

**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**YEREL OLMAYAN SINIR KOŞULLU TERS ELİPTİK PROBLEMLERİ İÇİN
YÜKSEK MERTEBEDEN FARK ŞEMALARI**

DOKTORA

Gulzipa AKYÜZ

**ARALIK-2021
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**YEREL OLMAYAN SINIR KOŞULLU TERS ELİPTİK PROBLEMLERİ İÇİN
YÜKSEK MERTEBEDEN FARK ŞEMALARI**

**FINITE DIFFERENCE SCHEMES FOR INVERSE ELLIPTIC PROBLEMS
WITH NONLOCAL BOUNDARY VALUE CONDITIONS**

DOKTORA

Gulzipa AKYÜZ

**ARALIK -2021
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**YEREL OLMAYAN SINIR KOŞULLU TERS ELİPTİK PROBLEMLERİ İÇİN
YÜKSEK MERTEBEDEN FARK ŞEMALARI**

**FINITE DIFFERENCE SCHEMES FOR INVERSE ELLIPTIC PROBLEMS
WITH NONLOCAL BOUNDARY VALUE CONDITIONS**

DOKTORA

Gulzipa AKYÜZ

Danışman: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

**ARALIK -2021
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Doktora Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Yerel Olmayan Sınır Koşullu Ters Eliptik Problemleri İçin Yüksek Mertebeden Fark Şemaları**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

23/12/2021

Gulzipa AKYÜZ

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak hazırlanmıştır. Tez çalışmamın her aşamasında yön gösterici olan, yardımlarını ve önerilerini esirgemeyen, bilgilerinden ve tecrübelerinden yararlandığım çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Charyyar ASHERYRALYYEV'e, doktora öğrenimim boyunca üzerimde emeği olan Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi Matematik bölümü hocalarıma; ömrünü eğitime ve bizlere adayan kıymetli babam Caksılık ORAZBAYEV ve kıymetli annem Gulzinat ORAZBAYEVA'ya, ayrıca eşim, çocuklarım, kardeşlerim ve tüm aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Gulzipa AKYÜZ
GÜMÜŞHANE – 2021

ÖZET

Bu tezde, çok noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters eliptik problemi bir Hilbert uzayında araştırılmıştır. Burada ters eliptik problemin yaklaşık çözümü için üçüncü ve dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemaları kurulmuştur. Sunulan bu fark şemalarının çözümleri için kararlılık, hemen-hemen koersif kararlılık ve koersif kararlılık kestirimleri elde edilmiştir. Burada kararlılık eşitsizliklerini kanıtlamak için operatör yöntemi kullanılmıştır. Çok boyutlu kısmi eliptik diferansiyel denklem için ters yerel olmayan sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümünün üçüncü ve dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemaları oluşturulmuştur. Ayrıca çok boyutlu kısmi eliptik diferansiyel denklem için yerel olmayan ters Dirichlet ve Neumann tipi sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümünün yüksek mertebeden doğruluklu fark şemaları kurulmuştur. Bu fark şemalarının çözümleri için kararlılık kestirimleri ele alınmıştır. Üçüncü ve dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemalarının sayısal çözümlerini bulmak için ise algoritma ile birlikte test edilen örneklerle MATLAB kodları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fark şeması, Kararlılık eşitsizlikleri, Sayısal çözüm, Sınır değer problemi, Ters eliptik problem.

SUMMARY

In this thesis, the multi-point nonlocal boundary conditional inverse problem is investigated in a Hilbert space. For the approximate solution of the inverse elliptic problem, third and fourth order accuracy difference schemes are established. Stability, almost coercive stability and coercive stability estimates are obtained for the solutions of the presented difference schemes. The operator method is used to prove the stability inequalities. For the approximate solution of the inverse nonlocal boundary value problems for the multidimensional partial elliptic differential equation, third and fourth order accuracy difference schemes are created. For the approximate solution of nonlocal inverse Dirichlet and Neumann type boundary value problems for multidimensional partial elliptic difference equations, higher order accuracy difference schemes are established. Stability estimates for solutions of difference schemes are discussed. In order to find numerical solutions of third and fourth order accuracy difference schemes, examples tested by MATLAB codes are given together with the algorithm.

Keywords: Difference scheme, Stability inequalities, Numerical solution, Boundary value problem, Inverse elliptic problems.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLOLAR DİZİNİ	X
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XII
EKLER DİZİNİ.....	XIII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XIV
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Temel Kavramlar	1
1.2. Literatür Taraması.....	19
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	23
2.1. Ön Hazırlık.....	23
2.2. Üçüncü Mertebeden Doğruluklu Fark Şeması ve Kararlılık Eşitsizlikleri	34
2.3. Dördüncü Mertebeden Doğruluklu Fark Şeması ve Kararlılık Eşitsizlikleri.....	52
3. BULGULAR VE TARTIŞMA	71
3.1. Çok Boyutlu Ters Yerel Olmayan Eliptik Sınır Değer Problemleri İçin Fark Şemaları	71
3.1.1. Çok Boyutlu Yerel Olmayan Ters Dirichlet Tipi Eliptik Sınır Değer Probleminin Fark Şemaları	71
3.1.2. Çok Boyutlu Yerel Olmayan Ters Neumann Tipi Eliptik Sınır Değer Probleminin Fark Şemaları	77
3.2. Sayısal Uygulamalar	81
3.2.1. Çok Noktalı Yerel Olmayan Sınır Koşullu Ters Dirichlet Tipi Eliptik Sınır Değer Probleminin Sayısal Sonuçları	81
3.2.2. Çok Noktalı Yerel Olmayan Sınır Koşullu Ters Neumann Tipi Eliptik Sınır Değer Probleminin Sayısal Sonuçları	96
4. SONUÇLAR	111
KAYNAKÇA	114
EKLER.....	121



TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. (3.2.1.3) bir noktalı 3. mertebeden doğrulukta u için hatalar	89
Tablo 2. (3.2.1.4) bir noktalı 3. mertebeden doğrulukta p için hatalar	89
Tablo 3. (3.2.1.1) bir noktalı 3. mertebeden doğrulukta v için hatalar.....	89
Tablo 4. (3.2.1.12) bir noktalı 4. mertebeden doğrulukta u için hatalar	89
Tablo 5. (3.2.1.4) bir noktalı 4. mertebeden doğrulukta p için hatalar	89
Tablo 6. (3.2.1.1) bir noktalı 4. mertebeden doğrulukta v için hatalar.....	89
Tablo 7. (3.2.1.1) iki noktalı 3. mertebeden doğrulukta u için hatalar.....	89
Tablo 8. (3.2.1.4) iki noktalı 3. mertebeden doğrulukta p için hatalar.....	90
Tablo 9. (3.2.1.4) iki noktalı 3. mertebeden doğrulukta v için hatalar.....	90
Tablo 10. (3.2.1.12) iki noktalı 4. mertebeden doğrulukta u için hatalar.....	90
Tablo 11. (3.2.1.4) iki noktalı 4. mertebeden doğrulukta p için hatalar.....	90
Tablo 12. (3.2.1.1) iki noktalı 4. mertebeden doğrulukta v için hatalar.....	90
Tablo 13. (3.2.1.3) üç noktalı 3. mertebeden doğrulukta u için hatalar	90
Tablo 14. (3.2.1.4) üç noktalı 3. mertebeden doğrulukta p için hatalar	90
Tablo 15. (3.2.1.1) üç noktalı 3. mertebeden doğrulukta v için hatalar	90
Tablo 16. (3.2.1.12) üç noktalı 4. mertebeden doğrulukta u için hatalar	90
Tablo 17. (3.2.1.4) üç noktalı 4. mertebeden doğrulukta p için hatalar	91
Tablo 18. (3.2.1.1) üç noktalı 4. mertebeden doğrulukta v için hatalar	91
Tablo 19. (3.2.2.3) bir noktalı 3. mertebeden doğrulukta u için hatalar	103
Tablo 20. (3.2.2.4) bir noktalı 3. mertebeden doğrulukta p için hatalar	103
Tablo 21. (3.2.2.1) bir noktalı 3. mertebeden doğrulukta v için hatalar.....	103
Tablo 22. (3.2.2.6) bir noktalı 4. mertebeden doğrulukta u için hatalar	103
Tablo 23. (3.2.1.4) bir noktalı 4. mertebeden doğrulukta p için hatalar	103
Tablo 24. (3.2.2.1) bir noktalı 4. mertebeden doğrulukta v için hatalar.....	103
Tablo 25. (3.2.2.3) iki noktalı 3. mertebeden doğrulukta u için hatalar.....	104
Tablo 26. (3.2.1.4) iki noktalı 3. mertebeden doğrulukta p için hatalar.....	104
Tablo 27. (3.2.2.1) iki noktalı 3. mertebeden doğrulukta v için hatalar.....	104
Tablo 28. (3.2.2.6) iki noktalı 4. mertebeden doğrulukta u için hatalar.....	104
Tablo 29. (3.2.1.4) iki noktalı 4. mertebeden doğrulukta p için hatalar.....	104
Tablo 30. (3.2.2.1) iki noktalı 4. mertebeden doğrulukta v için hatalar.....	104
Tablo 31. (3.2.2.3) üç noktalı 3. mertebeden doğrulukta u için hatalar	104
Tablo 32. (3.2.1.4) üç noktalı 3. mertebeden doğrulukta p için hatalar	104

Tablo 33. (3.2.2.1) üç noktalı 3. mertebeden doğrulukta v için hatalar	105
Tablo 34. (3.2.2.6) üç noktalı 4. mertebeden doğrulukta u için hatalar	105
Tablo 35. (3.2.1.4) üç noktalı 4. mertebeden doğrulukta p için hatalar	105
Tablo 36. (3.2.2.1) üç noktalı 4. mertebeden doğrulukta v için hatalar	105



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. (3.2.1.1) DSDP'nin $N=10$, $M=32$ için gerçek çözüm grafiği	91
Şekil 2. (3.2.1.1) DSDP'nin üç noktalı ÜMDFŞ yaklaşık çözüm grafiği.....	92
Şekil 3. $M=32$ için (3.2.1.1) DSDP'nin gerçek çözümü ile üç noktalı ÜMDFŞ yaklaşık çözüm arasındaki farkın mutlak değer grafiği	93
Şekil 4. (3.2.1.1) DSDP'nin $N=10$, $M=100$ için gerçek çözüm grafiği	94
Şekil 5. (3.2.1.1) DSDP'nin üç noktalı DMDFŞ yaklaşık çözüm grafiği.....	95
Şekil 6. $M=100$ için (3.2.1.1) DSDP'nin gerçek çözümü ile üç noktalı DMDFŞ yaklaşık çözüm arasındaki farkın mutlak değer grafiği	96
Şekil 7. (3.2.2.1) NSDP'nin $N=10$, $M=32$ için gerçek çözüm grafiği	105
Şekil 8. (3.2.2.1) NSDP'nin üç noktalı ÜMDFŞ yaklaşık çözüm grafiği.....	106
Şekil 9. $M=32$ için (3.2.2.1) NSDP'nin gerçek çözümü ile üç noktalı ÜMDFŞ yaklaşık çözümü arasındaki farkın mutlak değer grafiği	107
Şekil 10. (3.2.2.1) NSDP'nin $N=10$, $M=100$ için gerçek çözüm grafiği	108
Şekil 11. (3.2.2.1) NSDP'nin üç noktalı DMDFŞ yaklaşık çözüm grafiği.....	109
Şekil 12. $M=100$ için (3.2.2.1) NSDP'nin gerçek çözümü ile üç noktalı DMDFŞ yaklaşık çözümü arasındaki farkın mutlak değer grafiği	110

EKLER DİZİNİ

Ek 1. Üç Noktalı DSDP'nin 3. Mertebeden Sayısal Çözümleri için MATLAB Programı Kodları	121
Ek 2. Üç Noktalı DSDP'nin 4. Mertebeden Sayısal Çözümleri için MATLAB Programı Kodları	126
Ek 3. Üç Noktalı NSDP'nin 3. Mertebeden Sayısal Çözümleri için MATLAB Programı Kodları	131
Ek 4. Üç Noktalı NSDP'nin 4. Mertebeden Sayısal Çözümleri için MATLAB Programı Kodları	136



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

H	: Hilbert uzayı
A	: Öz-eşlenik pozitif tanımlı operatör
C	: $C = A + \frac{\tau^2}{12} A^2$ öz-eşlenik pozitif tanımlı operatör
D	: $D = \frac{1}{2} \left(\tau C + \sqrt{4C + \tau^2 C^2} \right)$ öz-eşlenik pozitif tanımlı operatör
R	: $R = (I + \tau D)^{-1}$ öz-eşlenik pozitif tanımlı operatör
$f(t)$	: Fonksiyon
ϕ, η, ζ	: Hilbert uzayının elemanları
$D(A)$	: A operatörünün tanım bölgesi
$D(C)$	: C operatörünün tanım bölgesi
$C([0, T], D(A))$	: $[0, T]$ aralığı üzerinde tanımlı ve değerleri A operatörünün tanım bölgesinde olan tüm sürekli fonksiyonların kümesi
$C^2([0, T], H)$	: $[0, T]$ aralığı üzerinde tanımlı ve değerleri H Hilbert uzayında olan tüm ikinci mertebeden türevlenebilir sürekli fonksiyonların kümesi
$C(H)$	: $C(H) = C([0, T], H)$ uzayı $[0, T]$ aralığı üzerinde tanımlı ve değerleri H Hilbert uzayında olan tüm sürekli fonksiyonların oluşturduğu Banach uzayı
$C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)$	: $C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H) = C_{0T}^{\alpha, \alpha}([0, T], H)$ ($0 < \alpha < 1$), $[0, T]$ aralığı üzerinde tanımlı ve değerleri H Hilbert uzayında olan bütün düzgün fonksiyonların oluşturduğu Banach uzayı
Ω	: $\{(x_1, \dots, x_n) \in R_n, 0 < x_i < 1, 1 \leq i \leq n\}$ ile verilen birim açık küp
$\bar{\Omega}$	: Birim açık küpün kapanışı
$\partial\Omega$	: Küpün sınırı
$L_2(\Omega)$	: $\bar{\Omega}$ kümesinde tanımlı tüm karesi integrallenebilen $f \in L_2(\Omega)$ fonksiyonlarının oluşturduğu ve normu $\ f\ _{L_2(\Omega)} = \left\{ \int_{x \in \bar{\Omega}} \dots \int f(x) ^2 dx_1 \dots dx_n \right\}^{1/2}$ ile tanımlanan Hilbert uzayı

$W_2^2(\Omega)$	: $\overline{\Omega}$ kümesinde ikinci mertebeden kısmi türevleri mevcut ve karesi integrallenebilen f fonksiyonlarının oluşturduğu Sobolev uzayı
$[\cdot]$	: En büyük tam sayı fonksiyonu
Ω_h	: Grid noktalar kümesi
$L_2(\Omega_h)$	: Ω_h grid noktalar kümesinde tanımlanan ξ^h grid fonksiyonlarının oluşturduğu Hilbert uzayı
$W_2^2(\Omega_h)$	: Ω_h grid noktalar kümesinde tanımlanan ξ^h grid fonksiyonlarının ikinci mertebeden türevleri sınırlı olan Sobolev uzayı
h, τ	: Küçük pozitif sayılar
$M(\delta)$	: Sadece δ 'ya bağlı bir pozitif sabit
$\ f\ _{C(H)}$	: f fonksiyonunun $C(H)$ Banach uzayındaki normu
DSDP	: Dirichlet sınır değer problemi
NSDP	: Neumann sınır değer problemi
ÜMDFŞ	: Üçüncü mertebeden doğruluklu fark şeması
DMDFŞ	: Dördüncü mertebeden doğruluklu fark şeması

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Temel Kavramlar

Bu kısımda lineer sistemler, metrik uzay, normlu uzay, Banach uzayı, iç çarpım uzayı, Hilbert uzayı, sınırlı lineer fonksiyoneller, sınırlı operatörler, öz-eşlenik ve pozitif tanımlı operatorlerin tanımları verilmektedir. Ayrıca direkt ile ters problemleri açıklanmaktadır. Bununla birlikte fonksiyonun türevlerinin yaklaşım formülleri ve onların yaklaşım mertebeleriyle ilgili bazı kavramların tanımları ile açıklamaları verilmektedir.

Tanım 1.1.1. Bir E kümesinde, x ve y elemanlarının her ikisi için, $x + y$ ile gösterilen ve toplam olarak adlandırılan bir eleman varsa ve her bir x ile λ reel (karmaşık) sayısı için, λx ile gösterilen ve onların çarpımı olarak adlandırılan bir eleman varsa ve bu işlemler aşağıdaki şartları sağlıyorsa, o zaman E kümesi reel (karmaşık) *lineer uzayı* olarak adlandırılır (Krein, 1972):

$\forall x, y, z \in E$ ve $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) için,

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
2. $x + y = y + x$;
3. $\forall x \in E$ için $0x = \theta$ olacak şekilde E 'nin sıfır θ elemanı vardır;
4. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
6. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$;
7. $1x = x$.

Tanım 1.1.2. Bir E kümesinde herhangi iki elemanı, x ile y elemanları arasındaki mesafe olan ve aşağıdaki aksiyomları sağlayacak, negatif olmayan bir $\rho(x, y)$ sayısı varsa, E kümesi bir metrik uzay olarak adlandırılır (Krein, 1972):

1. $\rho(x, y) \geq 0$, ρ reel değerli, negatif olmayan sınırlı bir fonksiyondur;
2. $\rho(x, x) = 0$ ve eğer $\rho(x, y) = 0$ ise $x = y$ olur;
3. $\forall x, y \in E$ için, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simetri aksiyomu);

4. $\forall x, y, z \in E$ için, $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (üçgen eşitsizliği).

Tanım 1.1.3. Eğer E kümesindeki, her bir $x \in E$ elemanı için, x elemanının normu olarak adlandırılan negatif olmayan bir $\|x\| \geq 0$ reel sayısına karşılık geliyorsa ve aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa, bu durumda E lineer uzayı normlu uzay olarak adlandırılır (Krein, 1972):

$\forall x, y, z \in E$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (normun homojenliği) ;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği) .

Tanım 1.1.4. Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve herhangi $m, n > N$ doğal sayıları için $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa, bu durumda E metrik uzayındaki (x_n) dizisi, temel dizisi veya Cauchy dizisi olarak adlandırılır (Krein, 1972).

Tanım 1.1.5. E metrik uzayındaki her temel dizisi (Cauchy dizisi) şayet uzayın bir elemanına yakınsarsa, bu durumda E uzayı tam uzay olarak adlandırılır (Krein, 1972).

Tanım 1.1.6. E tam normlu bir lineer uzay ise, bu durumda E uzayı Banach uzayı olarak adlandırılır (Krein, 1972).

Tanım 1.1.7. H , karmaşık sayılarla çarpma işleminin olduğu ve her bir eleman çiftine aşağıdaki özelliklere sahip bir (x, y) karmaşık sayısının atandığı bir lineer uzayı olsun. $\forall x, y, z \in H$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa,

- i. $(x, x) \geq 0$, ve $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ için;
- ii. $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
- iii. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ keyfi karmaşık bir λ sayısı için;
- iv. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

Bu takdirde (x, y) sayısı iç-çarpım, $(H, (x, y))$ ikilisine ise iç-çarpım uzayı olarak adlandırılır (Krein, 1972). Aşağıdaki sonuçlar i-iv aksiyomlarından gelmektedir:

$$1. (x, y+z) = (x, y) + (y, z);$$

$$2. (x, \lambda.y) = \lambda.(x, y);$$

3. Buniakovsky-Schwarz (Cauchy-Schwarz) eşitsizliği:

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)} \text{ veya } |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \text{ şeklinde yazılabilir (Krein, 1972).}$$

H uzayındaki her bir iç-çarpıma karşılık bir norm $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ getirilebilir. Bu durumda H iç-çarpım uzayı bir normlu lineer uzaya dönüşür (Krein, 1972).

Tanım 1.1.8. Eğer H iç-çarpım uzayı $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ normuna göre tam ise, o zaman bu uzaya *Hilbert* (karmaşık veya reel) uzayı denir (Krein, 1972).

Tanım 1.1.9. E , reel (karmaşık) bir lineer uzayı olsun. Her $x \in E$ 'ye karşılık bir reel (karmaşık) $f(x)$ sayısı geliyorsa, bu takdirde E reel (karmaşık) lineer uzayı üzerinde bir $f(x)$ fonksiyoneli tanımlanmış olur (Krein, 1972).

Tanım 1.1.10. Eğer $f(x)$ fonksiyoneli, $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, ($\alpha, \beta \in E$ ve $x, y \in E$ için) şartını sağlıyor ise, $f(x)$ fonksiyoneline lineer denir (Krein, 1972).

Tanım 1.1.11. Tüm $x \in E$ için $|f(x)| \leq c \|x\|$ olacak şekilde negatif olmayan bir c sayısı varsa, E üzerinde $f(x)$ fonksiyoneline sınırlı lineer fonksiyonel denir. Bu eşitsizliği sağlayan c sayılarının en küçüğüne sınırlı lineer $f(x)$ fonksiyonelinin normu denir ve

$$\|f\| \text{ ile gösterilir. } f \text{ fonksiyonelinin normu için, } \|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \text{ formülü}$$

geçerlidir (Krein, 1972). Buradan hareketle diğer bazı kavramlar ve Hilbert uzayında operatörlerin tanımları aşağıda verilmektedir.

Tanım 1.1.12. E ve F iki lineer uzayı olsun. $D \subset E$ kümesinde tanımlanan, değerleri F lineer sisteminde olan bir A operatörünün (D 'den F 'ye bir operatör) her bir $x \in D$ 'ye $y = Ax \in F$ tekabül ediyorsa, bu durumda D kümesine A operatörünün tanım bölgesi denir ve $D(A)$ ile gösterilir. F lineer sisteminin tüm y elemanlarının $y = Ax$ ($x \in D(A)$) biçiminde gösterilebilen cümlesine A operatörünün değer bölgesi denir ve $R(A)$ ile gösterilir (Krein, 1972).

Tanım 1.1.13. Eğer her $x_1, x_2 \in D(A)$ ve her $\alpha_1, \alpha_2 \in C$ için $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)$ ise, bu durumda A operatörü, lineer operatör olarak adlandırılır (Krein, 1972).

Tanım 1.1.14. E lineer bir uzayı olsun. Her bir $x \in E$ için, $Ax = x$ olacak şekilde bir A operatörü varsa, bu A operatörü birim özdeşlik operatörü olarak adlandırılır ve I, I_E ile gösterilir.

Tanım 1.1.15. A operatörü E lineer uzayından F lineer uzayına tanımlanan bir lineer operatör olsun. Eğer her bir $x \in E$ için, $\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E$ olacak şekilde x 'den bağımsız bir C sabiti varsa, bu durumda A operatörü sınırlıdır denir. Son eşitsizlikteki en küçük C sabiti, A operatörünün normu olarak adlandırılır ve şu şekilde gösterilir:

$$\|A\|_{E \rightarrow F}. \text{ Tanıma göre, } \|A\|_{E \rightarrow F} = \sup_{x \in E} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_F \text{ olur (Krein, 1972).}$$

Tanım 1.1.16. A operatörü H Hilbert uzayında tanımlı sınırlı bir lineer operatör olsun. Bu uzaydaki A^* operatörüne, A operatörünün eşleniği denir ve $(Ax, y) = (x, A^*y)$ formülüyle tanımlanır. Eğer $A^* = A$ ise, A 'ya öz-eşlenik operatör denir (Krein, 1971).

Tanım 1.1.17. A öz-eşlenik operatör olsun. Eğer her bir $x \neq 0$ eleman için $(Ax, x) > 0$ ise A operatörüne pozitif operatör, $(Ax, x) \geq \delta(x, x)$ ($\delta > 0$) ise A 'ya pozitif tanımlı operatör denir (Krein, 1971).

A öz-eşlenik pozitif tanımlı operatör olsun. A operatörünün $f(A)$ fonksiyonunun normu için, $\|f(A)\| \leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} |f(\lambda)|$ kestirimi geçerlidir (Krein, 1972).

A öz-eşlenik operatörü pozitif tanımlı ise, her bir $\tau > 0$ için $C = A + \frac{\tau}{12} A^2$ olmak üzere, $D = \frac{1}{2}(\tau C + \sqrt{4C + \tau^2 C^2})$ ve $R = (I + \tau D)^{-1}$ operatörleri de öz-eşlenik pozitif tanımlı operatörlerdir (Krein, 1966).

Çalışmada kullanılan $C = D^2 R$ eşitliğinin doğruluğu şu şekilde gösterilmektedir:
 $D = \frac{1}{2}(\tau C + \sqrt{4C + \tau^2 C^2})$ ve $R = (I + \tau D)^{-1}$ operatörlerini kullanarak;

$$\begin{aligned}
D^2 R &= \frac{1}{4} \left(\tau^2 C^2 + 2\tau C \sqrt{4C + \tau^2 C^2} + 4C + \tau^2 C^2 \right) (I + \tau D)^{-1} \\
&= \frac{1}{4} \left(2\tau^2 C^2 + 2\tau C \sqrt{4C + \tau^2 C^2} + 4C \right) (I + \tau D)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{2} \tau^2 C^2 + \frac{1}{2} \tau C \sqrt{4C + \tau^2 C^2} + C \right) (I + \tau D)^{-1} \\
&= C + \frac{1}{2} \tau C \left(\tau C + \sqrt{4C + \tau^2 C^2} \right) (I + \tau D)^{-1} \\
&= C \left[I + \tau \frac{1}{2} \left(\tau C + \sqrt{4C + \tau^2 C^2} \right) \right] (I + \tau D)^{-1} \\
&= C (I + \tau D) (I + \tau D)^{-1} \\
&= C \text{ elde edilir.}
\end{aligned}$$

Aşağıda çalışmada kullanılan uzaylar ve uzaydaki normlar tanımlanmaktadır:

$C(H) = C([0, T], H)$ uzayı, $[0, T]$ aralığında tanımlı değerleri H Hilbert uzayında olan tüm sürekli $f(t)$ fonksiyonlardan oluşan ve bu fonksiyonların normu, $\|f\|_{C(H)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_H$, ile tanımlanan *Banach* uzayıdır.

$C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H) = C_{0T}^{\alpha, \alpha}([0, T], H)$ uzayı ise, $[0, T]$ aralığında tanımlı değerleri H Hilbert uzayında olan bütün düzgün $f(t)$ fonksiyonlardan oluşan ve bu fonksiyonların normu, $\|f\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} = \|f\|_{C(H)} + \sup_{0 \leq t < t+\tau \leq T} (t+\tau)^\alpha \tau^{-\alpha} (T-t)^\alpha \|f(t+\tau) - f(t)\|_H$ ile tanımlanan *Banach* uzayıdır.

n keyfi bir doğal sayı olmak üzere $\Omega = (0, l)^n$, n -boyutlu R_n Öklid uzayında sınırı $\partial\Omega$ olan bir açık küp olsun. Ω kapanışı $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ile belirlensin.

$H = L_2(\Omega)$ uzayı, $\bar{\Omega}$ kümesinde tanımlanan tüm karesi integrallenebilen $f \in L_2(\Omega)$ fonksiyonlarından oluşan ve $\|f\|_{L_2(\Omega)} = \left\{ \int_{x \in \bar{\Omega}} \dots \int |f(x)|^2 dx_1 \dots dx_n \right\}^{1/2}$ normu ile birlikte tanımlanan *Hilbert* uzayıdır.

$W_2^2(\Omega)$ uzayı, $\bar{\Omega}$ kümesinde ikinci mertebeden kısmi türevleri mevcut ve karesi integrallenebilen f fonksiyonlarından oluşan ve

$$\|f\|_{W_2^2(\Omega)} = \left\{ \int_{x \in \bar{\Omega}} \dots \int \left(|f(x)|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| f_{x_i x_j}(x) \right|^2 \right) dx_1 \dots dx_n \right\}^{1/2} \text{ normu ile birlikte tanımlanan}$$

Sobolev uzayıdır.

Grid noktalar kümesi;

$$\Omega_h = \{x = x_m = (h_1 m_1, \dots, h_n m_n); m = (m_1, \dots, m_n), m_r = 0, \dots, M_r, h_r M_r = l, \\ r = 1, \dots, n\},$$

$\Omega_h = \Omega_h \cap \Omega, \partial\Omega_h = \Omega_h \cap \partial\Omega$ ile tanımlansın.

$L_{2h} = L_2(\Omega_h)$ uzayı, Ω_h grid noktalar kümesinde tanımlanan, ξ^h grid fonksiyonlarından oluşan ve $\|\xi^h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in \Omega_h} |\xi^h(x)|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{1/2}$ normu ile birlikte tanımlanan *Hilbert* uzayıdır.

$W_{2h}^2 = W_2^2(\Omega_h)$ uzayı, Ω_h grid noktalar kümesinde tanımlanan, ikinci mertebeden türevleri sınırlı ξ^h grid fonksiyonlarından oluşan ve

$$\|\xi^h\|_{W_{2h}^2} = \|\xi\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x \in \Omega_h} \sum_{r=1}^n \left| \left(\xi^h \right)_{x_r} \right|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{1/2} + \left(\sum_{x \in \Omega_h} \sum_{r=1}^n \left| \left(\xi^h(x) \right)_{x_r, \bar{x}_r, m_r} \right|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{1/2} \text{ normu}$$

ile birlikte tanımlanan *Sobolev* uzayıdır.

Ters problemlerin kesin bir tanımı olmamakla birlikte, genel olarak matematikte ve bilimin birçok alanında karşılaşılan parametrelerin gözlem verilerinden elde edilmesini amaçlayan problemler sınıfına ters problemler denilebilir. Ters problemleri belirlemek için, öncelikle direkt problemin ne olduğunu anlamak gerekir. Bunun için matematiksel fiziğin problemleri örnek olarak ele alınabilir. Matematiksel fizikte, direkt problemler genellikle herhangi bir fiziksel alanı, süreci veya olayı (elektromagnetik, akustik, sismik, termal vb.) modelleme problemleri olarak anlaşılır. Direkt problemlerde, incelenen alanın her noktasında ve her anında (alan durağan değilse) fiziksel bir alanı veya süreci tanımlayan bir fonksiyonu bulmak gereklidir. Direkt problemleri çözmek için;

- ✓ sürecin çalışıldığı bölge,
- ✓ verilen süreci açıklayan denklem,
- ✓ başlangıç koşulları (süreç durağan değilse),
- ✓ bölge sınırındaki koşullar verilmelidir (Kabanikhin, 2009).

Eliptik denklem için direkt problemler Dirichlet, Neumann ve Robin sınır değerleri verilerek ele alınır (birinci, ikinci ve üçüncü tip). Aslında denklem bir sürecin modellenmesidir. Denklemden birşey eksik olduğunda ek sınır şartlar konulur. Bu sefer karşımıza yeni bir problem çıkar. Bu yeni probleme ters problem (üstbelirli) denir (Samarskii ve Vabishchevich, 2007).

Örneğin, $\Omega = (0, l)^n$ açık bir küp olmak üzere, $[0, T] \times \Omega$ bölgesinde çok boyutlu eliptik diferansiyel denklemi için direkt sınır değer problemi aşağıdaki şekilde ele alınabilir.

$$\begin{cases} -u_{tt}(t, x) - \sum_{r=1}^n (a_r(x) u_{x_r}(t, x))_{x_r} + \sigma u(t, x) = f(t, x), x \in \Omega, 0 < t < T, \\ u(0, x) = \xi(x), u(T, x) = \sum_{i=1}^q k_i u(\lambda_i, x) + \varphi(x), x \in \bar{\Omega}, \\ u(t, x) = 0, 0 \leq t \leq T, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Buradaki denklemi ve sınır şartlarını sağlayan $u(t, x)$ çözümü bulunmalıdır.

Ters problemde, $u(t, x)$ 'e ek olarak, direkt probleme dahil olan herhangi bir $p(x)$ fonksiyonu bilinmemektedir. Bilinmeyen fonksiyonları belirlemek için direkt problemin çözümü hakkında bazı ek bilgiler (ters problemin verileri) yukarıda verilen (1.1.1) problemine eklenir. Örneğin, ek sınır şartındaki $v(\gamma, x) = \zeta(x), x \in \bar{\Omega}, 0 < \gamma < T$ koşulu, direkt (1.1.1) probleminin çözümünün ek bilgisi olacaktır. Ters problemde, direkt problemin formülasyonunda yer alan bilinmeyen fonksiyonları belirlemek için $\zeta(x)$ verilerinden faydalanılır. Burada karşımıza $(v(t, x), p(x))$ bilinmeyenli yeni bir problem çıkar:

$$\begin{cases} -v_{tt}(t, x) - \sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r}(t, x))_{x_r} + \sigma v(t, x) = f(t, x) + p(x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, 0 < t < T, \\ v(0, x) = \phi(x), v(T, x) = \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i, x) - \eta(x), x \in \bar{\Omega}, \\ v(\gamma, x) = \zeta(x), x \in \bar{\Omega}, 0 < \gamma < T, \\ v(t, x) = 0, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Bu yeni probleme çok boyutlu eliptik diferansiyel denklem için ters problem denir (Kabanikhin, 2009).

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q \in (0, T)$ (q bir doğal sayı), $k_i \in (0, 1)$ ($i = 1, \dots, q$), $\sigma > 0$ gerçekte sayılar

ve $\sum_{i=1}^q k_i \leq 1$ olmak üzere;

$\phi: \bar{\Omega} \rightarrow R^1, \eta: \bar{\Omega} \rightarrow R^1, p: \Omega \rightarrow R^1, f: (0, T) \times \Omega \rightarrow R^1, a_r: \Omega \rightarrow R^+ (1 \leq r \leq n)$

fonksiyonları verilmiş olsun. $[0, T] \times \Omega$ bölgesinde tanımlanan $(n+1)$ değişkenli v

fonsiyonu, $-v_{tt}(t, x) - \sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r}(t, x))_{x_r} + \sigma v(t, x) = f(t, x) + p(x), x \in \Omega, 0 < t < T$

eliptik diferansiyel denklemini ve $v(0, x) = \phi(x)$, $v(T, x) = \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i, x) + \eta(x)$ sınır koşullarını sağlamış olsun. Bu tip koşullara *Dirichlet* tipindeki veya 1. Tip çok noktalı lokal olmayan koşullar denir.

$\vec{n}$ normal vektör olmak üzere v fonksiyonunun $(t, x) (0 \leq t \leq T, x \in \partial\Omega)$ noktasındaki normal $\vec{n}$ vektörüne göre yönlü türevi $\frac{\partial v(t, x)}{\partial \vec{n}}$ ile belirtilir. v fonksiyonu için, $v(t, x) = 0, 0 \leq t \leq T, x \in \partial\Omega$ koşuluna *Dirichlet* koşulu ve $\frac{\partial v(t, x)}{\partial \vec{n}} = 0, x \in \partial\Omega, 0 \leq t \leq T$ koşuluna ise *Neumann* koşulu denir.

Aşağıda yaklaşım formüllerinde geçen mertebe sembollerinden kısaca bahsedilecek olup, bu bağlamda önce mertebe sembollerinin tanımları daha sonra ise mertebe sembollerini belirlemede kullanılan teorem verilecektir.

Tanım 1.1.19. f ve ϕ iki fonksiyon olsun. Eğer $t_0 < t < t_1$ için, $|f(t)| \leq k_0 |\phi(t)|$ olacak şekilde k_0 ve t_1 (t 'den bağımsız) sabitleri mevcut ise, bu durum $t \rightarrow t_0$ için $f = O(\phi)$ şeklinde ifade edilir ve “ $t \rightarrow t_0$ için f fonksiyonu ϕ fonksiyonunun büyük O 'sudur” biçiminde okunur. $\forall \delta > 0$ ve $t_0 < t < t_2$ durumundaki bir t_2 için, $|f(t)| \leq \delta |\phi(t)|$ ise, bu durum $t \rightarrow t_0$ için $f = o(\phi)$ şeklinde ifade edilir ve “ $t \rightarrow t_0$ için f fonksiyonu ϕ fonksiyonunun küçük o 'sudur” biçiminde okunur (Holmes, 2010).

$f = O(\phi)$ ifadesi, f ile ϕ fonksiyonlarının aynı hızda azalmakta veya artmakta olduğu anlamına gelmektedir. $f = o(\phi)$ ifadesi ise, ϕ fonksiyonunun azalış veya artış hızı f 'ye göre daha büyüktür, demektir (Holmes, 2010).

Teorem 1.1.1. $-\infty < L < \infty$ olmak üzere eğer, $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)}{\phi(t)} = L (L \neq 0)$ ise,

$f = O(\phi)$ ve eğer $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)}{\phi(t)} = 0$ ise, $f = o(\phi)$ 'dir (Holmes, 2010). Buradan hareketle

araştırmada kullanılan bazı merkezi, ileri ve geri fark formülleri ile fonksiyonun türevlerinin yaklaşım formülleri aşağıda sunulmaktadır.

$t_0, t_1, \dots, t_n$ farklı noktalarda değerleri bilinen $y = f(t)$ fonksiyonunun bir noktadaki türevi, bilinen bu değerler kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanabilir. f fonksiyonunun t noktasındaki türevi:

$$f'(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau}.$$

Teorem 1.1.2. $f(t+\tau)$ için Taylor Teoremi;

$f \in C^{n+1}[a, b]$ olduğunu varsayalım. $t \in [a, b]$ ve bazı $\tau \neq 0$ için $t+\tau \in [a, b]$ olsun. Bu takdirde,

$$f(t+\tau) = f(t) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \tau^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tau^{n+1} \quad (1.1.2)$$

olacak şekilde t ile $t+\tau$ aralığında bir ξ sayısı vardır. Burada,

$$E_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tau^{n+1} = O(\tau^{n+1}) \text{ yaklaşım hatasıdır (Cheney 2004).}$$

$f \in C^2[a, b]$ ve $t \in [a, b]$ keyfi bir nokta olsun. Bu durumda $f'(t)$ türevini hesaplayalım. Bazı $\tau \neq 0$ için $t+\tau \in [a, b]$ olsun. Bu takdirde,

$$f'(t) = \frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau} - \frac{\tau f^{(2)}(\xi)}{2}, \text{ olacak şekilde } t \text{ ile } t+\tau \text{ aralığında bir } \xi \text{ sayısı}$$

vardır. Buna göre, türev için $f'(t) \approx \frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau}$ yaklaşık formülü elde edilir. Bu

formüle $\tau > 0$ için ileri fark formülü ve $\tau < 0$ için de geri fark formülü denir (Cheney, 2004).

a) $f \in C^3[a, b]$ ve $t-\tau, t, t+\tau \in [a, b]$ olsun. O halde,

$$f'(t) \approx \frac{f(t+\tau) - f(t-\tau)}{2\tau} \text{ veya } f'(t) = \frac{f(t+\tau) - f(t-\tau)}{2\tau} + \frac{\tau^2 f^{(3)}(c)}{3!} \text{ olacak şekilde}$$

$$c = c(t) \in [a, b] \text{ vardır. } E(f, \tau) = \frac{\tau^2 f^{(3)}(c)}{4!} = O(\tau^2) \text{ sayısına yaklaşım hatasıdır. Bu}$$

formüle 2. mertebeden merkezi fark formülü denir (Mathews ve Fink, 1999).

Bu formülü elde etmek için (1.1.2) formülünden,

$$f(t+\tau) = f(t) + f'(t)\tau + \frac{f''(t)}{2!} \tau^2 + \frac{f^{(3)}(c_1)}{3!} \tau^3 \text{ ve}$$

$f(t-\tau) = f(t) - f'(t)\tau + \frac{f^{(2)}(t)}{2!}\tau^2 - \frac{f^{(3)}(c_2)}{3!}\tau^3$ elde edilir ve bunlar taraf tarafa çıkarılırsa,

$$f(t+\tau) - f(t-\tau) = 2f'(t)\tau + \frac{[f^{(3)}(c_1) - f^{(3)}(c_2)]}{3!}\tau^3 \text{ olur.}$$

c sayısı, $f^{(3)}(c) = \frac{[f^{(3)}(c_1) - f^{(3)}(c_2)]}{2}$ şeklinde seçildiğinde,

$$f'(t) = \frac{f(t+\tau) - f(t-\tau)}{2\tau} + \frac{\tau^2 f^{(3)}(c)}{3!} \text{ veya}$$

$$f'(t) = \frac{f(t+\tau) - f(t-\tau)}{2\tau} + O(\tau^2) \quad (1.1.3)$$

elde edilir.

b) $f \in C^4[a, b]$ ve $t-\tau, t, t+\tau \in [a, b]$ noktalar olsun. O halde,

$$f''(t) = \frac{f(t+\tau) - 2f(t) + f(t-\tau)}{\tau^2} + O(\tau^2) \quad (1.1.4)$$

formülüne 2. mertebeden merkezi fark formülü denir. Burada $c = c(t) \in [a, b]$ olmak

üzere, $E(f, \tau) = \frac{\tau^2 f^{(4)}(c)}{4!} = O(\tau^2)$ sayısı yaklaşım hatasıdır (Mathews ve Fink, 1999).

Buradan hareketle (1.1.2)'ye göre (1.1.4)'ü elde edelim.

$$f(t+\tau) = f(t) + f'(t)\tau + \frac{f''(t)}{2!}\tau^2 + \frac{f^{(3)}(t)}{3!}\tau^3 + O(\tau^4)$$

$$f(t-\tau) = f(t) - f'(t)\tau + \frac{f^{(2)}(t)}{2!}\tau^2 - \frac{f^{(3)}(t)}{3!}\tau^3 + O(\tau^4) \text{ olur. Taraf tarafa toplandığında,}$$

$$f(t+\tau) + f(t-\tau) = 2f(t) + 2\frac{f''(t)}{2!}\tau^2 + O(\tau^4) \text{ elde edilir. Bu eşitlikten yola çıkarak}$$

istenilen $f''(t) = \frac{f(t+\tau) - 2f(t) + f(t-\tau)}{\tau^2} + O(\tau^2)$ formülüne ulaşılır.

c) $f \in C^5[a, b]$ ve $t-2\tau, t-\tau, t, t+\tau, t+2\tau \in [a, b]$ olsun. O halde

$$f'''(t) = \frac{f(t+2\tau) - 2f(t+\tau) + 2f(t-\tau) - f(t-2\tau)}{2\tau^3} + O(\tau^2) \quad (1.1.5)$$

formülüne 2. mertebeden merkezi fark formülü denir (Mathews ve Fink, 1999).

(1.1.2) kullanılarak ve katsayılarla çarpılarak,

$$f(t+2\tau) = f(t) + 2f'(t)\tau + 4\frac{f''(t)}{2!}\tau^2 + 8\frac{f^{(3)}(t)}{3!}\tau^3 + 16\frac{f^{(4)}(t)}{4!}\tau^4 + O(\tau^5),$$

$$-2f(t+\tau) = -2f(t) - 2f'(t)\tau - 2\frac{f''(t)}{2!}\tau^2 - 2\frac{f^{(3)}(t)}{3!}\tau^3 - 2\frac{f^{(4)}(t)}{4!}\tau^4 + O(\tau^5),$$

$$2f(t-\tau) = 2f(t) - 2f'(t)\tau + 2\frac{f''(t)}{2!}\tau^2 - 2\frac{f^{(3)}(t)}{3!}\tau^3 + 2\frac{f^{(4)}(t)}{4!}\tau^4 + O(\tau^5)$$

ve

$$-f(t-2\tau) = -f(t) + 2f'(t)\tau - 4\frac{f''(t)}{2!}\tau^2 + 8\frac{f^{(3)}(t)}{3!}\tau^3 - 16\frac{f^{(4)}(t)}{4!}\tau^4 + O(\tau^5)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplandığında (1.1.5)'e ulaşılır.

ç) $f \in C^5[a, b]$ ve $t-2\tau, t-\tau, t, t+\tau, t+2\tau \in [a, b]$ olsun. O halde;

$$f'(t) = \frac{-f(t+2\tau) + 8f(t+\tau) - 8f(t-\tau) + f(t-2\tau)}{12\tau} + O(\tau^4) \quad (1.1.6)$$

formülüne 4. mertebeden merkezi fark formülü denir (Mathews ve Fink, 1999).

(1.1.2) kullanılarak ve katsayılarla çarpılarak,

$$-f(t+2\tau) = -f(t) - 2f'(t)\tau - 4\frac{f''(t)}{2!}\tau^2 - 8\frac{f^{(3)}(t)}{3!}\tau^3 - 16\frac{f^{(4)}(t)}{4!}\tau^4 + O(\tau^5),$$

$$8f(t+\tau) = 8f(t) + 8f'(t)\tau + 8\frac{f''(t)}{2!}\tau^2 + 8\frac{f^{(3)}(t)}{3!}\tau^3 + 8\frac{f^{(4)}(t)}{4!}\tau^4 + O(\tau^5),$$

$$-8f(t-\tau) = -8f(t) + 8f'(t)\tau - 8\frac{f''(t)}{2!}\tau^2 + 8\frac{f^{(3)}(t)}{3!}\tau^3 - 8\frac{f^{(4)}(t)}{4!}\tau^4 + O(\tau^5) \text{ ve}$$

$$f(t-2\tau) = f(t) - 2f'(t)\tau + 4\frac{f''(t)}{2!}\tau^2 - 8\frac{f^{(3)}(t)}{3!}\tau^3 + 16\frac{f^{(4)}(t)}{4!}\tau^4 + O(\tau^5) \quad \text{eşitlikleri}$$

elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplandığında (1.1.6)'ya ulaşılır.

Çalışma içerisindeki Dirichlet sınır değer probleminde kullanılan yaklaşım formülleri aşağıda şu şekilde gösterilmektedir:

d) $f \in C^4[a, b]$ ve $t, t+\tau, t+2\tau, t+3\tau \in [a, b]$ noktalar olsun. O halde,

$$f''(t) = \frac{-f(t+3\tau) + 4f(t+2\tau) - 5f(t+\tau) + 2f(t)}{\tau^2} + O(\tau^2) \quad \text{formülüne 2. mertebeden}$$

ileri fark formülü denir (Mathews ve Fink, 1999).

Bu formül (1.1.2) kullanılarak şu şekilde elde edilir:

$$f(t+\tau) = f(t) + f'(t)\tau + \frac{f''(t)}{2!}\tau^2 + \frac{f^{(3)}(t)}{3!}\tau^3 + O(\tau^4),$$

$$f(t+2\tau) = f(t) + 2f'(t)\tau + \frac{f''(t)}{2!}4\tau^2 + \frac{f^{(3)}(t)}{3!}8\tau^3 + O(\tau^4) \text{ ve}$$

$$f(t+3\tau) = f(t) + 3f'(t)\tau + \frac{f''(t)}{2!}9\tau^2 + \frac{f^{(3)}(t)}{3!}27\tau^3 + O(\tau^4) \quad \text{olduğu bilinmektedir.}$$

Katsayılarla çarpıldığında,

$$-5f(t+\tau) = -5f(t) - 5f'(t)\tau - \frac{5}{2}f''(t)\tau^2 - \frac{5}{6}f^{(3)}(t)\tau^3 + O(\tau^4),$$

$$4f(t+2\tau) = 4f(t) + 8f'(t)\tau + 4\frac{f''(t)}{2!}4\tau^2 + \frac{32}{3!}f^{(3)}(t)\tau^3 + O(\tau^4)$$

$$= 4f(t) + 8f'(t)\tau + 8f''(t)\tau^2 + \frac{16}{3}f^{(3)}(t)\tau^3 + O(\tau^4),$$

$$-f(t+3\tau) = -f(t) - 3f'(t)\tau - \frac{9}{2}f''(t)\tau^2 - \frac{9}{2}f^{(3)}(t)\tau^3 + O(\tau^4) \text{ eşitlikleri elde edilir. Bu}$$

eşitlikler taraf tarafa toplandığında,

$$-f(t+3\tau) + 4f(t+2\tau) - 5f(t+\tau) = -2f(t) + f''(t)\tau^2 + O(\tau^4) \text{ elde edilir. Buradan}$$

$$\text{istenilen } f''(t) = \frac{-f(t+3\tau) + 4f(t+2\tau) - 5f(t+\tau) + 2f(t)}{\tau^2} + O(\tau^2) \text{ eşitliğine ulaşılır.}$$

e) $f \in C^4[a, b]$ ve $t-3\tau, t-2\tau, t-\tau, t \in [a, b]$ noktalar olsun. Bu takdirde

$$f''(t) = \frac{2f(t) - 5f(t-\tau) + 4f(t-2\tau) - f(t-3\tau)}{\tau^2} + O(\tau^2) \text{ formülüne 2. mertebeden geri}$$

fark formülü denir (Mathews ve Fink, 1999).

(1.1.2) uygulayarak 2. mertebeden geri fark formülünü aşağıdaki şekilde elde edelim:

$$-5f(t-\tau) = -5f(t) + 5f'(t)\tau - \frac{5}{2}f''(t)\tau^2 + \frac{5}{6}f^{(3)}(t)\tau^3 + O(\tau^4),$$

$$4f(t-2\tau) = 4f(t) - 8f'(t)\tau + 4\frac{f''(t)}{2}4\tau^2 - \frac{32}{6}f^{(3)}(t)\tau^3 + O(\tau^4),$$

$$-f(t-3\tau) = -f(t) + 3f'(t)\tau - \frac{9}{2}f''(t)\tau^2 + \frac{9}{2}f^{(3)}(t)\tau^3 + O(\tau^4).$$

Yukarıdaki eşitlikler taraf tarafa toplanarak düzenlenecek olursa

$$-5f(t-\tau) + 4f(t-2\tau) - f(t-3\tau) = -2f(t) + f''(t)\tau^2 + O(\tau^4) \text{ elde edilir. Buradan}$$

hareketle,

$$f''(t) = \frac{2f(t) - 5f(t-\tau) + 4f(t-2\tau) - f(t-3\tau)}{\tau^2} + O(\tau^2) \text{ formülüne ulaşılır.}$$

Çalışma içerisindeki Neumann sınır değer probleminde kullanılan yaklaşım formülleri aşağıda şu şekilde gösterilmektedir:

f) $f \in C^3[a, b]$ ve $t, t+\tau, t+2\tau \in [a, b]$ noktalar olsun. Bu takdirde, $f'(t) = \frac{-f(t+2\tau) + 4f(t+\tau) - 3f(t)}{2\tau} + O(\tau^2)$ formülüne 2. mertebeden ileri fark formülü denir (Mathews ve Fink, 1999).

(1.1.2) uygulayarak 2. mertebeden ileri fark formülü aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$f(t+\tau) = f(t) + f'(t)\tau + \frac{f^{(2)}(t)}{2!}\tau^2 + O(\tau^3)$$

$$4f(t+\tau) = 4f(t) + 4f'(t)\tau + 4\frac{f^{(2)}(t)}{2!}\tau^2 + O(\tau^3)$$

$$-f(t+2\tau) = -f(t) - 2f'(t)\tau - 4\frac{f^{(2)}(t)}{2!}\tau^2 + O(\tau^3).$$

Taraf tarafa toplanarak yazıldığında:

$$-f(t+2\tau) + 4f(t+\tau) = 3f(t) + 2f'(t)\tau + O(\tau^3) \text{ elde edilir. Buradan istenilen } f'(t) = \frac{-f(t+2\tau) + 4f(t+\tau) - 3f(t)}{2\tau} + O(\tau^2) \text{ formülü bulunur.}$$

g) $f \in C^3[a, b]$ ve $t-2\tau, t-\tau, t \in [a, b]$ noktalar olsun. Bu durumda, $f'(t) = \frac{3f(t) - 4f(t-\tau) + f(t-2\tau)}{2\tau} + O(\tau^2)$ formülüne 2. mertebeden geri fark formülü denir (Mathews ve Fink, 1999).

(1.1.2) formülünden;

$$f(t-\tau) = f(t) - f'(t)\tau + \frac{f^{(2)}(t)}{2!}\tau^2 + O(\tau^3)$$

$$-4f(t-\tau) = -4f(t) + 4f'(t)\tau - 4\frac{f^{(2)}(t)}{2!}\tau^2 + O(\tau^3)$$

$$f(t-2\tau) = f(t) - 2f'(t)\tau + 4\frac{f^{(2)}(t)}{2!}\tau^2 + O(\tau^3) \text{ elde edilir. Taraf tarafa toplandığında,}$$

$-4f(t-\tau)+f(t-2\tau)=-3f(t)+2f'(t)\tau+O(\tau^3)$ bulunur ve son olarak istenilen $f'(t)=\frac{3f(t)-4f(t-\tau)+f(t-2\tau)}{2\tau}+O(\tau^2)$ formülüne ulaşılır.

ğ) $f \in C^5[a,b]$ ve $t, t+\tau, t+2\tau, t+3\tau \in [a,b]$ olsun. O halde $f'(t)=0$ olmak üzere, $f'''(t)=\frac{-f(t+3\tau)+6f(t+2\tau)-15f(t+\tau)+10f(t)}{\tau^3}+O(\tau^2)$ formülüne 2.

mertebeden ileri fark formülü denir (Ashyralyyev,2014).

(1.1.2) uygulanıp katsayılarla çarpıldığında;

$$-15f(t+\tau)=-15f(t)-15f'(t)\tau-15\frac{f^{(2)}(t)}{2}\tau^2-15\frac{f^{(3)}(t)}{6}\tau^3-15\frac{f^{(4)}(t)}{24}\tau^4+O(\tau^5),$$

$$6f(t+2\tau)=6f(t)+12f'(t)\tau+24\frac{f^{(2)}(t)}{2}\tau^2+48\frac{f^{(3)}(t)}{6}\tau^3+96\frac{f^{(4)}(t)}{24}\tau^4+O(\tau^5) \text{ ve}$$

$$-f(t+3\tau)=-f(t)-3f'(t)\tau-9\frac{f^{(2)}(t)}{2!}\tau^2-27\frac{f^{(3)}(t)}{6}\tau^3-81\frac{f^{(4)}(t)}{24}\tau^4+O(\tau^5) \text{ elde}$$

edilir. Taraf tarafa toplandığında ise,

$$f'''(t)=-\frac{6f'(t)}{\tau^2}+\frac{-f(t+3\tau)+6f(t+2\tau)-15f(t+\tau)+10f(t)}{\tau^3}+O(\tau^2) \text{ formülüne}$$

ulaşılır. Burada $f'(t)=0$ olduğundan;

$$f'''(t)=\frac{-f(t+3\tau)+6f(t+2\tau)-15f(t+\tau)+10f(t)}{\tau^3}+O(\tau^2) \text{ elde edilmektedir.}$$

h) $f \in C^5[a,b]$ ve $t-3\tau, t-2\tau, t-\tau, t \in [a,b]$ noktalar olsun. Bu takdirde $f'(t)=0$ olmak üzere,

$$f'''(t)=\frac{-10f(t)+15f(t-\tau)-6f(t-2\tau)+f(t-3\tau)}{\tau^3}+O(\tau^2) \text{ formülüne 2. mertebeden}$$

geri fark formülü denir (Ashyralyyev,2014).

(1.1.2) uygulanarak katsayılarla çarpıldığında;

$$-15f(t-\tau)=-15f(t)+15f'(t)\tau-15\frac{f^{(2)}(t)}{2!}\tau^2+15\frac{f^{(3)}(t)}{3!}\tau^3-15\frac{f^{(4)}(t)}{4!}\tau^4+O(\tau^5),$$

$$6f(t-2\tau)=6f(t)-12f'(t)\tau+24\frac{f^{(2)}(t)}{2!}\tau^2-48\frac{f^{(3)}(t)}{3!}\tau^3+96\frac{f^{(4)}(t)}{4!}\tau^4+O(\tau^5) \text{ ve}$$

$$-f(t-3\tau) = -f(t) + 3f'(t)\tau - 9\frac{f^{(2)}(t)}{2!}\tau^2 + 27\frac{f^{(3)}(t)}{3!}\tau^3 - 81\frac{f^{(4)}(t)}{4!}\tau^4 + O(\tau^5) \quad \text{elde}$$

edilir. Taraf tarafa toplanıp $f'(t) = 0$ kullanıldığında istenilen $f'''(t) = \frac{-10f(t) + 15f(t-\tau) - 6f(t-2\tau) + f(t-3\tau)}{\tau^3} + O(\tau^2)$ eşitliğine ulaşılmaktadır.

Çalışmada kullanılan fonksiyonun türevlerinin yaklaşım formülleri aşağıda verilmektedir.

Teorem 1.1.3. $f(t)$ için *Taylor* Teoremi:

$f \in C^{n+1}[a, b]$ olduğunu varsayalım. $t_l \in [a, b]$ ve bazı $\tau \neq 0$ için $\lambda \in [a, b]$ olsun. Bu takdirde,

$$f(\lambda) = f(t_l) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t_l)}{k!} (\lambda - t_l)^k + O(\tau^{n+1}) \quad (1.1.7)$$

olacak şekilde t_l ile λ aralığında bir ξ sayısı vardır. Burada,

$$E_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\lambda - t_l)^{n+1} = O(\tau^{n+1}) \quad \text{yaklaşım hatasıdır. Burada } [\cdot] \text{ en büyük tam sayı}$$

fonksiyonunun notasyonu olmak üzere, $t_l = l\tau = \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \tau$, $|\lambda - t_l| < \tau$ (Cheney, 2004).

$f \in C^{n+1}[a, b]$, $t_l \in [a, b]$ ve $\lambda \in [a, b]$ olsun. (1.1.7) formülünden,

$$f(\lambda) = f(t_l) + f'(t_l)(\lambda - t_l) + f''(t_l) \frac{(\lambda - t_l)^2}{2!} + O(\tau^3) \quad \text{olduğu bilinmektedir.}$$

$f(t_l) = f_l$ olarak tekrar,

$$f(\lambda) = f_l + f'_l(\lambda - t_l) + f''_l \frac{(\lambda - t_l)^2}{2!} + O(\tau^3) \quad (1.1.8)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $O(\tau^3)$ yaklaşım hatasıdır.

(1.1.3) ve (1.1.4) merkez fark formüllerini (1.1.7) formülüne uyarlayarak,

$$f'_l = \frac{f_{l+1} - f_{l-1}}{2\tau} + O(\tau^2) \quad \text{ve} \quad f''_l = \frac{f_{l+1} - 2f_l + f_{l-1}}{\tau^2} + O(\tau^2) \quad \text{şeklindeki formüller}$$

yazılabilir.

$$\text{Bu formüller ve } \lambda - t_l = \frac{\lambda}{\tau} \tau - l\tau = \left(\frac{\lambda}{\tau} - l \right) \tau = \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right) \tau \quad \text{bağıntısını (1.1.8)}$$

formülüne uygulayarak,

$$f(\lambda) = f_l + \frac{f_{l+1} - f_{l-1}}{2\tau} \tau \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right) + \frac{f_{l+1} - 2f_l + f_{l-1}}{\tau^2} \frac{\tau^2 \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right)^2}{2!} \\ + (\lambda - t_l) O(\tau^2) + \frac{(\lambda - t_l)^2}{2!} O(\tau^2) + O(\tau^3) \text{ eşitliğine ulaşılır. Düzenlemelerden}$$

sonra, üçüncü mertebeden yaklaşım formülü aşağıdaki şekilde bulunur:

$$f(\lambda) = \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right)^2 \right] f \left(\left(\left[\frac{\lambda}{\tau} \right] - 1 \right) \tau \right) \\ + \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right)^2 \right] f \left(\left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \tau \right) \\ + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right)^2 \right] f \left(\left(\left[\frac{\lambda}{\tau} \right] + 1 \right) \tau \right) + O(\tau^3) \text{ (Ashyralyyev, 2014).}$$

$$(1.1.7) \text{ formülünden, } f(\lambda) = f_l + f'_l (\lambda - t_l) + f''_l \frac{(\lambda - t_l)^2}{2!} + f'''_l \frac{(\lambda - t_l)^3}{3!} + O(\tau^4) \quad (1.1.9)$$

olduğu bilinmektedir. Burada, $[\cdot]$ en büyük tam sayı fonksiyonunun notasyonu olmak

üzere, $t_l = \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \tau$, $|\lambda - t_l| < \tau$, $O(\tau^4)$ yaklaşım hatasıdır.

(1.1.6), (1.1.4) ve (1.1.5) merkezi fark formüllerini (1.1.7) formülüne uyarlayarak,

$$f'_l = \frac{-f_{l+2} + 8f_{l+1} - 8f_{l-1} + f_{l-2}}{12\tau} + O(\tau^4),$$

$$f''_l = \frac{f_{l+1} - 2f_l + f_{l-1}}{\tau^2} + O(\tau^2) \text{ ve}$$

$$f'''_l = \frac{f_{l+2} - 2f_{l+1} + 2f_{l-1} - f_{l-2}}{2\tau^3} + O(\tau^2) \text{ formülleri yazılabilir. Bu formülleri ve}$$

$$\lambda - t_l = \frac{\lambda}{\tau} \tau - l\tau = \left(\frac{\lambda}{\tau} - l \right) \tau = \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right) \tau \text{ bağıntısını (1.1.9)'a uygulayarak,}$$

$$f(\lambda) = f_l + \frac{-f_{l+2} + 8f_{l+1} - 8f_{l-1} + f_{l-2}}{12\tau} \tau \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right) + (\lambda - t_l) O(\tau^4) \\ + \frac{f_{l+1} - 2f_l + f_{l-1}}{\tau^2} \frac{\tau^2 \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right)^2}{2!} + \frac{(\lambda - t_l)^2}{2!} O(\tau^2)$$

$$+ \frac{f_{l+2} - 2f_{l+1} + 2f_{l-1} - f_{l-2}}{2\tau^3} \frac{\tau^3 \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right)^3}{3!} + \frac{(\lambda - t_l)^3}{3!} O(\tau^4) \quad \text{elde edilir.}$$

Düzenlemelerden sonra, dördüncü mertebeden yaklaşım formülü aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} f(\lambda) = & \left[\frac{1}{12} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right)^3 \right] f \left(\left(\left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor - 2 \right) \tau \right) \\ & + \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right)^3 \right] f \left(\left(\left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor - 1 \right) \tau \right) \\ & + \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right)^2 \right] f \left(\left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \tau \right) \\ & + \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right)^3 \right] f \left(\left(\left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor + 1 \right) \tau \right) \\ & + \left[-\frac{1}{12} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right)^3 \right] f \left(\left(\left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor + 2 \right) \tau \right) + O(\tau^4) \end{aligned}$$

(Ashyralyyev, 2014).

Üçlü köşegen matrisler için değiştirilmiş *Gauss* yöntemini kısaca açıklayalım.

Özel olarak üçlü köşegen matrisler için lineer denklem sistemini göz önüne alalım.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & a_4 & b_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$D_1 : a_1 x_1 + b_1 x_2 = f_1,$$

$$D_2 : c_2 x_1 + a_2 x_2 + b_2 x_3 = f_2,$$

$$D_3 : c_3 x_2 + a_3 x_3 + b_3 x_4 = f_3,$$

...

$$D_i : c_i x_{i-1} + a_i x_i + b_i x_{i+1} = f_i,$$

...

$$D_{n-1} : c_{n-1} x_{n-2} + a_{n-1} x_{n-1} + b_{n-1} x_n = f_{n-1},$$

$$D_n : c_n x_{n-1} + a_n x_n = f_n.$$

Burada $a_i, b_i, c_i, f_i, i=1,...,n$ verilen sayılardır ($c_1=0, b_n=0$).

Birinci denklem, $\alpha_1 = -\frac{b_1}{a_1}, \beta_1 = \frac{f_1}{a_1}$ olmak üzere, $x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1$ şeklinde

yazılabilir. Bu formülü kullanarak ikinci denklemden x_1 'i yok ederek, aşağıdaki şekilde,

$$c_2(\alpha_1 x_2 + \beta_1) + a_2 x_2 + b_2 x_3 = f_2$$

$$(a_2 + \alpha_1 c_2)x_2 + b_2 x_3 = f_2 - c_2 \beta_1$$

$$x_2 = -\frac{b_2}{a_2 + \alpha_1 c_2} x_3 + \frac{f_2 - c_2 \beta_1}{a_2 + \alpha_1 c_2} \quad \text{elde edilir.} \quad \text{Böylece } x_2 \text{ bilinmeyi,}$$

$$\alpha_1 = -\frac{b_2}{a_2 + \alpha_1 c_2}, \beta_1 = \frac{f_2 - c_2 \beta_1}{a_2 + \alpha_1 c_2} \quad \text{olmak üzere, } x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2 \text{ biçiminde yazılır. } x_2$$

bilinmeyi için elde edilen eşitliği uygulayarak ve üçüncü denklemden x_3 'ü yok ederek

yazılabilir. Aynı işlemlere devam ederek, x_{i-1} bilinmeyi için $x_{i-1} = \alpha_{i-1} x_i + \beta_{i-1}$

eşitliğini kullanarak i . denklemini yazalım:

$$c_i(\alpha_{i-1} x_i + \beta_{i-1}) + a_i x_i + b_i x_{i+1} = f_i$$

$$(a_i + c_i \alpha_{i-1}) x_i = -b_i x_{i+1} + (f_i - c_i \beta_{i-1})$$

$$x_i = -\frac{b_i}{a_i + c_i \alpha_{i-1}} x_{i+1} + \frac{f_i - c_i \beta_{i-1}}{a_i + c_i \alpha_{i-1}}.$$

Buna göre x_i bilinmeyi, $x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i$ şeklinde elde edilir. Burada α_i, β_i

($i=2,...,n-1$) katsayıları, $\alpha_i = -\frac{b_i}{a_i + c_i \alpha_{i-1}}, \beta_i = \frac{f_i - c_i \beta_{i-1}}{a_i + c_i \alpha_{i-1}}$ eşitlikleriyle hesaplanır. Bu

formüllere dikkat edilirse, α_i ve β_i katsayılarının hesaplanması için α_{i-1} ve β_{i-1}

katsayılarının önceden bilinmesi gerekmektedir. Şimdi n . denlemi, $x_{n-1} = \alpha_{n-1} x_n + \beta_{n-1}$

bağıntısını kullanarak yazalım:

$$c_n x_{n-1} + a_n x_n = f_n,$$

$$x_{n-1} = \alpha_{n-1} x_n + \beta_{n-1}$$

Buradan;

$$c_n(\alpha_{n-1} x_n + \beta_{n-1}) + a_n x_n = f_n,$$

$$(a_n + c_n \alpha_{n-1}) x_n = f_n - c_n \beta_{n-1},$$

$$x_n = \frac{f_n - c_n \beta_{n-1}}{a_n + c_n \alpha_{n-1}} \quad \text{elde edilir. Dolayısıyla } x_n \text{ bilinmeyi, } x_n = \frac{f_n - c_n \beta_{n-1}}{a_n + c_n \alpha_{n-1}} \text{ formülüyle}$$

hesaplanır. x_i bilinmeyi için elde edilen $x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, i=n-1, n-2, ..., 2, 1$

formülü ile, $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$ bilinmeyenleri sırasıyla hesaplanabilir (Samarskii ve Nikolaev, 1989).

1.2. Literatür Taraması

Mühendisliğin ve fiziğin farklı modellerine etkisi sebebiyle, son yıllarda diferansiyel denklemler için ters problemlerin araştırılmasının önemi daha da artmıştır. Ters problemlerin astronomi, fizik, jeofizik, uzaktan algılama, okyanus akustiği, tıpta görüntü işleme ve tahribatsız muayene gibi bilimin bir çok alt dalında uygulandığı görülmektedir.

Özellikle Prilepko vd. (2000), Isakov (2006), Samarskii ve Vabishchevich (2007) ile Kabanikhin (2009) çalışmalarında bu ters problemlerin genel teorisine ve onlara çözüm bulma yöntemlerine yer vermektedirler. Kısmi diferansiyel denklemlerin parametrelerini bulmaya yönelik ters problemlerin teorisi ve çözüm yöntemleri birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bu farklı tipteki ters problemleri; Eidelman (1991), Dehghan (2001), Soloviev (2004, 2006, 2007), Kabanikhin (2008), Orlovskii (2008), Orlovsky ve Piskarev (2009), Sakamoto ve Yamamoto (2009), Ashyralyev ve Erdoğan (2010), Topsakal ve Amirov (2010), Ashyralyev vd. (2012), Erdoğan ve Uygun (2012), Aleroev vd. (2013), Ashyralyev ve Dedetürk (2013), Orlovsky ve Piskarev (2013), Roberty (2013), Bouzitouna vd. (2013), Ashyralyev ve Ashyralyev (2014), Ashyralyev ve Erdoğan (2014), Ashyralyev ve Ağırseven (2014), Ashyralyev (2014, 2015), Ashyralyev ve Akkan (2015), Ashyralyev ve Dedetürk (2014, 2015), Ashyralyev ve Akyüz (2016), Klivanov ve Romanov (2016), Ashyralyev (2017), Ashyralyev vd. (2017), Ashyralyev, Akyüz ve Dedetürk (2017), Orlovsky ve Piskarev (2018), Ashyralyev ve Çay (2018), Ashyralyev ve Akyüz (2018), Akhundov ve Hasanov (2018), Kirane, Sadybekov ve Sarsenbi (2019), Kozhanov ve Shipina (2020), Feizmohammadi ve Oksanen (2020), Ashyralyev ve Çay (2020), Ashyralyev, Al-Hammouri ve Ashyralyev (2021), Ashyralyev (2021), Ashyralyev ve Akyüz (2021), Lassas, Liimatainen vd. (2021) çalışmalarında kapsamlı bir şekilde incelemiştir.

Ashyralyev ve Öztürk (2012, 2013, 2014) ile Ashyralyev ve Özsezenli Tetikoğlu (2012, 2013, 2014) çalışmalarında, eliptik denklemler için lokal olmayan sınır değer problemleri için üst mertebeden fark şemalarını araştırmışlardır. Bu çalışmalarda lokal olmayan direkt problemlerin ve yaklaşık fark şemalarının çözümleri için kararlılık kestirimleri elde edildiği görülmektedir. Eliptik denklemler için farklı üstbelirli sınır değer problemleri ve onların yaklaşımları Orlovsky (2013), Orlovsky ve Piskarev

(2013, 2018), Ashyralyev ve Dedetürk (2013) ve Ashyralyev (2014, 2017) çalışmalarında incelenmiştir. Orlovsky (2013), Orlovsky ve Piskarev (2013, 2018) çalışmalarında Dirichlet ve Neumann koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli problemi, Banach ve Hilbert uzaylarında incelenmiştir. Bu çalışmalarda varlık ve teklik teoremleri ele alınmıştır.

Ashyralyev ve Dedetürk (2013) çalışmalarında bilinmeyen $p \in H$ elemanı ve v fonksiyonu için,

$$\begin{cases} -v_{tt}(t) + Av(t) = f(t) + p, 0 < t < T, \\ v(0) = \phi, v(T) = \psi, v(\lambda) = \zeta, \lambda \in (0, T) \end{cases}$$

formundaki Dirichlet tipi ters eliptik probleminin çözümü için kararlılık eşitsizlikleri elde edilmiştir. Ashyralyev (2014) çalışmasında bu tip ters problemler için üst mertebeden doğruluklu fark şemalarını araştırmıştır. Ashyralyev (2017) çalışmasında Neumann tipi eliptik üstbelirli problem için dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemasını sunmuştur.

Ashyralyev (2017) çalışmasında bilinmeyen $p \in H$ eleman ve v fonksiyonu için,

$$\begin{cases} -v_{tt}(t) + Av(t) = f(t) + p, 0 < t < T, \\ v_t(0) = \phi, v(\lambda_0) = \zeta, 0 < \lambda_0 < T \\ v_t(T) = \sum_{i=1}^q k_i v_t(\lambda_i) + \eta, 0 < \lambda_i < T, \end{cases}$$

ikinci tür sınır şartlı ve Neumann tipi ek şartlı ters problemini araştırmıştır. Bu ters problemin çözümü için kararlılık eşitsizlikleri sunulmuştur. Birinci mertebeden doğruluklu fark şemasının çözümü için kararlılık ve koersif kararlılık eşitsizlikleri ispatlanmıştır.

Akyüz (2017) çalışmasında, Hilbert uzayında eliptik diferansiyel denklem için,

$$\begin{cases} -v_{tt}(t) + Av(t) = f(t) + p, 0 < t < T, \\ v(0) = \phi, v(T) = \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i) + \eta, 0 < \lambda_i < T, \\ v(\gamma) = \zeta, 0 < \gamma < T \end{cases}$$

formundaki Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli probleminin çözümü için kararlılık kestirimlerini araştırmıştır. Ayrıca bu problemin yaklaşık çözümünü bulmak için birinci ve ikinci mertebeden fark şemaları sunulmuş ve incelenmiştir. Araştırma sonuçları Ashyralyev ve Akyüz (2016), Ashyralyev, Akyüz ve Dedetürk (2017), Ashyralyev ve Akyüz (2018) çalışmalarıyla literatüre kazandırılmıştır.

Ashyralyyev ve Çay (2018, 2020), bilinmeyen $p \in H$ elemanı ve v fonksiyonu için,

$$\begin{cases} -v_{tt}(t) + Av(t) = f(t) + p, 0 < t < T, \\ v_t(0) = \phi, v(\lambda_0) = \zeta, 0 < \lambda_0 < T \\ v_t(T) = \int_0^T \alpha(\lambda) v_\lambda(\lambda) d\lambda + \psi, \end{cases}$$

integral koşullu Neumann tipindeki eliptik üst belirli probleminin iyi tanımlılığını araştırmıştır. Üst belirli problemin yaklaşık çözümü için birinci ve ikinci mertebeden doğruluklu fark şemaları ve kararlılık ile koersif kararlılık kestirimleri sunulmuştur.

Literatür incelendiğinde, çok noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters eliptik problemler için yüksek mertebeden doğruluklu fark şemalarının araştırılmadığı görülmektedir. Bu çalışmanın amacı ise literatürdeki bu boşluğu doldurmaktır.

Çalışmada, A operatörü öz-eşlenik pozitif tanımlı operatör ve p bilinmeyen eleman olmak üzere, (v, p) çifti için çok noktalı yerel olmayan sınır koşullu

$$\begin{cases} -v_{tt}(t) + Av(t) = f(t) + p, 0 < t < T, \\ v(0) = \phi, v(T) = \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i) + \eta, 0 < \lambda_i < T, \\ v(\gamma) = \zeta, 0 < \gamma < T \end{cases}$$

ters eliptik problemi Hilbert uzayında incelenmektedir.

Bu çalışma temelde dört bölümden ve eklerden oluşmaktadır. Birinci bölüm genel bilgiler kısmı olup, iki alt bölümden oluşmaktadır. İkinci bölüm yapılan çalışmaları ele almakta olup, üç alt kısımdan oluşmaktadır. Alt kısımların ilkinde elde edilen özgün önermeler ispatlarıyla sunulmaktadır. İkinci alt kısımda ise yerel olmayan sınır koşullu ters eliptik problemin yaklaşık çözümünün üçüncü mertebeden doğruluklu fark şeması ele alınmaktadır. Burada problemin yaklaşık çözümü için kararlılık, hemen-hemen koersif kararlılık ve koersif kararlılık kestirimlerini ifade eden teoremler ispatlarıyla birlikte verilmektedir. Sonuncu alt kısımda ise, çok noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters eliptik problemin yaklaşık çözümü için dördüncü mertebeden fark şeması kurulmuştur. Burada problemin yaklaşık çözümü için kararlılık, hemen-hemen koersif kararlılık ve koersif kararlılık eşitsizliklerini içeren teoremler ispatlarıyla verilmektedir.

Üçüncü bölüm bulgular ve tartışma şeklinde tasarlanmış olup, iki alt kısımdan oluşmaktadır. Bunlardan ilkinde çok boyutlu ters yerel olmayan sınır değer problemleri için fark şemaları oluşturulmuştur. Yerel olmayan ters Dirichlet ve Neumann sınır değer problemlerinin çözümü için yüksek mertebeden fark şemaları kurulmuş ve çözüm için kararlılık analizi yapılmıştır. Devamındaki ikinci kısımda ise sayısal örneklerin

sonuçları verilmektedir. Bu alt kısımda ayrıca ikiye ayrılmaktadır. Birincisinde eliptik denklem için yerel olmayan ters Dirichlet sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için üçüncü ve dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemalarının sayısal çözümleri ele alınmıştır. Bu fark şemalarına beşli köşegen matrisler için değiştirilmiş Gauss yöntemi (Samarskii ve Nikolaev, 1989) uygulanarak matrislerden oluşan bir lineer sisteme dönüştürülmesi sağlanmıştır. Bir, iki ve üç noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters eliptik problemlerin sayısal çözümlerini bulmak için MATLAB programı kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlarla, grafikler ve hata analizleri tablolar şeklinde burada verilmektedir. Devamında ise eliptik denklemler için yerel olmayan ters Neumann sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için yüksek mertebeden fark şemalarının sayısal sonuçları sunulmaktadır. Bu fark şemalarının sayısal sonuçlarını bulmak için değiştirilmiş Gauss yöntemi uygulanmıştır. Bir, iki ve üç noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters eliptik problemlerin sayısal çözümleri MATLAB programı kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlarla, grafikler ve hata analizleri burada verilmektedir.

Dördüncü ve son bölüm ise elde edilen sonuçların ve önerilerin sunulduğu bölümdür. Ekler kısmında ise incelenen problemin üç noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters Dirichlet ve Neumann sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümünün üçüncü ve dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemalarının sayısal çözümlerinin MATLAB program kodları sunulmaktadır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Ön Hazırlık

A operatörü, keyfi H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı bir operatör olsun. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayıları,

$$k = \sum_{i=1}^q k_i \leq 1. \quad (2.1.1)$$

koşulunu sağlayan bilinen negatif olmayan reel sayılar ve belirli $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ sayıları, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_q$ özelliğinde olmalıdır. A operatorünün pozitif tanımlılığı $\delta > 0$ ve I birim operatör olmak üzere, $A \geq \delta I$ eşitsizliğiyle verilir.

Çok noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters eliptik problemini ele alalım. $\phi, \eta, \zeta \in H$ Hilbert uzayının verilen elemanları ve $f: [0, T] \rightarrow H$ bilinen düzgün bir fonksiyon olmak üzere, bilinmeyen $p \in H$ elemanı ve $v \in C^2([0, T], H) \cap C([0, T], D(A))$ fonksiyonu aşağıdaki diferansiyel denklemi ve sınır şartlarını sağlamaktadır:

$$\begin{cases} -v_{tt}(t) + Av(t) = f(t) + p, 0 < t < T, \\ v(0) = \phi, v(T) = \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i) + \eta, 0 < \lambda_i < T, \\ v(\gamma) = \zeta, 0 < \gamma < T \end{cases} \quad (2.1.2)$$

$C(H)$ ve $C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)$ Banach uzaylarındaki normları tanımlayalım. $[0, T]$ aralığında tanımlı, değerleri H Hilbert uzayında olan düzgün $v(t)$ fonksiyonunun normları aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} \|v\|_{C(H)} &= \max_{0 \leq t \leq T} \|v(t)\|_H, \\ \|v\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} &= \|v\|_{C(H)} + \sup_{0 \leq t < t+\tau \leq T} (t+\tau)^\alpha \tau^{-\alpha} (T-t)^\alpha \|v(t+\tau) - v(t)\|_H. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Aşağıda çalışma için gerekli olan önermeler ifade edilmektedir. Çalışmada zaman zaman farklı gösterilen pozitif sabitler, M ile belirtilmekte ve $M(\delta)$ sabiti, sadece δ' ya bağlı olarak kullanılmaktadır.

Eğer bir A operatörü H Hilbert uzayında sınırlı ve öz-eşlenik pozitif tanımlı ise, her bir $\tau > 0$ için, $C = A + \frac{\tau^2}{12} A^2$, $D = \frac{1}{2} \left(\tau C + \sqrt{4C + \tau^2 C^2} \right)$ ve $R = (I + \tau D)^{-1}$

operatörleri de öz-eşlenik pozitif tanımlı operatörlerdir (Krein, 1966). Burada I birim operatördür. Ayrıca, D sınırlı operatörü tüm H Hilbert uzayında tanımlıdır.

Öncelikle $[\cdot]$ en büyük tam sayı fonksiyonunun notasyonu olmak üzere,

$$\begin{aligned} l_0 &= \left[\frac{\gamma}{\tau} \right], l_i = \left[\frac{\lambda_i}{\tau} \right], \frac{\gamma}{\tau} - l_0 = \mu_0, \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i = \mu_i, i = 1, \dots, q \\ \mu_{0,1} &= \frac{1}{12} \mu_0 - \frac{1}{12} \mu_0^3, \mu_{0,2} = -\frac{2}{3} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 + \frac{1}{6} \mu_0^3, \\ \mu_{0,3} &= 1 - \mu_0^2, \mu_{0,4} = \frac{2}{3} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 - \frac{1}{6} \mu_0^3, \mu_{0,5} = -\frac{1}{12} \mu_0 + \frac{1}{12} \mu_0^3, \\ \mu_{i,1} &= \frac{1}{12} \mu_i - \frac{1}{12} \mu_i^3, \mu_{i,2} = -\frac{2}{3} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 + \frac{1}{6} \mu_i^3, \\ \mu_{i,3} &= 1 - \mu_i^2, \mu_{i,4} = \frac{2}{3} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 - \frac{1}{6} \mu_i^3, \mu_{i,5} = -\frac{1}{12} \mu_i + \frac{1}{12} \mu_i^3 \end{aligned}$$

notasyonlarını kabul edelim.

Önerme 2.1.1. Aşağıdaki kestirimler sağlanır (Ashyralyev ve Sobolevskii, 2004):

$$\begin{aligned} \left\| \exp \left(k \tau A^{\frac{1}{2}} \right) R^k \right\|_{H \rightarrow H} &\leq M(\delta) \tau^{-k}, k \geq 1, \\ \left\| (I - R^{2N})^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} &\leq M(\delta), k \tau \left\| D R^k \right\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta), \\ \left\| R^k \right\|_{H \rightarrow H} &\leq M(1 + \delta \tau)^{-k}, k \geq 1, \delta > 0, \\ \left\| D^\beta (R^{k+r} + R^k) \right\|_{H \rightarrow H} &\leq M(\delta) \frac{(r\tau)^\alpha}{(k\tau)^{\alpha+\beta}}, \\ 1 \leq k \leq k+r \leq N, 0 \leq \alpha, \beta \leq 1. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Önerme 2.1.2. Aşağıdaki kestirim geçerlidir (Ashyralyev ve Sobolevskii, 2004):

$$\sum_{j=1}^{N-1} \tau \left\| D R^j \right\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta) Y(\tau, \delta) \tag{2.1.5}$$

Burada;

$$Y(\tau, \delta) = \min \left\{ \ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \left| \ln \|D\|_{H \rightarrow H} \right| \right\}.$$

Önerme 2.1.3. $1 \leq l_i \leq N-1$, $1 \leq l_0 \leq N-1$ olmak üzere (Akyüz, 2017):

$$\Delta_1 = \left[I - R^{2N} - R^{l_0} + R^{2N-l_0} \right] \left[I - R^{2N} - \sum_{i=1}^q k_i \left(R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right) \right] - \left[R^{N-l_0} - R^{N+l_0} \right] \\ \times \left[\sum_{i=1}^q k_i \left(R^{l_i} - R^{2N-l_i} \right) \right] \text{ olsun. O halde } \Delta_1 \text{ operatorünün } \Delta_1^{-1} \text{ tersi vardır ve}$$

$$\| \Delta_1^{-1} \|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta) \quad (2.1.6)$$

kestirimi geçerlidir.

Önerme 2.1.4. $1 \leq l_i \leq N-1, 1 \leq l_0 \leq N-1$ olmak üzere;

$$\Delta_3 = (I - R^{2N}) (I - R^{l_0}) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} \right) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_0+l_i} \right) - (I - R^{2N}) \\ \times \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] \left(R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1} \right) - \mu_i^2 \left(R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] \left(R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1} \right) \right\} + \left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \left(R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1} \right) \right. \\ \left. - \mu_0^2 \left(R^{l_0} - R^{2N-l_0} \right) + \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \left(R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1} \right) + \left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \right. \\ \left. \times \sum_{i=1}^q k_i \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] \left(R^{N-l_0+l_i+2} - R^{N+l_0-l_i-2} \right) + \sum_{i=1}^q k_i \left(\left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[1 - \mu_i^2 \right] + \left[1 - \mu_0^2 \right] \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] \right) \left(R^{N-l_0+l_i+1} - R^{N+l_0-l_i-1} \right) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^q k_i \left(\left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] + \left[\mu_0^2 \mu_i^2 - \mu_0^2 - \mu_i^2 \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] \right) \left(R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i} \right) + \sum_{i=1}^q k_i \left(\left[1 - \mu_0^2 \right] \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] + \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \left[1 - \mu_i^2 \right] \right) \left(R^{N-l_0+l_i-1} - R^{N+l_0-l_i+1} \right) \right. \\ \left. \left. + \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \sum_{i=1}^q k_i \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] \left(R^{N-l_0+l_i-2} - R^{N+l_0-l_i+2} \right) \right\}$$

operatörünün Δ_3^{-1} tersi vardır ve

$$\| \Delta_3^{-1} \|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta) \quad (2.1.7)$$

kestirimi geçerlidir.

İspat: K_I operatörü,

$$\begin{aligned}
K_I = & -(I - R^{2N}) \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left(\left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] (R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}) - \mu_i^2 (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) \right. \right. \\
& + \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) \left. \right) + \left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] (R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1}) \\
& - \mu_0^2 (R^{l_0} - R^{2N-l_0}) + \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] (R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1}) + \left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \\
& \times \sum_{i=1}^q k_i \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] (R^{N-l_0+l_i+2} - R^{N+l_0-l_i-2}) + \sum_{i=1}^q k_i \left(\left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \right. \\
& \times \left[1 - \mu_i^2 \right] + \left[1 - \mu_0^2 \right] \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] \left. \right) (R^{N-l_0+l_i+1} - R^{N+l_0-l_i-1}) \\
& + \sum_{i=1}^q k_i \left(\left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] + \left[\mu_0^2 \mu_i^2 - \mu_0^2 - \mu_i^2 \right] \right. \\
& + \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] \left. \right) (R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i}) + \sum_{i=1}^q k_i \left(\left[1 - \mu_0^2 \right] \right. \\
& \times \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] + \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \left[1 - \mu_i^2 \right] \left. \right) (R^{N-l_0+l_i-1} - R^{N+l_0-l_i+1}) \\
& \left. + \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \sum_{i=1}^q k_i \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] (R^{N-l_0+l_i-2} - R^{N+l_0-l_i+2}) \right\}
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\Delta_3^{-1} - \Delta_1^{-1} = \Delta_3^{-1} \Delta_1^{-1} K_I \quad (2.1.8)$$

şeklinde yazılabilir. (2.1.4) kestirimlerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\|K_I\|_{H \rightarrow H} \leq & \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \left\{ \max_{1 \leq i \leq q} \left| -\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right| \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}\|_{H \rightarrow H} + \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_i^2| \right. \\
& \times \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} + \max_{1 \leq i \leq q} \left| \frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right| \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \\
& + \left| -\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right| \|R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_0^2| \|R^{l_0} - R^{2N-l_0}\|_{H \rightarrow H} \\
& + \left| \frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right| \|R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1}\|_{H \rightarrow H} + \left| -\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right| \max_{1 \leq i \leq q} \left| \frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right| \\
& \times \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i+2} - R^{N+l_0-l_i-2}\|_{H \rightarrow H} + \left| -\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right| \max_{1 \leq i \leq q} |1 - \mu_i^2| \\
& \times \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i+1} - R^{N+l_0-l_i-1}\|_{H \rightarrow H} + |1 - \mu_0^2| \max_{1 \leq i \leq q} \left| \frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{i=1}^q k_i \left\| R^{N-l_0+l_i+1} - R^{N+l_0-l_i-1} \right\|_{H \rightarrow H} + \left| -\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right| \max_{1 \leq i \leq q} \left| -\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right| \\
& \times \sum_{i=1}^q k_i \left\| R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i} \right\|_{H \rightarrow H} + \left| \mu_0^2 \right| \max_{1 \leq i \leq q} \left| \mu_i^2 \right| \sum_{i=1}^q k_i \left\| R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i} \right\|_{H \rightarrow H} \\
& + \left| \mu_0^2 \right| \sum_{i=1}^q k_i \left\| R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i} \right\|_{H \rightarrow H} + \max_{1 \leq i \leq q} \left| \mu_i^2 \right| \sum_{i=1}^q k_i \left\| R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i} \right\|_{H \rightarrow H} \\
& + \left| \frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right| \max_{1 \leq i \leq q} \left| \frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right| \sum_{i=1}^q k_i \left\| R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i} \right\|_{H \rightarrow H} \\
& + \left| 1 - \mu_0^2 \right| \max_{1 \leq i \leq q} \left| -\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right| \sum_{i=1}^q k_i \left\| R^{N-l_0+l_i-1} - R^{N+l_0-l_i+1} \right\|_{H \rightarrow H} \\
& + \left| \frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right| \max_{1 \leq i \leq q} \left| 1 - \mu_i^2 \right| \sum_{i=1}^q k_i \left\| R^{N-l_0+l_i-1} - R^{N+l_0-l_i+1} \right\|_{H \rightarrow H} \\
& + \left| \frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right| \max_{1 \leq i \leq q} \left| -\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right| \sum_{i=1}^q k_i \left\| R^{N-l_0+l_i-2} - R^{N+l_0-l_i+2} \right\|_{H \rightarrow H} \Big\} \\
& \leq M \tau
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

elde edilir. Burada M, τ 'dan bağımsızdır. Üçgen eşitsizliğini, (2.1.8) formülünü, (2.1.6) ve (2.1.9) kestirimlerini kullanarak yeterince küçük pozitif τ için, $\left\| \Delta_3^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} = \left\| \Delta_1^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} + \left\| \Delta_3^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \Delta_1^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| K_1 \right\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta) + \left\| \Delta_3^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} M(\delta) M \tau$ (2.1.10) eşitsizliği bulunur. Buradan istenilen (2.1.7) kestirimi elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar.

Önerme 2.1.5. $1 \leq l_i \leq N-1, 1 \leq l_0 \leq N-1$ için,

$$\Delta_1 = (I - R^{2N}) (I - R^{l_0}) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} \right) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_0+l_i} \right),$$

$$\begin{aligned}
J_1 = & - (I - R^{2N}) \left\{ \mu_{0,1} (R^{l_0-2} - R^{2N-l_0+2}) + \mu_{0,2} (R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1}) - \mu_0^2 (R^{l_0} - R^{2N-l_0}) \right. \\
& + \mu_{0,4} (R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1}) + \mu_{0,5} (R^{l_0+2} - R^{2N-l_0-2}) + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \mu_{i,1} (R^{N-l_i+2} - R^{N+l_i-2}) \right. \\
& + \mu_{i,2} (R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}) - \mu_i^2 (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) + \mu_{i,4} (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) \\
& \left. \left. + \mu_{i,5} (R^{N-l_i-2} - R^{N+l_i+2}) \right\} \right\},
\end{aligned}$$

$$J_2 = -(I - R^{2N}) \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \mu_{0,1} \mu_{i,5} (R^{N-l_0+l_i+4} - R^{N+l_0-l_i-4}) + (\mu_{0,1} \mu_{i,4} + \mu_{0,2} \mu_{i,5}) \right. \right. \\ \times (R^{N-l_0+l_i+3} - R^{N+l_0-l_i-3}) + (\mu_{0,1} \mu_{i,3} + \mu_{0,2} \mu_{i,4} + \mu_{0,3} \mu_{i,5}) (R^{N-l_0+l_i+2} - R^{N+l_0-l_i-2}) \\ \left. \left. + (\mu_{0,1} \mu_{i,2} + \mu_{0,2} \mu_{i,3} + \mu_{0,3} \mu_{i,4} + \mu_{0,4} \mu_{i,5}) (R^{N-l_0+l_i+1} - R^{N+l_0-l_i-1}) \right\} \right\},$$

$$J_3 = -(I - R^{2N}) \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left\{ (\mu_{0,1} \mu_{i,1} + \mu_{0,2} \mu_{i,2} + [\mu_0^2 \mu_i^2 - \mu_0^2 - \mu_i^2] + \mu_{0,4} \mu_{i,4} + \mu_{0,5} \mu_{i,5}) \right. \right. \\ \left. \left. \times (R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i}) \right\} \right\},$$

$$J_4 = -(I - R^{2N}) \\ \times \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left\{ (\mu_{0,2} \mu_{i,1} + \mu_{0,3} \mu_{i,2} + \mu_{0,4} \mu_{i,3} + \mu_{0,5} \mu_{i,4}) (R^{N-l_0+l_i-1} - R^{N+l_0-l_i+1}) \right. \right. \\ + (\mu_{0,3} \mu_{i,1} + \mu_{0,4} \mu_{i,2} + \mu_{0,5} \mu_{i,3}) (R^{N-l_0+l_i-2} - R^{N+l_0-l_i+2}) + (\mu_{0,4} \mu_{i,1} + \mu_{0,5} \mu_{i,2}) \\ \left. \left. \times (R^{N-l_0+l_i-3} - R^{N+l_0-l_i+3}) + \mu_{0,5} \mu_{i,1} (R^{N-l_0+l_i-4} - R^{N+l_0-l_i+4}) \right\} \right\} \text{ ve}$$

$$K_2 = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \quad (2.1.11)$$

olmak üzere,

$\Delta_4 = \Delta_1 + K_2$ operatörünün Δ_4^{-1} tersi vardır ve

$$\|\Delta_4^{-1}\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta) \quad (2.1.12)$$

kestirimi geçerlidir.

İspat: (2.1.11) ile ifade edilen K_2 operatörünü kullanarak,

$$\Delta_4^{-1} - \Delta_1^{-1} = \Delta_4^{-1} \Delta_1^{-1} K_2 \quad (2.1.13)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$J_1 = -\mu_{0,1} (I - R^{2N}) (R^{l_0-2} - R^{2N-l_0+2}) - \mu_{0,2} (I - R^{2N}) (R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1}) + \mu_0^2 (I - R^{2N}) \\ \times (R^{l_0} - R^{2N-l_0}) - \mu_{0,4} (I - R^{2N}) (R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1}) - \mu_{0,5} (I - R^{2N}) \\ \times (R^{l_0+2} - R^{2N-l_0-2}) \\ - \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,1} (I - R^{2N}) (R^{N-l_i+2} - R^{N+l_i-2}) - \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,2} (I - R^{2N}) (R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1})$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^q k_i \mu_i^2 (I - R^{2N}) (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) - \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,4} (I - R^{2N}) (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) \\
& - \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,5} (I - R^{2N}) (R^{N-l_i-2} - R^{N+l_i+2}) \\
& = \sum_{n=1}^{10} J_{1,n}, \\
J_2 = & -\mu_{0,1} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,5} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i+4} - R^{N+l_0-l_i-4}) \\
& -\mu_{0,1} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,4} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i+3} - R^{N+l_0-l_i-3}) \\
& -\mu_{0,2} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,5} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i+3} - R^{N+l_0-l_i-3}) \\
& -\mu_{0,1} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,3} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i+2} - R^{N+l_0-l_i-2}) \\
& -\mu_{0,2} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,4} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i+2} - R^{N+l_0-l_i-2}) \\
& -\mu_{0,3} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,5} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i+2} - R^{N+l_0-l_i-2}) \\
& -\mu_{0,1} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,2} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i+1} - R^{N+l_0-l_i-1}) \\
& -\mu_{0,2} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,3} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i+1} - R^{N+l_0-l_i-1}) \\
& -\mu_{0,3} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,4} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i+1} - R^{N+l_0-l_i-1}) \\
& -\mu_{0,4} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,5} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i+1} - R^{N+l_0-l_i-1}) \\
& = \sum_{n=1}^{10} J_{2,n}, \\
J_3 = & -\mu_{0,1} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,1} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i}) \\
& -\mu_{0,2} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,2} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i}) \\
& -\mu_0^2 \sum_{i=1}^q k_i \mu_i^2 (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\mu_0^2 \sum_{i=1}^q k_i (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i}) \\
& + \sum_{i=1}^q k_i \mu_i^2 (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i}) \\
& - \mu_{0,4} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,4} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i}) \\
& - \mu_{0,5} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,5} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i}) \\
& = \sum_{n=1}^7 J_{3,n}, \\
J_4 = & -\mu_{0,2} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,1} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i-1} - R^{N+l_0-l_i+1}) \\
& - \mu_{0,3} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,2} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i-1} - R^{N+l_0-l_i+1}) \\
& - \mu_{0,4} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,3} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i-1} - R^{N+l_0-l_i+1}) \\
& - \mu_{0,5} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,4} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i-1} - R^{N+l_0-l_i+1}) \\
& - \mu_{0,3} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,1} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i-2} - R^{N+l_0-l_i+2}) \\
& - \mu_{0,4} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,2} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i-2} - R^{N+l_0-l_i+2}) \\
& - \mu_{0,5} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,3} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i-2} - R^{N+l_0-l_i+2}) \\
& - \mu_{0,4} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,1} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i-3} - R^{N+l_0-l_i+3}) \\
& - \mu_{0,5} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,2} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i-3} - R^{N+l_0-l_i+3}) \\
& - \mu_{0,5} \sum_{i=1}^q k_i \mu_{i,5} (I - R^{2N}) (R^{N-l_0+l_i-4} - R^{N+l_0-l_i+4}) \\
& = \sum_{n=1}^{10} J_{4,n}.
\end{aligned}$$

Buradan $\|J_1\|_{H \rightarrow H}$, $\|J_2\|_{H \rightarrow H}$, $\|J_3\|_{H \rightarrow H}$ ve $\|J_4\|_{H \rightarrow H}$ kestirimlerini oluşturalım.

Öncelikle $\|J_1\|_{H \rightarrow H}$ için, (2.1.4) kestirimlerini uygulayarak,

$$\begin{aligned}\|J_{1,1}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,1}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|R^{l_0-2} - R^{2N-l_0+2}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{1,1}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{1,2}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,2}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{1,2}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{1,3}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_0^2| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|R^{l_0} - R^{2N-l_0}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{1,3}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{1,4}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,4}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{1,4}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{1,5}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,5}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|R^{l_0+2} - R^{2N-l_0-2}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{1,5}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{1,6}\|_{H \rightarrow H} &\leq \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,1}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_i+2} - R^{N+l_i-2}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{1,6}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{1,7}\|_{H \rightarrow H} &\leq \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,2}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{1,7}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{1,8}\|_{H \rightarrow H} &\leq \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_i^2| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{1,8}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{1,9}\|_{H \rightarrow H} &\leq \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,4}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{1,9}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{1,10}\|_{H \rightarrow H} &\leq \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,5}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_i-2} - R^{N+l_i+2}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{1,10}\tau \text{ ifade edilir. Buna göre,}\end{aligned}$$

$\|J_1\|_{H \rightarrow H} \leq M_1\tau$ olur. Benzer şekilde, $\|J_2\|_{H \rightarrow H}$ için (2.1.4) kestirimi kullanılarak,

$$\begin{aligned}\|J_{2,1}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,1}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,5}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i+4} - R^{N+l_0-l_i-4}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{2,1}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{2,2}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,1}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,4}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i+3} - R^{N+l_0-l_i-3}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{2,2}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{2,3}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,2}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,5}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i+3} - R^{N+l_0-l_i-3}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{2,3}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{2,4}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,1}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,3}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i+2} - R^{N+l_0-l_i-2}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{2,4}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{2,5}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,2}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,4}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i+2} - R^{N+l_0-l_i-2}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{2,5}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{2,6}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,3}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,5}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i+2} - R^{N+l_0-l_i-2}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{2,6}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{2,7}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,1}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,2}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i+1} - R^{N+l_0-l_i-1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{2,7}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{2,8}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,2}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,3}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i+1} - R^{N+l_0-l_i-1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{2,8}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{2,9}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,3}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,4}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i+1} - R^{N+l_0-l_i-1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{2,9}\tau,\end{aligned}$$

$$\|J_{2,10}\|_{H \rightarrow H} \leq |\mu_{0,4}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,5}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i+1} - R^{N+l_0-l_i-1}\|_{H \rightarrow H}$$

$\leq M_{2,10}\tau$ eşitsizlikleri elde edilir. Buradan $\|J_2\|_{H \rightarrow H} \leq M_2\tau$ olur. Daha sonra

$\|J_3\|_{H \rightarrow H}$ için ise (2.1.4) kestirimlerini uygulayarak,

$$\begin{aligned}\|J_{3,1}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,1}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,1}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{3,1}\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{3,2}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,2}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,2}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{3,2} \tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{3,3}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_0^2| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_i^2| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{3,3} \tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{3,4}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_0^2| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{3,4} \tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{3,5}\|_{H \rightarrow H} &\leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_i^2| \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{3,5} \tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{3,6}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,4}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,4}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{3,6} \tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{3,7}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,5}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,5}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i} - R^{N+l_0-l_i}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{3,7} \tau\end{aligned}$$

kestirimleri elde edilir. Buna göre $\|J_3\|_{H \rightarrow H}$ için $\|J_3\|_{H \rightarrow H} \leq M_3 \tau$ kestirimine ulaşılır. Son olarak $\|J_4\|_{H \rightarrow H}$ için (2.1.4) kestirimlerini kullanarak,

$$\begin{aligned}\|J_{4,1}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,2}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,1}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i-1} - R^{N+l_0-l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{4,1} \tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{4,2}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,3}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,2}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i-1} - R^{N+l_0-l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{4,2} \tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{4,3}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,4}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,3}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i-1} - R^{N+l_0-l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{4,3} \tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{4,4}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,5}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,4}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i-1} - R^{N+l_0-l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{4,4} \tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{4,5}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,3}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,1}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i-2} - R^{N+l_0-l_i+2}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{4,5} \tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{4,6}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,4}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,2}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i-2} - R^{N+l_0-l_i+2}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{4,6} \tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{4,7}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,5}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,3}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i-2} - R^{N+l_0-l_i+2}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{4,7} \tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{4,8}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,4}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,1}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i-3} - R^{N+l_0-l_i+3}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{4,8} \tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{4,9}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,5}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,2}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i-3} - R^{N+l_0-l_i+3}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{4,9} \tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_{4,10}\|_{H \rightarrow H} &\leq |\mu_{0,5}| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_{i,1}| \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_0+l_i-4} - R^{N+l_0-l_i+4}\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M_{4,10} \tau\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan $\|J_4\|_{H \rightarrow H}$ için $\|J_4\|_{H \rightarrow H} \leq M_4 \tau$ eşitsizliği ve $\|K_2\|_{H \rightarrow H}$ operatörü için ise

$$\begin{aligned}\|K_2\|_{H \rightarrow H} &\leq \|J_1\|_{H \rightarrow H} + \|J_2\|_{H \rightarrow H} + \|J_3\|_{H \rightarrow H} + \|J_4\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M \tau\end{aligned}\tag{2.1.14}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada M, τ 'dan bağımsızdır. Yeterince küçük pozitif τ için, üçgen eşitsizliğini, (2.1.13) formülünü ve (2.1.6) ile (2.1.14) kestirimlerini de uygulayarak;

$$\begin{aligned}\|\Delta_4^{-1}\|_{H \rightarrow H} &= \|\Delta_1^{-1}\|_{H \rightarrow H} + \|\Delta_4^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|\Delta_1^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|K_2\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M(\delta) + \|\Delta_4^{-1}\|_{H \rightarrow H} M(\delta) M \tau\end{aligned}\tag{2.1.15}$$

ifade edilir. Böylece (2.1.12) kestirimi elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

2.2. Üçüncü Mertebeden Doğruluklu Fark Şeması ve Kararlılık Eşitsizlikleri

Bu bölümde yerel olmayan sınır koşullu (2.1.2) ters eliptik probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için üçüncü mertebeden doğruluklu fark şeması kurulmuştur.

$\nu(\gamma)$ ve $\nu(\lambda)$ için üçüncü mertebeden yaklaşım formülleri,

$$\begin{aligned}
v(\gamma) &= \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor \right)^2 \right] v \left(\left(\left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor - 1 \right) \tau \right) + \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor \right)^2 \right] v \left(\left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor \tau \right) \\
&\quad + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor \right)^2 \right] v \left(\left(\left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor + 1 \right) \tau \right) + O(\tau^3), \\
v(\lambda) &= \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right)^2 \right] v \left(\left(\left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor - 1 \right) \tau \right) + \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right)^2 \right] v \left(\left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \tau \right) \\
&\quad + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor \right)^2 \right] v \left(\left(\left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor + 1 \right) \tau \right) + O(\tau^3) \text{ şeklindedir.}
\end{aligned}$$

Burada $[\cdot]$ en büyük tam sayı fonksiyonunun notasyonu olmak üzere,

$$l_0 = \left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor, \mu_0 = \frac{\gamma}{\tau} - l_0, l_i = \left\lfloor \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rfloor, \mu_i = \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i, (i=1, \dots, q) \text{ notasyonlarıyla, } v(\gamma) \text{ ve } v(\lambda_i)$$

için üçüncü mertebeden yaklaşım formülleri tekrar

$$v(\gamma) = \left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] v((l_0 - 1)\tau) + [1 - \mu_0^2] v(l_0 \tau) + \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] v((l_0 + 1)\tau) + O(\tau^3),$$

$$v(\lambda_i) = \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] v((l_i - 1)\tau) + [1 - \mu_i^2] v(l_i \tau) + \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] v((l_i + 1)\tau) + O(\tau^3)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşım formüllerini uygulayarak ve

$$k = \sum_{i=1}^q k_i = 1 \quad (2.2.1)$$

olduğunu kullanarak, yerel olmayan sınır koşullu (2.1.2) ters eliptik probleminin üçüncü mertebeden doğruluklu fark şeması,

$$\begin{cases}
-\tau^{-2} (v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) + Av_k + \frac{\tau^2}{12} A^2 v_k = \theta_k + p, \\
\theta_k = f(t_k) + \frac{\tau^2}{12} \left(\frac{f(t_{k+1}) - 2f(t_k) + f(t_{k-1}))}{\tau^2} + Af(t_k) \right), \\
t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = T, v_0 = \phi, \\
\left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] v_{l_0-1} + [1 - \mu_0^2] v_{l_0} + \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] v_{l_0+1} = \zeta \\
v_N = \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] v_{l_i-1} + [1 - \mu_i^2] v_{l_i} + \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] v_{l_i+1} \right\} + \eta
\end{cases} \quad (2.2.2)$$

şeklinde oluşturulur.

(2.2.2) üçüncü mertebeden doğruluklu fark şemasını göz önüne alarak, bu fark probleminin v_k çözümü için,

$$v_k = u_k + A^{-1} p \quad (2.2.3)$$

formülünü ve (2.2.1) ifadesini kullanarak u_k için,

$$\begin{cases} -\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + Au_k + \frac{\tau^2}{12} A^2 u_k = \theta_k, \\ \theta_k = f(t_k) + \frac{\tau^2}{12} \left(\frac{f(t_{k+1}) - 2f(t_k) + f(t_{k-1}))}{\tau^2} + Af(t_k) \right), \\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = T, \\ u_0 - \left[-\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] u_{l_0-1} - [1 - \mu_0^2] u_{l_0} - \left[\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] u_{l_0+1} = \phi - \zeta, \\ u_N - \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left[-\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] u_{l_i-1} + [1 - \mu_i^2] u_{l_i} + \left[\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] u_{l_i+1} \right\} = \eta \end{cases} \quad (2.2.4)$$

şeklinde yardımcı lokal olmayan fark problemi elde edilir.

p elemanı, (2.2.4) fark problemi çözüldükten sonra,

$$p = A\phi - Au_0 \quad (2.2.5)$$

formülüyle elde edilebilir.

Tüm H değerli $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}$ grid fonksiyonlarının $C(H)$ ve $C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)$ uzaylarındaki normlarını tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} &= \max_{0 \leq k \leq N-1} \|\theta_k\|_H, \\ \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} &= \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} + \sup_{0 \leq k < k+\tau \leq N-1} (k\tau + n\tau)^\alpha n\tau^{-\alpha} (T - k\tau)^\alpha \|\theta_{k+n} - \theta_k\|_H. \end{aligned}$$

Teorem 2.2.1. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayıların (2.2.1) koşulunu sağladığını ve $\phi, \zeta, \eta \in D(A), \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \in C(H)$ olduğunu varsayalım. O halde, (2.2.2) fark probleminin $(\{v_k\}_{k=1}^{N-1}, p)$ çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri sağlanır:

$$\|\{v_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right], \quad (2.2.6)$$

$$\|A^{-1}p\|_H \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right]. \quad (2.2.7)$$

Burada $M(\delta)$ sabitleri, verilen ϕ, ζ, η elemanlarından ve $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}$ dan bağımsızdır.

İspat:

$$\begin{cases} -\tau^2(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + Au_k + \frac{\tau^2}{12} A^2 u_k = \theta_k, 1 \leq k \leq N-1, \\ u_0 \text{ ve } u_N \text{ verilmiştir.} \end{cases} \quad (2.2.8)$$

direkt probleminin çözümü Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) çalışmasında

$$u_k = (I - R^{2N})^{-1} \left[(R^k - R^{2N-k})u_0 + (R^{N-k} - R^{N+k})u_N - (R^{N-k} - R^{N+k})(I + \tau D)(2I + \tau D)^{-1} \right.$$

$$\left. \times D^{-1} \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j})\theta_j \tau \right] + (I + \tau D)(2I + \tau D)^{-1} D^{-1} \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|k-j|} - R^{k+j})\theta_j \tau$$

formülüyle verilmiştir. Burada, A operatörü H Hilbert uzayında sınırlı ve öz-eşlenik

pozitif tanımlı olmak üzere, $C = A + \frac{\tau^2}{12} A^2$, $D = \frac{1}{2}(\tau C + \sqrt{4C + \tau^2 C^2})$ ve

$R = (I + \tau D)^{-1}$ operatörleri de sınırlı ve öz-eşlenik pozitif tanımlı operatörlerdir (Krein,

1966). Bu formül $P = (I + \tau D)(2I + \tau D)^{-1} D^{-1}$ notasyonu kullanılarak,

$$u_k = (I - R^{2N})^{-1} \left[(R^k - R^{2N-k})u_0 + (R^{N-k} - R^{N+k})u_N - (R^{N-k} - R^{N+k})P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \right.$$

$$\left. \times \theta_j \tau \right] + P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|k-j|} - R^{k+j})\theta_j \tau$$

$$k = 1, \dots, N-1 \quad (2.2.9)$$

şeklinde yazılabilir. Yardımcı lokal olmayan (2.2.4) fark probleminin sınır şartlarına (2.2.9) formülü uygulanarak,

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ (I - R^{2N}) - \left[-\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] (R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1}) - [1 - \mu_0^2] (R^{l_0} - R^{2N-l_0}) - \left[\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] \right. \\ & \times (R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1}) \Big\} u_0 - \left\{ \left[-\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] (R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}) + [1 - \mu_0^2] (R^{N-l_0} - R^{N+l_0}) \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] (R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1}) \right\} u_N = Q_1 \\ & \sum_{i=1}^q k_i \left\{ - \left[-\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] (R^{l_i-1} - R^{2N-l_i+1}) - [1 - \mu_i^2] (R^{l_i} - R^{2N-l_i}) - \left[\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] \right. \\ & \times (R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1}) \Big\} u_0 + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ (I - R^{2N}) - \left[-\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] (R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}) \right. \\ & \left. - [1 - \mu_i^2] (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) - \left[\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) \right\} u_N = Q_2 \end{aligned} \right.$$

elde edilir. Burada,

$$Q_1 = (I - R^{2N})(\phi - \zeta) + \left[-\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] \left\{ - (R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j})\theta_j \tau \right.$$

$$\left. + (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_0-1-j|} - R^{l_0-1+j})\theta_j \tau \right\} + [1 - \mu_0^2]$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ - \left(R^{N-l_0} - R^{N+l_0} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + \left(I - R^{2N} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_0-j|} - R^{l_0+j} \right) \theta_j \tau \right\} \\
& + \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \left\{ - \left(R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + \left(I - R^{2N} \right) \right. \\
& \quad \times P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_0+1-j|} - R^{l_0+1+j} \right) \theta_j \tau \left. \right\} \\
Q_2 = & \left(I - R^{2N} \right) \eta + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] \left[- \left(R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \right. \right. \\
& \quad \times \theta_j \tau + \left(I - R^{2N} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_i-1-j|} - R^{l_i-1+j} \right) \theta_j \tau \left. \right] + [1 - \mu_i^2] \\
& \quad \times \left[- \left(R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + \left(I - R^{2N} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j} \right) \theta_j \tau \right] \\
& \quad + \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] \left[- \left(R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + \left(I - R^{2N} \right) \right. \\
& \quad \times P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_i+1-j|} - R^{l_i+1+j} \right) \theta_j \tau \left. \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Bilinmeyen u_0 ve u_N elemanları için;

$$\begin{cases} q_{11}u_0 + q_{12}u_N = Q_1 \\ q_{21}u_0 + q_{22}u_N = Q_2 \end{cases} \quad (2.2.10)$$

denklem sistemi ifade edilebilir. Burada,

$$\begin{aligned}
q_{11} = & \left(I - R^{2N} \right) - \left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \left(R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1} \right) - [1 - \mu_0^2] \left(R^{l_0} - R^{2N-l_0} \right) - \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \\
& \times \left(R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1} \right), \\
q_{12} = & - \left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \left(R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1} \right) - [1 - \mu_0^2] \left(R^{N-l_0} - R^{N+l_0} \right) - \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \\
& \times \left(R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1} \right), \\
q_{21} = & \sum_{i=1}^q k_i \left\{ - \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] \left(R^{l_i-1} - R^{2N-l_i+1} \right) - [1 - \mu_i^2] \left(R^{l_i} - R^{2N-l_i} \right) - \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] \right. \\
& \quad \times \left(R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1} \right) \left. \right\}, \\
q_{22} = & \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left(I - R^{2N} \right) - \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] \left(R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1} \right) - [1 - \mu_i^2] \left(R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$-\left[\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2\right]\left(R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}\right)\Bigg\}.$$

(2.2.10) denklem sisteminin çözümünün var olması için, $\Delta_3 = q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}$ operatörünün tersinin varlığı ve sınırlı olduğu Önerme 2.1.4'de kanıtlanmıştır. Bu sebeple (2.2.10) denklem sisteminin çözümü vardır ve tektir. Bununla birlikte, bilinmeyen u_0 ve u_N elemanları için, $u_0 = \Delta_3^{-1}(q_{22}Q_1 - q_{12}Q_2)$, $u_N = \Delta_3^{-1}(q_{11}Q_2 - q_{21}Q_1)$ eşitlikleri bulunur. Sonuç olarak u_0 ve u_N :

$$\begin{aligned} u_0 = \Delta_3^{-1} & \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left(I - R^{2N} \right) - \left[-\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] \left(R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1} \right) - [1 - \mu_i^2] \left(R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right) \right. \right. \\ & - \left[\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] \left(R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1} \right) \Bigg\} \left[\left(I - R^{2N} \right) (\phi - \zeta) + \left[-\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] \right. \\ & \times \left\{ - \left(R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + \left(I - R^{2N} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_0-1-j|} - R^{l_0-1+j} \right) \theta_j \tau \Bigg\} \\ & + [1 - \mu_0^2] \left\{ - \left(R^{N-l_0} - R^{N+l_0} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + \left(I - R^{2N} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_0-j|} - R^{l_0+j} \right) \right. \\ & \times \theta_j \tau \Bigg\} + \left[\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] \left\{ - \left(R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau \right. \\ & + \left. \left(I - R^{2N} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_0+1-j|} - R^{l_0+1+j} \right) \theta_j \tau \Bigg\} \right] - \left[-\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] \left(R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1} \right) \\ & - [1 - \mu_0^2] \left(R^{N-l_0} - R^{N+l_0} \right) - \left[\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] \left(R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1} \right) \Bigg] \left[\left(I - R^{2N} \right) \eta + \right. \\ & \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left[-\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] \left[- \left(R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + \left(I - R^{2N} \right) P \right. \right. \\ & \times \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_i-1-j|} - R^{l_i-1+j} \right) \theta_j \tau \Bigg] + [1 - \mu_i^2] \left[- \left(R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \right. \\ & \times \theta_j \tau + \left(I - R^{2N} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j} \right) \theta_j \tau \Bigg] + \left[\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] \left[- \left(R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1} \right) P \right. \\ & \times \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + \left(I - R^{2N} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_i+1-j|} - R^{l_i+1+j} \right) \theta_j \tau \Bigg] \Bigg\} \Bigg\} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

ve

$$\begin{aligned}
u_N = \Delta_3^{-1} & \left\{ \left[(I - R^{2N}) - \left[-\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] (R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1}) - [1 - \mu_0^2] (R^{l_0} - R^{2N-l_0}) - \left[\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] \right. \right. \\
& \times (R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1}) \left((I - R^{2N})\eta + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left[-\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] \left[- (R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}) P \right. \right. \right. \\
& \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_i-1-j|} - R^{l_i-1+j}) \theta_j \tau \left. \left. \left. + [1 - \mu_i^2] \right. \right. \right. \\
& \times \left[- (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j}) \theta_j \tau \right] \\
& + \left[\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] \left[- (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \right. \\
& \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_i+1-j|} - R^{l_i+1+j}) \theta_j \tau \left. \left. \left. \right] \right\} \right] - \left(\sum_{i=1}^q k_i \left\{ - \left[-\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] (R^{l_i-1} - R^{2N-l_i+1}) \right. \right. \\
& - [1 - \mu_i^2] (R^{l_i} - R^{2N-l_i}) - \left[\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] (R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1}) \left. \left. \right\} \left\{ (I - R^{2N})(\phi - \zeta) \right. \right. \\
& + \left[-\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] \left\{ - (R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \right. \\
& \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_0-1-j|} - R^{l_0-1+j}) \theta_j \tau \left. \left. \right\} + [1 - \mu_0^2] \left\{ - (R^{N-l_0} - R^{N+l_0}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \right. \right. \\
& \times \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_0-j|} - R^{l_0+j}) \theta_j \tau \left. \left. \right\} + \left[\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] \left\{ - (R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1}) \right. \right. \\
& \times P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_0+1-j|} - R^{l_0+1+j}) \theta_j \tau \left. \left. \left. \right\} \right\} \right\} \quad (2.2.12)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bundan dolayı yardımcı lokal olmayan (2.2.4) fark problemi (2.2.9), (2.2.11) ve (2.2.12) formülleriyle tanımlanan tek bir $\{u_k\}_{k=0}^N$ çözümüne sahiptir. Direkt (2.2.8) probleminin çözümü için,

$$\left\| \{u_k\}_{k=0}^{N-1} \right\|_{C(H)} \leq M \left[\left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} + \|Ru_0\|_H + \|Ru_N\|_H \right] \quad (2.2.13)$$

eşitsizliği geçerlidir (Ashyralyev ve Sobolevskii, 2004). İlk önce Q_1 ve Q_2 ifadeleri için kestirimler belirlenir. Bunun için, üçgen, Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini ve Önerme 2.1.1'deki (2.1.4) kestirimleri de kullanılarak,

$$\|Q_1\|_{C(H)} \leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} (\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H) + \left| -\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right| \left\| R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1} \right\|_{H \rightarrow H}$$

$$\begin{aligned}
& \times \|P\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|P\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_0-1-j|} - R^{l_0-1+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \Big\} + |1 - \mu_0^2| \\
& \times \left\{ \|R^{N-l_0} - R^{N+l_0}\|_{H \rightarrow H} \|P\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& \left. + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|P\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_0-j|} - R^{l_0+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right\} \\
& + \left| \frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right| \left\{ \|R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1}\|_{H \rightarrow H} \|P\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \times \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|P\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_0+1-j|} - R^{l_0+1+j} \right\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \Big\} \\
& \leq M(\delta) \left(\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right) \text{ ve} \\
\|Q_2\|_{C(H)} & \leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|\eta\|_H + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ -\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \left[\left\| R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\
& \times \|P\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \|P\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_i-1-j|} - R^{l_i-1+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \Big] + |1 - \mu_i^2| \\
& \times \left[\|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} \|P\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& \left. + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|P\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right] \\
& + \left| \frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right| \left[\left\| R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1} \right\|_{H \rightarrow H} \|P\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \times \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} - \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|P\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_i+1-j|} - R^{l_i+1+j} \right\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \Big] \Big\} \\
& \leq M(\delta) \left(\|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right) \text{ elde edilir.}
\end{aligned}$$

(2.2.11) ve (2.2.12) formüllerine üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini uygulayarak, bununla birlikte (2.1.4), (2.1.7) kestirimlerini de kullanarak,

$$\begin{aligned}
\|Ru_0\|_H &\leq \|R\|_{H \rightarrow H} \|\Delta_3^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} + \left| -\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right| \|R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left| 1 - \mu_i^2 \right| \|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} + \left| \frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right| \|R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \right\} \|Q_1\|_{C(H)} \\
&\quad + \left[\left| -\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right| \|R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}\|_{H \rightarrow H} + \left| 1 - \mu_0^2 \right| \|R^{N-l_0} - R^{N+l_0}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
&\quad \left. + \left| \frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right| \|R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1}\|_{H \rightarrow H} \right] \|Q_2\|_{C(H)} \left. \right\} \\
&\leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right] \\
\|Ru_N\|_H &\leq \|R\|_{H \rightarrow H} \|\Delta_3^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\{ \left[\|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} + \left| -\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right| \|R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1}\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left| 1 - \mu_0^2 \right| \|R^{l_0} - R^{2N-l_0}\|_{H \rightarrow H} + \left| \frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right| \|R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1}\|_{H \rightarrow H} \right] \|Q_2\|_{C(H)} \right. \\
&\quad + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left| -\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right| \|R^{l_i-1} - R^{2N-l_i+1}\|_{H \rightarrow H} + \left| 1 - \mu_i^2 \right| \|R^{l_i} - R^{2N-l_i}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
&\quad \left. \left. + \left| \frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right| \|R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1}\|_{H \rightarrow H} \right\} \|Q_1\|_{C(H)} \left. \right\} \\
&\leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right] \quad \text{elde edilir. Buradan (2.2.13)}
\end{aligned}$$

eşitsizliğini kullanarak,

$$\left\| \{u_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right] \quad (2.2.14)$$

kestirimine ulaşılır. Daha sonra (2.2.5) , (2.2.11) formüllerini ve $A^{-1}p = \phi - u_0$ eşitliğini kullanarak, öz-eşlenik operatörler için operatör işlemlerini, üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini uygulayarak, (2.1.4), (2.1.7) kestirimlerini kullanarak,

$$\|A^{-1}p\|_H \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right] \quad (2.2.7) \quad \text{kararlılık kestirimi}$$

bulunur. Son olarak, (2.2.3) formülünde (2.2.7) kararlılık kestirimi ve (2.2.14) eşitsizliği kullanılarak, $\left\| \{v_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right]$ şeklindeki (2.2.6)

kararlılık kestirimi elde edilir. Sonuç olarak, Teorem 2.2.1 ispatlanmış olur.

Teorem 2.2.2. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayılarının (2.2.1) koşulunu sağladığını ve $\phi, \zeta, \eta \in D(A) \cap D(C), \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \in C(H)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde (2.2.2) fark probleminin $(\{v_k\}_{k=1}^{N-1}, p)$ çözümü aşağıdaki hemen-hemen koersif kararlılık eşitsizliğini sağlar:

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \frac{(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}))}{\tau^2} \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} + \left\| \{Cv_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} + \|p\|_H \\ & \leq M(\delta) \left\{ \|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H + \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right. \\ & \quad \left. + \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + |\ln \|D\|_{H \rightarrow H}| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Burada, $M(\delta)$ sabiti, verilen τ, ϕ, ζ, η elemanlarına ve $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}$ 'ya bağımlı değildir.

İspat: (2.2.8) direkt probleminin çözümü için,

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \frac{(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}))}{\tau^2} \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} + \left\| \{Cu_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \\ & \leq M(\delta) \left\{ \|Cu_0\|_H + \|Cu_N\|_H + \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + |\ln \|D\|_{H \rightarrow H}| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right\} \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

eşitsizliğinin doğruluğu Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) çalışmasında gösterilmiştir. (2.1.4), (2.1.5), (2.1.7) kestirimlerini ve (2.2.11), (2.2.12) formüllerini kullanarak yardımcı lokal olmayan (2.2.4) fark probleminin çözümü için,

$$\|Cu_0\|_H + \|Cu_N\|_H \leq M(\delta) \left\{ \|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H + \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + |\ln \|D\|_{H \rightarrow H}| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right\} \text{ kestirimi}$$

elde edilmelidir. Bunun için $C = D^2 R$, $P = (I + \tau D)(2I + \tau D)^{-1} D^{-1}$ eşitliklerini ve (2.2.11) ve (2.2.12) formüllerini kullanarak,

$$\begin{aligned} Cu_0 = \Delta_3^{-1} & \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left\{ (I - R^{2N}) - \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] (R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}) - [1 - \mu_i^2] \right. \right. \\ & \quad \times (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) - \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) \left. \right\} CQ_1 - \left\{ -\left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \right. \\ & \quad \times (R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}) - [1 - \mu_0^2] (R^{N-l_0} - R^{N+l_0}) - \left. \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\times \left(R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1} \right) \Big\} CQ_2 \Big\} \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} Cu_N = \Delta_3^{-1} \Big\{ & \left[\left(I - R^{2N} \right) - \left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \left(R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1} \right) - \left[1 - \mu_0^2 \right] \left(R^{l_0} - R^{2N-l_0} \right) \right. \\ & \times - \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \left(R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1} \right) \Big] CQ_2 - \left(\sum_{i=1}^q k_i \left\{ - \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] \left(R^{l_i-1} - R^{2N-l_i+1} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left[1 - \mu_i^2 \right] \left(R^{l_i} - R^{2N-l_i} \right) - \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] \left(R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1} \right) CQ_1 \right\} \right\} \Big\} \end{aligned} \quad \text{şeklindeki}$$

eşitliklere ulaşılır. Burada;

$$\begin{aligned} CQ_1 = D^2 RQ_1 = & \left(I - R^{2N} \right) [C\phi - C\zeta] + \left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \Big\{ - \left(R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1} \right) (2I + \tau D)^{-1} \\ & \times \tau D \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j + \left(I - R^{2N} \right) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} R^{(l_0-1)-j} \theta_j + \sum_{j=l_0}^{N-1} R^{j-(l_0-1)} \theta_j \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^{N-1} R^{(l_0-1)+j} \theta_j \right) \Big\} + \left[1 - \mu_0^2 \right] \Big\{ - \left(R^{N-l_0} - R^{N+l_0} \right) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \\ & + \left(I - R^{2N} \right) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} R^{l_0-j} \theta_j + \sum_{j=l_0}^{N-1} R^{j-l_0} \theta_j - \sum_{j=1}^{N-1} R^{l_0+j} \theta_j \right) \Big\} + \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] \\ & \times \Big\{ - \left(R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1} \right) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j + \left(I - R^{2N} \right) (2I + \tau D)^{-1} \\ & \times \tau D \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} R^{(l_0+1)-j} \theta_j + \sum_{j=l_0}^{N-1} R^{j-(l_0+1)} \theta_j - \sum_{j=1}^{N-1} R^{(l_0+1)+j} \theta_j \right) \Big\} \text{ ve} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CQ_2 = D^2 RQ_2 = & \left(I - R^{2N} \right) C\eta + \sum_{i=1}^q k_i \Big\{ \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] \left[- \left(R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1} \right) (2I + \tau D)^{-1} \right. \\ & \times \tau D \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j + \left(I - R^{2N} \right) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \left(\sum_{j=1}^{l_i-1} R^{(l_i-1)-j} \theta_j + \sum_{j=l_i}^{N-1} R^{j-(l_i-1)} \theta_j \right. \\ & \left. \left. - \sum_{j=1}^{N-1} R^{(l_i-1)+j} \theta_j \right) \right] + \left[1 - \mu_i^2 \right] \left[- \left(R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \right. \\ & \left. \times \theta_j + \left(I - R^{2N} \right) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \left(\sum_{j=1}^{l_i-1} R^{l_i-j} \theta_j + \sum_{j=l_i}^{N-1} R^{j-l_i} \theta_j - \sum_{j=1}^{N-1} R^{l_i+j} \theta_j \right) \right] \Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] \left[- \left(R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1} \right) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j + (I - R^{2N}) \right. \\
& \left. \times (2I + \tau D)^{-1} \tau D \left(\sum_{j=1}^{l_i-1} R^{(l_i+1)-j} \theta_j + \sum_{j=l_i}^{N-1} R^{j-(l_i+1)} \theta_j - \sum_{j=1}^{N-1} R^{(l_i+1)+j} \theta_j \right) \right] \Bigg\} \text{şeklinde dir. Üçgen}
\end{aligned}$$

ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini ve öz-eşlenik operatörler için operatör işlemlerini uygulayarak, ilk önce $\|CQ_1\|_{C(H)}$ için;

$$\begin{aligned}
\|CQ_1\|_{C(H)} & \leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} (\|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H) + \|(2I + \tau D)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\{ -\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right\} \\
& \times \left\{ \|R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=1}^{N-1} \tau (\|DR^{N-j}\|_{H \rightarrow H} + \|DR^{N+j}\|_{H \rightarrow H}) \|\theta_j\|_H \right. \\
& + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} \tau \|DR^{(l_0-1)-j}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=l_0}^{N-1} \tau \|DR^{j-(l_0-1)}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \left. \left. - \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{(l_0-1)+j}\|_{H \rightarrow H} \right) \|\theta_j\|_H \right\} + |1 - \mu_0^2| \left\{ -\|R^{N-l_0} - R^{N+l_0}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \times \sum_{j=1}^{N-1} \tau (\|DR^{N-j}\|_{H \rightarrow H} + \|DR^{N+j}\|_{H \rightarrow H}) \|\theta_j\|_H + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} \tau \|DR^{l_0-j}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=l_0}^{N-1} \tau \|DR^{j-l_0}\|_{H \rightarrow H} - \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{j+l_0}\|_{H \rightarrow H} \right) \|\theta_j\|_H \Bigg\} \\
& + \left| \frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right| \left\{ \|R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1}\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=1}^{N-1} \tau (\|DR^{N-j-1}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& + \|DR^{N+j-1}\|_{H \rightarrow H}) \|\theta_j\|_H + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} \tau \|DR^{(l_0+1)-j}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \left. \left. + \sum_{j=l_0}^{N-1} \tau \|DR^{j-(l_0+1)}\|_{H \rightarrow H} - \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{j+(l_0+1)}\|_{H \rightarrow H} \right) \|\theta_j\|_H \right\} \Bigg\} \text{bulunur. Aynı işlemleri}
\end{aligned}$$

tekrar kullanarak $\|CQ_2\|_{C(H)}$ için;

$$\begin{aligned}
\|CQ_2\|_{C(H)} & \leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|C\eta\|_H + \|(2I + \tau D)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left\{ -\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right\} \right. \\
& \times \left[\|R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=1}^{N-1} \tau (\|DR^{N-j}\|_{H \rightarrow H} + \|DR^{N+j}\|_{H \rightarrow H}) \|\theta_j\|_H \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|\theta_j\|_H \left(\sum_{j=1}^{l_i-1} \tau \|DR^{(l_i-1)-j}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=l_i}^{N-1} \tau \|DR^{j-(l_i-1)}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{(l_0-1)+j}\|_{H \rightarrow H} \right) + |1 - \mu_i^2| \left[\|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \times \sum_{j=1}^{N-1} \tau \left(\|DR^{N-j}\|_{H \rightarrow H} + \|DR^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \right) \|\theta_j\|_H + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \left(\sum_{j=1}^{l_i-1} \tau \|DR^{l_i-j}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=l_i}^{N-1} \tau \|DR^{j-l_i}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{j+l_i}\|_{H \rightarrow H} \right) \\
& \times \|\theta_j\|_H \left. \right] + \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \left[\|R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{N-j}\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \right) \|\theta_j\|_H + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{j=1}^{l_i-1} \tau \|DR^{(l_i+1)-j}\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{j=l_i}^{N-1} \tau \|DR^{j-(l_i+1)}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{j+(l_i+1)}\|_{H \rightarrow H} \right) \|\theta_j\|_H \right] \left. \right] \Bigg\} \text{ eşitsizliğine ulaşılır.}
\end{aligned}$$

Daha sonra (2.1.4) ve (2.1.5) kestirimleri kullanılarak $\|CQ_1\|_{C(H)}$ ve $\|CQ_2\|_{C(H)}$ için,

$$\|CQ_1\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \min \left\{ \ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + |\ln \|D\|_{H \rightarrow H}| \right\} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right] \text{ ve}$$

$$\|CQ_2\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|C\eta\|_H + \min \left\{ \ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + |\ln \|D\|_{H \rightarrow H}| \right\} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right] \text{ kestirimleri elde}$$

edilir. Böylece üçgen, Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini ve (2.1.4), (2.1.7) kestirimlerini de uygulayarak $\|Cu_0\|_H$ ve $\|Cu_N\|_H$ için;

$$\begin{aligned}
\|Cu_0\|_H & \leq \|\Delta_3^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\{ \left[\|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ -\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \left\| R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + |1 - \mu_i^2| \left\| R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right\|_{H \rightarrow H} + \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \left\| R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1} \right\|_{H \rightarrow H} \right] \right\} \|CQ_1\|_{C(H)} \right. \\
& \left. + \left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \left\| R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1} \right\|_{H \rightarrow H} + |1 - \mu_0^2| \left\| R^{N-l_0} - R^{N+l_0} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \left\| R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1} \right\|_{H \rightarrow H} \right] \|CQ_2\|_{C(H)} \right] \right\} \quad (2.2.17)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|Cu_N\|_H &\leq \|\Delta_3^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\{ \left[\|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} + \left| \frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right| \|R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1}\|_{H \rightarrow H} + |1 - \mu_0^2| \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left\| R^{l_0} - R^{2N-l_0} \right\|_{H \rightarrow H} + \left| -\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right| \left\| R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1} \right\|_{H \rightarrow H} \right] \|CQ_2\|_{C(H)} \\
&\quad + \left[\sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left| \frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right| \left\| R^{l_i-1} - R^{2N-l_i+1} \right\|_{H \rightarrow H} + |1 - \mu_i^2| \left\| R^{l_i} - R^{2N-l_i} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left| -\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right| \left\| R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1} \right\|_{H \rightarrow H} \right\} \right] \|CQ_1\|_{C(H)} \Big\} \quad (2.2.18)
\end{aligned}$$

kestirimleri elde edilir. (2.1.1) şartını uygulayarak, (2.2.17), (2.2.18) eşitsizliklerini ve ayrıca $\|CQ_1\|_{C(H)}, \|CQ_2\|_{C(H)}$ için elde edilen kestirimler kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\|Cu_0\|_H + \|Cu_N\|_H &\leq M(\delta) \{ \|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H \\
&\quad + \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + |\ln \|D\|_{H \rightarrow H}| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \Big\} \quad \text{eşitsizliği bulunur.}
\end{aligned}$$

Buradan;

$$\begin{aligned}
\left\| \{Cu_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} &\leq M(\delta) \{ \|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H \\
&\quad + \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + |\ln \|D\|_{H \rightarrow H}| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \Big\} \quad (2.2.19)
\end{aligned}$$

kestirimi elde edilir. Böylece, yardımcı lokal olmayan (2.2.4) fark problemine üçgen eşitsizliği uygulanarak (2.2.16) kestirimine ulaşılır.

Bilinmeyen p elemanı için $\|p\|_H$ kestirimini belirleyelim. Bunun için (2.2.5) bağıntısında (2.2.11) eşitliğini kullanarak ve sonra üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini uygulayarak, ayrıca (2.1.4) ve (2.1.5) kestirimlerini de kullanarak,

$$\|p\|_H \leq M(\delta) \left\{ \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H + \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + |\ln \|D\|_{H \rightarrow H}| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right\} \quad (2.2.20)$$

kestirimi elde edilir. (2.2.3) formülünde (2.2.19) eşitsizliğini ve (2.2.20) kestirimini kullanarak

$$\begin{aligned}
\left\| \{Cv_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} &\leq M(\delta) \{ \|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \\
&\quad + \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + |\ln \|D\|_{H \rightarrow H}| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \Big\} \quad (2.2.21)
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca (2.2.2) fark problemine üçgen eşitsizliğini uygulayarak,

$$\left\| \left\{ \frac{(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}))}{\tau^2} \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \leq M(\delta) \{ \|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H + \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \\ + \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + |\ln \|D\|_{H \rightarrow H}| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \} \quad (2.2.22)$$

elde edilir. Sonuçta üçgen eşitsizliğinden, (2.2.22), (2.2.21) ve (2.2.20) kestirimlerinden (2.2.15) elde edilir. Böylelikle Teorem 2.2.2.'nin ispatı tamamlanır.

Teorem 2.2.3. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayıların (2.2.1) koşulu sağladığını ve $\phi, \zeta, \eta \in D(A) \cap D(C), \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H) (0 < \alpha < 1)$ olduğunu varsayalım. O halde, (2.2.2) fark probleminin $(\{v_k\}_{k=1}^{N-1}, p)$ çözümü için aşağıdaki koersif kararlılık kestirimi geçerlidir:

$$\left\| \left\{ \tau^{-2} (v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \left\| \{Cv_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \|p\|_H \\ \leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H \right. \\ \left. + \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right]. \quad (2.2.23)$$

Burada $M(\delta)$ sabiti, verilen $\alpha, \phi, \zeta, \eta$ elemanlarından ve $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}$ 'dan bağımsızdır.

İspat: (2.2.8) direkt probleminin çözümü için, Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) çalışmasında,

$$\left\| \left\{ \tau^{-2} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} \leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \|Cu_0\|_H + \|Cu_N\|_H \right]$$

kestirimi ispatlanmıştır. Yardımcı lokal olmayan (2.2.4) fark problemin çözümü için (2.2.11) ve (2.2.12) formülleri;

$$Cu_0 = \Delta_3^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left\{ (I - R^{2N}) - \left[-\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] (R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}) + [1 - \mu_i^2] (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) \right. \right. \\ \left. \left. - \left[\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) \right\} CQ_1 - \left\{ -\left[-\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] (R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}) \right. \right. \\ \left. \left. - [1 - \mu_0^2] (R^{N-l_0} - R^{N+l_0}) - \left[\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] (R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1}) \right\} CQ_2 \right\} \text{ ve}$$

$$\begin{aligned}
Cu_N = \Delta_3^{-1} \left\{ \left[(I - R^{2N}) - \left[-\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] (R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1}) - [1 - \mu_0^2] (R^{l_0} - R^{2N-l_0}) \right. \right. \\
\left. - \left[\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] (R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1}) \right] CQ_2 - \left[\sum_{i=1}^q k_i \left\{ -\left[-\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] \right. \right. \\
\left. \times (R^{l_i-1} - R^{2N-l_i+1}) + [1 - \mu_i^2] (R^{l_i} - R^{2N-l_i}) - \left[\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] \right. \\
\left. \left. \times (R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1}) \right\} \right] CQ_1 \Big\} \quad \text{şeklinde yazılabilir. İlk önce } C = D^2 R,
\end{aligned}$$

$P = (I + \tau D)(2I + \tau D)^{-1} D^{-1}$ bağıntılarını kullanarak, daha sonra öz-eşlenik operatörler için operatör işlemlerini, üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini uygulayarak $\|CQ_1\|_{C(H)}$ ile $\|CQ_2\|_{C(H)}$ için,

$$\begin{aligned}
\|CQ_1\|_{C(H)} &\leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} (\|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H) + \|(2I + \tau D)^{-1} D\|_{H \rightarrow H} \left[\left| -\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right| \right. \\
&\quad \times \left\{ \|R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
&\quad \left. + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{l_0-1-j} - R^{l_0-1+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right\} \\
&\quad + |1 - \mu_0^2| \left\{ \|R^{N-l_0} - R^{N+l_0}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
&\quad \left. + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{l_0-j} - R^{l_0+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right\} \\
&\quad + \left| \frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right| \left\{ \|R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
&\quad \left. + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{l_0+1-j} - R^{l_0+1+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right\} \Big] \\
\|CQ_2\|_{C(H)} &\leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|C\eta\|_H + \|(2I + \tau D)^{-1} D\|_{H \rightarrow H} \times \left[\sum_{i=1}^q k_i \left\{ -\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right| \right. \\
&\quad \times \left[\|R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
&\quad \left. + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{l_i-1-j} - R^{l_i-1+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right] \\
&\quad + |1 - \mu_i^2| \left[\|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_i - j|} - R^{l_i + j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right] + \left| \frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right| \\
& \times \left[\left\| R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& \left. + \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_i + 1 - j|} - R^{l_i + 1 + j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right] \Bigg\} \quad \text{elde edilir.}
\end{aligned}$$

(2.1.1) şartını ve (2.1.4) eşitsizliklerini kullanarak $\|CQ_1\|_{C(H)}$ ile $\|CQ_2\|_{C(H)}$ için,

$$\|CQ_1\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left(\|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} \right) \text{ ve}$$

$$\|CQ_2\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left(\|C\eta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} \right) \text{ eşitsizliklerine ulaşılır. Daha}$$

sonra üçgen eşitsizliğini, (2.1.4) ve (2.1.7) kestirimlerini de kullanarak $\|Cu_0\|_H$ ve $\|Cu_N\|_H$ için,

$$\begin{aligned}
\|Cu_0\|_H & \leq \left\| \Delta_3^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} + \left| -\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right| \left\| R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left| 1 - \mu_i^2 \right| \left\| R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right\|_{H \rightarrow H} + \left| \frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right| \left\| R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1} \right\|_{H \rightarrow H} \right\} \|CQ_1\|_{C(H)} \right. \\
& \left. + \left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \left\| R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1} \right\|_{H \rightarrow H} + \left| 1 - \mu_0^2 \right| \left\| R^{N-l_0} - R^{N+l_0} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left| \frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right| \left\| R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1} \right\|_{H \rightarrow H} \right] \|CQ_2\|_{C(H)} \right\} \\
& \leq M(\delta) \left[\|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} \right] \text{ ve} \\
\|Cu_N\|_H & \leq \left\| \Delta_3^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \left\{ \left[\left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} + \left| -\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right| \left\| R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left| 1 - \mu_0^2 \right| \left\| R^{l_0} - R^{2N-l_0} \right\|_{H \rightarrow H} + \left| \frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right| \left\| R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1} \right\|_{H \rightarrow H} \right] \right. \\
& \times \|CQ_2\|_{C(H)} + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left| -\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right| \left\| R^{l_i-1} - R^{2N-l_i+1} \right\|_{H \rightarrow H} + \left| 1 - \mu_i^2 \right| \right. \\
& \left. \times \left\| R^{l_i} - R^{2N-l_i} \right\|_{H \rightarrow H} + \left| \frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right| \left\| R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1} \right\|_{H \rightarrow H} \right\} \|CQ_1\|_{C(H)} \Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\leq M(\delta) \left[\|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right] \text{ elde edilir. Elde}$$

ettiğimiz son kestirimlerden,

$$\left\| \left\{ \tau^{-2} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \leq M(\delta) \left[\|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right]$$

bulunur. Yardımcı lokal olmayan (2.2.4) fark problemine üçgen eşitsizliği uygulanarak,

$$\left\| \{Cu_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \leq M(\delta) \left[\|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right] \quad (2.2.24)$$

kestirimi elde edilir.

(2.2.5) bağıntısında (2.2.11) eşitliğini kullanarak, daha sonra üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizlikleri ile birlikte (2.1.4) ve (2.1.7) kestirimlerini de uygulayarak,

$$\|p\|_H \leq M(\delta) \left[\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right] \quad (2.2.25)$$

eşitsizliği elde edilir. (2.2.3) formülünden ve (2.2.24) ile (2.2.25) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned} & \left\| \{Cv_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \leq M(\delta) \left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} + \|C\phi\|_H \right. \\ & \left. + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H + \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right] \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

kestirimi bulunur. (2.2.2) fark problemine üçgen eşitsizliğini uygulayarak,

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \tau^{-2} (v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \leq M(\delta) \left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} + \|C\phi\|_H \right. \\ & \left. + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H + \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right] \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

kestirimini elde ederiz. Böylece son olarak (2.2.27), (2.2.26) ve (2.2.25) kestirimlerinden,

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \tau^{-2} (v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} + \left\| \{Cv_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} + \|p\|_H \\ & \leq M(\delta) \left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} + \|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H \right. \\ & \left. + \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right] \end{aligned} \quad (2.2.23) \text{ kestirimine ulaşılır. Bu da ispatı tamamlamış olur.}$$

2.3. Dördüncü Mertebeden Doğruluklu Fark Şeması ve Kararlılık Eşitsizlikleri

Bu bölümde yerel olmayan sınır koşullu (2.1.2) ters eliptik probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için dördüncü mertebeden doğruluklu fark şeması oluşturulmuştur.

$v(\gamma)$ ve $v(\lambda)$ için dördüncü mertebeden yaklaşım formülleri;

$$\begin{aligned}
 v(\gamma) = & \left[\frac{1}{12} \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left[\frac{\gamma}{\tau} \right] \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left[\frac{\gamma}{\tau} \right] \right)^3 \right] v \left(\left(\left[\frac{\gamma}{\tau} \right] - 2 \right) \tau \right) \\
 & + \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left[\frac{\gamma}{\tau} \right] \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left[\frac{\gamma}{\tau} \right] \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left[\frac{\gamma}{\tau} \right] \right)^3 \right] v \left(\left(\left[\frac{\gamma}{\tau} \right] - 1 \right) \tau \right) \\
 & + \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left[\frac{\gamma}{\tau} \right] \right)^2 \right] v \left(\left[\frac{\gamma}{\tau} \right] \tau \right) \\
 & + \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left[\frac{\gamma}{\tau} \right] \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left[\frac{\gamma}{\tau} \right] \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left[\frac{\gamma}{\tau} \right] \right)^3 \right] v \left(\left(\left[\frac{\gamma}{\tau} \right] + 1 \right) \tau \right) \\
 & + \left[-\frac{1}{12} \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left[\frac{\gamma}{\tau} \right] \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left[\frac{\gamma}{\tau} \right] \right)^3 \right] v \left(\left(\left[\frac{\gamma}{\tau} \right] + 2 \right) \tau \right) + O(\tau^4), \\
 v(\lambda) = & \left[\frac{1}{12} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right)^3 \right] v \left(\left(\left[\frac{\lambda}{\tau} \right] - 2 \right) \tau \right) \\
 & + \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right)^3 \right] v \left(\left(\left[\frac{\lambda}{\tau} \right] - 1 \right) \tau \right) \\
 & + \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right)^2 \right] v \left(\left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \tau \right) \\
 & + \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right)^3 \right] v \left(\left(\left[\frac{\lambda}{\tau} \right] + 1 \right) \tau \right) \\
 & + \left[-\frac{1}{12} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau} \right] \right)^3 \right] v \left(\left(\left[\frac{\lambda}{\tau} \right] + 2 \right) \tau \right) + O(\tau^4) \text{ şeklindedir.}
 \end{aligned}$$

$[\cdot]$ en büyük tam sayı fonksiyonunun notasyonu olmak üzere,

$$l_0 = \left[\frac{\gamma}{\tau} \right], \quad l_i = \left[\frac{\lambda_i}{\tau} \right], \quad \frac{\gamma}{\tau} - l_0 = \mu_0, \quad \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i = \mu_i, \quad i = 1, \dots, q$$

$$\mu_{0,1} = \frac{1}{12} \mu_0 - \frac{1}{12} \mu_0^3, \quad \mu_{0,2} = -\frac{2}{3} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 + \frac{1}{6} \mu_0^3,$$

$$\mu_{0,3} = 1 - \mu_0^2, \quad \mu_{0,4} = \frac{2}{3} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 - \frac{1}{6} \mu_0^3, \quad \mu_{0,5} = -\frac{1}{12} \mu_0 + \frac{1}{12} \mu_0^3,$$

$$\mu_{i,1} = \frac{1}{12}\mu_i - \frac{1}{12}\mu_i^3, \quad \mu_{i,2} = -\frac{2}{3}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 + \frac{1}{6}\mu_i^3,$$

$$\mu_{i,3} = 1 - \mu_i^2, \quad \mu_{i,4} = \frac{2}{3}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 - \frac{1}{6}\mu_i^3, \quad \mu_{i,5} = -\frac{1}{12}\mu_i + \frac{1}{12}\mu_i^3 \quad \text{notasyonlarını kullanarak}$$

$v(\gamma)$ ve $v(\lambda_i)$ için, dördüncü mertebeden yaklaşım formüllerini tekrar,

$$v(\gamma) = \mu_{0,1}v((l_0 - 2)\tau) + \mu_{0,2}v((l_0 - 1)\tau) + \mu_{0,3}v(l_0\tau) + \mu_{0,4}v((l_0 + 1)\tau) + \mu_{0,5}v((l_0 + 2)\tau) + O(\tau^4),$$

$$v(\lambda) = \mu_{i,1}v((l_0 - 2)\tau) + \mu_{i,2}v((l_0 - 1)\tau) + \mu_{i,3}v(l_i\tau) + \mu_{i,4}v((l_0 + 1)\tau) + \mu_{i,5}v((l_0 + 2)\tau) + O(\tau^4)$$

şeklinde yazabiliriz. Dördüncü mertebeden yaklaşım formüllerini uygulayarak ve k_i katsayılarının oluşturduğu (2.2.1) bağıntısını kullanarak, yerel olmayan sınır koşullu (2.1.2) ters elptik probleminin dördüncü mertebeden doğruluklu fark şeması,

$$\begin{cases} -\tau^{-2}(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) + Av_k + \frac{\tau^2}{12}A^2v_k = \theta_k + p, \\ \theta_k = f(t_k) + \frac{\tau^2}{12}\left(\frac{f(t_{k+1}) - 2f(t_k) + f(t_{k-1}))}{\tau^2} + Af(t_k)\right), \\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = T, v_0 = \phi, \\ \mu_{0,1}v_{l_0-2} + \mu_{0,2}v_{l_0-1} + \mu_{0,3}v_{l_0} + \mu_{0,4}v_{l_0+1} + \mu_{0,5}v_{l_0+2} = \zeta, \\ v_N = \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \mu_{i,1}v_{l_i-2} + \mu_{i,2}v_{l_i-1} + \mu_{i,3}v_{l_i} + \mu_{i,4}v_{l_i+1} + \mu_{i,5}v_{l_i+2} \right\} + \eta \end{cases} \quad (2.3.1)$$

şeklinde kurulur.

Dördüncü mertebeden (2.3.1) doğruluklu fark şemasını göz önüne alalım. Bu fark probleminin v_k çözümü için (2.2.3) formülünü ve (2.2.1) şartını kullanarak, yardımcı lokal olmayan

$$\begin{cases} -\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + Au_k + \frac{\tau^2}{12}A^2u_k = \theta_k, \\ \theta_k = f(t_k) + \frac{\tau^2}{12}\left(\frac{f(t_{k+1}) - 2f(t_k) + f(t_{k-1}))}{\tau^2} + Af(t_k)\right), \\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = T, \\ u_0 - \mu_{0,1}u_{l_0-2} + \mu_{0,2}u_{l_0-1} - \mu_{0,3}u_{l_0} - \mu_{0,4}u_{l_0+1} - \mu_{0,5}u_{l_0+2} = \phi - \zeta, \\ u_N - \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \mu_{i,1}u_{l_i-2} + \mu_{i,2}u_{l_i-1} + \mu_{i,3}u_{l_i} + \mu_{i,4}u_{l_i+1} + \mu_{i,5}u_{l_i+2} \right\} = \eta \end{cases} \quad (2.3.2)$$

fark problemine indirgeyelim. u_k lokal olmayan (2.3.2) fark probleminin çözümüdür.

Teorem 2.3.1. k_i ($i=1, \dots, q$) katsayılarının (2.1.1) koşulunu sağladığını ve $\phi, \zeta, \eta \in D(A), \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \in C(H)$ olduğunu varsayalım. O halde, (2.3.1) fark probleminin $(\{v_k\}_{k=1}^{N-1}, p)$ çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri sağlanır:

$$\left\| \{v_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right], \quad (2.3.3)$$

$$\|A^{-1}p\|_H \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right]. \quad (2.3.4)$$

Burada $M(\delta)$ sabitleri, verilen $\alpha, \phi, \zeta, \eta$ elemanlarından ve $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}$ 'dan bağımsızdır.

İspat: (2.3.2) fark probleminin sınır şartlarına (2.2.9) formülünü uygulayarak,

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ (I - R^{2N}) - \mu_{0,1} (R^{l_0-2} - R^{2N-l_0+2}) - \mu_{0,2} (R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1}) - \mu_{0,3} (R^{l_0} - R^{2N-l_0}) \right. \\ & - \mu_{0,4} (R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1}) - \mu_{0,5} (R^{l_0+2} - R^{2N-l_0-2}) \Big\} u_0 - \left\{ \mu_{0,1} (R^{N-l_0+2} - R^{N+l_0-2}) \right. \\ & + \mu_{0,2} (R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}) + \mu_{0,3} (R^{N-l_0} - R^{N+l_0}) + \mu_{0,4} (R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1}) \\ & + \mu_{0,5} (R^{N-l_0-2} - R^{N+l_0+2}) \Big\} u_N = S_1, \\ & \sum_{i=1}^q k_i \left\{ -\mu_{i,1} (R^{l_i-2} - R^{2N-l_i+2}) - \mu_{i,2} (R^{l_i-1} - R^{2N-l_i+1}) - \mu_{i,3} (R^{l_i} - R^{2N-l_i}) - \mu_{i,4} \right. \\ & \times (R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1}) - \mu_{i,5} (R^{l_i+2} - R^{2N-l_i-2}) \Big\} u_0 + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ (I - R^{2N}) - \mu_{i,1} \right. \\ & \times (R^{N-l_i+2} - R^{N+l_i-2}) - \mu_{i,2} (R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}) - \mu_{i,3} (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) - \mu_{i,4} \\ & \times (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) - \mu_{i,5} (R^{N-l_i-2} - R^{N+l_i+2}) \Big\} u_N = S_2 \end{aligned} \right.$$

elde edilir. Burada;

$$\begin{aligned} S_1 = & (I - R^{2N}) (\phi - \zeta) + \mu_{0,1} \left\{ - (R^{N-l_0+2} - R^{N+l_0-2}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau \right. \\ & + (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{l_0-2-j} - R^{l_0-2+j}) \theta_j \tau \Big\} + \mu_{0,2} \left\{ - (R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}) \right. \\ & \times P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{l_0-1-j} - R^{l_0-1+j}) \theta_j \tau \Big\} \\ & + \mu_{0,3} \left\{ - (R^{N-l_0} - R^{N+l_0}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \right. \\ & \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{l_0-j} - R^{l_0+j}) \theta_j \tau \Big\} + \mu_{0,4} \left\{ - (R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_0+1-j|} - R^{l_0+1+j} \right) \theta_j \tau \Big\} + \mu_{0,5} \left\{ - \left(R^{N-l_0-2} - R^{N+l_0+2} \right) P \right. \\
& \times \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_0+2-j|} - R^{l_0+2+j} \right) \theta_j \tau \Big\} \\
S_2 = & (I - R^{2N}) \eta + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \mu_{i,1} \left[- \left(R^{N-l_i+2} - R^{N+l_i-2} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \right. \right. \\
& \times \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_i-2-j|} - R^{l_i-2+j} \right) \theta_j \tau \Big] + \mu_{i,2} \left[- \left(R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau \right. \\
& + (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_i-1-j|} - R^{l_i-1+j} \right) \theta_j \tau \Big] + \mu_{i,3} \left[- \left(R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right) P \right. \\
& \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j} \right) \theta_j \tau \Big] + \mu_{i,4} \\
& \times \left[- \left(R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_i+1-j|} - R^{l_i+1+j} \right) \right. \\
& \times \theta_j \tau \Big] + \mu_{i,5} \left[- \left(R^{N-l_i-2} - R^{N+l_i+2} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \right. \\
& \times \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_i+2-j|} - R^{l_i+2+j} \right) \theta_j \tau \Big] \Big\} \text{ olarak yazılır. Böylece bilinmeyen } u_0 \text{ ve } u_N
\end{aligned}$$

elemanları için,

$$\begin{cases} s_{11} u_0 + s_{12} u_N = S_1 \\ s_{21} u_0 + s_{22} u_N = S_2 \end{cases} \quad (2.3.5)$$

biçimindeki denklem sistemi ifade edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
s_{11} = & (I - R^{2N}) - \mu_{0,1} \left(R^{l_0-2} - R^{2N-l_0+2} \right) - \mu_{0,2} \left(R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1} \right) - \mu_{0,3} \left(R^{l_0} - R^{2N-l_0} \right) \\
& - \mu_{0,4} \left(R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1} \right) - \mu_{0,5} \left(R^{l_0+2} - R^{2N-l_0-2} \right), \\
s_{12} = & - \left\{ \mu_{0,1} \left(R^{N-l_0+2} - R^{N+l_0-2} \right) + \mu_{0,2} \left(R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1} \right) + \mu_{0,3} \left(R^{N-l_0} - R^{N+l_0} \right) \right. \\
& + \mu_{0,4} \left(R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1} \right) + \mu_{0,5} \left(R^{N-l_0-2} - R^{N+l_0+2} \right) \Big\}, \\
s_{21} = & \sum_{i=1}^q k_i \left\{ - \mu_{i,1} \left(R^{l_i-2} - R^{2N-l_i+2} \right) - \mu_{i,2} \left(R^{l_i-1} - R^{2N-l_i+1} \right) - \mu_{i,3} \left(R^{l_i} - R^{2N-l_i} \right) \right. \\
& - \mu_{i,4} \left(R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1} \right) - \mu_{i,5} \left(R^{l_i+2} - R^{2N-l_i-2} \right) \Big\},
\end{aligned}$$

$$s_{22} = \sum_{i=1}^q k_i \left\{ (I - R^{2N}) - \mu_{i,1} (R^{N-l_i+2} - R^{N+l_i-2}) - \mu_{i,2} (R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}) - \mu_{i,3} \right. \\ \left. \times (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) - \mu_{i,4} (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) - \mu_{i,5} (R^{N-l_i-2} - R^{N+l_i+2}) \right\}$$

şeklinde. Bu (2.3.5) denklem sisteminin çözümünün var olması için, $\Delta_4 = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}$ operatörünün tersinin varlığı ve sınırlı olduğu önerme 2.1.5'de kanıtlanmıştır. Bu sebeple (2.3.5) denklem sisteminin çözümü vardır ve tektir. Böylece, bilinmeyen u_0 ve u_N elemanları için, $u_0 = \Delta_4^{-1} (s_{22}S_1 - s_{12}S_2)$, $u_N = \Delta_4^{-1} (s_{11}S_2 - s_{21}S_1)$ eşitlikleri yazılabilir. Sonuç olarak u_0 ve u_N için,

$$u_0 = \Delta_4^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left\{ (I - R^{2N}) - \mu_{i,1} (R^{N-l_i+2} - R^{N+l_i-2}) - \mu_{i,2} (R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}) - \mu_{i,3} \right. \right. \\ \left. \times (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) - \mu_{i,4} (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) - \mu_{i,5} (R^{N-l_i-2} - R^{N+l_i+2}) \right\} \left\{ (I - R^{2N}) \right. \\ \left. \times (\phi - \zeta) + \mu_{0,1} \left\{ - (R^{N-l_0+2} - R^{N+l_0-2}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \right. \right. \\ \left. \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_0-2-j|} - R^{l_0-2+j}) \theta_j \tau \right\} + \mu_{0,2} \left\{ - (R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}) P \right. \\ \left. \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_0-1-j|} - R^{l_0-1+j}) \theta_j \tau \right\} + \mu_{0,3} \\ \left. \times \left\{ - (R^{N-l_0} - R^{N+l_0}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \right. \right. \\ \left. \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_0-j|} - R^{l_0+j}) \theta_j \tau \right\} + \mu_{0,4} \left\{ - (R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \right. \\ \left. \times \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_0+1-j|} - R^{l_0+1+j}) \theta_j \tau \right\} + \mu_{0,5} \left\{ - (R^{N-l_0-2} - R^{N+l_0+2}) \right. \\ \left. \times P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau + (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_0+2-j|} - R^{l_0+2+j}) \theta_j \tau \right\} \\ \left. + \left\{ \mu_{0,1} (R^{N-l_0+2} - R^{N+l_0-2}) + \mu_{0,2} (R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}) + \mu_{0,3} (R^{N-l_0} - R^{N+l_0}) \right. \right. \\ \left. + \mu_{0,4} (R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1}) + \mu_{0,5} (R^{N-l_0-2} - R^{N+l_0+2}) \right\} \\ \left. \times \left((I - R^{2N}) \eta + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \mu_{i,1} \left[- (R^{N-l_i+2} - R^{N+l_i-2}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \right. \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ - \left(R^{N-l_0+2} - R^{N+l_0-2} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + \left(I - R^{2N} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_0-2-j|} - R^{l_0-2+j} \right) \theta_j \tau \right\} \\
& + \mu_{0,2} \left\{ - \left(R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + \left(I - R^{2N} \right) P \right. \\
& \times \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_0-1-j|} - R^{l_0-1+j} \right) \theta_j \tau \left. \right\} + \mu_{0,3} \left\{ - \left(R^{N-l_0} - R^{N+l_0} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + \left(I - R^{2N} \right) \right. \\
& \times P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_0-j|} - R^{l_0+j} \right) \theta_j \tau \left. \right\} + \mu_{0,4} \left\{ - \left(R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + \left(I - R^{2N} \right) P \right. \\
& \times \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_0+1-j|} - R^{l_0+1+j} \right) \theta_j \tau \left. \right\} + \mu_{0,5} \left\{ - \left(R^{N-l_0-2} - R^{N+l_0+2} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau + \left(I - R^{2N} \right) \right. \\
& \times P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_0+2-j|} - R^{l_0+2+j} \right) \theta_j \tau \left. \right\} \left. \right\} \quad (2.3.7)
\end{aligned}$$

bağıntıları yazılır. Bu sebeple (2.3.2) fark problemi, (2.2.9), (2.3.6) ve (2.3.7) formülleriyle tanımlanan tek bir $\{u_k\}_{k=0}^N$ çözümüne sahiptir. (2.2.8) direkt probleminin çözümü için (2.2.13) kestirimi geçerlidir (Ashyralyev ve Sobolevskii, 2004). Öncelikle S_I ve S_2 ifadeleri için kestirimlerini belirleyelim. Bunun için üçgen, Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini ve önerme 2.1.1.'deki (2.1.4) kestirimleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\|S_1\|_{C(H)} & \leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \left(\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H \right) + |\mu_{0,1}| \|P\|_{H \rightarrow H} \left(\|R^{N-l_0+2} - R^{N+l_0-2}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \times \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{|l_0-2-j|} - R^{l_0-2+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \left. \right) + |\mu_{0,2}| \|P\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \left(\|R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{|l_0-1-j|} - R^{l_0-1+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \left. \right) + |\mu_{0,3}| \\
& \times \|P\|_{H \rightarrow H} \left(\|R^{N-l_0} - R^{N+l_0}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{|l_0-j|} - R^{l_0+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \left. \right) + |\mu_{0,4}| \|P\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \left(\|R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_0+1-j|} - R^{l_0+1+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \Big) + |\mu_{0,5}| \\
& \times \left\| P \right\|_{H \rightarrow H} \left(\left\| R^{N-l_0-2} - R^{N+l_0+2} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& \left. + \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_0+2-j|} - R^{l_0+2+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right) \\
& \leq M(\delta) \left(\left\| \phi \right\|_H + \left\| \zeta \right\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right) \text{ ve} \\
\|S_2\|_{C(H)} & \leq \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \eta \right\|_H + \left\| P \right\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left| \mu_{i,1} \right| \left(\left\| R^{N-l_i+2} - R^{N+l_i-2} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\
& \times \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} + \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_i-2-j|} - R^{l_i-2+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \Big) + |\mu_{i,2}| \\
& \times \left(\left\| R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& \left. + \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_i-1-j|} - R^{l_i-1+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \Big) + |\mu_{i,3}| \\
& \times \left(\left\| R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& \left. + \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \Big) + |\mu_{i,4}| \\
& \left(\left\| R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& \left. + \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_i+1-j|} - R^{l_i+1+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \Big) + |\mu_{i,5}| \\
& \left(\left\| R^{N-l_i-2} - R^{N+l_i+2} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& \left. + \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_i+2-j|} - R^{l_i+2+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \Big) \Big\} \\
& \leq M(\delta) \left(\left\| \eta \right\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right) \text{ elde edilir.}
\end{aligned}$$

(2.3.6) ve (2.3.7) eşitliklerine üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini uygulayarak, ve ayrıca (2.1.4), (2.1.12) kestirimlerini de kullanarak Ru_0 ve Ru_N için,

$$\begin{aligned} \|Ru_0\|_H &\leq \|R\|_{H \rightarrow H} \|\Delta_4^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{i,1}| \|R^{N-l_i+2} - R^{N+l_i-2}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{i,2}| \right. \right. \\ &\quad \times \|R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{i,3}| \|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{i,4}| \|R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\quad \left. \left. + |\mu_{i,5}| \|R^{N-l_i-2} - R^{N+l_i+2}\|_{H \rightarrow H} \right\} \|S_1\|_{C(H)} + \left\{ |\mu_{0,1}| \|R^{N-l_0+2} - R^{N+l_0-2}\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |\mu_{0,2}| \|R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{0,3}| \|R^{N-l_0} - R^{N+l_0}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{0,4}| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \|R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{0,5}| \|R^{N-l_0-2} - R^{N+l_0+2}\|_{H \rightarrow H} \right\} \|S_2\|_{C(H)} \right\} \end{aligned}$$

$$\leq M(\delta) \left(\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right) \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} \|Ru_N\|_H &\leq \|R\|_{H \rightarrow H} \|\Delta_4^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\{ \left(\|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{0,1}| \|R^{l_0-2} - R^{2N-l_0+2}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{0,2}| \right. \right. \\ &\quad \times \|R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{0,3}| \|R^{l_0} - R^{2N-l_0}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{0,4}| \|R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\quad \left. \left. + |\mu_{0,5}| \|R^{l_0+2} - R^{2N-l_0-2}\|_{H \rightarrow H} \right) \|S_2\|_{C(H)} + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ |\mu_{i,1}| \|R^{l_i-2} - R^{2N-l_i+2}\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |\mu_{i,2}| \|R^{l_i-1} - R^{2N-l_i+1}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{i,3}| \|R^{l_i} - R^{2N-l_i}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{i,4}| \|R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1}\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |\mu_{i,5}| \|R^{l_i+2} - R^{2N-l_i-2}\|_{H \rightarrow H} \right\} \|S_1\|_{C(H)} \right\} \end{aligned}$$

$$\leq M(\delta) \left(\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right) \text{ eşitsizlikleri elde edilir. Bu}$$

sebeple, (2.2.13) eşitsizliğini kullanarak,

$$\left\| \{u_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right] \quad (2.2.14) \text{ kestirimi yazılabilir.}$$

(2.2.5) formülünden hareketle $A^{-1}p = \phi - u_0$ bağıntısını elde edip (2.3.6) eşitliği ile birlikte kullanarak ve bunlara öz-eşlenik operatörler için operatör işlemlerini, üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini de uygulayarak, ve ayrıca (2.1.4) ile (2.1.12) kestirimlerini kullanarak $\|A^{-1}p\|_H \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right]$ şeklindeki (2.3.4) kararlılık kestirimi elde edilir. Son olarak, (2.2.3) formülüne (2.3.4) kararlılık kestirimi ile (2.2.14) eşitsizliğini uygulayarak,

$\left\| \{v_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right]$ biçimindeki (2.3.3) kararlılık kestirimine ulaşılır. Böylelikle Teorem 2.3.1 ispatlanmış olur.

Teorem 2.3.2. k_i ($i=1, \dots, q$) katsayıların (2.1.1) koşulunu sağladığını ve $\phi, \zeta, \eta \in D(A) \cap D(C), \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \in C(H)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde, (2.3.1) fark probleminin $(\{v_k\}_{k=1}^{N-1}, p)$ çözümü aşağıdaki hemen-hemen koersif kararlılık eşitsizliğini sağlar:

$$\left\| \left\{ \frac{(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}))}{\tau^2} \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} + \left\| \{Cv_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} + \|p\|_H \leq M(\delta) \left\{ \|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H + \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right. \\ \left. \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + |\ln \|D\|_{H \rightarrow H}| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right\}. \quad (2.3.8)$$

Burada $M(\delta)$ sabiti, verilen τ, ϕ, ζ, η elemanlarına ve $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}$ 'ya bağımlı değildir.

İspat: (2.2.8) direkt probleminin çözümü için, (2.2.16) eşitsizliğinin doğruluğu Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) çalışmasında gösterilmiştir. (2.1.4), (2.1.5), (2.1.12) kestirimlerini ve (2.3.6), (2.3.7) eşitliklerini kullanarak yardımcı lokal olmayan (2.3.2) fark probleminin çözümü için,

$$\|Cu_0\|_H + \|Cu_N\|_H \leq M(\delta) \left\{ \|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H + \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + |\ln \|D\|_{H \rightarrow H}| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right\}$$

kestirimi elde edilmelidir. Bunun için (2.3.6) ve (2.3.7) bağıntılarını kullanılarak,

$$Cu_0 = \Delta_4^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left((I - R^{2N}) - \mu_{i,1} (R^{N-l_i+2} - R^{N+l_i-2}) - \mu_{i,2} (R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}) - \mu_{i,3} \right. \right. \\ \left. \times (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) - \mu_{i,4} (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) - \mu_{i,5} (R^{N-l_i-2} - R^{N+l_i+2}) \right\} CS_1 \\ + \left\{ \mu_{0,1} (R^{N-l_0+2} - R^{N+l_0-2}) + \mu_{0,2} (R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}) + \mu_{0,3} (R^{N-l_0} - R^{N+l_0}) \right. \\ \left. + \mu_{0,4} (R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1}) + \mu_{0,5} (R^{N-l_0-2} - R^{N+l_0+2}) \right\} CS_2 \Big\} \text{ ve} \\ Cu_N = \Delta_4^{-1} \left\{ \left((I - R^{2N}) - \mu_{0,1} (R^{l_0-2} - R^{2N-l_0+2}) - \mu_{0,2} (R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1}) - \mu_{0,3} \right. \right. \\ \left. \times (R^{l_0} - R^{2N-l_0}) - \mu_{0,4} (R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1}) - \mu_{0,5} (R^{l_0+2} - R^{2N-l_0-2}) \right\} CS_2$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \mu_{i,1} \left(R^{l_i-2} - R^{2N-l_i+2} \right) + \mu_{i,2} \left(R^{l_i-1} - R^{2N-l_i+1} \right) + \mu_{i,3} \left(R^{l_i} - R^{2N-l_i} \right) \right. \\
& \left. + \mu_{i,4} \left(R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1} \right) + \mu_{i,5} \left(R^{l_i+2} - R^{2N-l_i-2} \right) \right\} CS_1 \Big\} \text{ eşitlikleri elde edilir. Burada}
\end{aligned}$$

$C = D^2 R$, $P = (I + \tau D)(2I + \tau D)^{-1} D^{-1}$ eşitliklerini uygulayarak CS_1 ve CS_2 ;

$$\begin{aligned}
CS_1 &= D^2 RS_1 = (I - R^{2N}) [C\phi - C\zeta] + \mu_{0,1} \left\{ - \left(R^{N-l_0+2} - R^{N+l_0-2} \right) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \right. \\
& \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j + (I - R^{2N}) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} R^{(l_0-2)-j} \theta_j + \sum_{j=l_0}^{N-1} R^{j-(l_0-2)} \theta_j \right. \\
& \left. \left. + \sum_{j=1}^{N-1} R^{(l_0-2)+j} \theta_j \right) \right\} + \mu_{0,2} \left\{ - \left(R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1} \right) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \right. \\
& \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j + (I - R^{2N}) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} R^{l_0-1-j} \theta_j + \sum_{j=l_0}^{N-1} R^{j-(l_0-1)} \theta_j \right. \\
& \left. \left. + \sum_{j=1}^{N-1} R^{(l_0-1)+j} \theta_j \right) \right\} + \mu_{0,3} \left\{ - \left(R^{N-l_0} - R^{N+l_0} \right) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \right. \\
& \times \theta_j + (I - R^{2N}) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} R^{l_0-j} \theta_j + \sum_{j=l_0}^{N-1} R^{j-l_0} \theta_j + \sum_{j=1}^{N-1} R^{l_0+j} \theta_j \right) \Big\} \\
& + \mu_{0,4} \left\{ - \left(R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1} \right) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j + (I - R^{2N}) \right. \\
& \times (2I + \tau D)^{-1} \tau D \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} R^{(l_0+1)-j} \theta_j + \sum_{j=l_0}^{N-1} R^{j-(l_0+2)} \theta_j + \sum_{j=1}^{N-1} R^{(l_0+1)+j} \theta_j \right) \Big\} + \mu_{0,5} \\
& \times \left\{ - \left(R^{N-l_0-2} - R^{N+l_0+2} \right) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j + (I - R^{2N}) \right. \\
& \times (2I + \tau D)^{-1} \tau D \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} R^{(l_0+2)-j} \theta_j + \sum_{j=l_0}^{N-1} R^{j-(l_0+2)} \theta_j + \sum_{j=1}^{N-1} R^{(l_0+2)+j} \theta_j \right) \Big\} \text{ ve}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CS_2 &= D^2 RS_2 = (I - R^{2N}) C\eta + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \mu_{i,1} \left[- \left(R^{N-l_i+2} - R^{N+l_i-2} \right) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \right. \right. \\
& \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j + (I - R^{2N}) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \left(\sum_{j=1}^{l_i-1} R^{(l_i-2)-j} \theta_j + \sum_{j=l_i}^{N-1} R^{j-(l_i-2)} \theta_j \right. \\
& \left. \left. + \sum_{j=1}^{N-1} R^{(l_i-2)+j} \theta_j \right) \right] + \mu_{i,2} \left[- \left(R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1} \right) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j + (I - R^{2N}) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} R^{(l_0-1)-j} \theta_j \right. \\
& \left. + \sum_{j=l_0}^{N-1} R^{j-(l_0-1)} \theta_j + \sum_{j=1}^{N-1} R^{(l_0-1)+j} \theta_j \right) - \mu_{i,3} \left[- (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \right. \\
& \left. \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j + (I - R^{2N}) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} R^{l_i-j} \theta_j + \sum_{j=l_0}^{N-1} R^{j-l_i} \theta_j \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{j=1}^{N-1} R^{l_i+j} \theta_j \right) \right] + \mu_{i,4} \left[- (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \right. \\
& \left. + (I - R^{2N}) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} R^{(l_i+1)-j} \theta_j + \sum_{j=l_0}^{N-1} R^{j-(l_i+1)} \theta_j + \sum_{j=1}^{N-1} R^{(l_i+1)+j} \theta_j \right) \right] \\
& + \mu_{i,5} \left[- (R^{N-l_i-2} - R^{N+l_i+2}) (2I + \tau D)^{-1} \tau D \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j + (I - R^{2N}) \right. \\
& \left. \times (2I + \tau D)^{-1} \times \tau D \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} R^{(l_i+2)-j} \theta_j + \sum_{j=l_0}^{N-1} R^{j-(l_i+2)} \theta_j + \sum_{j=1}^{N-1} R^{(l_i+2)+j} \theta_j \right) \right] \Bigg\} \text{ olarak yazılabilir.}
\end{aligned}$$

Öncelikle $\|CS_1\|_{C(H)}$ için kestirimi belirleyelim. Bunun için öz-eşlenik operatörler için operatör işlemlerini, üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini uygulayarak,

$$\begin{aligned}
\|CS_1\|_{C(H)} & \leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} (\|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H) + \|(2I + \tau D)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \{|\mu_{0,1}| \\
& \times \left(\|R^{N-l_0+2} - R^{N+l_0-2}\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=1}^{N-1} \tau (\|DR^{N-j}\|_{H \rightarrow H} + \|DR^{N+j}\|_{H \rightarrow H}) \right. \\
& \times \|\theta_j\|_H + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} \tau \|DR^{(l_0-2)-j}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=l_0}^{N-1} \tau \|DR^{j-(l_0-2)}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \left. \left. + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{(l_0-2)+j}\|_{H \rightarrow H} \right) \|\theta_j\|_H \Bigg\} + |\mu_{0,2}| \left(\|R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \times \sum_{j=1}^{N-1} \tau (\|DR^{N-j}\|_{H \rightarrow H} + \|DR^{N+j}\|_{H \rightarrow H}) \|\theta_j\|_H + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} \tau \|DR^{(l_0-1)-j}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=l_0}^{N-1} \tau \|DR^{j-(l_0-1)}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{(l_0-1)+j}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \left. \times \|\theta_j\|_H \Bigg\} + |\mu_{0,3}| \left(\|R^{N-l_0} - R^{N+l_0}\|_{H \rightarrow H} \times \sum_{j=1}^{N-1} \tau (\|DR^{N-j}\|_{H \rightarrow H} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|DR^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \Big) \|\theta_j\|_H + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} \tau \|DR^{l_0-j}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \left. + \sum_{j=l_0}^{N-1} \tau \|DR^{j-l_0}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{l_0+j}\|_{H \rightarrow H} \right) \|\theta_j\|_H \Big) + |\mu_{0,4}| \\
& \times \left(\|R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1}\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=1}^{N-1} \tau (\|DR^{N-j}\|_{H \rightarrow H} + \|DR^{N+j}\|_{H \rightarrow H}) \|\theta_j\|_H \right. \\
& + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} \tau \|DR^{(l_i+1)-j}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=l_0}^{N-1} \tau \|DR^{j-(l_0+1)}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{(l_0+1)+j}\|_{H \rightarrow H} \right) \|\theta_j\|_H \Big) + |\mu_{0,5}| \left(\|R^{N-l_0-2} - R^{N+l_0+2}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \times \sum_{j=1}^{N-1} \tau (\|DR^{N-j}\|_{H \rightarrow H} + \|DR^{N+j}\|_{H \rightarrow H}) \|\theta_j\|_H + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \left(\sum_{j=1}^{l_0-1} \tau \|DR^{(l_i+2)-j}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=l_0}^{N-1} \tau \|DR^{j-(l_0+2)}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{(l_0+2)+j}\|_{H \rightarrow H} \right) \\
& \left. \times \|\theta_j\|_H \right) \Big\} \text{ eşitsizliği bulunur. Daha sonra benzer işlemleri } \|CS_2\|_{C(H)} \text{ için de}
\end{aligned}$$

kullanarak,

$$\begin{aligned}
\|CS_2\|_{C(H)} & \leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|C\eta\|_H + \|(2I + \tau D)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \left\{ |\mu_{i,1}| \left[\|R^{N-l_i+2} - R^{N+l_i-2}\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\
& \times \left(\sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{N-j}\|_{H \rightarrow H} \|\theta_j\|_H + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \|\theta_j\|_H \right) + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \left(\sum_{j=1}^{l_i-1} \tau \|DR^{(l_i-2)-j}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=l_i}^{N-1} \tau \|DR^{j-(l_i-2)}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{(l_i-2)+j}\|_{H \rightarrow H} \right) \\
& \times \|\theta_j\|_H \Big] + |\mu_{i,2}| \left[\|R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{N-j}\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\
& + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \Big) \|\theta_j\|_H + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{j=1}^{l_i-1} \tau \|DR^{(l_i-1)-j}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& + \sum_{j=l_i}^{N-1} \tau \|DR^{j-(l_i-1)}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{(l_i-1)+j}\|_{H \rightarrow H} \Big) \|\theta_j\|_H + |\mu_{i,3}| \\
& \times \left[\|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{N-j}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \right) \|\theta_j\|_H \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{j=1}^{l_i-1} \tau \|DR^{l_i-j}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=l_i}^{N-1} \tau \|DR^{j-l_i}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{l_i+j}\|_{H \rightarrow H} \right) \\
& \times \|\theta_j\|_H \Big] + |\mu_{i,4}| \left[\|R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{N-j}\|_{H \rightarrow H} \|\theta_j\|_H \right. \right. \\
& + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \|\theta_j\|_H \Big) + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{j=1}^{l_i-1} \tau \|DR^{(l_i+1)-j}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& + \sum_{j=l_i}^{N-1} \tau \|DR^{j-(l_i+1)}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{(l_i+1)+j}\|_{H \rightarrow H} \Big) \|\theta_j\|_H \Big] + |\mu_{i,5}| \\
& \times \left[\|R^{N-l_i-2} - R^{N+l_i+2}\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{N-j}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \right) \right. \\
& \times \|\theta_j\|_H + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{j=1}^{l_i-1} \tau \|DR^{(l_i+2)-j}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=l_i}^{N-1} \tau \|DR^{j-(l_i+1)}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& + \sum_{j=1}^{N-1} \tau \|DR^{(l_i+1)+j}\|_{H \rightarrow H} \Big) \|\theta_j\|_H \Big] \Big\} \text{ eşitsizliği yazılabilir. Böylelikle (2.1.4) ve}
\end{aligned}$$

(2.1.5) kestirimlerini kullanarak $\|CS_1\|_{C(H)}$ ve $\|CS_2\|_{C(H)}$ için,

$$\|CS_1\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \min \left\{ \ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + |\ln \|D\|_{H \rightarrow H}| \right\} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right] \quad \text{ve}$$

$$\|CS_2\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|C\eta\|_H + \min \left\{ \ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + |\ln \|D\|_{H \rightarrow H}| \right\} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right] \text{ kestirimleri elde}$$

edilir. Üçgen, Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini ve (2.1.4) ile (2.1.12) kestirimlerini de uygulayarak $\|Cu_0\|_H$ ve $\|Cu_N\|_H$ için,

$$\begin{aligned}
\|Cu_0\|_H & \leq \|\Delta_4^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{i,1}| \|R^{N-l_i+2} - R^{N+l_i-2}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{i,2}| \right. \right. \\
& \times \|R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{i,3}| \|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{i,4}| \|R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \\
& + |\mu_{i,5}| \|R^{N-l_i-2} - R^{N+l_i+2}\|_{H \rightarrow H} \Big\} \|CS_1\|_{C(H)} + \left\{ |\mu_{0,1}| \|R^{N-l_0+2} - R^{N+l_0-2}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& + |\mu_{0,2}| \|R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{0,3}| \|R^{N-l_0} - R^{N+l_0}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{0,4}| \\
& \times \|R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{0,5}| \|R^{N-l_0-2} - R^{N+l_0+2}\|_{H \rightarrow H} \Big\} \|CS_2\|_{C(H)} \Big\} \quad (2.3.9)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|Cu_N\|_H \leq & \left\| \Delta_4^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \left\{ \left(\left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} - |\mu_{0,1}| \left\| R^{l_0-2} - R^{2N-l_0+2} \right\|_{H \rightarrow H} - |\mu_{0,2}| \right. \right. \\
& \times \left. \left\| R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1} \right\|_{H \rightarrow H} - |\mu_{0,3}| \left\| R^{l_0} - R^{2N-l_0} \right\|_{H \rightarrow H} - |\mu_{0,4}| \left\| R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \left. \left. - |\mu_{0,5}| \left\| R^{l_0+2} - R^{2N-l_0-2} \right\|_{H \rightarrow H} \right) \|CS_2\|_{C(H)} + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ |\mu_{i,1}| \left\| R^{l_i-2} - R^{2N-l_i+2} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& + |\mu_{i,2}| \left\| R^{l_i-1} - R^{2N-l_i+1} \right\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{i,3}| \left\| R^{l_i} - R^{2N-l_i} \right\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{i,4}| \left\| R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1} \right\|_{H \rightarrow H} \\
& \left. \left. + |\mu_{i,5}| \left\| R^{l_i+2} - R^{2N-l_i-2} \right\|_{H \rightarrow H} \right\} \|CS_1\|_{C(H)} \right\} \quad (2.3.10)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (2.1.1) şartını uygulayarak, (2.3.9) ile (2.3.10) eşitsizliklerini ve ayrıca $\|CS_1\|_{C(H)}, \|CS_2\|_{C(H)}$ için elde edilen kestirimleri de kullanarak istenilen

$$\|Cu_0\|_H + \|Cu_N\|_H \leq M(\delta) \left\{ \|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H + \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + |\ln \|D\|_{H \rightarrow H}| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan (2.2.19) kestiriminin elde edildiği görülür.

Bilinmeyen p elemanı için, (2.2.5) formülünü ve (2.3.6) eşitliğini kullanarak eşitlik yazılabilir. Daha sonra üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini uygulayarak ve ayrıca (2.1.4) ile (2.1.5) kestirimlerini de kullanarak $\|p\|_H$ için (2.2.20) kestirimi bulunur. (2.2.19) ve (2.2.20) kestirimlerini (2.2.3) formülüne uygulayarak (2.2.21) kestirimine ulaşılır. Ayrıca (2.3.1) fark problemine üçgen eşitsizliği uygulayarak (2.2.22) eşitsizliği elde edilir. Son olarak, üçgen eşitsizliğinden ve ayrıca (2.2.22), (2.2.21) ile (2.2.20) kestirimlerinden hareketle (2.3.8) elde edilir. Böylelikle, Teorem 2.3.2 ispatlanmış olur.

Teorem 2.3.3. k_i ($i=1, \dots, q$) katsayılarının (2.1.1) koşulunu sağladığını ve $\phi, \zeta, \eta \in D(A) \cap D(C), \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H) (0 < \alpha < 1)$ olduğunu varsayalım. O halde, (2.3.1) fark probleminin $(\{v_k\}_{k=1}^{N-1}, p)$ çözümü için aşağıdaki koersif kararlılık kestirimi geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left\| \left\{ \tau^{-2} (v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \left\| \{Cv_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \|p\|_H \\
& \leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H \right. \\
& \quad \left. + \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right]. \quad (2.3.11)
\end{aligned}$$

Burada $M(\delta)$ sabiti, verilen $\tau, \alpha, \phi, \zeta, \eta$ elemanlarından ve $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}$ 'dan bağımsızdır.

İspat: (2.2.8) direkt probleminin çözümü için,

$$\left\| \left\{ \tau^{-2} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} \leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \|Cu_0\|_H + \|Cu_N\|_H \right]$$

kestirimi elde edilmelidir. Bu kestirimin doğruluğu Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) çalışmasında gösterilmiştir. Yardımcı lokal olmayan (2.3.2) fark probleminin çözümü için (2.3.6) ve (2.3.7) formülleri uygulanarak,

$$\begin{aligned} Cu_0 = \Delta_4^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left\{ (I - R^{2N}) - \mu_{i,1} (R^{N-l_i+2} - R^{N+l_i-2}) - \mu_{i,2} (R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1}) \right. \right. \\ \left. \left. - \mu_{i,3} (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) - \mu_{i,4} (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) - \mu_{i,5} (R^{N-l_i-2} - R^{N+l_i+2}) \right\} CS_1 \right. \\ \left. + \left\{ \mu_{0,1} (R^{N-l_0+2} - R^{N+l_0-2}) + \mu_{0,2} (R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1}) + \mu_{0,3} (R^{N-l_0} - R^{N+l_0}) \right. \right. \\ \left. \left. + \mu_{0,4} (R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1}) + \mu_{0,5} (R^{N-l_0-2} - R^{N+l_0+2}) \right\} CS_2 \right\} \end{aligned} \quad \text{ve}$$

$$\begin{aligned} Cu_N = \Delta_4^{-1} \left\{ \left((I - R^{2N}) - \mu_{0,1} (R^{l_0-2} - R^{2N-l_0+2}) - \mu_{0,2} (R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1}) - \mu_{0,3} \right. \right. \\ \left. \left. \times (R^{l_0} - R^{2N-l_0}) - \mu_{0,4} (R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1}) - \mu_{0,5} (R^{l_0+2} - R^{2N-l_0-2}) \right) CS_2 \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \mu_{i,1} (R^{l_i-2} - R^{2N-l_i+2}) + \mu_{i,2} (R^{l_i-1} - R^{2N-l_i+1}) + \mu_{i,3} (R^{l_i} - R^{2N-l_i}) \right. \right. \\ \left. \left. + \mu_{i,4} (R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1}) + \mu_{i,5} (R^{l_i+2} - R^{2N-l_i-2}) \right\} CS_1 \right\} \end{aligned} \quad \text{yazılabilir. İlk önce}$$

$\|CS_1\|_{C(H)}$ ve $\|CS_2\|_{C(H)}$ için eşitsizlikleri belirleyelim. Bunun için $C = D^2R$,

$P = (I + \tau D)(2I + \tau D)^{-1} D^{-1}$ eşitliklerini, daha sonra öz-eşlenik operatörler için operatör işlemlerini, üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini uygulayarak,

$$\begin{aligned} \|CS_1\|_{C(H)} \leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} (\|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H) + \|(2I + \tau D)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|D\|_{H \rightarrow H} \\ \times \left\{ \left\| \mu_{0,1} \left(R^{N-l_0+2} - R^{N+l_0-2} \right) \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\ \left. + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{l_0-2-j} - R^{l_0-2+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |\mu_{0,2}| \left(\left\| R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& + \left. \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_0-1-j|} - R^{l_0-1+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right) \\
& + |\mu_{0,3}| \left(\left\| R^{N-l_0} - R^{N+l_0} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& + \left. \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_0-j|} - R^{l_0+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right) \\
& + |\mu_{0,4}| \left(\left\| R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& + \left. \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_0+1-j|} - R^{l_0+1+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right) \\
& + |\mu_{0,5}| \left(\left\| R^{N-l_0-2} - R^{N+l_0+2} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& + \left. \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_0+2-j|} - R^{l_0+2+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right) \quad \text{ve} \\
\|CS_2\|_{C(H)} & \leq \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \|C\eta\|_H + \left\| (2I + \tau D)^{-1} D \right\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \sum_{i=1}^q k_i \left\{ |\mu_{i,1}| \left(\left\| R^{N-l_i+2} - R^{N+l_i-2} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \right. \\
& + \left. \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_i-2-j|} - R^{l_i-2+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right) \\
& + |\mu_{i,2}| \left(\left\| R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& + \left. \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_i-1-j|} - R^{l_i-1+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right) \\
& + |\mu_{i,3}| \left(\left\| R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& + \left. \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right) \\
& + |\mu_{i,4}| \left(\left\| R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& + \left. \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|l_i+1-j|} - R^{l_i+1+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |\mu_{i,5}| \left(\left\| R^{N-l_i-2} - R^{N+l_i+2} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
& \left. + \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{l_i+2-j} - R^{l_i+2+j} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right) \Bigg\} \quad \text{eşitsizlikleri}
\end{aligned}$$

bulunur. Önerme 2.1.1'deki (2.1.4) kestirimlerinden ve (2.1.1) şartından

$$\|CS_1\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left(\|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right) \quad \text{ve}$$

$$\|CS_2\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left(\|C\eta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right) \quad \text{kestirimleri elde edilir. Daha}$$

sonra (2.1.4) ile (2.1.12) kestirimlerini, üçgen eşitsizliğini ve elde ettiğimiz son kestirimleri de kullanarak $\|Cu_0\|_H$ ve $\|Cu_N\|_H$ için,

$$\begin{aligned}
\|Cu_0\|_H & \leq \left\| \Delta_4^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} - |\mu_{i,1}| \left\| R^{N-l_i+2} - R^{N+l_i-2} \right\|_{H \rightarrow H} - |\mu_{i,2}| \right. \right. \\
& \times \left\| R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i-1} \right\|_{H \rightarrow H} - |\mu_{i,3}| \left\| R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right\|_{H \rightarrow H} - |\mu_{i,4}| \left\| R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1} \right\|_{H \rightarrow H} \\
& \left. - |\mu_{i,5}| \left\| R^{N-l_i-2} - R^{N+l_i+2} \right\|_{H \rightarrow H} \right\} \|CS_1\|_{C(H)} + \left\{ |\mu_{0,1}| \left\| R^{N-l_0+2} - R^{N+l_0-2} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& + |\mu_{0,2}| \left\| R^{N-l_0+1} - R^{N+l_0-1} \right\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{0,3}| \left\| R^{N-l_0} - R^{N+l_0} \right\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{0,4}| \\
& \times \left\| R^{N-l_0-1} - R^{N+l_0+1} \right\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{0,5}| \left\| R^{N-l_0-2} - R^{N+l_0+2} \right\|_{H \rightarrow H} \Big\} \|CS_2\|_{C(H)} \Big\} \\
& \leq M(\delta) \left[\|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right] \quad \text{ve}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|Cu_N\|_H & \leq \left\| \Delta_4^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \left\{ \left(\left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} - |\mu_{0,1}| \left\| R^{l_0-2} - R^{2N-l_0+2} \right\|_{H \rightarrow H} - |\mu_{0,2}| \right. \right. \\
& \times \left\| R^{l_0-1} - R^{2N-l_0+1} \right\|_{H \rightarrow H} - |\mu_{0,3}| \left\| R^{l_0} - R^{2N-l_0} \right\|_{H \rightarrow H} - |\mu_{0,4}| \left\| R^{l_0+1} - R^{2N-l_0-1} \right\|_{H \rightarrow H} \\
& \left. \times - |\mu_{0,5}| \left\| R^{l_0+2} - R^{2N-l_0-2} \right\|_{H \rightarrow H} \right) \|CS_2\|_{C(H)} + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ |\mu_{i,1}| \left\| R^{l_i-2} - R^{2N-l_i+2} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& + |\mu_{i,2}| \left\| R^{l_i-1} - R^{2N-l_i+1} \right\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{i,3}| \left\| R^{l_i} - R^{2N-l_i} \right\|_{H \rightarrow H} + |\mu_{i,4}| \left\| R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1} \right\|_{H \rightarrow H} \\
& \left. + |\mu_{i,5}| \left\| R^{l_i+2} - R^{2N-l_i-2} \right\|_{H \rightarrow H} \right\} \|CS_1\|_{C(H)} \Big\} \\
& \leq M(\delta) \left[\|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right] \quad \text{elde edilir. Bu}
\end{aligned}$$

eşitsizlikler kullanılarak,

$$\left\| \left\{ \tau^{-2} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} \leq M(\delta) \left[\|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \left\{ \theta_k \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} \right]$$

kestirimine ulaşılır. Ayrıca (2.3.2) yardımcı lokal olmayan fark problemine üçgen eşitsizliği uygulanarak (2.2.24) kestirimi elde edilir.

(2.2.5) bağıntısına (2.3.6) eşitliğini uygulayarak, daha sonra üçgen, *Cauchy-Schwarz* eşitsizliklerini ve bunlarla birlikte (2.1.4) ve (2.1.12) kestirimlerini de uygulayarak (2.2.25) eşitsizliği elde edilir. Ayrıca (2.2.3) formülünde (2.2.24) ve (2.2.25) kestirimlerini kullanarak, (2.2.26) eşitsizliği bulunur. Böylece (2.3.1) fark problemine üçgen eşitsizliği uygulanarak, (2.2.27) kestirimine ulaşılabilir. Sonuç olarak, (2.2.27), (2.2.26) ve (2.2.25) kestirimlerinden istenilen

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \tau^{-2} (v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \left\| \left\{ Cv_k \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \|p\|_H \\ & \leq M(\delta) \left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \left\{ \theta_k \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \|C\phi\|_H + \|C\zeta\|_H + \|C\eta\|_H + \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right] \end{aligned}$$

(2.3.11) kestirimi elde edilir ve böylelikle teorem ispatı tamamlanır.

3. BULGULAR ve TARTIŞMA

3.1. Çok Boyutlu Ters Yerel Olmayan Eliptik Sınır Değer Problemleri İçin Fark Şemaları

Bu bölümde çok boyutlu eliptik kısmi diferansiyel denklem için ters yerel olmayan sınır değer problemlerinin fark şemaları oluşturulacaktır. İlk önce bu bölümde kullanılacak olan bazı notasyonlar tanıtılacaktır. Sınırı $\partial\Omega$ olan, n keyfi bir doğal sayı olmak üzere, R_n Öklid uzayında $\Omega = (0, l)^n$ bir açık küpü ele alalım. Ω kümesinin kapanışı $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ olur. $f(t, x)$ ($t \in (0, T), x \in \Omega$) ve

$a_r(x), \phi(x), \eta(x), \zeta(x)$ ($x \in \bar{\Omega}$) bilinen düzgün fonksiyonlardır. $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $0 \leq \gamma \leq T$, $k_1, k_2, \dots, k_q$ bilinen negatif olmayan katsayılar ve $a_r(x) \geq a > 0$ ($1 \leq r \leq n, x \in \Omega$)'dır.

3.1.1. Çok Boyutlu Yerel Olmayan Ters Dirichlet Tipi Eliptik Sınır Değer Probleminin Fark Şemaları

$\Omega = (0, l)^n$ açık bir küp olmak üzere, $[0, T] \times \Omega$ bölgesinde çok boyutlu eliptik kısmi diferansiyel denklem için yerel olmayan ters Dirichlet tipi sınır değer problemini

$$\begin{cases} -v_{tt}(t, x) - \sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} + \sigma v(t, x) = f(t, x) + p(x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, 0 < t < T, \\ v(0, x) = \phi(x), v(T, x) - \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i, x) = \eta(x), x \in \bar{\Omega}, \\ v(\gamma, x) = \zeta(x), x \in \bar{\Omega}, 0 < \gamma < T, \\ v(t, x) = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1.1.1)$$

ele alalım. Buradaki $k_1, k_2, \dots, k_q$ katsayıları (2.1.1) koşulunu sağlamalıdır. $\sigma > 0$ olmak üzere (3.1.1.1) probleminin diferansiyel operatörü,

$$A^x v = - \sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} + \sigma v(t, x) \quad (3.1.1.2)$$

şeklindedir. (3.1.1.2) ifadesiyle tanımlanan A^x operatörü, tanım bölgesi $D(A^x) = \{v(x) \in L_2(\Omega), \partial\Omega \text{ üzerinde } v(x) = 0\}$ olan $L_2(\Omega)$ uzayından $L_2(\Omega)$ uzayına bir operatördür ve öz-eşlenik pozitif tanımlıdır.

(3.1.1.1) probleminin yaklaşımını iki adımda oluşturalım. İlk adımda grid noktalar uzayı, $\Omega_h = \{x = x_m = (h_1 m_1, \dots, h_n m_n); m = (m_1, \dots, m_n), m_r = 0, \dots, M_r, h_r M_r = l, r = 1, \dots, n\}$, $\Omega_h = \Omega_h \cap \Omega, \partial\Omega_h = \Omega_h \cap \partial\Omega$ ile tanımlanır.

(3.1.1.2) ile tanımlanan A^x diferansiyel operatörü yerine,

$$A_h^x v^h(x) = -\sum_{r=1}^n \left(a_r(x) v_{x_r}^h \right)_{x_r, j_r} + \sigma v^h \quad (3.1.1.3)$$

şeklindeki A_h^x fark operatorünü kullanacağız. Burada $v^h(x)$ fonksiyonları tüm $x \in \partial\Omega_h$ için $v^h(x) = 0$ koşulunu sağlamaktadır. A_h^x fark operatörü, $D(A_h^x) = \{v^h(x) \in L_{2h}, v^h(x) = 0, x \in \partial\Omega_h\}$ şeklinde tanım bölgesi olan öz-eşlenik pozitif tanımlı bir operatördür.

A_h^x fark operatörü için (3.1.1.3) eşitliği uygulandığında, adi diferansiyel denklem sistemi için, ters yerel olmayan

$$\begin{cases} -\frac{d^2 v^h(t, x)}{dt^2} + A_h^x v^h(t, x) = f^h(t, x) + p^h(x), 0 < t < T, x \in \Omega_h, \\ v^h(0, x) = \phi^h(x), x \in \Omega_h, \\ v^h(\gamma, x) = \zeta^h(x), x \in \Omega_h, \\ v^h(T, x) = \sum_{i=1}^q k_i v^h(\lambda_i, x) + \eta^h(x), x \in \Omega_h. \end{cases} \quad (3.1.1.4)$$

sınır değer probleminde $v^h(t, x)$ ve $p^h(x)$ bilinmeyen fonksiyonlarına ulaşılır.

İkinci adımda (3.1.1.4) probleminin t değişkenine göre yaklaşımını kuralım. Grid noktalar uzayını $[0, T]_\tau = \{t_k = k\tau, k = 1, \dots, N, N\tau = T\}$ ile gösterelim. Burada N -sabit pozitif tam sayıdır.

$$l_0 = \left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor, l_i = \left\lfloor \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rfloor, \frac{\gamma}{\tau} - l_0 = \mu_0, \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i = \mu_i, (i = 1, \dots, q) \quad \text{olmak üzere,} \quad v^h(\gamma, x),$$

$v^h(\lambda_i, x), (i = 1, \dots, q)$ değerleri için,

$$\begin{aligned} v^h(\gamma, x) &= \left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] v((l_0 - 1)\tau, x) + [1 - \mu_0^2] v(l_0\tau, x) \\ &\quad + \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] v((l_0 + 1)\tau, x) + O(\tau^3), x \in \Omega_h, \\ v^h(\lambda_i, x) &= \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] v((l_i - 1)\tau, x) + [1 - \mu_i^2] v(l_i\tau, x) \end{aligned}$$

$$+\left[\frac{1}{2}\mu_i+\frac{1}{2}\mu_i^2\right]v((l_i+1)\tau,x)+O(\tau^3), x\in\Omega_h \text{ biçimindeki üçüncü mertebeden}$$

yaklaşım formüllerini kullanarak (3.1.1.4) problemi için, üçüncü mertebeden doğruluklu fark şeması;

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{(v_{k+1}^h(x)-2v_k^h(x)+v_{k-1}^h(x))}{\tau^2}+C_h^x v_k^h(x)=\theta_k^h(x)+p^h(x), \\ \theta_k^h(x)=f^h(t_k,x)+\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{f^h(t_{k+1},x)-2f^h(t_k,x)+f^h(t_{k-1},x)}{\tau^2}+A_h^x f^h(t_k,x)\right), \\ t_k=k\tau, 1\leq k\leq N-1, N\tau=T, x\in\Omega_h, \\ v_0^h(0,x)=\phi^h(x), x\in\Omega_h, \\ \left[-\frac{1}{2}\mu_0+\frac{1}{2}\mu_0^2\right]v_{l_0-1}^h(x)+[1-\mu_0^2]v_{l_0}^h(x)+\left[\frac{1}{2}\mu_0+\frac{1}{2}\mu_0^2\right]v_{l_0+1}^h(x)=\zeta^h(x), \\ x\in\overline{\Omega_h}, \\ v_N^h(x)=\sum_{i=1}^q k_i\left\{\left[-\frac{1}{2}\mu_i+\frac{1}{2}\mu_i^2\right]v_{l_i-1}^h(x)+[1-\mu_i^2]v_{l_i}^h(x)+\left[\frac{1}{2}\mu_i+\frac{1}{2}\mu_i^2\right]v_{l_i+1}^h(x)\right\} \\ +\eta^h(x), x\in\overline{\Omega_h}, \\ l_0=\left[\frac{\gamma}{\tau}\right], l_i=\left[\frac{\lambda_i}{\tau}\right], \mu_0=\frac{\gamma}{\tau}-l_0, \mu_i=\frac{\lambda_i}{\tau}-l_i \end{array}\right. \quad (3.1.1.5)$$

olarak kurulur. Benzer şekilde $v^h(\gamma,x)$, $v^h(\lambda_i,x), (i=1,...,q)$ değerleri için,

$$v^h(\gamma,x)=\mu_{0,1}v((l_0-2)\tau,x)+\mu_{0,2}v((l_0-1)\tau,x)+\mu_{0,3}v(l_0\tau,x)+\mu_{0,4}v((l_0+1)\tau,x) \\ +\mu_{0,5}v((l_0+2)\tau,x)+O(\tau^4), x\in\Omega_h,$$

$$v^h(\lambda_i,x)=\mu_{i,1}v((l_i-2)\tau,x)+\mu_{i,2}v((l_i-1)\tau,x)+\mu_{i,3}v(l_i\tau,x)+\mu_{i,4}v((l_i+1)\tau,x) \\ +\mu_{i,5}v((l_i+2)\tau,x)+O(\tau^4), x\in\Omega_h$$

dördüncü mertebeden yaklaşım formüllerini uygulayarak (3.1.1.4) problemi için, dördüncü mertebeden doğruluklu fark şeması;

$$\begin{cases}
-\frac{(v_{k+1}^h(x) - 2v_k^h(x) + v_{k-1}^h(x))}{\tau^2} + C_h^x v_k^h(x) = \theta_k^h(x) + p^h(x), \\
\theta_k^h(x) = f^h(t_k, x) + \frac{\tau^2}{12} \left(\frac{f^h(t_{k+1}, x) - 2f^h(t_k, x) + f^h(t_{k-1}, x)}{\tau^2} + A_h^x f^h(t_k, x) \right), \\
t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = T, x \in \Omega_h, \\
v_0^h(0, x) = \phi^h(x), x \in \Omega_h, \\
\mu_{0,1}v_{l_0-2}^h(x) + \mu_{0,2}v_{l_0-1}^h(x) + \mu_{0,3}v_{l_0}^h(x) + \mu_{0,4}v_{l_0+1}^h(x) + \mu_{0,5}v_{l_0+2}^h(x) = \zeta^h(x), \\
x \in \overline{\Omega_h}, \\
v_N(x) = \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \mu_{i,1}v_{l_i-2}^h(x) + \mu_{i,2}v_{l_i-1}^h(x) + \mu_{i,3}v_{l_i}^h(x) + \mu_{i,4}v_{l_i+1}^h(x) + \mu_{i,5}v_{l_i+2}^h(x) \right\} \\
+ \eta^h(x), x \in \overline{\Omega_h}, \\
l_0 = \left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor, l_i = \left\lfloor \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rfloor, \mu_0 = \frac{\gamma}{\tau} - l_0, \mu_i = \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i
\end{cases} \quad (3.1.1.6)$$

şeklinde oluşturulur.

(3.1.1.4) probleminin $v^h(t, x)$ çözümünü elde etmek için, $v^h(t, x) = u^h(t, x) + (A_h^x)^{-1} p^h(x)$ bağıntısını ve (2.2.1) koşulunu uygulayarak, bilinmeyen $u^h(t, x)$ fonksiyonu için,

$$\begin{cases}
-\frac{d^2 u^h(t, x)}{dt^2} + A_h^x u^h(t, x) = f^h(t, x), 0 < t < T, x \in \Omega_h, \\
u^h(0, x) - u^h(\gamma, x) = \phi^h(x) - \zeta^h(x), x \in \Omega_h, \\
u^h(T, x) - \sum_{i=1}^q k_i u^h(\lambda_i, x) = \eta^h(x), x \in \Omega_h.
\end{cases} \quad (3.1.1.7)$$

lokal olmayan yardımcı sınır değer problemi elde edilir.

$p^h(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun değerini hesaplamak için, (2.2.5) bağıntısına göre,

$$p^h(x) = A_h^x \phi^h(x) - A_h^x u^h(0, x) \quad (3.1.1.8)$$

özdeşliği kullanılacaktır.

(3.1.1.7) problemi için, üçüncü mertebeden doğruluklu fark şeması

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{(u_{k+1}^h(x) - 2u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x))}{\tau^2} + C_h^x u_k^h(x) = \theta_k^h(x), \\ \theta_k^h(x) = f^h(t_k, x) + \frac{\tau^2}{12} \left(\frac{f^h(t_{k+1}, x) - 2f^h(t_k, x) + f^h(t_{k-1}, x)}{\tau^2} + A_h^x f^h(t_k, x) \right), \\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = T, x \in \Omega_h, \\ u_0^h(x) - \left[-\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] u_{l_0-1}^h(x) - [1 - \mu_0^2] u_{l_0}^h(x) - \left[\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] u_{l_0+1}^h(x) \\ = \phi^h(x) - \zeta^h(x), x \in \overline{\Omega_h}, \\ u_N^h(x) - \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left[-\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] u_{l_i-1}^h(x) + [1 - \mu_i^2] u_{l_i}^h(x) + \left[\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] \right. \\ \left. \times u_{l_i+1}^h(x) \right\} = \eta^h(x), x \in \overline{\Omega_h}, \\ \frac{\gamma}{\tau} - l_0 = \mu_0, \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i = \mu_i, \end{array} \right. \quad (3.1.1.9)$$

şeklinde ve dördüncü mertebeden fark şeması

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{(u_{k+1}^h(x) - 2u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x))}{\tau^2} + C_h^x u_k^h(x) = \theta_k^h(x), \\ \theta_k^h(x) = f^h(t_k, x) + \frac{\tau^2}{12} \left(\frac{f^h(t_{k+1}, x) - 2f^h(t_k, x) + f^h(t_{k-1}, x)}{\tau^2} + A_h^x f^h(t_k, x) \right), \\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = T, x \in \Omega_h, \\ u_0^h(x) - \mu_{0,1} u_{l_0-2}^h(x) - \mu_{0,2} u_{l_0-1}^h(x) - \mu_{0,3} u_{l_0}^h(x) - \mu_{0,4} u_{l_0+1}^h(x) - \mu_{0,5} u_{l_0+2}^h(x) \\ = \phi^h(x) - \zeta^h(x), x \in \overline{\Omega_h}, \\ u_N^h(x) - \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \mu_{i,1} u_{l_i-2}^h(x) + \mu_{i,2} u_{l_i-1}^h(x) + \mu_{i,3} u_{l_i}^h(x) + \mu_{i,4} u_{l_i+1}^h(x) \right. \\ \left. + \mu_{i,5} u_{l_i+2}^h(x) \right\} = \eta^h(x), x \in \overline{\Omega_h}, \\ \frac{\gamma}{\tau} - l_0 = \mu_0, \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i = \mu_i, \end{array} \right. \quad (3.1.1.10)$$

biçiminde ifade edilir.

$$L_{2h} = L_2(\Omega_h) \text{ ve } W_{2h}^2 = W_2^2(\Omega_h),$$

$$\|\xi^h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in \Omega_h} |\xi^h(x)|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{1/2}$$

$$\|\xi^h\|_{W_{2h}^2} = \|\xi\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x \in \Omega_h} \sum_{r=1}^n \left| (\xi^h)_{x_r} \right|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{1/2} + \left(\sum_{x \in \Omega_h} \sum_{r=1}^n \left| (\xi^h(x))_{x_r, \bar{x}_r, m_r} \right|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{1/2}$$

normlarıyla donatılmış, Ω_h üzerinde tanımlanan $\xi^h(x) = \{\xi(h_1 m_1, \dots, h_n m_n)\}$ grid fonksiyonlarının oluşturduğu uzaylardır.

Teorem 3.1.1.1. k_i ($i=1,...,q$) katsayılarının (2.1.1) koşulunu sağladığını ve $\phi^h, \zeta^h, \eta^h \in D(A_h^x), \{f_k^h\}_{k=1}^{N-1} \in C(L_{2h})$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, (3.1.1.5) ve (3.1.1.6) fark şemalarının $\left(\{v_k^h\}_{k=1}^{N-1}, p^h\right)$ çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri geçerlidir:

$$\left\|\{v_k^h\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(0T, L_{2h})} \leq M(\delta) \left[\|\phi^h\|_{L_{2h}} + \|\zeta^h\|_{L_{2h}} + \|\eta^h\|_{L_{2h}} + \left\|\{f_k^h\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(L_{2h})} \right], \quad (3.1.1.11)$$

$$\|(A_h^x)^{-1} p^h\|_{L_{2h}} \leq M(\delta) \left[\|\phi^h\|_{L_{2h}} + \|\zeta^h\|_{L_{2h}} + \|\eta^h\|_{L_{2h}} + \left\|\{f_k^h\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(L_{2h})} \right]. \quad (3.1.1.12)$$

Burada $M(\delta)$ sabitleri, verilen ϕ^h, ζ^h, η^h elemanlarından ve $\{f_k^h\}_{k=1}^{N-1}$ 'den bağımsızdır.

Teorem 3.1.1.2. k_i ($i=1,...,q$) katsayılarının (2.1.1) koşulunu sağladığını ve $\phi^h, \zeta^h, \eta^h \in D(A_h^x) \cap D(C_h^x), \{f_k^h\}_{k=1}^{N-1} \in C(L_{2h})$ olduğunu varsayalım. Öyleyse, (3.1.1.5) ve (3.1.1.6) fark şemalarının $\left(\{v_k^h\}_{k=1}^{N-1}, p^h\right)$ çözümü aşağıdaki hemen-hemen koersif kararlılık eşitsizliğini sağlar:

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \frac{(v_{k+1}^h - 2v_k^h + v_{k-1}^h)}{\tau^2} \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(L_{2h})} + \left\| \{C_h^x v_k^h\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(W_{2h}^2)} + \|p^h\|_{L_{2h}} \\ & \leq M(\delta) \left[\|C_h^x \phi^h\|_{W_{2h}^2} + \|C_h^x \zeta^h\|_{W_{2h}^2} + \|C_h^x \eta^h\|_{W_{2h}^2} + \ln\left(\frac{1}{\tau+h}\right) \left\|\{f_k^h\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(L_{2h})} \right. \\ & \quad \left. + \|A_h^x \phi^h\|_{W_{2h}^2} + \|A_h^x \zeta^h\|_{W_{2h}^2} + \|A_h^x \eta^h\|_{W_{2h}^2} \right] \end{aligned} \quad (3.1.1.13)$$

Burada $M(\delta)$ sabiti verilen $\tau, \phi^h, \zeta^h, \eta^h$ elemanlarına ve $\{f_k^h\}_{k=1}^{N-1}$ 'ya bağımlı değildir.

Teorem 3.1.1.3. k_i ($i=1,...,q$) katsayılarının (2.1.1) koşulunu sağladığını ve $\phi^h, \zeta^h, \eta^h \in D(A_h^x) \cap D(C_h^x), \{f_k^h\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_{2h})$ ($0 < \alpha < 1$) olduğunu kabul edelim. O halde, (3.1.1.5) ve (3.1.1.6) fark şemalarının $\left(\{v_k^h\}_{k=1}^{N-1}, p^h\right)$ çözümü için aşağıdaki koersif kararlılık kestirimi geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \tau^{-2} (v_{k+1}^h - 2v_k^h + v_{k-1}^h) \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_{2h})} + \left\| \left\{ v_k^h \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(W_{2h}^2)} + \|p^h\|_{L_{2h}} \\ & \leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \left\{ f_k^h \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_{2h})} + \|\phi^h\|_{W_{2h}^2} + \|\zeta^h\|_{W_{2h}^2} + \|\eta^h\|_{W_{2h}^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.1.1.14)$$

Burada $M(\delta)$ sabiti, verilen $\tau, \alpha, \phi^h, \zeta^h, \eta^h$ elemanlarından ve $\{f_k^h\}_{k=1}^{N-1}$ 'dan bağımsızdır.

Teorem 3.1.1.1, Teorem 3.1.1.2 ve Teorem 3.1.1.3'ün ispatları, A_h^x fark operatörünün L_{2h} uzayındaki simetri özelliğine ve soyut fark problemi için gösterilen 2.2.1-2.2.3 ve 2.3.1-2.3.3 teoremlerine dayanmaktadır.

Ayrıca Teorem 3.1.1.2'nin ispatı A_h^x operatörünün pozitifliğine, önceki bölümlerdeki soyut fark problemi için elde edilen Teorem 2.2.2 ve Teorem 2.3.2 ile Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) çalışmasında geçen,

$$\min \left\{ \ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \left| \ln \|D_h^x\|_{L_{2h}} \right| \right\} \leq M \ln \left(\frac{1}{1+\tau} \right) \quad (3.1.1.15)$$

eşitsizliğine dayanmaktadır.

3.1.2. Çok Boyutlu Yerel Olmayan Ters Neumann Tipi Eliptik Sınır Değer Probleminin Fark Şemaları

Çok boyutlu eliptik kısmi diferansiyel denklem için yerel olmayan

$$\begin{cases} -v_{tt}(t, x) - \sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} + \sigma v(t, x) = f(t, x) + p(x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, 0 < t < T, \\ v(0, x) = \phi(x), v(T, x) - \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i, x) = \eta(x), x \in \bar{\Omega}, \\ v(\gamma, x) = \zeta(x), x \in \bar{\Omega}, 0 < \gamma < T, \\ \frac{\partial v(t, x)}{\partial \vec{n}} = 0, x \in \partial\Omega, 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.1.2.1)$$

ters Neumann tipi sınır değer problemini $[0, T] \times \Omega$ bölgesinde ele alalım. $k_1, k_2, \dots, k_q$ katsayıları (2.1.1) koşulunu sağlamalıdır. $\sigma > 0$ olmak üzere (3.1.2.1) probleminin diferansiyel operatörü, (3.1.1.2) şeklinde tanımlanır. (3.1.1.2) ile tanımlanan A^x operatörü, tanım bölgesi,

$$D(A^x) = \left\{ v(x) \in L_2(\Omega), \partial\Omega \text{ üzerinde } \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = 0 \right\} \text{ olan } L_2(\Omega) \text{ uzayından } L_2(\Omega) \text{ uzayına bir}$$

operatördür ve öz-eşlenik pozitif tanımlıdır.

İki adımda (3.1.2.1) probleminin yaklaşımını oluşturacağız. Birinci adımda, grid noktalar uzayı,

$$\Omega_h = \{x = x_m = (h_1 m_1, \dots, h_n m_n); m = (m_1, \dots, m_n), m_r = 0, \dots, M_r, h_r M_r = l, r = 1, \dots, n\},$$

$$\Omega_h = \Omega_h \cap \Omega, \partial\Omega_h = \Omega_h \cap \partial\Omega \text{ ile tanımlanacaktır.}$$

(3.1.2.1) problemine göre tanımlanan A^x diferansiyel operatörü yerine (3.1.1.3) ile tanımlanan A_h^x fark operatörü kullanılacaktır. Buradaki $v^h(x)$ fonksiyonları $D^h v^h(x) = 0$ ($x \in \partial\Omega_h$) koşulunu sağlamalıdır. Bu şekilde tanımlanan A_h^x fark operatörü öz-eşlenik pozitif tanımlıdır ve bu fark operatörünün tanım bölgesi $D(A_h^x) = \{v^h(x) \in L_{2h}, D^h v^h(x) = 0, x \in \partial\Omega_h\}$ şeklindedir. Burada $D^h v^h(x)$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ 'nin bir yaklaşımıdır.

A_h^x fark operatörünü kullanarak, $v^h(t, x)$ ve $p^h(x)$ bilinmeyen fonksiyonları için (3.1.1.4) biçimindeki sınır değer problemi elde edilir.

İkinci adımda, (3.1.1.4) probleminin t değişkenine göre yaklaşımını oluşturalım. Grid noktalar uzayını $[0, T]_\tau = \{t_k = k\tau, k = 1, \dots, N, N\tau = T\}$ ile gösterelim. Burada N sabit pozitif tam sayıdır.

$$\frac{\gamma}{\tau} - \left[\frac{\gamma}{\tau} \right] = \frac{\gamma}{\tau} - l_0 = \mu_0, \frac{\lambda_i}{\tau} - \left[\frac{\lambda_i}{\tau} \right] = \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i = \mu_i, (i = 1, \dots, q) \text{ olmak üzere, } v^h(\gamma, x),$$

$$v^h(\lambda_i, x), (i = 1, \dots, q) \text{ değerleri için,}$$

$$v^h(\gamma, x) = \left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] v((l_0 - 1)\tau, x) + [1 - \mu_0^2] v(l_0\tau, x) \\ + \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] v((l_0 + 1)\tau, x) + O(\tau^3), x \in \Omega_h,$$

$$v^h(\lambda_i, x) = \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] v((l_i - 1)\tau, x) + [1 - \mu_i^2] v(l_i\tau, x) \\ + \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] v((l_i + 1)\tau, x) + O(\tau^3), x \in \Omega_h \text{ üçüncü mertebeden yaklaşım}$$

formüllerini uygulayarak, (3.1.1.4) probleminin,

$$\begin{cases}
-\frac{(v_{k+1}^h(x) - 2v_k^h(x) + v_{k-1}^h(x))}{\tau^2} + C_h^x v_k^h(x) = \theta_k^h(x) + p^h(x), \\
\theta_k^h(x) = f^h(t_k, x) + \frac{\tau^2}{12} \left(\frac{f^h(t_{k+1}, x) - 2f^h(t_k, x) + f^h(t_{k-1}, x)}{\tau^2} + A_h^x f^h(t_k, x) \right), \\
t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = T, x \in \Omega_h, \\
v_0^h(0, x) = \phi^h(x), x \in \Omega_h, \\
\left[-\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] v_{l_0-1}^h(x) + [1 - \mu_0^2] v_{l_0}^h(x) \left[\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] v_{l_0+1}^h(x) = \zeta^h(x), \\
x \in \overline{\Omega_h}, \\
v_N^h(x) = \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left[-\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] v_{l_i-1}^h(x) + [1 - \mu_i^2] v_{l_i}^h(x) + \left[\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] v_{l_i+1}^h(x) \right\} \\
+ \eta^h(x), x \in \overline{\Omega_h}, \\
l_0 = \left\lceil \frac{\gamma}{\tau} \right\rceil, l_i = \left\lceil \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rceil, \mu_0 = \frac{\gamma}{\tau} - l_0, \mu_i = \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i
\end{cases} \quad (3.1.2.2)$$

üçüncü mertebeden doğruluklu fark şeması elde edilir. Benzer şekilde $v^h(\gamma, x)$

$v^h(\lambda_i, x), (i = 1, \dots, q)$ değerleri için

$$\begin{aligned}
v^h(\gamma, x) &= \mu_{0,1} v((l_0 - 2)\tau, x) + \mu_{0,2} v((l_0 - 1)\tau, x) + \mu_{0,3} v(l_0 \tau, x) + \mu_{0,4} v((l_0 + 1)\tau, x) \\
&\quad + \mu_{0,5} v((l_0 + 2)\tau, x) + O(\tau^4), \quad x \in \Omega_h,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^h(\lambda_i, x) &= \mu_{i,1} v((l_i - 2)\tau, x) + \mu_{i,2} v((l_i - 1)\tau, x) + \mu_{i,3} v(l_i \tau, x) + \mu_{i,4} v((l_i + 1)\tau, x) \\
&\quad + \mu_{i,5} v((l_i + 2)\tau, x) + O(\tau^4), \quad x \in \Omega_h \quad \text{dördüncü mertebeden yaklaşım}
\end{aligned}$$

formüllerini uygulayarak, (3.1.1.4) probleminin,

$$\begin{cases}
-\frac{(v_{k+1}^h(x) - 2v_k^h(x) + v_{k-1}^h(x))}{\tau^2} + C_h^x v_k^h(x) = \theta_k^h(x) + p^h(x), \\
\theta_k^h(x) = f^h(t_k, x) + \frac{\tau^2}{12} \left(\frac{f^h(t_{k+1}, x) - 2f^h(t_k, x) + f^h(t_{k-1}, x)}{\tau^2} + A_h^x f^h(t_k, x) \right), \\
t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = T, x \in \Omega_h, \\
v_0^h(0, x) = \phi^h(x), x \in \Omega_h, \\
\mu_{0,1} v_{l_0-2}^h(x) + \mu_{0,2} v_{l_0-1}^h(x) + \mu_{0,3} v_{l_0}^h(x) + \mu_{0,4} v_{l_0+1}^h(x) + \mu_{0,5} v_{l_0+2}^h(x) = \zeta^h(x), \\
x \in \overline{\Omega_h}, \\
v_N^h(x) = \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \mu_{i,1} v_{l_i-2}^h(x) + \mu_{i,2} v_{l_i-1}^h(x) + \mu_{i,3} v_{l_i}^h(x) + \mu_{i,4} v_{l_i+1}^h(x) + \mu_{i,5} v_{l_i+2}^h(x) \right\} \\
+ \eta^h(x), x \in \overline{\Omega_h}, \\
l_0 = \left\lceil \frac{\gamma}{\tau} \right\rceil, l_i = \left\lceil \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rceil, \mu_0 = \frac{\gamma}{\tau} - l_0, \mu_i = \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i
\end{cases} \quad (3.1.2.3)$$

dördüncü mertebeden doğruluklu fark şeması ifade edilir.

Teorem 3.1.2.1. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayılarının (2.1.1) koşulunu sağladığını ve $\phi^h, \zeta^h, \eta^h \in D(A_h^x) \cap D(C_h^x), \{f_k^h\}_{k=1}^{N-1} \in C(L_{2h})$ olduğunu varsayalım. O halde, (3.1.2.2) ve (3.1.2.3) fark şemalarının $\left(\{v_k^h\}_{k=1}^{N-1}, p^h\right)$ çözümü aşağıdaki kararlılık kestirimlerini sağlar:

$$\left\| \{v_k^h\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(0T, L_{2h})} \leq M(\delta) \left[\left\| \phi^h \right\|_{L_{2h}} + \left\| \zeta^h \right\|_{L_{2h}} + \left\| \eta^h \right\|_{L_{2h}} + \left\| \{f_k^h\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(L_{2h})} \right], \quad (3.1.2.4)$$

$$\left\| (A_h^x)^{-1} p^h \right\|_{L_{2h}} \leq M(\delta) \left[\left\| \phi^h \right\|_{L_{2h}} + \left\| \zeta^h \right\|_{L_{2h}} + \left\| \eta^h \right\|_{L_{2h}} + \left\| \{f_k^h\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(L_{2h})} \right]. \quad (3.1.2.5)$$

Burada $M(\delta)$ sabitleri, verilen ϕ^h, ζ^h, η^h elemanlarından ve $\{f_k^h\}_{k=1}^{N-1}$ 'den bağımsızdır.

Teorem 3.1.2.2. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayılarının (2.1.1) koşulunu sağladığını ve $\phi^h, \zeta^h, \eta^h \in D(A_h^x) \cap D(C_h^x), \{f_k^h\}_{k=1}^{N-1} \in C(L_{2h})$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde, (3.1.2.2) ve (3.1.2.3) fark şemalarının $\left(\{v_k^h\}_{k=1}^{N-1}, p^h\right)$ çözümü, aşağıdaki hemen-hemen koersif kararlılık eşitsizliğini sağlar:

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \frac{(v_{k+1}^h - 2v_k^h + v_{k-1}^h)}{\tau^2} \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(L_{2h})} + \left\| \{C_h^x v_k^h\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(W_{2h}^2)} + \left\| p^h \right\|_{L_{2h}} \\ & \leq M(\delta) \left[\left\| C_h^x \phi^h \right\|_{W_{2h}^2} + \left\| C_h^x \zeta^h \right\|_{W_{2h}^2} + \left\| C_h^x \eta^h \right\|_{W_{2h}^2} + \ln \left(\frac{1}{\tau + h} \right) \left\| \{f_k^h\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(L_{2h})} \right. \\ & \quad \left. + \left\| A_h^x \phi^h \right\|_{W_{2h}^2} + \left\| A_h^x \zeta^h \right\|_{W_{2h}^2} + \left\| A_h^x \eta^h \right\|_{W_{2h}^2} \right] \end{aligned} \quad (3.1.2.6)$$

Burada $M(\delta)$ sabiti, verilen $\tau, \phi^h, \zeta^h, \eta^h$ elemanlarına ve $\{f_k^h\}_{k=1}^{N-1}$ 'ya bağımlı değildir.

Teorem 3.1.2.3. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayılarının (2.1.1) koşulunu sağladığını ve $\phi^h, \zeta^h, \eta^h \in D(A_h^x), \{f_k^h\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_{2h})$ ($0 < \alpha < 1$) olduğunu varsayalım. Bu takdirde,

(3.1.2.2) ve (3.1.2.3) fark şemalarının $\left(\{v_k^h\}_{k=1}^{N-1}, p^h\right)$ çözümü için aşağıdaki koersif kararlılık kestirimi geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \tau^{-2} (v_{k+1}^h - 2v_k^h + v_{k-1}^h) \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_{2h})} + \left\| \{v_k^h\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(W_{2h}^2)} + \|p^h\|_{L_{2h}} \\ & \leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{f_k^h\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_{2h})} + \|\phi^h\|_{W_{2h}^2} + \|\zeta^h\|_{W_{2h}^2} + \|\eta^h\|_{W_{2h}^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.1.2.7)$$

Burada $M(\delta)$ sabiti, verilen $\tau, \alpha, \phi^h, \zeta^h, \eta^h$ elemanlarından ve $\{f_k^h\}_{k=1}^{N-1}$ 'dan bağımsızdır.

Teorem 3.1.2.1, Teorem 3.1.2.2 ve Teorem 3.1.2.3'ün ispatları, A_h^x fark operatörünün L_{2h} uzayındaki simetri özelliğine ve soyut fark problemi için gösterilen 2.2.1-2.2.3 ve 2.3.1-2.3.3 teoremlerine dayanmaktadır.

Ayrıca Teorem 3.1.2.2'nin ispatı A_h^x operatörünün pozitifliğine, önceki bölümlerde soyut fark problemi için ifade edilen 2.2.2 ve 2.3.2 teoremleri ile Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) çalışmasında geçen,

$$\min \left\{ \ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \left| \ln \|D_h^x\|_{L_{2h}} \right| \right\} \leq M \ln \left(\frac{1}{1+\tau} \right) \quad (3.1.1.15) \text{ eşitsizliğine dayanmaktadır.}$$

3.2. Sayısal Uygulamalar

Çalışmanın bu kısmında eliptik denklem için çok noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters Dirichlet ve Neumann tipi sınır değer probleminin sayısal sonuçları verilecektir.

3.2.1. Çok Noktalı Yerel Olmayan Sınır Koşullu Ters Dirichlet Tipi Eliptik Sınır Değer Probleminin Sayısal Sonuçları

Çok noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters Dirichlet tipi sınır değer probleminin sayısal sonuçları için aşağıdaki eliptik problemi ele alalım.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + v(t,x) = f(t,x) + p(x), 0 < x < 1, 0 < t < 1, \\ f(t,x) = [2(\pi^2 + 1)t^3 + (\pi^2 - 11)t] \sin(\pi x), \\ v(0,x) = \sin(\pi x) = \phi(x), 0 \leq x \leq 1, \\ v(\gamma,x) = (2\gamma^3 + \gamma + 1) \sin(\pi x) = \zeta(x), 0 \leq x \leq 1, \\ v(1,x) - \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i, x) = \left[3 - 2 \sum_{i=1}^q k_i (\lambda_i^3 + \lambda_i) \right] \sin(\pi x), 0 \leq x \leq 1, \\ v(t,0) = v(t,1) = 0, 0 \leq t \leq 1. \end{array} \right. \quad (3.2.1.1)$$

(3.2.1.1) probleminin gerçek çözümleri $v(t,x) = (2t^3 + t + 1) \sin(\pi x)$ ve $p(x) = (\pi^2 + 1) \sin(\pi x)$ 'dir. (3.2.1.1) probleminin $v(t,x)$ çözümü için $v(t,x) = u(t,x) + A^{-1}p(x)$ özdeşliğini kullanarak,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x) = f(t,x), 0 < x < 1, 0 < t < 1, \\ u(0,x) - u(\gamma,x) = -(2\gamma^3 + \gamma) \sin(\pi x), 0 \leq x \leq 1, \\ u(1,x) - \sum_{i=1}^q k_i u(\lambda_i, x) = \left[3 - 2 \sum_{i=1}^q k_i (\lambda_i^3 + \lambda_i) \right] \sin(\pi x), 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \quad (3.2.1.2)$$

yardımcı problemini elde edelim.

(3.2.1.2) probleminin yaklaşık çözümünü $[0,1]_\tau \times [0,1]_h$ kümesinde ele alalım. Grid noktalar uzayı, $[0,1]_\tau \times [0,1]_h = \{(t_k, x_n) : t_k = k\tau, k = 1, \dots, N-1, N\tau = 1, x_n = nh, n = 1, \dots, M-1, Mh = 1\}$ ile tanımlanır.

Üçüncü mertebeden doğruluklu (3.1.1.9) fark şemasını uygulayarak ve

$$\omega'(x_n) = \frac{\omega(x_{n+1}) - \omega(x_{n-1}))}{2h} + O(h^2),$$

$$\omega''(x_n) = \frac{\omega(x_{n+1}) - 2\omega(x_n) + \omega(x_{n-1}))}{h^2} + O(h^2)$$

$$\omega''(0) = \frac{2\omega(0) - 5\omega(h) + 4\omega(2h) - \omega(3h)}{h^2} + O(h^2),$$

$$\omega''(1) = \frac{2\omega(1) - 5\omega(1-h) + 4\omega(1-2h) - \omega(1-3h)}{h^2} + O(h^2) \text{ yaklaşım formüllerini de}$$

kullanarak, (3.2.1.2) probleminin t için üçüncü mertebeden ve x için ikinci mertebeden doğruluklu fark şeması,

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k + \frac{\tau^2}{12} \left[-\frac{1}{h^2} \left(-\frac{u_{n+2}^k - 2u_{n+1}^k + u_n^k}{h^2} + u_{n+1}^k \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2}{h^2} \left(-\frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k \right) - \frac{1}{h^2} \left(-\frac{u_n^k - 2u_{n-1}^k + u_{n-2}^k}{h^2} + u_{n-1}^k \right) - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k \right] \right] \\
& = \theta_n^k, \\
& \theta_n^k = \left[2(\pi^2 + 1)t_k^3 + (\pi^2 - 11)t_k \right] \sin(\pi x_n) + \frac{\tau^2}{12} (\pi^2 + 1)^2 (2t_k^3 + t_k) \sin(\pi x_n), \\
& k = 1, \dots, N-1, n = 2, \dots, M-2, \\
& u_0^k = u_M^k = 0, u_1^k = \frac{4}{5}u_2^k - \frac{1}{5}u_3^k, u_{M-1}^k = \frac{4}{5}u_{M-2}^k - \frac{1}{5}u_{M-3}^k, \\
& k = 0, \dots, N, \\
& u_n^0 - \left\{ \left[-\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] u_n^{l_0-1} + [1 - \mu_0^2] u_n^{l_0} + \left[\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] u_n^{l_0+1} \right\} \\
& = -(2\gamma^3 + \gamma) \sin(\pi x_n), n = 0, \dots, M, \\
& u_n^N - \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left[-\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] u_n^{l_i-1} + [1 - \mu_i^2] u_n^{l_i} + \left[\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] u_n^{l_i+1} \right\} \\
& = \left[3 - 2 \sum_{i=1}^q k_i (\lambda_i^3 + \lambda_i) \right] \sin(\pi x_n), n = 0, \dots, M, \\
& \mu_0 = \frac{\gamma}{\tau} - l_0, \mu_i = \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i, l_i = \left\lfloor \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rfloor, l_0 = \left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor
\end{aligned} \tag{3.2.1.3}$$

biçiminde ifade edilir.

(3.1.1.8) formülü uygulanarak x için ikinci mertebeden doğrulukta p 'nin değerleri,

$$p_n = -\frac{(\phi_{n+1} - u_{n+1}^0) - 2(\phi_n - u_n^0) + (\phi_{n-1} - u_{n-1}^0)}{h^2} + (\phi_n - u_n^0), n = 1, \dots, M-1 \tag{3.2.1.4}$$

olarak bulunur.

$$U_s = \begin{bmatrix} u_s^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_s^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, s = n-2, n-1, n, n+1, n+2$$

ve

$$\theta_n = \begin{bmatrix} \theta_n^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_n^N \end{bmatrix}, n = 1, \dots, M-1,$$

$$\theta_n^0 = -(2\gamma^3 + \gamma) \sin(\pi x_n),$$

$$\theta_n^N = \left[3 - 2 \sum_{i=1}^q k_i (\lambda_i^3 + \lambda_i) \right] \sin(\pi x_n),$$

$$\theta_n^k = \left[2(\pi^2 + 1)t_k^3 + (\pi^2 - 11)t_k \right] \sin(\pi x_n) + \frac{\tau^2}{12} (\pi^2 + 1)^2 (2t_k^3 + t_k) \sin(\pi x_n),$$

$$k = 1, \dots, N-1, n = 1, \dots, M-1 \quad (3.2.1.5)$$

olmak üzere, (3.2.1.3) fark şemasını matris formunda

$$U_0 = \vec{0},$$

$$U_M = \vec{0},$$

$$AU_{n+2} + BU_{n+1} + CU_n + DU_{n-1} + EU_{n-2} = I\theta_n, n = 2, \dots, M-2,$$

$$U_1 = \frac{4}{5}U_2 - \frac{1}{5}U_3,$$

$$U_{M-1} = \frac{4}{5}U_{M-2} - \frac{1}{5}U_{M-3} \quad (3.2.1.6)$$

yazabiliriz. Burada A, B, C, D, E $(N+1) \times (N+1)$ tipinde kare matrisler olup, θ_n ise

$(N+1) \times 1$ tipinde bir sütun matris, I ise $(N+1) \times (N+1)$ tipinde bir birim matristir.

A, B, C, D ve E matrisleri sırasıyla

$$A = E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \quad (3.2.1.7)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & y_0 & z_0 & g_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & c & r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & c & r & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & c & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & c & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & r & c & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r & c & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & y_1 & z_1 & g_2 & \dots & y_3 & z_3 & g_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.1.8)$$

$$B = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \quad (3.2.1.9)$$

şeklindedir. Matrislerdeki a, r, b, c

$$a = \frac{\tau^2}{12h^4}, \quad r = -\frac{1}{\tau^2}, \quad b = -\frac{1}{h^2} - \frac{\tau^2}{3h^4} - \frac{\tau^2}{6h^2}, \quad c = 1 + \frac{2}{\tau^2} + \frac{2}{h^2} + \frac{\tau^2}{12} \left(\frac{6}{h^4} + \frac{4}{h^2} + 1 \right) \quad (3.2.1.10)$$

ile diğer katsayılar ise,

$$\begin{aligned} y_0 &= -\left[-\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right], z_0 = -[1 - \mu_0^2], g_0 = -\left[\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right], \\ y_1 &= -\left[-\frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1^2 \right], z_1 = -[1 - \mu_1^2], g_1 = -\left[\frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1^2 \right], \\ y_2 &= -\left[-\frac{1}{2}\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_2^2 \right], z_2 = -[1 - \mu_2^2], g_2 = -\left[\frac{1}{2}\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_2^2 \right], \\ y_3 &= -\left[-\frac{1}{2}\mu_3 + \frac{1}{2}\mu_3^2 \right], z_3 = -[1 - \mu_3^2], g_3 = -\left[\frac{1}{2}\mu_3 + \frac{1}{2}\mu_3^2 \right], \\ &\dots \qquad \qquad \qquad \dots \qquad \qquad \dots \\ y_i &= -\left[-\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right], z_i = -[1 - \mu_i^2], g_i = -\left[\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right], \\ \mu_0 &= \frac{\gamma}{\tau} - l_0, \mu_i = \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i \end{aligned} \quad (3.2.1.11)$$

biçiminde ifade edilir.

α_n ve β_n ($n=1, \dots, M-1$), $(N+1) \times (N+1)$ tipinde kare matrisler, φ_n ($n=1, \dots, M-1$) ise $(N+1) \times 1$ tipinde bir sütun matris olmak üzere, (3.2.1.6) denkleminin çözümü (Samarskii, Nikolaev, 1989), $U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}U_{n+2} + \varphi_n, n=M-2, \dots, 0$ formülüyle aranır. (3.2.1.6) fark denkleminin çözümü için, $\varphi_0 = \varphi_1 = \vec{0}$ ve $\alpha_0 = \beta_0$ $(N+1) \times (N+1)$ tipinde sıfır kare matris, $\alpha_1 = \frac{4}{5}I, \beta_1 = \frac{-1}{5}I$ olmak üzere,

$$F_n = (C + D\alpha_{n-1} + E\beta_{n-2} + E\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}),$$

$$\alpha_{n+1} = -F_n^{-1}(B + D\beta_n + E\alpha_{n-1}\beta_n),$$

$$\beta_{n+1} = -F_n^{-1}A,$$

$\varphi_n = F_n^{-1}(I\theta_n - D\varphi_{n-1} - E\alpha_{n-1}\varphi_{n-1} - E\varphi_{n-2}), n = 2, \dots, M-2$ formülleri geçerlidir. Ayrıca bilinmeyen U_0 ve U_{M-1} ise

$$U_M = \vec{0}, D_M = (\beta_{M-2} + 5I) - (4I - \alpha_{M-2})\alpha_{M-1},$$

$$U_{M-1} = D_M^{-1}[(4I - \alpha_{M-2})\varphi_{M-1} - \varphi_{M-2}] \text{ eşitlikleriyle bulunur.}$$

Şimdi (3.2.1.2) probleminin dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemasını ifade edelim. Bunun için, dördüncü mertebeden (3.1.1.10) doğruluklu fark şemasını uygulayarak ve

$$\omega'(x_n) = \frac{\omega(x_{n+1}) - \omega(x_{n-1}))}{2h} + O(h^2),$$

$$\omega''(x_n) = \frac{\omega(x_{n+1}) - 2\omega(x_n) + \omega(x_{n-1}))}{h^2} + O(h^2),$$

$$\omega''(0) = \frac{2\omega(0) - 5\omega(h) + 4\omega(2h) - \omega(3h)}{h^2} + O(h^2),$$

$$\omega''(1) = \frac{2\omega(1) - 5\omega(1-h) + 4\omega(1-2h) - \omega(1-3h)}{h^2} + O(h^2) \text{ yaklaşım formüllerini de}$$

kullanarak, t için dördüncü mertebeden ve x için ikinci mertebeden doğruluklu fark şeması,

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k + \frac{\tau^2}{12} \left[-\frac{1}{h^2} \left(-\frac{u_{n+2}^k - 2u_{n+1}^k + u_n^k}{h^2} + u_{n+1}^k \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2}{h^2} \left(-\frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k \right) - \frac{1}{h^2} \left(-\frac{u_n^k - 2u_{n-1}^k + u_{n-2}^k}{h^2} + u_{n-1}^k \right) - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k \right] \right] \\
& = \theta_n^k, \\
& \theta_n^k = \left[2(\pi^2 + 1)t_k^3 + (\pi^2 - 11)t_k \right] \sin(\pi x_n) + \frac{\tau^2}{12} (\pi^2 + 1)^2 (2t_k^3 + t_k) \\
& \times \sin(\pi x_n), \quad k = 1, \dots, N-1, n = 2, \dots, M-2, \\
& u_0^k = u_M^k = 0, \quad u_1^k = \frac{4}{5}u_2^k - \frac{1}{5}u_3^k, \quad u_{M-1}^k = \frac{4}{5}u_{M-2}^k - \frac{1}{5}u_{M-3}^k, \\
& k = 0, \dots, N, \\
& u_n^0 - \mu_{0,1}u_n^{l_0-2} - \mu_{0,2}u_n^{l_0-1} - \mu_{0,3}u_n^{l_0} - \mu_{0,4}u_n^{l_0+1} - \mu_{0,5}u_n^{l_0+2} \\
& = -(2\gamma^3 + \gamma) \sin(\pi x_n), \quad n = 0, \dots, M, \\
& u_n^N - \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \mu_{i,1}u_n^{l_i-2} + \mu_{i,2}u_n^{l_i-1} + \mu_{i,3}u_n^{l_i} + \mu_{i,4}u_n^{l_i+1} + \mu_{i,5}u_n^{l_i+2} \right\} \\
& = \left[3 - 2 \sum_{i=1}^q k_i (\lambda_i^3 + \lambda_i) \right] \sin(\pi x_n), \quad n = 0, \dots, M, \\
& \mu_0 = \frac{\gamma}{\tau} - l_0, l_0 = \left\lceil \frac{\gamma}{\tau} \right\rceil, \quad \mu_i = \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i, l_i = \left\lceil \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rceil
\end{aligned} \tag{3.2.1.12}$$

şeklinde oluşturulur.

(3.2.1.12) fark şeması (3.2.1.6) matris formunda yazılabilir. Burada A, B, D, E (3.2.1.7), (3.2.1.9) matrisleriyle, θ_n ise (3.2.1.5) ile ifade edilir. C matrisi ise aşağıdaki forma dönüşür.

$$C = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{0,1} & \mu_{0,2} & \mu_{0,3} & \mu_{0,4} & \mu_{0,5} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
r & c & r & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & r & c & r & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & r & c & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & r & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r & c & r & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r & c & r \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{i,1} & \mu_{i,2} & \mu_{i,3} & \mu_{i,4} & \mu_{i,5} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{3.2.1.13}$$

Buradaki c ve r (3.2.1.10) ile aynı olup, diğer katsayılar ise

$$\mu_{0,1} = -\left[\frac{1}{12} \mu_0 - \frac{1}{12} \mu_0^3 \right], \mu_{0,2} = -\left[-\frac{2}{3} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 + \frac{1}{6} \mu_0^3 \right], \mu_{0,3} = -[1 - \mu_0^2],$$

$$\begin{aligned}
\mu_{0,4} &= -\left[\frac{2}{3}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 - \frac{1}{6}\mu_0^3\right], \mu_{0,5} = -\left[-\frac{1}{12}\mu_0 + \frac{1}{12}\mu_0^3\right], \\
&\dots \dots \\
\mu_{i,1} &= -\left[\frac{1}{12}\mu_i - \frac{1}{12}\mu_i^3\right], \mu_{i,2} = -\left[-\frac{2}{3}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 + \frac{1}{6}\mu_i^3\right], \mu_{i,3} = -[1 - \mu_i^2], \\
\mu_{i,4} &= -\left[\frac{2}{3}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 - \frac{1}{6}\mu_i^3\right], \mu_{i,5} = -\left[-\frac{1}{12}\mu_i + \frac{1}{12}\mu_i^3\right], \\
\mu_0 &= \frac{\gamma}{\tau} - l_0, \mu_i = \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i, i = 1, \dots, q
\end{aligned} \tag{3.2.1.14}$$

biçimindedir.

Şimdi MATLAB programlarını kullanarak elde edilen sayısal analiz sonuçlarını verelim. Sayısal çözümler farklı N, M ve T=1 değerleri için elde edilmiştir. u_n^k , v_n^k grid fonksiyonları; (t_k, x_n) grid noktalarındaki yardımcı yerel olmayan ve ters problemlerin fark şemalarının sayısal çözümlerini, p_n grid fonksiyonu ise; x_n grid noktalarındaki bilinmeyen p fonksiyonunun sayısal çözümünü temsil eder. $v(t_k, x_n)$ ise gerçek çözümün (t_k, x_n) noktasındaki değeridir. Gerçek çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırılması

$$\begin{aligned}
Hu_M^N &= \max_{1 \leq k \leq N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} |u(t_k, x_n) - u_n^k|^2 h \right)^{\frac{1}{2}}, \\
Hv_M^N &= \max_{1 \leq k \leq N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} |v(t_k, x_n) - v_n^k|^2 h \right)^{\frac{1}{2}}, \\
Hp_M &= \left(\sum_{n=1}^{M-1} |p(x_n) - p_n|^2 h \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

hata formülleriyle yapılmıştır.

MATLAB programını kullanarak (3.2.1.1) probleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Sayısal çözümler bir, iki ve üç noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters eliptik problemleri için hesaplanmıştır.

Tablo 1'den Tablo 18'e kadar olan tablolarda gerçek çözümler ile fark şemaları arasındaki hata analizleri verilmektedir. Bu tablolar üçüncü mertebeden doğruluklu fark şemasında N=10, M=32; N=20, M=90; N=40, M=254 için oluşturulmuştur. Dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemasında ise N=10, M=100; N=20, M=400; N=40, M=1600 için oluşturulmuştur. Sayısal deneylerden elde edilen sonuçları

değerlendirdiğimizde, dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemasının üçüncü mertebeden doğruluklu fark şemasından daha iyi sonuçlar verdiği anlaşılmaktadır.

Tablo 1'den Tablo 6'ya kadar tablolarda bir noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters Dirichlet tipi sınır değer probleminin gerçek çözümüyle üçüncü ve dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemalarının yaklaşık çözümleri arasındaki hatalar $q = 1, \lambda_1 = 0.5, k = 1$ değerleriyle gösterilmektedir.

Tablo 1. (3.2.1.3) bir noktalı 3. mertebeden doğrulukta u için hatalar

N=10, M=32	N=20, M=90	N=40, M=254
5.48×10^{-4}	7.04×10^{-5}	8.85×10^{-6}

Tablo 2. (3.2.1.4) bir noktalı 3. mertebeden doğrulukta p için hatalar

N=10, M=32	N=20, M=90	N=40, M=254
1.04×10^{-2}	1.32×10^{-3}	1.5×10^{-4}

Tablo 3. (3.2.1.1) bir noktalı 3. mertebeden doğrulukta v için hatalar

N=10, M=32	N=20, M=90	N=40, M=254
1.12×10^{-4}	1.44×10^{-5}	1.81×10^{-6}

Tablo 4. (3.2.1.12) bir noktalı 4. mertebeden doğrulukta u için hatalar

N=10, M=100	N=20, M=400	N=40, M=1600
5.70×10^{-5}	3.57×10^{-6}	2.6×10^{-7}

Tablo 5. (3.2.1.4) bir noktalı 4. mertebeden doğrulukta p için hatalar

N=10, M=100	N=20, M=400	N=40, M=1600
1.06×10^{-3}	6.67×10^{-5}	4.23×10^{-6}

Tablo 6. (3.2.1.1) bir noktalı 4. mertebeden doğrulukta v için hatalar

N=10, M=100	N=20, M=400	N=40, M=1600
1.70×10^{-5}	7.3×10^{-7}	4.72×10^{-8}

Tablo 7'den Tablo 12'ye kadar olan tablolarda iki noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters Dirichlet tipi sınır değer probleminin gerçek çözümüyle üçüncü ve dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemalarının yaklaşık çözümleri arasındaki hatalar

$q = 2, \lambda_1 = 0.7, \lambda_2 = 0.8, k_1 = \frac{2}{5}, k_2 = \frac{3}{5}$ değerleriyle gösterilmektedir.

Tablo 7. (3.2.1.1) iki noktalı 3. mertebeden doğrulukta u için hatalar

N=10, M=32	N=20, M=90	N=40, M=254
6.92×10^{-4}	8.88×10^{-5}	1.12×10^{-6}

Tablo 8. (3.2.1.4) iki noktalı 3. mertebeden doğrulukta p için hatalar

N=10, M=32	N=20, M=90	N=40, M=254
1.32×10^{-2}	1.65×10^{-3}	2.07×10^{-4}

Tablo 9. (3.2.1.4) iki noktalı 3. mertebeden doğrulukta v için hatalar

N=10, M=32	N=20, M=90	N=40, M=254
2.00×10^{-4}	2.57×10^{-5}	3.23×10^{-6}

Tablo 10. (3.2.1.12) iki noktalı 4. mertebeden doğrulukta u için hatalar

N=10, M=100	N=20, M=400	N=40, M=1600
7.27×10^{-5}	4.55×10^{-6}	2.94×10^{-7}

Tablo 11. (3.2.1.4) iki noktalı 4. mertebeden doğrulukta p için hatalar

N=10, M=100	N=20, M=400	N=40, M=1600
1.34×10^{-3}	8.38×10^{-5}	5.34×10^{-6}

Tablo 12. (3.2.1.1) iki noktalı 4. mertebeden doğrulukta v için hatalar

N=10, M=100	N=20, M=400	N=40, M=1600
2.11×10^{-5}	1.32×10^{-6}	8.51×10^{-8}

Tablo 13 ile Tablo 18 arasındaki tablolarda üç noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters Dirichlet tipi sınır değer probleminin gerçek çözümünü üçüncü ve dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemalarının yaklaşık çözümler arasındaki hatalar $q = 3, \lambda_1 = 0.2, \lambda_2 = 0.3, \lambda_3 = 0.4, k_1 = \frac{1}{5}, k_2 = \frac{3}{10}, k_3 = \frac{1}{2}$ değerleriyle gösterilmektedir.

Tablo 13. (3.2.1.3) üç noktalı 3. mertebeden doğrulukta u için hatalar

N=10, M=32	N=20, M=90	N=40, M=254
4.97×10^{-4}	6.39×10^{-5}	8.04×10^{-6}

Tablo 14. (3.2.1.4) üç noktalı 3. mertebeden doğrulukta p için hatalar

N=10, M=32	N=20, M=90	N=40, M=254
9.59×10^{-3}	1.21×10^{-3}	1.53×10^{-4}

Tablo 15. (3.2.1.1) üç noktalı 3. mertebeden doğrulukta v için hatalar

N=10, M=32	N=20, M=90	N=40, M=254
1.34×10^{-4}	1.71×10^{-5}	2.16×10^{-6}

Tablo 16. (3.2.1.12) üç noktalı 4. mertebeden doğrulukta u için hatalar

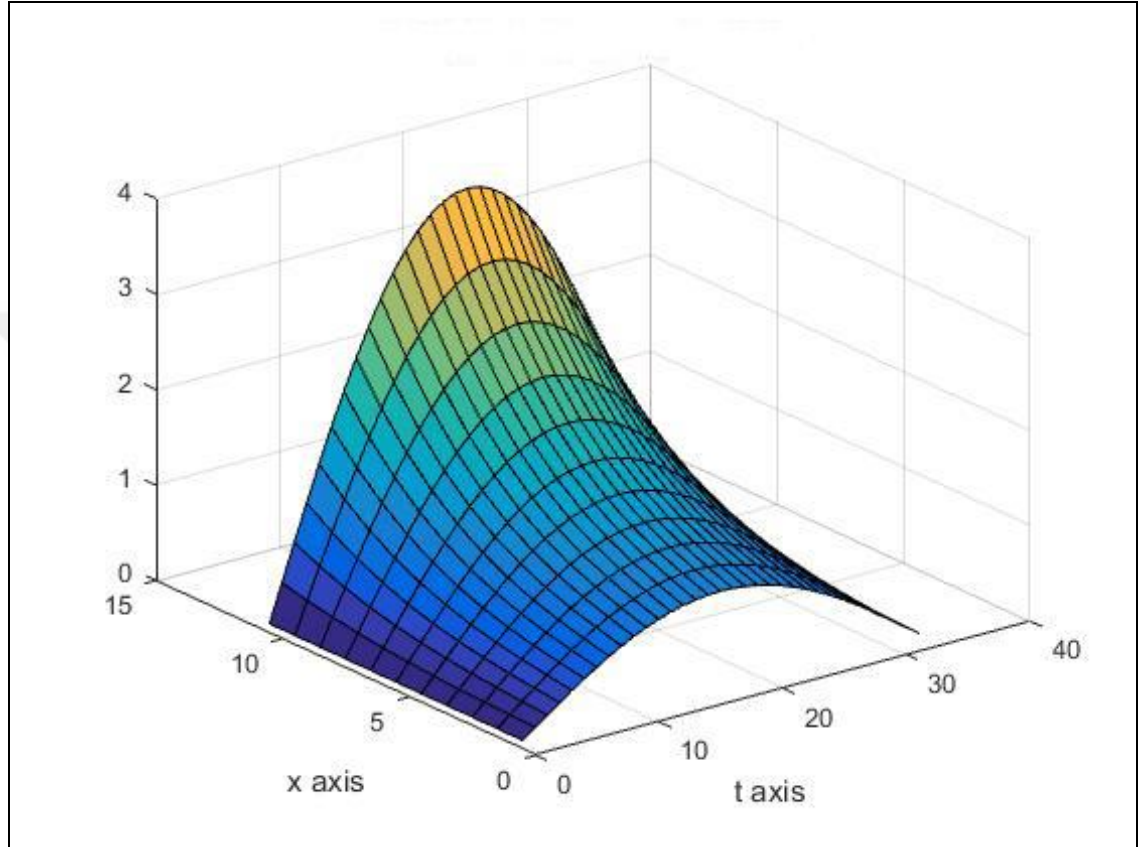
N=10, M=100	N=20, M=400	N=40, M=1600
5.18×10^{-5}	2.24×10^{-6}	2.08×10^{-7}

Tablo 17. (3.2.1.4) üç noktalı 4. mertebeden doğrulukta p için hatalar

N=10, M=100	N=20, M=400	N=40, M=1600
9.85×10^{-4}	6.16×10^{-5}	3.90×10^{-6}

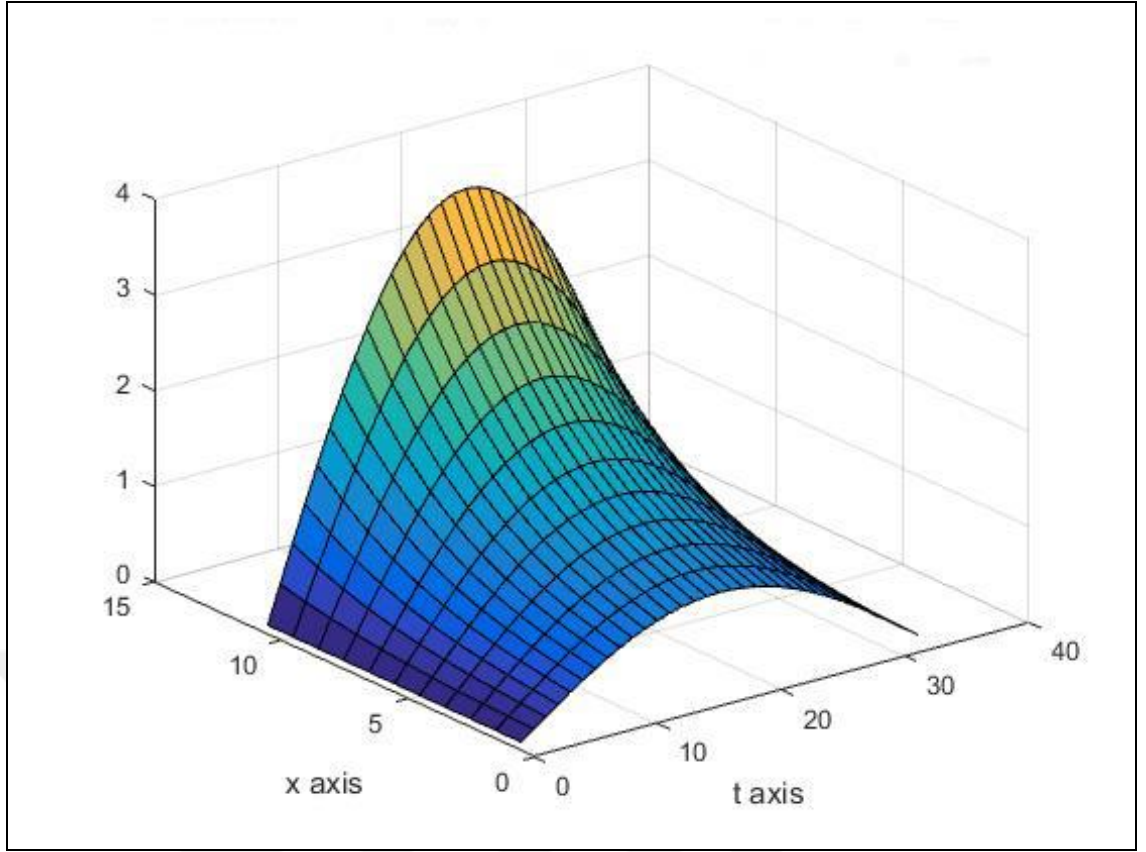
Tablo 18. (3.2.1.1) üç noktalı 4. mertebeden doğrulukta v için hatalar

N=10, M=100	N=20, M=400	N=40, M=1600
1.39×10^{-5}	8.7×10^{-7}	5.63×10^{-8}



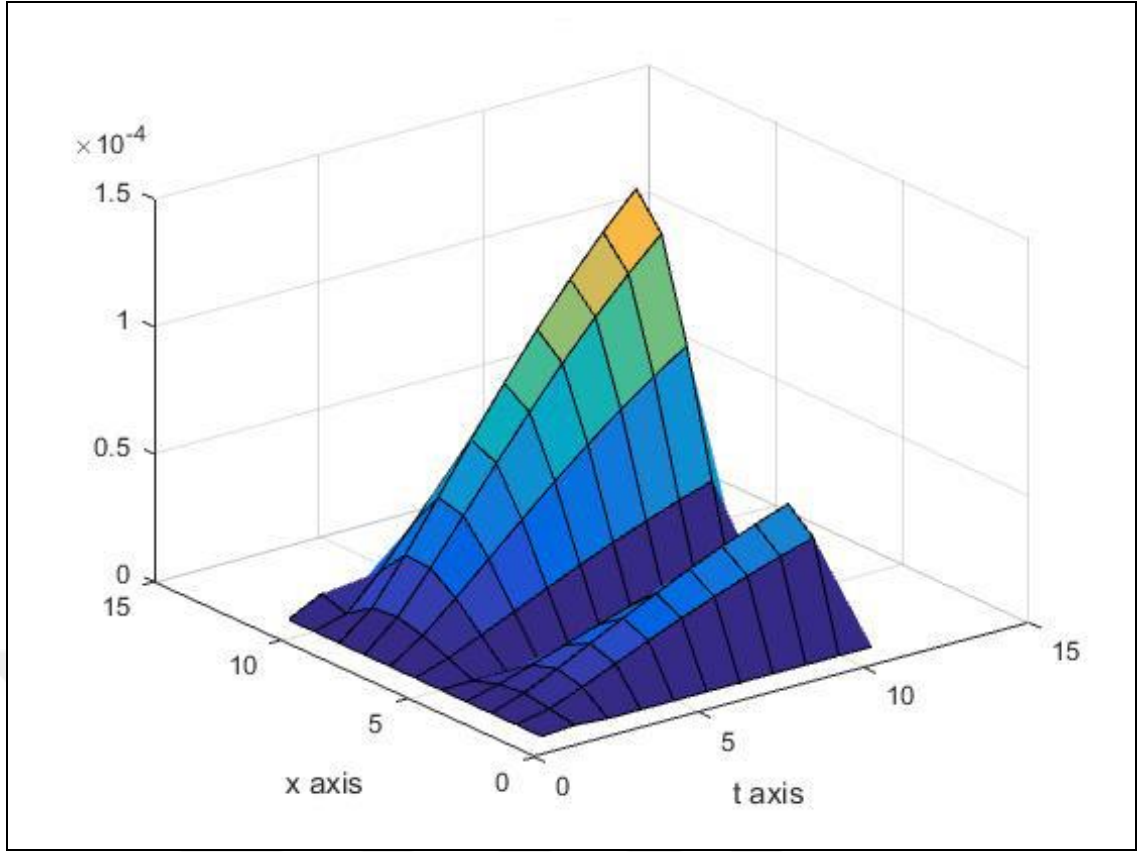
Şekil 1. (3.2.1.1) DSDP'nin N=10, M=32 için gerçek çözüm grafiği

Şekil 1, yerel olmayan sınır koşullu ters Dirichlet sınır değer probleminin N=10, M=32 için gerçek çözüm grafiğini göstermektedir.



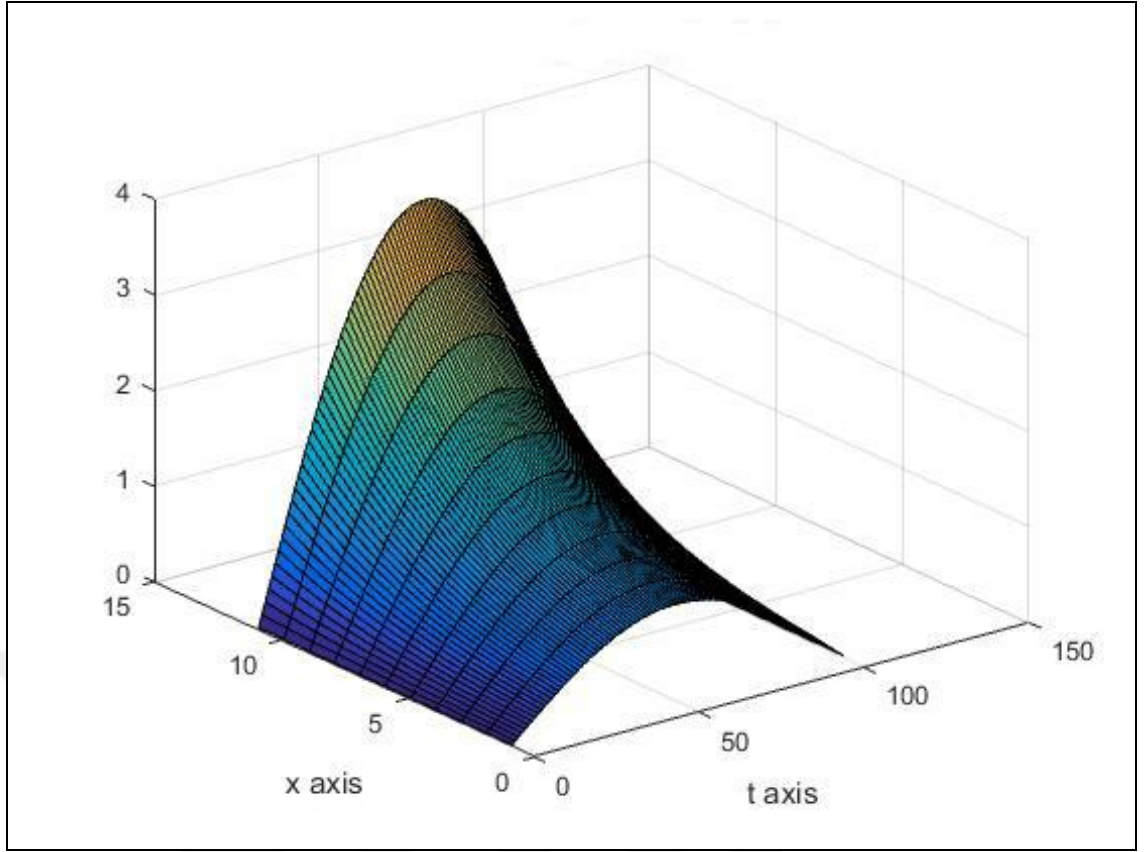
Şekil 2. (3.2.1.1) DSDP'nin üç noktalı ÜMDFŞ yaklaşık çözüm grafiği

Şekil 2, yerel olmayan sınır koşullu ters Dirichlet sınır değer probleminin üçüncü mertebeden doğruluklu fark şemasının yaklaşık çözüm grafiğini göstermektedir.



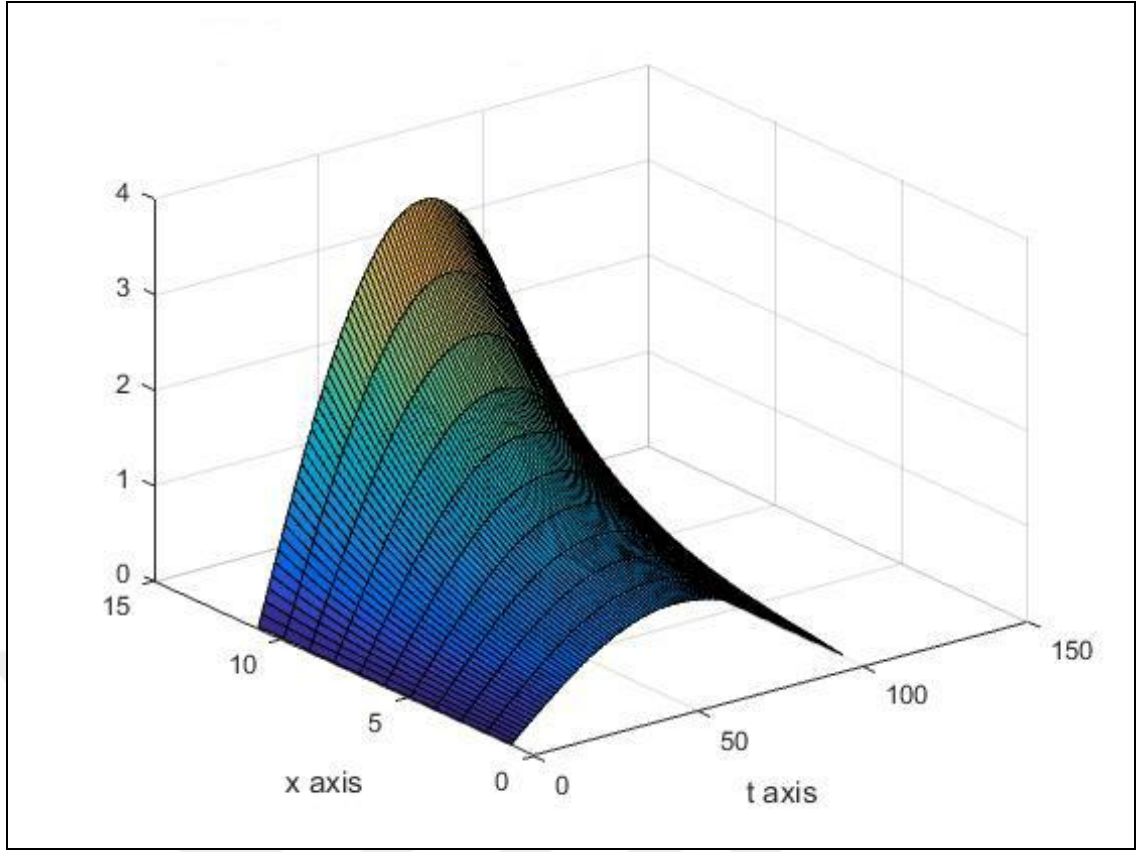
Şekil 3. $M=32$ için (3.2.1.1) DSDP'nin gerçek çözümü ile üç noktalı ÜMDFŞ yaklaşık çözüm arasındaki farkın mutlak değer grafiği

Şekil 3, $M=32$ için hesaplanan ters Dirichlet sınır değer probleminin gerçek çözüm ile üçüncü mertebeden doğruluklu fark şemasının yaklaşık çözüm arasındaki farkın mutlak değer grafiğini göstermektedir.



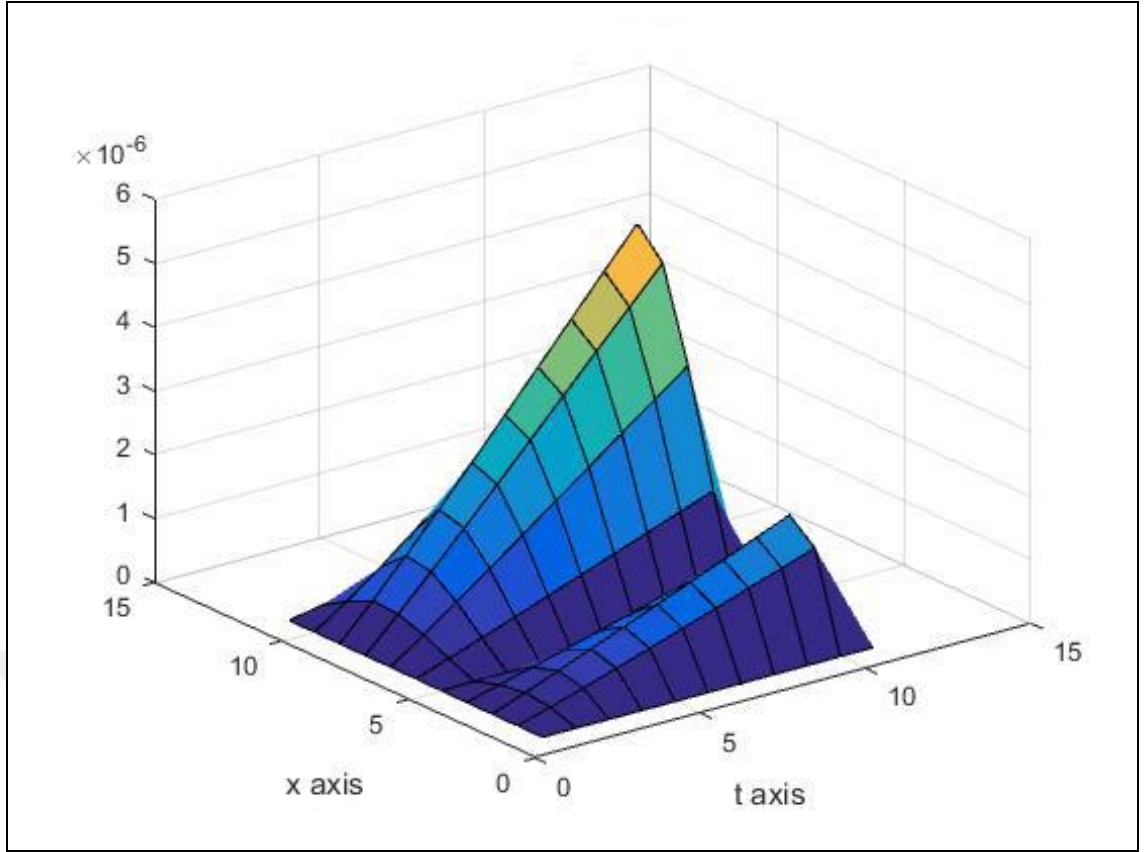
Şekil 4. (3.2.1.1) DSDP'nin $N=10$, $M=100$ için gerçek çözüm grafiği

Şekil 4, Yerel olmayan sınır koşullu ters Dirichlet sınır değer probleminin $N=10$, $M=100$ için gerçek çözüm grafiğini göstermektedir.



Şekil 5. (3.2.1.1) DSDP'nin üç noktalı DMDFŞ yaklaşık çözüm grafiği

Şekil 5, Yerel olmayan sınır koşullu ters Dirichlet sınır değer probleminin dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemasının yaklaşık çözüm grafiğini göstermektedir.



Şekil 6. $M=100$ için (3.2.1.1) DSDP'nin gerçek çözümü ile üç noktalı DMDFŞ yaklaşık çözüm arasındaki farkın mutlak değer grafiği

Şekil 6, $M=100$ için hesaplanan ters Dirichlet sınır değer probleminin gerçek çözüm ile dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemasının yaklaşık çözüm arasındaki farkın mutlak değer grafiğini göstermektedir.

3.2.2. Çok Noktalı Yerel Olmayan Sınır Koşullu Ters Neumann Tipi Eliptik Sınır Değer Probleminin Sayısal Sonuçları

Çok noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters Neumann tipi sınır değer probleminin sayısal sonuçları için aşağıdaki eliptik problemini ele alalım.

$$\begin{cases}
 -\frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} + v(t, x) = f(t, x) + p(x), 0 < x < 1, 0 < t < 1, \\
 f(t, x) = \left[(2\pi^2 \sin(\pi t) + 2\pi \cos(\pi t))e^{-t} + (\pi^2 + 1)t \right] \cos(\pi x), \\
 v(0, x) = \cos(\pi x) = \phi(x), 0 \leq x \leq 1, \\
 v(\gamma, x) = (\sin(\pi \gamma)e^{-\gamma} + \gamma + 1) \cos(\pi x) = \zeta(x), 0 \leq x \leq 1, \\
 v(1, x) - \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i, x) = \left[1 - \sum_{i=1}^q k_i (\sin(\pi \lambda_i) e^{-\lambda_i} + \lambda_i) \right] \cos(\pi x), \\
 0 \leq x \leq 1, \\
 v_x(t, 0) = v_x(t, 1) = 0, 0 \leq t \leq 1.
 \end{cases} \quad (3.2.2.1)$$

$v(t, x) = (\sin(\pi t)e^{-t} + t + 1)\cos(\pi x)$ ve $p(x) = (\pi^2 + 1)\cos(\pi x)$ fonksiyonlarının (3.2.2.1) probleminin gerçek çözümleri olduğu açıktır. (3.2.2.1) probleminin $v(t, x)$ çözümünü için $v(t, x) = u(t, x) + A^{-1}p(x)$ özdeşliğini kullanarak, $u(t, x)$ için

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + u(t, x) = f(t, x), 0 < x < 1, 0 < t < 1, \\ u(0, x) - u(\gamma, x) = -(\sin(\pi\gamma)e^{-\gamma} + \gamma)\cos(\pi x), 0 \leq x \leq 1, \\ u(1, x) - \sum_{i=1}^q k_i u(\lambda_i, x) = \left[1 - \sum_{i=1}^q k_i (\sin(\pi\lambda_i)e^{-\lambda_i} + \lambda_i) \right] \cos(\pi x), \\ 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (3.2.2.2)$$

yardımcı lokal olmayan problemi elde edilir.

$[0, 1]_\tau \times [0, 1]_h$ kümesinde, yardımcı lokal olmayan (3.2.2.2) probleminin yaklaşık çözümü için $[0, 1]_\tau \times [0, 1]_h = \{(t_k, x_n) : t_k = k\tau, k = 1, \dots, N-1, N\tau = 1, x_n = nh, n = 1, \dots, M-1, Mh = 1\}$ grid noktalar uzayını ifade edelim.

(3.1.1.9) fark şemasını ve yeterince düzgün ω fonksiyonunun yaklaşımı için,

$$\omega'(x_n) = \frac{\omega(x_{n+1}) - \omega(x_{n-1}))}{2h} + O(h^2),$$

$$\omega''(x_n) = \frac{\omega(x_{n+1}) - 2\omega(x_n) + \omega(x_{n-1}))}{h^2} + O(h^2),$$

$$\omega'(0) = \frac{-3\omega(0) + 4\omega(h) - \omega(2h)}{2h} + O(h^2),$$

$$\omega'(1) = \frac{3\omega(1) - 4\omega(1-h) + \omega(1-2h)}{2h} + O(h^2),$$

$$\omega'''(0) = \frac{10\omega(0) - 15\omega(h) + 6\omega(2h) - \omega(3h)}{h^3} + O(h^2),$$

$$\omega'''(1) = \frac{-10\omega(1) + 15\omega(1-h) - 6\omega(1-2h) + \omega(1-3h)}{h^3} + O(h^2)$$

yaklaşım formüllerini kullanarak, (3.2.2.2) probleminin t için üçüncü mertebeden ve x için ikinci mertebeden doğruluklu fark şemasını

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k + \frac{\tau^2}{12} \left[-\frac{1}{h^2} \left(-\frac{u_{n+2}^k - 2u_{n+1}^k + u_n^k}{h^2} + u_{n+1}^k \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2}{h^2} \left(-\frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k \right) - \frac{1}{h^2} \left(-\frac{u_n^k - 2u_{n-1}^k + u_{n-2}^k}{h^2} + u_{n-1}^k \right) - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k \right] \right] \\
& = \theta_n^k, \\
& \theta_n^k = \left[\left(2\pi^2 \sin(\pi t_k) + 2\pi \cos(\pi t_k) \right) e^{-t} + (\pi^2 + 1) t_k \right] \cos(\pi x_n) + \frac{\tau^2}{12} \\
& \times \left[\left(8\pi^2 \sin(\pi t_k) + (4\pi - 4\pi^3) \cos(\pi t_k) \right) e^{-t} + (\pi^2 + 1)^2 t_k \right] \cos(\pi x_n), \\
& k = 1, \dots, N-1, n = 2, \dots, M-2, \\
& \left\{ u_n^0 - \left\{ \left[-\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] u_n^{l_0-1} + [1 - \mu_0^2] u_n^{l_0} + \left[\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \right] u_n^{l_0+1} \right\} \right. \\
& = -(\sin(\pi \gamma) e^{-\gamma} + \gamma) \cos(\pi x_n), \quad n = 0, \dots, M, \\
& u_n^N - \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left[-\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] u_n^{l_i-1} + [1 - \mu_i^2] u_n^{l_i} + \left[\frac{1}{2} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 \right] u_n^{l_i+1} \right\} \\
& = \left[1 - \sum_{i=1}^q k_i \left(\sin(\pi \lambda_i) e^{-\lambda_i} + \lambda_i \right) \right] \cos(\pi x_n), \\
& -3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k = 0, 3u_M^k - 4u_{M-1}^k + u_{M-2}^k = 0, \quad k = 0, \dots, N, \\
& 10u_0^k - 15u_1^k + 6u_2^k - u_3^k = 0, -10u_M^k + 15u_{M-1}^k - 6u_{M-2}^k + u_{M-3}^k = 0, \\
& k = 0, \dots, N, \\
& \mu_0 = \frac{\gamma}{\tau} - l_0, \mu_i = \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i, \quad l_i = \left\lceil \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rceil, l_0 = \left\lceil \frac{\gamma}{\tau} \right\rceil
\end{aligned} \tag{3.2.2.3}$$

şeklinde kurulur.

(3.1.1.8) uygulanarak p 'nin değerleri, (3.2.1.4) formülüyle hesaplanır. U_s

$$U_s = \begin{bmatrix} u_s^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_s^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad s = n-2, n-1, n, n+1, n+2$$

ve θ_n

$$\theta_n = \begin{bmatrix} \theta_n^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_n^N \end{bmatrix}, \quad n = 1, \dots, M-1,$$

$$\theta_n^0 = -(\sin(\pi \gamma) e^{-\gamma} + \gamma) \cos(\pi x_n),$$

$$\theta_n^N = \left[1 - \sum_{i=1}^q k_i \left(\sin(\pi \lambda_i) e^{-\lambda_i} + \lambda_i \right) \right] \cos(\pi x_n),$$

$$\begin{aligned} \theta_n^k = & \left[\left(2\pi^2 \sin(\pi t_k) + 2\pi \cos(\pi t_k) \right) e^{-t} + (\pi^2 + 1) t_k \right] \cos(\pi x_n) + \frac{\tau^2}{12} \\ & \times \left[\left(8\pi^2 \sin(\pi t_k) + (4\pi - 4\pi^3) \cos(\pi t_k) \right) e^{-t} + (\pi^2 + 1)^2 t_k \right] \cos(\pi x_n), \end{aligned}$$

$$k = 1, \dots, N-1, n = 1, \dots, M-1 \quad (3.2.2.4)$$

olmak üzere, (3.2.2.3) fark şemasının matris formu

$$-3U_0 + 4U_1 - U_2 = \vec{0},$$

$$10U_0 - 15U_1 + 6U_2 - U_3 = \vec{0},$$

$$AU_{n+2} + BU_{n+1} + CU_n + DU_{n-1} + EU_{n-2} = I\theta_n, n = 2, \dots, M-2,$$

$$3U_M - 4U_{M-1} + U_{M-2} = \vec{0},$$

$$-10U_M + 15U_{M-1} - 6U_{M-2} + U_{M-3} = \vec{0} \quad (3.2.2.5)$$

biçiminde yazılabilir. Burada A, B, C, D, E $(N+1) \times (N+1)$ tipinde birer kare matrisler, θ_n ise $(N+1) \times 1$ bir sütun matris, I ise $(N+1) \times (N+1)$ tipinde bir birim matristir. A, B, C, D, E (3.2.1.7), (3.2.1.9), (3.2.1.8) matrisleriyle tanımlanmaktadır. Matrislerdeki katsayılar a, r, b, c (3.2.1.10) ile aynı olup, diğer katsayılar ise, (3.2.1.11) şeklindedir.

α_n, β_n ($n = 1, \dots, M-1$), $(N+1) \times (N+1)$ birer kare matrisler, φ_n ($n = 0, \dots, M-2$), $(N+1) \times 1$ tipinde bir sütun matris olmak üzere, (3.2.2.5) fark denkleminin çözümü (Samarskii, Nikolaev, 1989), $U_n = \alpha_n U_{n+1} + \beta_n U_{n+2} + \varphi_n, n = M-2, \dots, 0$ şeklinde aranır. (3.2.2.5) denkleminin çözümü için,

$$\alpha_0 = \frac{4}{3}I, \beta_0 = -\frac{1}{3}I, \varphi_0 = 0_{(N+1) \times 1},$$

$$\alpha_1 = \frac{8}{5}I, \beta_1 = -\frac{3}{5}I, \varphi_1 = 0_{(N+1) \times 1},$$

$$\alpha_{M-3} = \frac{8}{3}I, \beta_{M-3} = -\frac{5}{3}I, \varphi_{M-3} = 0_{(N+1) \times 1},$$

$$\alpha_{M-2} = 4I, \beta_{M-2} = -3I, \varphi_{M-2} = 0_{(N+1) \times 1} \text{ olmak üzere,}$$

$$F_n = (C + D\alpha_{n-1} + E\alpha_{n-2}\alpha_{n-1} + E\beta_{n-2}), n = 2, \dots, M-4,$$

$$\alpha_n = -F_n^{-1} (B + D\beta_{n-1} + E\alpha_{n-2}\beta_{n-1}),$$

$$\beta_n = -F_n^{-1}A,$$

$\varphi_n = F_n^{-1}(I\theta_n - D\varphi_{n-1} - E\alpha_{n-2}\varphi_{n-1} - E\varphi_{n-2})$ eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca U_M ve U_{M-1} için,

$$U_M = (S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21})^{-1}(L_1 - S_{12}S_{22}^{-1}L_2),$$

$$U_{M-1} = S_{22}^{-1}(L_2 - S_{21}U_M) \text{ elde edilir. Burada,}$$

$$S_{11} = -3B_{M-2} - 8C_{M-2} - D_{M-2}(8\alpha_{M-3} + 3\beta_{M-3}) - E_{M-2}(8\alpha_{M-4}\alpha_{M-3} + 3\alpha_{M-4}\beta_{M-3} + 8\beta_{M-4}),$$

$$S_{12} = A_{M-2} + 4B_{M-2} + 9C_{M-2} + D_{M-2}(9\alpha_{M-3} + 4\beta_{M-3})$$

$$+ E_{M-2}(9\alpha_{M-4}\alpha_{M-3} + 4\alpha_{M-4}\beta_{M-3} + 9\beta_{M-4}),$$

$$S_{21} = A_{M-1} - 3C_{M-1} - 8D_{M-1} - E_{M-1}(8\alpha_{M-3} + 3\beta_{M-3}),$$

$$S_{22} = B_{M-1} + 4C_{M-1} + 9D_{M-1} + E_{M-1}(9\alpha_{M-3} + 4\beta_{M-3}),$$

$$L_1 = I\theta_{M-2} - D_{M-2}\varphi_{M-3} - E_{M-2}(\varphi_{M-4} + \alpha_{M-4})\varphi_{M-3},$$

$$L_2 = I\theta_{M-1} - E_{M-1}\varphi_{M-3}.$$

Şimdi (3.1.1.10) fark şemasını ve

$$\omega'(x_n) = \frac{\omega(x_{n+1}) - \omega(x_{n-1}))}{2h} + O(h^2),$$

$$\omega''(x_n) = \frac{\omega(x_{n+1}) - 2\omega(x_n) + \omega(x_{n-1}))}{h^2} + O(h^2),$$

$$\omega'(0) = \frac{-3\omega(0) + 4\omega(h) - \omega(2h)}{2h} + O(h^2),$$

$$\omega'(1) = \frac{3\omega(1) - 4\omega(1-h) + \omega(1-2h)}{2h} + O(h^2),$$

$$\omega'''(0) = \frac{10\omega(0) - 15\omega(h) + 6\omega(2h) - \omega(3h)}{h^3} + O(h^2),$$

$$\omega'''(1) = \frac{-10\omega(1) + 15\omega(1-h) - 6\omega(1-2h) + \omega(1-3h)}{h^3} + O(h^2) \text{ yaklaşım formüllerini}$$

kullanarak, t için dördüncü mertebeden ve x için ikinci mertebeden doğruluklu fark şeması,

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k + \frac{\tau^2}{12} \left[-\frac{1}{h^2} \left(-\frac{u_{n+2}^k - 2u_{n+1}^k + u_n^k}{h^2} + u_{n+1}^k \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2}{h^2} \left(-\frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k \right) - \frac{1}{h^2} \left(-\frac{u_n^k - 2u_{n-1}^k + u_{n-2}^k}{h^2} + u_{n-1}^k \right) - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k \right] \right] \\
& = \theta_n^k, \\
& \theta_n^k = \left[\left(2\pi^2 \sin(\pi t_k) + 2\pi \cos(\pi t_k) \right) e^{-t} + (\pi^2 + 1) t_k \right] \cos(\pi x_n) + \frac{\tau^2}{12} \\
& \times \left[\left(8\pi^2 \sin(\pi t_k) + (4\pi - 4\pi^3) \cos(\pi t_k) \right) e^{-t} + (\pi^2 + 1)^2 t_k \right] \cos(\pi x_n), \\
& k = 1, \dots, N-1, n = 2, \dots, M-2, \\
& \left\{ \begin{aligned} & u_n^0 - \mu_{0,1} u_n^{l_0-2} - \mu_{0,2} u_n^{l_0-1} - \mu_{0,3} u_n^{l_0} - \mu_{0,4} u_n^{l_0+1} - \mu_{0,5} u_n^{l_0+2} \\ & = -(\sin(\pi \gamma) e^{-\gamma} + \gamma) \cos(\pi x_n), \\ & u_n^N - \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \mu_{i,1} u_n^{l_i-2} + \mu_{i,2} u_n^{l_i-1} + \mu_{i,3} u_n^{l_i} + \mu_{i,4} u_n^{l_i+1} + \mu_{i,5} u_n^{l_i+2} \right\} \\ & = \left[1 - \sum_{i=1}^q k_i \left(\sin(\pi \lambda_i) e^{-\lambda_i} + \lambda_i \right) \right] \cos(\pi x_n), n = 0, \dots, M, \\ & -3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k = 0, 3u_M^k - 4u_{M-1}^k + u_{M-2}^k = 0, k = 0, \dots, N, \\ & 10u_0^k - 15u_1^k + 6u_2^k - u_3^k = 0, -10u_M^k + 15u_{M-1}^k - 6u_{M-2}^k + u_{M-3}^k = 0, \\ & k = 0, \dots, N, \\ & \mu_0 = \frac{\gamma}{\tau} - l_0, \mu_i = \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i, l_i = \left\lceil \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rceil, l_0 = \left\lceil \frac{\gamma}{\tau} \right\rceil. \end{aligned} \right. \quad (3.2.2.6)
\end{aligned}$$

biçiminde oluşturulur.

(3.2.2.6) fark şeması, (3.2.2.5) matris formunda yazılabilir. Burada A, B, C, D ve E (3.2.1.7), (3.2.1.13) ve (3.2.1.9) matrisleriyle tanımlanmaktadır. C matrisindeki c ve r (3.2.1.10) ile aynı olup, diğer katsayılar ise, (3.2.1.14) şeklindedir.

$\alpha_n, \beta_n(N+1) \times (N+1)$ tipinde kare matrisler olup, φ_n ise bir $(N+1) \times 1$ ($n = 0, \dots, M-2$) sütun matrisi olmak üzere, (3.2.2.5) çözümü bu formül ile $U_n = \alpha_n U_{n+1} + \beta_n U_{n+2} + \varphi_n, n = M-2, \dots, 0$ elde edilir. (3.2.2.5) denkleminin çözümü için,

$$\alpha_0 = \frac{4}{3}I, \beta_0 = -\frac{1}{3}I, \varphi_0 = 0_{(N+1) \times 1},$$

$$\alpha_1 = \frac{8}{5}I, \beta_1 = -\frac{3}{5}I, \varphi_1 = 0_{(N+1) \times 1},$$

$$\alpha_{M-3} = \frac{8}{3}I, \beta_{M-3} = -\frac{5}{3}I, \varphi_{M-3} = 0_{(N+1) \times 1},$$

$$\alpha_{M-2} = 4I, \beta_{M-2} = -3I, \varphi_{M-2} = 0_{(N+1) \times 1} \text{ olmak üzere,}$$

$$F_n = (C + D\alpha_{n-1} + E\alpha_{n-2}\alpha_{n-1} + E\beta_{n-2}), n = 2, \dots, M-4,$$

$$\alpha_n = -F_n^{-1} (B + D\beta_{n-1} + E\alpha_{n-2}\beta_{n-1}),$$

$$\beta_n = -F_n^{-1} A,$$

$$\varphi_n = F_n^{-1} (I\theta_n - D\varphi_{n-1} - E\alpha_{n-2}\varphi_{n-1} - E\varphi_{n-2}) \text{ formülleri gerekmektedir. Ayrıca}$$

$$S_{11} = -3B_{M-2} - 8C_{M-2} - D_{M-2} (8\alpha_{M-3} + 3\beta_{M-3}) \\ - E_{M-2} (8\alpha_{M-4}\alpha_{M-3} + 3\alpha_{M-4}\beta_{M-3} + 8\beta_{M-4}),$$

$$S_{12} = A_{M-2} + 4B_{M-2} + 9C_{M-2} + D_{M-2} (9\alpha_{M-3} + 4\beta_{M-3}) \\ + E_{M-2} (9\alpha_{M-4}\alpha_{M-3} + 4\alpha_{M-4}\beta_{M-3} + 9\beta_{M-4}),$$

$$S_{21} = A_{M-1} - 3C_{M-1} - 8D_{M-1} - E_{M-1} (8\alpha_{M-3} + 3\beta_{M-3}),$$

$$S_{22} = B_{M-1} + 4C_{M-1} + 9D_{M-1} + E_{M-1} (9\alpha_{M-3} + 4\beta_{M-3}),$$

$$L_1 = I\theta_{M-2} - D_{M-2}\varphi_{M-3} - E_{M-2} (\varphi_{M-4} + \alpha_{M-4})\varphi_{M-3},$$

$$L_2 = I\theta_{M-1} - E_{M-1}\varphi_{M-3} \text{ olmak üzere, bilinmeyen } U_M \text{ ve } U_{M-1} \text{ için,}$$

$$U_M = (S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21})^{-1} (L_1 - S_{12}S_{22}^{-1}L_2),$$

$$U_{M-1} = S_{22}^{-1} (L_2 - S_{21}U_M), \text{ elde edilir.}$$

Şimdi MATLAB programlarını kullanarak elde edilen sayısal analiz sonuçlarını verelim. Sayısal çözümler farklı N, M ve T=1 değerleri için elde edilmiştir. u_n^k , v_n^k grid fonksiyonları; (t_k, x_n) grid noktalarındaki yardımcı yerel olmayan ve ters problemlerin fark şemalarının sayısal çözümlerini, p_n grid fonksiyonu ise, x_n grid noktalarındaki bilinmeyen p fonksiyonunun sayısal çözümünü temsil eder. $v(t_k, x_n)$ ise gerçek çözümün (t_k, x_n) noktasındaki değeridir. Gerçek çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırılması,

$$Hu_M^N = \max_{1 \leq k \leq N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} |u(t_k, x_n) - u_n^k|^2 h \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$Hv_M^N = \max_{1 \leq k \leq N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} |v(t_k, x_n) - v_n^k|^2 h \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$Hp_M = \left(\sum_{n=1}^{M-1} |p(x_n) - p_n|^2 h \right)^{\frac{1}{2}}$$

hata formülleriyle yapılmıştır.

MATLAB programını kullanarak (3.2.2.1) probleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Sayısal çözümler bir, iki ve üç noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters eliptik problemleri için hesaplanmıştır. Tablo 19'dan Tablo 36'ya kadar gerçek çözümler ve fark şemaları arasındaki hata analizleri verilmektedir. Bu tablolar üçüncü mertebeden doğruluklu fark şeması $N=10, M=32$; $N=20, M=90$; $N=40, M=254$ için oluşturulmuştur. Dördüncü mertebeden doğruluklu fark şeması ise $N=10, M=100$; $N=20, M=400$; $N=40, M=1600$ için oluşturulmuştur. Sayısal deneylerden elde edilen sonuçlardan, dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemasının üçüncü mertebeden doğruluklu fark şemasından daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Tablo 19'dan Tablo 24'e kadar olan tablolarda bir noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters Neumann tipi sınır değer probleminin gerçek çözümleriyle üçüncü ve dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemalarının yaklaşım çözümleri arasındaki hatalar $q = 1, \lambda_1 = 0.8, k = 1$ değerleriyle gösterilmektedir.

Tablo 19. (3.2.2.3) bir noktalı 3. mertebeden doğrulukta u için hatalar

$N=10, M=32$	$N=20, M=90$	$N=40, M=254$
3.56×10^{-3}	1.93×10^{-4}	9.1×10^{-6}

Tablo 20. (3.2.2.4) bir noktalı 3. mertebeden doğrulukta p için hatalar

$N=10, M=32$	$N=20, M=90$	$N=40, M=254$
5.45×10^{-2}	5.77×10^{-3}	6.18×10^{-4}

Tablo 21. (3.2.2.1) bir noktalı 3. mertebeden doğrulukta v için hatalar

$N=10, M=32$	$N=20, M=90$	$N=40, M=254$
9.04×10^{-4}	1.83×10^{-5}	1.01×10^{-6}

Tablo 22. (3.2.2.6) bir noktalı 4. mertebeden doğrulukta u için hatalar

$N=10, M=100$	$N=20, M=400$	$N=40, M=1600$
4.96×10^{-4}	2.4×10^{-5}	1.29×10^{-6}

Tablo 23. (3.2.1.4) bir noktalı 4. mertebeden doğrulukta p için hatalar

$N=10, M=100$	$N=20, M=400$	$N=40, M=1600$
9.77×10^{-3}	7.75×10^{-4}	6.42×10^{-5}

Tablo 24. (3.2.2.1) bir noktalı 4. mertebeden doğrulukta v için hatalar

$N=10, M=100$	$N=20, M=400$	$N=40, M=1600$
9.21×10^{-5}	2.55×10^{-6}	1.42×10^{-7}

Tablo 25'den Tablo 30'a kadar olan tablolarda iki noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters Neumann tipi sınır değer probleminin gerçek çözümleriyle üçüncü ve

dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemalarının yaklaşık çözümleri arasındaki hatalar $q = 2, \lambda_1 = 0.57, \lambda_2 = 0.65, k_1 = \frac{2}{5}, k_2 = \frac{3}{5}$ değerleriyle gösterilmektedir.

Tablo 25. (3.2.2.3) iki noktalı 3. mertebeden doğrulukta u için hatalar

N=10, M=32	N=20, M=90	N=40, M=254
3.16×10^{-3}	1.75×10^{-4}	7.57×10^{-6}

Tablo 26. (3.2.1.4) iki noktalı 3. mertebeden doğrulukta p için hatalar

N=10, M=32	N=20, M=90	N=40, M=254
4.95×10^{-2}	5.22×10^{-3}	5.60×10^{-4}

Tablo 27. (3.2.2.1) iki noktalı 3. mertebeden doğrulukta v için hatalar

N=10, M=32	N=20, M=90	N=40, M=254
5.84×10^{-4}	3.13×10^{-5}	4.1×10^{-6}

Tablo 28. (3.2.2.6) iki noktalı 4. mertebeden doğrulukta u için hatalar

N=10, M=100	N=20, M=400	N=40, M=1600
4.61×10^{-4}	2.31×10^{-5}	1.24×10^{-6}

Tablo 29. (3.2.1.4) iki noktalı 4. mertebeden doğrulukta p için hatalar

N=10, M=100	N=20, M=400	N=40, M=1600
8.77×10^{-3}	7.01×10^{-4}	5.81×10^{-5}

Tablo 30. (3.2.2.1) iki noktalı 4. mertebeden doğrulukta v için hatalar

N=10, M=100	N=20, M=400	N=40, M=1600
1.21×10^{-5}	2.88×10^{-6}	1.67×10^{-7}

Tablo 31'den Tablo 36'ya kadar olan tablolarda üç noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters Neumann tipi sınır değer probleminin gerçek çözümleriyle üçüncü ve dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemalarının yaklaşık çözümleri arasındaki hatalar

$q = 3, \lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.6, \lambda_3 = 0.7, k_1 = \frac{1}{5}, k_2 = \frac{3}{10}, k_3 = \frac{1}{2}$ değerleriyle gösterilmektedir.

Tablo 31. (3.2.2.3) üç noktalı 3. mertebeden doğrulukta u için hatalar

N=10, M=32	N=20, M=90	N=40, M=254
3.63×10^{-3}	1.91×10^{-4}	9.02×10^{-6}

Tablo 32. (3.2.1.4) üç noktalı 3. mertebeden doğrulukta p için hatalar

N=10, M=32	N=20, M=90	N=40, M=254
5.46×10^{-2}	5.54×10^{-3}	5.93×10^{-4}

Tablo 33. (3.2.2.1) üç noktalı 3. mertebeden doğrulukta v için hatalar

N=10, M=32	N=20, M=90	N=40, M=254
3.07×10^{-4}	1.64×10^{-5}	9.19×10^{-7}

Tablo 34. (3.2.2.6) üç noktalı 4. mertebeden doğrulukta u için hatalar

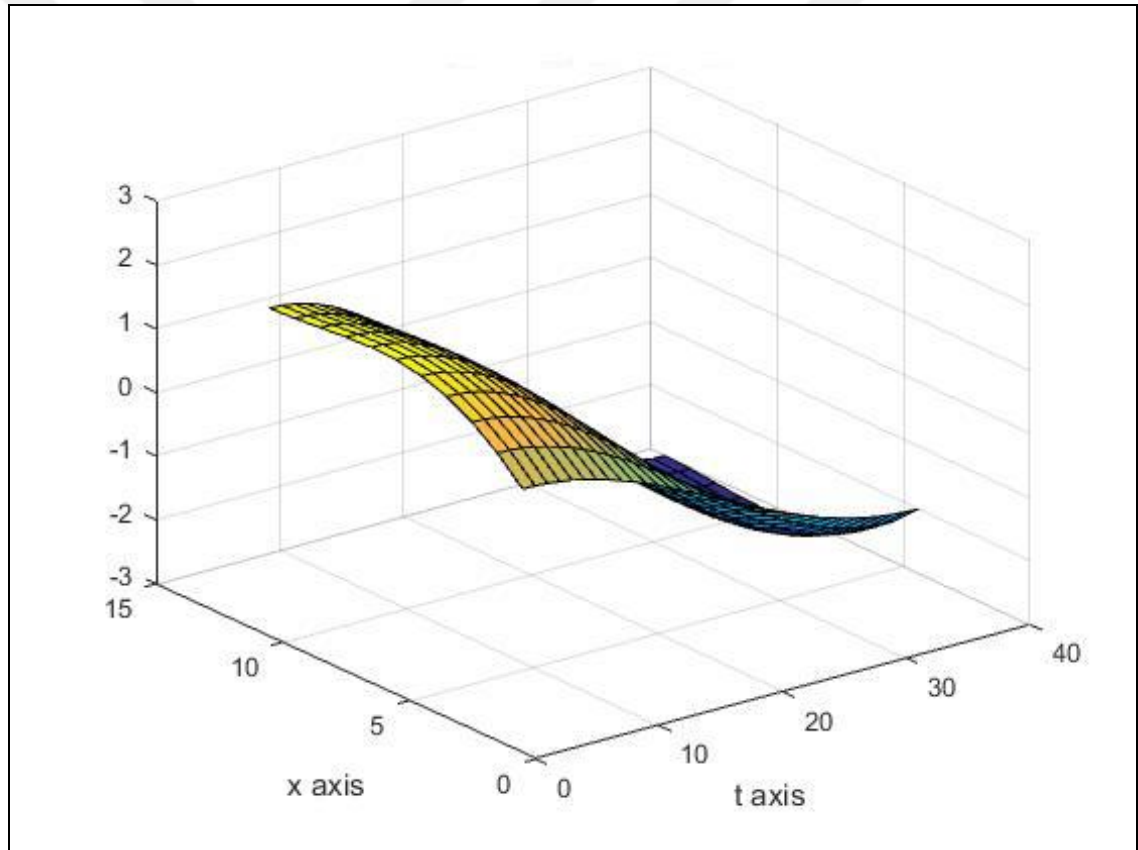
N=10, M=100	N=20, M=400	N=40, M=1600
4.92×10^{-4}	2.34×10^{-5}	1.26×10^{-6}

Tablo 35. (3.2.1.4) üç noktalı 4. mertebeden doğrulukta p için hatalar

N=10, M=100	N=20, M=400	N=40, M=1600
9.58×10^{-3}	7.43×10^{-4}	6.17×10^{-5}

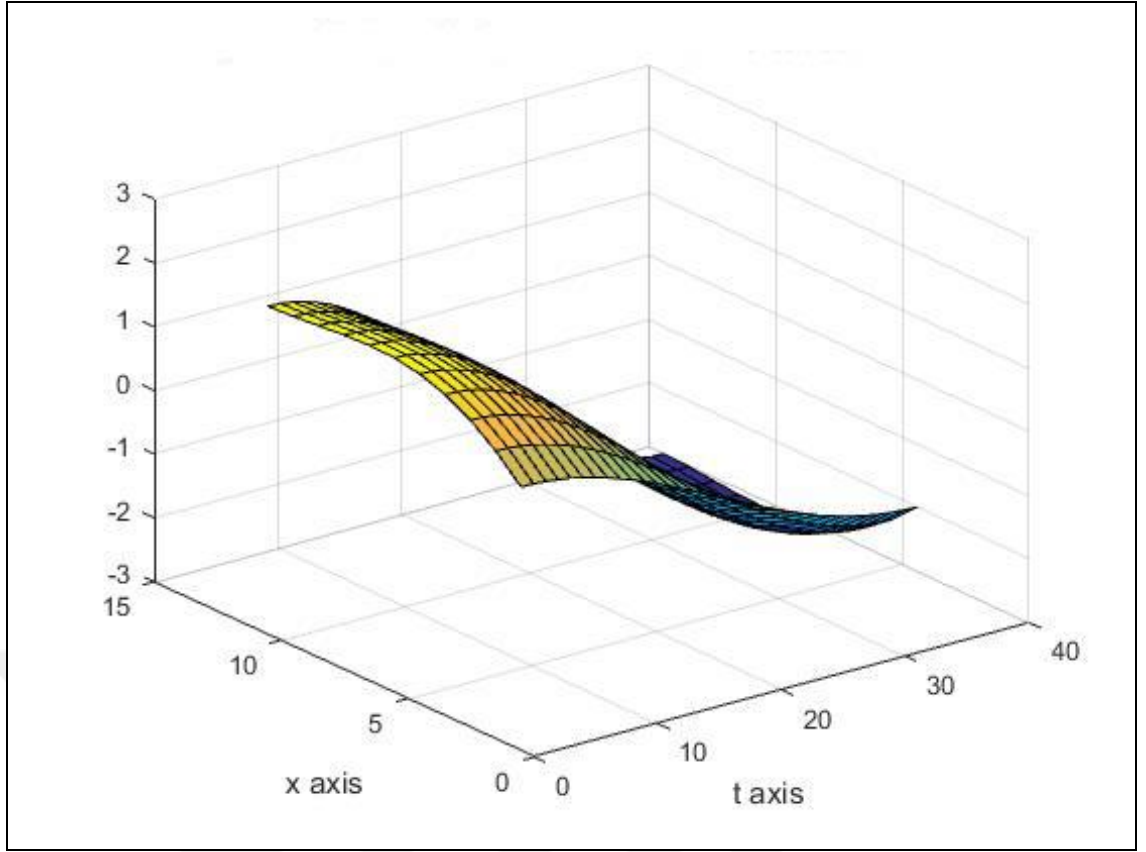
Tablo 36. (3.2.2.1) üç noktalı 4. mertebeden doğrulukta v için hatalar

N=10, M=100	N=20, M=400	N=40, M=1600
4.34×10^{-5}	2.37×10^{-6}	1.38×10^{-7}



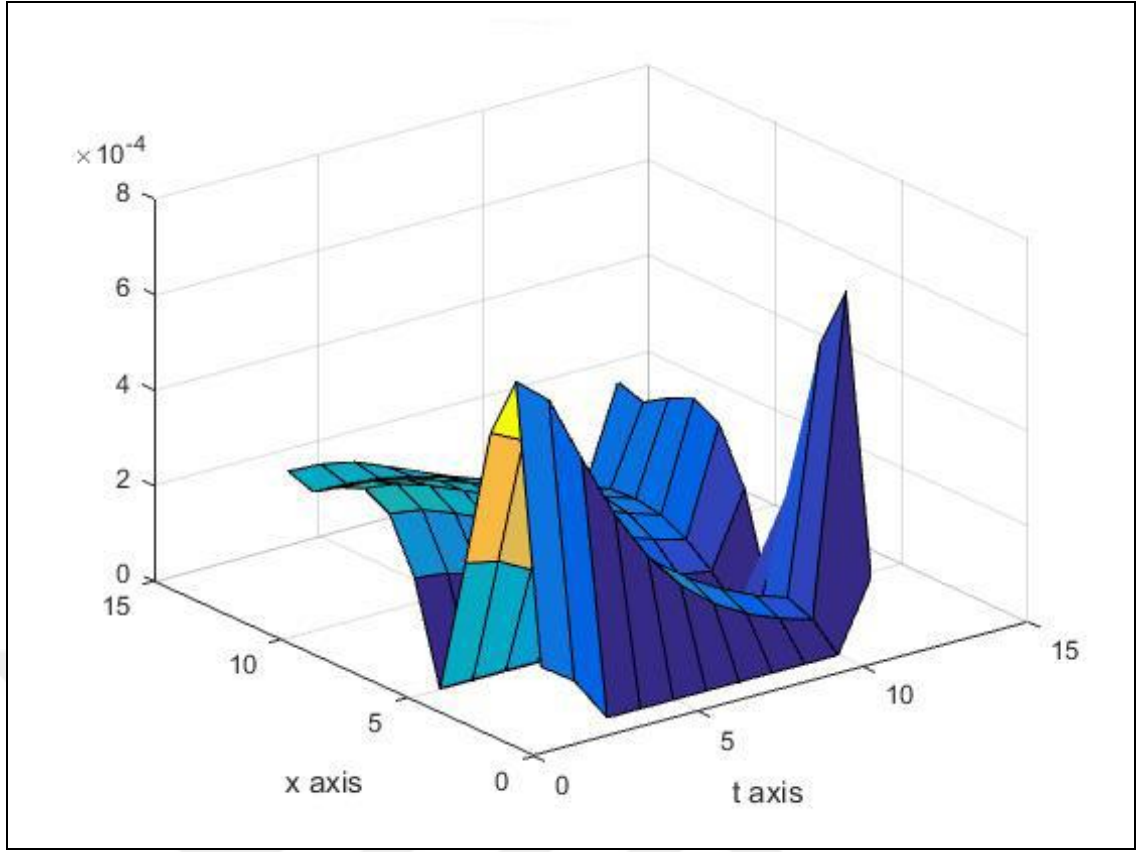
Şekil 7. (3.2.2.1) NSDP'nin N=10, M=32 için gerçek çözüm grafiği

Şekil 7, yerel olmayan sınır koşullu ters Neumann sınır değer probleminin N=10, M=32 için gerçek çözüm grafiğini göstermektedir.



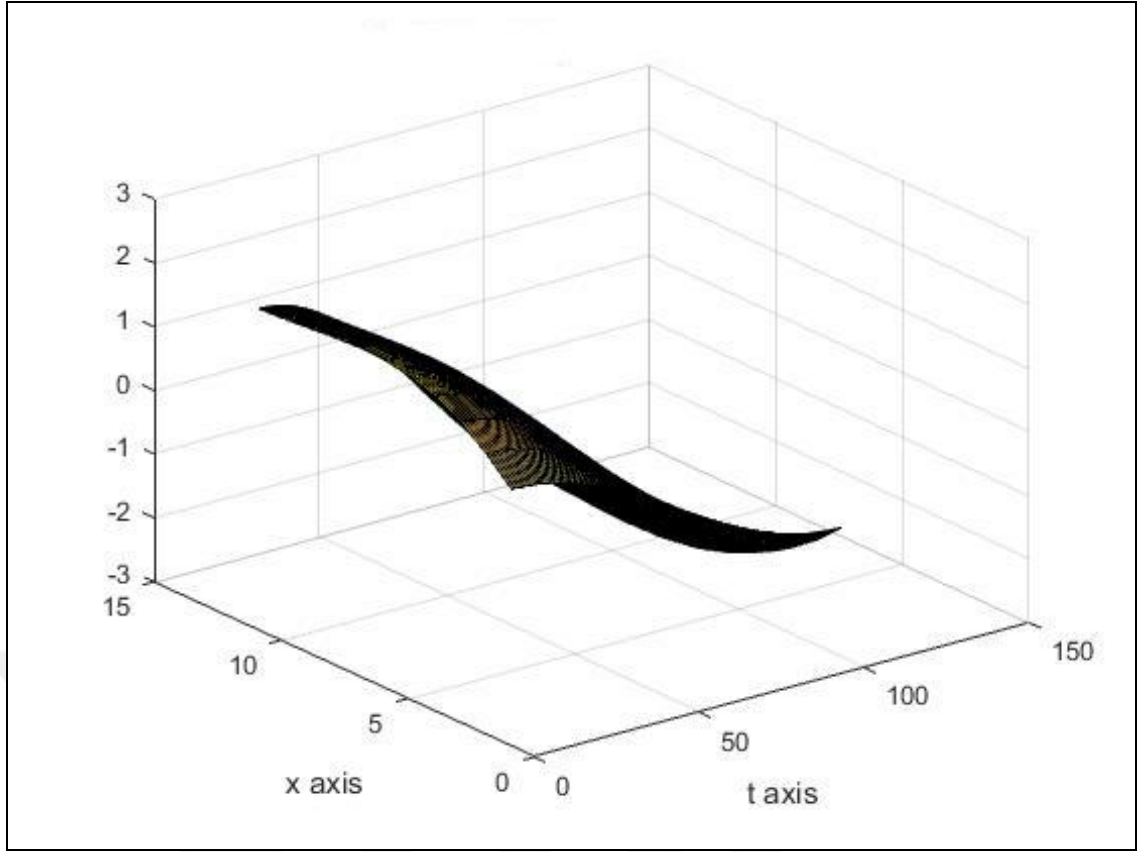
Şekil 8. (3.2.2.1) NSDP'nin üç noktalı ÜMDFŞ yaklaşık çözüm grafiği

Şekil 8, Yerel olmayan sınır koşullu ters Neumann sınır değer probleminin üçüncü mertebeden doğruluklu fark şemasının yaklaşık çözüm grafiğini göstermektedir.



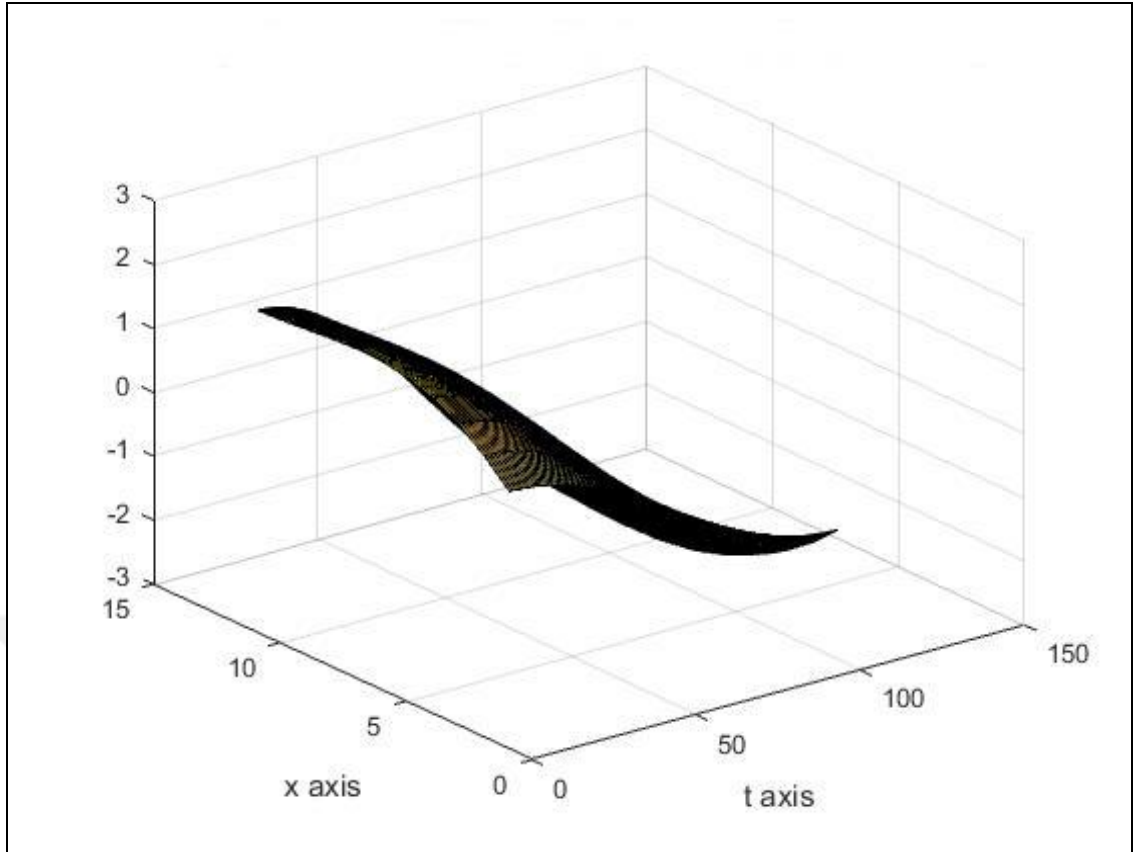
Şekil 9. $M=32$ için (3.2.2.1) NSDP'nin gerçek çözümü ile üç noktalı ÜMDFŞ yaklaşık çözümü arasındaki farkın mutlak değer grafiği

Şekil 9, $M=32$ için hesaplanan ters Neumann sınır değer probleminin gerçek çözüm ile üçüncü mertebeden doğruluklu fark şemasının yaklaşık çözüm arasındaki farkın mutlak değer grafiğini göstermektedir.



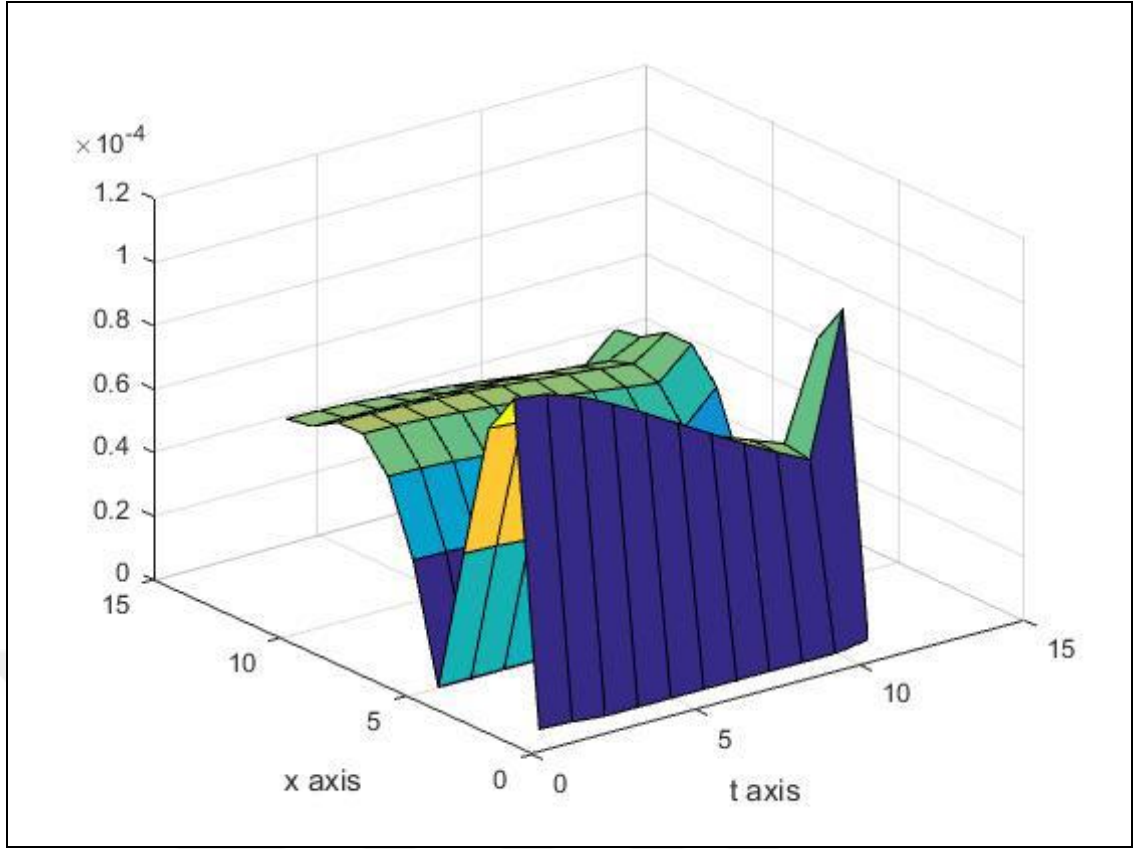
Şekil 10. (3.2.2.1) NSDP'nin $N=10$, $M=100$ için gerçek çözüm grafiği

Şekil 10, yerel olmayan sınır koşullu ters Neumann sınır değer probleminin $N=10$, $M=100$ için gerçek çözüm grafiğini göstermektedir.



Şekil 11. (3.2.2.1) NSDP'nin üç noktalı DMDFŞ yaklaşık çözüm grafiği

Şekil 11, yerel olmayan sınır koşullu tersNeumann sınır değer probleminin dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemasının yaklaşık çözüm grafiğini göstermektedir.



Şekil 12. $M=100$ için (3.2.2.1) NSDP'nin gerçek çözümü ile üç noktalı DMDFŞ yaklaşık çözümü arasındaki farkın mutlak değer grafiği

Şekil 12, $M=100$ için hesaplanan ters Neumann sınır değer probleminin gerçek çözüm ile dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemasının yaklaşık çözüm arasındaki farkın mutlak değer grafiğini göstermektedir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, yerel olmayan sınır koşullu ters eliptik problemleri için yüksek mertebeden fark şemaları araştırılmıştır. Yapılan çalışma sonucunda elde edilen özgün sonuçlar sırasıyla aşağıda verilmektedir:

1. Sonuç: A operatörü keyfi bir H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı operatör, $k_i (i = 1, \dots, q)$ parametreleri $k = \sum_{i=1}^q k_i \leq 1$ koşulunu sağlayan bilinen negatif olmayan reel sayılar ve belirli $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ sayıları ise $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_q$ özelliğinde olsun. Ayrıca $\phi, \eta, \zeta \in H$ Hilbert uzayının verilen elemanları $f: [0, T] \rightarrow H$ bilinen düzgün bir fonksiyon ve bilinmeyen $p \in H$ olmak üzere, (v, p) çifti için,

$$\begin{cases} -v_{tt}(t) + Av(t) = f(t) + p, 0 < t < T, \\ v(0) = \phi, v(T) = \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i) + \eta, 0 < \lambda_i < T, \\ v(\gamma) = \zeta, 0 < \gamma < T \end{cases} \quad (4.1)$$

çok noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters eliptik probleminin yaklaşık çözümünün üçüncü mertebeden doğruluklu fark şeması

$$\begin{cases} -\tau^{-2} (v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) + Av_k + \frac{\tau^2}{12} A^2 v_k = \theta_k + p, \\ \theta_k = f(t_k) + \frac{\tau^2}{12} \left(\frac{f(t_{k+1}) - 2f(t_k) + f(t_{k-1}))}{\tau^2} + Af(t_k) \right), \\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = T, v_0 = \phi, \\ \left[-\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] v_{l_0-1} + [1 - \mu_0^2] v_{l_0} \left[\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \right] v_{l_0+1} = \zeta, \\ v_N = \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left[-\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] v_{l_i-1} + [1 - \mu_i^2] v_{l_i} + \left[\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^2 \right] v_{l_i+1} \right\} + \eta \end{cases} \quad (4.2)$$

şeklinde oluşturulmuştur. Oluşturulan bu fark şemasının çözümü için kararlılık, hemen-hemen koersif kararlılık ile koersif kararlılık kestirimleri elde edilmiş ve ispatlanmıştır.

2. Sonuç: Çok noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters (4.1) eliptik probleminin yaklaşık çözümü için dördüncü mertebeden doğruluklu fark şeması

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau^{-2}(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) + Av_k + \frac{\tau^2}{12} A^2 v_k = \theta_k + p, \\ \theta_k = f(t_k) + \frac{\tau^2}{12} \left(\frac{f(t_{k+1}) - 2f(t_k) + f(t_{k-1}))}{\tau^2} + Af(t_k) \right), \\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = T, v_0 = \phi, \\ \left[\frac{1}{12} \mu_0 - \frac{1}{12} \mu_0^3 \right] v_{l_0-2} + \left[-\frac{2}{3} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 + \frac{1}{6} \mu_0^3 \right] v_{l_0-1} + [1 - \mu_0^2] v_{l_0} \\ + \left[\frac{2}{3} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 - \frac{1}{6} \mu_0^3 \right] v_{l_0+1} + \left[-\frac{1}{12} \mu_0 + \frac{1}{12} \mu_0^3 \right] v_{l_0+2} = \zeta, \\ v_N = \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left[\frac{1}{12} \mu_i - \frac{1}{12} \mu_i^3 \right] v_{l_i-2} + \left[-\frac{2}{3} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 + \frac{1}{6} \mu_i^3 \right] v_{l_i-1} \right. \\ \left. + [1 - \mu_i^2] v_{l_i} + \left[\frac{2}{3} \mu_i + \frac{1}{2} \mu_i^2 - \frac{1}{6} \mu_i^3 \right] v_{l_i+1} + \left[-\frac{1}{12} \mu_i + \frac{1}{12} \mu_i^3 \right] v_{l_i+2} \right\} + \eta \end{array} \right. \quad (4.3)$$

şeklinde kurulmuştur. Kurulan bu fark şemasının çözümü için kararlılık, hemen-hemen koersif kararlılık ile koersif kararlılık eşitsizlikleri elde edilmiş ve kanıtlanmıştır.

3. Sonuç: n -boyutlu R_n Öklid uzayında sınırı $\partial\Omega$ olmak üzere $\Omega = (0, l)^n$ bir açık küp, Ω kümesinin kapanışı $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ 'dir. $a_r(x), \phi(x), \eta(x), \zeta(x)$ ($x \in \overline{\Omega}$) ve $f(t, x)$ ($t \in (0, T)$) bilinen düzgün fonksiyonlardır. $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $0 \leq \gamma \leq T$ ve $k_1, k_2, \dots, k_q$ bilinen negatif olmayan katsayılarıdır. Ayrıca $a_r(x) \geq a > 0$ ($x \in \Omega$)'dır. $[0, T] \times \Omega$ bölgesinde, çok boyutlu eliptik kısmi diferansiyel denklem için,

$$\left\{ \begin{array}{l} -v_{tt}(t, x) - \sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} + \sigma v(x) = f(t, x) + p(x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, 0 < t < T, \\ v(0, x) = \phi(x), v(T, x) - \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i, x) = \eta(x), x \in \overline{\Omega}, \\ v(\gamma, x) = \zeta(x), x \in \overline{\Omega}, 0 < \gamma < T, \\ v(t, x) = 0, x \in \partial\Omega \end{array} \right. \quad (4.4)$$

yerel olmayan ters Dirichlet tipi sınır değer problemi ve bunun yaklaşık çözümü için üçüncü ve dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemaları oluşturulmuştur. Elde edilen fark şemalarının çözümü için kararlılık, hemen-hemen koersif kararlılık ve koersif kararlılık kestirimleri kanıtlanmıştır.

4. Sonuç: $[0, T] \times \Omega$ bölgesinde $\Omega = (0, l)^n$ bir açık küp olmak üzere, çok boyutlu eliptik kısmi diferansiyel denklem için

$$\begin{cases} -v_{tt}(t, x) - \sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} + \sigma v(t, x) = f(t, x) + p(x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, 0 < t < T, \\ v(0, x) = \phi(x), v(T, x) - \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i, x) = \eta(x), x \in \bar{\Omega}, \\ v(\gamma, x) = \zeta(x), x \in \bar{\Omega}, 0 < \gamma < T, \\ \frac{\partial v(t, x)}{\partial \vec{n}} = 0, x \in \partial\Omega, 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.5)$$

yerel olmayan ters Neumann tipi sınır değer problemi ve bunun yaklaşık çözümü için yüksek mertebeden fark şemaları kurulmuştur. Bu fark şemalarının çözümü için kararlılık, hemen-hemen koersif kararlılık ve koersif kararlılık kestirimleri elde edilmiş ve ispatlanmıştır.

5. Sonuç: Sayısal çözümler, bir iki ve üç noktalı yerel olmayan sınır koşullu ters Dirichlet ve Neumann sınır değer problemleri için MATLAB program kodları kullanılarak hesaplanmıştır. Ters Dirichlet ve Neumann sınır değer problemlerinin üçüncü ve dördüncü mertebeden doğruluklu fark şemalarının çözümü için elde edilen teorik ifadeler, sayısal örneklerin sonuçlarıyla doğrulanmaktadır.

1. Öneri: Çalışmada ters Dirichlet ve Neumann sınır değer problemleri incelenmiştir. İlerleyen zamanda farklı Dirichlet-Neumann, Neumann-Dirichlet sınır değer problemlerinin de araştırılması önerilmektedir.

2. Öneri: İntegral tipi yerel olmayan ters problemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için üst mertebeden kararlı fark şemalarının araştırılması önerilmektedir.

KAYNAKÇA

- Akyüz, G. (2017). *Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli eliptik probleminin kararlılık analizi*, Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Gümüşhane.
- Ashyralyev, A. (2008). A note on the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach Space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 344, 1, 557-573.
- Ashyralyev, A. ve Ashyralyev, C. (2014). On the problem of determining the parameter of an elliptic equation in a Banach Space. *Nonlinear Anal. Model. Control*, 19, 3, 350-366.
- Ashyralyev, A. ve Erdogan, A. S. (2010). Well-posedness of the inverse problem of a multidimensional parabolic equation. *Vestn. Odessa Nat. Univ., Math. Mech.*, 15, 18, 129-135.
- Ashyralyev, A. ve Erdogan, A. S. (2014). Well-Posedness of the Right-Hand Side Identification Problem for a Parabolic Equation. *Ukrainian Mathematical Journal*, 66, 2, 165-177.
- Ashyralyev, A. ve Ozesenli Tetikoglu F. S. (2014). Well-posedness of a third order of accuracy difference scheme for Bitsadze-Samarskii type multi-point NBVPs. In: Ashyralyev, A., Malkowsky, E. (Eds.), International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014), AIP Conference Proceedings, 1611, 271-275.
- Ashyralyev, A. ve Ozesenli Tetikoglu, F. S. (2011). On numerical solutions of nonclassical problems for elliptic equations. In: Simos, T. E. (Eds.), International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM), AIP Conference Proceedings, 1389.
- Ashyralyev, A. ve Ozesenli Tetikoglu, F. S. (2012). A fourth-order of accuracy difference scheme for the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem. In: Simos, T.E.; Psihoyios, G.; Tsitouras, C.; et al. (Eds.), International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM), AIP Conference Proceedings, 1479, 594-597.
- Ashyralyev, A. ve Ozesenli Tetikoglu, F. S. (2012). A third-order of accuracy difference scheme for the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem. In: Ashyralyev, A., Lukasov, A. (Eds.), First International Conference on Analysis

- and Applied Mathematics (ICAAM 2012), AIP Conference Proceedings, 1470, 61-64.
- Ashyralyev, A. ve Ozesenli Tetikoglu, F. S. (2012). FDM for elliptic equations with Bitsadze-Samarskii-Dirichlet conditions. *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 454831.
- Ashyralyev, A. ve Ozesenli Tetikoglu, F. S. (2013). A note on Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problems: Well-posedness. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 34, 9, 939-975.
- Ashyralyev, A. ve Ozesenli Tetikoglu, F. S. (2014). On well-posedness of nonclassical problems for elliptic equations. *Mathematical Methods in Applied Sciences*, 37, 17, 2663-2676.
- Ashyralyev, A. ve Ozturk, E. (2011). On the fourth order of accuracy difference scheme for the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem. In: Simos, T.E. (Eds.), International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM), AIP Conference Proceedings, 1389, 2011.
- Ashyralyev, A. ve Ozturk, E. (2012). On Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problems for semi-linear elliptic equations. In: Ashyralyev, A., Lukasov, A. (Eds.), First International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2012), AIP Conference Proceedings, 1470, 114-117.
- Ashyralyev, A. ve Ozturk, E. (2012). On Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problems for elliptic differential and difference equations: Well-posedness. *Applied Mathematics and Computation*, 219, 3, 1093-1107.
- Ashyralyev, A. ve Ozturk, E. (2012). The numerical solution of the Bitsadze-Samarskii nonlocal boundary value problems with the Dirichlet-Neumann condition. *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 730804.
- Ashyralyev, A. ve Ozturk, E. (2013). On a difference scheme of fourth order of accuracy for the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem. *Mathematical Methods in the Science*, 36, 936-955.
- Ashyralyev, A. ve Ozturk, E. (2014). Stability of difference schemes for Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem involving integral condition. *Filomat*, 28, 5, 1027-1047.
- Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P. E. (2004). *New difference schemes for partial differential equations, operator theory advances and applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 443 s.
- Ashyralyev, A. ve Agirseven, D. (2014). On source identification problem for a delay

- parabolic equation. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 19, 3, 335-349.
- Ashyralyev, A., Al-Hammouri, A. ve Ashyralyev, C. (2021). On the absolute stable difference scheme for the space-wise dependent source identification problem for elliptic-telegraph equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 37, 2, 962-986.
- Ashyralyev, C. (2014). High order approximation of the inverse elliptic problem with dirichlet-neumann conditions. *Filomat*, 28, 5, 947-962.
- Ashyralyev, C. (2014). High order of accuracy difference schemes for the inverse elliptic problem with dirichlet condition. *Boundary Value Problems*, 5, 1-23.
- Ashyralyev, C. (2014). Inverse neumann problem for an equation of elliptic type. In: Ashyralyev, A., Malkowsky, E. (Eds.), 2nd International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014), AIP Conference Proceedings, 1611, 46-52.
- Ashyralyev, C. (2015). Well-posedness of a fourth order of accuracy difference scheme for the Neumann type overdetermined elliptic problem. AIP Conference Proceedings, 1676, 020007, doi: 10.1063/1.4930433.
- Ashyralyev, C. (2017). A fourth order approximation of the Neumann type overdetermined elliptic problem. *Filomat*, 31, 4, 967-980.
- Ashyralyev, C. (2017). Numerical solution to Bitsadze-Samarskii type elliptic overdetermined multipoint NBVP. *Boundary Value Problems*, 74, 1-22.
- Ashyralyev, C. (2017). Stability estimates for solution of neumann type overdetermined elliptic problem. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 38, 10, 1226-1243.
- Ashyralyev, C. ve Akkan, Y. (2015). Numerical solution to inverse elliptic problem with Neumann type overdetermination and mixed boundary conditions. *Electron. J. Differential Equations*, 2015, 188, 1-15.
- Ashyralyev, C. ve Akyuz, G. (2016). Stability estimates for solution of Bitsadze-Samarskii type inverse elliptic problem with dirichlet conditions. AIP Conference Proceedings, 1759, 020129.
- Ashyralyev, C. ve Akyuz, G. (2018). A third order of accuracy difference scheme for Bitsadze-Samarskii type elliptic overdetermined multi-point problem. AIP Conference Proceedings, 1997, 020009.

- Ashyralyyev, C. ve Akyuz, G. (2018). Finite difference method for Bitsadze-Smarskii type overdetermined elliptic problem with dirichlet conditions. *Filomat*, 32, 3, 859-872.
- Ashyralyyev, C. ve Akyuz, G. (2021). On fourth order accuracy stable difference scheme for a multi-point overdetermined elliptic problem. *Серия Математика*, 2, 45-53.
- Ashyralyyev, C. ve Akyuz, G. (2021). Stability estimates for a third order of accuracy difference scheme elliptic overdetermined multi-point problem. *AIP Conference Proceedings* 2334, 1, 060011.
- Ashyralyyev, C. ve Çay, A. (2018). Well-posedness of neumann-type elliptic overdetermined problem with integral condition. *AIP Conference Proceedings*, 1997, 020026.
- Ashyralyyev, C. ve Dedetürk, M. (2013). Approximate solution of inverse problem for elliptic equation with overdetermination. *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 548017, 1-11.
- Ashyralyyev, C. ve Dedetürk, M. (2014). Approximation of the inverse elliptic problem with mixed boundary value conditions. In: Ashyralyyev, A. ve Malkowsky, E. (Eds.), 2nd International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014) *AIP Conference Proceedings*, 1611, 25-29.
- Ashyralyyev, C. ve Dedetürk, M. (2015). Approximation of the inverse elliptic problem with mixed boundary value conditions and overdetermination. *Boundary Value Problems*, 51, 1-15.
- Ashyralyyev, C. ve Karabey, S. (2019). Numerical solution of neumann-type elliptic overdetermined multipoint mixed boundary value problem. *AIP Conference Proceedings*, 2183, 070020.
- Ashyralyyev, C., Akyüz, G. ve Dedetürk, M. (2017). Approximate solution for an inverse problem of multidimensional elliptic equation with multipoint nonlocal and neumann boundary conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, 197, 1-16.
- Bouzitouna, A., Boussetila N. ve Rebbani F. (2013). Two regularization methods for a class of inverse boundary value problems of elliptic type. *Boundary Value Problems*, 2013: 178, 1-23.
- Cheney, W. ve Kingaid, D. (2011). *Numerical mathematics and computing*. Belmont, USA.

- Dehghan, M., 2001. Determination of a control parameter in the twodimensional diffusion equation. *Appl. Numer. Math.*, 37, 4, 489-502.
- Eidelman, Y. S. (1991). An inverse problem for an evolution equation. *Mathematical Notes*, 49, 5, 535-540.
- Feizmohammadi, A. ve Oksanen, L. (2020). An inverse problem for a semi-linear elliptic equation in Riemannian geometries. *Journal of Differential Equations*, 269, 4683-4719.
- Holmes, M. H. (2013). *Introduction to perturbation methods*. Springer, New York, USA
- Isakov, V. (2006). *Inverse problems for partial differential equations*. Springer.
- Kabanikhin, S. I. (2009). *Obratnuee I Nekarektnuee Zadachi*. Novosibirsk.
- Kabanikhin, S. I. (2011). *Inverse and Ill-posed problems: Theory and applications*. Walter de Gruyter, Berlin.
- Kabanikhin, S.I. (2008). Definitions and examples of inverse and ill-posed problems. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 16, 4, 317-357.
- Kirane, M., Sadybekov, M. ve Sarsenbi, A.A. (2019). On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data. *Mathematical Methods in The Applied Sciences*, 42, 6, 2043-2052.
- Klibanov, M. V. ve Romanov, V. G. (2016). Two reconstruction procedures for a 3D phaseless inverse scattering problem for the generalized Helmholtz equation. *Inverse Problems*, 32, 1.
- Kozhanov, A.I. ve Shipina, T.N. (2020). Loaded differential equations and linear inverse problems for elliptic equations. *Complex Variables and Elliptic Equations*, doi: 10.1080/17476933.2020.1793970.
- Krein, S. G. (1966). *Lineinye differensialnyie uravneniia v banakhovom prostranstve*. Nauka, Moscow.
- Krein, S. G. (1971). *Linear differential equations in banach space, translation of mathematical monographs*. American Mathematical Society, USA, 390 s.
- Krein, S. G., 1972. *Functional analysis*. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, The Netherlands, 380 s.
- Lassas, M., Liimatainen, T., Lin, YH. ve Salo, M. (2021). Inverse problems for elliptic equations with power type nonlinearities. *Journal De Mathematiques Pures Et Appliquees*, 145, 44-82.
- Mathews, J.H ve Fink, K.D. (1999). *Numerical Methods Using MATLAB*. Prentice Hall, Upper Sadle Riever.

- Orlovskii, D. G. (2008). Inverse Dirichlet problem for an equation of elliptic type. *Differential Equations*, 44, 1, 124-134.
- Orlovsky, D. G. (2013). Inverse problem for elliptic equation in a banach space with Bitsadze-Samarsky boundary value conditions. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 21(1), 141-157.
- Orlovsky, D. G. ve Piskarev, S. (2013). Approximation of the Bitsadze-Samarskii inverse problem for an elliptic equation with the dirichlet conditions. *Differential Equations*, 49, 7, 895-907.
- Orlovsky, D. G. ve Piskarev, S. I. (2018). On approximation of coefficient inverse problems for differential equations in functional spaces. *Journal of Mathematical Sciences*, Springer.
- Orlovsky, D. G., Piskarev, S., 2009. On approximation of inverse problems for abstract elliptic problems. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 17, 8, 765-782.
- Prilepko, A. I., Orlovsky, D. G. ve Vasin, I. A. (2000). *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*. Marcel Dekker, New York.
- Roberty, N. C. (2013). Simultaneous reconstruction of coefficients and source parameters in elliptic systems modelled with many boundary value problems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013-1, 1-15.
- Sakamoto K. ve Yamamoto M. (2009). Inverse heat source problem from time distributing overdetermination. *Applicable Analysis*, 88, 5, 735-748.
- Samarskii, A. A. ve Nikolaev, E.S. (1989). *Numerical methods for grid equations*. Birkhauser, Basel, Switzerland, 1989.
- Samarskii, A. A. ve Vabishchevich, P.N. (2007). *Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics, inverse and III-posed problems series*. Walter de Gruyter, Berlin.
- Sobolevskii, P. E. (1975). *Difference methods for the approximate solution of the differential equations*. Voronezh State University Press, Voronezh.
- Soloviev, V. V. (2006). Inverse problems for elliptic equations on the plane I. *Differential Equations*, 42, 8, 1106-1114.
- Soloviev, V. V. (2007). Inverse problems of determining the source and coefficient in an elliptic equation in a rectangle. *Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 47, 8, 1365-1377.
- Soloviev, V. V. (2011). Inverse coefficient problems for elliptic equations in a cylinder: I. *Differential Equations*, 49, 7, 908-916.

- Soloviev, V. V. (2011). Inverse coefficient problems for elliptic equations in a cylinder:
II. *Differential Equations*, 49, 8, 996-1005.
- Topsakal, N. ve Amirov, R. (2010). Inverse problem for sturm-liouville operators with
coulomb potential which have discontinuity conditions inside an interval.
Mathematical Physics, Analysis and Geometry, 13, 1, 29-46.



EKLER

Ek 1. Üç Noktalı DSDP'inin 3. Mertebeden Sayısal Çözümleri için MATLAB Programı Kodları

```
function ellipticinversed3nG3(N,M,gm,lambda,miyu,omega)
% -vtt-vxx+v=f(t,x)+p(x);
%inverse problem
%v(0,x)=fi(x),v(1,x)=(1/5)*v(lambda,x)+(3/10)*v(miyu,x)+(1/2)*v(omega,x)+psi(x),
%v(gm,x)=ksi(x)
%v(t,0)=v(t,1)=0
%Second and Fouth order in t
if nargin < 1; end;
close;close;
T=1;
tau=T/N; h=1/M;
m1=0.2;m2=0.3;m3=0.5;
sbt=gm/tau;s=floor(sbt);sbts=sbt-s;
lbt=lambda/tau;l=floor(lbt);lbtl=lbt-l;
qbt=miyu/tau;q=floor(qbt);qbtq=qbt-q;
wbt=omega/tau;w=floor(wbt);wbtw=wbt-w;
%%%%%%%%%'EXACT SOLUTION V,U' %%%%%%%%%%
for j=1:M+1;
x=(j-1)*h;
for k=1:N+1;
tk=(k-1)*tau;
es(k,j)=exact(tk,x);
esu(k,j)=exactu(tk,x);
end;
end;
%%%%%%%%%'EXACT P
for j=1:M+1;
x=(j-1)*h;
esp(j)=exactp(x);
end;
%%%%%%%%%'THIRD ORDER ACCURACY %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%'First step THIRD ORDER ACCURACY %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%'Calculation U %%%%%%%%%%
A=zeros(N+1,N+1,M+1);
```

```

B=zeros(N+1,N+1,M+1);
C=zeros(N+1,N+1,M+1);
D=zeros(N+1,N+1,M+1);
E=zeros(N+1,N+1,M+1);
for j=1:M+1;
x=(j-1)*h;
for k=2:N;
A(k,k,j)=tau^2/(12*h^4);
B(k,k,j)=-1/(h^2)- tau^2/(3*h^4)-tau^2/(6*h^2);
C(k,k,j)=1+2/(tau^2)+2/(h^2)+tau^2/12*(6/(h^4)+4/(h^2)+1);
C(k,k+1,j)= -1/(tau^2);
C(k,k-1,j)= -1/(tau^2);
D(k,k,j)=-1/(h^2)-tau^2/(3*h^4)-tau^2/(6*h^2);
E(k,k,j)=tau^2/(12*h^4);
end;
C(1,1,j)=1;
C(1,s,j)=sbts/2-sbts^2/2;
C(1,s+1,j)=-1+sbts^2;
C(1,s+2,j)=-sbts/2-sbts^2/2;
C(N+1,N+1,j)=1;
C(N+1,1,j)=C(N+1,1,j)+m1*(lbt/2-lbt^2/2);
C(N+1,l+1,j)=C(N+1,l+1,j)+m1*(-1+lbt^2);
C(N+1,l+2,j)=C(N+1,l+2,j)+m1*(-lbt/2-lbt^2/2); C(N+1,q,j)=C(N+1,q,j)+m2*(qbtq/2-qbtq^2/2);
C(N+1,q+1,j)=C(N+1,q+1,j)+m2*(-1+qbtq^2);
C(N+1,q+2,j)=C(N+1,q+2,j)+m2*(-qbtq/2-qbtq^2/2); C(N+1,w,j)=C(N+1,w,j)+(m3)*(wbtw/2-
wbtw^2/2);
C(N+1,w+1,j)=C(N+1,w+1,j)+(m3)*(-1+wbtw^2);
C(N+1,w+2,j)=C(N+1,w+2,j)+(m3)*(-wbtw/2-wbtw^2/2);
end;
R=eye(N+1,N+1);
fii=zeros(N+1,M+1);
for j=1:M+1 ;
x=(j-1)*h;
for k=2:N;
tk=(k-1)*tau;
fii(k,j)=rsf(tk,x)+tau^2/12*((rsf(tk+tau,x)-2*rsf(tk,x)+rsf(tk-tau,x))...
/(tau^2)+(pi*pi+1)*rsf(tk,x));
end;
fii(1,j)=ksii(0,x)-ksii(gm,x);
fii(N+1,j)=ksii(T,x)-m1*ksii(lambda,x)-m2*ksii(miyu,x)-m3*ksii(omega,x);
end;

```

```

%%% Alpha, Betha, Gamma %%%
alpha{1} = zeros(N+1,N+1) ;
betha{1} = zeros(N+1,N+1) ;
gamma{1} = zeros(N+1,1) ;
alpha{2} = (4/5)*R;
betha{2} = (-1/5)*R;
gamma{2} = zeros(N+1,1);
%%%
for j = 3:M-1;
QQ=(C(:,j)+D(:,j)*alpha{j-1}+E(:,j)*betha{j-2}+E(:,j)*alpha{j-2}*alpha{j-1});
L=inv(QQ);
betha{j} = - L*A(:,j);
alpha{j} = - L*(B(:,j) +D(:,j)*betha{j-1}+E(:,j)*alpha{j-2}*betha{j-1}); gamma{j} =
L*(R*(fii(:,j)) - D(:,j)*gamma{j-1}-E(:,j)*alpha{j-2}*gamma{j-1}...
- E(:,j)*gamma{j-2} );
end;
%%%
U=zeros(N+1,M+1);
U(:,M)=inv( betha{M-2} + 5*R - (4*R-alpha{M-2} )*alpha{M-1})*((4*R- alpha{M-2})...
*gamma{M-1} - gamma{M-2});
%%% COMPUTE U(n) %%%
for j = M-1:-1:1 ; %%%M-3;
U(:,j)=alpha{j}*U(:,j+1)+betha{j}*U(:,j+2)+gamma{j};
end;
%%% Second step THIRD ORDER ACCURACY %%%
%%% Calculation of p(x) %%%
for j=2:M;
x=(j-1)*h;
Uj=(-sbts/2+sbts^2/2)*U(s,j)+(1-sbts^2)*U(s+1,j)+(sbts/2+sbts^2/2)*U(s+2,j);
Ujp1=(-sbts/2+sbts^2/2)*U(s,j+1)+(1-sbts^2)*U(s+1,j+1)+(sbts/2+sbts^2/2)*U(s+2,j+1);
Ujm1=(-sbts/2+sbts^2/2)*U(s,j-1)+(1-sbts^2)*U(s+1,j-1)+(sbts/2+sbts^2/2)*U(s+2,j-1);
p1(j)=-(-2*(ksii(gm,x)-Uj)+(ksii(gm,x+h)-Ujp1)+(ksii(gm,x-h)-Ujm1))/h^2+(ksii(gm,x)-Uj);
end;
p1(1)=exactp(0);
p1(M+1)=exactp(1);
%%% Third step THIRD ORDER ACCURACY %%%
%%% Calculation V %%%
V=zeros (N+1,M+1);
for j=1:M+1
x=(j-1)*h;
for k=1:N+1

```

```

Un=(-sbts/2+sbts^2/2)*U(s,j)+(1-sbts^2)*U(s+1,j)+(sbts/2+sbts^2/2)*U(s+2,j);
V(k,j)=U(k,j)+ksii(gm,x)-Un;
%t=(k-1)*tau;
Un=(-sbts/2+sbts^2/2)*U(s,j)+(1-sbts^2)*U(s+1,j)+(sbts/2+sbts^2/2)*U(s+2,j);
V(k,j)=U(k,j)+ksii(gm,x)-Un;
end
end
ptu=U;
pts=V;
ftf=esu-ptu;
fmat1=abs(ftf);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
maxerrorut=max(fmat4);
maxerrorp=0;
for j=2:M;
maxerrorp=maxerrorp+(esp(j)-p1(j))^2;
end;
maxerrorp=maxerrorp^(1/2)*h^(1/2);
ftf=es-pts;
fmat1=abs(ftf);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
maxerror=max(fmat4);
format('shortG');
Grids=[N,M];
cevapThirdAccuracy=[maxerrorut,maxerrorp,maxerror];
cevap=[Grids,cevapThirdAccuracy]
%%%GRAPH OF THE SOLUTION for THIRD ORDER ACCURACY%%
dif1=zeros(N+1,N+1);
for k=1:N+1;
dif1(k,1)=abs(es(k,1)-V(k,1));
for j=2:N;
dif1(k,j)=abs(es(k,j)-V(k,j));
end;
dif1(k,N+1)=abs(es(k,M+1)-V(k,M+1));
end;
str0=strcat('N=',num2str(N),' ','M=',num2str(M),' için gerçek çözüm');
figure; surf(es); title(str0); xlabel('t axis'); ylabel('x axis'); rotate3d;

```

```

str1=strcat( 'N=',num2str(N),',',',M=',num2str(M),'için 3 noktalı probleminin 3. mertebeden
yaklaşımı ');
figure; surf(pts); title(str1); xlabel('t axis'); ylabel('x axis'); rotate3d;
str3=strcat('N=',num2str(N),'için hata ');
figure; surf(dif1); title(str3); xlabel('t axis'); ylabel('x axis');rotate3d ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SUB FUNCTIONS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function estx=exact(t,x)
estx=2*t^3*sin(pi*x)+(t+1)*sin(pi*x);
function estxu=exactu(t,x)
estxu=2*t^3*sin(pi*x)+t*sin(pi*x);
function estxp=exactp(x)
estxp=(pi^2+1)*sin(pi*x);
function ksi=ksii(t,x)
ksi=2*t^3*sin(pi*x)+(t+1)*sin(pi*x);
function rsftx=rsf(t,x)
rsftx=2*(pi^2+1)*t^3*sin(pi*x)+(pi^2-11)*t*sin(pi*x);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Ek 2. Üç Noktalı DSDP'nin 4. Mertebeden Sayısal Çözümleri için
MATLAB Programı Kodları

```
function ellipticinversed3nG4(N,M,gm,lambda,miyu,omega)
% -vtt-vxx+v=f(t,x)+p(x);
%inverse problem
%v(0,x)=fi(x),v(1,x)=(1/5)*v(lambda,x)+(3/10)*v(miyu,x)+(1/2)*v(omega,x)+psi(x),
%v(gm,x)=ksi(x)
%v(t,0)=v(t,1)=0
%Second and Fouth order in t
if nargin < 1; end;
close;close;
T=1;
tau=T/N; h=1/M;
m1=0.2;m2=0.3;m3=0.5;
sbt=gm/tau;s=floor(sbt);sbts=sbt-s;
lbt=lambda/tau;l=floor(lbt);lbtl=lbt-l;
qbt=miyu/tau;q=floor(qbt);qbtq=qbt-q;
wbt=omega/tau;w=floor(wbt);wbtw=wbw-w;
%%%%%%%%%'EXACT SOLUTION U, V' %%%%%%%%%%
for j=1:M+1;
x=(j-1)*h;
for k=1:N+1;
tk=(k-1)*tau;
es(k,j)=exact(tk,x);
esu(k,j)=exactu(tk,x);
end;
end;
%%%%%%%%%'EXACT P
for j=1:M+1;
x=(j-1)*h;
esp(j)=exactp(x);
end;
%%%%%%%%%'FOURTH ORDER ACCURACY
%%%%%%%%%'
%%%%%%%%%'First step FOURTH ORDER ACCURACY %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%'Calculation U %%%%%%%%%%
A=zeros(N+1,N+1,M+1);
B=zeros(N+1,N+1,M+1);
C=zeros(N+1,N+1,M+1);
D=zeros(N+1,N+1,M+1);
```

```

E=zeros(N+1,N+1,M+1);
for j=1:M+1;
    %x=(n-1)*h;
    for k=2:N;
        A(k,k,j)=tau^2/(12*h^4);
        B(k,k,j)=-1/(h^2)-tau^2/(3*h^4)-tau^2/(6*h^2);
        C(k,k,j)=1+2/(tau^2)+2/(h^2)+tau^2/12*(6/(h^4)+4/(h^2)+1);
        C(k,k+1,j)= -1/(tau^2);
        C(k,k-1,j)= -1/(tau^2);
        D(k,k,j)=-1/(h^2)-tau^2/(3*h^4)-tau^2/(6*h^2);
        E(k,k,j)=tau^2/(12*h^4);
    end;
    C(1,1,j)=1;
    C(1,s-1,j)=-sbts/12+sbts^3/12;
    C(1,s,j)=2/3*sbts-sbts^2/2-sbts^3/6;
    C(1,s+1,j)=-1+sbts^2;
    C(1,s+2,j)=-2/3*sbts-sbts^2/2+sbts^3/6;
    C(1,s+3,j)=sbts/12-sbts^3/12;
    C(N+1,N+1,j)=1;
    C(N+1,l-1,j)=C(N+1,l-1,j)+m1*(-lbt/12+lbt^3/12);
    C(N+1,l,j)=C(N+1,l,j)+m1*(2/3*lbt-lbt^2/2-lbt^3/6);
    C(N+1,l+1,j)=C(N+1,l+1,j)+m1*(-1+lbt^2);
    C(N+1,l+2,j)=C(N+1,l+2,j)+m1*(-2/3*lbt-lbt^2/2+lbt^3/6);
    C(N+1,l+3,j)=C(N+1,l+3,j)+m1*(lbt/12-lbt^3/12);
    C(N+1,q-1,j)=C(N+1,q-1,j)+m2*(-qbtq/12+qbtq^3/12);
    C(N+1,q,j)=C(N+1,q,j)+m2*(2/3*qbtq-qbtq^2/2-qbtq^3/6);
    C(N+1,q+1,j)=C(N+1,q+1,j)+m2*(-1+qbtq^2);
    C(N+1,q+2,j)=C(N+1,q+2,j)+m2*(-2/3*qbtq-qbtq^2/2+qbtq^3/6);
    C(N+1,q+3,j)=C(N+1,q+3,j)+m2*(qbtq/12-qbtq^3/12);
    C(N+1,w-1,j)=C(N+1,w-1,j)+m3*(-wbtw/12+wbtw^3/12);
    C(N+1,w,j)=C(N+1,w,j)+m3*(2/3*wbtw-wbtw^2/2-wbtw^3/6);
    C(N+1,w+1,j)=C(N+1,w+1,j)+m3*(-1+wbtw^2);
    C(N+1,w+2,j)=C(N+1,w+2,j)+m3*(-2/3*wbtw-wbtw^2/2+wbtw^3/6);
    C(N+1,w+3,j)=C(N+1,w+3,j)+m3*(wbtw/12-wbtw^3/12);
end;
R=eye(N+1,N+1);
fii=zeros(N+1,M+1);
for j=1:M+1 ;
    x=(j-1)*h;
    for k=2:N;

```

```

tk=(k-1)*tau;
fii(k,j)=rsf(tk,x)+tau^2/12*((rsf(tk+tau,x)-2*rsf(tk,x)+rsf(tk-tau,x))...
/(tau^2)+(pi*pi+1)*rsf(tk,x));
end;
fii(1,j)=ksii(0,x)-ksii(gm,x);
fii(N+1,j)=ksii(T,x)-m1*ksii(lambda,x)-m2*ksii(miyu,x)-m3*ksii(omega,x);
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Alpha, Betha, Gamma%%%%%%%%
alpha{1} = zeros(N+1,N+1) ;
betha{1} = zeros(N+1,N+1) ;
gamma{1} = zeros(N+1,1) ;
alpha{2} = (4/5)*R;
betha{2} = (-1/5)*R;
gamma{2} = zeros(N+1,1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for j = 3:M-1;
QQ=(C(:,j)+D(:,j)*alpha{j-1}+E(:,j)*betha{j-2}+E(:,j)*alpha{j-2}*alpha{j-1});
L=inv(QQ);
betha{j} = -L*A(:,j);
alpha{j} = -L*(B(:,j)+D(:,j)*betha{j-1}+E(:,j)*alpha{j-2}*betha{j-1});
gamma{j} = L*(R*(fii(:,j))-D(:,j)*gamma{j-1}-E(:,j)*alpha{j-2}*gamma{j-1}...
-E(:,j)*gamma{j-2});
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
U=zeros(N+1,M+1);
U(:,M)=inv( betha{M-2} + 5*R - (4*R-alpha{M-2})*alpha{M-1})*((4*R- alpha{M-2})...
*gamma{M-1} - gamma{M-2});
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%COMPUTE U(n)%%%%%%%%
for j = M-1:-1:1 ;%%%%%%%%M-3;
U(:,j)=alpha{j}*U(:,j+1)+betha{j}*U(:,j+2)+gamma{j};
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Second step FOURTH ORDER ACCURACY %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calculation of p(x) %%%%%%%%%
for j=2:M;
x=(j-1)*h;
Uj=(sbts/12-sbts^3/12)*U(s-1,j)+((-2/3)*sbts+sbts^2/2+sbts^3/6)*U(s,j)+(1-sbts^2)...
*U(s+1,j)+((2/3)*sbts+sbts^2/2-sbts^3/6)*U(s+2,j)+(-sbts/12+sbts^3/12)*U(s+3,j);
Ujp1=(sbts/12-sbts^3/12)*U(s-1,j+1)+((-2/3)*sbts+sbts^2/2+sbts^3/6)*U(s,j+1)+(1-sbts^2)...
*U(s+1,j+1)+((2/3)*sbts+sbts^2/2-sbts^3/6)*U(s+2,j+1)+(-sbts/12+sbts^3/12)*U(s+3,j+1);
Ujml=(sbts/12-sbts^3/12)*U(s-1,j-1)+((-2/3)*sbts+sbts^2/2+sbts^3/6)*U(s,j-1)+(1-sbts^2)...
*U(s+1,j-1)+((2/3)*sbts+sbts^2/2-sbts^3/6)*U(s+2,j-1)+(-sbts/12+sbts^3/12)*U(s+3,j-1);

```

```

p1(j)=-(-2*(ksii(gm,x)-Uj)+(ksii(gm,x+h)-Ujp1)+(ksii(gm,x-h)-Ujm1))/h^2+(ksii(gm,x)-Uj);end;
p1(1)=exactp(0);
p1(M+1)=exactp(1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Third step FOURTH ORDER ACCURACY %%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calculation V %%%%%%%%%%%%%%
V=zeros(N+1,M+1);
for j=1:M+1;
x=(j-1)*h;
for k=1:N+1; %tk=(k-1)*tau;
Un=(sbts/12-sbts^3/12)*U(s-1,j)+(-2/3*sbts+sbts^2/2+sbts^3/6)*U(s,j)+...
(1-sbts^2)*U(s+1,j)+(2/3*sbts+sbts^2/2-sbts^3/6)*U(s+2,j)...
+(-sbts/12+sbts^3/12)*U(s+3,j);
V(k,j)=U(k,j)+ksii(gm,x)-Un;
end
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% ERROR ANALYSES FOR FOURTH ORDER ACCURACY
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
pfu=U;
ftf=esu-pfu;
fmat1=abs(ftf);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
maxerrorut=max(fmat4);
maxerrorp=0;
for j=2:M;
maxerrorp=maxerrorp+(esp(j)-p1(j))^2;
end;
maxerrorp=maxerrorp^(1/2)*h^(1/2);
pfv=V;
ftf=es-pfv;
fmat1=abs(ftf);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
maxerror=max(fmat4);
%es(k,j)=exact(tk,x);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Output FOR FOURTH ORDER ACCURACY
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
format('shortG');

```

```

Grids=[N,M];
cevapFourthAccuracy=[maxerrorut,maxerrorp,maxerror];
cevap=[Grids,cevapFourthAccuracy]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION for FOURTH ORDER
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
ACCURACY%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
dif1=zeros(N+1,N+1);
for k=1:N+1;
dif1(k,1)=abs(es(k,1)-V(k,1));
for j=2:N;
dif1(k,j)=abs(es(k,j)-V(k,j));
end;
dif1(k,N+1)=abs(es(k,M+1)-V(k,M+1));
end;
str0=strcat('N=',num2str(N),',','M=',num2str(M),'için gerçek çözüm');
figure; surf(es); title(str0); xlabel('t axis'); ylabel('x axis'); rotate3d;
str1=strcat('N=',num2str(N),',','M=',num2str(M),'için 3 noktalı probleminin 4. mertebeden
yaklaşımı');
figure; surf(pfv); title(str1); xlabel('t axis'); ylabel('x axis'); rotate3d;
str3=strcat('N=',num2str(N),'için hata ');
figure; surf(dif1); title(str3); xlabel('t axis'); ylabel('x axis'); rotate3d ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SUB FUNCTIONS
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function estx=exact(t,x)
estx=2*t^3*sin(pi*x)+(t+1)*sin(pi*x);
function estxu=exactu(t,x)
estxu=2*t^3*sin(pi*x)+t*sin(pi*x);
function estxp=exactp(x)
estxp=(pi^2+1)*sin(pi*x);
function ksi=ksii(t,x)
ksi=2*t^3*sin(pi*x)+(t+1)*sin(pi*x);
function rsftx=rsf(t,x)
rsftx=2*(pi^2+1)*t^3*sin(pi*x)+(pi^2-11)*t*sin(pi*x);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Ek 3. Üç Noktalı NSDP'nin 3. Mertebeden Sayısal Çözümleri için
MATLAB Programı Kodları

```
function ellipticinverse3nGN3(N,M,gm,lambda,miyu,omega)
% Computers numerical solution of the equation
% -Vtt-Vxx+V=f(t,x)+p(x);
%inverse problem
%V(0,x)=fi(x),V(1,x)=(1/10)*V(lambda,x)+(2/10)*V(miyu,x)+(7/10)*V(omega,x)+psi(x),
%V(gm,x)=ksi(x)
%Vx(t,0)=Vx(t,1)=0
%Second and Fouth order in t
if nargin < 1; end;
close;close;
T=1;
tau=T/N; h=1/M;
m1=(1/10);m2=(3/10);m3=(6/10);
sbt=gm/tau;s=floor(sbt);sbts=sbt-s;
lbt=lambda/tau;l=floor(lbt);lbtl=lbt-l;
qbt=miyu/tau;q=floor(qbt);qbtq=qbt-q;
wbt=omega/tau;w=floor(wbt);wbtw=wbt-w;
%%%%%%%%%'EXACT SOLUTION W,V,U' %%%%%%%%%%
for j=1:M+1;
x=(j-1)*h;
for k=1:N+1;
tk=(k-1)*tau;
es(k,j)=exact(tk,x);
esu(k,j)=exactu(tk,x);
end;
end;
%%%%%%%%%'EXACT P
for j=1:M+1;
x=(j-1)*h;
esp(j)=exactp(x);
end;
%%%%%%%%%'THIRD ORDER ACCURACY %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%'First step THIRD ORDER ACCURACY %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%'Calculation U %%%%%%%%%%
A=zeros(N+1,N+1,M+1);
B=zeros(N+1,N+1,M+1);
C=zeros(N+1,N+1,M+1);
D=zeros(N+1,N+1,M+1);
```

```

E=zeros(N+1,N+1,M+1);
for j=1:M+1;
x=(j-1)*h;
for k=2:N;
A(k,k,j)=tau^2/(12*h^4);
B(k,k,j)=-1/(h^2)-tau^2/(3*h^4)-tau^2/(6*h^2);
C(k,k,j)=1+2/(tau^2)+2/(h^2)+tau^2/12*(6/(h^4)+4/(h^2)+1);
C(k,k+1,j)= -1/(tau^2);
C(k,k-1,j)= -1/(tau^2);
D(k,k,j)=-1/(h^2)-tau^2/(3*h^4)-tau^2/(6*h^2);
E(k,k,j)=tau^2/(12*h^4);
end;
C(1,1,j)=1;
C(1,s,j)=sbts/2-sbts^2/2;
C(1,s+1,j)=-1+sbts^2;
C(1,s+2,j)=-sbts/2-sbts^2/2;
C(N+1,N+1,j)=1;
C(N+1,1,j)=C(N+1,1,j)+(m1)*(lbt/2-lbt^2/2);
C(N+1,1+1,j)=C(N+1,1+1,j)+(m1)*(-1+lbt^2);
C(N+1,1+2,j)=C(N+1,1+2,j)+(m1)*(-lbt/2-lbt^2/2);
C(N+1,q,j)=C(N+1,q,j)+(m2)*(qbtq/2-qbtq^2/2);
C(N+1,q+1,j)=C(N+1,q+1,j)+(m2)*(-1+qbtq^2);
C(N+1,q+2,j)=C(N+1,q+2,j)+(m2)*(-qbtq/2-qbtq^2/2);
C(N+1,w,j)=C(N+1,w,j)+(m3)*(wbtw/2-wbtw^2/2);
C(N+1,w+1,j)=C(N+1,w+1,j)+(m3)*(-1+wbtw^2);
C(N+1,w+2,j)=C(N+1,w+2,j)+(m3)*(-wbtw/2-wbtw^2/2);
end;
R=eye(N+1,N+1);
fii=zeros(N+1,M+1);
for j=1:M+1 ;
x=(j-1)*h;
for k=2:N;
tk=(k-1)*tau;
fii(k,j)=rsf(tk,x)+tau^2/12*((rsf(tk+tau,x)-2*rsf(tk,x)+rsf(tk-tau,x))...
/(tau^2)+(pi*pi+1)*rsf(tk,x));
end;
fii(1,j)=ksii(0,x)-ksii(gm,x);
fii(N+1,j)=ksii(T,x)-(m1)*ksii(lambda,x)-(m2)*ksii(miyu,x)-(m3)*ksii(omega,x);
end;
U=zeros(N+1,M+1);
%%% Alpha, Betha, Gamma %%%

```

```

alpha{1} = 4/3*R;
betha{1} = -1/3*R;
gamma{1} = zeros(N+1,1) ;
alpha{2} = (8/5)*R;
betha{2} = (-3/5)*R;
gamma{2} = zeros(N+1,1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for j = 3:M-3;
QQ=(C(:,j)+D(:,j)*alpha{j-1}+E(:,j)*betha{j-2}+E(:,j)*alpha{j-2}*alpha{j-1});
LL=inv(QQ);
betha{j} = - LL*A(:,j);
alpha{j} = - LL*(B(:,j) +D(:,j)*betha{j-1}+E(:,j)*alpha{j-2}*betha{j-1});
gamma{j} = LL*(R*(fii(:,j)) - D(:,j)*gamma{j-1}-E(:,j)*alpha{j-2}*gamma{j-1}...
- E(:,j)*gamma{j-2} );
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
alpha{M-1} = 4*R;
betha{M-1} = -3*R;
gamma{M-1} = zeros(N+1,1) ;
alpha{M-2} = (8/3)*R;
betha{M-2} = (-5/3)*R;
gamma{M-2} = zeros(N+1,1);
A12=A(:,M-2)+4*B(:,M-2)+9*C(:,M-2)+D(:,M-2)*(9*alpha{M-3}+4*betha{M-3}))+...
E(:,M-2)*(9*alpha{M-4}*alpha{M-3}+4*alpha{M-4}*betha{M-3}+9*betha{M-4});
A11=-3*B(:,M-2)-8*C(:,M-2)-D(:,M-2)*(8*alpha{M-3}+3*betha{M-3})-...
E(:,M-2)*(8*alpha{M-4}*alpha{M-3}+3*alpha{M-4}*betha{M-3}+8*betha{M-4});
A21=A(:,M-1)-3*C(:,M-1)-8*D(:,M-1)-E(:,M-1)*(8*alpha{M-3}+3*betha{M-3});
A22=B(:,M-1)+4*C(:,M-1)+9*D(:,M-1)+E(:,M-1)*(9*alpha{M-3}+4*betha{M-3});
F1=R*(fii(:,M-2))-D(:,M-2)*gamma{M-3}-E(:,M-2)*(gamma{M-4}+alpha{M-4}*gamma{M-3});
F2=R*(fii(:,M-1))-E(:,M-1)*gamma{M-3};
Q=inv(A22);
QZ=A11-A12*Q*A21;
F=inv(QZ);
U(:,M+1)=F*(F1-A12*Q*F2);
U(:,M)=Q*(F2-A21*U(:,M+1));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for j = M-1:-1:1 ;%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
U(:,j)=alpha{j}*U(:,j+1)+betha{j}*U(:,j+2)+gamma{j};
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Second step THIRD ORDER ACCURACY %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

%% Calculation of p(x)
for j=2:M;
x=(j-1)*h;
Uj=(-sbts/2+sbts^2/2)*U(s,j)+(1-sbts^2)*U(s+1,j)+(sbts/2+sbts^2/2)*U(s+2,j);
Ujp1=(-sbts/2+sbts^2/2)*U(s,j+1)+(1-sbts^2)*U(s+1,j+1)+(sbts/2+sbts^2/2)*U(s+2,j+1);
Ujm1=(-sbts/2+sbts^2/2)*U(s,j-1)+(1-sbts^2)*U(s+1,j-1)+(sbts/2+sbts^2/2)*U(s+2,j-1);
p1(j)=(-2*(ksii(gm,x)-Uj)+(ksii(gm,x+h)-Ujp1)+(ksii(gm,x-h)-Ujm1))/h^2+(ksii(gm,x)-Uj);
end;
p1(1)=exactp(0);
p1(M+1)=exactp(1);

%% Third step THIRD ORDER ACCURACY
%% Calculation V
V=zeros (N+1,M+1);
for j=1:M+1
x=(j-1)*h;
for k=1:N+1
%t=(k-1)*tau;
Un=(-sbts/2+sbts^2/2)*U(s,j)+(1-sbts^2)*U(s+1,j)+(sbts/2+sbts^2/2)*U(s+2,j);
V(k,j)=U(k,j)+ksii(gm,x)-Un;
end
end
ptu=U;
pts=V;
ftf=esu-ptu;
fmat1=abs(ftf);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
maxerrorut=max(fmat4);
maxerrorp=0;
for j=2:M;
maxerrorp=maxerrorp+(esp(j)-p1(j))^2;
end;
maxerrorp=maxerrorp^(1/2)*h^(1/2);
ftf=es-pts;
fmat1=abs(ftf);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
maxerror=max(fmat4);
format('shortG');

```

```

Grids=[N,M];
cevapThirdAccuracy=[maxerrorut,maxerrorp,maxerror];
cevap=[Grids,cevapThirdAccuracy]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION for THIRD ORDER
ACCURACY%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
dif1=zeros(N+1,N+1);
for k=1:N+1;
dif1(k,1)=abs(es(k,1)-V(k,1));
for j=2:N;
dif1(k,j)=abs(es(k,j)-V(k,j));
end;
dif1(k,N+1)=abs(es(k,M+1)-V(k,M+1));
end;
str0=strcat('N=',num2str(N),',','M=',num2str(M),'için gerçek çözüm');
figure; surf(es); title(str0); xlabel('t axis'); ylabel('x axis'); rotate3d;
str1=strcat('N=',num2str(N),',','M=',num2str(M),'için 3 noktalı probleminin 3. mertebeden
yaklaşımı');
figure; surf(pts); title(str1); xlabel('t axis'); ylabel('x axis'); rotate3d;
str3=strcat('N=',num2str(N),'için hata ');
figure; surf(dif1); title(str3); xlabel('t axis'); ylabel('x axis'); rotate3d ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SUB FUNCTIONS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function estx=exact(t,x)
estx=(sin(pi*t)*exp(-t)+t+1)*cos(pi*x);
function estxu=exactu(t,x)
estxu=(sin(pi*t)*exp(-t)+t)*cos(pi*x);
function estxp=exactp(x)
estxp=(pi^2+1)*cos(pi*x);
function ksi=ksii(t,x)
ksi=(sin(pi*t)*exp(-t)+t+1)*cos(pi*x);
function rsftx=rsf(t,x)
rsftx=((2*(pi^2)*sin(pi*t)+2*pi*cos(pi*t))*exp(-t)+((pi^2)+1)*t)*cos(pi*x);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Ek 4. Üç Noktalı NSDP'nin 4. Mertebeden Sayısal Çözümleri için
MATLAB Programı Kodları

```
function ellipticinverse3nGN4(N,M,gm,lambda,miyu,omega)
% Computers numerical solution of the equation
% -Vtt-Vxx+V=f(t,x)+p(x);
%inverse problem
%V(0,x)=fi(x),V(1,x)=(1/10)*V(lambda,x)+(3/10)*V(miyu,x)+(6/10)*V(omega,x)+psi(x),
%V(gm,x)=ksi(x)
%Vx(t,0)=Vx(t,1)=0
%Second and Fouth order in t
if nargin < 1; end;
close;close;
T=1;
tau=T/N; h=1/M;
m1=0.1;m2=0.3;m3=0.6;
sbt=gm/tau;s=floor(sbt);sbts=sbt-s;
lbt=lambda/tau;l=floor(lbt);lbtl=lbt-l;
qbt=miyu/tau;q=floor(qbt);qbtq=qbt-q;
wbt=omega/tau;w=floor(wbt);wbtw=wbt-w;
%%%%%%%%%'EXACT SOLUTION W,V,U' %%%%%%%%%%
for j=1:M+1;
x=(j-1)*h;
for k=1:N+1;
tk=(k-1)*tau;
es(k,j)=exact(tk,x);
esu(k,j)=exactu(tk,x);
end;
end;
%%%%%%%%%'EXACT P
for j=1:M+1;
x=(j-1)*h;
esp(j)=exactp(x);
end;
%%%%%%%%%'FOURTH ORDER ACCURACY %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%'First step FOURTH ORDER ACCURACY %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%'Calculation U %%%%%%%%%%
A=zeros(N+1,N+1,M+1);
B=zeros(N+1,N+1,M+1);
C=zeros(N+1,N+1,M+1);
```

```

D=zeros(N+1,N+1,M+1);
E=zeros(N+1,N+1,M+1);
for j=1:M+1;
x=(j-1)*h;
for k=2:N;
A(k,k,j)=tau^2/(12*h^4);
B(k,k,j)=-1/(h^2)-tau^2/(3*h^4)-tau^2/(6*h^2);
C(k,k,j)=1+2/(tau^2)+2/(h^2)+tau^2/12*(6/(h^4)+4/(h^2)+1);
C(k,k+1,j)= -1/(tau^2);
C(k,k-1,j)= -1/(tau^2);
D(k,k,j)=-1/(h^2)-tau^2/(3*h^4)-tau^2/(6*h^2);
E(k,k,j)=tau^2/(12*h^4);
end;
C(1,1,j)=1;
C(1,s-1,j)=-sbts/12+sbts^3/12;
C(1,s,j)=8/12*sbts-sbts^2/2-sbts^3/6;
C(1,s+1,j)=-1+sbts^2;
C(1,s+2,j)=-8/12*sbts-sbts^2/2+sbts^3/6;
C(1,s+3,j)=sbts/12-sbts^3/12;
C(N+1,N+1,j)=1;
C(N+1,l-1,j)=C(N+1,l-1,j)+m1*(-lbt/12+lbt^3/12);
C(N+1,l,j)=C(N+1,l,j)+m1*(8/12*lbt-lbt^2/2-lbt^3/6);
C(N+1,l+1,j)=C(N+1,l+1,j)+m1*(-1+lbt^2);
C(N+1,l+2,j)=C(N+1,l+2,j)+m1*(-8/12*lbt-lbt^2/2+lbt^3/6);
C(N+1,l+3,j)=C(N+1,l+3,j)+m1*(lbt/12-lbt^3/12);
C(N+1,q-1,j)=C(N+1,q-1,j)+m2*(-qbtq/12+qbtq^3/12);
C(N+1,q,j)=C(N+1,q,j)+m2*(8/12*qbtq-qbtq^2/2-qbtq^3/6);
C(N+1,q+1,j)=C(N+1,q+1,j)+m2*(-1+qbtq^2);
C(N+1,q+2,j)=C(N+1,q+2,j)+m2*(-8/12*qbtq-qbtq^2/2+qbtq^3/6);
C(N+1,q+3,j)=C(N+1,q+3,j)+m2*(qbtq/12-qbtq^3/12);
C(N+1,w-1,j)=C(N+1,w-1,j)+m3*(-wbtw/12+wbtw^3/12);
C(N+1,w,j)=C(N+1,w,j)+m3*(8/12*wbtw-wbtw^2/2-wbtw^3/6);
C(N+1,w+1,j)=C(N+1,w+1,j)+m3*(-1+wbtw^2);
C(N+1,w+2,j)=C(N+1,w+2,j)+m3*(-8/12*wbtw-wbtw^2/2+wbtw^3/6);
C(N+1,w+3,j)=C(N+1,w+3,j)+m3*(wbtw/12-wbtw^3/12);
end;
R=eye(N+1,N+1);
fii=zeros(N+1,M+1);
for j=1:M+1 ;
x=(j-1)*h;
for k=2:N;

```

```

tk=(k-1)*tau;
fii(k,j)=rsf(tk,x)+tau^2/12*((rsf(tk+tau,x)-2*rsf(tk,x)+rsf(tk-tau,x))...
/(tau^2)+(pi*pi+1)*rsf(tk,x));
end;
fii(1,j)=ksii(0,x)-ksii(gm,x);
fii(N+1,j)=ksii(T,x)-(m1)*ksii(lambda,x)-(m2)*ksii(miyu,x)-(m3)*ksii(omega,x);
end;
U=zeros(N+1,M+1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
alpha{ 1 } = 4/3*R;
betha{ 1 } = -1/3*R;
gamma{ 1 } = zeros(N+1,1) ;
alpha{ 2 } = (8/5)*R;
betha{ 2 } = (-3/5)*R;
gamma{ 2 } = zeros(N+1,1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for j = 3:M-3;
QQ=(C(:,j)+D(:,j)*alpha{j-1}+E(:,j)*betha{j-2}+E(:,j)*alpha{j-2}*alpha{j-1});
LL=inv(QQ);
betha{j} = - LL*A(:,j);
alpha{j} = - LL*(B(:,j) + D(:,j)*betha{j-1}+E(:,j)*alpha{j-2}*betha{j-1});
gamma{j} = LL*(R*(fii(:,j)) - D(:,j)*gamma{j-1}-E(:,j)*alpha{j-2}*gamma{j-1}...
- E(:,j)*gamma{j-2} );
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
alpha{M-1} = 4*R;
betha{M-1} = -3*R;
gamma{M-1} = zeros(N+1,1) ;
alpha{M-2} = (8/3)*R;
betha{M-2} = (-5/3)*R;
gamma{M-2} = zeros(N+1,1);
A12=A(:,M-2)+4*B(:,M-2)+9*C(:,M-2)+D(:,M-2)*(9*alpha{M-3}+4*betha{M-3})+...
E(:,M-2)*(9*alpha{M-4}*alpha{M-3}+4*alpha{M-4}*betha{M-3}+9*betha{M-4});
A11=-3*B(:,M-2)-8*C(:,M-2)-D(:,M-2)*(8*alpha{M-3}+3*betha{M-3})-...
E(:,M-2)*(8*alpha{M-4}*alpha{M-3}+3*alpha{M-4}*betha{M-3}+8*betha{M-4});
A21=A(:,M-1)-3*C(:,M-1)-8*D(:,M-1)-E(:,M-1)*(8*alpha{M-3}+3*betha{M-3});
A22=B(:,M-1)+4*C(:,M-1)+9*D(:,M-1)+E(:,M-1)*(9*alpha{M-3}+4*betha{M-3});
F1=R*(fii(:,M-2))-D(:,M-2)*gamma{M-3}-E(:,M-2)*(gamma{M-4}+alpha{M-4}*gamma{M-3});
F2=R*(fii(:,M-1))-E(:,M-1)*gamma{M-3};
Q=inv(A22);

```

```

QZ=A11-A12*Q*A21;
F=inv(QZ);
U(:,M+1)=F*(F1-A12*Q*F2);
U(:,M)=Q*(F2-A21*U(:,M+1));
%% COMPUTE U(n)
for j = M-1:-1:1 ;
    U(:,j)=alpha{j}*U(:,j+1)+betha{j}*U(:,j+2)+gamma{j};
end;
%% Second step FOURTH ORDER ACCURACY
%% Calculation of p(x)
for j=2:M;
    x=(j-1)*h;
    Uj=(sbts/12-sbts^3/12)*U(s-1,j)+((-8/12)*sbts+sbts^2/2+sbts^3/6)*U(s,j)+(1-sbts^2)...
    *U(s+1,j)+((8/12)*sbts+sbts^2/2-sbts^3/6)*U(s+2,j)+(-sbts/12+sbts^3/12)*U(s+3,j);
    Ujp1=(sbts/12-sbts^3/12)*U(s-1,j+1)+((-8/12)*sbts+sbts^2/2+sbts^3/6)*U(s,j+1)+(1-sbts^2)...
    *U(s+1,j+1)+((8/12)*sbts+sbts^2/2-sbts^3/6)*U(s+2,j+1)+(-sbts/12+sbts^3/12)*U(s+3,j+1);
    Ujm1=(sbts/12-sbts^3/12)*U(s-1,j-1)+((-8/12)*sbts+sbts^2/2+sbts^3/6)*U(s,j-1)+(1-sbts^2)...
    *U(s+1,j-1)+((8/12)*sbts+sbts^2/2-sbts^3/6)*U(s+2,j-1)+(-sbts/12+sbts^3/12)*U(s+3,j-1);
    p1(j)=(-2*(ksii(gm,x)-Uj)+(ksii(gm,x+h)-Ujp1)+(ksii(gm,x-h)-Ujm1))/h^2+(ksii(gm,x)-Uj);
end;
p1(1)=exactp(0);
p1(M+1)=exactp(1);
%% Third step FOURTH ORDER ACCURACY
%% Calculation V
V=zeros(N+1,M+1);
for j=1:M+1;
    x=(j-1)*h;
    for k=1:N+1; %tk=(k-1)*tau;
        Un=(sbts/12-sbts^3/12)*U(s-1,j)+(-8/12*sbts+sbts^2/2+sbts^3/6)*U(s,j)+...
        (1-sbts^2)*U(s+1,j)+(8/12*sbts+sbts^2/2-sbts^3/6)*U(s+2,j)+(-sbts/12+sbts^3/12)*U(s+3,j);
        V(k,j)=U(k,j)+ksii(gm,x)-Un;
    end
end;
%% ERROR ANALYSES FOR FOURTH ORDER ACCURACY
%%
pfu=U;
ftf=esu-pfu;
fmat1=abs(ftf);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);

```

```

maxerrorut=max(fmat4);
maxerrorp=0;
for j=2:M;
maxerrorp=maxerrorp+(esp(j)-p1(j)) ^2;
end;
maxerrorp=maxerrorp^(1/2)*h^(1/2);
pfv=V;
ftf=es-pfv;
fmat1=abs(ftf);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
maxerror=max(fmat4);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Output FOR FOURTH ORDER ACCURACY
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
format('shortG');
Grids=[N,M];
cevapFourthAccuracy=[maxerrorut,maxerrorp,maxerror];
cevap=[Grids,cevapFourthAccuracy]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION for FOURTH ORDER
ACCURACY%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
dif1=zeros(N+1,N+1);
for k=1:N+1;
dif1(k,1)=abs(es(k,1)-V(k,1));
for j=2:N;
dif1(k,j)=abs(es(k,j)-V(k,j));
end;
dif1(k,N+1)=abs(es(k,M+1)-V(k,M+1));
end;
str0=strcat('N=',num2str(N),',','M=',num2str(M),'için gerçek çözüm');
figure; surf(es); title(str0); xlabel('t axis'); ylabel('x axis'); rotate3d;
str1=strcat('N=',num2str(N),',','M=',num2str(M),'için 3 noktalı probleminin 4. mertebeden
yaklaşımı');
figure; surf(pfv); title(str1); xlabel('t axis'); ylabel('x axis'); rotate3d;
str3=strcat('N=',num2str(N),'için hata ');
figure; surf(dif1); title(str3); xlabel('t axis'); ylabel('x axis'); rotate3d ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SUB FUNCTIONS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function estx=exact(t,x)
estx=(sin(pi*t)*exp(-t)+t+1)*cos(pi*x);
function estxu=exactu(t,x)
estxu=(sin(pi*t)*exp(-t)+t)*cos(pi*x);

```

```

function estxp=exactp(x)
estxp=(pi^2+1)*cos(pi*x);
function ksi=ksii(t,x)
ksi=(sin(pi*t)*exp(-t)+t+1)*cos(pi*x);
function rsftx=rsf(t,x)
rsftx=((2*(pi^2)*sin(pi*t)+2*pi*cos(pi*t))*exp(-t)+((pi^2)+1)*t)*cos(pi*x);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

ÖZGEÇMİŞ

İlk, orta ve lise öğrenimini Taşkent ili Kibray ilçesinde tamamladı. 1999 yılında, Uluslararası Hoca Ahmet Yesevi Türk-Kazak Üniversitesi Matematik, Matematik Öğretmenliği bölümünden üstün başarı diploması alarak mezun oldu. Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimini 2017 yılında, lisansüstü eğitim enstitüsü Matematik Anabilim Dalında da doktorasını 2021 yılında başarıyla tamamladı.

Evli ve dört çocuk annesi olan Gulzipa AKYÜZ, Kazakça ve Rusça dillerini iyi derecede bilmektedir.

Yayınlar:

- Ashyralyev, C. ve Akyuz, G. (2016). Stability estimates for solution of Bitsadze-Samarskii type inverse elliptic problem with Dirichlet conditions. AIP Conference Proceedings, 1759, 1, 020129.
- Ashyralyev, C. Akyuz, G. ve Dedetürk, M. (2017). Approximate solution for an inverse problem of multidimensional elliptic equation with multipoint nonlocal and Neumann boundary conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, 197, 1-16.
- Ashyralyev, C. Akyuz, G. ve Dedetürk, M. (2017). Numerical solution of inverse problem for multidimensional elliptic equation with multipoint nonlocal and Neumann boundary conditions. International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017), Harran University, Şanlıurfa, 11-13 May 2017.
- Ashyralyev, C. ve Akyuz, G. (2018). A third order of accuracy difference scheme for Bitsadze-Samarskii type multi-point overdetermined elliptic problem. The Abstract Book, 47.
- Ashyralyev, C. ve Akyuz, G. (2018). Finite difference method for Bitsadze-Samarskii type overdetermined elliptic problem with Dirichlet conditions. *Filomat*, 32, 3, 859-872.
- Ashyralyev, C. ve Akyuz, G. (2018). A third order of accuracy difference scheme for Bitsadze-Samarskii type elliptic overdetermined multi-point problem. AIP Conference Proceedings 1997, 1, 020009.

Ashyralyyev, C. ve Akyuz, G. (2021). Stability estimates for a third order of accuracy difference scheme elliptic overdetermined multi-point problem. AIP Conference Proceedings 2334, 1, 060011.

Ashyralyyev, C. ve Akyuz, G. (2021). On fourth order accuracy stable difference scheme for a multi-point overdetermined elliptic problem. *Серия Математика*, 2, 45-53.

