

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YIĞILMAYA DAYALI AĞ ANALİZİ



Aysun Asena KUNT ERDOĞAN

Haziran, 2022

İZMİR

YIĞILMAYA DAYALI AĞ ANALİZİ

Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi

Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Aysun Asena KUNT ERDOĞAN

Haziran, 2022

İZMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

AYSUN ASENS KUNT ERDOĞAN, tarafından **DOÇ.DR. ZEYNEP NİHAN BERBERLER** yönetiminde hazırlanan “**YIĞILMAYA DAYALI AĞ ANALİZİ**” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

.....
Doç.Dr. Zeynep Nihan BERBERLER

Danışman

.....
Dr.Öğr.Üyesi Hande TUNÇEL GÖLPEK

Jüri Üyesi

.....
Doç.Dr. Tufan TURACI

Jüri Üyesi

.....
Prof.Dr. Okan FISTIKOĞLU
Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca değerli bilgi ve birikimlerini benimle paylaşan, kıymetli zamanını bana ayıran değerli danışman hocam Doç.Dr Zeynep Nihan BERBERLER'e ve yüksek lisans eğitimim boyunca manevi desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen aileme sonsuz teşekkür ederim. Şükranlarımı sunmaktan büyük mutluluk duyuyorum.

Aysun Asena KUNT ERDOĞAN



YIĞILMAYA DAYALI AĞ ANALİZİ

ÖZ

Ağlar, kimyasal sistemler, yapay sinir ağları, sosyal ağlar veya internet ve World Wide Web gibi farklı sistemleri modellemek için kullanılmaktadır. Bir iletişim ağı merkezlerden ve bu merkezleri birbirine bağlayan bağlantı hatlarından oluşur. Çizge kuramı bir iletişim ağının mimarisinin tasarımında ve analizinde güçlü bir matematiksel araçtır. Bir iletişim ağının temelini oluşturan topoloji bir çizge ile modellendiğinde çizgenin tepeler kümesi ağdaki merkezlere çizgenin ayrıtlar kümesi ağdaki bağlantı hatlarına karşılık gelir. Ağdaki önemli bir tepenin zarar görmesi çoğu durumda tüm ağın zarar görmesine yol açar. Bu nedenle önemli tepelerin belirlenmesi karmaşık ağların temel tepelerini koruyarak ağların sürdürülebilirliğini ve sağlamlığını arttırmaya yardımcı olur. Karmaşık ağlarda tepelerin öneminin belirlenmesi problemini çözmek için yığılmaya dayalı tepe büzülmesini temel alan bir yöntem önerilmiştir.

Bu tezde çevre, yol ve benzeri çizgelerin yığılma değerleri hesaplanmış ve sonrasında büzülme işleminden yararlanılarak ilgili çizgelerin tepelerinin önem değerleri hesaplanmıştır. Bir çizgenin tepelerinin önem değerlerini bulan polinom zamanlı bir algoritma önerilmiştir.

Anahtar kelimeler: Ağ yığılması, tepe önemi, bağlantılılık, çevre çizge, yol çizge, uzaklık, tepe derecesi

AGGLOMERATION BASED NETWORK ANALYSIS

ABSTRACT

Networks are used to model different systems such as chemical systems, artificial neural networks, social systems or the internet and the World Wide Web. A communication network is composed of processing nodes and links connecting these nodes. Graph theory is a powerful mathematical tool in the design and analysis of the architecture of a communication network. If the underlying topology of a communication network is modeled by a graph, the node set of the graph corresponds to processors and the edge set of the graph corresponds to communication links in the network. Damage to an important node in the network in most cases results in damage to the entire network. Therefore identifying the important nodes helps to increase the sustainability and robustness of the complex networks by preserving the fundamental nodes. To solve the problem of determining the importance of nodes in complex networks a method of node contraction based on agglomeration is proposed.

In this thesis agglomeration of cycle, path and related graphs are evaluated and then importance of nodes of the related graphs is determined by the use of contraction operation. A polynomial time algorithm which determines the importance of the nodes of a graph is proposed.

Keywords: Network agglomeration, node importance, connectivity, cycle, path, distance, vertex degree

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZ.....	iv
ABSTRACT	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
BÖLÜM BİR – GİRİŞ	1
BÖLÜM İKİ – TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER	4
BÖLÜM ÜÇ – YIĞILMAYA DAYALI TEPE ÖNEMİ ANALİZİ	7
BÖLÜM DÖRT – ÇEVRE VE BENZERİ ÇİZGELERDE ÖNEMLİ TEPELERİN BELİRLENMESİ	11
4.1 Çevre Çizge	11
4.2 Yelpaze Çizge	13
4.3 k-Piramit Çizge	18
4.4 Güneş Çizge.....	21
BÖLÜM BEŞ – YOL VE BENZERİ ÇİZGELERDE ÖNEMLİ TEPELERİN BELİRLENMESİ	24
5.1 Yol Çizge	24
5.2 Kuyruklu Yıldız Çizge.....	26
5.3 Çift Kuyruklu Yıldız Çizge	30
5.4 Lolipop Çizge	36
BÖLÜM ALTI – TEPE ÖNEMİ ALGORİTMASI	40

6.1 Bir Çizgenin Tepelerinin Önem Değerlerini Hesaplayan Algoritma	40
BÖLÜM YEDİ – SONUÇLAR	44
KAYNAKLAR.....	45



ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1 v tepesinin büzülme işlemi	7
Şekil 3.2 5 tepeli H çizgesi.....	8
Şekil 4.1 $n = 7$ için yelpaze çizge F_n	13
Şekil 4.2 $n = 4$ ve $k = 3$ için 7 tepeli k -piramit çizge $kP(n)$	18
Şekil 4.3 $n = 4$ için 8 tepeli güneş çizge S_n	21
Şekil 5.1 $s = 5$ ve $t = 6$ için 11 tepeli kuyruklu yıldız çizge $C_{s,t}$	26
Şekil 5.2 $n = 12, a = 3, b = 4$ için çift kuyruklu yıldız çizge $DC(n, a, b)$	30
Şekil 5.3 $n = 11$ ve $d = 6$ için lolipop çizge $L_{n,d}$	36

BÖLÜM BİR

GİRİŞ

Hızlı ve kesintisiz iletişim günümüzde oldukça önemli ve vazgeçilmezdir. İletişim hızındaki artış ve etkinlik ilgili ağı oldukça önemli ve değerli kılar. Dolayısıyla ağ tasarımı ve analizindeki amaç her türlü saldırı veya işlev bozukluğu durumunda ağ sisteminin davranışını öngörebilmek, anlayabilmek ve mümkünse kontrol altına alabilmek olmalıdır.

Ağlar, kimyasal sistemler, yapay sinir ağları, sosyal ağlar veya internet ve World Wide Web gibi farklı sistemleri modellemek için kullanılmaktadır. Bir iletişim ağı merkezlerden ve bu merkezleri birbirine bağlayan bağlantı hatlarından oluşur. Bir iletişim ağının dayanıklılığı ağ tasarımcıları için büyük öneme sahiptir. İletişim ağının bağlantı hatlarının veya merkezlerinin zarara uğraması ağın etkinliğini kaybetmesine neden olur. Ağın işlevsel olarak tasarlanması ağdaki merkezlerin veya bağlantı hatlarının bozulması durumunda ağın işlev dışı kalma olasılığını azaltır. Dolayısıyla bir iletişim ağı dıştan gelen etkiler altında kolayca bozulmayacak şekilde bozulmaya uğraması durumunda da kolayca yeniden yapılandırılabilir şekilde tasarlanmalıdır.

Çizge kuramı bir iletişim ağının mimarisinin tasarımında ve analizinde güçlü bir matematiksel araçtır. Çizge teorisine dayalı tasarlanan iletişim ağları daha etkin çalışan ağlardır. Bir iletişim ağının gereksinimleri teorik çizge parametreleri cinsinden ifade edildiğinde ağların tasarımı ve analizi problemi bazı belirlenen gereksinimleri karşılayan bir çizge oluşturma problemine karşılık gelir. Bir $G = (V(G), E(G))$ çizgesi tepeler olarak adlandırılan ve $V(G)$ ile gösterilen sonlu sayıda nesneden oluşan boştan farklı bir küme ile G çizgesinin ayrık tepe çiftlerinin sıralanmamış ikililerinin oluşturduğu ayrıtlar olarak adlandırılan (bu küme boş olabilir) ve $E(G)$ ile gösterilen kümeden oluşur. Bir iletişim ağının temelini oluşturan topoloji bir çizge ile modellendiğinde çizgenin tepeler kümesi ağdaki merkezlere çizgenin ayrıtlar kümesi ağdaki bağlantı hatlarına karşılık gelir.

Ağdaki önemli bir tepenin zarar görmesi çoğu durumda tüm ağın zarar görmesine yol açar. Bu nedenle ağların temel tepelerini belirlemek oldukça önemlidir. Önemli tepelerin belirlenmesi karmaşık ağların analizinde temel bir konudur ve birçok uygulama alanında oldukça anlamlıdır (Albert ve Barabási, 2002; Boccaletti, Latora, Moreno, Chavez, ve Hwang, 2006; Corso ve Romani, 2016; Domenico, Solé-Ribalta, Omodei, Gómez, ve Arenas, 2015; Nardelli, Proietti, ve Widmayer, 2001; Wang, Liu, Gu, Wang, ve Jia, 2010; Zhang, Zhou, Xu, ve Small, 2010). Örneğin bir virüs ağının yayılmasında virüsün daha fazla yayılmasını önlemek için ana yayılma kaynağının bulunmasına ve kontrol edilmesine yardımcı olabilir (Malliaros, Rossi, ve Vazirgiannis, 2016). Bir sosyal ağda etkili tepelerin yardımıyla bilgi yayılımı hızlandırılabilir (Liu, Ren, Guo, ve Wang, 2013). Büyük ölçekli bilgisayar ağlarında sunucuların yedeklenmesi ve sunucuların önemine göre yedekli tasarım yapılması önemlidir; bu yalnızca bilgisayar ağının sağlamlığını arttırmaz aynı zamanda kaynakları da koruyarak ağ optimizasyonunu sağlar (Lawyer, 2015). Dolayısıyla önemli tepelerin belirlenmesi karmaşık ağların temel tepelerini koruyarak ağların sürdürülebilirliğini ve sağlamlığını arttırmaya yardımcı olur. İletişim ağlarının tasarımı sırasında önemli tepelerin hata oranlarını azaltmak için daha fazla dikkat edilmesi ağların güvenilirliğinin artırılmasında etkili bir yaklaşımdır (Havlin ve diğer., 2012).

Karmaşık ağlarda tepelerin öneminin belirlenmesi için derece merkezliği, arada bulunma merkezliği, yakınlık merkezliği, özdeğer merkezliği gibi merkeziyet ölçümleri (Bonacich ve Lloyd, 2001; Borgatti, 2005; Du, Gao, Hu, Mahadevan, ve Deng, 2014; Freeman, 1977; Gao, Ma, Chen, Wang, ve Xing, 2014; Sabidussi, 1966) ve kapsayan ağaçlara dayalı yöntemler (Chen, Hu, Hu, ve Chen, 2004) yaygın olarak kullanılmaktadır. Karmaşık ağlarda önemli tepeleri belirleme problemi için mevcut yöntemlerin çoğu en önemli tepe, bozulması ağ performasında en büyük düşüşe neden olan tepedir, değerlendirme kriterine dayanır. Ancak tepe atılmasında en büyük problem eğer tüm tepe bozulmaları ağın parçalanmasıyla sonuçlanıyorsa tepe öneminin bir anlamı olmayacaktır (Liu, Wang, ve Liu, 2014).

Karmaşık ağlarda tepelerin öneminin belirlenmesi problemini çözmek için yığılmaya dayalı tepe büzülmesini temel alan gelişmiş bir yöntem önerilmiştir (Tan, Wu, ve Deng, 2006). Bu yöntemde bir tepenin hem derecesi hem de ağdaki konumu değerlendirilir. Ağdaki her bir tepeyi büzerek ve bu büzme işleminden sonra değişen ağ verimliliğini göz önüne alarak ve ağ yığılmasına dayalı olarak önemli tepeleri belirleyen ve ağdaki tüm tepeleri önem derecelerine göre sıralamak için önerilen yeni bir yöntemdir. Ağdaki en önemli tepe, büzülmesi ağ yığılmasında en büyük artışa neden olan tepedir. Tepe derecesini ve bu tepeden geçen en kısa yolların sayısını ele alan bu yöntemde bir tepenin derecesi ne kadar büyükse ve bu tepe ne kadar önemli bir konumda bulunuyorsa bu tepenin büzülmesinden sonra yığılma o kadar büyüktür ve buna bağlı olarak da o tepe daha önemlidir. Ayrıca bir tepenin büzülmesi tepe ve ayrıt sayısını azaltır ve buna bağlı olarak iş yükü azalır. Bu da bu yöntemin önemli bir avantajıdır. Her bir tepenin katkısının doğrudan değerlendirildiği bu yöntemde açıklayıcı örnekler ve elde edilen sonuçlar, sezgisel yargılarla tutarlı olup yöntemin geçerliliğini, uygulanabilirliğini ve verimliliğini doğrulamaktadır (Tan, Wu, ve Deng, 2006).

Bu çalışmanın ikinci bölümünde diğer bölümlerde kullanılacak olan genel tanım ve teoremler verilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde bir çizgenin yığılma değeri ve bir tepenin tepe önemi değeri tanımlanmıştır. Dördüncü ve beşinci bölümde, sırasıyla, çevre ve benzeri çizgelerin, yol ve benzeri çizgelerin yığılma değerleri hesaplanmış ve sonrasında büzülme işleminden yararlanılarak ilgili çizgelerin tepelerinin önem değerleri hesaplanmıştır. Son olarak, altıncı bölümde bir çizgenin tepelerinin önem değerlerini bulan polinom zamanlı bir algoritma önerilmiştir.

BÖLÜM İKİ

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde bu tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bu tezde bukle ve katlı ayırıt içermeyen basit yönsüz çizgeler üzerinde çalışılmıştır.

Tanım 2.1: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir G çizgesinin her tepe çifti arasında en az bir yol var ise, G çizgesine birleştirilmiş çizge denir.

Tanım 2.2: (Chartrand ve Lesniak, 1996) G çizgesi $V(G)$ tepeler kümesi ve $E(G)$ ayırılar kümesine sahip olan bir çizge olsun. $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ olacak şekilde $V(H)$ tepeler kümesi ve $E(H)$ ayırılar kümesine sahip olan H çizgesine G çizgesinin alt çizgesi denir ve $H \subset G$ ile gösterilir.

Tanım 2.3: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir $G = (V(G), E(G))$ çizgesinde $S \subseteq V(G)$ boş kümeden farklı bir küme olmak üzere $G[S]$ etkilenmiş alt çizge S tepeler kümesini ve G çizgesinde S kümesindeki tepe çiftleri arasında bulunan ayırıları içerir.

Tanım 2.4: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Ağaç, çevre içermeyen birleştirilmiş bir çizgedir.

Tanım 2.5: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir G çizgesinde herhangi bir v tepesi herhangi bir ayırıt ile bitişik değil ise bu tepeye izole tepe denir.

Tanım 2.6: (Chartrand ve Lesniak, 1996) G çizgesi $V(G)$ tepeler kümesine sahip olan bir çizge, $v \in V(G)$ ve $|V(G)| \geq 2$ olmak üzere $G \setminus \{v\}$ çizgesi $V(G) \setminus \{v\}$

tepeler kümesine ve G çizgesinin v tepesine bitişik olan ayrıtları dışındaki diğer tüm ayrıtlara sahip olan bir alt çizgedir.

Tanım 2.7: (West, 2001) Bir $G = (V(G), E(G))$ çizgesinde $v \in V(G)$ olmak üzere v tepesinin komşuluğu veya açık komşuluğu $N(v)$ veya $N_G(v)$ şeklinde gösterilir ve $N_G(v) = \{u \in V(G) | uv \in E(G)\}$ şeklinde tanımlanır. $S \subseteq V(G)$ olmak üzere S kümesinin komşuluğu veya açık komşuluğu $N(S)$ veya $N_G(S)$ şeklinde gösterilir ve $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.8: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir G çizgesinin herhangi bir v tepesine bitişik olan ayrıtların sayısına v tepesinin derecesi denir ve $deg(v)$ veya $deg_G(v)$ ile gösterilir.

Tanım 2.9: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir G çizgesinin tüm tepelerinin dereceleri içerisinde en büyük olan tepe derecesine G çizgesinin en büyük tepe derecesi denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.10: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir G çizgesinin tüm tepelerinin dereceleri içerisinde en küçük olan tepe derecesine G çizgesinin en küçük tepe derecesi denir ve $\delta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.11: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir G çizgesinde tepe derecesi 1 olan tepeye uç tepe denir.

Teorem 2.1: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir $G = (V(G), E(G))$ çizgesinin tepe derecelerinin toplamı ayrıt sayısının iki katıdır; $\sum_{v \in V(G)} deg_G(v) = 2|E(G)|$.

Tanım 2.12: (Buckley ve Harary, 1990) Bir G çizgesinde herhangi iki tepeyi birbirine bağlayan yollardan en az ayrıta sahip olan yola en kısa yol denir.

Tanım 2.13: (Buckley ve Harary, 1990) Bir $G = (V(G), E(G))$ çizgesinde herhangi iki tepe arasındaki en kısa yolda bulunan ayrıt sayısına iki tepe arasındaki uzaklık denir. $u, v \in V(G)$ olmak üzere G çizgesinde u ve v tepeleri arasındaki uzaklık $d(u, v)$ veya $d_G(u, v)$ ile gösterilir.

Tanım 2.14: (Buckley ve Harary, 1990) $G = (V(G), E(G))$ birleştirilmiş bir çizge ve $v \in V(G)$ olmak üzere v tepesinin açıklık değeri $e(v)$ veya $e_G(v)$ ile gösterilir ve $e(v) = \max\{d(u, v) | u \in V(G)\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.15: (Buckley ve Harary, 1990) $G = (V(G), E(G))$ çizgesinin çapı $diam(G)$ ile gösterilir ve $diam(G) = \max\{e(v) | v \in V(G)\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.16: (Chartrand ve Lesniak, 1996) $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ ve $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ ayrık tepe kümelerine sahip iki çizge olsun. G_1 ve G_2 çizgelerinin toplama işlemi sonucunda elde edilen $G = G_1 + G_2$ çizgesi $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ tepeler kümesi ve $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(u, v) | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ ayrıtlar kümesine sahiptir.

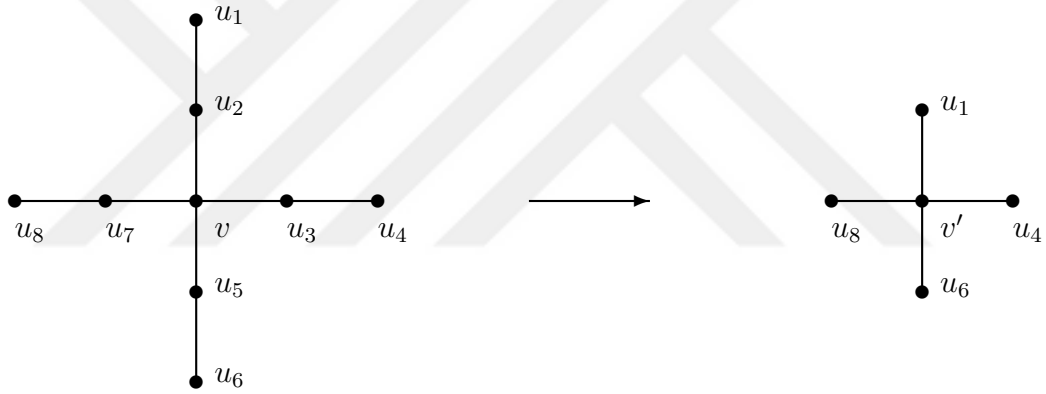
Tanım 2.17: (Buckley ve Harary, 1990) Birleştirilmiş bir G çizgesini birleştirilmemiş bir çizge ya da sadece izole tepelerden oluşan bir çizge haline getirmek için çizgeden atılması gereken en az tepe sayısına çizgenin tepe bağlantılılık sayısı denir.

BÖLÜM ÜÇ

YIĞILMAYA DAYALI TEPE ÖNEMİ ANALİZİ

Bu bölümde, tepe büzülme işlemi, bir çizgenin yığılma değeri ve bir tepenin tepe önemi değeri tanımlanmıştır.

Tanım 3.1: (Tan, Wu, ve Deng, 2006) G çizgesinde $v \in V(G)$ tepesi için v tepesinin büzülmesi v tepesine komşu olan $|N(v)|$ tepeyi v tepesinde birleştirir; yani $|N(v)| + 1$ tepe yeni bir v' tepesi ile yer değiştirir. v tepesi ve v tepesine komşu olan tepeler yeni bir v' tepesi olarak tanımlanır.

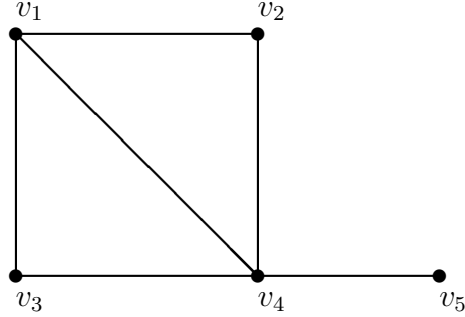


Şekil 3.1 v tepesinin büzülme işlemi

Tanım 3.2: (Tan, Wu, ve Deng, 2006) G n tepeli bir çizge ve $L(G)$ G çizgesinin ortalama yol uzunluğu olmak üzere G çizgesinin yığılma değeri $\varphi(G) = \frac{1}{nL(G)} = \frac{1}{n \left(\frac{\sum_{u,v \in V(G)} d_{uv}}{n(n-1)} \right)} = \frac{n-1}{\sum_{u,v \in V(G)} d_{uv}}$ olarak tanımlanır.

$n = 1$ ise çizgenin yığılma değeri $\varphi(G) = 1$ olarak tanımlanır. Çizgenin yığılma değeri $0 < \varphi(G) \leq 1$ sınır değerlerine sahiptir ve $n = 1$ için $\varphi(G) = 1$ en büyük değerini alır.

Örnek 3.1: H çizgesinin yığılma değerinin hesaplanması:



Şekil 3.2 5 tepeli H çizgesi

H çizgesinin yığılma değerini hesaplamak için beş durum söz konusudur:

Durum 1: $v_1 \in V(H)$ tepesinin açık komşuluğu $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$ kümesidir dolayısıyla v_1 tepesi v_5 tepesine 2 uzaklıktadır. $\sum_{i=2}^5 d_{v_1 v_i} = 1 + 1 + 1 + 2 = 5$ olur.

Durum 2: $v_2 \in V(H)$ tepesinin açık komşuluğu $N(v_2) = \{v_1, v_4\}$ kümesidir dolayısıyla v_2 tepesi v_3 ve v_5 tepelerine 2 uzaklıktadır. $\sum_{i=1, i \neq 2}^5 d_{v_2 v_i} = 1 + 2 + 1 + 2 = 6$ olur.

Durum 3: $v_3 \in V(H)$ tepesinin açık komşuluğu $N(v_3) = \{v_1, v_4\}$ kümesidir dolayısıyla v_3 tepesi v_2 ve v_5 tepelerine 2 uzaklıktadır. $\sum_{i=1, i \neq 3}^5 d_{v_3 v_i} = 1 + 2 + 1 + 2 = 6$ olur.

Durum 4: $v_4 \in V(H)$ tepesinin açık komşuluğu $N(v_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ kümesidir. $\sum_{i=1, i \neq 4}^5 d_{v_4 v_i} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ olur.

Durum 5: $v_5 \in V(H)$ tepesinin açık komşuluğu $N(v_5) = \{v_4\}$ kümesidir dolayısıyla v_5 tepesi v_1, v_2, v_3 tepelerine 2 uzaklıktadır. $\sum_{i=1}^4 d_{v_5 v_i} = 2 + 2 + 2 + 1 = 7$ olur.

Durum 1-4'ten, 5 tepeli H çizgesinin ortalama yol uzunluğu $L(G) = \frac{\sum_{i,j \in V(H)} d_{ij}}{|V(H)|(|V(H)|-1)} = \frac{5+6+6+4+7}{5(5-1)} = \frac{7}{5}$ olur. O halde, H çizgesinin yığılma değeri $\varphi(H) = \frac{1}{|V(H)|L(H)} = \frac{1}{(5)\frac{7}{5}} = \frac{1}{7}$ elde edilir.

Tanım 3.3: (Tan, Wu, ve Deng, 2006) G çizgesinde $v \in V(G)$ ve $G'(v)$ v tepesinin büzülmesinden sonra elde edilen çizge olmak üzere v tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v) = 1 - \frac{\varphi(G)}{\varphi(G'(v))}$ olarak tanımlanır.

Örnek 3.2: H çizgesinin tepelerinin tepe önemi değerlerini hesaplamak için beş durum söz konusudur:

Durum 1: $v_1 \in V(H)$ tepesi büzülürse geriye 2 tepeli P_2 yol çizge kalır. Dolayısıyla $H'(v_1)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(H'(v_1)) = \varphi(P_2) = \frac{1}{2}$ olur. O halde v_1 tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v_1) = 1 - \frac{\varphi(H)}{\varphi(H'(v_1))} = 1 - \frac{\varphi(H)}{\varphi(P_2)} = 1 - \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{7}$ elde edilir.

Durum 2: $v_2 \in V(H)$ tepesi büzülürse geriye 3 tepeli P_3 yol çizge kalır. Dolayısıyla $H'(v_2)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(H'(v_2)) = \varphi(P_3) = \frac{1}{4}$ olur. O halde v_2 tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v_2) = 1 - \frac{\varphi(H)}{\varphi(H'(v_2))} = 1 - \frac{\varphi(H)}{\varphi(P_3)} = 1 - \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{7}$ elde edilir.

Durum 3: $v_3 \in V(H)$ tepesi büzülürse geriye 3 tepeli P_3 yol çizge kalır. Dolayısıyla $H'(v_3)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(H'(v_3)) = \varphi(P_3) = \frac{1}{4}$ olur. O halde v_3 tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v_3) = 1 - \frac{\varphi(H)}{\varphi(H'(v_3))} = 1 - \frac{\varphi(H)}{\varphi(P_3)} = 1 - \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{7}$ elde edilir.

Durum 4: $v_4 \in V(H)$ tepesi büzülürse geriye 1 tepe kalır. Dolayısıyla $H'(v_4)$ çizgesinin yıgılma değeri $\varphi(H'(v_4)) = 1$ olur. O halde v_4 tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v_4) = 1 - \frac{\varphi(H)}{\varphi(H'(v_4))} = 1 - \frac{\frac{1}{7}}{1} = \frac{6}{7}$ elde edilir.

Durum 5: $v_5 \in V(H)$ tepesi büzülürse geriye 4 tepeli $H \setminus \{v_5\}$ alt çizgesi kalır. Dolayısıyla $H'(v_5)$ çizgesinin yıgılma değeri örnek 3.1'den $\varphi(H'(v_5)) = \varphi(H \setminus \{v_5\}) = \frac{|V(H \setminus \{v_5\})|-1}{\sum_{a,b \in V(H \setminus \{v_5\})} d_{ab}} = \frac{3}{\sum_{i,j \in V(H)} d_{ij} - 2 \sum_{t=1}^4 d_{v_5 v_t}} = \frac{3}{14}$ olur. O halde v_5 tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v_5) = 1 - \frac{\varphi(H)}{\varphi(H'(v_5))} = 1 - \frac{\varphi(H)}{\varphi(H \setminus \{v_5\})} = 1 - \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{14}} = \frac{1}{3}$ elde edilir.

G n tepeli bir çizge ve $v \in V(G)$ olmak üzere çizgenin yıgılma değeri ve bir tepenin önem değeri tanımlarından $IMC(v) = 1 - \frac{(n - N_G(v_i))(L(G'(v)))}{nL(G)}$ elde edilir (Wang, Wu, Yan, ve Guo, 2011). Buradan çizgedeki v tepesinin önem değerinin, v tepesinin tepe derecesi ve konumu olmak üzere iki etkene bağlı olduğu açıktır. Eğer v tepesinin derecesi büyükse ve v tepesinin büzülmesinden sonra geriye kalan tepelerin sayısı daha az ise, o zaman çizgenin yıgılma değeri daha büyüktür dolayısıyla v tepesi daha önemlidir. Ayrıca eğer v tepesi çizgede önemli bir konumda bulunuyorsa, tepe çiftleri arasındaki en kısa yollar v tepesinden geçer dolayısıyla v tepesinin büzülmesinden sonra çizgenin yıgılma değeri daha büyük olabilir. Eğer v tepesi çizgenin bağlantılılığına katkıda bulunan önemli bir tepe ise v tepesinin büzülmesinden sonra çizgenin yıgılma değeri daha büyük olacaktır.

H  izgesi için $deg(v_4) > deg(v_1) > deg(v_2) = deg(v_3) > deg(v_5)$ ve $IMC(v_4) > IMC(v_1) > IMC(v_2) = IMC(v_3) > IMC(v_5)$ olur. v_4 tepesi b z ld ğ nde yıgılma en fazladır; geriye sadece izole tepe kalır. v_5 tepesi ve diğer tepeler arasındaki en kısa yollar v_4 tepesinden geçer. v_4 tepesi çizgenin bağlantılılık değerini veren tepedir. Dolayısıyla v_4 tepesi H çizgesinin en önemli tepesidir. v_2 ve v_3 tepelerinin tepe dereceleri ve konumları da dikkate alındığında her iki tepe de aynı öneme sahiptir. v_5 tepesi minimum tepe derecesine sahiptir ve büzülmesinden sonra yıgılma en azdır. Konumu da dikkate alındığında çizgedeki önemi en az olan tepedir.

BÖLÜM DÖRT

ÇEVRE VE BENZERİ ÇİZGELERDE ÖNEMLİ TEPELERİN BELİRLENMESİ

Bu bölümde, çevre çizgenin ve çevre benzeri çizgelerden yelpaze çizge, k-piramit çizge ve güneş çizgenin yığılma değerleri hesaplanmış ve sonrasında büzülme işleminden yararlanılarak ilgili çizgelerin tepelerinin önem değerleri hesaplanmıştır.

4.1 Çevre Çizge

Yardımcı Teorem 4.1: C_n n tepeli çevre çizge olmak üzere, çevre çizgenin yığılma değeri $\varphi(C_n) = \begin{cases} \frac{4}{n(n+1)}, & \text{eğer } n \text{ tek ise;} \\ \frac{4(n-1)}{n^3}, & \text{eğer } n \text{ çift ise.} \end{cases}$

İspat: $v_i \in V(C_n)$ ($0 \leq i \leq n-1$) için,

$$\sum_{\forall j \neq i} d_{v_i v_j} = \begin{cases} 2(1) + 2(2) + \dots + 2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), & \text{eğer } n \text{ tek ise;} \\ 2(1) + 2(2) + \dots + 2(\frac{n}{2} - 1) + 1(\frac{n}{2}), & \text{eğer } n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

$$\text{ve buradan } \sum_{\forall j \neq i} d_{v_i v_j} = \begin{cases} \frac{n^2-1}{4}, & \text{eğer } n \text{ tek ise;} \\ \frac{n^2}{4}, & \text{eğer } n \text{ çift ise.} \end{cases} \text{ elde edilir.}$$

Dolayısıyla, n tepeli çevre çizgenin ortalama yol uzunluğu

$$L(C_n) = \frac{\sum_{i,j \in V(C_n)} d_{ij}}{n(n-1)} = \begin{cases} \frac{n+1}{4}, & \text{eğer } n \text{ tek ise;} \\ \frac{n^2}{4(n-1)}, & \text{eğer } n \text{ çift ise.} \end{cases} \text{ olur.}$$

Buradan, çevre çizgenin yığılma değeri

$$\varphi(C_n) = \frac{1}{nL(C_n)} = \begin{cases} \frac{4}{n(n+1)}, & \text{eğer } n \text{ tek ise;} \\ \frac{4(n-1)}{n^3}, & \text{eğer } n \text{ çift ise.} \end{cases} \text{ olarak bulunur ve ispat tamamlanır.}$$

Teorem 4.1: $G = C_n$ n tepeli çevre çizge olmak üzere $v \in V(G)$ tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v) = \begin{cases} \frac{2(2n-1)}{n(n+1)}, & \text{eğer } n \text{ tek ise;} \\ \frac{n^4-4n^3+5n^2-8n+4}{n^3(n-3)}, & \text{eğer } n \text{ çift ise.} \end{cases}$

İspat: $v_i \in V(C_n)$ ($0 \leq i \leq n-1$) için, v_i tepesi bützildükten sonra C_n çevre çizge $n-2$ tepeli C_{n-2} çevre çizgeye yığılır. Yardımcı Teorem 4.1'den $n-2$ tepeli C_{n-2} çevre çizgenin yığılma değeri

$$\varphi(C'_n(v_i)) = \varphi(C_{n-2}) = \begin{cases} \frac{4}{(n-2)(n-1)}, & \text{eğer } n \text{ tek ise;} \\ \frac{4(n-3)}{(n-2)^2}, & \text{eğer } n \text{ çift ise.} \end{cases} \text{ olur. Dolayısıyla, Yardımcı Teorem 4.1'den, } v_i \in V(C_n) \text{ tepesinin tepe önemi değeri}$$

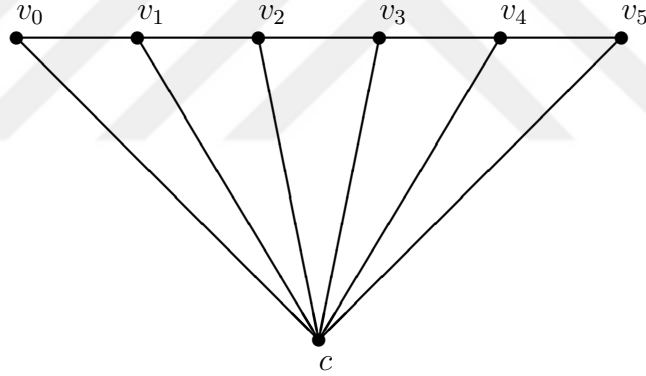
$$IMC(v_i) = 1 - \frac{\varphi(C_n)}{\varphi(C'_n(v_i))} = 1 - \frac{\varphi(C_n)}{\varphi(C_{n-2})} = \begin{cases} \frac{2(2n-1)}{n(n+1)}, & \text{eğer } n \text{ tek ise;} \\ \frac{n^4-4n^3+5n^2-8n+4}{n^3(n-3)}, & \text{eğer } n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Açıklama 4.1: Çevre çizgede bulunan bir tepenin önem değeri tepenin derecesi ve tepenin çizgedeki konumu olmak üzere iki etkene bağlıdır. C_n çevre çizgede bulunan tüm tepeler aynı tepe derecesine sahiptir ve her $v \in V(C_n)$ için tepe önemi değerleri aynıdır. Dolayısıyla, çevre çizgedeki her bir tepe çizgede önemli bir konumda yer alır, çizgenin bağlantılılığına aynı önemde katkısı vardır ve etkin ağ akışından sorumludur.

4.2 Yelpaze Çizge

C_n çevre çizgenin bir tepesinin diğer tüm tepelere birer ayrıt ile birleştirilmesiyle oluşan çizgeye yelpaze çizge denir ve F_n ile gösterilir. $n = 3$ için $F_3 = C_3$ olduğu açıktır. Yelpaze çizge aynı zamanda $F_n = P_{n-1} + K_1$ ($n \geq 3$) olacak şekilde $n - 1$ tepeli yol çizge ve 1 tepeli tam çizgenin toplamı ile de tanımlanabilir (Gallian, 2012). $c, v_0, \dots, v_{n-2}$ yelpaze çizgenin tepeleri olmak üzere v_0 ve v_{n-2} tepeleri tepe derecesi 2 olan tepelerdir ve F_n yelpaze çizgenin minör tepeleri olarak adlandırılabilir. c tepesi F_n yelpaze çizgede diğer tüm tepelere komşudur dolayısıyla F_n yelpaze çizgenin merkez tepesidir ve tepe derecesi $n - 1$ 'dir. F_n yelpaze çizgede c, v_0, v_{n-2} tepeleri dışındaki diğer tüm tepeler tepe derecesi 3 olan tepelerdir ve çizgenin majör tepeleri olarak adlandırılabilir.



Şekil 4.1 $n = 7$ için yelpaze çizge F_n

Yardımcı Teorem 4.2: G_1 n_1 tepeli ve e_1 ayrıtlı, G_2 n_2 tepeli ve e_2 ayrıtlı iki ayrık çizge olmak üzere, $G_1 + G_2$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(G_1 + G_2) = \frac{n_1+n_2-1}{2(n_1^2+n_2^2+n_1n_2-n_1-n_2-e_1-e_2)}$ olur.

İspat: $G_1 + G_2$ çizgesinde herhangi iki tepe birbirine komşudur veya aralarındaki uzaklık 2'dir. Dolayısıyla, $diam(G_1 + G_2) \leq 2$ olduğu açıktır. $G_1 + G_2$ çizgesinin yığılma değerinin hesaplanması için çizgenin tepelerine bağlı olarak iki durum söz konusudur:

Durum 1: $G_1 + G_2$ çizgesindeki $u_i \in V(G_1)$ ($1 \leq i \leq n_1$) tepesi için, u_i tepesi $G_1 + G_2$ çizgesinde G_1 çizgesinin $\deg_{G_1}(u_i)$ tepesine ve G_2 çizgesinin tüm tepelerine; yani n_2 tepeye komşudur, $G_1 + G_2$ çizgesinde G_1 çizgesinin diğer geriye kalan $n_1 - 1 - \deg_{G_1}(u_i)$ tepesine 2 uzaklıktadır. Dolayısıyla, $\sum_{\forall w \in V(G_1+G_2)} d_{u_i w} = (\deg_{G_1}(u_i) + n_2)(1) + (n_1 - 1 - \deg_{G_1}(u_i))(2) = 2n_1 + n_2 - \deg_{G_1}(u_i) - 2$ olur.

Durum 2: $G_1 + G_2$ çizgesindeki $v_j \in V(G_2)$ ($1 \leq j \leq n_2$) tepesi için, v_j tepesi $G_1 + G_2$ çizgesinde G_2 çizgesinin $\deg_{G_2}(v_j)$ tepesine ve G_1 çizgesinin tüm tepelerine; yani n_1 tepeye komşudur, $G_1 + G_2$ çizgesinde G_2 çizgesinin diğer geriye kalan $n_2 - 1 - \deg_{G_2}(v_j)$ tepesine 2 uzaklıktadır. Dolayısıyla, $\sum_{\forall w \in V(G_1+G_2)} d_{v_j w} = (\deg_{G_2}(v_j) + n_1)(1) + (n_2 - 1 - \deg_{G_2}(v_j))(2) = n_1 + 2n_2 - \deg_{G_2}(v_j) - 2$ olur.

Durum 1-2'den, $\sum_{x,y \in V(G_1+G_2)} d_{xy} = \left(\sum_{i=1}^{n_1} 2n_1 + n_2 - \deg_{G_1}(u_i) - 2 \right) + \left(\sum_{j=1}^{n_2} n_1 + 2n_2 - \deg_{G_2}(v_j) - 2 \right) = n_1(2n_1 + n_2 - 2) - \sum_{i=1}^{n_1} \deg_{G_1}(u_i) + n_2(n_1 + 2n_2 - 2) - \sum_{j=1}^{n_2} \deg_{G_2}(v_j)$ olur. Teorem 2.1'den, $\sum_{x,y \in V(G_1+G_2)} d_{xy} = 2(n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2 - n_1 - n_2 - e_1 - e_2)$ olur. $G_1 + G_2$ çizgesinin ortalama yol uzunluğu, $L(G_1 + G_2) = \frac{\sum_{i,j \in V(G_1+G_2)} d_{ij}}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)} = \frac{2(n_1^2+n_2^2+n_1 n_2 - n_1 - n_2 - e_1 - e_2)}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)}$ olur.

O halde $G_1 + G_2$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(G_1 + G_2) = \frac{1}{(n_1+n_2)L(G_1+G_2)} = \frac{n_1+n_2-1}{2(n_1^2+n_2^2+n_1 n_2 - n_1 - n_2 - e_1 - e_2)}$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2: F_n n tepeli yelpaze çizgenin yığılma değeri $\varphi(F_n) = \frac{n-1}{2(n^2-3n+3)}$ olur.

İspat: F_n yelpaze çizge $F_n = P_{n-1} + K_1$ olarak da tanımlanabildiğinden ve $|V(P_{n-1})| = n - 1$, $|E(P_{n-1})| = n - 2$, $|V(K_1)| = 1$, $|E(K_1)| = 0$ olduğundan,

Yardımcı Teorem 4.2'den n tepeli F_n yelpaze çizgenin yığılma değeri $\varphi(F_n) = \frac{(n-1)+1-1}{2((n-1)^2+1^2+(n-1)1-(n-1)-1-(n-2)-0)} = \frac{n-1}{2(n^2-3n+3)}$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2: $G = F_n$ n tepeli yelpaze çizge olmak üzere $v \in V(G)$ tepesinin tepe önemi değeri

$$IMC(v) = \begin{cases} \frac{2n^2-7n+7}{2(n^2-3n+3)}, & \text{eğer } v = c \text{ ise;} \\ \frac{2(n^2-4n+2)}{n^3-6n^2+12n-9}, & \text{eğer } v \text{ bir minör tepe ise;} \\ \frac{3(n^2-5n+3)}{(n-4)(n^2-3n+3)}, & \text{eğer } v = v_l \text{ (} l = 1, n = 3 \text{) minör bir tepeye} \\ & \text{komşu olan bir majör tepe ise;} \\ \frac{3n^2-16n+10}{(n-4)(n^2-3n+3)}, & \text{eğer } v = v_m \text{ (} 2 \leq m \leq n-4 \text{) bir majör tepe ise.} \end{cases} \quad (4.2)$$

İspat: F_n çizgesinin tepelerinin tepe önemi değerlerini hesaplamak için çizgenin tepelerine bağlı olarak dört durum söz konusudur:

Durum 1: $c \in V(F_n)$ merkez tepesi için, F_n yelpaze çizge c tepesi bützildükten sonra tek bir tepeden oluşan çizgeye yığılır ve $\varphi(F'_n(c)) = 1$ olur. O halde, Sonuç 4.2'den c tepesinin tepe önemi değeri $IMC(c) = 1 - \frac{\varphi(F_n)}{\varphi(F'_n(c))} = 1 - \frac{\frac{n-1}{2(n^2-3n+3)}}{1} = \frac{2n^2-7n+7}{2(n^2-3n+3)}$ olur.

Durum 2: $v_k \in V(F_n)$ ($k = 0$ veya $k = n-2$) minör tepesi için, n tepeli F_n yelpaze çizge v_k tepesi bützildükten sonra $n-2$ tepeden oluşan F_{n-2} yelpaze çizgeye yığılır. Sonuç 4.2'den, $F'_n(v_k)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(F'_n(v_k)) = \varphi(F_{n-2}) = \frac{(n-2)-1}{2((n-2)^2-3(n-2)+3)} = \frac{n-3}{2(n^2-7n+13)}$ ve v_k tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v_k) = 1 - \frac{\varphi(F_n)}{\varphi(F_{n-2})} = 1 - \frac{\frac{n-1}{2(n^2-3n+3)}}{\frac{n-3}{2(n^2-7n+13)}} = \frac{2(n^2-4n+2)}{n^3-6n^2+12n-9}$ olur.

Durum 3: $v_l \in V(F_n)$ ($l = 1$ veya $l = n - 3$) majör tepesi için, n tepeli F_n yelpaze çizge v_l tepesi büzüldükten sonra $n - 3$ tepeden oluşan F_{n-3} yelpaze çizgeye yığılır. Sonuç 4.2'den, $F'_n(v_l)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(F'_n(v_l)) = \varphi(F_{n-3}) = \frac{(n-3)-1}{2((n-3)^2-3(n-3)+3)} = \frac{n-4}{2(n^2-9n+21)}$ ve v_l tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v_l) = 1 - \frac{\varphi(F_n)}{\varphi(F_{n-3})} = 1 - \frac{\frac{n-1}{2(n^2-3n+3)}}{\frac{n-4}{2(n^2-9n+21)}} = \frac{3(n^2-5n+3)}{(n-4)(n^2-3n+3)}$ olur.

Durum 4: F_n yelpaze çizgede geriye kalan diğer $n - 5$ majör tepeden biri v_m ($\forall m \neq k, l$) tepesi olsun. v_m tepesi büzüldükten sonra, n tepeli yelpaze çizge F_n , $K_1 + (P_i \cup P_{n-4-i})$ ($i = 1, \dots, \lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor$) çizgesine yığılır. Yardımcı Teorem 4.2'den, $F'_n(v_m)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(F'_n(v_m)) = \varphi(K_1 + (P_i \cup P_{n-4-i})) = \frac{1+(i+n-4-i)-1}{2(1^2+(i+n-4-i)^2+1(i+n-4-i)-1-(i+n-4-i)-0-(i-1+n-4-i-1))} = \frac{n-4}{2(n^2-9n+22)}$ olur. Sonuç 4.2'den, v_m tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v_m) = 1 - \frac{\varphi(F_n)}{\varphi(F'_n(v_m))} = 1 - \frac{\frac{n-1}{2(n^2-3n+3)}}{\frac{n-4}{2(n^2-9n+22)}} = \frac{3n^2-16n+10}{(n-4)(n^2-3n+3)}$ elde edilir.

Teoremin ispatı tamamlanır.

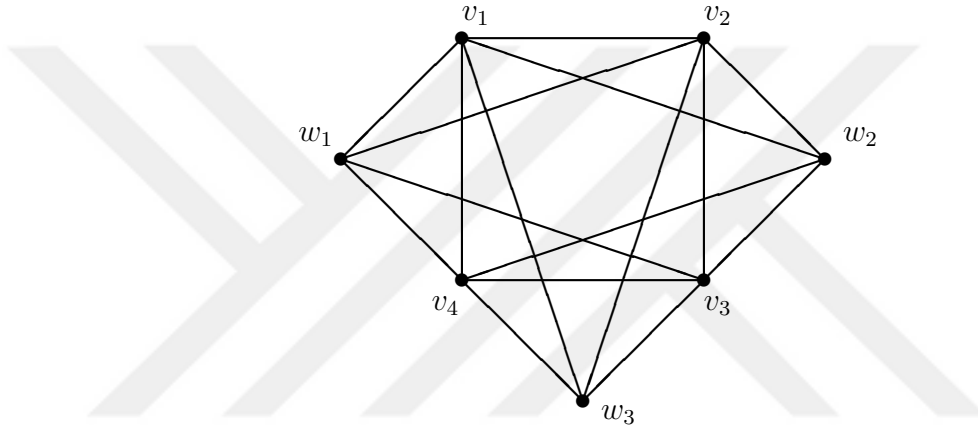
Açıklama 4.2: Yelpaze çizgede c merkez tepesi büzüldükten sonra, çizge tek bir tepeye olmak üzere daha çok yığılır. v_l, v_m ($l = 1, n - 3; k = 0, n - 2; m \neq k, l$) majör tepeler, v_k minör tepe olmak üzere $\deg(c) > \deg(v_l) = \deg(v_m) > \deg(v_k)$ olduğundan, c merkez tepesinin derecesi en büyüktür dolayısıyla büzülmeden sonra tepe sayısı en az ve yığılma en fazla olur; $IMC(c) > IMC(v_l) > IMC(v_m) > IMC(v_k)$. Dolayısıyla, c merkez tepesi çizgenin bağlantılılığına katkıda bulunan en önemli tepedir. c merkez tepesi çizgede önemli bir konumda yer alır ve çizgedeki tepe çiftleri arasındaki en kısa yolların çoğu c tepesinden geçer. F_n yelpaze çizgede, eğer v_k minör tepesi veya v_l majör tepesi büzülürse çizgede hemen hemen bir değişiklik olmaz ancak $\deg(v_l) > \deg(v_k)$ olmakla birlikte $IMC(v_l) > IMC(v_k)$ olur. Minör tepeler yelpaze çizgede en küçük tepe derecesine sahip olan tepelerdir, büzülme işleminden sonra geriye kalan tepe sayısı en fazladır ve çizgenin yığılması en azdır; yani çizgede hemen hemen bir

değişiklik olmaz. F_n yelpaze çizgede bir tepenin tepe önemi değeri o tepenin konumuna da bağlıdır. Majör tepelerin tepe dereceleri birbirine eşittir. Aynı zamanda hem v_l hem de v_m majör tepeleri büzüldükten sonra geriye kalan tepe sayıları da aynıdır. Ancak $IMC(v_l) > IMC(v_m)$ olur dolayısıyla F_n yelpaze çizgede v_l majör tepesi v_m majör tepesinden daha önemli bir konumda bulunmaktadır.



4.3 k-Piramit Çizge

C_n n tepeli çevre çizge, N_k k izole tepeden oluşan bir çizge olmak üzere $C_n + N_k$ toplama işlemi sonucu k -piramit çizge elde edilir ve $kP(n)$ ile gösterilir. $k = 2$ için $C_n + N_k$ toplama işlemi sonucu ikipiramit çizge elde edilir ve $BP(n)$ ile gösterilir. $k = 1$ için $C_n + N_k$ toplama işlemi sonucu W_n tekerlek çizge elde edilir (Gallian, 2012). $v_1, \dots, v_n$ C_n çevre çizgeye ait tepeler ve $w_1, \dots, w_k$ N_k çizgesine ait tepeler olmak üzere $\deg(v_i) = k + 2$ ($1 \leq i \leq n$) ve $\deg(w_j) = n$ ($1 \leq j \leq k$) olur.



Şekil 4.2 $n = 4$ ve $k = 3$ için 7 tepeli k -piramit çizge $kP(n)$

Sonuç 4.3.1: $kP(n)$ $n + k$ tepeli k -piramit çizge olmak üzere, k -piramit çizgenin yığılma değeri $\varphi(kP(n)) = \frac{n+k-1}{2(n^2+k^2+nk-2n-k)}$ olur.

İspat: $kP(n)$ k -piramit çizge $C_n + N_k$ toplama işlemi ile tanımlandığından, Yardımcı Teorem 4.2'den $|V(C_n)| = |E(C_n)| = n$ ve $|V(N_k)| = k$, $|E(N_k)| = 0$ olmak üzere $kP(n)$ çizgesinin yığılma değeri

$$\varphi(kP(n)) = \frac{n+k-1}{2(n^2+k^2+nk-n-k-n-0)} = \frac{n+k-1}{2(n^2+k^2+nk-2n-k)}$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.2: $K_{1,n-1}$ n tepeli yıldız çizge olmak üzere, yıldız çizgenin yığılma değeri $\varphi(K_{1,n-1}) = \frac{1}{2(n-1)}$ olur.

İspat: N_k k izole tepeden oluşan çizge olmak üzere $K_{1,n-1}$ yıldız çizge $N_1 + N_{n-1}$ toplama işlemi ile tanımlanabildiğinden, Yardımcı Teorem 4.2'den $|V(N_1)| = 1$, $|E(N_1)| = 0$ ve $|V(N_{n-1})| = n - 1$, $|E(N_{n-1})| = 0$ olmak üzere $K_{1,n-1}$ yıldız çizgenin yığılma değeri $\varphi(K_{1,n-1}) = \frac{1+n-1-1}{2(1^2+(n-1)^2+1(n-1)-1-(n-1)-0-0)} = \frac{1}{2(n-1)}$ elde edilir.

Teorem 4.3.1: $G = kP(n)$ ($n > 4, k > 1$) $n + k$ tepeli k -piramit çizge olmak üzere $v \in V(G)$ tepesinin tepe önemi değeri

$$IMC(v) = \begin{cases} \frac{3n^2+nk^2+3nk-3k^2-14n-10k+13}{(n-3)(n^2+k^2+nk-2n-k)}, & \text{eğer } v = v_i \text{ } (1 \leq i \leq n) \text{ ise;} \\ \frac{n(n-1)+k-1}{n^2+k^2+nk-2n-k}, & \text{eğer } v = w_j \text{ } (1 \leq j \leq k) \text{ ise.} \end{cases} \quad (4.3.1)$$

İspat: $kP(n)$ çizgesinin tepelerinin tepe önemi değerlerini hesaplamak için çizgenin tepelerine bağlı olarak iki durum söz konusudur:

Durum 1: v_i ($1 \leq i \leq n$) tepesi $kP(n)$ çizgesinde C_n çevre çizgeye ait olan bir tepe olmak üzere, v_i tepesi büzüldükten sonra $kP(n)$ çizgesi $n - 2$ tepeli F_{n-2} yelpaze çizgeye yığılır. Sonuç 4.2'den, $kP(n)'(v_i)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(kP(n)'(v_i)) = \varphi(F_{n-2}) = \frac{(n-2)-1}{2((n-2)^2-3(n-2)+3)} = \frac{n-3}{2(n^2-7n+13)}$ olur. Sonuç 4.3.1'den, v_i tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v_i) = 1 - \frac{\varphi(kP(n))}{\varphi(kP(n)'(v_i))} = 1 - \frac{\varphi(kP(n))}{\varphi(F_{n-2})} = 1 - \frac{\frac{n+k-1}{2(n^2+k^2+nk-2n-k)}}{\frac{n-3}{2(n^2-7n+13)}} = \frac{3n^2+nk^2+3nk-3k^2-14n-10k+13}{(n-3)(n^2+k^2+nk-2n-k)}$ olur.

Durum 2: w_j ($1 \leq j \leq k$) tepesi $kP(n)$ çizgesinde N_k çizgesine ait olan bir tepe olmak üzere, w_j tepesi büzüldükten sonra $kP(n)$ çizgesi k tepeli $K_{1,k-1}$ yıldız çizgeye yığılır. Sonuç 4.3.2'den, $kP(n)'(w_j)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(kP(n)'(w_j)) = \varphi(K_{1,k-1}) = \frac{1}{2(k-1)}$ olur. Sonuç 4.3.1'den, w_j tepesinin tepe önemi değeri

$$IMC(w_j) = 1 - \frac{\varphi(kP(n))}{\varphi(kP(n)'(w_j))} = 1 - \frac{\varphi(kP(n))}{\varphi(K_{1,k-1})} \quad (4.3.2)$$

$$IMC(w_j) = 1 - \frac{\frac{n+k-1}{2(n^2+k^2+nk-2n-k)}}{\frac{1}{2(k-1)}} = \frac{n(n-1) + k - 1}{n^2 + k^2 + nk - 2n - k} \quad (4.3.3)$$

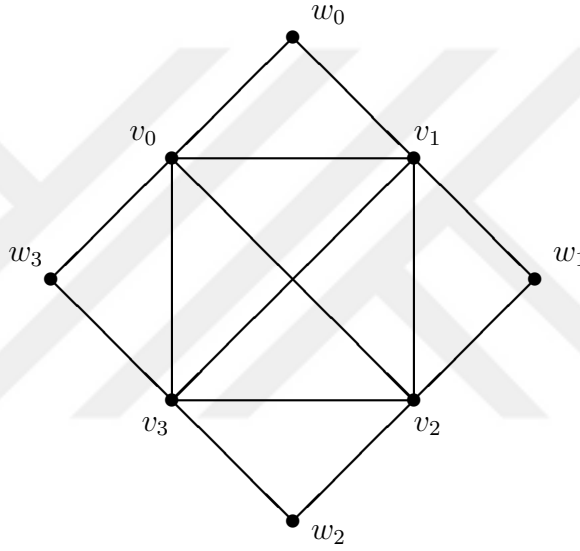
olur.

Teoremin ispatı tamamlanır.

Açıklama 4.3.1: k -piramit çizgede bir tepenin tepe derecesi ne kadar büyükse ve konumu ne kadar önemliyse, yığılma o kadar büyük olur. Dolayısıyla, $n > k + 2$ için $\deg(w_j) > \deg(v_i)$ ve $IMC(w_j) > IMC(v_i)$ olur, w_j ($1 \leq j \leq k$) tepesi daha önemli bir tepedir. $n \leq k + 2$ için $\deg(w_j) \leq \deg(v_i)$ ve $IMC(v_i) > IMC(w_j)$ olur, v_i ($1 \leq i \leq n$) tepesi daha önemli bir tepedir.

4.4 Güneş Çizge

Güneş çizge S_n , $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ tepelerine sahip n ($n \geq 3$) tepeli tam çizge K_n ve w_i tepesi v_i, v_{i+1} ($i = 0, 1, \dots, n-1; (i+1) \bmod(n)$) tepelerine birer ayrıt ile birleştirilmiş olmak üzere n adet $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ tepelerinden oluşur. Güneş çizge $2n$ tepeli ve $\frac{n(n+3)}{2}$ ayrıtlı bir çizgedir. S_n güneş çizge tepe derecesi $n+1$ ve 2 olmak üzere iki tür tepe içerir. Tepe derecesi 2 olan tepeler minör tepe, tepe derecesi $n+1$ olan tepeler majör tepe olarak adlandırılabilir.



Şekil 4.3 $n = 4$ için 8 tepeli güneş çizge S_n

Yardımcı Teorem 4.4: S_n $2n$ tepeli güneş çizge olmak üzere, güneş çizgenin yığılma değeri $\varphi(S_n) = \frac{2n-1}{(2n)(4n-5)}$ olur.

İspat: S_n güneş çizgenin yığılma değerini hesaplamak için çizgenin tepelerine bağlı olarak iki durum söz konusudur:

Durum 1: $v_i \in V(S_n)$ ($0 \leq i \leq n-1$) majör tepesi için, v_i tepesi açık komşuluğu $N(v_i) = \{w_i, w_{i-1}\} \cup \{v_j | 0 \leq j \leq n-1, j \neq i\} ((i-1) \bmod(n))$ kümesinde bulunan $n+1$ tepeye komşudur ve dolayısıyla $\{w_k | 0 \leq k \leq n-1, k \neq i, i-1\}$

kümesinde bulunan geriye kalan diğer $n - 2$ minör tepeye 2 uzaklıktadır. O halde, $\sum_{\forall u \in V(S_n), v_i \neq u} d_{v_i u} = (n + 1)(1) + (n - 2)(2) = 3n - 3$ olur.

Durum 2: $w_i \in V(S_n)$ ($0 \leq i \leq n - 1$) minör tepesi için, w_i tepesi açık komşuluğu $N(w_i) = \{v_i, v_{i+1}\} ((i + 1) \bmod(n))$ kümesinde bulunan 2 majör tepeye komşudur, $\{w_{i+1}, w_{i-1}\} \cup \{v_j | 0 \leq j \leq n - 1, j \neq i, i + 1\}$ kümesindeki n tepeye 2 uzaklıktadır, geriye kalan diğer $n - 3$ minör tepeye 3 uzaklıktadır. Dolayısıyla, $\sum_{\forall u \in V(S_n), w_i \neq u} d_{w_i u} = (2)(1) + (n)(2) + (n - 3)(3) = 5n - 7$ olur.

Durum 1-2'den, güneş çizgenin ortalama yol uzunluğu $L(S_n) = \frac{\sum_{i,j \in V(S_n)} d_{ij}}{(2n)(2n-1)} = \frac{n(3n-3)+n(5n-7)}{(2n)(2n-1)} = \frac{4n-5}{2n-1}$ olur. O halde, güneş çizgenin yığılma değeri $\varphi(S_n) = \frac{1}{(2n)(L(S_n))} = \frac{2n-1}{2n(4n-5)}$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.4: $G = S_n$ ($n > 3$) $2n$ tepeli güneş çizge olmak üzere $v \in V(G)$ tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v) = \begin{cases} \frac{2(n^2-1)}{n(4n-5)}, & \text{eğer } v = v_i \text{ } (0 \leq i \leq n - 1) \text{ ise;} \\ \frac{8n^2-16n+9}{n(4n-5)(2n-3)}, & \text{eğer } v = w_i \text{ } (0 \leq i \leq n - 1) \text{ ise.} \end{cases}$

İspat: S_n çizgesinin tepelerinin tepe önemi değerlerini hesaplamak için çizgenin tepelerine bağlı olarak iki durum söz konusudur:

Durum 1: $v_i \in V(S_n)$ ($0 \leq i \leq n - 1$) majör tepesi için, v_i tepesi büzüldükten sonra çizge $n - 1$ tepeli $K_{1,n-2}$ yıldız çizgeye yığılır. Sonuç 4.3.2'den, $S'_n(v_i)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(S'_n(v_i)) = \varphi(K_{1,n-2}) = \frac{1}{2(n-1-1)} = \frac{1}{2(n-2)}$ olur. Yardımcı Teorem 4.4'ten, v_i tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v_i) = 1 - \frac{\varphi(S_n)}{\varphi(S'_n(v_i))} = 1 - \frac{\varphi(S_n)}{\varphi(K_{1,n-2})} = 1 - \frac{\frac{2n-1}{2n(4n-5)}}{\frac{1}{2(n-2)}} = \frac{2(n^2-1)}{n(4n-5)}$ elde edilir.

Durum 2: $w_i \in V(S_n)$ ($0 \leq i \leq n - 1$) minör tepesi için, w_i tepesi büzüldükten sonra çizge $n - 1$ tepeli S_{n-1} güneş çizgeye yığılır. Yardımcı Teorem 4.4'ten, $S'_n(w_i)$

çizgesinin yığılma değeri $\varphi(S'_n(w_i)) = \varphi(S_{n-1}) = \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)(4(n-1)-5)} = \frac{2n-3}{2(n-1)(4n-9)}$ olur. Yardımcı Teorem 4.4'ten, w_i tepesinin tepe önemi değeri $IMC(w_i) = 1 - \frac{\varphi(S_n)}{\varphi(S'_n(w_i))} = 1 - \frac{\varphi(S_n)}{\varphi(S_{n-1})} = 1 - \frac{\frac{2n-1}{2n(4n-5)}}{\frac{2n-3}{2(n-1)(4n-9)}} = \frac{8n^2-16n+9}{n(4n-5)(2n-3)}$ elde edilir.

Teoremin ispatı tamamlanır.

Açıklama 4.4: Güneş çizgede eğer bir majör tepe büzülürse, o zaman çizge yıldız çizgeye yığılır, ancak eğer bir minör tepe büzülürse, o zaman çizgede hemen hemen bir değişiklik olmaz. v_i majör tepe w_i minör tepe olmak üzere $\deg(v_i) > \deg(w_i)$ ve $IMC(v_i) > IMC(w_i)$ ($0 \leq i \leq n-1$) olur. Majör tepe en büyük tepe derecesine sahiptir, majör tepenin büzülmesinden sonra geriye kalan tepe sayısı en azdır ve çizge yığılması en büyüktür. Dolayısıyla majör tepeler güneş çizgede etkin ağ akışında odak konumunda bulunan en önemli tepelerdir.

BÖLÜM BEŞ

YOL VE BENZERİ ÇİZGELERDE ÖNEMLİ TEPELERİN BELİRLENMESİ

Bu bölümde, yol çizgenin ve yol benzeri çizgelerden kuyruklu yıldız çizge, çift kuyruklu yıldız çizge ve lolipop çizgenin yığılma değerleri hesaplanmış ve sonrasında büzülme işleminden yararlanılarak ilgili çizgelerin tepelerinin önem değerleri hesaplanmıştır.

5.1 Yol Çizge

Yardımcı Teorem 5.1: P_n n ($n > 1$) tepeli yol çizge olmak üzere, yol çizgenin yığılma değeri $\varphi(P_n) = \frac{3}{n(n+1)}$ olur.

İspat: P_n yol çizgenin tepeleri için,
$$\sum_{\forall u,v \in V(P_n), u \neq v} d_{uv} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^j i + \sum_{i=1}^{n-1-j} i \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j(j+1)}{2} + \frac{(n-1-j)(n-j)}{2} \right) = \frac{n(n^2-n)}{2} + \sum_{j=0}^{n-1} (j^2 + j - nj) = \frac{n(n^2-n)}{2} + \sum_{j=0}^{n-1} j^2 + \sum_{j=0}^{n-1} j(1-n) = \frac{n(n^2-n)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + (1-n)\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{3}$$
 olur. Buradan, n tepeli yol çizgenin ortalama yol uzunluğu $L(P_n) = \frac{\sum_{i,j \in V(P_n)} d_{ij}}{n(n-1)} = \frac{\frac{n(n^2-1)}{3}}{n(n-1)} = \frac{n+1}{3}$ olur. O halde, yol çizgenin yığılma değeri $\varphi(P_n) = \frac{1}{nL(P_n)} = \frac{1}{n(\frac{n+1}{3})} = \frac{3}{n(n+1)}$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.1: $G = P_n$ n ($n > 3$) tepeli yol çizge olmak üzere $v \in V(G)$ tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v) = \begin{cases} \frac{2}{n+1}, & \text{eğer } v \text{ bir uç tepe ise;} \\ \frac{2(2n-1)}{n(n+1)}, & \text{aksi durumda.} \end{cases}$

İspat: P_n çizgesinin tepelerinin tepe önemi değerlerini hesaplamak için çizgenin tepelerine bağlı olarak iki durum söz konusudur:

Durum 1: $u \in V(P_n)$ uç tepesi için, u tepesi büzüldükten sonra çizge $n - 1$ tepeli P_{n-1} yol çizgeye yığılır. Yardımcı Teorem 5.1'den $P'_n(u)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(P'_n(u)) = \varphi(P_{n-1}) = \frac{3}{(n-1)(n-1+1)} = \frac{3}{n(n-1)}$ olur. O halde, Yardımcı Teorem 5.1'den, u tepesinin tepe önemi değeri $IMC(u) = 1 - \frac{\varphi(P_n)}{\varphi(P_{n-1})} = 1 - \frac{\frac{3}{n(n+1)}}{\frac{3}{n(n-1)}} = \frac{2}{n+1}$ elde edilir.

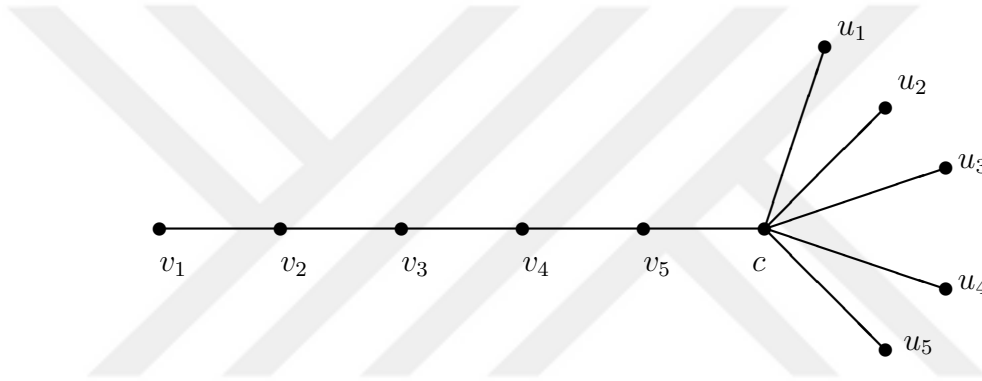
Durum 2: Uç tepeden farklı $v \in V(P_n)$ tepesi için, v tepesi büzüldükten sonra çizge $n - 2$ tepeli P_{n-2} yol çizgeye yığılır. Yardımcı Teorem 5.1'den $P'_n(v)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(P'_n(v)) = \varphi(P_{n-2}) = \frac{3}{(n-2)(n-2+1)} = \frac{3}{(n-2)(n-1)}$ olur. O halde, Yardımcı Teorem 5.1'den, v tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v) = 1 - \frac{\varphi(P_n)}{\varphi(P_{n-2})} = 1 - \frac{\frac{3}{n(n+1)}}{\frac{3}{(n-2)(n-1)}} = \frac{2(2n-1)}{n(n+1)}$ elde edilir.

Teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Açıklama 5.1: Yol çizgenin bir tepesi büzülürse, çizgede neredeyse hiç değişiklik olmaz, çizge yine yol çizgeye yığılır. $u \in V(P_n)$ tepe derecesi 1 olan bir uç tepe ve $v \in V(P_n)$ ($n > 3$) tepe derecesi 2 olan bir tepe olmak üzere $\deg(v) > \deg(u)$, $IMC(v) > IMC(u)$ olur. v tepesi en büyük tepe derecesine sahiptir, v tepesi büzüldükten sonra geriye kalan tepelerin sayısı en azdır ve dolayısıyla çizge yığılması en büyüktür. O halde, v tepesi çizgenin bağlantılılığına katkı sağlayan en etkin tepedir.

5.2 Kuyruklu Yıldız Çizge

Kuyruklu yıldız çizge, $K_{1,s}$ yıldız çizgenin merkez tepesini t tepeli P_t yol çizgenin bir uç tepesi olarak belirlenmesi ile elde edilen bir ağaçtır ve $C_{s,t}$ ($s, t \in \mathbb{Z}^+$) ile gösterilir. Dolayısıyla $C_{s,1} \cong K_{1,s}$ ve $C_{1,t} \cong P_{t+1}$ olur (Hattingh ve Ungerer, 1998). $K_{1,s}$ yıldız çizgenin merkez tepesi; yani P_t yol çizgenin bir uç tepesi c tepesi olsun. v_1 bir uç tepe olmak üzere P_t yol çizgenin tepeleri $v_1, v_2, \dots, v_{t-1}, c$ ve u_i ($1 \leq i \leq s$) bir uç tepe olmak üzere $K_{1,s}$ yıldız çizgenin tepeleri $c, u_1, u_2, \dots, u_s$ olsun.



Şekil 5.1 $s = 5$ ve $t = 6$ için 11 tepeli kuyruklu yıldız çizge $C_{s,t}$

Yardımcı Teorem 5.2: $C_{s,t}$ $s + t$ tepeli kuyruklu yıldız çizge olmak üzere, kuyruklu yıldız çizgenin yığılma değeri $\varphi(C_{s,t}) = \frac{3(s+t-1)}{t(t+1)(t+3s-1)+6s(s-1)}$ olur.

İspat: $C_{s,t}$ kuyruklu yıldız çizgenin yığılma değerini hesaplamak için çizgenin tepelerine bağlı olarak dört durum söz konusudur:

Durum 1: $C_{s,t}$ çizgesinde P_t yol çizgeye ait olan $v_1, \dots, v_{t-1}, c$ tepeleri için Yardımcı

Teorem 5.1'den, $\sum_{\forall u, w \in V(P_t), u \neq w} d_{uw} = \frac{t(t^2-1)}{3}$ olur.

Durum 2: $C_{s,t}$ çizgesinde P_t yol çizgeye ait olan $v_1, \dots, v_{t-1}, c$ tepeleri ve $K_{1,s}$ yıldız çizgeye ait olan $u_1, \dots, u_s$ tepeleri için $\sum_{\forall z \in V(P_t), \forall u_i \in V(K_{1,s})} d_{zu_i} = \sum_{\forall z \in V(P_t)} \sum_{i=1}^s d_{zu_i} = s(t) + s(t-1) + \dots + s(1) = s(1 + \dots + t) = s\left(\frac{t(t+1)}{2}\right)$ olur.

Durum 3: $C_{s,t}$ çizgesinde $K_{1,s}$ yıldız çizgeye ait olan $u_1, \dots, u_s$ tepeleri ve P_t yol çizgeye ait olan $v_1, \dots, v_{t-1}, c$ tepeleri için Durum 2'ye benzer olarak $\sum_{u_i \in V(K_{1,s}), \forall z \in V(P_t)} d_{u_i z} = \sum_{i=1}^s \sum_{\forall z \in V(P_t)} d_{zu_i} = (t + (t-1) + \dots + (1))(s) = \frac{t(t+1)}{2}(s)$ olur.

Durum 4: $C_{s,t}$ çizgesinde $K_{1,s}$ yıldız çizgeye ait olan $u_1, \dots, u_s$ tepeleri için $\sum_{\forall u_i, u_j \in V(K_{1,s}), u_i \neq u_j} d_{u_i u_j} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1, j \neq i}^s d_{u_i u_j} = s((2)(s-1))$ olur.

Durum 1-4'ten, $C_{s,t}$ $s + t$ tepeli kuyruklu yıldız çizgenin ortalama yol uzunluğu $L(C_{s,t}) = \frac{\sum_{i,j \in V(C_{s,t})} d_{ij}}{(s+t)(s+t-1)} = \frac{\frac{t(t^2-1)}{3} + 2(s(\frac{t(t+1)}{2})) + s(2(s-1))}{(s+t)(s+t-1)} = \frac{t(t^2-1) + 3st(t+1) + 6s(s-1)}{3(s+t)(s+t-1)}$ olur. O halde, kuyruklu yıldız çizgenin yığılma değeri $\varphi(C_{s,t}) = \frac{1}{(s+t)L(C_{s,t})} = \frac{1}{(s+t)\left(\frac{t(t^2-1) + 3st(t+1) + 6s(s-1)}{3(s+t)(s+t-1)}\right)} = \frac{3(s+t-1)}{t(t+1)(t-1+3s) + 6s(s-1)}$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.2: $G = C_{s,t}$ ($s > 2, t > 3$) $s+t$ tepeli kuyruklu çizge olmak üzere $v \in V(G)$ tepesinin tepe önemi değeri

$$IMC(v) = \begin{cases} \frac{2t(3s^2-6s+3st-3t+t^2+2)-6s(s-1)}{(t(t+1)(t+3s-1)+6s(s-1))(s+t-2)}, & \text{eğer } v = v_1 \text{ ise;} \\ \frac{12st(s+t-3)+2t(2t-5)(t-2)-6(3s-1)(s-1)}{(s+t-3)(t(t+1)(t+3s-1)+6s(s-1))}, & \text{eğer } v = v_i \text{ } (2 \leq i \leq t-1) \text{ ise;} \\ \frac{2(t(s(t+2)+t-1)+3s(s-1))}{t(t+1)(t+3s-1)+6s(s-1)}, & \text{eğer } v = c \text{ ise;} \\ \frac{2t(t^2+6s-7)+6(s-1)(s-2)}{(s+t-2)(t(t+1)(t+3s-1)+6s(s-1))}, & \text{eğer } v = u_j \text{ } (1 \leq j \leq s) \text{ ise.} \end{cases} \quad (5.2)$$

İspat: $C_{s,t}$ çizgesinin tepelerinin tepe önemi değerlerini hesaplamak için çizgenin tepelerine bağlı olarak dört durum söz konusudur:

Durum 1: $C_{s,t}$ çizgesinde P_t yol çizgenin bir uç tepesi olan v_1 tepesi için, v_1 tepesi büzüldükten sonra çizge $s + t - 1$ tepeli $C_{s,t-1}$ kuyruklu yıldız çizgeye yığılır. Yardımcı Teorem 5.2'den, $C_{s,t}'(v_1)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(C_{s,t}'(v_1)) = \varphi(C_{s,t-1}) = \frac{3(s+t-1-1)}{(t-1)(t-1+1)(t-1+3s-1)+6s(s-1)} = \frac{3(s+t-2)}{t(t-1)(t+3s-2)+6s(s-1)}$ olur. O halde Yardımcı Teorem 5.2'den v_1 tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v_1) = 1 - \frac{\varphi(C_{s,t})}{\varphi(C_{s,t}'(v_1))} = 1 - \frac{\varphi(C_{s,t})}{\varphi(C_{s,t-1})} = 1 - \frac{\frac{3(s+t-1)}{t(t+1)(t+3s-1)+6s(s-1)}}{\frac{3(s+t-2)}{t(t-1)(t+3s-2)+6s(s-1)}} = \frac{2t(3s^2-6s+3st-3t+t^2+2)-6s(s-1)}{(t(t+1)(t+3s-1)+6s(s-1))(s+t-2)}$ elde edilir.

Durum 2: $C_{s,t}$ çizgesinde P_t yol çizgenin uç tepeden farklı olan v_i ($2 \leq i \leq t-1$) tepesi için, v_i tepesi büzüldükten sonra çizge $s + t - 2$ tepeli $C_{s,t-2}$ kuyruklu yıldız çizgeye yığılır. Yardımcı Teorem 5.2'den, $C_{s,t}'(v_i)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(C_{s,t}'(v_i)) = \varphi(C_{s,t-2}) = \frac{3(s+t-2-1)}{(t-2)(t-2+1)(t-2+3s-1)+6s(s-1)} = \frac{3(s+t-3)}{(t-1)(t-2)(t+3s-3)+6s(s-1)}$ olur. O halde Yardımcı Teorem 5.2'den v_i tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v_i) = 1 - \frac{\varphi(C_{s,t})}{\varphi(C_{s,t-2})} = 1 - \frac{\frac{3(s+t-1)}{t(t+1)(t+3s-1)+6s(s-1)}}{\frac{3(s+t-3)}{(t-1)(t-2)(t+3s-3)+6s(s-1)}} = \frac{12st(s+t-3)+2t(2t-5)(t-2)-6(3s-1)(s-1)}{(s+t-3)(t(t+1)(t+3s-1)+6s(s-1))}$ elde edilir.

Durum 3: $c \in V(C_{s,t})$ tepesi için, c tepesi büzüldükten sonra çizge $t-1$ tepeli P_{t-1} yol çizgeye yığılır. Yardımcı Teorem 5.1'den, $C_{s,t}'(c)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(C_{s,t}'(c)) = \varphi(P_{t-1}) = \frac{3}{(t-1)(t-1+1)} = \frac{3}{t(t-1)}$ olur. O halde Yardımcı Teorem 5.2'den c tepesinin tepe önemi değeri $IMC(c) = 1 - \frac{\varphi(C_{s,t})}{\varphi(C_{s,t}'(c))} = 1 - \frac{\varphi(C_{s,t})}{\varphi(P_{t-1})} = 1 - \frac{\frac{3(s+t-1)}{t(t+1)(t+3s-1)+6s(s-1)}}{\frac{3}{t(t-1)}} = \frac{2(t(s(t+2)+t-1)+3s(s-1))}{t(t+1)(t+3s-1)+6s(s-1)}$ elde edilir.

Durum 4: $C_{s,t}$ çizgesinde $K_{1,s}$ yıldız çizgenin bir uç tepesi olan u_j ($1 \leq j \leq s$) tepesi için, u_j tepesi büzüldükten sonra çizge $s + t - 1$ tepeli $C_{s-1,t}$ kuyruklu yıldız çizgeye yığılır. Yardımcı Teorem 5.2'den, $C_{s,t}'(u_j)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(C_{s,t}'(u_j)) = \varphi(C_{s-1,t}) = \frac{3(s-1+t-1)}{t(t+1)(t+3(s-1)-1)+6(s-1)(s-1-1)} = \frac{3(s+t-2)}{t(t+1)(t+3s-4)+6(s-1)(s-2)}$ olur. Teorem 5.2'den u_j tepesinin tepe önemi değeri

$$IMC(u_j) = 1 - \frac{\varphi(C_{s,t})}{\varphi(C_{s-1,t})} = 1 - \frac{\frac{3(s+t-1)}{t(t+1)(t+3s-1)+6s(s-1)}}{\frac{3(s+t-2)}{t(t+1)(t+3s-4)+6(s-1)(s-2)}} = \frac{2t(t^2+6s-7)+6(s-1)(s-2)}{(s+t-2)(t(t+1)(t+3s-1)+6s(s-1))}$$

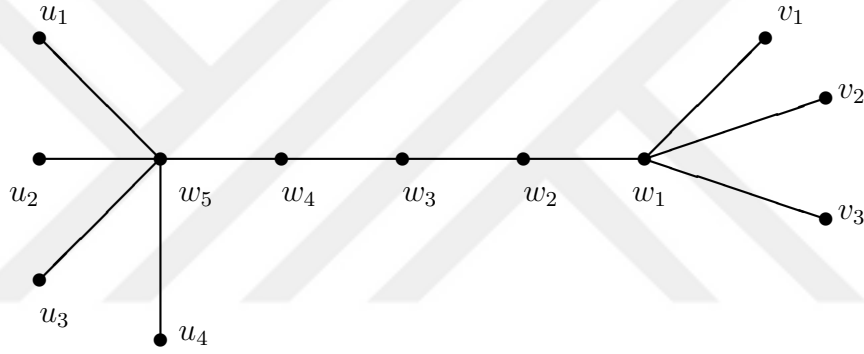
elde edilir.

Teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Açıklama 5.2: Kuyruklu yıldız çizgede bir tepenin önemi tepe derecesi ve tepenin konumu olmak üzere iki etkene bağlıdır. $\deg(c) > \deg(v_i) > \deg(v_1) = \deg(u_j)$ olmakla birlikte $IMC(c) > IMC(v_i) > IMC(v_1) > IMC(u_j)$ olur. c tepesi en büyük tepe derecesine sahiptir, c tepesi büzüldükten sonra geriye kalan tepelerin sayısı en azdır ve dolayısıyla çizge yığılması en büyüktür. c tepesi çizgenin bağlantılılığına katkıda bulunan en etkin tepedir. c tepesi çizgede önemli bir konumda yer alır ve tepe çiftleri arasındaki en kısa yolların çoğu c tepesinden geçer. $C_{s,t}$ çizgesinde v_i tepesi veya v_1 tepesi veya u_j tepesi büzülürse çizgede neredeyse bir değişiklik olmaz. Ancak $\deg(v_i) > \deg(v_1) = \deg(u_j)$ olduğundan $IMC(v_i) > IMC(v_1)$ ve $IMC(v_i) > IMC(u_j)$ olur. Bu da bir tepenin tepe derecesi ne kadar büyükse ve kuyruklu yıldız çizgede ne kadar önemli bir konumda bulunuyorsa, çizge yığılması o kadar büyük olur demektir. Dolayısıyla v_i tepesi ağ akışında oldukça önemli bir tepedir. $C_{s,t}$ çizgesinde bir tepenin etkinliği o tepenin konumuna bağlı olduğundan, $\deg(v_1) = \deg(u_j)$ olmasına rağmen $IMC(v_1) > IMC(u_j)$ olur. Bu da $C_{s,t}$ çizgesinde v_1 tepesinin u_j tepesinden daha önemli bir konumda olduğu anlamına gelir.

5.3 Çift Kuyruklu Yıldız Çizge

$n - a - b$ tepeli bir yol çizgenin bir uç tepesine a adet ve diğer uç tepesine b adet uç tepe eklenerek oluşturulan ağaca çift kuyruklu yıldız çizge denir ve $DC(n, a, b)$ ($a, b \geq 1, n \geq a + b + 2$) ile gösterilir. $DC(n, a, b)$ çift kuyruklu yıldız çizgenin n tepesi ve $a + b$ adet uç tepesi vardır (Cygan, Pilipczuk, ve Škrekovski, 2011). $v_1, \dots, v_a, u_1, \dots, u_b, w_1, w_2, \dots, w_{n-a-b}$ $DC(n, a, b)$ çift kuyruklu yıldız çizgenin tepeleri olmak üzere $n - a - b$ tepeli P_{n-a-b} yol çizgenin tepeleri $w_1, w_2, \dots, w_{n-a-b}$, P_{n-a-b} çizgesinin uç tepesi w_1 tepesine komşu olan uç tepeler $v_1, \dots, v_a$ ve P_{n-a-b} çizgesinin diğer uç tepesi w_{n-a-b} tepesine komşu olan uç tepeler $u_1, \dots, u_b$ olsun.



Şekil 5.2 $n = 12, a = 3, b = 4$ için çift kuyruklu yıldız çizge $DC(n, a, b)$

Yardımcı Teorem 5.3: $DC(n, a, b)$ ($a, b \geq 1, n \geq a + b + 2$) n tepeli çift kuyruklu yıldız çizge olmak üzere, çift kuyruklu yıldız çizgenin yığılma değeri

$$\varphi(DC(n, a, b)) = \frac{3(n-1)}{(n-a-b+1)((n-a-b)(n-a+2b-1)+3a(n-a+b))+6(b(b-1)+a(a-1))} \text{ olur.}$$

İspat: $DC(n, a, b)$ çift kuyruklu yıldız çizgenin yığılma değerini hesaplamak için çizgenin tepelerine bağlı olarak dört durum söz konusudur:

Durum 1: $w_1, w_2, \dots, w_{n-a-b}, u_1, u_2, \dots, u_b$ tepeleri için $S = \{w_1, w_2, \dots, w_{n-a-b}, u_1, u_2, \dots, u_b\}$ olsun. O zaman $C_{b, n-a-b}$ $n - a$ tepeli kuyruklu yıldız çizge olmak üzere $DC(n, a, b)[S] = C_{b, n-a-b}$ olur. Yardımcı Teorem

5.2'nin

Durum

1-4'ten,

$\sum_{i,j \in V(C_{b,n-a-b})} d_{ij} = \frac{(n-a-b)((n-a-b)^2-1)}{3} + b(n-a-b)(n-a-b+1) + 2b(b-1)$ olur.

Durum 2: $DC(n, a, b)$ çizgesinde P_{n-a-b} çizgesinin w_1 uç tepesine komşu olan

$v_1, v_2, \dots, v_a$ uç tepeleri için

$$\sum_{i=1}^a \sum_{x \in V(C_{b,n-a-b})} d_{v_i x} = \sum_{i=1}^a (d_{v_i w_1} + d_{v_i w_2} + \dots + d_{v_i w_{n-a-b}} + d_{v_i u_1} + d_{v_i u_2} + \dots + d_{v_i u_b}) = \sum_{i=1}^a (1 + 2 + \dots + (n-a-b) + b(n-a-b+1)) = \sum_{i=1}^a \left(\frac{(n-a-b)(n-a-b+1)}{2} + b(n-a-b+1) \right) = a \left(\frac{(n-a-b)(n-a-b+1) + 2b(n-a-b+1)}{2} \right) = \frac{a(n-a-b+1)(n-a+b)}{2} \text{ olur.}$$

Durum 3: $DC(n, a, b)$ çizgesinde $w_1, w_2, \dots, w_{n-a-b}, u_1, u_2, \dots, u_b$ tepeleri için,

Durum 2'ye benzer olarak,

$$\sum_{x \in V(C_{b,n-a-b})} \sum_{i=1}^a d_{x v_i} = (d_{w_1 v_1} + d_{w_1 v_2} + \dots + d_{w_1 v_a}) + (d_{w_2 v_1} + d_{w_2 v_2} + \dots + d_{w_2 v_a}) + \dots + (d_{w_{n-a-b} v_1} + d_{w_{n-a-b} v_2} + \dots + d_{w_{n-a-b} v_a}) + (d_{u_1 v_1} + d_{u_1 v_2} + \dots + d_{u_1 v_a}) + (d_{u_2 v_1} + d_{u_2 v_2} + \dots + d_{u_2 v_a}) + \dots + (d_{u_b v_1} + d_{u_b v_2} + \dots + d_{u_b v_a}) = (a)(1) + (a)(2) + \dots + (a)(n-a-b) + (a)(n-a-b+1) + (a)(n-a-b+1) + \dots + (a)(n-a-b+1) = (a)(1 + 2 + \dots + (n-a-b) + b(n-a-b+1)) = (a) \left(\frac{(n-a-b)(n-a-b+1)}{2} + b(n-a-b+1) \right) = \frac{a(n-a-b+1)(n-a+b)}{2} \text{ olur.}$$

Durum 4: $DC(n, a, b)$ çizgesinde P_{n-a-b} çizgesinin w_1 uç tepesine komşu olan

$v_1, v_2, \dots, v_a$ uç tepeleri için $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1, j \neq i}^a d_{v_i v_j} = a((a-1)(2)) = 2a(a-1)$ olur.

Durum 1-4'ten, n tepeli $DC(n, a, b)$ çift kuyruklu yıldız çizgenin ortalama yol

uzunluğu $L(DC(n, a, b)) = \frac{\sum_{i,j \in V(DC(n,a,b))} d_{ij}}{n(n-1)} = \frac{\frac{(n-a-b)((n-a-b)^2-1)}{3} + b(n-a-b)(n-a-b+1) + 2b(b-1) + 2\left(\frac{a(n-a-b+1)(n-a+b)}{2}\right) + 2a(a-1)}{n(n-1)} = \frac{(n-a-b+1)((n-a-b)(n-a+2b-1) + 3a(n-a+b)) + 6(b(b-1) + a(a-1))}{3n(n-1)} \text{ olur.}$ O halde çift kuyruklu

yıldız çizgenin yığılma değeri $\varphi(DC(n, a, b)) = \frac{1}{nL(DC(n,a,b))} = \frac{1}{n \left(\frac{(n-a-b+1)((n-a-b)(n-a+2b-1) + 3a(n-a+b)) + 6(b(b-1) + a(a-1))}{3n(n-1)} \right)}$

$\frac{3(n-1)}{(n-a-b+1)((n-a-b)(n-a+2b-1)+3a(n-a+b))+6(b(b-1)+a(a-1))}$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.3: $G = DC(n, a, b)$ ($a, b \geq 2, n - a - b \geq 4$) n tepeli çift kuyruklu yıldız çizge ve $k_1 = n - a - b$, $k_2 = a - 1$, $k_3 = b - 1$, $k_4 = (k_1 + 1)(k_1(n - a + 2b - 1) + 3a(n - a + b)) + 6(bk_3 + ak_2)$ olmak üzere $v \in V(G)$ tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v) =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{(-k_1-1)(k_1(n-a+2b-1)-3(n-a+b)(n-a-1))}{k_4(n-2)} - \frac{6(bk_3-k_2(2n-a-2))}{k_4(n-2)}, & \text{eğer } v = v_i \ (1 \leq i \leq a) \text{ ise;} \\ \frac{(k_1+1)(k_1(2n+a-2b-2)+3a(a-b+n-2))}{k_4(n-2)} + \frac{6(bk_3(-b+2n-2)-ak_2)}{k_4(n-2)}, & \text{eğer } v = u_j \ (1 \leq j \leq b) \text{ ise;} \\ \frac{(n-a-2)(k_1+1)(k_1(n-a+2b-1)+3a(n-a+b))}{k_4(n-a-2)} + \frac{6(ak_2(n-a-2)-bk_3(a+1))}{k_4(n-a-2)}, & \text{eğer } v = w_1 \text{ ise;} \\ \frac{k_1(n-1)(k_1-1)(n-a+2k_3)}{k_4(n-a-2)} - \frac{(n-b-2)((k_1+1)(k_1(n-a+2b-1)+3a(n-a+b))+6bk_3)}{k_4(n-b-2)}, & \text{eğer } v = w_{n-a-b} \text{ ise;} \\ \frac{k_1(n-1)(k_1-1)(n+2a-b-2)-6ak_2(b+1)}{k_4(n-b-2)} - \frac{(n-3)(k_1+1)(k_1(n-a+2b-1)+3a(n-a+b))}{k_4(n-3)}, & \text{eğer } v = w_t \ (2 \leq t \leq k_1 - 1) \text{ ise.} \\ \frac{(n-1)(k_1-1)((k_1-2)(n-a+2b-3)+3a(n-a+b-2))}{k_4(n-3)} - \frac{12(bk_3+ak_2)}{k_4(n-3)} \end{array} \right.$$

İspat: $DC(n, a, b)$ çizgesinin tepelerinin tepe önemi değerlerini hesaplamak için çizgenin tepelerine bağlı olarak beş durum söz konusudur:

Durum 1: $v_i \in V(DC(n, a, b))$ ($1 \leq i \leq a$) uç tepesi için, v_i uç tepesi büzüldükten sonra çizge $n - 1$ tepeli $DC(n - 1, a - 1, b)$ çift kuyruklu yıldız çizgeye yığılır. Yardımcı Teorem 5.3'ten $DC(n, a, b)'(v_i)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(DC(n, a, b)'(v_i)) = \varphi(DC(n - 1, a - 1, b)) = \frac{3(n-2)}{(n-a-b+1)((n-a-b)(n-a+2b-1)+3(a-1)(n-a+b))+6(b(b-1)+(a-1)(a-2))}$ olur.

Yardımcı Teorem 5.3'ten v_i tepesinin tepe önemi değeri

$$IMC(v_i) = 1 - \frac{\varphi(DC(n,a,b))}{\varphi(DC(n,a,b)'(v_i))} = 1 - \frac{\varphi(DC(n,a,b))}{\varphi(DC(n-1,a-1,b))} = \frac{(-n+a+b-1)((n-a-b)(n-a+2b-1)-3(n-a+b)(n-a-1))-6(b(b-1)-(a-1)(2n-a-2))}{(n-2)((n-a-b+1)((n-a-b)(n-a+2b-1)+3a(n-a+b))+6(b(b-1)+a(a-1)))} \text{ elde edilir.}$$

Durum 2: $u_j \in V(DC(n, a, b))$ ($1 \leq j \leq b$) uç tepesi için, u_j tepesi büzüldükten sonra çizge $n - 1$ tepeli $DC(n - 1, a, b - 1)$ çift kuyruklu yıldız çizgeye yığılır.

Yardımcı Teorem 5.3'ten $DC(n, a, b)'(u_j)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(DC(n, a, b)'(u_j)) = \varphi(DC(n - 1, a, b - 1)) = \frac{3(n-2)}{(n-a-b+1)((n-a-b)(n-a+2b-4)+3a(n-a+b-2))+6((b-1)(b-2)+a(a-1))}$ olur.

Yardımcı Teorem 5.3'ten u_j tepesinin tepe önemi değeri

$$IMC(u_j) = 1 - \frac{\varphi(DC(n,a,b))}{\varphi(DC(n,a,b)'(u_j))} = 1 - \frac{\varphi(DC(n,a,b))}{\varphi(DC(n-1,a,b-1))} = 1 - \frac{\frac{3(n-1)}{(n-a-b+1)((n-a-b)(n-a+2b-1)+3a(n-a+b))+6(b(b-1)+a(a-1))}}{\frac{3(n-2)}{(n-a-b+1)((n-a-b)(n-a+2b-4)+3a(n-a+b-2))+6((b-1)(b-2)+a(a-1))}} = \frac{(n-a-b+1)((n-a-b)(2n+a-2b-2)+3a(a-b+n-2))+6((b-1)(-b+2n-2)-a(a-1))}{(n-2)((n-a-b+1)((n-a-b)(n-a+2b-1)+3a(n-a+b))+6(b(b-1)+a(a-1)))} \text{ elde edilir.}$$

Durum 3: $w_1 \in V(DC(n, a, b))$ tepesi için, w_1 tepesi büzüldükten sonra çizge $n - a - 1$ tepeli $C_{b,n-a-b-1}$ kuyruklu yıldız çizgeye yığılır. Yardımcı Teorem 5.2'den

$$DC(n, a, b)'(w_1) \text{ çizgesinin yığılma değeri } \varphi(DC(n, a, b)'(w_1)) = \varphi(C_{b,n-a-b-1}) = \frac{3(b+n-a-b-1-1)}{(n-a-b-1)(n-a-b-1+1)(n-a-b-1+3b-1)+6b(b-1)} = \frac{3(n-a-2)}{(n-a-b-1)(n-a-b)(n-a+2b-2)+6b(b-1)} \text{ olur.}$$

Yardımcı Teorem 5.2 ve Yardımcı Teorem 5.3'ten w_1 tepesinin tepe önemi değeri

$$IMC(w_1) = 1 - \frac{\varphi(DC(n,a,b))}{\varphi(DC(n,a,b)'(w_1))} = 1 - \frac{\varphi(DC(n,a,b))}{\varphi(C_{b,n-a-b-1})} = 1 - \frac{\frac{3(n-1)}{(n-a-b+1)((n-a-b)(n-a+2b-1)+3a(n-a+b))+6(b(b-1)+a(a-1))}}{\frac{3(n-a-2)}{(n-a-b-1)(n-a-b)(n-a+2b-2)+6b(b-1)}} = \frac{(n-a-2)(k_1+1)(k_1(n-a+2b-1)+3a(n-a+b))}{k_4(n-a-2)} + \frac{6(ak_2(n-a-2)-bk_3(a+1))-k_1(n-1)(k_1-1)(n-a+2k_3)}{k_4(n-a-2)} \text{ elde edilir.}$$

Durum 4: $w_{n-a-b} \in V(DC(n, a, b))$ tepesi için, w_{n-a-b} tepesi büzüldükten sonra çizge $n - b - 1$ tepeli $C_{a,n-a-b-1}$ kuyruklu yıldız çizgeye yığılır. Yardımcı Teorem 5.2'den

$$DC(n, a, b)'(w_{n-a-b}) \text{ çizgesinin yığılma değeri } \varphi(DC(n, a, b)'(w_{n-a-b})) = \varphi(C_{a,n-a-b-1}) = \frac{3(a+n-a-b-1-1)}{(n-a-b-1)(n-a-b-1+1)(n-a-b-1+3a-1)+6a(a-1)} = \frac{3(n-b-2)}{(n-a-b-1)(n-a-b)(n+2a-b-2)+6a(a-1)} \text{ olur.}$$

Yardımcı Teorem 5.2 ve Yardımcı Teorem 5.3'ten w_{n-a-b} tepesinin tepe önemi

değeri $IMC(w_{n-a-b}) = 1 - \frac{\varphi(DC(n,a,b))}{\varphi(DC(n,a,b)')(w_{n-a-b})} = 1 - \frac{\varphi(DC(n,a,b))}{\varphi(C_{a,n-a-b-1})} =$
 $1 - \frac{\frac{3(n-1)}{(n-a-b+1)((n-a-b)(n-a+2b-1)+3a(n-a+b))+6(b(b-1)+a(a-1))}}{\frac{3(n-2)}{(n-a-b+1)((n-a-b)(n-a+2b-1)+3a(n-a+b))+6(b(b-1)+a(a-1))}} =$
 $\frac{(n-b-2)((k_1+1)(k_1(n-a+2b-1)+3a(n-a+b))+6bk_3)}{k_4(n-b-2)} - \frac{k_1(n-1)(k_1-1)(n+2a-b-2)-6ak_2(b+1)}{k_4(n-b-2)}$ elde edilir.

Durum 5: $w_t \in V(DC(n,a,b))$ ($2 \leq t \leq n-a-b-1$) tepesi için, w_t tepesi büzüldükten sonra çizge $n-2$ tepeli $DC(n-2,a,b)$ çift kuyruklu yıldız çizgeye yığılır. Yardımcı Teorem 5.3'ten $DC(n,a,b)'(w_t)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(DC(n,a,b)'(w_t)) = \varphi(DC(n-2,a,b)) =$

$$\frac{3(n-2-1)}{(n-2-a-b+1)((n-2-a-b)(n-2-a+2b-1)+3a(n-2-a+b))+6(b(b-1)+a(a-1))} = \frac{3(n-3)}{(n-a-b-1)((n-a-b-2)(n-a+2b-3)+3a(n-a+b-2))+6(b(b-1)+a(a-1))} \text{ olur.}$$

Yardımcı Teorem 5.3'ten w_t tepesinin tepe önemi değeri $IMC(w_t) = 1 - \frac{\varphi(DC(n,a,b))}{\varphi(DC(n,a,b)')(w_t)} = 1 - \frac{\varphi(DC(n,a,b))}{\varphi(DC(n-2,a,b))} =$
 $1 - \frac{\frac{3(n-1)}{(n-a-b+1)((n-a-b)(n-a+2b-1)+3a(n-a+b))+6(b(b-1)+a(a-1))}}{\frac{3(n-3)}{(n-a-b-1)((n-a-b-2)(n-a+2b-3)+3a(n-a+b-2))+6(b(b-1)+a(a-1))}} =$
 $\frac{(n-3)(k_1+1)(k_1(n-a+2b-1)+3a(n-a+b))-12(bk_3+ak_2)}{k_4(n-3)} - \frac{(n-1)(k_1-1)((k_1-2)(n-a+2b-3)+3a(n-a+b-2))}{k_4(n-3)}$ elde edilir.

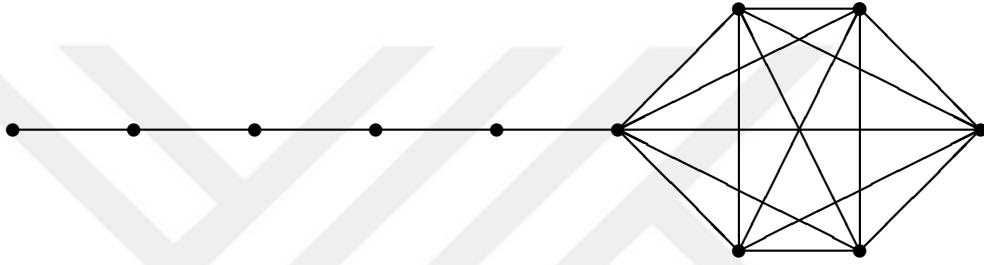
Teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Açıklama 5.3: Çift kuyruklu yıldız çizgede w_{n-a-b} veya w_1 tepesi büzüldükten sonra çizge kuyruklu yıldız çizgeye yığılır, yığılma daha çok olur. $a > b$ için $\deg(w_1) > \deg(w_{n-a-b}) > \deg(w_t) > \deg(v_i) = \deg(u_j)$ ($2 \leq t \leq n-a-b-1, 1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq b$) olduğundan w_1 tepesi büzüldükten sonra geriye kalan tepelerin sayısı en azdır ve dolayısıyla çizge yığılması en büyüktür. $IMC(w_1) > IMC(w_{n-a-b}) > IMC(w_t) > IMC(u_j) > IMC(v_i)$ olur ve dolayısıyla w_1 tepesi çizgenin bağlantılılığına katkıda bulunan en önemli tepedir. w_1 tepesi çizgede önemli bir konumda yer alır ve tepe çiftleri arasındaki en kısa yolların çoğu w_1 tepesinden geçer. Benzer şekilde, $b > a$ için $\deg(w_{n-a-b}) > \deg(w_1) > \deg(w_t) > \deg(v_i) = \deg(u_j)$ olduğundan w_{n-a-b} tepesi

büzüldükten sonra geriye kalan tepelerin sayısı en azdır ve dolayısıyla çizge yığılması en büyüktür. $IMC(w_{n-a-b}) > IMC(w_1) > IMC(w_t) > IMC(v_i) > IMC(u_j)$ olur ve dolayısıyla w_{n-a-b} tepesi etkin ağ akışında önemli bir konumda yer almaktadır. $a = b$ için $deg(w_1) = deg(w_{n-a-b}) > deg(w_t) > deg(v_i) = deg(u_j)$ olduğundan $IMC(w_1) = IMC(w_{n-a-b}) > IMC(w_t) > IMC(v_i) = IMC(u_j)$ olur. Eğer $DC(n, a, b)$ çizgesinde w_t tepesi veya v_i tepesi veya u_j tepesi büzülürse o zaman çizgede neredeyse hiçbir değişiklik olmaz, çizge yine çift kuyruklu yıldız çizgeye yığılır. Ancak bir tepenin önemi aynı zamanda o tepenin çizgedeki konumuna bağlı olduğundan $deg(w_t) > deg(v_i)$ ve $deg(w_t) > deg(u_j)$ olması sonucu $IMC(w_t) > IMC(v_i)$ ve $IMC(w_t) > IMC(u_j)$ olur. O halde w_t tepesi v_i ve u_j tepelerinden daha önemli bir tepedir.

5.4 Lolipop Çizge

d ($d > 1$) tepeli P_d yol çizgenin uç tepelerinden birinin $n - d$ tepeli K_{n-d} tam çizgenin tüm tepelerine birer ayrıt ile birleştirilmesiyle oluşan çizgeye lolipop çizge denir ve $L_{n,d}$ ile gösterilir (Morgan, Mukwembi, ve Swart, 2011). v_1 ve v_d tepeleri P_d yol çizgenin uç tepeleri ve $\deg_{L_{n,d}}(v_1) = 1, \deg_{L_{n,d}}(v_d) = n - d + 1$ olmak üzere P_d yol çizgenin tepeleri $v_1, \dots, v_d$ ve K_{n-d} tam çizgenin tepeleri $u_1, \dots, u_{n-d}$ olsun.



Şekil 5.3 $n = 11$ ve $d = 6$ için lolipop çizge $L_{n,d}$

Yardımcı Teorem 5.4: $L_{n,d}$ n tepeli lolipop çizge olmak üzere, lolipop çizgenin yığılma değeri $\varphi(L_{n,d}) = \frac{3(n-1)}{3(n-d)(d^2-1+n)+d(d^2-1)}$ olur.

İspat: $L_{n,d}$ lolipop çizgenin yığılma değerini hesaplamak için çizgenin tepelerine bağlı olarak dört durum söz konusudur:

Durum 1: $L_{n,d}$ çizgesinde P_d yol çizgenin $v_1, \dots, v_d$ tepeleri için $\sum_{\forall v_i, v_j \in V(P_n), v_i \neq v_j} d_{v_i v_j} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1, j \neq i}^d d_{v_i v_j}$ olur. Yardımcı Teorem 5.1'in ispatından $\sum_{i=1}^d \sum_{j=1, j \neq i}^d d_{v_i v_j} = \frac{d(d^2-1)}{3}$ olur.

Durum 2: $L_{n,d}$ çizgesinde P_d yol çizgenin $v_1, \dots, v_d$ ve K_{n-d} tam çizgenin $u_1, \dots, u_{n-d}$ tepeleri için $\sum_{\forall v_i \in V(P_n), \forall u_j \in V(K_{n-d})} d_{v_i u_j} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n-d} d_{v_i u_j} =$

$d(n-d) + (d-1)(n-d) + \dots + (1)(n-d) = (n-d)(1 + \dots + d) = (n-d)\left(\frac{d(d+1)}{2}\right)$ olur.

Durum 3: $L_{n,d}$ çizgesinde K_{n-d} tam çizgenin $u_1, \dots, u_{n-d}$ ve P_d yol çizgenin $v_1, \dots, v_d$ tepeleri için, Durum 2'ye benzer olarak, $\sum_{\forall u_i \in V(K_{n-d}), \forall v_j \in V(P_d)} d_{u_i v_j} =$
 $\sum_{i=1}^{n-d} \sum_{j=1}^d d_{u_i v_j} = (d + (d-1) + \dots + (1))(n-d) = \frac{d(d+1)}{2}(n-d)$ olur.

Durum 4: $L_{n,d}$ çizgesinde K_{n-d} tam çizgenin $u_1, \dots, u_{n-d}$ tepeleri için
 $\sum_{\forall u_i, u_j \in V(K_{n-d}), u_i \neq u_j} d_{u_i u_j} = \sum_{i=1}^{n-d} \sum_{j=1, j \neq i}^{n-d} d_{u_i u_j} = (n-d)((n-d-1)(1))$ olur.

Durum 1-4'ten, n tepeli $L_{n,d}$ lolipop çizgenin ortalama yol uzunluğu
 $L(L_{n,d}) = \frac{\sum_{i,j \in V(L_{n,d})} d_{ij}}{(n)(n-1)} = \frac{\frac{d(d^2-1)}{3} + 2((n-d)(\frac{d(d+1)}{2})) + (n-d)(n-d-1)}{n(n-1)} =$
 $\frac{d(d^2-1) + 3d(n-d)(d+1) + 3(n-d)(n-d-1)}{3n(n-1)}$ olur. O halde, lolipop çizgenin yığılma değeri
 $\varphi(L_{n,d}) = \frac{1}{(n)L(L_{n,d})} = \frac{1}{n(\frac{d(d^2-1) + 3d(n-d)(d+1) + 3(n-d)(n-d-1)}{3n(n-1)})} = \frac{3(n-1)}{3(n-d)(d^2-1+n) + d(d^2-1)}$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.4: $G = L_{n,d}$ ($d > 3, n-d > 1$) n tepeli lolipop çizge ve $x = n-d$, $y = n-1$, $z = d-1$, $t = 3x(d^2-1+n) + d(d^2-1)$ olmak üzere $v \in V(G)$ tepesinin tepe önemi değeri

$$IMC(v) = \begin{cases} \frac{3x(y(2d-1)-d^2)+dz(3n-d-4)}{t(n-2)}, & \text{eğer } v = v_1 \text{ ise;} \\ \frac{6x(2yz-d^2)+2z(3yz-d(d+1))}{t(n-3)}, & \text{eğer } v = v_i \text{ (} 2 \leq i \leq d-1 \text{) ise;} \\ \frac{3x(d^2-1+n)+dz(d-n+2)}{t}, & \text{eğer } v = v_d \text{ ise;} \\ \frac{x(d(2d-1)+3y)}{t}, & \text{eğer } v = u_j \text{ (} 1 \leq j \leq n-d \text{) ise.} \end{cases} \quad (5.4)$$

İspat: $L_{n,d}$ çizgesinin tepelerinin tepe önemi değerlerini hesaplamak için çizgenin tepelerine bağlı olarak dört durum söz konusudur:

Durum 1: $L_{n,d}$ çizgesinde P_d yol çizgeye ait olan v_1 tepesi için, v_1 tepesi büzüldükten sonra çizge $n - 1$ tepeli $L_{n-1,d-1}$ lolipop çizgeye yığılır. Yardımcı Teorem 5.4'ten $L'_{n,d}(v_1)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(L'_{n,d}(v_1)) = \varphi(L_{n-1,d-1}) = \frac{3(n-1-1)}{3(n-1-(d-1))((d-1)^2-1+n-1)+(d-1)((d-1)^2-1)} = \frac{3(n-2)}{3(n-d)(d^2-2d+n-1)+(d)(d-1)(d-2)}$ olur. Yardımcı Teorem 5.4'ten v_1 tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v_1) = 1 - \frac{\varphi(L_{n,d})}{\varphi(L'_{n,d}(v_1))} = 1 - \frac{\varphi(L_{n,d})}{\varphi(L_{n-1,d-1})} = 1 - \frac{\frac{3(n-1)}{3(n-d)(d^2-1+n)+d(d^2-1)}}{\frac{3(n-2)}{3(n-d)(d^2-2d+n-1)+(d)(d-1)(d-2)}} = \frac{3(n-d)((n-1)(2d-1)-d^2)+d(d-1)(3n-d-4)}{(n-2)(3(n-d)(d^2-1+n)+d(d^2-1))}$ elde edilir.

Durum 2: $L_{n,d}$ çizgesinde P_d yol çizgeye ait olan v_i ($2 \leq i \leq d - 1$) tepesi için, v_i tepesi büzüldükten sonra çizge $n - 2$ tepeli $L_{n-2,d-2}$ lolipop çizgeye yığılır. Yardımcı Teorem 5.4'ten $L'_{n,d}(v_i)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(L'_{n,d}(v_i)) = \varphi(L_{n-2,d-2}) = \frac{3(n-2-1)}{3(n-2-(d-2))((d-2)^2-1+n-2)+(d-2)((d-2)^2-1)} = \frac{3(n-3)}{3(n-d)(d^2-4d+1+n)+(d-1)(d-2)(d-3)}$ olur. Yardımcı Teorem 5.4'ten v_i tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v_i) = 1 - \frac{\varphi(L_{n,d})}{\varphi(L'_{n,d}(v_i))} = 1 - \frac{\varphi(L_{n,d})}{\varphi(L_{n-2,d-2})} = 1 - \frac{\frac{3(n-1)}{3(n-d)(d^2-1+n)+d(d^2-1)}}{\frac{3(n-3)}{3(n-d)(d^2-4d+1+n)+(d-1)(d-2)(d-3)}} = \frac{6(n-d)(2(d-1)(n-1)-d^2)+2(d-1)(3(d-1)(n-1)-d(d+1))}{(n-3)(3(n-d)(d^2-1+n)+d(d^2-1))}$ elde edilir.

Durum 3: $L_{n,d}$ çizgesinde P_d yol çizgeye ait olan v_d tepesi için, v_d tepesi büzüldükten sonra çizge $d - 1$ tepeli P_{d-1} yol çizgeye yığılır. Yardımcı Teorem 5.1'den $L'_{n,d}(v_d)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(L'_{n,d}(v_d)) = \varphi(P_{d-1}) = \frac{3}{(d-1)(d-1+1)} = \frac{3}{d(d-1)}$ olur. Yardımcı Teorem 5.4'ten v_d tepesinin tepe önemi değeri $IMC(v_d) = 1 - \frac{\varphi(L_{n,d})}{\varphi(L'_{n,d}(v_d))} = 1 - \frac{\varphi(L_{n,d})}{\varphi(P_{d-1})} = 1 - \frac{\frac{3(n-1)}{3(n-d)(d^2-1+n)+d(d^2-1)}}{\frac{3}{d(d-1)}} = \frac{3(n-d)(d^2-1+n)+d(d-1)(d-n+2)}{3(n-d)(d^2-1+n)+d(d^2-1)}$ elde edilir.

Durum 4: $L_{n,d}$ çizgesinde K_{n-d} tam çizgeye ait olan u_j ($1 \leq j \leq n - d$) tepesi için, u_j tepesi büzüldükten sonra çizge d tepeli P_d yol çizgeye yığılır. Yardımcı Teorem 5.1'den $L'_{n,d}(u_j)$ çizgesinin yığılma değeri $\varphi(L'_{n,d}(u_j)) = \varphi(P_d) = \frac{3}{d(d+1)}$ olur.

Yardımcı Teorem 5.4'ten u_j tepesinin tepe önemi değeri $IMC(u_j) = 1 - \frac{\varphi(L_{n,d})}{\varphi(L'_{n,d}(u_j))} = 1 - \frac{\varphi(L_{n,d})}{\varphi(P_d)} = 1 - \frac{3(n-1)}{3(n-d)(d^2-1+n)+d(d^2-1)} = \frac{(n-d)(d(2d-1)+3(n-1))}{3(n-d)(d^2-1+n)+d(d^2-1)}$ elde edilir.

Teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Açıklama 5.4: Lolipop çizgede bir tepenin tepe önemi tepe derecesi ve tepenin bulunduğu konum olmak üzere iki etkene bağlıdır. Lolipop çizgede v_d tepesi büzüldükten sonra çizge yol çizgeye yığılır, çizge yığılması daha fazladır. Lolipop çizgede en büyük tepe derecesi $\Delta(L_{n,d}) = \deg(v_d)$, en küçük tepe derecesi $\delta(L_{n,d}) = \deg(v_1)$ olduğundan, v_d tepesinin derecesi en büyüktür, büzüldükten sonra geriye kalan tepelerin sayısı en azdır ve dolayısıyla çizge yığılması en büyüktür, yol çizgeye yığılır.

$IMC(v_d) > IMC(v_1), IMC(v_d) > IMC(v_i), IMC(v_d) > IMC(u_j)$ olur, v_d tepesi çizgenin bağlantılılığına katkıda bulunan en önemli tepedir. v_d tepesi etkin ağ akışında çizgede önemli bir konumda yer alır ve tepe çiftleri arasındaki en kısa yolların çoğu v_d tepesinden geçer. $L_{n,d}$ çizgesinde v_i veya v_1 tepesi büzülürse çizgede neredeyse bir değişiklik olmaz ancak $\deg(v_i) > \deg(v_1)$ olduğundan $IMC(v_i) > IMC(v_1)$ olur. $L_{n,d}$ çizgesinde u_j tepesi büzülürse, çizge yine daha çok yığılır, yol çizgeye yığılır ancak $\deg(v_d) > \deg(u_j)$ olduğundan $IMC(v_d) > IMC(u_j)$ olur ama $IMC(u_j) > IMC(v_1)$ elde edilir. $L_{n,d}$ çizgesinde bir tepenin önemi aynı zamanda o tepenin çizgedeki konumuna bağlı olduğundan, u_j ve v_i tepeleri v_1 tepesinden daha önemli bir konumda bulunmaktadır. $n - d = 2$ için $\deg(u_j) = \deg(v_i)$ olmasına rağmen $IMC(v_i) > IMC(u_j)$ olur, o halde v_i tepesi u_j tepesinden daha önemli bir tepedir. $n - d > 2$ için $\deg(u_j) > \deg(v_i)$ olur. $L_{n,d}$ çizgesinde bir tepenin derecesi ne kadar büyükse ve bir tepe ne kadar önemli bir konumda bulunuyorsa, yığılma o kadar büyük olur. Dolayısıyla $n = 7, d = 4$ ve $n = 8, d = 5$ özel durumları dışında $IMC(u_j) > IMC(v_i)$ olur. Ancak genel olarak lolipop çizgede u_j tepesi v_i tepesinden daha önemli bir tepedir.

BÖLÜM ALTI

TEPE ÖNEMİ ALGORİTMASI

Bu bölümde, bir çizgenin her bir tepesinin tepe önemi değerini hesaplayan polinom zamanlı bir algoritma tasarlanmıştır.

6.1 Bir Çizgenin Tepelerinin Önem Değerlerini Hesaplayan Algoritma

n tepeli bir çizgenin her bir tepesinin önem değerini hesaplayan bir algoritma tasarlanmıştır. Bu algoritma, ilk olarak çizgenin yığılma değerini hesaplar. Sonrasında her bir tepeyi diğer tepelerden bağımsız olarak ele alır ve bu tepenin büzülmesinden sonra geriye kalan alt çizgenin yığılma değerini hesaplayarak ilgili tepenin tepe önemi değerini bulur.

G çizgesinin komşuluk matrisi,

$$A[i, j] = \begin{cases} 1, & i \text{ ve } j \text{ tepeleri } G \text{ çizgesinde birbirine komşu ise;} \\ 0, & i = j \text{ veya } i \text{ ve } j \text{ tepeleri } G \text{ çizgesinde birbirine komşu değil ise.} \end{cases} \quad (6.1)$$

olmak üzere

$$d[i, j] = \begin{cases} 1, & G \text{ çizgesinde } i \text{ ve } j \text{ tepeleri birbirine komşu ise;} \\ 0, & i = j \text{ ise;} \\ \infty, & G \text{ çizgesinde } i \text{ ve } j \text{ tepeleri birbirine komşu değil ise.} \end{cases} \quad (6.2)$$

matrisi oluşturulur. d matrisi üzerinde Floyd-Warshall algoritması (Floyd, 1962) çalıştırılarak G çizgesi için uzaklık matrisi elde edilir. d uzaklık matrisi kullanılarak G çizgesinin yığılma değeri hesaplanır ve bu değer Φ_G değişkeninde tutulur.

G çizgesinde büzülen her bir tepe için, geriye kalan alt çizgenin komşuluk matrisi C matrisinde tutulur. C komşuluk matrisinden ve Floyd-Warshall algoritmasından

yararlanılarak bu alt çizgenin yığılma değeri hesaplanır. Böylece ilgili tepenin tepe önemi değeri bulunur. Algoritma çıktı olarak çizgenin her bir tepesinin tepe önemi değerini verir. Tepe önemi algoritması polinom zamanlı bir algoritmadır. Floyd-Warshall algoritması n tepeli çizgeler için $O(n^3)$ zaman karmaşıklığına sahiptir. Tepe önemi algoritması n tepeli bir çizgenin her bir tepesi için tepe önemi değerini hesapladığından algoritmanın zaman karmaşıklığı $nO(n^3) = O(n^4)$ olur.

Algoritma 1: Shortest Path: Floyd-Warshall Algoritması ($A[n, n], n$)

```

1  begin
2    for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
3      for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
4        read  $A[i, j]$ ;
5      end for
6    end for
7    for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
8      for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
9        if  $i = j$  then
10          $d[i, j] \leftarrow 0$ ;
11       else if  $(A[i, j]) = 1$  then
12          $d[i, j] \leftarrow 1$ ;
13       else
14          $d[i, j] \leftarrow \infty$ ;
15       end if
16     end for
17   end for
18   for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
19     for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
20       for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
21         if  $d[i, k] + d[k, j] < d[i, j]$  then
22            $d[i, j] \leftarrow d[i, k] + d[k, j]$ ;
23         end if
24       end for
25     end for
26   end for
27 end

```

Algoritma 2: Tepe Önemi Değeri

```
1 A,C:array[1..n,1..n] of boolean;
2 i,j,n,ki,kj,v,k,vi,Phi_G: nonnegative integer;
3 vbuz,vbuzkom,vbuzi: array[1..n] of boolean;

4 function Phi(B,x): nonnegative integer
5 d:array[1..n,1..n] of nonnegative integer;
6 topd:nonnegative integer;
7 begin
8    $d \leftarrow \text{Floyd\_Warshall}(B,x);$ 
9    $topd \leftarrow 0;$ 
10  for  $i \leftarrow 1$  to  $x$  do
11    for  $j \leftarrow 1$  to  $x$  do
12       $topd \leftarrow topd + d[i, j];$ 
13    end for
14  end for
15  return  $((x - 1)/topd);$ 
16 end

17 Begin
18    $Phi\_G \leftarrow Phi(A, n);$ 
19   for  $v \leftarrow 1$  to  $n$ 
20     for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
21        $vbuz[i] \leftarrow A[v][i];$ 
22        $vbuzkom[i] \leftarrow 0;$ 
23        $vbuzi[i] \leftarrow 0;$ 
24       for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
25          $C[i, j] \leftarrow 0;$ 
26       end for
27     end for
28     for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
29       if  $vbuz[i] = 1$  then
30         for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
31            $vbuzkom[j] \leftarrow (vbuzkom[j] \text{ OR } A[i][j]);$ 
32         end for
33       end if
34     end for
```

```

35
36
37      $ki \leftarrow 0$ ;
38     for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
39         if  $vbuz[i] = 0$  then
40              $ki \leftarrow ki + 1$ ;
41              $vbuzi[ki] \leftarrow i$ ;
42             if  $v = i$  then
43                  $vi \leftarrow ki$ ;
44             end if
45              $kj \leftarrow 0$ ;
46             for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
47                 if  $vbuz[j] = 0$  then
48                      $kj \leftarrow kj + 1$ ;
49                      $C[ki, kj] \leftarrow A[i, j]$ ;
50                 end if
51             end for
52         end if
53     end for
54     for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
55         if ( $vbuzkom[i] = 1$  AND  $i \neq v$ ) then
56              $j \leftarrow 0$ ;
57             do
58                  $j \leftarrow j + 1$ ;
59             while ( $i <> vbuzi[j]$  AND  $j \leq ki$ );
60             if ( $j \leq ki$ ) then
61                  $C[j, vi] \leftarrow 1$ ;
62                  $C[vi, j] \leftarrow 1$ ;
63             else
64                 for  $j \leftarrow 1$  to  $kj$  do
65                     if ( $vbuzi[j] <> v$  AND  $A[i, vbuzi[j]] = 1$ ) then
66                          $C[j, vi] \leftarrow 1$ ;
67                          $C[vi, j] \leftarrow 1$ ;
68                     end if
69                 end for
70             end if
71         end if
72     end for
73     print  $v$ , "tepesinin önem değeri:",  $1 - (Phi\_G/Phi(C, ki))$ ;
74 end for
75 end

```

BÖLÜM YEDİ

SONUÇLAR

Bu tezde, karmaşık ağlarda tepelerin öneminin belirlenmesi problemini çözmek için önerilmiş yığılmaya dayalı tepe büzülmesini temel alan gelişmiş yeni bir yöntem çalışılmıştır.

Çevre çizge ve benzeri çizge tiplerinden yelpaze çizge, k -piramit çizge ve güneş çizgenin, yol çizge ve benzeri çizge tiplerinden kuyruklu yıldız çizge, çift kuyruklu yıldız çizge ve lolipop çizgenin tepelerinin önem değerleri hesaplanmış ve sonrasında elde edilen tepe önemi değerleri tepelerin ilgili çizgedeki dereceleri ve konumları da dikkate alınarak çizgenin önemli tepeleri belirlenmiştir.

Son bölümde, bir çizgenin tepelerinin önem değerlerini bulan polinom zamanlı bir algoritma önerilmiştir.

KAYNAKLAR

- Albert, R. ve Barabási, A. L. (2002). Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 74(1), 47–97.
- Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M. ve Hwang, D. U. (2006). Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424(4), 175–308.
- Bonacich, P. ve Lloyd, P. (2001). Eigenvector-like measures of centrality for asymmetric relations. *Social Networks*, 23(3), 191–201.
- Borgatti, S. P. (2005). Centrality and network flow. *Social Networks*, 27(1), 55–71.
- Buckley, F. ve Harary, F. (1990). *Distance in graphs*. California: Addison-Wesley.
- Chartrand, G. ve Lesniak, L. (1996). *Graphs and digraphs*. London: CRC Press.
- Chen, Y., Hu, A. Q., Hu, J. ve Chen, L. (2004). Method for finding the most vital node in communication networks. *High Technology Letters*, 14, 573–575.
- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L. ve Stein, C. (2009). *Introduction to Algorithms*. Cambridge: The MIT Press.
- Corso, G. M. D. ve Romani, F. (2016). A multi-class approach for ranking graph nodes: Models and experiments with incomplete data. *Information Sciences*, 329, 619–637.
- Cygan, M., Pilipczuk, M. ve Škrekovski, R. (2011). Relation between Randić index and average distance of trees. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 66, 605–612.
- Domenico, M. D., Solé-Ribalta, A., Omodei, E., Gómez, S. ve Arenas, A. (2015). Ranking in interconnected multilayer networks reveals versatile nodes. *Nature Communications*, 6, 1–6.
- Du, Y., Gao, C., Hu, Y., Mahadevan, S. ve Deng, Y. (2014). A new method of identifying influential nodes in complex networks based on TOPSIS. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 399(4), 57–69.

- Floyd, R. W. (1962). Algorithm 97: Shortest path. *Communication of the ACM*, 5(6), 345.
- Freeman, L. C. (1977). A set of measures of centrality based on betweenness. *Sociometry*, 40(1), 35–41.
- Gallian, J. A. (2012). A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 19, DS6.
- Gao, S., Ma, J., Chen, Z., Wang, G. ve Xing, C. (2014). Ranking the spreading ability of nodes in complex networks based on local structure. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 403(6), 130–147.
- Hattingh, J. H. ve Ungerer, E. (1998). The signed and minus k-subdomination numbers of comets. *Discrete Mathematics*, 183, 141–152.
- Havlin, S., Kenett, D. Y., Ben-Jacob, E., Bunde, A., Cohen, R., Hermann, H., Kantelhardt, J. W., Kertész, J., Kirkpatrick, S., Kurths, J., Portugali, J. ve Solomon, S. (2012). Challenges in network science: Applications to infrastructures, climate, social systems and economics. *European Physical Journal-Special Topics*, 214, 273–293.
- Lawyer, G. (2015). Understanding the influence of all nodes in a network. *Scientific Reports*, 5, 1–9.
- Liu, J. G., Ren, Z. M., Guo, Q. ve Wang, B. H. (2013). Node importance ranking of complex networks. *Acta Physica Sinica-Chinese Edition*, 62(17), 1–10.
- Liu, K., Wang, C. ve Liu, S. (2014). A Novel Node Importance Evaluation Method Based on Agglomeration Contraction Principle for Wireless Sensor Networks. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 10(7), 1–9.
- Malliaros, F. D., Rossi, M. E. G. ve Vazirgiannis, M. (2016). Locating influential nodes in complex networks. *Scientific Reports*, 6, 1–10.
- Morgan, M. J., Mukwembi, S. ve Swart, H. C. (2011). On the eccentric connectivity index of a graph. *Discrete Mathematics*, 311(13), 1229–1234.

- Nardelli, E., Proietti, G. ve Widmayer, P. (2001). Finding the most vital node of a shortest path. *Theoretical Computer Science*, 296(1), 167–177.
- Sabidussi, G. (1966). The centrality index of a graph. *Psychometrika*, 31(4), 581–603.
- Tan, Y. J., Wu, J. ve Deng, H. Z. (2006). Evaluation method for node importance based on node contraction in complex networks. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 26(11), 79–83.
- Wang, J. S., Wu, X. P., Yan, B. ve Guo, J. W. (2011). Improved method of node importance evaluation based on node contraction in complex networks. *Procedia Engineering*, 15, 1600–1604.
- Wang, L., Liu, Y., Gu, X., Wang, Y. ve Jia, J. (2010). Skeleton-network reconfiguration based on node importance and line betweenness. *Automation of Electric Power Systems*, 34(12), 29–33.
- West, D. B. (2001). *Introduction to Graph Theory*. Singapore: Prentice Hall.
- Zhang, J., Zhou, C., Xu, X. ve Small, M. (2010). Mapping from structure to dynamics: a unified view of dynamical processes on networks. *Physical Review E*, 82, 1–7.