi

$$\hat{t}_{yz}(s, 0) = -\frac{2}{\pi} \left[\int_k^1 \frac{th(t^2)dt}{t^2 - s^2} - \int_k^1 h(t^2)K_2(s, t)dt \right] \quad (4.1.5)$$

şeklini alır. Şimdi (4.1.5) ifadesi ile verilen gerilme bileşeni çeşitli durumlar için incelenecektir. İlk önce $\epsilon = 0$ olması halinde yerel teoride sırası ile çift ve tek çatlak olması halleri için gerilme durumu incelenmiştir. Daha sonra ise $\epsilon \neq 0$ olması durumunda klasik çözüm yani $h_0(t^2)$ fonksiyonu ile verilen çözüm ifadesi (4.1.5) ile verilen bünye denkleminde yazılarak yine sırası ile çift ve tek çatlak için çatlak ucu civarındaki gerilme dağılımları ϵ parametresinin çeşitli değerleri için verilmiştir. Son olarak ise tek çatlak olması durumunda $h_0(t^2) + h_1(t^2)$ çözüm ifadesi yine (4.1.5) bünye denkleminde kullanılarak benzer analizler yapılmış ve tek çatlak olması halinde $\epsilon = 1/100$ değeri için elde edilen sonuçlar yardımı ile çatlak ucundaki gerilme hesaplanarak mevcut kaynaklardan elde edilmiş sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

4.2 YEREL ELASTİSİTEDE GERİLME ANALİZİ

$\epsilon = 0$ alındığında (3.3.11) den görülebileceği gibi $K_2(s, t) \equiv 0$ ve yine $h(t^2)$ fonksiyonun yapısı incelendiğinde $h_0(t^2)$ fonksiyonu ile verilen çözümün geçerli olduğu görülecektir. Gerilme ifadesi ise (4.1.5) den

$$\begin{aligned} \hat{t}_{yz}(s, 0) &= -\frac{2}{\pi} \int_k^1 \frac{th(t^2)dt}{t^2 - s^2} & 0 < s < k \\ \hat{t}_{yz}(s, 0) &= \frac{2}{\pi} \int_k^1 \frac{th(t^2)dt}{s^2 - t^2} & s > 1 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

şeklinde olur. (4.2.1)_{1,2} ifadelerinde $h_0(t^2)$ fonksiyonu yerine sırası ile (3.3.20)

ve (3.3.23) ile verilen ifadeler yerleştirilir ve (A.30) gözönüne alınır ise

$$\begin{aligned} \hat{t}_{yz}(s, 0) = & \frac{4}{\pi^2} \left\{ \int_k^1 \left[\int_k^1 \left(\frac{1-t^2}{t^2-k^2} \right)^{1/2} \frac{tdt}{t^2-s^2} + \int_k^1 \left(\frac{1-t^2}{t^2-k^2} \right)^{1/2} \frac{tdt}{y^2-t^2} \right] \right. \\ & \left. \times \left(\frac{y^2-k^2}{1-y^2} \right)^{1/2} \frac{yP(y)dy}{y^2-s^2} \right\} - \frac{D_0}{\sqrt{(1-s^2)(k^2-s^2)}} \quad 0 < s < k \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \hat{t}_{yz}(s, 0) = & \frac{4}{\pi^2} \left\{ \int_k^1 \left[\int_k^1 \left(\frac{t^2-k^2}{1-t^2} \right)^{1/2} \frac{tdt}{t^2-s^2} - \int_k^1 \left(\frac{t^2-k^2}{1-t^2} \right)^{1/2} \frac{tdt}{t^2-y^2} \right] \right. \\ & \left. \times \left(\frac{1-y^2}{y^2-k^2} \right)^{1/2} \frac{yP(y)dy}{y^2-s^2} \right\} - \frac{C_0}{\sqrt{(s^2-1)(s^2-k^2)}} \quad s > 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeler sırası ile (3.3.28), (A.8) ve (3.3.27), (A.15) yardımı ile

$$\begin{aligned} \hat{t}_{yz}(s, 0) = & \frac{2}{\pi} \left(\frac{1-s^2}{k^2-s^2} \right)^{1/2} \int_k^1 \left(\frac{y^2-k^2}{1-y^2} \right)^{1/2} \frac{yP(y)dy}{y^2-s^2} \\ & - \frac{D_0}{\sqrt{(1-s^2)(k^2-s^2)}} \quad 0 < s < k \\ & (4.2.2) \\ \hat{t}_{yz}(s, 0) = & \frac{2}{\pi} \left(\frac{s^2-k^2}{s^2-1} \right)^{1/2} \int_k^1 \left(\frac{1-y^2}{y^2-k^2} \right)^{1/2} \frac{yP(y)dy}{s^2-y^2} \\ & - \frac{C_0}{\sqrt{(1-s^2)(k^2-s^2)}} \quad s > 1 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Gerilmenin (4.2.2)_{1,2} ile verilen ifadelerine bakıldığında sırası ile s değeri k ve 1 'e yaklaştığında bu ifadeler sonsuza gitmektedirler. Bu ise gerilmenin çatlak uçlarında karekök tekilliklerine sahip olduklarını göstermektedir. Oysa fiziksel olarak bu mümkün değildir. Gerilme ne kadar büyük olursa olsun sonlu bir değere sahip olmalıdır. Bu durum yerel elastisite teorisinden kaynaklanmaktadır. Çatlak uçlarındaki eğrilik o kadar küçüktürki bu uç

noktalar süreklilik limitinin dışında kalmaktadır. Bu durum yerel sürekli ortamlar mekaniği teorilerinin yetersiz kaldığı durumlara bir örnek teşkil etmektedir. Bunun için burada çatlak uçlarındaki gerilme durumunu belirlemek için

$$N_k = \lim_{s \rightarrow k^-} \sqrt{(k-s)} \hat{t}_{ys}(s, 0)$$

$$N_1 = \lim_{s \rightarrow 1^+} \sqrt{(s-1)} \hat{t}_{ys}(s, 0) \quad (4.2.3)$$

şeklinde tanımlanan [52] gerilme yığılması çarpanlarının tanımları kullanılacaktır. Sırası ile $(4.2.3)_{1,2}$ tanımlarını $(4.2.2)_{1,2}$ de elde edilen gerilme ifadeleri için kullanılır ve düzenlenirse

$$N_k = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2k(1-k^2)}} \left[(1-k^2) \int_k^1 \frac{yP(y)dy}{\sqrt{(1-y^2)(y^2-k^2)}} - \frac{\pi}{2} D_0 \right]$$

$$N_1 = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}} \left[(1-k^2) \int_k^1 \frac{yP(y)dy}{\sqrt{(1-y^2)(y^2-k^2)}} + \frac{\pi}{2} C_0 \right] \quad (4.2.4)$$

elde edilir. Eğer $P(y)$ fonksiyonu verilir ise o zaman $(4.2.4)_{1,2}$ den gerilme yığılması çarpanları hesaplanarak gerilme durumu çatlak uçlarında belirlenebilir. $P(y) = P_0$ yani sabit yükleme alınır ve (3.3.29) ve (3.3.30) dan C_0 ve D_0 ın değerleri $(4.2.4)_{1,2}$ ifadelerinde yerleştirilirse

$$N_k = \frac{P_0}{\sqrt{2k(1-k^2)}} \left[\frac{E}{F} - k^2 \right]$$

$$N_1 = \frac{P_0}{\sqrt{2(1-k^2)}} \left[1 - \frac{E}{F} \right] \quad (4.2.5)$$

elde edilir. N_k/P_0 ve N_1/P_0 ın $(4.2.5)$ ile verilen ifadeleri çeşitli k değerleri için hesaplanarak dağılımlarını gösteren grafikler Şekil (4.2.1 – 2) ile verilmişlerdir. Grafiklerden de görülebileceği gibi çatlak boyu büyüdükçe gerilme yığılması çarpanlarının değerleri küçülmektedir.

Tek çatlak olması durumunda $(4.2.2)_2$ de $k = 0$ alınır ve yine sabit yükleme

düşünülür ise

$$\hat{t}_{yz}(s, 0) = \frac{2}{\pi} \frac{P_0 s}{\sqrt{s^2 - 1}} \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - y^2} dy}{s^2 - y^2} \quad s > 1 \quad (4.2.6)$$

şeklinde gerilme ifadesi yazılabilir. (4.2.6) ifadesi

$$\hat{t}_{yz}(s, 0) = \frac{1}{\pi} \frac{P_0 s}{\sqrt{s^2 - 1}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - y}{y}} \frac{dy}{s^2 - y} \quad s > 1 \quad (4.2.7)$$

şeklinde yazılır ve (A.4) ile verilen hipergeometrik serilerin integral gösterilimi bağıntısı kullanılır ve gerekli işlemler yapılır ise

$$\hat{t}_{yz}(s, 0) = \frac{P_0}{\sqrt{s^2 - 1}} (s - \sqrt{s^2 - 1}) \quad s > 1 \quad (4.2.8)$$

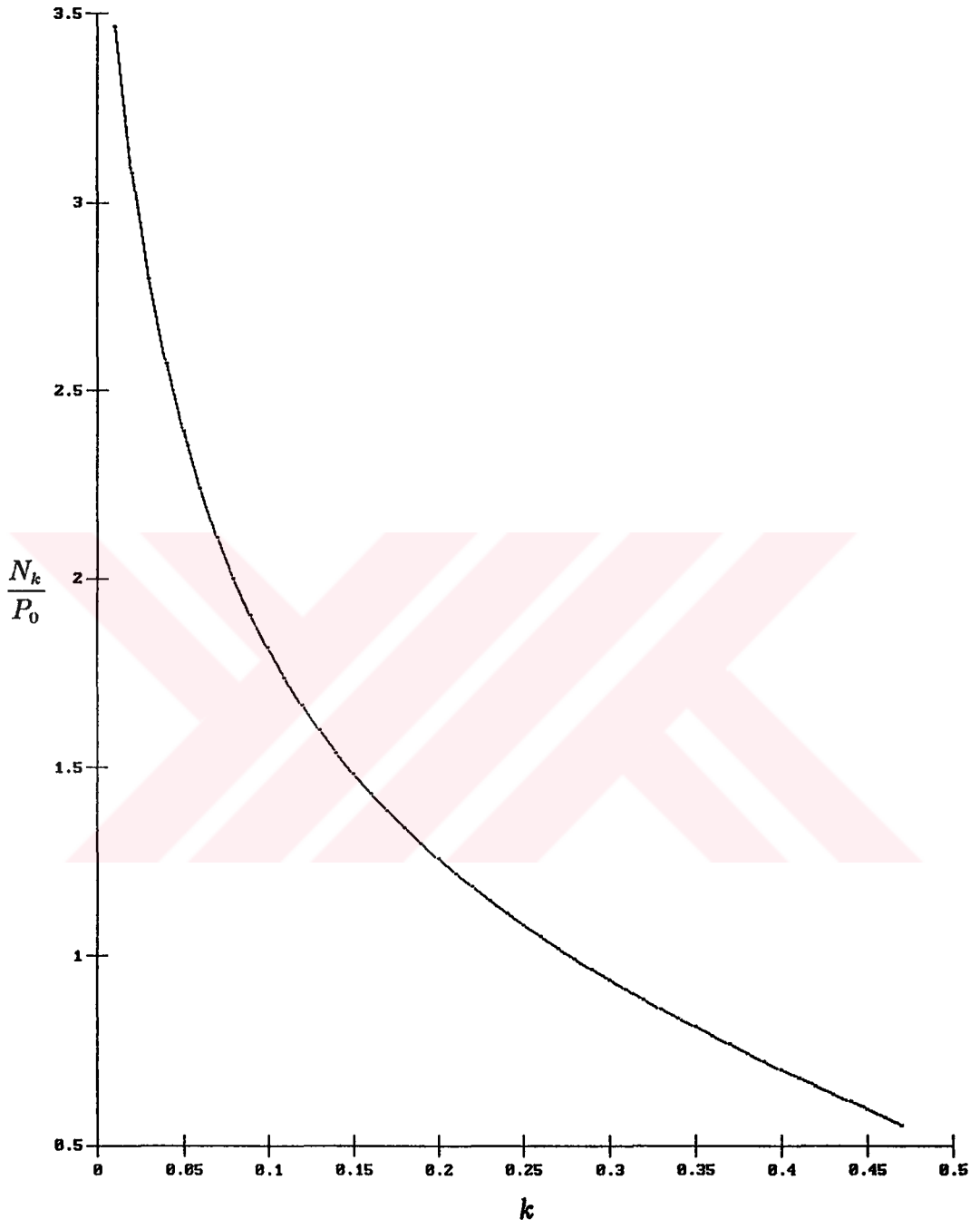
elde edilir. Çatlak yüzeyinde gerilmesiz sonsuzda düzlem dışı kayma gerilmesine maruz tek çatlak probleminde ise (4.2.8) ifadesinden süperpozisyon ilkesi gereğince

$$\hat{t}_{yz}(s, 0) = \frac{P_0 s}{\sqrt{s^2 - 1}} \quad s > 1 \quad (4.2.9)$$

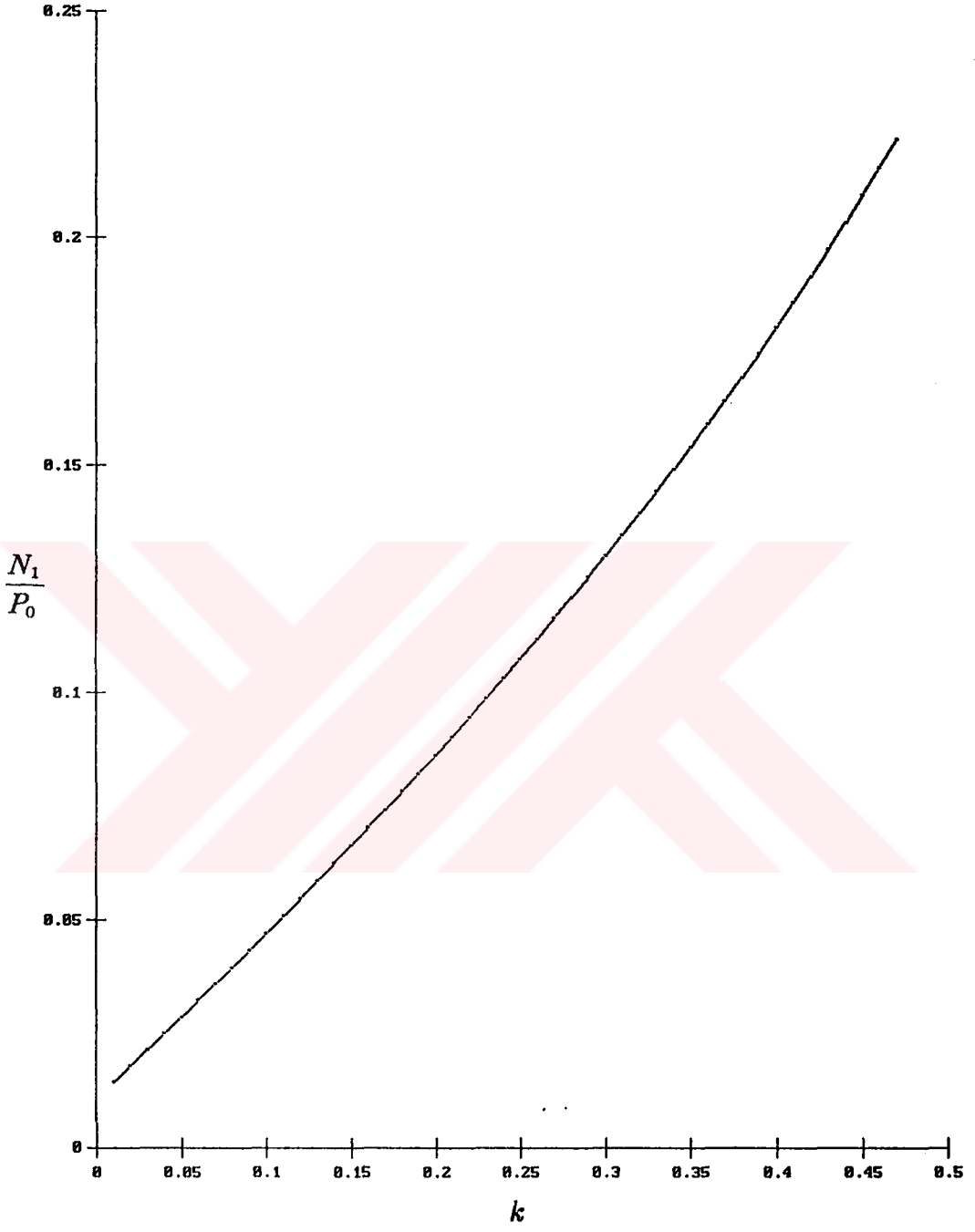
olarak elde edilebilir. (4.2.9) ifadesinde boyutlu büyüklüklere geçilir ve çatlak ucundaki gerilme yığılması çarpanı hesaplanır ise

$$\frac{t_{yz}(c, 0)}{\mu} = \sigma_0 \sqrt{c} \quad (4.2.10)$$

şeklinde bilinen Griffith kırılma kriteri elde edilebilir.



Şekil 4.2.1 N_k/P_0 fonksiyonun k değerlerine göre değişimi



Şekil 4.2.2 N_1/P_0 fonksiyonun k değerlerine göre değişimi

4.3 KLASİK ÇÖZÜM KULLANILARAK ÇİFT VE TEK ÇATLAK İÇİN YEREL OLMAYAN ELASTİSİTEDE GERİLME ANALİZİ

Bu ayıttta yerel elastisik çözümü ifade eden $h_0(t^2)$ fonksiyonu yerel olmayan elastisitenin bünve denkleminde kullanılarak çift ve tek çatlak olması durumlarında çatlak ucu civarındaki gerilme dağılışı incelenmiştir. Bu amaçla (4.1.5) ile verilen bünve denkleminde $h(t^2)$ fonksiyonu yerine $h_0(t^2)$ fonksiyonu yerleştirilir ise gerilme ifadesi

$$\hat{t}_{yz}(s, 0) = -\frac{2}{\pi} \left[\int_k^1 \frac{th(t^2)dt}{t^2 - s^2} - \int_k^1 h(t^2)K_2(s, t)dt \right] \quad (4.3.1)$$

şeklinde yazılabilir. (4.3.1) de $K_2(s, t)$ nin (3.3.11) ile verilen ifadesi ve (3.3.31) de elde edilen $h_0(t^2)$ fonksiyonu yerlerine yazılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} \frac{\hat{t}_{yz}(s, 0)}{P_0} = & -\frac{2}{\pi} \left\{ \int_k^1 \frac{t^2 - \frac{E}{F}}{\sqrt{(t^2 - k^2)(1 - t^2)}(t^2 - s^2)} \left[t - \frac{1}{2}[(s + t) \exp(-\frac{(s - t)^2}{4\epsilon^2}) \right. \right. \\ & \left. \left. + (t - s) \exp(-\frac{(s + t)^2}{4\epsilon^2})] \right] dt \right\} \quad 0 < s < k \\ \\ \frac{\hat{t}_{yz}(s, 0)}{P_0} = & \frac{2}{\pi} \left\{ \int_k^1 \frac{t^2 - \frac{E}{F}}{\sqrt{(t^2 - k^2)(1 - t^2)}(s^2 - t^2)} \left[t - \frac{1}{2}[(s + t) \exp(-\frac{(s - t)^2}{4\epsilon^2}) \right. \right. \\ & \left. \left. + (t - s) \exp(-\frac{(s + t)^2}{4\epsilon^2})] \right] dt \right\} \quad s > 1 \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

yazılabilir. (4.3.2)_{1,2} ile verilen gerilme ifadeleri artık çeşitli k ve ϵ değerleri için hesaplanabilir. Şekil (4.3.1 - 4) de $k = 1/2$ için $\epsilon = 1/20, 1/50, 1/100, 1/200$ parametre değerlerinde hesaplanan çatlak ucu civarındaki gerilme değerlerinin grafikleri verilmiştir. Bu grafiklerden de görülebileceği gibi ϵ 'a bağlı olarak çatlak uçlarındaki gerilme değerleri değişmektedir. Yerel elastisite teorisinin aksine çatlak uçlarındaki gerilme değerleri sonlu kalmakla birlikte ϵ küçüldükçe çatlak uçlarındaki gerilmeler büyük değerler almaktadır. $\epsilon \rightarrow 0$ götürüldüğünde (4.3.2)_{1,2} den görülebileceği gibi klasik gerilme ifadeleri elde edilebilir. Gerilme ifadelerinin sayısal hesaplarında (B.11) ile verilen Chebyshev kuvadratür formülü kullanılmıştır.

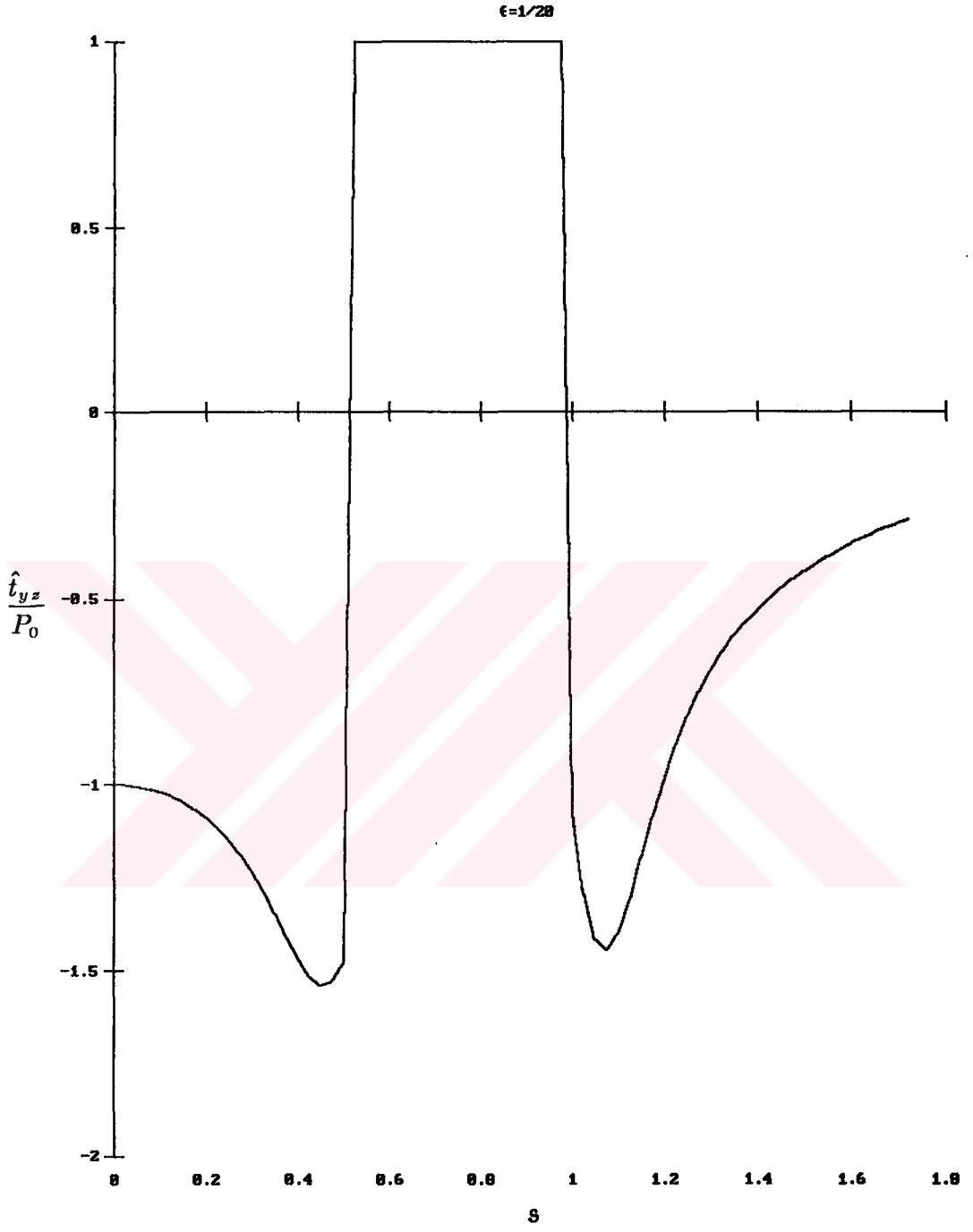
Tek çatlak olması durumunda (4.3.2)₂ ifadesinde $k = 0$ alınır ise

$$\frac{\hat{t}_{yz}(s, 0)}{P_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\left[t - \frac{1}{2}[(s+t) \exp(-\frac{(s-t)^2}{4\epsilon^2}) - (s-t) \exp(-\frac{(s+t)^2}{4\epsilon^2})] \right] t dt}{\sqrt{1-t^2}(s^2-t^2)}$$

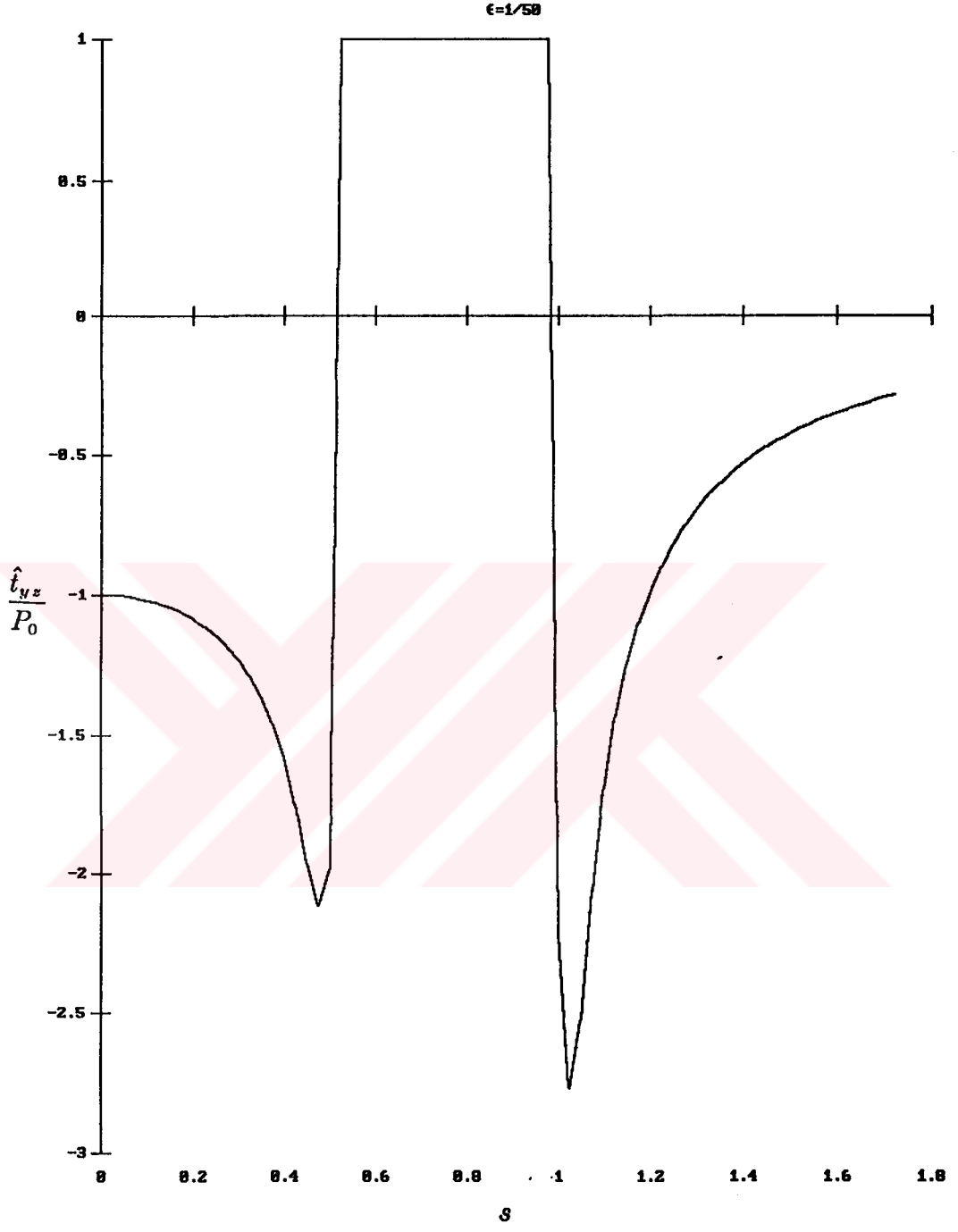
$$s > 1$$

(4.3.3)

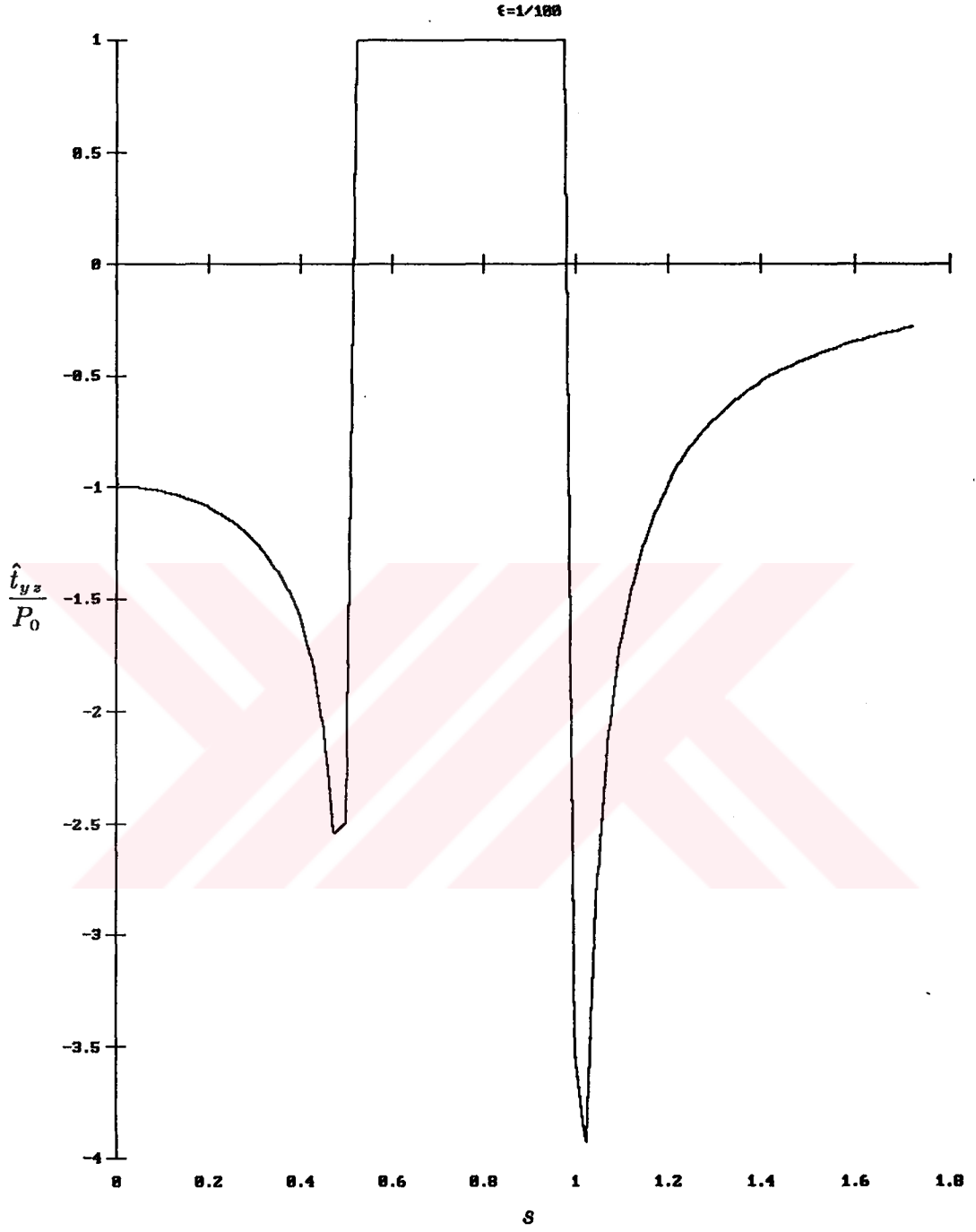
şeklinde gerilme ifadesi yazılabilir. Yine (4.3.3) ile verilen gerilme ifadesi ϵ nun çeşitli değerleri için (B.12) ile verilen Chebyshev kuvadratür formülü yardımı ile hesaplanabilir. Burada yine $\epsilon = 1/20, 1/50, 1/100, 1/200$ için (4.3.3) ifadesi çatlak ucu civarında hesaplanarak gerilme dağılımı grafikleri çizilmiştir. (Şekil 4.3.5 - 8) Gerek gerilme ifadesinden, gerek grafiklerden görülebileceği gibi $\epsilon \rightarrow 0$ yaklaştıkça gerilme değeri çatlak ucunda sonsuza gitmektedir. Klasik teorinin aksine $\epsilon \neq 0$ oldukça gerilme değeri çatlak ucu civarında sonlu kalmaktadır. Ayrıca gerilme dağılımını ifade eden grafikler Eringen [27] tarafından elde edilen dağılım grafikleri ile uyusmaktadır.



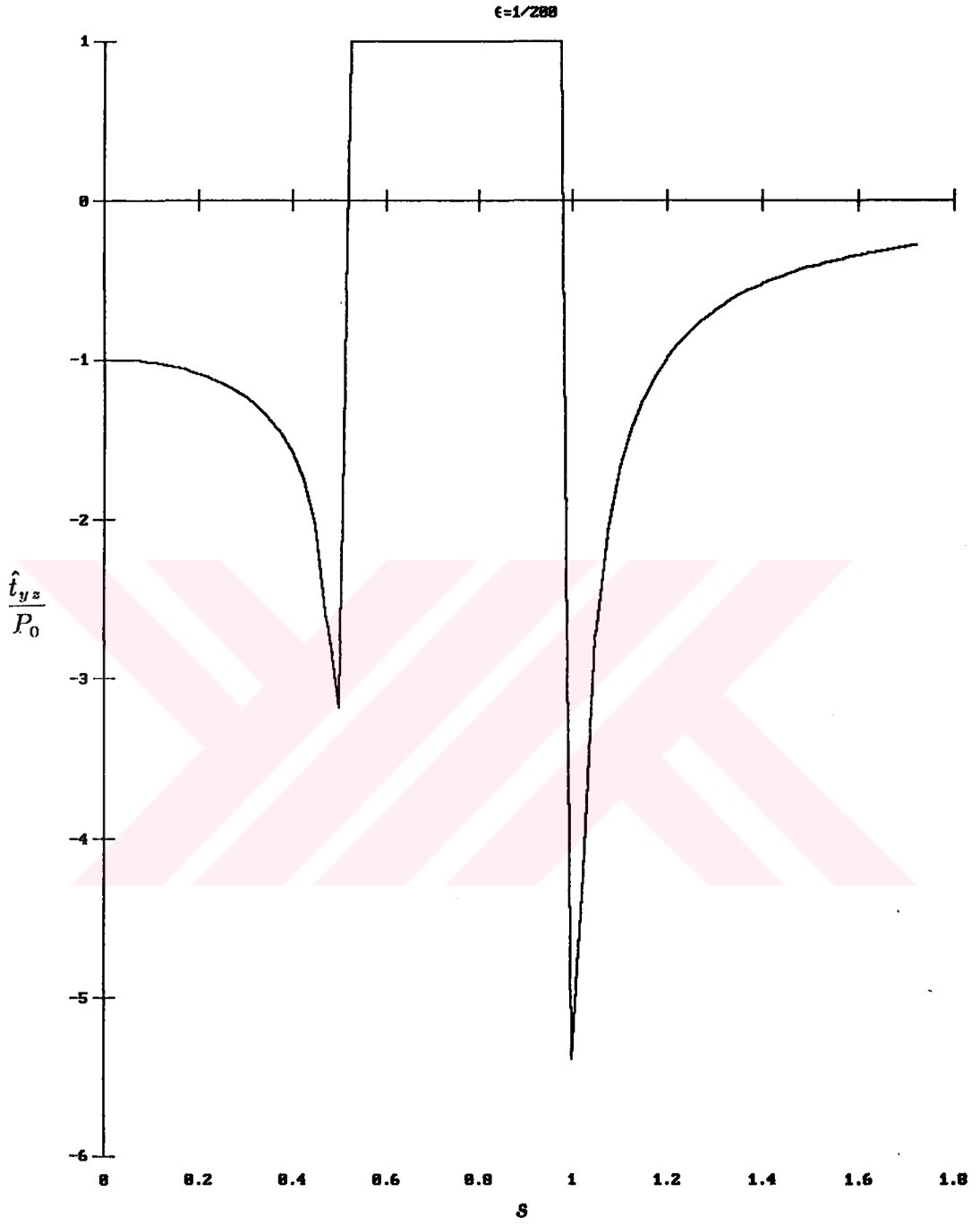
Şekil 4.3.1 $\epsilon = 1/20$ için çift çatlakta
çatlak uçları civarındaki gerilme dağılımı



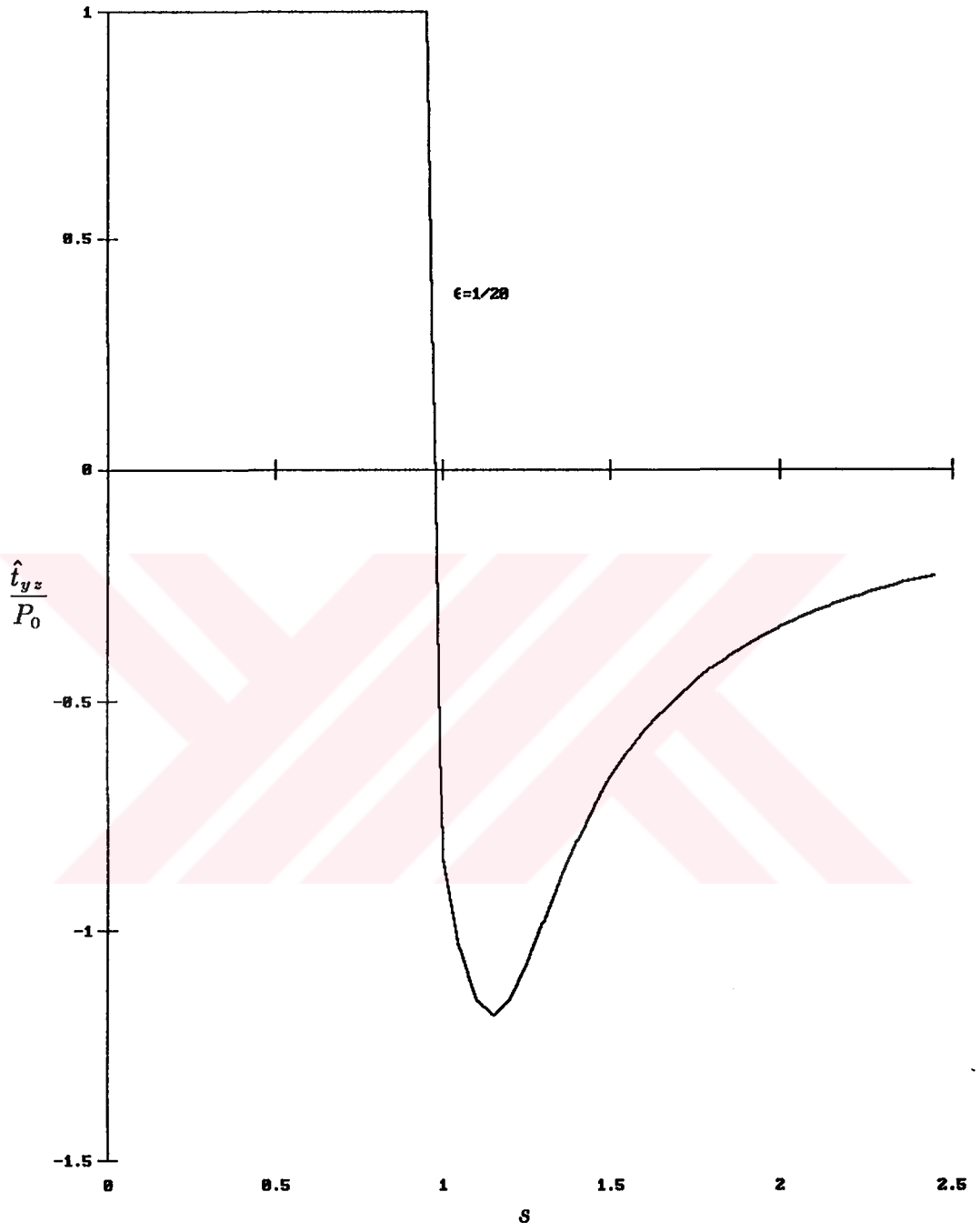
Şekil 4.3.2 $\epsilon = 1/50$ için çift çatlakta
çatlak uçları civarındaki gerilme dağılımı



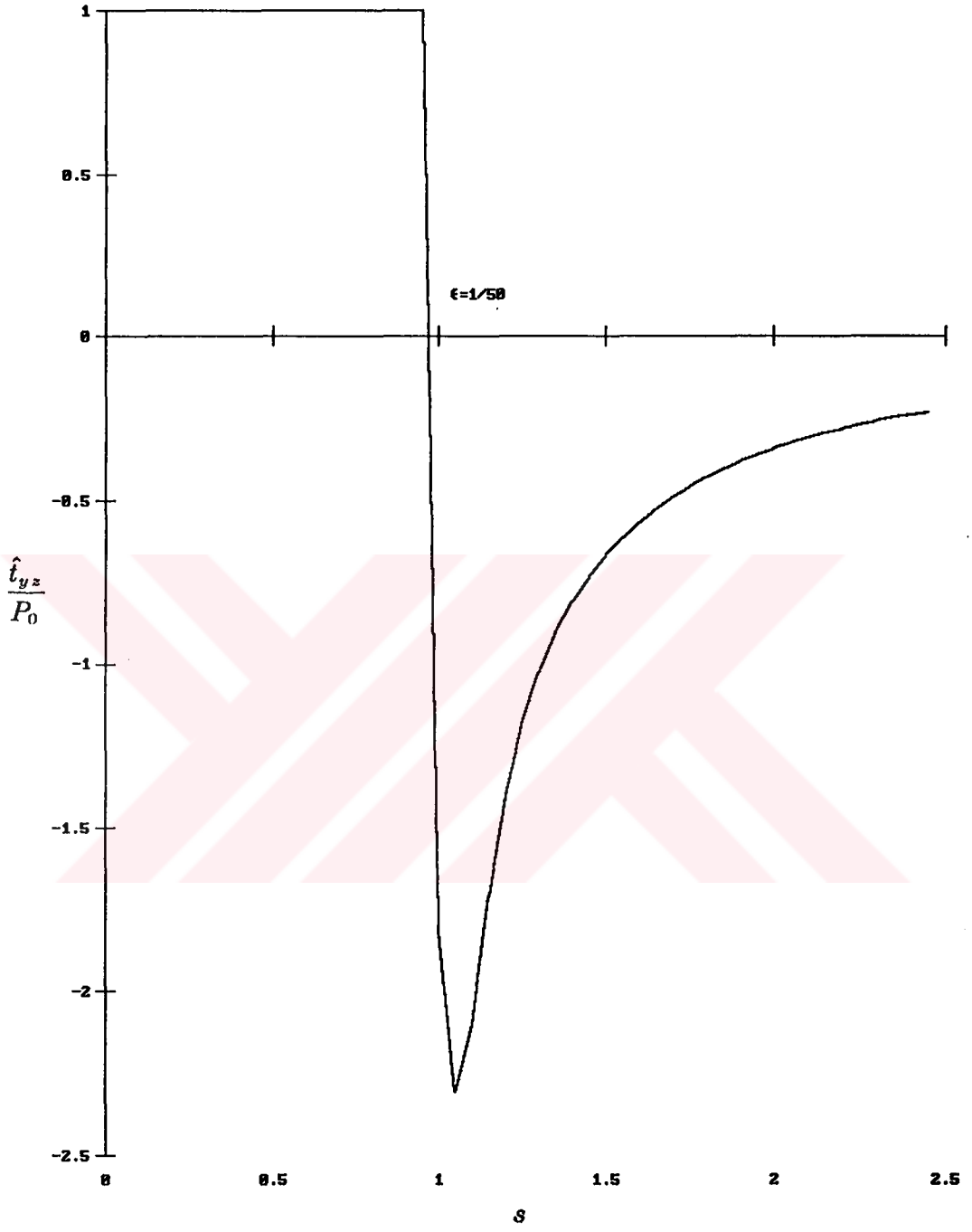
Şekil 4.3.3 $\epsilon = 1/100$ için çift çatlakta
çatlak uçları civarındaki gerilme dağılımı



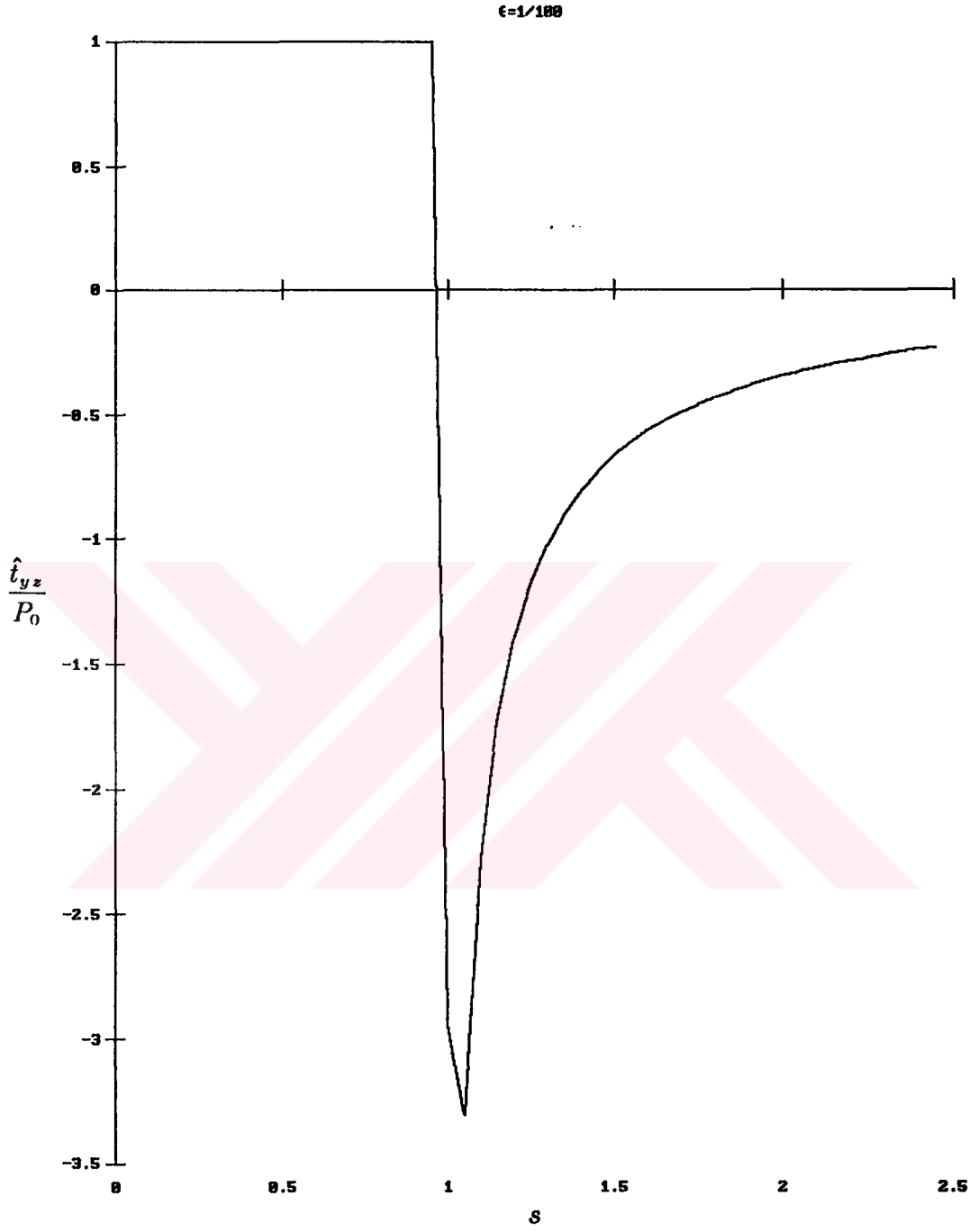
Şekil 4.3.4 $\epsilon = 1/200$ için çift çatlakta
çatlak uçları civarındaki gerilme dağılımı



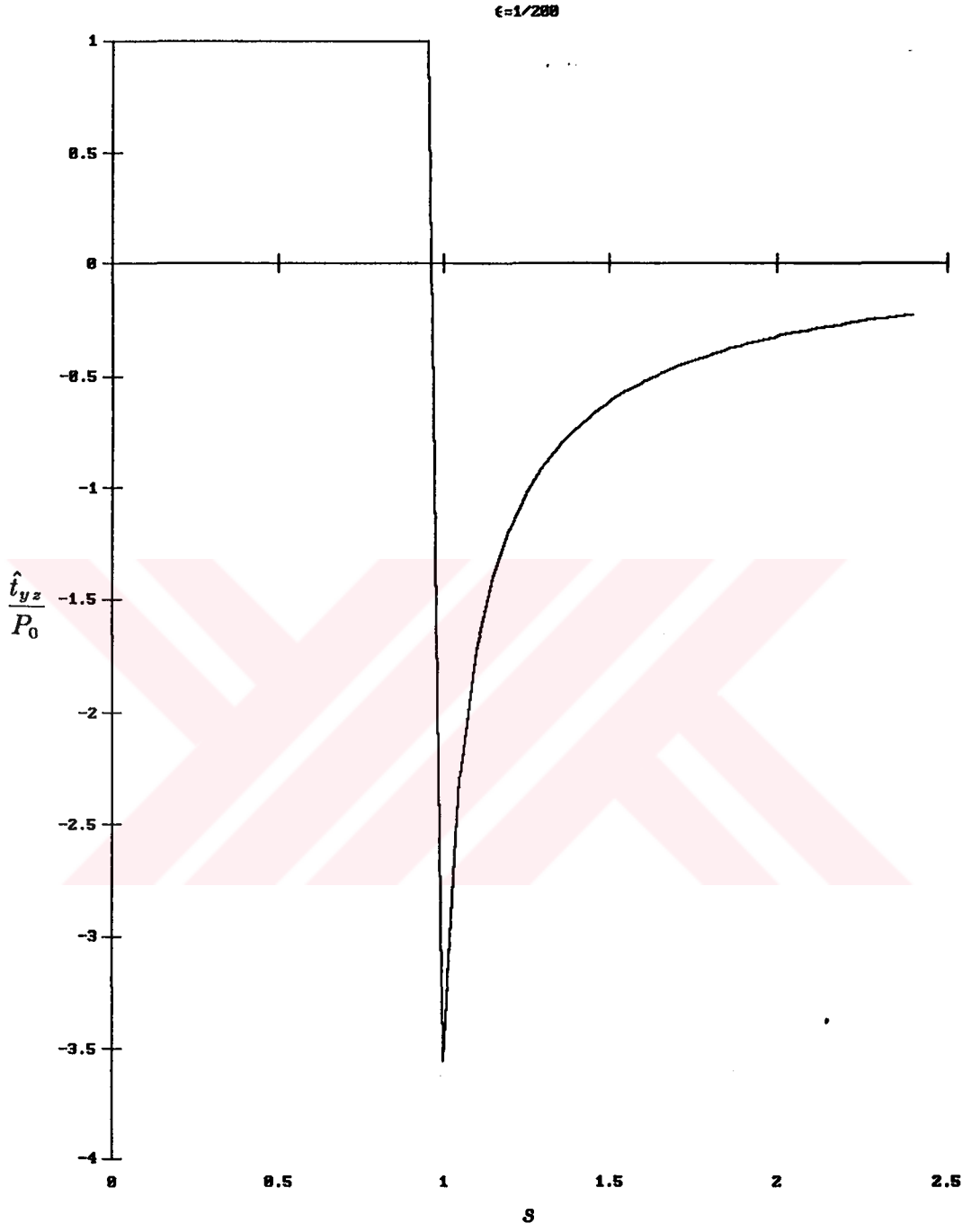
Şekil 4.3.5 $\epsilon = 1/20$ için tek çatlakta
çatlak ucu civarındaki gerilme dağılımı



Şekil 4.3.6 $\epsilon = 1/50$ için tek çatlakta
çatlak ucu civarındaki gerilme dağılımı



Şekil 4.3.7 $\epsilon = 1/100$ için tek çatlakta
çatlak ucu civarındaki gerilme dağılımı



Şekil 4.3.8 $\epsilon = 1/200$ için tek çatlakta
çatlak ucu civarındaki gerilme dağılımı

4.4 YEREL OLMAYAN ELASTİSİTEDE TEK ÇATLAK PROBLEMİ

Bundan önceki ayıtlarda gerilme analizi klasik çözüm yani yerel elastisik çözümü ifade eden $h_0(t^2)$ ifadesi kullanılarak yapılmıştır. Bu ayıta ise $h_0(t^2) + h_1(t^2)$ çözüm ifadesi kullanılarak tek çatlak için gerilme analizi yapılacaktır. Burada $h_1(t^2)$, yerel olmayan katkıları içeren ayıt 3.3 de çözüm şeması sunulan ikinci adıma karşı gelen çözümü ifade etmektedir. Bu amaçla (3.3.38) den $k = 0$ için

$$h_1(t^2) = -\frac{2}{\pi} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-y^2} R_1(y^2) dy}{y^2 - t^2} \quad (4.4.1)$$

elde edilir. Burada $R_1(y^2)$ ifadesi (3.3.33) den birtakım düzenlemelerden sonra

$$G(y, u) = \left\{ \left(1 + \frac{y}{\sqrt{u}}\right) \exp\left(-\frac{(\sqrt{u} - y)^2}{4\epsilon^2}\right) + \left(1 - \frac{y}{\sqrt{u}}\right) \exp\left(-\frac{(\sqrt{u} + y)^2}{4\epsilon^2}\right) - 2 \right\} \quad (4.4.2)$$

olmak üzere

$$\bar{R}_1(y^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{u}{1-u}} \frac{G(y, u) du}{u - y^2} \quad (4.4.3)$$

tanımı ile

$$R_1(y^2) = P_0(1 + \bar{R}_1(y^2)) \quad (4.4.4)$$

yazılabilir. (4.4.4) ifadesi (4.4.1) de kullanılır ve ara işlemler yapılırsa (3.3.31) den $k = 0$ için $h_0(t^2)$ ifadesi de gözönüne alındığında

$$h_0(t^2) + h_1(t^2) = \frac{P_0 t}{\sqrt{1-t^2}} \left[1 - \frac{1}{\pi} (F(t^2) - \pi(1 + \bar{R}_1(t^2))) \right] \quad (4.4.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$F(t^2) = \int_0^1 \sqrt{\frac{y}{1-y}} [\bar{R}_1(1-y) - \bar{R}_1(t^2)] dy \quad (4.4.6)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Çatlak ucu civarındaki gerilme değerlerini elde etmek için yine (4.1.5) de $k = 0$ alınarak $h(t^2)$ yerine (4.4.5) den $h_0(t^2) + h_1(t^2)$

fonksiyonu yerleştirildiğinde ve (4.4.2) den

$$\frac{\hat{t}_{yz}(s, 0)}{P_0} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} \frac{[1 - \frac{1}{\pi}\{F(t) - \pi(1 + \bar{R}_1(t))\}]G(s, t)dt}{t - s^2} \quad (4.4.7)$$

gerilme ifadesi elde edilebilir. (4.4.7) ile verilen gerilme ifadesi ayıt 4.3 olduğu gibi ϵ 'nın sırası ile 1/20, 1/50, 1/100, 1/200 değerleri için çatlak ucu civarında hesaplanarak gerilme dağılımları elde edilmiştir. (Şekil 4.4.1 - 4) Gerek ayıt 4.3 de tek çatlak için elde edilen gerilme dağılımları gerekse (4.4.7) den elde edilen gerilme dağılımları birbirine çok yakındır. Burada elde edilen gerilme değerleri ϵ ' na bağlı olarak çatlak ucundan uzaklaştıkça ayıt 4.3 de elde edilen değerlere göre hızla sifıra gitmektedir. Buna rağmen her iki durumda elde edilen gerilme dağılımları birbirine çok yakın olması klasik çözümün yani $h_0(t^2)$ ifadesinin yerel olmayan elastitenin bünye denklemlerinde kullanılması ile elde edilen gerilme değerlerinin çatlak ucu civarındaki gerilme durumunu yeterince açıklayabileceğini söyleyebiliriz.

Çatlak ucundaki gerilme yığılması

$$\frac{t_{yz}(c, 0)}{\sigma_0} = \frac{c_3}{\sqrt{\epsilon}} \quad \epsilon = \frac{a}{2\beta c} \quad (4.4.8)$$

şeklinde verilebilir [26]. Burada c_3 (4.3.3) ve (4.4.7) den ortalama olarak $\epsilon = 1/100$ için

$$c_3 = -0.30 \quad (4.4.9)$$

alınabilir. Burada Eringen [26], [27] de olduğu gibi aşağıdaki sonuçları çıkarabiliriz.

a: Maksimum kayma gerilmesi çatlak ucunda oluşmaktadır ve bu değer sonludur. (4.4.8)

b: Kayma gerilmesi, $a \rightarrow 0$ olduğunda yani atomik uzaklık sifıra gittiğinde çatlak ucunda sonsuza gitmektedir. (Klasik sonuç)

c: $t_{yz}(c, 0) = t_c$ (= kohezyiv kayma gerilmesi) değerinde çatlak yayılmaya başlayacaktır. Bu durumda (4.4.8) den

$$\sigma_0^2 c = C_G \quad (4.4.10)$$

yazılabilir. Burada C_G

$$C_G = \left(\frac{a}{2\beta c_3^2}\right)t_c^2 \quad (4.4.11)$$

dir. (4.4.10) ifadesi gevrek kırılma için Griffith kırılma kriteridir. Bu ifade Griffith 'in önerdiği yüzey enerjisi kavramını kullanmadan doğrudan maksimum kayma gerilmesi hipotezi yolu ile verilmiştir, [26]. Kırılma için (4.4.10) ile verilen bu kriter makroskopik ve mikroskopik ölçekteki kırılma mekanizmasını sadece birleştirmekten ziyade, atomik ölçekte doğal olarak bağ bozulmalarında dahi kullanılabilir. Kohezyiv gerilme t_c Griffith 'in tanımladığı γ yüzey enerjisi kavramı kullanılarak tahmin edilebilir. Bu amaçla [39],

$$C_G = \frac{4\mu\gamma}{\pi(1-\nu)} \quad (4.4.12)$$

yazılabilir. (4.4.12) ifadesi (4.4.11) 'e eşitlendiğinde

$$t_c^2 = K_c \gamma \quad (4.4.13)$$

yazılabilir. Burada

$$K_c = \frac{8\mu c_3^2 \beta}{\pi(1-\nu)} \quad (4.4.14)$$

olarak tanımlanmıştır. Çelik için elastik sabitler ve γ değeri olarak [27],

$$\gamma = 1975 CGS, \mu = 6.92 \times 10^{11} CGS, \nu = 0.291, a = 2.48 A^0$$

alınır ise

$$\frac{t_c}{\mu} = 0.1928736\beta^{1/2} \quad (4.4.15)$$

elde edilir. Radyal yani $r = na$ mesafesinde (n adet atom uzaklığında) yerel olmayan etki fonksiyonun $r = 0$ daki değerini %1' e indirdiği varsayıldığında (3.2.13) ten

$$\exp(-\beta^2 n^2) = \frac{1}{100}$$

yazılabilir. Buradan ise

$$\beta = 2.145966/n \quad (4.4.16)$$

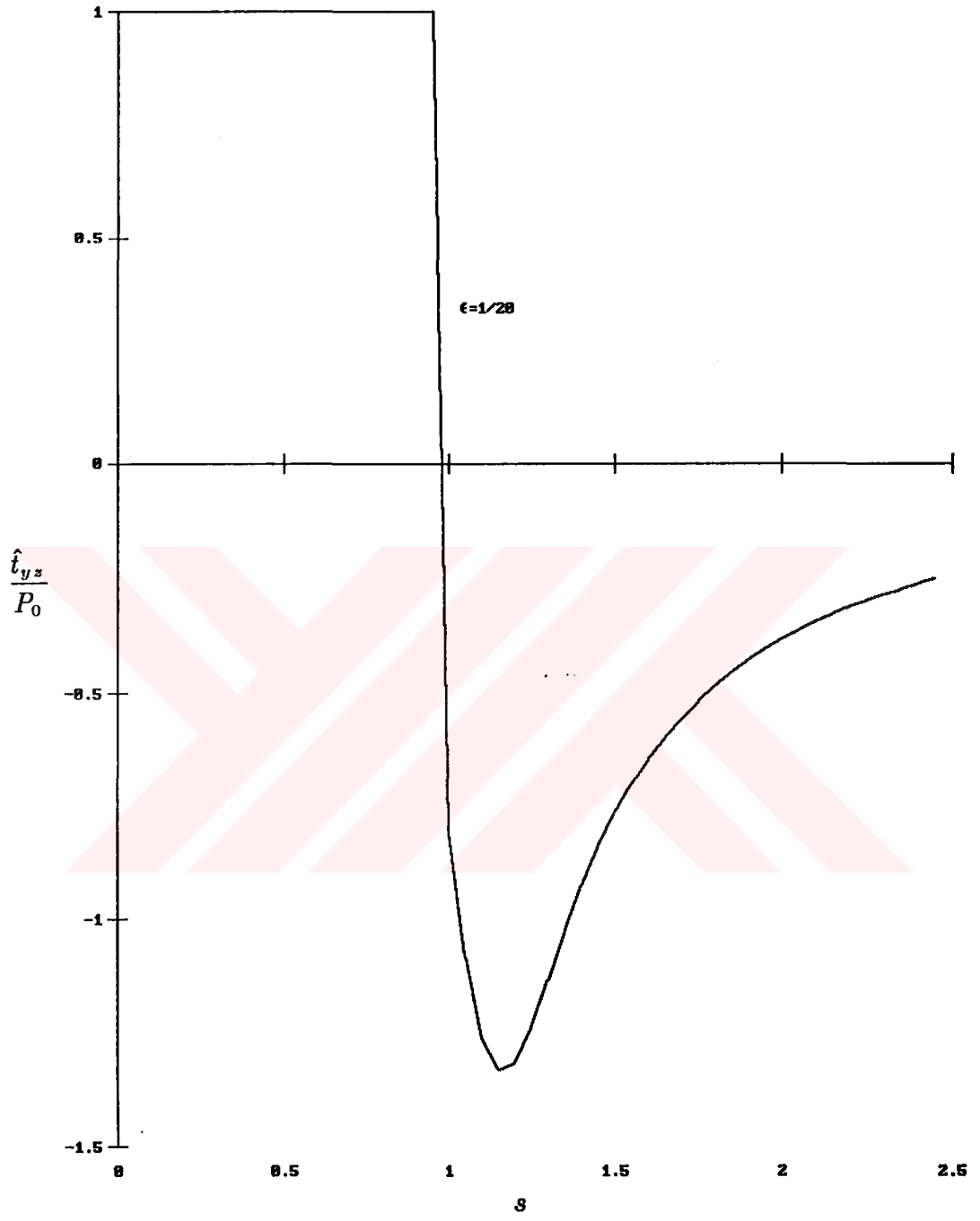
elde edilebilir. Bu değer (4.4.15) de yerine yazıldığında

$$\frac{t_c}{\mu} = 0.282542n^{-1/2} \quad (4.4.17)$$

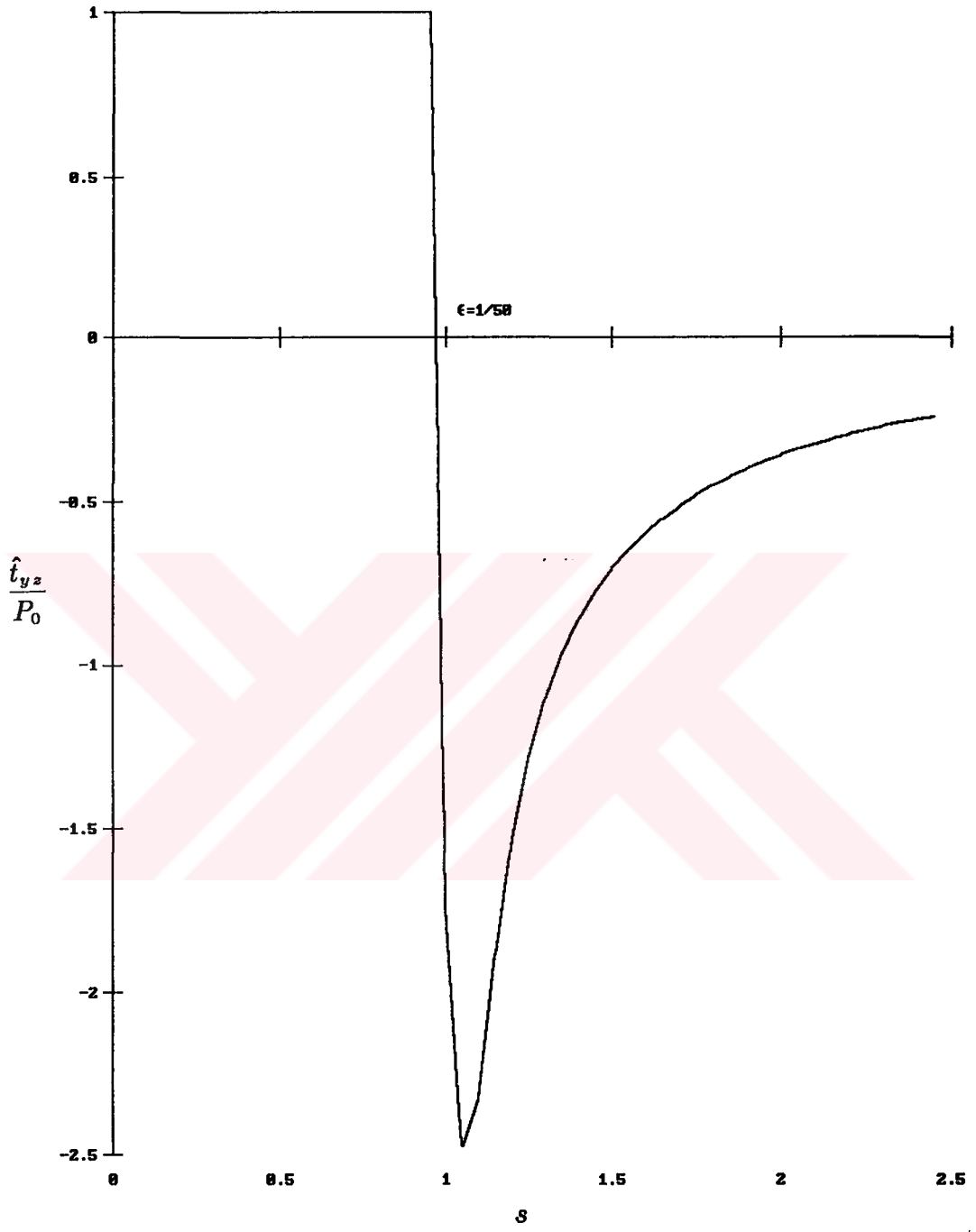
elde edilir. $n = 6$ için

$$\frac{t_c}{\mu} = 0.1153 \quad (4.4.18)$$

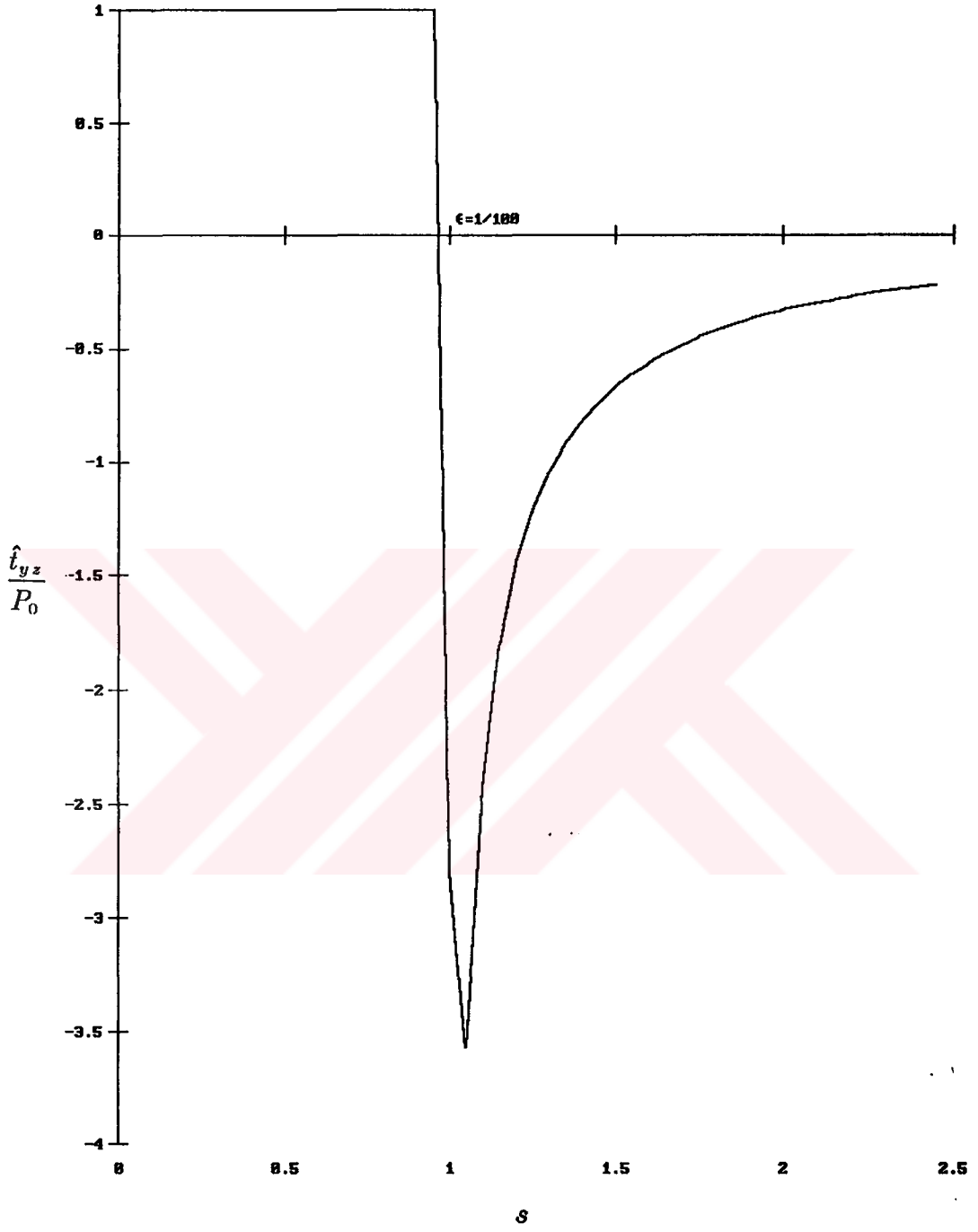
dir. Bu değer Eringen [27] de 0.14 olarak verilmiştir. (4.4.18) ile verilen bu sonuç metalurji bilimi ile uğraşan araştırmacıların elde ettikleri değerlerle uyusmaktadır. Örneğin Kelly [53] de $t_c/\mu = 0.11$ olarak verilmiştir. Yerel olmayan yapıyı ifade eden etki fonksiyonlarının deneylerle uyumlu olarak yeterince doğru olarak seçilmesi halinde yerel olmayan teori, yerel teorinin yetersiz kaldığı problemlere başarı ile uygulanabileceği söylenebilir.



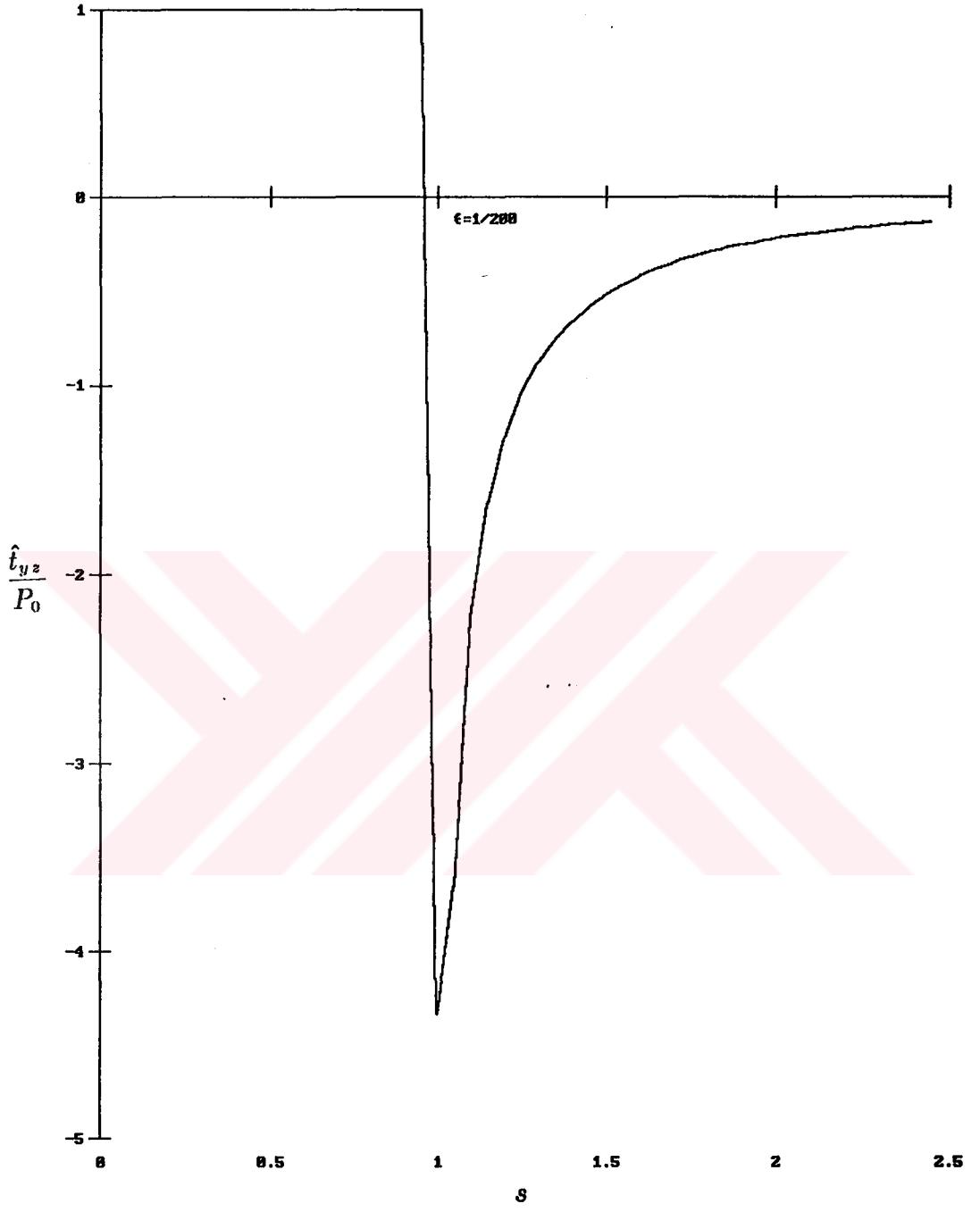
Şekil 4.4.1 $\epsilon = 1/20$ için tek çatlakta
çatlak ucu civarındaki gerilme dağılımı



Şekil 4.4.2 $\epsilon = 1/50$ için tek çatlakta
çatlak ucu civarındaki gerilme dağılımı



Şekil 4.4.3 $\epsilon = 1/100$ için tek çatlakta
çatlak ucu civarındaki gerilme dağılımı



Şekil 4.4.4 $\epsilon = 1/200$ için tek çatlakta
çatlak ucu civarındaki gerilme dağılımı

SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada sonsuzda düzgün dağılı düzlem dışı kayma gerilmesine maruz, içerisinde doğrusal iki çatlak bulunan lineer izotrop sonsuz elastik katı problemi göz önüne alınmıştır. Elastik katı homojen varsayıldığında problem, süperpozisyon ilkesi kullanılarak iki problemin toplamı şeklinde ifade edilebilir. Birinci problem, içinde çatlak bulunmayan sonsuzda düzgün dağılı düzlem dışı kayma gerilmesine maruz lineer izotrop sonsuz elastik katı problemidir. Bu durumda malzeme homojen varsayıldığı için gerilme her yerde sabit olacaktır. İkinci problem, sonsuzda yüksüz, çatlak yüzeylerine ters yönde etkiyen düzgün dağılı kayma gerilmesine maruz iki doğrusal çatlak içeren lineer izotrop sonsuz elastik katı problemidir. Bu çalışmada ikinci problem yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak çözülmeye çalışılmıştır.

Problemin sınır koşullarından üretilen üçlü integral denklemler tekil Fredholm integral denklemine indirgenmiştir. Elde edilen tekil integral denklemi doğrudan analitik olarak çözmek mümkün olmamıştır. Bunun nedeni integral denklemin hem tekil olmasından hemde çekirdek fonksiyonun yapısından kaynaklanmaktadır. Burada klasik elastisite teorisi kullanılarak elde edilecek çözümün etkin çözüm olduğu varsayılarak, çözüm fonksiyonu bir pertürbasyon serisine açılmış ve tekil Fredholm integral denklemine yerleştirilerek rekürsiv (ardışık) tekil integral denklemlere ulaşılmıştır. Elde edilen tekil integral denklemler, formel olarak sonlu Hilbert dönüşümü uygulanarak çözülebilecek bir yapıya sahiptirler. Bu dönüşüm yardımı ile integral denklemlerin çözüm ifadeleri genel olarak verilmiştir.

Birinci ve ikinci adımdaki denklemlerin çözümleri sabit yükleme özel hali için ifade edilerek, sayısal olarak çözülmüşlerdir. İlk adımda elde edilen çözüm yerel elastisite teorisinin kullanılması ile elde edilecek olan çözümü ifade etmektedir. Yerel çözüm yani birinci adımdaki çözüm analitik olarak hesaplanmıştır. Yerel çözüm ve yerel olmayan katkıları içeren ikinci adımdaki çözümlerin toplamı,

yerel olmayan yapıyı ifade eden parametrenin çeşitli değerleri için hesaplanarak yerel çözüm ifadesi ile karşılaştırılmıştır. Yerel olmayan yapıyı ifade eden parametre sıfıra yaklaştıkça yani küçük değerleri için yerel olmayan teorenin bir sonucu olarak toplam çözümün yerel çözüme yaklaştığı görülmüştür.

Elde edilen çözüm ifadeleri kullanılarak önce yerel elastisite teorisi için sırası ile çift ve tek çatlak için gerilme analizi yapılarak çatlak uçlarındaki gerilme yığılması çarpanları düzgün dağılı yüklemeye için verilmiştir. Daha sonra yerel yani birinci adımda elde edilen çözüm ifadesi yerel olmayan elastisitenin gerilme bünye denkleminde kullanılarak sırası ile yine çift ve tek çatlak için yerel olmayan yapıyı ifade eden parametrenin çeşitli değerlerinde çatlak ucu civarındaki gerilme değerleri hesaplanarak gerilme dağılımlarının grafikleri verilmiştir. Son olarak birinci ve ikinci adımda elde edilen çözümlerin toplamı yine yerel olmayan teorenin gerilme bünye denkleminde kullanılarak aynı parametre değerlerinde tek çatlak için çatlak ucu civarındaki gerilme değerleri hesaplanarak, gerilme dağılımını ifade eden grafikler verilmiştir.

Yerel olmayan yapıyı tanımlayan parametrenin sıfırdan farklı olması durumunda gerilme değerleri çatlak ucunda yerel teorenin aksine sonlu kalmaktadır. Yine en büyük gerilme değerleri çatlak ucunda olmaktadır. Tek çatlak için maksimum kayma gerilmesi hipotezi kullanılarak çatlak ucundaki kritik gerilme değeri Eringen [27] deki yol izlenerek hesaplanmıştır. Bunun için birinci adımda yerel olmayan teori ile çatlak ucunda hesaplanan gerilme değeri ile yine birinci ve ikinci adımdaki çözümlerin toplamının kullanılması ile elde edilen gerilme değeri de dikkate alınarak ortalama bir değer seçilmiştir. Özel olarak yine [27] deki gibi çelik için yapılan sayısal incelemede Kelly [53] de verilen teorik değere % 0.5 hata ile yaklaşan bir sonuç elde edilmiştir. Eringen [27] de ise bu yaklaşım % 3 olarak elde edilmiştir.

Bu elde edilen değer metalurji ile uğraşan araştırmacıların yaptıkları çalışmalarla elde ettikleri değerlere yaklaşıklığı bakımından kabul edilebilir bir sonuç olduğu söylenebilir [53]. Doğaldır ki yerel olmayan yapıyı ifade eden etki fonksiyonlarının ortamın bünyesini yansıtacak şekilde deney sonuçları ile uyumlu

bir şekilde seçilmesinin büyük yararı olacaktır. Eğer bünye denklemleri ortam için gerekli özen içinde seçilebildiği takdirde elastisite ya da genel olarak yerel sürekli ortamlar teorilerinden kaynaklanan yetersizliklerin yerel olmayan teori yardımı ile giderilebileceği söylenebilir.

Sonuç olarak problemin çözümü sırasında kullanılan çözüm şeması birinci, ikinci adımda olduğu gibi istenilen adıma kadar kullanılabilir. Adım sayısı arttıkça problemin bilgisayar kullanılarak çözümü de o derece güçleşmekle birlikte mümkündür. Burada ilk iki adıma karşı gelen çözüm ifadelerinin sabit yükleme hali için hesaplanması ile yetinilmiştir. Bu da yerel olmayan teoriden beklediğimiz sonuçların elde edilmesi bakımından yeterli olmuştur. Gerilme analizinde özellikle tek çatlak özel hali için yerel çözüm ifadesinin kullanılması ile yerel olmayan teoride, çatlak ucuna yaklaşıldığında elde edilen gerilme değerleri mevcut sonuçlara uygun düşmektedir. Son olarak yine tek çatlak olması hali için bu defa yerel olmayan katkıları içeren ikinci adımdaki çözüm ifadesi de kullanılarak gerilme durumu incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda çatlak ucuna yaklaşıldığında elde edilen gerilme değerleri bir önceki incelemeye göre birbirine çok yakın olmakla birlikte çatlak ucundan uzaklaşıldığında daha çabuk sıfıra gitmektedir. Bu ise probleme uygun bir sonuçtur.

EK-A
BAZI İNTEGRALLERİN HESAPLANMASI

Burada sonuçlarından yararlanılan bazı integrallerin hesaplanması üzerinde durulacaktır.

$$I_1 = \int_k^1 \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2-k^2}} \frac{t dt}{(t^2-z^2)} \quad z \in (0, k) \quad (A.1)$$

integrali gözönüne alınır ve bu integralde

$$t^2 = u$$

dönüşümü uygulanır ise

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{k^2}^1 \sqrt{\frac{1-u}{u-k^2}} \frac{du}{(u-z^2)} \quad (A.2)$$

yazılabilir. Yine (A.2) de

$$u = (1-k^2)y + k^2$$

dönüşümü yapılırsa

$$I_1 = -\frac{(1-k^2)}{2(z^2-k^2)} \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}} (1-y)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \left(\frac{1-k^2}{z^2-k^2} \right) y \right\}^{-1} dy \quad (A.3)$$

yazılabilir. Burada

$$F(\alpha, \beta; \gamma; \omega) B(\beta, \gamma - \beta) = \int_0^1 y^{\beta-1} (1-y)^{\gamma-\beta-1} (1-\omega y)^{-\alpha} dy \quad (A.4)$$

bağıntısı gözönüne alındığında [54], (A.3) integrali

$$I_1 = -\frac{(1-k^2)}{2(z^2-k^2)} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) F\left(1, \frac{1}{2}; 2; \frac{1-k^2}{z^2-k^2}\right) \quad (A.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $F(\alpha, \beta; \gamma; \omega)$ ve $B(\beta, \gamma - \beta)$ fonksiyonları sırası ile hipergeometrik fonksiyon ve beta fonksiyonudur. (A.5) ifadesinde görülen beta fonksiyonu

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} = \frac{\pi}{2}$$

dir. Ayrıca

$$F\left(1, \frac{1}{2}; 2; \omega\right) = F\left(1, \frac{1}{2}; 2; 4v(1-v)\right) = \frac{1}{1-v} \quad (A.6)$$

bağıntısı kullanıldığında

$$F(1, \frac{1}{2}; 2; \omega) = \frac{2(1 - \sqrt{1 - \omega})}{\omega} \quad (A.7)$$

yazılabilir. Burada

$$\omega = \frac{1 - k^2}{z^2 - k^2}$$

yazılır ve (A.5) ifadesine yerleştirilir ise

$$I_1 = -\frac{\pi}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{z^2 - 1}{z^2 - k^2}}\right) \quad (A.8)$$

elde edilir.

$$I_2 = \int_k^1 \sqrt{\frac{t^2 - k^2}{1 - t^2}} \frac{t dt}{t^2 - z^2} \quad z > 1 \quad (A.9)$$

integralini hesaplamak için yine sırası ile

$$t^2 = u$$

ve

$$u = (1 - k^2)y + k^2$$

dönüşümleri uygulanır ise

$$I_2 = -\frac{(1 - k^2)}{2(z^2 - k^2)} \int_0^1 y^{\frac{1}{2}} (1 - y)^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \left(\frac{1 - k^2}{z^2 - k^2} \right) y \right\}^{-1} dy \quad (A.10)$$

şeklinde yazılabilir. Burada (A.4) ile verilen bağıntı kullanıldığında

$$I_2 = -\frac{(1 - k^2)}{2(z^2 - k^2)} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) F\left(1, \frac{3}{2}; 2; \frac{1 - k^2}{z^2 - k^2}\right) \quad (A.11)$$

halini alır. Burada

$$F(\alpha, \beta; \gamma; \omega) = (1 - \omega)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; \gamma; \omega) \quad (A.12)$$

veya özel olarak rekürans bağıntısı yardımı ile

$$F\left(1, \frac{3}{2}; 2; \omega\right) = (1 - \omega)^{-\frac{1}{2}} F\left(1, \frac{1}{2}; 2; \omega\right) \quad (A.13)$$

yazılabilir. (A.6) (A.13) için kullanılır ise

$$F\left(1, \frac{3}{2}; 2; \omega\right) = \frac{(1 - \omega)^{-\frac{1}{2}} 2(1 + \sqrt{1 - \omega})}{\omega} \quad (A.14)$$

elde edilir. Burada yine ω yerine

$$\omega = \frac{1 - k^2}{z^2 - k^2}$$

alınır ve (A.11) integralinde yerleştirilir ise

$$I_2 = -\frac{\pi}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{z^2 - k^2}{z^2 - 1}}\right) \quad (\text{A.15})$$

elde edilir.

$$I_3 = \int_k^1 \frac{t dt}{\sqrt{(t^2 - k^2)(1 - t^2)(t^2 - z^2)}} \quad z \in (k, 1) \quad (\text{A.16})$$

integrali yine

$$u = t^2$$

dönüşümü ile

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_{k^2}^1 \frac{du}{\sqrt{(u - k^2)(1 - u)(u - z^2)}} \quad z \in (k, 1) \quad (\text{A.17})$$

yazılabilir. Yukarıda (A.17) ile verilen integral Cauchy asal değerli olarak düşünülür ise

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_{k^2}^{z^2} \frac{du}{\sqrt{(u - k^2)(1 - u)(u - z^2)}} \quad z \in (k, 1) \quad (\text{A.18})$$

ve

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_{z^2}^1 \frac{du}{\sqrt{(u - k^2)(1 - u)(u - z^2)}} \quad z \in (k, 1) \quad (\text{A.19})$$

olmak üzere tanımlanır ise o takdirde (A.17) integrali

$$I_3 = J_1 + J_2 \quad (\text{A.20})$$

olarak yazılabilir. (A.18) ve (A.19) integrallerinde sırası ile

$$v = \left(\frac{1 - z^2}{1 - k^2}\right) \left[\left(\frac{z^2 - k^2}{z^2 - u}\right) - 1\right] \quad (\text{A.21})$$

ve

$$v = \left(\frac{z^2 - k^2}{1 - k^2}\right) \left[\left(\frac{z^2 - 1}{z^2 - u}\right) - 1\right] \quad (\text{A.22})$$

dönüşümleri yapıldığında

$$J_1 = \frac{1}{2\sqrt{(1 - z^2)(z^2 - k^2)}} \int_0^\infty \frac{dv}{\sqrt{v(v + 1)}} = -J_2 \quad (\text{A.23})$$

elde edilir. Dolayısı ile (A.17) ile verilen integral özdeş olarak sıfırdır. Yani

$$I_3 \equiv 0 \quad (\text{A.24})$$

$z > 1$ ise I_3 integralini (A.16) dan yine sırası ile

$$u = t^2$$

ve

$$u = (1 - k^2)y + k^2$$

dönüşümleri yardımı ile

$$I_3 = -\frac{1}{2(z^2 - k^2)} \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}} (1 - y)^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \left(\frac{1 - k^2}{z^2 - k^2} \right) y \right\}^{-1} dy \quad (\text{A.25})$$

yazılabilir. Yine (A.4) bağıntısı göz önüne alınır ise

$$I_2 = -\frac{\pi}{2(z^2 - k^2)} F\left(1, \frac{1}{2}; 1; \frac{1 - k^2}{z^2 - k^2}\right) \quad (\text{A.26})$$

yazılabilir ve

$$F(-n, \beta; \beta; -\omega) = (1 + \omega)^n \quad (\text{A.27})$$

bağıntısı kullanılır ise

$$I_3 = -\frac{\pi}{2} [(z^2 - 1)(z^2 - k^2)]^{-\frac{1}{2}} \quad z > 1 \quad (\text{A.28})$$

elde edilir. $z \in (0, k)$ olması halinde ise kolayca (A.26) ve (A.27) den

$$I_3 = \frac{\pi}{2} [(1 - z^2)(k^2 - z^2)]^{-\frac{1}{2}} \quad z \in (0, k) \quad (\text{A.29})$$

elde edilebilir. Buradan (A.24), (A.28) ve (A.29) ifadeleri topluca

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_k^1 \frac{t dt}{\sqrt{(t^2 - k^2)(1 - t^2)(t^2 - z^2)}} \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} [(1 - z^2)(k^2 - z^2)]^{-\frac{1}{2}} & 0 < z < k \\ 0 & k < z < 1 \\ -\frac{\pi}{2} [(z^2 - 1)(z^2 - k^2)]^{-\frac{1}{2}} & z > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

şeklinde yazılabilir.

EK-B CHEBYSHEV KUVADRATÜRÜ

Chebyshev kuvadratürü Gauss kuvadratürünün özel bir halidir. Ancak sınırlı durumlarda bir ortogonal polinom ile ilişki kurularak oluşturulabilir. Kuvadratürün temel formülü

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx = A \{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)\} + R_n \quad (B.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonunu, R_n ise hata terimini ifade etmektedir. (B.1) den görüldüğü gibi $A, x_1, x_2, \dots, x_n$ yani $n + 1$ tane bilinmeyen vardır. Bu bilinmeyenleri bulabilmek için (B.1) ifadesi en azından n ' yinci dereceden polinomlarla sağlatılmalıdır. Bu amaçla $f(x) = x^k, k = 1, 2, \dots, n$ seçilir ve $R_n = 0$ alınır ise (B.1)

$$A \{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k\} = M_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (B.2)$$

yazılabilir. Burada M_k

$$M_k = \int_a^b \omega(x) x^k dx \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (B.3)$$

olup momentleri ifade etmektedir. (B.2) de $k = 0$ için

$$A = \frac{M_0}{n} \quad (B.4)$$

elde edilebilir. (B.2)

$$x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = \frac{nM_k}{M_0} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (B.5)$$

yazılabilir. (B.5) ifadesi n bilinmeyenli lineer olmayan denklem sistemini ifade etmekte ve bilindiği gibi bu denklemlerin çözümü oldukça zordur. Bu nedenle Gauss kuvadratüründe olduğu gibi polinom kökü bulma yöntemi tercih edilir.

$$F_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad (B.6)$$

tanımı yapılır ve logaritmik türev alınır ise

$$F'_n(x) = \left\{ \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n} \right\} F_n(x) \quad (B.7)$$

yazılabilir. $F_n(x)$ polinomu

$$F_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \quad (B.8)$$

şeklinde tanımlanır ve (B.7) de yerleştirilir ise, birtakım ara işlemlerden sonra

$$n + (na_{n-1} + \frac{nM_1}{M_0})\frac{1}{x} + \dots + (na_{n-m} + \frac{nM_1}{M_0}a_{n-m+1} + \dots + \frac{nM_{m-1}}{M_0}a_{n-1} + \frac{nM_m}{M_0})\frac{1}{x^m} + \dots = n + \frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{(n-m)a_{n-m}}{x^m} \quad (B.9)$$

elde edilir. (B.9) ifadesinde ilk $n + 1$ terim yani x 'in azalan kuvvetlerinin katsayıları birbirine eşitlendiğinde

$$ma_{n-m} + \frac{nM_1}{M_0}a_{n-m+1} + \dots + \frac{nM_{m-1}}{M_0}a_{n-1} + \frac{nM_m}{M_0} = 0 \quad (B.10)$$

şeklinde

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$$

katsayılarını bulmak için gerekli bağıntılar elde edilir. Daha sonra (B.8) polinomunun kökleri bilinen yöntemlerle bulunarak

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

koordinatları belirlenmiş olur. Böylece (B.1) den ise kuvadratur yaklaşık olarak hesaplanabilir. Kuvadratur ile ilgili ayrıntılı bilgiler çeşitli kaynaklardan [55] elde edilebilir. Burada ortogonal polinomlarla ilişki kurularak oluşturulabilen kuvadratürlere örnek olarak sırası ile

$$\int_a^b \frac{f(y)dy}{\sqrt{(y-a)(b-y)}} \cong \sum_{i=1}^n \omega_i f(y_i) \quad y_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x_i,$$

$$x_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad \omega_i = \frac{\pi}{n} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (B.11)$$

ve

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i) \quad x_i = \cos^2 \frac{2i-1}{2n+1} \frac{\pi}{2}$$

$$\omega_i = \frac{2\pi}{2n+1} x_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (B.12)$$

verilebilir. burada (B.11) kuvadratürü

$$T_n(x) \quad (T_n(1) = \frac{1}{2^{n-1}})$$

(B.12) kuvadratürü

$$\frac{T_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

şeklinde gösterilen birinci tür Chebyshev ortogonal polinomları ile ilişkilidirler.

KAYNAKLAR

- [1] GRIFFITH, A. The Phenomenon of Repture and Flow in the Solids, Phill .Trans .Roy .Soc .(London),A 225,163 (1921).
- [2] GRIFFITH, A. Proceedings of Lst .Int .Cong .for .Appl .Mech . Delft , 55 (1924).
- [3] IRWIN, G.R. Analysis of Stress and Strains Near the end of a Crack Transversing Plate, J .Appl .Mech .79,361 (1957).
- [4] IRWIN, G.R. Fracture in Hendbuch der Physic 6, 551-590 (1958).
- [5] SANDERS, J.L. On the Griffith Irwin Fracture Theory J . Appl . Mech . 82, 352 (1960).
- [6] BARENBLATT, G.I. The Mathematical Theory of Brittle Cracks in Brittle Fracture, Adv .Appl .Mech .7,55-129 (1962).
- [7] SIH, G.C., LIEBOWITZ, H. Mathematical Theory of Brittle Cracks Fracture (Ed.by Liebowitz, H.) 2, Chapter 2, Academic Press (1968).
- [8] BILBY, B.A., ESHELBY, J.D. Dislocations and the Theory of Fracture, Fracture , 1, (Ed.by.LIOBOWITZ, H.) Academic Press (1968).
- [9] HEAD, A.K., LOUAT, N. Distribution of Dislocations in Linear Arrays, Aust .J .Phys . 8,1-9 (1955).
- [10] HIRTH, J.P., LOTHE, J.P. Theory of Dislocations , McGraw Hill (1968).
- [11] BASSANI, J.I., ERDOGAN, F. Stress Intensity Factors in Bonded Half Planes Containing Inclined Cracks and Subject to Antiplane Shear Loading, Int .J .of Fracture ,15(1979).
- [12] SIH, G.C. Boundary Problems for Longitudinal Shear Cracks Development (Ed.by SHAW,W.A.) Theoretical and Applied Mechanics 2,117-130 (1965).
- [13] SNEDDON, I.N., ELLIOTT, H.A. The opening of a Griffith crack under internal pressure, Quart .Appl .Math .4,229 (1946).

- [14] SNEDDON, I.N., LOWENGRUB, M. Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity, New York (1969).
- [15] SNEDDON, I.N., SRIVASTAVA, R.P. The stress in the vicinity of an infinite row of collinear cracks in an elastic body, Proc .Roy .Soc .Edin . A, **67**, 39 (1965).
- [16] WILLMORE, T.J. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack, Quart .J .Mech .and Appl .Math . **2**, 53-63 (1949).
- [17] KUNIN, I.A. The Theory of Elastic Media with Microstructure and the Theory of Dislocations Mechanics of Generalized Continua (Ed.by, KÖRNER, E.) New York, Springer-Verlag (1968).
- [18] KÖRNER, E. Interrelations between Various of Continuum Mechanics of Generalized Continua, (Ed.by, KÖRNER, E.) New York Springer-Verlag (1968).
- [19] ERINGEN, A.C. Nonlocal Polar Elastic Continua, Int .J .Engng . Sci . **10**, 1-6 (1972).
- [20] ERINGEN, A.C., EDELEN, D.G.B. On Nonlocal Elasticity, Int .J . Engng .Sci . **10**, 233-248 (1972).
- [21] ERINGEN, A.C. Linear Theory of Nonlocal Elasticity and Dispersion of Plane Waves, Int .J .Engng .Sci . **10**, 425-435 (1972).
- [22] ERINGEN, A.C. Nonlocal Elasticity and Waves Continuum Mechanics Aspect of Geodynamics and Rock Fracture Mechanics 81-105 (1974).
- [23] ERINGEN, A.C. Edge Dislocation in Nonlocal Elasticity, Int .J . Engng .Sci . **15**, 177-183 (1977).
- [24] ERINGEN, A.C. On Continuous Distributions of Dislocations in Nonlocal Elasticity, J .Appl .Phys . **56**, 2675-2684 (1984).
- [25] ERINGEN, A.C., KIM, B.S. On the Problem of Crack Tip in Nonlocal Elasticity, Continuum Mechanics Aspect of Geodynamics and Rock Fracture 81-105 (1974).
- [26] ERINGEN, A.C. Line Crack Subject to Shear, Int .J .Fracture Sci . **14**, 367-379 (1978).
- [27] ERINGEN, A.C. Linear Crack Subject to Antiplane Shear Engineering Fracture Mechanics **12**, 211-219 (1979).

- [28] ARI, N., ERINGEN, A.C. Nonlocal Stress Field at Griffith Crack, Cryst . Latt .Def and Amorph .Mat .,10,33-38 (1983).
- [29] ERINGEN, A.C. Interaction of Dislocation with a Crack, J .Appl . Phys . **24**, 6811-6817 (1983).
- [30] ERINGEN, A.C. Continuum Mechanics at the Atomic Scale Crys . Latt .Def . **7**, 109-130 (1977).
- [31] ERINGEN, A.C., SPEZIALE, G.G., KIM, B.S. Crack Tip Problem in Nonlocal Elasticity, J .Mech .Phys . Solids **25**, 339-355 (1977).
- [32] TRANTER, C.J. Griffith cracks under internal pressure, Quart .J . Mech .and Appl .Math . **14**,3 (1961).
- [33] COOKE, J.C. Triple Integral Equations Quart .J .Mech .and Appl . Mat . **16**, 2-12 (1963).
- [34] COOKE, J.C. Solutions of Triple Integral Equations in operational Form Quart .J .Mech . and Appl .Mat .**18**, 1-13 (1969).
- [35] SNEDDON, I.N. Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory , Amsterdam (1966).
- [36] LOWENGRUB, M., SRIVASTAVA, K.N. Two Coplanar Griffith Cracks in an Infinitely Long Elastic Strip,Int .J .Engng . Sci . **6**,425-434 (1968).
- [37] SRIVASTAVA, K.N., PALAIYA, R.M., KARAUlia, D.S. Interaction of Shear waves with two coplanar Griffith cracks situated in an infinitely long elastic strip, Int .J .of Fracture **23**,3-14 (1983).
- [38] MUSKHELISHVILI, N.I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity ,(Translated.by RADOK,J.R.M.) Groningen Holland (1953).
- [39] MUSKHELISHVILI, N.I. Singular Integral Equations , (Translated.by RADOK,J.R.M.) Groningen Holland (1953).
- [40] ERDOGAN, F., GUPTA, G.D. On The Numerical Solution of Singular Integral Equations, Quart . of .Appl .Mat ..(1972).
- [41] ERINGEN, A.C. Mechanics of Continua Chapter 5 Jhon Wiley, New York (1967).

- [42] ERINGEN, A.C. % Nonlocal Polar Field Theories Continuum Physics 4, 205-267 Academic Press New York (1976).
- [43] ERINGEN, A.C., KIM, B.S. Relation Between Nonlocal Elasticity and Lattice Dynamics, Crys .Latt .Def . 17 51-57 (1977).
- [44] FANO, G., Mathematical Methods of Quantum Mechanics New York McGraw Hill (1971).
- [45] ERINGEN, A.C. Continuum Mechanics of Single-Substance Bodies, Continuum Physics 2, 1-172 Academic Press New York (1975).
- [46] ERINGEN, A.C. Theory of Nonlocal Elasticity and Some Applications, Res Mechanica 21, 313-347 (1987).
- [47] SNEDDON, I.N. Fourier Transforms , 405-422 McGraw Hill (1951).
- [48] ERDELYI, A. Tabels of Integral Transform , 2 McGraw Hill (1954).
- [49] LOWENGRUB, M., SRIVASTAVA, K.N. Research note on two Coplanar Griffith Cracks in an infinite elastic medium, (Communicated by SNEDDON I.N.) Int .J .Engng . Sci . 6, 359-362 (1968).
- [50] TRICOMI, F.G. Integral Equations New York (1970).
- [51] GRADSHTEYN, I.S., RHYZHIK, I.W. Tables of Integrals Series and Product , Academic-Press New York (1965).
- [52] ERINGEN, A.C. On the Nature of Boundary Conditions for Crack-tip Arc .Mech . 33, 937-945 (1981).
- [53] KELLEY, A. Strong Solids 19 Oxford (1966).
- [54] WATSON, G.N. Theory of Bessel Functions Cambiridge (1944).
- [55] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I.A. Handbook of Mathematical Functions , Dover Publications , INC., New York (1964).

ÖZGEÇMİŞ

Kamil ORUÇOĞLU, 1959 yılında Kars' da doğmuş, lise öğrenimini Kars Alpaslan Lisesinde yapmıştır. 1977 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesine bağlı Matematik Mühendisliği bölümüne girmiş, 1982 yılında mezun olmuştur. Aynı yıl Fen Edebiyat Fakültesi Mühendislik Bilimleri bölümünde Araştırma Görevlisi olarak işe başlamış ve İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Fen anabilim dalına bağlı mekanik programında yüksek lisans öğrenimine başlamış ve şubat 1985 de tamamlayarak Matematik Yüksek Mühendisi unvanını almıştır. Mart 1985 de aynı programda Doktora çalışmasına başlamıştır. Halen aynı fakültede Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.