

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

YILDIZ VE KUVVETLİ YILDIZ SEÇME PRENSİPLERİ

Nuran ALAR

AĞUSTOS 2020

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

YILDIZ VE KUVVETLİ YILDIZ SEÇME PRENSİPLERİ

Hazırlayan
NURAN ALAR

Danışman
Doç. Dr. Şükran KONCA

Jüri Üyeleri
Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
Doç. Dr. Murat KARAKAŞ
Doç. Dr. Şükran KONCA

AĞUSTOS 2020

ONAY

Nuran ALAR tarafından hazırlanan “Yıldız ve Kuvvetli Yıldız Seçme Prensipleri” adlı tez çalışması 20 / 08 / 2020 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN

(Başkan)

Doç. Dr. Şükran KONCA

(Danışman)

Doç. Dr. Murat KARAKAŞ

(Üye)

İmza

Bu tezin kabulü, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun ... / ... / ... gün ve ... / ... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Zeki ARGUNHAN

Enstitü Müdürü

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre hazırlamış olduğum “**Yıldız ve Kuvvetli Yıldız Seçme Prensipleri**” adlı tezimin özgün bir çalışma olduğunu, tez hazırlanırken tüm aşamalarda bilimsel etik ilkelerine uygun davrandığımı, tez kapsamında sunulan tüm verileri bilimsel etik ilkelerine uygun elde ettiğimi, tezde faydalandığım tüm eserlere atıf yaptığımı ve kaynaklar kısmında bu eserleri gösterdiğimi beyan ederim.

20 / 08 / 2020

Nuran ALAR



ÖZET

YILDIZ VE KUVVETLİ YILDIZ SEÇME PRENSİPLERİ

Nuran ALAR

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Şükran KONCA

Ağustos 2020, 57 sayfa

Bu tez çalışmasında çok önemli bir topolojik özellik olan kompaktlığın daha genel formları olan örtü özellikleri çalışılmıştır. Yıldız-kompaktlık ve yıldız seçme prensipleri teorisi üzerine şu ana kadar yapılmış çalışmalar araştırılarak konuyla ilgili temel kısımlar ispatlarıyla birlikte verilerek derlenmiştir.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde seçme prensipleri teorisinden kısaca bahsedilmiştir. İkinci bölümün ilk kısmında konuyla ilgili ön bilgiler ve temel kavramlar verilmiş olup, ikinci bölümün ikinci kısmında örtü özellikleri ve σ -kompaktlık kavramları ile klasik seçme prensiplerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümün ilk kısmında yeni örtü çeşitleri ve yıldız seçme prensipleri kavramlarına değinilmiştir. Tezin ana kısmını oluşturan üçüncü bölümün birinci kısmı ise iki bölüme ayrılmaktadır. İlk alt bölümünde yıldız-kompaktlık, ikinci alt bölümünde ise yıldız-Menger-tipi seçme prensipleri ve kuvvetli-yıldız-Menger-tipi seçme prensipleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde eldeki sonuçlar değerlendirilerek önerilerde bulunulmuştur. Son bölümde ise kaynaklara yer verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Seçme Prensip Teorisi, Yıldız Seçme Prensip Teorisi, Yıldız Kompaktlık, Açık Örtü.

ABSTRACT

STAR AND STRONGLY STAR SELECTION PRINCIPLES

Nuran ALAR

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate Education Institute

Department of Mathematics,

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Şükran KONCA

August 2020, 57 pages

In this thesis, more general forms of compactness, which is an important topological property, are studied. The studies on the theory of star-compactness and star-selection have been investigated so far, and the main parts of the subject have been compiled with the proofs.

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the theory of selection principles is briefly mentioned. In the first part of the second chapter, preliminary informations and basic concepts are given, and in the second part of the second chapter, the covering properties and σ -compactness and classical selection principles are included. In the first part of the third chapter, the concepts of new covering types and star selection principles are mentioned. The first part of the third chapter, which forms the main part of the thesis, is divided into two subsections. In the first subsection, star-compactness, in the second subsection, star-Menger-type selection principles and strongly-star-Menger-type selection principles are examined. In the fourth section, suggestions are made by evaluating the results obtained. In the last section, references are included.

Keywords: Selection Principles Theory, Star Selection Principles, Star Compactness, Open Cover.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim süresince bana hep destek olan, bu çalışmada yol gösteren değerli hocam ve tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Şükran KONCA'ya şükranlarımı sunarım. Ayrıca tez ile ilgili değerli görüşlerinden ötürü Sayın Prof. Dr. Ljubisa D.R. KOCINAC'a, Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN'a, Doç. Dr. Murat KARAKAŞ'a teşekkür ederim. Lisans eğitimim döneminde üzerimdeki emeklerinden dolayı tüm hocalarıma teşekkür eder saygılarımı sunarım. Tüm hayatım boyunca hep yanımda olan ve rahat edebilmem için türlü sıkıntılara katlanıp, bu günlere gelmemde büyük emekleri olan annem Fatma, babam Mehdi'ye, yoğun çalışma temposunda benden maddi ve manevi desteğini esirgemeyen biricik ablam Semra'ya, varlıkları ile birer motivasyon kaynağı olan ağabeylerim Süleyman ve Mustafa'ya sonsuz teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

ÖNSÖZ

Matematikte seçme prensibi, verilen bir kümeler dizisinden elemanlar seçerek matematiksel olarak önemli nesneler elde etme olasılığını ortaya koyan bir kuraldır. Seçme prensipleri teorisi, bu prensipleri ve diğer matematiksel özelliklerle ilişkilerini inceler. Bir matematiksel özelliğin bir seçme prensibi kullanılarak karakterize edilmesi, karakterize edilen özellik hakkında yeni kavrayışlara yol açan çoğunlukla aşikar olmayan bir işlemdir.

Köşegenleştirme yöntemi olarak da bilinen seçme prensipleri teorisinin uzun bir tarihi geçmişi vardır. 1845-1918 yılları arasında yaşamış kümeler kuramının kurucusu ünlü matematikçi Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1874 yılında reel sayılar kümesinin sayılamaz olduğunu kanıtladıktan sonra kanıtta kullandığı ünlü köşegenleştirme yöntemi, aşağıda verilen şekilde, matematikte yeni araştırmalar ortaya koymuştur.

“Bir türe ait matematiksel nesnelerin $(A_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi için, belirli bir kurala göre her $n \in \mathbb{N}$ için A_n ’den bazı elemanlar seçildiğinde, seçilen elemanların aynı veya farklı türde bir matematiksel nesne oluşturması.”

Genel olarak, bu yöntemi kullanan matematik dalına seçme prensipleri teorisi denir. Seçme prensipleri teorisinin birçok alanda uygulamalarını görebildiğimiz gibi küme teorisi, genel topoloji, cebirsel topoloji, matematiksel analiz, oyun teorisi, Ramsey teorisi, fonksiyon uzayları ve hiperuzaylar, kardinal değişmezlik, boyut teorisi, topolojik gruplar ve bağlar, Karamata teorisi gibi matematiğin birçok dalıyla güçlü bağlantıları vardır. Temel olarak topolojik uzaylarda, özellikle fonksiyon uzaylarında örtü özelliklerini tanımlar.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
SİMGELER DİZİNİ	vii
KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM	2
2.1. Ön Bilgiler ve Temel Kavramlar	2
2.2. Örtü Özellikleri ve Seçme Prensipleri	17
2.2.1. Örtü Özellikleri ve σ -Kompaktlık	17
2.2.2. Seçme Prensipleri Teorisi	21
3. BULGULAR VE TARTIŞMA	29
3.1. Yeni Örtü Çeşitleri ve Yıldız Seçme Prensipleri	29
3.1.1. Yıldız Kompaktlık	29
3.1.2. Yıldız Menger ve Kuvvetli Yıldız Menger Tipi Seçme Prensipleri	33
4. SONUÇ	53
5. KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	57

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>ŞEKİL</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. $\mathbb{R}$ için açık örtü olmayan bir örnek.....	8
2.2. $\mathbb{R}$ için açık örtü örneği.....	8
2.3. $\mathbb{R}$ kümesinin sonlu altörtüsü olmayan bir açık örtüsü	9
2.4. $\mathbb{R}$ standart uzayının kompakt olmayışı.....	10
2.5. $\mathbb{R}$ standart uzayının kompakt olmayan bir alt kümesi.....	11
2.6. A kümesinin bir $\mathcal{U}$ açık örtüsü.....	17
2.7. σ -kompaktlık.....	19
2.8. Seçme prensipleri teorisi.....	21
2.9. Seçme prensibi.....	21
2.10. Menger-tipi seçme prensibi.....	22
2.11. Hurewicz-tipi seçme prensibi.....	23
2.12. Rothberger-tipi seçme prensibi.....	23
2.13. Menger uzayının sürekli bir f dönüşümü altındaki görüntüsü.....	26
2.14. Menger uzayının açık-mükemmel dönüşüm altındaki ters görüntüsü.....	27
3.1. Örtü özellikleri arasındaki ilişki.....	36
3.2. Örtü özellikleri arasındaki ilişki.....	38
3.3. Örtü özellikleri arasındaki ilişki	40
3.4. Yıldız Menger uzayının sürekli ve örten bir f dönüşümü altındaki görüntüsü.....	44
3.5. Yıldız Menger uzayının açık-mükemmel dönüşüm altındaki ters görüntüsü.....	45
3.6. Örtü özellikleri arasındaki ilişki.....	49

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathcal{O}$	Bir X topolojik uzayının tüm açık örtülerinin bir ailesi
Γ	Bir X topolojik uzayının tüm γ -örtülerinin bir ailesi
Ω	Bir X topolojik uzayının tüm ω -örtülerinin bir ailesi
$S_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$	Bir topolojik uzayın açık örtülerinin bir dizisinin her bir elemanına karşılık gelen açık örtüden sonlu birçok elemanını seçerek açık bir örtü elde etmek
$\mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \Gamma)$	Bir topolojik uzayın bir γ -örtüsünden sonlu tanesini seçerek yeni bir γ örtü elde etmek
$S_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$	Bir topolojik uzayın açık örtülerinin bir dizinin her bir elemanına karşılık gelen açık örtüden tek bir tane eleman seçerek bir açık örtü elde etmek
$St(F, \mathcal{U})$	F nin $\mathcal{U}$ ya göre yıldızı $(St(F, \mathcal{U}) = \bigcup \{U \in \mathcal{U} : F \cap U \neq \emptyset\})$
$St(\cup \mathcal{V}, \mathcal{U})$	$\cup \mathcal{V}$ nin $\mathcal{U}$ ya göre yıldızı $(St(\cup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = \bigcup \{U \in \mathcal{U} : U \cap (\cup \mathcal{V}) \neq \emptyset\})$
$St(\{x\}, \mathcal{P})$	$St(x, \mathcal{P}) = \bigcup \{P \in \mathcal{P} : \{x\} \cap P \neq \emptyset\}$
$ A $	Bir A kümesinin kardinalitesi

KISALTMALAR DİZİNİ

C	Kompaktlık (Compactness)
CC	Sayılabilir kompaktlık (Countable Compactness)
L	Lindelöf
M	Menger
R	Rothberger
H	Hurewicz
GN	Gerlits-Nagy
SM	Yıldız Menger (Star Menger)
SSM	Kuvvetli yıldız Menger (Strongly Star Menger)
SR	Yıldız Rothberger (Star Rothberger)
SSR	Kuvvetli yıldız Rothberger (Strongly Star Rothberger)
SH	Yıldız Hurewicz (Star Hurewicz)
SSH	Kuvvetli Yıldız Hurewicz (Strongly Star Hurewicz)
SGN	Yıldız Gerlits-Nagy (Star Gerlits-Nagy)
SSGN	Kuvvetli Yıldız Gerlits-Nagy (Strongly Star Gerlits-Nagy)
$S_K M$	Yıldız-K-Menger (Star-K-Menger)

1. GİRİŞ

Seçme prensipleri teorisinin 1920-1930'lara dayanan zengin bir tarihi geçmişi vardır ve küme teorisi, genel topoloji, cebirsel topoloji, matematiksel analiz, oyun teorisi, Ramsey teorisi, fonksiyon uzayları ve hiperuzaylar, kardinal değişmezlik, boyut teorisi, düzgün yapı, topolojik gruplar ve bağlar, Karamata teorisi gibi matematiğin birçok dalıyla sıkı ilişkileri vardır [18]. Bu hızla büyüyen teorinin kökleri Menger [22], Hurewicz [9], Rothberger [23], Gerlits-Nagy [8], Sierpinski'nin [29] klasik çalışmalarına dayanmaktadır. Klasik yöntemler, Menger-tipi, Hurewicz-tipi, Rothberger-tipi, Gerlits-Nagy-tipi seçme prensiplerini kapsar. Son 20-30 yıldır seçme özelliklerinin farklı tipleri sistematik olarak çalışılmıştır ve birçok güzel sonuç elde edilmiştir [1, 7-10, 13-15, 17-18, 22-23, 25-29, 34, 36-37]. Ne var ki, daha birçok ilginç açık problem ve olası araştırma safhaları mevcuttur.

Menger özelliği, Menger [22] tarafından tanımlanmış bir topolojik kavramdır ve Scheepers'ın [26] makalesinden itibaren sistematik olarak çalışılmıştır. Seçme prensipleri teorisi hakkında birkaç derleme makale yayınlanmıştır (örneğin, [17-18, 25], açık problemler için [36] nolu makale ve seçme prensipleri teorisinin önemli bir alt alanı olan yıldız seçme prensipleri hakkında [2, 3, 12, 16, 21, 24, 30-33, 35, 38] nolu makaleler yayınlanmıştır.)

Yıldız operatörünün topolojide kullanımı uzun bir tarihe sahiptir. Kocinac, yıldız operatörünü seçme prensipleri alanında uyguladı ve bu operatörü kullanarak bir dizi yeni seçme prensibini tanıttı [12]. [16, 21] numaralı derleme makaleleri, yıldız seçme prensiplerinin ispatsız ayrıntılı birer açıklamasını içermektedir. Yeni seçme prensipleri; yıldız seçme özellikleri, kuvvetli yıldız seçme özellikleri, yıldız seçme komşuluk tipleri ve α_i -seçimleri ($i=1,2,3,4$) dir. Yıldız seçme prensipleri için en iyi doğal örnekler, düzgün (uniform) uzaylarda [17, 21] ve özellikle de topolojik gruplarda seçim prensipleridir.

Eğer A bir X kümesinin bir alt kümesi ve $\mathcal{P}$, X 'in altkümelerinin bir koleksiyonu ise bu durumda A 'nın $\mathcal{P}$ 'ye göre yıldızı $St(A, \mathcal{P}) = \bigcup \{P \in \mathcal{P} : P \cap A \neq \emptyset\}$ olarak gösterilir. $St(\{x\}, \mathcal{P})$ yerine yazım kolaylığı açısından $St(x, \mathcal{P})$ yazılır.

Seçme prensipleri ile ilgili ülkemizde yeterli sayıda tez çalışması bulunmamaktadır. Klasik seçme prensipleriyle ilgili derleme niteliğinde sadece bir tez çalışması bulunmaktadır (bkz. [5]).

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Ön Bilgiler ve Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 [19] X boş olmayan bir küme ve τ da X 'in kuvvet kümesi ile gösterilen $P(X)$ 'in bir alt koleksiyonu (ailesi) olsun.

T1) X ve $\emptyset$, τ 'ya aittir. Yani; $X \in \tau$ ve $\emptyset \in \tau$,

T2) τ 'nun herhangi bir alt koleksiyonunun ait kümelerin birleşimi yine τ 'ya aittir. Yani; I herhangi bir indis kümesi olmak üzere, $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$,

T3) τ 'ya ait sonlu sayıdaki iki kümenin kesişimi yine τ 'ya aittir. Yani $U, V \in \tau$ ise $U \cap V \in \tau$, özellikleri sağlanıyorsa τ 'ya X üzerinde bir topoloji denir. τ koleksiyonu X üzerinde bir topoloji ise (X, τ) sıralı ikilisine bir topolojik uzay ve X 'in elemanlarına noktalar denir.

Not 2.1.2 [19] Açıkça tanımdaki (T3) şartı

" τ 'ya ait sonlu sayıdaki kümelerin kesişimi yine τ 'ya aittir "

şartına denktir. Diğer yandan τ 'nun

$$U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$$

kümelerinin alınarak bunların birleşimi olan

$$U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n \cup \dots$$

kümesinin τ 'ya ait olduğunu göstermek Tanım 2.1.1 in (T2) şartının sağlandığını göstermez. Bu sadece τ 'nun sayılabilir sayıdaki elemanlarının birleşiminin τ 'nun bir elemanı olduğunu gösterir. τ 'nun Tanım 2.1.1 in (T2) şartının sağlandığını göstermek için τ 'nun sayılabilir veya sayılamaz sayıdaki elemanlarının birleşiminin τ 'da olduğu gösterilmelidir. Yani τ 'ya ait keyfi sayıdaki kümelerin birleşiminin τ 'ya ait olduğunun gösterilmesi gerekir.

Örnek 2.1.3 [19] X boştan farklı bir küme olmak üzere $\tau = \{\emptyset, X\}$ kümeler ailesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye aşıkâr (indiskrit) topoloji diyeceğiz.

Örnek 2.1.4 [19] X boştan farklı bir küme olmak üzere X 'in tüm alt kümelerinin $\tau = P(X)$ ailesini ele alalım. X 'in alt kümelerinin arakesiti ve birleşimi yine X 'in alt kümesi olacağından bu koleksiyon X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye ayrık (diskrit) topoloji denir.

Örnek 2.1.5 [19] $X = \{a, b, c\}$ olsun. $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ kümesi X üzerinde bir topoloji değildir. Çünkü $\{a, b\} \cap \{a, c\} \notin \tau$ dur.

Tanım 2.1.6 [19] (X, τ) bir topolojik uzay olsun. τ 'nun elemanlarına (X, τ) uzayının açık kümeleri denir.

Tanım 2.1.7 [19] (X, τ) bir topolojik uzay ve U kümesi X 'in bir alt kümesi olsun. U 'nun X 'e göre tümleyeni olan $X \setminus U$ kümesi (X, τ) uzayında açıksa U 'ya (X, τ) uzayının kapalı alt kümesi denir.

Tanım 2.1.8 [19] (X, τ) bir topolojik uzay ve B de X 'in açık kümelerinin bir ailesi olsun. τ 'nun her elemanı B 'ye ait bir takım kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa B 'ye τ topolojisinin bir tabanı denir. Yani;

TB1) $B \subseteq \tau$ dur,

TB2) $U \in \tau$ ise $i \in I$ için $B_i \in B$ olmak üzere $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ olacak şekilde bir I indis kümesi vardır,

şartları sağlanıyorsa B 'ye τ topolojisinin bir tabanı denir.

Örnek 2.1.9 [19] $X = \{a, b, c, d, e\}$ ve

$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$ olmak üzere

(X, τ) uzayı verilsin. $B = \{\{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, X\}$, τ 'nun bir tabanıdır. Çünkü, $B \subseteq \tau$ ve

$$\begin{aligned} \{a, b\} &= \{a\} \cup \{b\}, & \{a, b, c\} &= \{b\} \cup \{a, c\} \\ \{a, b, d\} &= \{a\} \cup \{b, d\}, & \{a, b, c, d\} &= \{a, c\} \cup \{b, d\} \end{aligned}$$

olur. Yani τ 'nun her elemanı B 'ye ait birtakım elemanların birleşimi olarak yazılabilir.

Tanım 2.1.10 [19] (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{O}$, X 'in açık kümelerinin boştan farklı bir ailesi olsun. $\mathcal{O}$ 'ya ait bütün sonlu sayıdaki bir takım kümelerin ara kesiti τ 'nun bir tabanı oluyorsa $\mathcal{O}$ 'ya τ 'nun bir alt tabanı denir. Yani

$$B_{\mathcal{O}} = \left\{ \bigcap_{j \in J} S_j : J \text{ sonlu bir indis kümesi ve } j \in J \text{ için } S_j \in \mathcal{O} \right\}$$

kolleksiyonu τ 'nun bir tabanı oluyorsa $\mathcal{O}$ 'ya τ 'nun bir alt tabanı denir.

Not 2.1.11 [19] $\mathcal{O}$ kolleksiyonu τ topolojisinin alt tabanı ise $\varphi \subseteq B_{\mathcal{O}} \subseteq \tau$ olduğu açıktır. Diğer yandan $X = \bigcap_{j \in \emptyset} S_j$ ($j \in \emptyset$ için $S_j \in \mathcal{O}$) olduğundan her zaman $X \in B_{\mathcal{O}}$ olur.

Örnek 2.1.12 [19] $X = \{a, b, c, d, e\}$ üzerinde alt tabanı $\varphi = \{\{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, e\}\}$ olan topolojiyi bulalım.

Alt tabanı φ olan topoloji τ ve τ 'nun φ yardımı ile elde edilen tabanı B_{φ} olsun. Bu durumda $\varphi \subseteq B_{\varphi} \subseteq \tau$ ve Not 2.1.11 gereğince $X \in B_{\varphi}$ olduğundan

$$\{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, e\}, X \in B_{\varphi}$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \{c, d\} \cap \{a, b, c\} &= \{c\}, & \{c, d\} \cap \{a, b, c\} \cap \{a, c, e\} &= \{c\}, \\ \{c, d\} \cap \{a, c, e\} &= \{c\}, & \{a, b, c\} \cap \{a, c, e\} &= \{a, c\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$B_{\varphi} = \{X, \{c\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, e\}\}$$

olur. Buradan

$$\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, e\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, c, e, d\}\}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.13 [19] (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesine x noktasının bir komşuluğu denir. Diğer bir deyişle τ 'nun x noktasını içeren her elemanına x noktasının bir komşuluğu denir. Bir $x \in X$ noktasının komşuluklarının kolleksiyonu genellikle N_x şeklinde gösterilir.

Not 2.1.14 [19] (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ ise $x \in X$ ve $X \in \tau$ olduğundan tanım gereğince X kümesi x noktasının bir komşuluğu olur. Yani X kümesi her $x \in X$ noktasının bir komşuluğudur.

Örnek 2.1.15 [19] (X, τ) kaba uzayında, kaba uzayının açık kümeleri sadece $\emptyset$ ve X olduğundan x noktasının komşuluğu sadece X kümesidir. Yani $N_x = \{X\}$ dir.

Tanım 2.1.16 [19] (X, τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve B_x 'de x noktasını içeren açık kümelerin bir ailesi olsun. $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \tau$ için $B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in B_x$ varsa B_x ailesine x noktasının komşuluklarının bir tabanı veya x noktasının bir yerel tabanı denir. Yani

YTB1) $B_x \subseteq \tau$ dur,

YTB2) $B \in B_x$ ise $x \in B$ dir,

YTB3) $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \tau$ için $B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in B_x$ vardır,

şartları sağlanıyorsa B_x koleksiyonuna x noktasının komşuluklarının bir tabanı veya x noktasının bir yerel tabanı denir.

Örnek 2.1.17 [19] (X, τ) kaba uzayı verilsin. $B_x = \{X\}$ koleksiyonunun $x \in X$ noktasının yerel tabanı olduğunu gösterelim.

YTB1) $X \in \tau$ olduğundan $B_x \subseteq \tau$ olur.

YTB2) $x \in X$ dir.

YTB3) $x \in U$ ve $U \in \tau$ ise $U = X$ olur. Böylece $X \subseteq U$ dur.

Bu durumda tanım gereğince B_x koleksiyonu x noktasının yerel bir tabanıdır.

Tanım 2.1.18 [11] (X, τ) bir topolojik uzay, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ terimleri X de bir dizi ve $x \in X$ olsun. x elemanının her U komşuluğu için $n > N$ olduğunda $x_n \in U$ olacak şekilde bir N pozitif tamsayısı varsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsar denir. x elemanına $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin limiti denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.19 [19] (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X kümesinin farklı her iki noktasının en az birinin diğerini içermeyecek şekilde bir komşuluğu varsa bu uzaya bir T_0 - uzayı denir. Diğer bir deyişle $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ noktaları için

$$x \in U \text{ ve } y \notin U \text{ veya } y \in U \text{ ve } x \notin U$$

olacak şekilde bir $U \in \tau$ varsa bu uzaya bir T_0 -uzayı denir.

Tanım 2.1.20 [19] (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X kümesinin farklı her iki noktasının her birinin diğer noktayı içermeyecek şekilde bir komşuluğu varsa bu uzaya bir T_1 -uzayı denir. Diğer bir deyişle $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ noktaları için

$$x \in U \text{ ve } y \notin U \text{ veya } y \in V \text{ ve } x \notin V$$

olacak şekilde $U, V \in \tau$ kümeleri varsa bu uzaya T_1 -uzayı denir.

Tanım 2.1.21 [19] (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$x \in U, y \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U, V \in \tau$ kümeleri varsa (X, τ) uzayına bir Hausdorff uzayı veya bir T_2 -uzayı denir.

Örnek 2.1.22 [19] $(\mathbb{R}, \tau_{sağ})$ uzayının bir Hausdorff uzayı olduğunu gösterelim.

Çözüm $x \neq y$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. $x < y$ olduğunu kabul edelim. $x < a < y$ özelliğinde bir $a \in \mathbb{R}$ ve $y < b$ özelliğinde bir $b \in \mathbb{R}$ seçelim. Bu durumda $x \in [x, a)$, $y \in [y, b)$ ve $[x, a) \cap [y, b) = \emptyset$ dur. Üstelik, $[x, a), [y, b) \in \tau_{sağ}$ 'dır. O halde $(\mathbb{R}, \tau_{sağ})$ uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

Örnek 2.1.23 [19] $X = [0, \infty)$, $\tau = \{(a, \infty) : a \geq 0\} \cup \{\emptyset, X\}$ olmak üzere (X, τ) uzayının bir Hausdorff uzayı olmadığını gösterelim.

Çözüm $x \neq 0$ olmak üzere $x \in X$ olsun. $0 \in U$, $x \in V$ ve $U, V \in \tau$ ise $U = X$ olacağından $x \in U$ olur. Bu durumda $x \in U \cap V$ dir. O halde $0 \in U$, $x \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \tau$ yoktur. Böylece (X, τ) uzayı bir Hausdorff uzayı değildir.

Tanım 2.1.24 [19] (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Kapalı her $F \subseteq X$ kümesi ve $x \notin F$ özelliğindeki her $x \in X$ noktası için

$$U \cap V = \emptyset, F \subseteq V \text{ ve } x \in U$$

olacak şekilde $U, V \in \tau$ kümeleri varsa (X, τ) uzayına T_3 -uzayı denir. (X, τ) uzayı hem bir T_3 -uzayı hem de bir T_1 -uzayı ise (X, τ) uzayına regüler uzay denir.

Örnek 2.1.25 [19] (X, τ) kaba uzayının T_3 -uzayı fakat regüler olmadığını gösterelim.

Çözüm Bu uzayda boş küme ve X kümesinden farklı hiç bir kapalı küme olmadığından bu uzay bir T_3 -uzayıdır. (X, τ) bir T_1 -uzayı olmadığından bu uzay bir regüler uzay değildir.

Tanım 2.1.26 [19] Bir (X, τ) topolojik uzayının kapalı her F alt kümesi ve $x \notin F$ özelliğindeki her $x \in X$ noktası için $f(x)=1$ ve $f(F)=\{0\}$ olacak şekilde sürekli $f: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu varsa (X, τ) uzayına bir $T_{\frac{1}{2}}$ -uzayı denir. (X, τ) uzayı hem bir $T_{\frac{1}{3^2}}$ -uzayı hem de bir T_1 -uzayı ise (X, τ) uzayına tamamen regüler uzay veya Tychonoff uzayı denir.

Tanım 2.1.27 [19] (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ özelliğindeki kapalı her F_1 ve F_2 kümeleri için $U \cap V = \emptyset, F_1 \subseteq U, F_2 \subseteq V$ olacak şekilde $U, V \in \tau$ kümeleri varsa (X, τ) uzayına bir T_4 uzayı denir. (X, τ) uzayı hem T_1 uzayı hem de T_4 uzayı ise (X, τ) uzayına normal uzay denir.

Not 2.1.28 [19] I herhangi bir küme ve I 'nin her bir i elemanı için bir X_i kümesi tanımlı olsun. Bu durumda $\{X_i : i \in I\}$ kümelerin bir ailesidir. I kümesine bu kolleksiyonun indis kümesi denir.

Tanım 2.1.29 [20] X bir küme ve $A \subset X$ olsun. Eğer bir $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ ailesi için

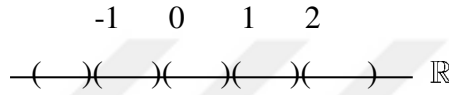
$$A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

sağlanıyorsa, bu $\mathcal{U}$ ailesine A alt kümesinin bir örtüsü denir.

Tanım 2.1.30 [19] (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. I bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ve $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ ise $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ koleksiyonuna A 'nın bir açık örtüsü denir.

Tanım 2.1.31 [4] X bir topolojik uzay ve $\mathcal{U}$, X 'in bir örtüsü olsun. Eğer $\mathcal{U}$ 'nun tüm elemanları bu uzayda açık ise $\mathcal{U}$ 'ya X uzayının bir açık örtüsü denir ve X 'in açık örtülerinin ailesi $\mathcal{O}$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.32 [19] $\mathcal{U} = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$ ailesi $\mathbb{R}$ için bir açık örtü değildir. Çünkü,

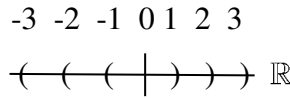


Şekil 2.1. $\mathbb{R}$ için açık örtü olmayan bir örnek

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

tam sayıları örtemediğimizden $\mathbb{R}$ 'nin açık örtüsü değildir.

Örneğin; $X = \mathbb{R}$, τ =alışılmış topoloji



Şekil 2.2. $\mathbb{R}$ için açık örtü örneği

$\mathcal{U} = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) = \mathbb{R}$ 'yi verir. Böylece $\mathbb{R}$ 'nin bir açık örtüsüdür.

Tanım 2.1.33 [19] $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ koleksiyonuna A 'nın açık bir örtüsü ve $J \subseteq I$ olmak üzere $\mathcal{V} = \{U_i : i \in J\}$ koleksiyonu A 'nın bir örtüsü ise $\mathcal{V} = \{U_i : i \in J\}$ örtüsüne $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ örtüsünün bir alt örtüsü denir.

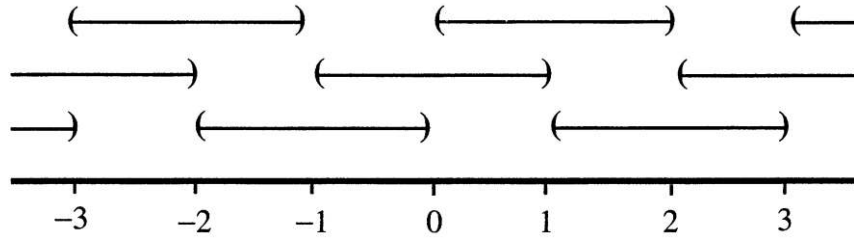
Tanım 2.1.34 [19] Bu durumda J sonluysa $\mathcal{V} = \{U_i : i \in J\}$ örtüsüne $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ örtüsünün sonlu alt örtüsü denir.

Not 2.1.35 [19] Açık örtü tanımında $A = X$ alınırsa $X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ ifadesi $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ şeklini alır.

Tanım 2.1.36 [19] (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X 'in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, τ) uzayına veya kısaca X 'in kendisine kompakt topolojik uzay denir.

Not 2.1.37 [19] Kompaktlığın tanımı gereğince bir uzayın kompakt olmadığını göstermek için uzayın sonlu hiçbir alt örtüsü olmayan açık bir örtüsünün olduğunu göstermek yeterlidir.

Örnek 2.1.38 [11] $\mathcal{U} = \{(n, n+2), n \in \mathbb{Z}\}$ ailesi $\mathbb{R}$ için bir açık örtüdür fakat sonlu bir alt örtüsü olmadığından $\mathbb{R}$ kompakt değildir.



Şekil 2.3. $\mathbb{R}$ kümesinin sonlu altörtüsü.

Örnek 2.1.39 [19] $\mathbb{R}$ standart uzayının kompakt olmadığını gösterelim.

Çözüm $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $(-n, n)$ aralığı $\mathbb{R}$ 'de açık olduğunda $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$

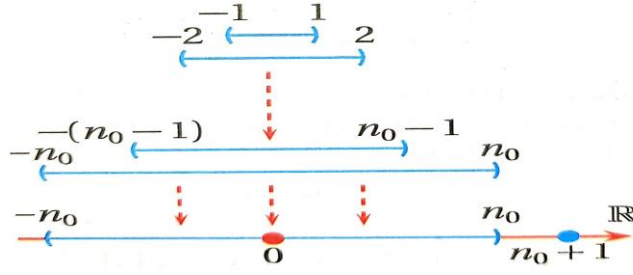
kolleksiyonu $\mathbb{R}$ standart uzayının açık bir örtüsüdür. Şimdi bu örtünün sonlu hiçbir alt örtüsünün olmadığını gösterelim. Bu örtünün sonlu bir $\{U_{n_i} : i = 1, \dots, m\}$ alt örtüsünün olduğunu varsayalım.

$n_0 = \max \{n_i : i = 1, \dots, m\}$ olmak üzere $\bigcup_{i=1}^m U_{n_i} = (-n_0, n_0)$ olur. Diğer yandan sonlu alt örtü tanımı

gereğince $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^m U_{n_i}$ olur. Buradan $\mathbb{R} = (-n_0, n_0)$ elde edilir. Bu ise $n_0 + 1 \notin (-n_0, n_0)$ olduğundan

mümkün değildir. O halde $\mathbb{R}$ 'nin $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ açık örtüsünün hiç bir sonlu alt örtüsü yoktur.

Bu durumda $\mathbb{R}$ standart uzayı kompakt değildir. (Şekil 2.2. ye bakınız.)



Şekil 2.4. $\mathbb{R}$ standart uzayının kompakt olmayışı

Örnek 2.1.40 [19] X sonlu bir küme olmak üzere (X, τ) topolojik uzayı kompakttır. Çünkü, X sonlu bir küme olduğundan τ sonludur. Böylece $\{U_i : i \in I\}$ koleksiyonu bu uzayın açık bir örtüsü ise $\{U_i : i \in I\} \subseteq \tau$ olduğundan bu örtü sonludur. O halde X 'in her $\{U_i : i \in I\}$ açık örtüsünün sonlu bir $\{U_i : i \in I\}$ alt örtüsü vardır. Böylece (X, τ) uzayı kompakttır.

Not 2.1.41 [19] Örnek 2.1.39'dan görüldüğü gibi sonlu her topolojik uzay kompakttır. Aslında kompaktlık sonluluğun bir topolojisel genellemesi olarak düşünülebilir.

Tanım 2.1.42 [19] (X, τ) bir topolojik uzay ve A da X 'in bir alt kümesi olsun. (A, τ_A) alt uzayı kompaktsa A 'ya X 'in kompakt alt kümesi denir.

Örnek 2.1.43 [19] $\mathbb{R}$ standart uzayının $(0,1)$ alt kümesinin kompakt olmadığını gösterelim.

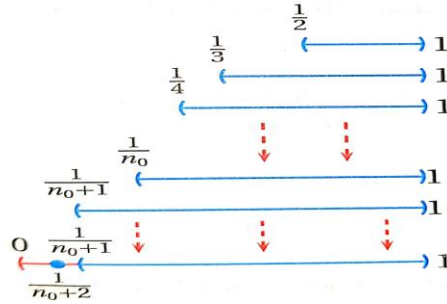
Her $n \in \mathbb{N}$ için $\left(\frac{1}{n+1}, 1\right)$ kümesi $\mathbb{R}$ 'de açık ve $\left(\frac{1}{n+1}, 1\right) = (0,1) \cap \left(\frac{1}{n+1}, 1\right)$ olduğundan $\left(\frac{1}{n+1}, 1\right)$ kümesi $(0,1)$ 'de açıktır. Diğer yandan $(0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, 1\right)$ olduğunda $\mathcal{U} = \left\{ \left(\frac{1}{n+1}, 1\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$ koleksiyonu $(0,1)$ 'in açık bir örtüsüdür. $\mathcal{V} = \left\{ \left(\frac{1}{n+1}, 1\right) : n \in I \subseteq \mathbb{N} \right\}$

koleksiyonu bu örtünün sonlu bir alt örtüsü olsun. Bu durumda $n_0 = \max \{n : n \in I\}$ olmak üzere

$(0,1) = \bigcup_{n \in I} \left(\frac{1}{n+1}, 1\right) = \left(\frac{1}{n_0+1}, 1\right)$ olur. Bu ise $\frac{1}{n_0+2} \in (0,1)$ ve $\frac{1}{n_0+2} \notin \left(\frac{1}{n_0+1}, 1\right)$ olduğundan bir

çelişkidir. Böylece $(0,1)$ 'in $\mathcal{U} = \left\{ \left(\frac{1}{n+1}, 1 \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$ açık örtüsünün sonlu hiçbir alt örtüsü yoktur.

O halde $(0,1)$ uzayı $\mathbb{R}$ 'nin kompakt bir alt kümesi değildir.



Şekil 2.5. $\mathbb{R}$ standart uzayının kompakt olmayan bir alt kümesi

Tanım 2.1.44 [19] (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X 'in sayılabilir her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X uzayına sayılabilir kompakt uzay denir. $A \subseteq X$ ve (A, τ_A) uzayı sayılabilir kompaktsa A kümesine (X, τ) uzayının sayılabilir kompakt alt kümesi denir.

Not 2.1.45 [19] Kompaktlık (C) ve sayılabilir kompaktlık (CC) tanımları gereğince her kompakt uzay sayılabilir kompakttır. Çünkü kompakt uzayın her örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Bunlar içinde sayılabilir olanlarında sonlu bir alt örtüsü vardır. Dolayısıyla $C \Rightarrow CC$ dir.

Tanım 2.1.46 [19] (X, τ) bir topolojik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesi ve her $N \in \mathbb{N}$ için $x_n \in U$ olacak şekilde bir $n \geq N$ doğal sayısı varsa x noktasına (x_n) dizisinin bir yığılma noktası denir. Yani $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesi için $x_n \in U$ olacak şekilde sonsuz sayıda $n \in \mathbb{N}$ varsa x noktasına (x_n) dizisinin bir yığılma noktası denir.

Tanım 2.1.47 [19] (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ noktasının sayılabilir bir yerel tabanı varsa (X, τ) uzayına birinci sayılabilir uzay denir.

Örnek 2.1.48 [19] Reel sayılardaki her x elemanı için

$G(x) = \left\{ \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$ ailesi gerçel eksen üzerindeki alışılmış topolojiye göre x noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı olduğundan bu topolojik uzay birinci sayılabilir aksiyomunu sağlar.

Tanım 2.1.49 [19] (X, τ) bir topolojik uzay olsun. τ 'nun sayılabilir bir tabanı varsa (X, τ) uzayına ikinci sayılabilir uzay denir.

Örnek 2.1.50 [19] $\mathbb{R}$ üzerinde τ_s standart topolojisi mevcut olsun. Bu uzayın $B_s = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q}\}$ sayılabilir bir tabanı vardır. Dolayısıyla ikinci sayılabilir aksiyomunu sağlar.

Not 2.1.51 [19] İkinci sayılabilir uzay birinci sayılabilir uzaydır.

Tanım 2.1.52 [19] Bir (X, τ) topolojik uzayının her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü varsa X uzayına Lindelöf uzayı (L) denir.

Not 2.1.53 [19] Her kompakt uzay bir Lindelöf uzayıdır ($C \Rightarrow L$). Çünkü bir kompakt uzayın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Sonlu olan sayılabilir olduğundan her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü vardır deriz. O halde tanım gereği bu uzay Lindelöf uzayıdır.

Teorem 2.1.54 [19] Her sayılabilir kompakt (CC) Lindelöf (L) uzayı kompaktır (C).

$$CC + L \Rightarrow C$$

İspat $\mathcal{U}$, X 'in bir açık örtüsü olsun. X bir Lindelöf uzayı olduğundan $\mathcal{U}$ 'nun sayılabilir bir $\mathcal{V}$ altörtüsü vardır. X sayılabilir kompakt olduğundan sayılabilir $\mathcal{V}$ açık örtüsünün sonlu bir $\mathcal{W}$ altörtüsü vardır. Buna göre $\mathcal{W}$, $\mathcal{U}$ 'nun sonlu bir alt örtüsü olduğundan X kompaktır.

Teorem 2.1.55 [19] İkinci sayılabilir her (X, τ) topolojik uzayı bir Lindelöf uzayıdır.

İspat $\beta = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ koleksiyonu X 'in sayılabilir bir tabanı ve $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ koleksiyonu X 'in herhangi bir açık örtüsü olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $x \in U_{ix}$ olacak şekilde bir $U_{ix} \in \mathcal{U}$ vardır. U_{ix} açık ve $x \in U_{ix}$ olduğundan $x \in B_x \subseteq U_{ix}$ olacak şekilde bir $B_x \in \beta$ vardır.

Böylece $X = \bigcup_{x \in X} B_x$ dir. Her bir $B_x \in \beta$ için $B_x \subseteq U_{ix}$ olacak şekilde bir tane $U_{ix} \in \mathcal{U}$ kümesi seçelim ve bunların kolleksiyonuna V diyelim. Bu durumda β sayılabilir olduğundan V sayılabilir. Üstelik $X = \bigcup_{x \in X} B_x = \bigcup_{U \in V} U$ olur. Diğer bir deyişle V kolleksiyonu X 'in $\mathcal{U}$ örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsüdür.

Tanım 2.1.56 [19] (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X 'deki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa X uzayına dizisel kompakttır denir.

Örnek 2.1.57 [19] $A = (0,1)$ alışılmış topolojiden indirgenen topolojiye sahip olsun. $A = (0,1)$ kümesi dizisel kompakt değildir. Gerçekten $(a_n) = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ dizisi 0 noktasına yakınsar. Dolayısıyla dizinin her alt dizisi de 0 noktasına yakınsar. Ancak $0 \notin A$ dır.

Teorem 2.1.58 [19] Dizisel kompakt her (X, τ) topolojik uzayı sayılabilir kompakttır.

İspat A kümesi X 'in sonsuz elemanlı bir alt kümesi olsun. Bu durumda A kümesinde terimleri farklı bir (x_n) dizisi vardır. (X, τ) uzayı dizisel kompakt olduğundan (x_n) dizisinin bir $x \in X$ noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. $x \in U$ ve $U \in \tau$ olsun. Bu durumda (x_{n_k}) alt dizisi x noktasına yakınsadığından bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n_k \geq n_0$ olduğunda $x_{n_k} \in U$ olacak şekilde vardır. Böylece $n_k \geq n_0$ olduğunda $x_{n_k} \in U \cap A$ dır. (x_{n_k}) dizisinin terimleri farklı olduğundan $U \cap A$ kümesinin sonsuz sayıda elemanı vardır. Bu durumda x noktası A kümesinin bir w -limit noktasıdır. Dolayısıyla (X, τ) uzayı sayılabilir kompakttır.

Not 2.1.59 [19] Dizisel kompaktlığın sayılabilir kompaktlığı gerektirmesine rağmen sayılabilir kompaktlık dizisel kompaktlığı gerektirmeyebilir. Bununla beraber birinci sayılabilir uzaylar için dizisel kompaktlık ve sayılabilir kompaktlık denktir.

Tanım 2.1.60 [19] (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun.

- a) $x \in U \subseteq C$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ ve X 'in kompakt bir C alt kümesi varsa X uzayına x noktasında yerel kompakttır denir. Diğer bir deyişle $x \in X$ noktasını içeren (X, τ) uzayının bir U açık kümesini içeren (X, τ) uzayının kompakt bir alt kümesi varsa (X, τ) uzayına x noktasında yerel kompakttır denir.
- b) Her $x \in X$ için (X, τ) uzayı x noktasında yerel kompaktsa (X, τ) uzayına yerel kompakt uzay denir.

Örnek 2.1.61 [19] $\mathbb{R}$ standart uzayının yerel kompakt olduğunu gösterelim.

Çözüm $x \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için $U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ve $C = [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ olsun. Bu durumda $x \in U \subseteq C$ dir. U kümesi açık bir küme ve C kümesi kompakt olduğundan $\mathbb{R}$ standart uzayı yerel kompakttır.

Teorem 2.1.62 [19] $\mathbb{R}$ standart uzayının kapalı ve sınırlı her altkümesi kompakttır.

Tanım 2.1.63 [4] $\mathcal{U}$, X 'in bir açık örtüsü olsun. X 'in bir $\mathcal{V}$ açık örtüsüne $\mathcal{U}$ 'nun bir incesi veya inceltilmiş denir eğer her $V \in \mathcal{V}$ bazı $U_V \in \mathcal{U}$ tarafından kapsanıyorsa.

Tanım 2.1.64 [4] $\mathcal{U}$, X 'in bir açık örtüsü ve $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ 'nun bir incesi olsun. Eğer X 'in her noktası $\mathcal{V}$ 'nin en çok sonlu çoklukta elemanı tarafından kapsanıyorsa $\mathcal{V}$ nokta-sonlu incedir denir.

Tanım 2.1.65 [4] $\mathcal{U}$, X 'in bir açık örtüsü ve $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ 'nun bir incesi olsun. Eğer X 'in her bir noktası $\mathcal{V}$ 'nin en çok sayılabilir çoklukta elemanı tarafından kapsanıyorsa $\mathcal{V}$ nokta-sayılabılır incedir denir.

Tanım 2.1.66 [4] Bir X topolojik uzayının her $\mathcal{U}$ açık örtüsünün açık ve yerel sonlu bir $\mathcal{V}$ incesi varsa, bu uzaya parakompakt uzay denir.

Tanım 2.1.67 [4] Bir X topolojik uzayının her $\mathcal{U}$ açık örtüsünün açık ve nokta-sonlu bir $\mathcal{V}$ incesi varsa, bu uzaya metakompakt uzay denir.

Tanım 2.1.68 [4] Bir X topolojik uzayının her $\mathcal{U}$ açık örtüsünün açık ve nokta-sayılabılır bir $\mathcal{V}$ incesi varsa yani; X 'in her noktası $\mathcal{V}$ 'nin elemanlarının en çok sayılabilir çokluğuna ait ise, bu uzaya meta-Lindelöf uzay denir.

Tanım 2.1.69 [4] Bir X topolojik uzayına eğer X 'in her $\mathcal{U}$ açık örtüsünün sayılabilir, yerel, açık bir incesi varsa para-Lindelöf denir.

Tanım 2.1.70 [4] $f : X \rightarrow Y$ dönüşümüne eğer $\forall y \in Y$ için $f^{-1}(y)$, X 'in kompakt alt kümesi ise kompakt dönüşüm denir.

Tanım 2.1.71 [4] $f : X \rightarrow Y$ dönüşümüne eğer $\forall y \in Y$ ve $f^{-1}(y) \subset U$ açık komşuluğu için $y \in W$ ve $f^{-1}(W) \subset U$ olacak şekilde Y 'de açık bir W kümesi varsa kapalı dönüşüm denir.

Tanım 2.1.72 [31] X ve Y birer topolojik özellik ve $f : X \rightarrow Y$ olsun. Y 'deki her noktanın ters görüntüsünde nokta sayısının X 'de sonlu olduğu f dönüşümüne sonludan-bire dönüşüm (finite-to-one mapping) denir.

Not 2.1.73 [4] Her kompakt uzay parakompakttır. Bir Lindelöf uzayının her açık örtüsünün yerel-sonlu, açık bir incesi vardır.

Teorem 2.1.74 [4] Yerel kompakt bir X uzayında aşağıdakiler denktir.

- a) X uzayı σ -kompakttır.
- b) X uzayı Lindelöftür.
- c) X uzayının kompakt altkümelerinin bir dizisi

$K_1, K_2, K_3, \dots$ $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$ ve $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ olacak şekilde vardır.

Tanım 2.1.75 [4] X bir Tychonoff topolojik uzayı ve X üzerinde tanımlanmış her reel-değerli, sürekli fonksiyon sınırlı ise X uzayına pseudokompakt uzay denir.

Teorem 2.1.76 [4] Her sayılabilir kompakt (CC) Tychonoff uzayı pseudokompakt uzaydır.

Teorem 2.1.77 [4] Her pseudokompakt normal uzay sayılabilir kompakttır (CC).

Tanım 2.1.78 [11] $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa d 'ye X üzerinde bir metriktir denir.

M1) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$.

M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

M3) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$.

M4) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Tanım 2.1.79 [4] (X, τ) topolojik uzayına eğer X üzerindeki τ topolojisi $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ metriği tarafından üretilmişse metriklenebilir denir.

Teorem 2.1.80 [4] Her metriklenebilir topolojik uzayda kompaktlık, sayılabilir kompaktlık ve dizisel kompaktlık kavramları denktir.

Teorem 2.1.81 [4] Her metriklenebilir kompakt uzay ayrılabilirdir.

Tanım 2.1.82 [4] Bir topolojik uzayın altkümelerinin bir ailesine σ -yerel sonlu (sırasıyla, σ -ayrık) denir eğer yerel sonlu ailelerin (sırasıyla, ayrık ailelerin) sayılabilir bir birleşimi olarak gösterilebiliyorsa.

Not 2.1.83 Metriklenebilir uzayların en önemli özelliklerinden biri Stone Teoremi olarak bilinen aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.1.84 [4] (Stone Teoremi) Metriklenebilir bir uzayın her açık örtüsünün σ -yerel sonlu ve σ -ayrık bir incesi vardır.

Teorem 2.1.85 [4] Her metriklenebilir uzayın σ -ayrık bir bazı vardır.

Teorem 2.1.86 [4] Her metriklenebilir uzayın σ -yerel-sonlu bir bazı vardır.

Teorem 2.1.87 [4] Bir topolojik uzayın metriklenebilir olması için gerek ve yeter şart parakompakt Hausdorff uzayı olmasıdır.

Teorem 2.1.88 [4] (Arhangel'ski'nin Metriklenebilme Teoremi) Bir topolojik uzay metriklenebilirdir ancak ve ancak bir T_1 -uzayıdır ve regüler bir tabanı vardır.

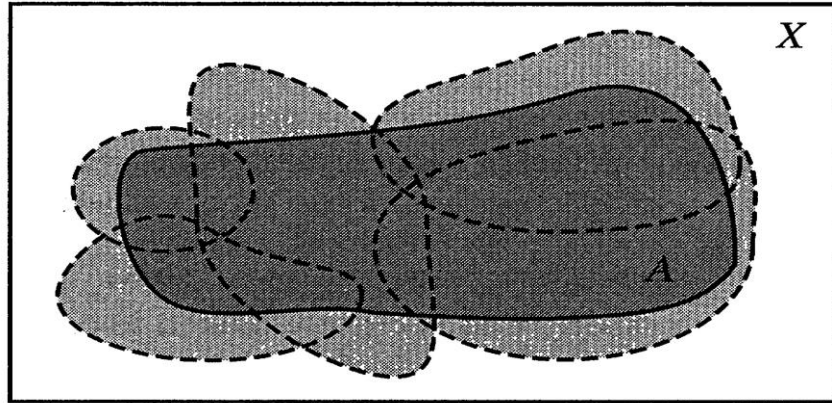
Teorem 2.1.89 [4] Her regüler X topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir:

- i) X uzayı parakompakttır.
- ii) X uzayının her açık örtüsünün açık sigma-yerel sonlu bir incesi vardır.
- iii) X uzayının her açık örtüsünün yerel sonlu bir incesi vardır.
- iv) X uzayının her açık örtüsünün kapalı yerel sonlu bir incesi vardır.

2.2. Örtü Özellikleri ve Seçme Prensipleri

Bu bölümde örtü özellikleri ve klasik seçme prensipleri derlenmiş olup konuyla ilgili temel kısımlar verilerek ispatı verilmeyen veya ilgili makalelerde okuyucuya bırakılan bazı teoremlerin ispatları yapılmıştır. Referans verilmeyen bu sonuçlar bahsi geçen ispatlardır.

2.2.1. Örtü Özellikleri ve σ - Kompaktlık



Şekil 2.6. A kümesinin bir $\mathcal{U}$ açık örtüsü

Tanım 2.2.1.1 [26] X bir topolojik uzay ve $\mathcal{U}$ da X 'in bir açık örtüsü olsun. Eğer her bir $x \in X$, $\mathcal{U}$ 'nun sonlu tane elemanı hariç hemen hemen tümüne aitse veya diğer bir deyişle, $\forall x \in X$ için $\{U \in \mathcal{U} : x \notin U\}$ kümesi sonlu oluyorsa X 'in $\mathcal{U}$ açık örtüsüne γ -örtü denir ve X 'in tüm γ -örtülerinin ailesi Γ ile gösterilir.

Tanım 2.2.1.2 [26] Bir X topolojik uzayının $\mathcal{U}$ açık örtüsüne eğer $X \notin \mathcal{U}$ ve her bir sonlu $F \subset X$ kümesi bazı $U \in \mathcal{U}$ tarafından kapsanıyorsa ω -örtü denir. X 'in tüm ω -örtülerinin ailesi Ω ile gösterilir.

Örnek 2.2.1.3 [20] Açık bir şekilde tanımlardan da görüldüğü gibi, $\mathbb{R}$ 'nin açık bir örtüsü olan $\mathcal{U} = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ bir ω -örtü ve ayrıca bir γ -örtüsüdür.

Teorem 2.2.1.4 [20, 26] Bir X topolojik uzayının her bir γ -örtüsü bir ω -örtüdür. Yani $\gamma \Rightarrow \omega$.

İspat $\mathcal{U}$, X 'in bir γ -örtüsü olsun. $\mathcal{U}$ 'nun bir ω -örtüsü olduğunu ispatlayacağız.

$F = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ kümesi X 'in sonlu bir alt kümesi olsun. $\mathcal{U}$ bir γ -örtü olduğundan

x_1 , $\mathcal{U}$ 'nun sonlu elemanları hariç tümüne ait.

x_2 , $\mathcal{U}$ 'nun sonlu elemanları hariç tümüne ait.

...

x_k , $\mathcal{U}$ 'nun sonlu elemanları hariç tümüne ait.

...

Böylece F hemen hemen her $U \in \mathcal{U}$ tarafından kapsanır ki bu da sonlu $F \subset X$ kümesinin bazı $U \in \mathcal{U}$ tarafından kapsandığı anlamına gelir. Böylece $\mathcal{U}$ bir ω -örtüdür.

Sonuç 2.2.1.5 [20, 26] γ -örtü, ω -örtüden daha güçlüdür (baskındır).

Örnek 2.2.1.6 [26] $\mathcal{U}$, X topolojik uzayının bir ω -örtüsü olsun. $\mathcal{U}^2 = \{U \times U : U \in \mathcal{U}\}$ nin X^2 için bir ω -örtü olması gerekmez.

Teorem 2.2.1.7 $\Gamma \subset \Omega \subset \mathcal{O}$ kapsama bağıntısı sağlanır.

Teorem 2.2.1.4 ten $\gamma \Rightarrow \omega$ olduğunu biliyoruz. Γ , Ω kolleksiyonlarının elemanları aynı zamanda açık örtüler olduğundan ispat açıktır.

Lemma 2.2.1.8 [20] ω -örtüsü için X topolojik uzayı daima sonsuz elemanlı kabul edilir.

İspat Eğer X sonluysa, ω -örtüsü için aşıkardır. Çünkü her bir sonlu $F \subset X$ bazı $U \in \mathcal{U}$ tarafından kapsanır. X sonlu olacağı için örtünün bazı elemanları tarafından kapsanır ve bu eleman X olmalıdır. Böylece $X \in \mathcal{U}$ olur ki bu da ω -örtünün tanımıyla çelişir. O halde X sonsuzdur.

Not 2.2.1.9 [20] X deki her bir F sonlu küme, ω -örtüsünün sonsuz çoklukta elemanına aittir.

İspat $F \subset X, \exists U_0 \in \mathcal{U} \ni F \subset U_0$

$F_1 = F \cup \{x_1\}$ sonludur. Buna göre, $\exists U_1 \in \mathcal{U} \ni F_1 \subset U_1$ ve böylece $F \subset U_1$.

$F_2 = F \cup \{x_1, x_2\}$ sonludur. Buna göre, $\exists U_2 \in \mathcal{U} \ni F_2 \subset U_2$ ve böylece $F \subset U_2$.

...

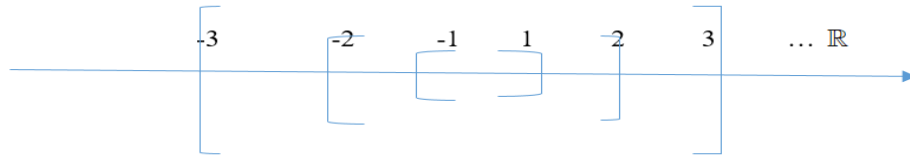
$F_n = F \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonludur. Buna göre, $\exists U_n \in \mathcal{U} \ni F_n \subset U_n$ ve böylece $F \subset U_n$ olur.

Böyle devam ettirilirse, $F, \mathcal{U}_n$ 'nin sonsuz çoklukta elemanı tarafından kapsanır.

Tanım 2.2.1.10 [10] Bir X topolojik uzayına eğer kompakt kümelerin sayılabilir bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa σ -kompakttır denir. Yani, $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ bu uzaydaki kompakt kümeler olmak üzere $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Örnek 2.2.1.11 [20] $\mathbb{R}$, σ -kompakttır.

$\mathcal{U} = \{[-n, n] : n \in \mathbb{N}\}$ kümeler ailesi $\mathbb{R}$ için bir örtüdür. Her bir $K_n = [-n, n]$ kümesi $\mathbb{R}$ 'de kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır.



Şekil 2.7. σ -kompaktlık

$[-1,1], [-2,2], [-3,3], \dots, [-n,n], \dots$ kümelerinin her biri $\mathbb{R}$ 'de kompaktır ve birleşimleri $\mathbb{R}$ 'yi verir. $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n,n]$ olduğundan $\mathbb{R}$, σ -kompaktır.

Not 2.2.1.12 [10] σ -kompaktlık için $X = K_1 \cup K_2 \cup \dots$ iken $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$ her zaman sağlanır. $X_1 = K_1, X_2 = K_1 \cup K_2, X_3 = K_1 \cup K_2 \cup K_3, \dots$ alalım. $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$ sağlanır. Kompakt kümelerin sonlu sayıdaki birleşimi de kompakt olduğundan $X_1, X_2, X_3, \dots$ kümelerinin her biri de kompaktır. X , σ -kompakt uzay, $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ ise X 'in kompakt alt kümelerinden oluşan bir örtüsü olur. Kompakt kümelerin sonlu birleşimi de kompakt küme olduğundan her n için $\mathcal{K}_n = \bigcup_{i=1}^n K_i$ 'de kompaktır. O halde $\{\mathcal{K}_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi, σ -kompakt X uzayının iç içe geçmiş kompakt alt kümelerinden oluşan bir örtüsüdür.

Teorem 2.2.1.13 [20] Her kompakt uzay σ -kompaktır.

İspat X kompakt olsun. X 'in σ -kompakt olduğunu göstereceğiz. Her bir n için $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup \dots$ yazalım. Buna göre, her bir n için $X_n = X$ olmak üzere açıkça görülür ki X , kompakt kümelerin sayılabilir bir birleşimi olarak yazılabilir ve böylece X , σ -kompaktır.

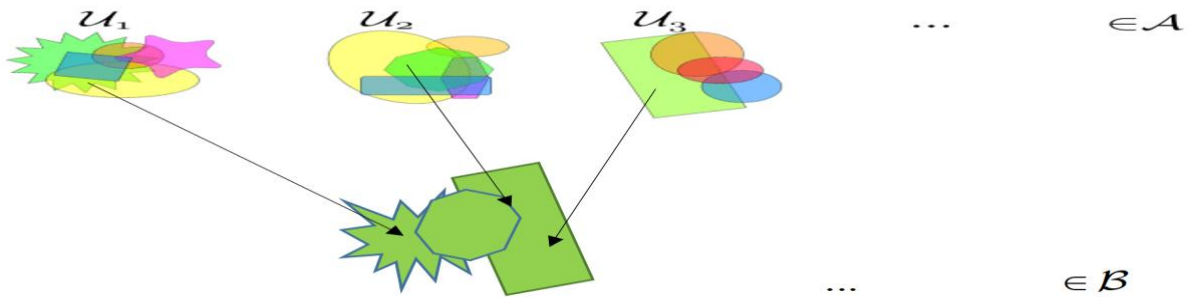
Teorem 2.2.1.14 [20] σ -kompaktlık γ -örtüyü üretir.

2.2.2. Seçme Prensipleri Teorisi

X : Topolojik uzay	
P : Topolojik özellik	Seçmeli P
Bir tek eleman	Elemanların bir dizisi
P : Kompaktlık ise	Seçmeli P : Menger-Tipi Seçme Prensibi olur
X 'in her $\mathcal{U}$ açık örtüsünün sonlu bir $\mathcal{V}$ alt örtüsü vardır $\ni \bigcup \mathcal{V} = X$.	X in açık örtülerinin her bir $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ dizisi için bir $\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ dizisi vardır öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$, $\mathcal{V}_n$ sonlu $\forall n \in \mathbb{N}$ için ve $\bigcup_n (\bigcup \mathcal{V}_n) = X$.

Şekil 2.8. Seçme prensipleri teorisi

Tanım 2.2.2.1 [5] (Seçme Prensibi) Bir türe ait matematiksel nesnelerin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ dizisinden, belirli bir kurala göre her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$ 'den bazı elemanlar seçildiğinde, seçilen elemanların aynı veya farklı türde bir matematiksel nesne oluşturması. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ kümeler ailesi olmak üzere, kural aşağıdaki gibi ifade edilebilir:



Şekil 2.9. Seçme prensibi

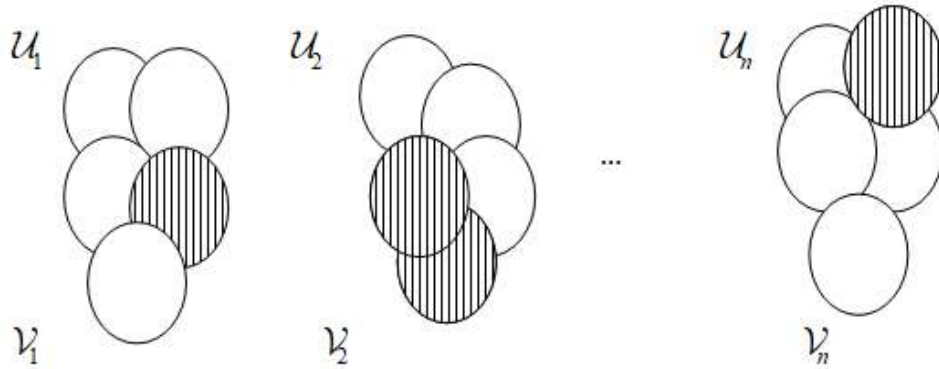
Tanım 2.2.2.2 [26] Bir X topolojik uzayının açık örtülerinin ailesi $\mathcal{O}$ ile gösterilsin. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, $\mathcal{O}$ 'nun boştan farklı iki alt kümesi olmak üzere;

1. $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ yöntemi: $\mathcal{A}$ 'nın elemanlarından oluşan her $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $U_n \in \mathcal{U}_n$ ve $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}$.
2. $S_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ yöntemi: $\mathcal{A}$ 'nın elemanlarından oluşan her $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için bir $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu altkümesi ve $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n \in \mathcal{B}$.
3. $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ yöntemi: $\mathcal{A}$ 'nın elemanlarından oluşan her $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinden, $\forall n \in \mathbb{N}$ için sonlu $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ kümesi seçerek, $\mathcal{B}$ 'de bir $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n)$ elemanı elde etmek.

Not 2.2.2.3 [26] Açık örtülerin herhangi bir $\mathcal{A}$ koleksiyonu ve $\mathcal{O}$, Γ ve Ω örtülerinin bir $\mathcal{B}$ koleksiyonu için $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subset S_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ve $S_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subset \mathcal{U}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ kapsama bağıntısı sağlanır.

Tanım 2.2.2.4 [22] (Menger-Tipi Seçme Prensibi) (M) Bir X topolojik uzayının açık örtülerinin her bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için sonlu kümelerin bir $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ ve $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup \mathcal{V}_n)$ olacak şekilde varsa X uzayına Menger örtü özelliğini sağlar veya Menger uzayıdır denir.

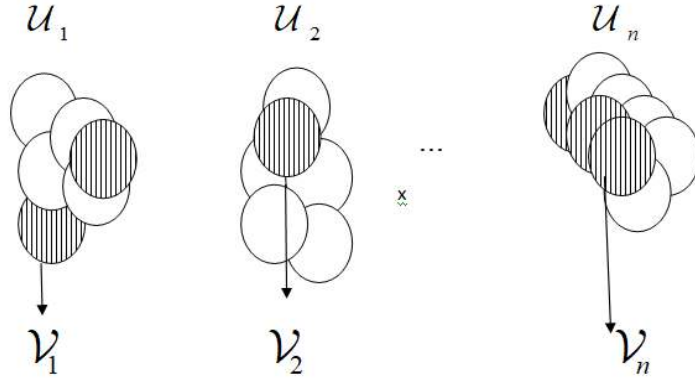
Açık örtülerin her bir $\mathcal{U}_n$ dizisi için;



Şekil 2.10. Menger-tipi seçme prensibi

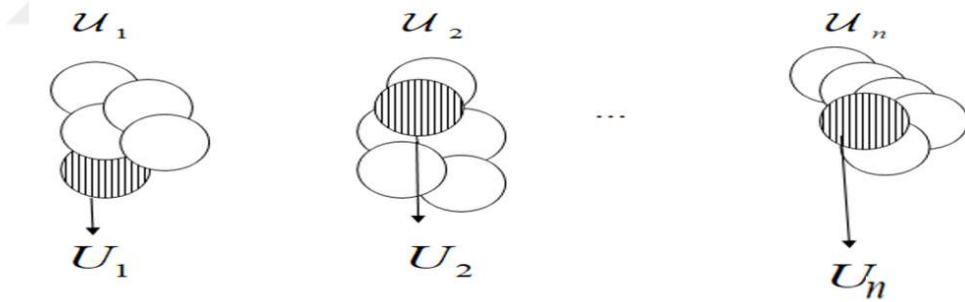
Tanım 2.2.2.5 [9] (Hurewicz-Tipi Seçme Prensibi) (H) Bir X topolojik uzayına Hurewicz örtü özelliğini sağlar veya Hurewicz uzayıdır denir eğer X 'in açık örtülerinin her bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi

için sonlu kümelerin bir $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi varsa öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ ve her $x \in X$ için $x \in \bigcup \mathcal{V}_n$, sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için.



Şekil 2.11. Hurewicz-tipi seçme prensibi

Tanım 2.2.2.6 [23] (Rothberger-Tipi Seçme Prensibi) (R) Bir X topolojik uzayının açık örtülerinin her bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için bir $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \in \mathcal{U}_n$ ve $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ olacak şekilde varsa X uzayına Rothberger örtü özelliğini sağlar veya Rothberger uzayıdır denir.



Şekil 2.12. Rothberger-tipi seçme prensibi

Tanım 2.2.2.7 [8] (Gerlitz-Nagy-Tipi Seçme Prensibi) (GN): Hurewicz ve Rothberger örtü özelliklerinin bir birleşimi olarak verilir. Buna göre, X uzayına Gerlitz-Nagy örtü özelliğini sağlar veya Gerlitz-Nagy uzayıdır denir eğer X 'in açık örtülerinin her bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için bir $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi varsa öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \in \mathcal{U}_n$ ve her $x \in X$ için $x \in U_n$ sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için.

Eğer $\mathcal{O}$, bir X topolojik uzayının açık örtülerinin bir koleksiyonu ise bu durumda

- $S_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ Menger (M) örtü özelliğidir [10, 23];

- $S_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ Rothberger (R) örtü özelliğidir [24];
- $\mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \Gamma)$ Hurewicz (H) örtü özelliğidir [10].

Teorem 2.2.2.8 $X \xrightarrow{(1)} \sigma\text{-kompakt uzay} \Rightarrow X \xrightarrow{(2)} \text{Menger uzayı} \Rightarrow X \text{ Lindelöf uzayı.}$

İspat (1) Varsayalım ki X , σ -kompakt olsun. $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots$ olacak şekilde X 'in kompakt $X_1, X_2, \dots$ altkümelerinin birleşimi olarak yazılır. X topolojik uzayının açık örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini alalım.

X_1 kompakt olduğundan; $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{U}_1$ olacak şekilde X_1 kümesini örten sonlu bir $\mathcal{V}_1$ alt örtüsü vardır.

$X_1 = \cup \mathcal{U}_1$ iken $X_1 = \cup \mathcal{V}_1$ vardır ($\mathcal{V}_1$ sonlu).

X_2 kompakt olduğundan; $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{U}_2$ olacak şekilde X_2 kümesini örten sonlu bir $\mathcal{V}_2$ alt örtüsü vardır.

...

$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots = (\cup \mathcal{V}_1) \cup (\cup \mathcal{V}_2) \cup \dots \cup (\cup \mathcal{V}_n) \cup \dots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\cup \mathcal{V}_n)$ olur ki bu da X topolojik uzayının

Menger uzayı olduğunu gösterir.

(2) X Menger uzayı olsun. X 'in açık örtülerinin her bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için bir $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$, $\mathcal{V}_n$ sonlu ($\forall n \in \mathbb{N}$ için) ve $\bigcup_n (\cup \mathcal{V}_n) = X$. Buna göre, $\mathcal{V}_n$

sonlu olduğundan sayılabilir bir alt örtüdür. Böylece, X 'in her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü olacağı için X Lindelöf uzayıdır.

Teorem 2.2.2.9

$$\begin{array}{ccccccc}
 & (1) & & (2) & & (3) & & (4) \\
 \text{Kompaktlık} & \Rightarrow & \sigma\text{-Kompaktlık} & \Rightarrow & \text{Hurewicz} & \Rightarrow & \text{Menger} & \Rightarrow & \text{Lindelöf} \\
 & & & & \uparrow (6) & & \uparrow (5) & & \\
 & & & & \text{Garlitz-Nagny} & \xRightarrow{(7)} & \text{Rothberger} & &
 \end{array}$$

İspat (1) Kompaktlık $(C) \Rightarrow \sigma$ -Kompaktlık

X kompakt olsun. X 'in σ -kompakt olduğunu göstereceğiz. Her bir n için $X_n = X$ olmak üzere $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup \dots$ yazalım. Buna göre, açıkça görülür ki X , kompakt kümelerin sayılabilir bir birleşimi olarak yazılabilir ve böylece X , σ -kompakttır.

(2) σ -Kompaktlık $\Rightarrow$ Hurewicz (H)

X topolojik uzayı σ -kompakt olsun. Buna göre $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ bu uzaydaki kompakt kümeler olmak üzere $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun. $\mathcal{U}_1$, X 'i örttüğü için $\mathcal{U}_1$,

K_1 'i örter. K_1 kompakt olduğundan $\exists$ sonlu $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{U}_1$ alt örtüsü vardır öyle ki $K_1 \subset \bigcup \mathcal{V}_1$.

$\mathcal{U}_2$, X 'i örttüğü için $\mathcal{U}_2$, K_2 'yi örter. K_2 kompakt olduğundan $\exists$ sonlu $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{U}_2$ alt örtüsü vardır öyle ki $K_2 \subset \bigcup \mathcal{V}_2$.

...

$\mathcal{U}_k$, X 'i örttüğü için $\mathcal{U}_k$, K_k 'yi örter. K_k kompakt olduğundan $\exists$ sonlu $\mathcal{V}_k \subset \mathcal{U}_k$ alt örtüsü vardır öyle ki $K_k \subset \bigcup \mathcal{V}_k$.

...

Buna göre, $X = K_1 \cup K_2 \cup \dots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup \mathcal{V}_n)$. X 'in herhangi bir noktası x olsun. Bu durumda, $x \in K_k$ olacak şekilde minimum bir $k \in \mathbb{N}$ seçelim. Açık bir şekilde, her bir $m \geq k$ için $x \in K_m$ ve $K_m \subset \bigcup \mathcal{V}_m$ olduğundan $x \in \bigcup \mathcal{V}_m$ her bir $m \geq k$ için. Böylece, her $x \in X$ için $x \in \bigcup \mathcal{V}_m$, sonlu tanesi hariç tüm m 'ler için. Bu durumda, her bir $i \geq k$ için $x \in \bigcup \mathcal{V}_i$. O halde, X Hurewicz uzayıdır.

(3) Hurewicz (H) $\Rightarrow$ Menger (M)

X Hurewicz uzayı olsun. X 'in Menger olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Yani; X 'in her $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ açık örtüsünün sonlu bir $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alt örtüsü vardır öyle ki $\bigcup \mathcal{V}_n$ X 'i örter.

$(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun. X Hurewicz olduğundan $\exists \mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$, her bir n için $\mathcal{V}_n$ sonlu ve her $x \in X$ için $x \in \bigcup \mathcal{V}_n$ (her $n \geq n_x \in \mathbb{N}$ için). Böylece, X topolojik uzayı $(\bigcup \mathcal{V}_n)$ kümeleri tarafından kapsanır.

(4) Menger (M) $\Rightarrow$ Lindelöf (L)

X Menger uzayı ve $\mathcal{U}$ ise X 'in herhangi bir açık örtüsü olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}$ olacak şekilde $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini düşünelim. Menger özelliğini bu diziye uygularsak; sonlu $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n = \mathcal{U}$

bulabiliriz, yani tüm $\mathcal{U}_n$ 'ler $\mathcal{U}$ 'dan ve $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n = \mathcal{U} \cup \mathcal{U} \cup \dots = \mathcal{U}$ olur ki $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}$

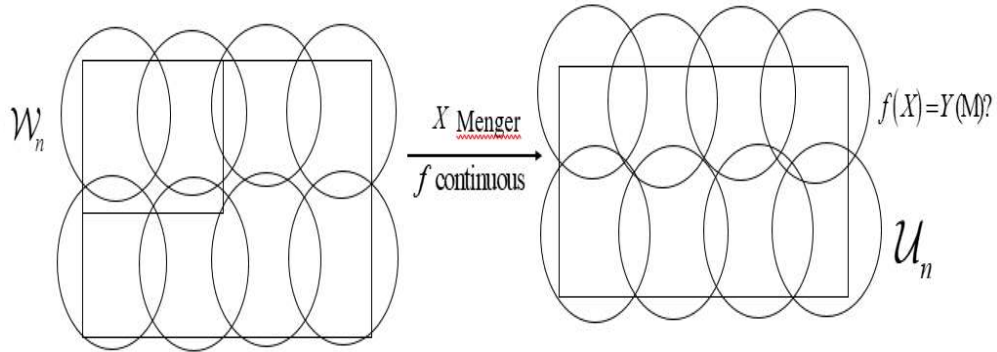
demektir. Böylece X 'in her $\mathcal{U}$ açık örtüsünün sayılabilir bir $\mathcal{V}$ alt örtüsü olduğundan X Lindelöf'tür.

(5) Rothberger $(R) \Rightarrow$ Menger (M)

X bir topolojik uzay ve X 'in açık örtülerinin bir dizisi $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olsun. X Rothberger olduğundan X 'in açık örtülerinin her bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \in \mathcal{U}_n$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X$ olacak şekilde vardır. $\mathcal{V}_n = \{U_n\} \subset \mathcal{U}_n$ alalım. Buna göre, her bir $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu alt kümesi olduğundan X 'in Menger olmasını garantilemiş olur.

(6) ve (7) Tanımdan da bilindiği üzere X Gerlitz-Nagy uzayı ise X Rothberger ve Hurewicz uzayıdır.

Teorem 2.2.2.10 X Menger uzayının sürekli f dönüşümü altındaki $Y = f(X)$ görüntüsü de Menger uzayıdır.



Şekil 2.13. Menger uzayının sürekli f dönüşümü altındaki görüntüsü

İspat X bir Menger uzayı ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $Y = f(X)$ topolojik uzayının açık örtülerinin bir dizisi olsun. Y uzayının da bir Menger uzayı olduğunu göstermek istiyoruz. Buna göre, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir alt kümesi ve $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ olacak şekilde bir $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin varlığını göstermemiz gerekir. f sürekli olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{W}_n = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$ olarak alalım, buna göre $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X 'in açık örtülerinin bir dizisi olur. X bir Menger uzayı olduğundan öyle bir $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{H}_n$, $\mathcal{W}_n$ 'nin sonlu alt kümesi ve

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n \quad (2.2.2.1)$$

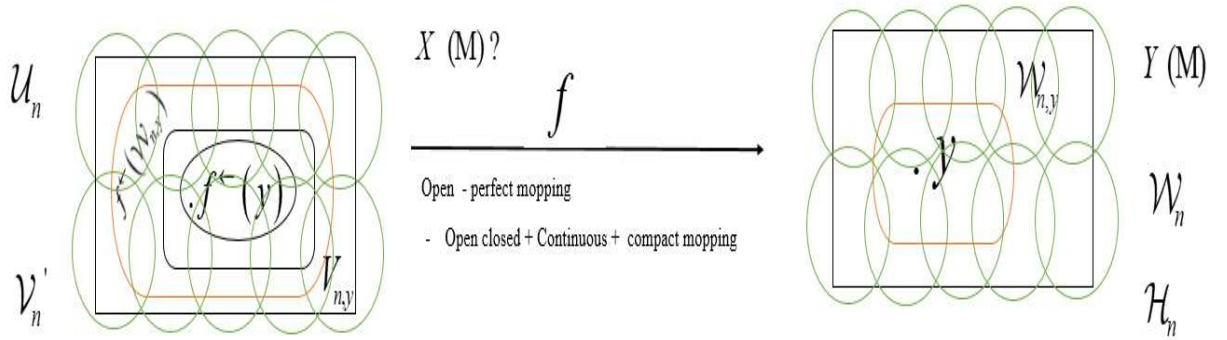
olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{V}_n = \{f(H) : H \in \mathcal{H}_n\}$ olsun, bu durumda $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir alt kümesidir.

(2.2.2.1) denkleminde,

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(\mathcal{H}_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$$

olur. Böylece $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ olur ki bu da Y 'nin Menger uzayı olduğunu gösterir.

Teorem 2.2.2.11 f bir X uzayından bir Y Menger uzayına tanımlanan açık ve mükemmel bir dönüşüm ise bu durumda X uzayı da bir Menger uzayıdır.



Şekil 2.14. Menger uzayının açık-mükemmel dönüşüm altındaki ters görüntüsü Menger

İspat $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X uzayının açık örtülerinin bir dizisi ve $y \in Y$ olsun. f kompakt bir dönüşüm olduğundan $\forall y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ kümesi X uzayının kompakt bir altkümesidir. Buna göre, her $n \in \mathbb{N}$ ve $\forall y \in Y$ için $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir $\mathcal{V}_{n,y}$ alt kümesi $f^{-1}(y) \subseteq \bigcup \mathcal{V}_{n,y} = V_{n,y}$ olacak şekilde vardır. f kapalı bir dönüşüm olduğundan, $y \in W_{n,y}$ ve $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(W_{n,y}) \subset V_{n,y}$ olacak şekilde bir açık $W_{n,y} \subset Y$ kümesi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{W}_n = \{W_{n,y} : y \in Y\}$ ailesi Y uzayının bir açık örtüsüdür. Y uzayı Menger özelliğini sağladığından, bir $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{H}_n, \mathcal{W}_n$ 'nin sonlu alt kümesi ve

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n \quad (2.2.2.2)$$

Her $H \in \mathcal{H}_n$ için buna karşılık gelen sonlu bir $\mathcal{V}_{n,H} \subset \mathcal{U}_n$ vardır ve böylece $\mathcal{V}_n' = \{V \in \mathcal{V}_{n,H} : H \in \mathcal{H}_n\}$

kümesi $\mathcal{U}_n$ açık örtüsünün sonlu alt kümesi olur. Ayrıca (2.2.2.2) denkleminde

$$X = f^{\leftarrow}(Y) = f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{\leftarrow}(\mathcal{H}_n) \subseteq X$$

olur ve buradan $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n'$ elde edilir. Böylece X Menger (M) uzayıdır.



3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Yeni Örtü Çeşitleri Ve Yıldız Seçme Prensipleri

Yıldız örtü özellikleri kompaktlığın zayıf halleri ve Lindelöf özelliğinin daha güçlendirilmiş halleridir. Aslında bunların hepsi sayılabilir kompaktlık ile yalancı kompaktlık (pseudokompaktlık) arasında uzanır [38]. Bu kısımda [2, 3, 6, 12, 16, 18, 21, 30, 31, 32, 33, 38] makaleleri derlenmiş ve bu makalelerde ispatları verilmeyip açık bir şekilde görülebileceği bilgisi verilen teoremlerin ispatları da yapılmıştır.

3.1.1. Yıldız Örtü Özellikleri ve Aralarındaki İlişkiler

Bu kısımda yıldız kompaktlık (SC), yıldız Lindelöf (SL) ile bunların daha güçlü versiyonları olan kuvvetli yıldız kompaktlık (SSC) ve kuvvetli yıldız Lindelöf (SSL) ile yıldız-L-Lindelöf (star-L-Lindelöf), kompaktlık (C) ve sayılabilir kompaktlık (CC) gibi kavramlarla aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

Tanım 3.1.1.1 [38] Bir X topolojik uzayına eğer X 'in her $\mathcal{U}$ açık örtüsünün sonlu bir $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ alt örtüsü $X = St(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = \bigcup \{U \in \mathcal{U} : (\bigcup \mathcal{V}) \cap U \neq \emptyset\}$ olacak şekilde varsa yıldız-kompakt (SC) uzayı denir.

Tanım 3.1.1.2 [38] X topolojik uzayına eğer X 'in her bir $\mathcal{U}$ açık örtüsü için sonlu bir $F \subset X$ altkümesi $X = St(F, \mathcal{U})$ olacak şekilde varsa kuvvetli yıldız kompakttır (SSC) denir.

Teorem 3.1.1.3 (Lemma 2.1.1, [38]) Kuvvetli yıldız-kompakt uzay yıldız-kompakttır.

İspat X topolojik uzayının bir açık örtüsü $\mathcal{U}$ olsun. X kuvvetli yıldız-kompakt olduğundan, sonlu bir $B \subset X$ kümesi $St(B, \mathcal{U}) = X$ olacak şekilde vardır. Her bir $b \in B$ için $b \in U_b$ olacak şekilde bazı $U_b \in \mathcal{U}$ seçelim. $\mathcal{V} = \{U_b : b \in B\}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ 'nun sonlu bir alt kümesidir ve $X = St(B, \mathcal{U}) \subseteq St(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U}) \subseteq X$ elde edilir. Böylece $X = St(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U})$ olur ki bu da X 'in yıldız-kompakt olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.1.4 (Teorem 2.1.4, [38], ayrıca bkz. [6]) Her sayılabilir kompakt uzay kuvvetli yıldız-kompakttır ($CC \Rightarrow SSC$).

İspat X bir topolojik uzay olsun. Varsayalım ki X uzayı sayılabilir kompakt olsun fakat kuvvetli yıldız-kompakt olmasın. Eğer $B \subseteq X$ sonlu ise

$$St(B, \mathcal{U}) \neq X \quad (3.1.1)$$

olacak şekilde X 'in bir açık örtüsü $\mathcal{U}$ olsun. Herhangi bir $x_0 \in X$ seçelim ve tümevarımla, $x_n \in X \setminus St(\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}, \mathcal{U})$, $n > 0$ için seçelim. (3.1.1) ile böyle bir seçim mümkündür. $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ve $\mathcal{V} = \{St(x_n, \mathcal{U}) : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Dikkat edilirse, x_n 'nin seçimine bağlı olarak, $\mathcal{V}$ 'nin her elemanı kesinlikle A 'nın bir elemanını içerir. Sonuç olarak, $\mathcal{V}$ 'nin sonlu bir alt kümesi A 'yı kapsamayacaktır. Eğer $y \in \bar{A}$ ise $y \in U$ olacak şekilde bazı açık $U \in \mathcal{U}$ seçelim. $U \cap \bar{A} \neq \emptyset$, $U \cap A \neq \emptyset$ ve böylece $y \in St(x_n, \mathcal{U})$ bazı n için. Bunun için görüyoruz ki, X 'deki açık kümeler ile birlikte, $\mathcal{V}$, $\bar{A}$ 'nın sayılabilir bir örtüsüdür. X 'in kapalı bir altkümesi olan $\bar{A}$, sayılabilir kompakttır. Buna göre, $\bar{A}$ 'nı ve dolayısıyla A 'yı örten, $\mathcal{V}$ 'nin sonlu bir altkümesi bulunmak zorundadır. Bu ise $\mathcal{V}$ hakkındaki önceki gözlemlerimizle çelişmektedir. O halde X kuvvetli yıldız-kompakttır.

Not 3.1.1.5 Bu teoremin tersinin sağlanabilmesi için verilen uzayın Hausdorff uzayı olması gerekir.

Teorem 3.1.1.6 (Teorem 2.1.5, [38]) Kuvvetli yıldız-kompakt (SSC) Hausdorff uzayı sayılabilir kompakttır (CC).

İspat Varsayalım ki X sayılabilir kompakt olmayan bir Hausdorff uzayı olsun. Buna göre sonsuz kapalı ayırık $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ altkümesi vardır. D ayırık olduğundan, her bir $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \cap D = \{x_n\}$ olacak şekilde bir U_n açık kümesi vardır. Her $m \in \mathbb{N}$ için $Y_m = \{x_n \in D : 2^m \leq n < 2^{m+1}\}$, böylece $|Y_m| = 2^m$. Y_m sonlu ve X Hausdorff uzayı olduğundan $2^m \leq n < 2^{m+1}$ için $x_n \in V_n$ olan V_n ayırık açık kümeleri vardır. Daha sonra $\mathcal{V}_m = \{U_n \cap V_n : 2^m \leq n < 2^{m+1}\}$ kurulumu $(U_n \cap V_n) \cap D = \{x_n\}$ olacak şekilde X 'in ikili ayırık

açık altkümelerinin bir kolleksiyonunu verir. $\mathcal{V} = \{X - D\} \cup \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_m$ olarak tanımlayalım. Açık bir şekilde, $\mathcal{V}$, X 'in bir açık örtüsüdür. $|A| = M$ varsayımıyla A , X 'in sonlu bir altkümesi olsun. Buna göre, $|A| < 2^M - 1 = |\mathcal{V}_m|$. Böylece, bazı $2^M \leq m < 2^{M+1} - 1$ için, $(U_m \cap V_m) \cap A = \emptyset$ dir. Fakat $U_m \cap V_m$, $\mathcal{V}$ 'nin x_m 'i kapsayan tek elemanıdır. Bu yüzden, $x_m \notin St(A, \mathcal{V})$. Özel olarak, $St(A, \mathcal{V}) \neq X$. Fakat A , X 'in keyfi sonlu altkümesidir. Böylece X kuvvetli-yıldız kompakt değildir.

Sonuç 3.1.1.7 X kuvvetli yıldız kompakt (SSC) Hausdorff uzayı $\Leftrightarrow X$ sayılabilir kompakttır (CC).

Sonuç 3.1.1.8 $C \Rightarrow CC \Rightarrow SSC$.

Her kompakt uzay aynı zamanda sayılabilir kompakt olduğundan ve Teorem 3.1.1.4 den sonuç aşıkardır.

Tanım 3.1.1.9 [38] Bir X topolojik uzayının her $\mathcal{U}$ açık örtüsü için sayılabilir bir $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ alt örtüsü $St(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = X$ olacak şekilde varsa, bu uzaya yıldız-Lindelöf (SL) denir.

Tanım 3.1.1.10 [38] Bir X topolojik uzayının her $\mathcal{U}$ açık örtüsü için X 'in sayılabilir bir B alt kümesi $St(B, \mathcal{U}) = X$ olacak şekilde varsa bu uzaya kuvvetli-yıldız-Lindelöf (SSL) denir.

Tanım 3.1.1.11 [38] Bir X topolojik uzayına eğer X 'in her $\mathcal{U}$ açık örtüsü için X 'in bir A Lindelöf alt uzayı $St(A, \mathcal{U}) = X$ olacak şekilde varsa yıldız-L-Lindelöf (star-L-Lindelöf) denir.

Not 3.1.1.12 [12] numaralı makalede $SSL \Rightarrow SL$ ve $L \Rightarrow SSL \Rightarrow star-L-Lindelöf \Rightarrow SL$ ilişkilerinin açık bir şekilde görülebileceği denilmiştir. Biz şimdi bunları aşağıdaki iki teoremle ispatlayalım.

Teorem 3.1.1.13 Bir X topolojik uzayı kuvvetli yıldız Lindelöf ise yıldız Lindelöftür. ($SSL \Rightarrow SL$)

İspat Bir X topolojik uzayının bir açık örtüsü $\mathcal{U}$ olsun. X kuvvetli yıldız Lindelöf olduğundan X 'in sayılabilir bir B altkümesi $X = St(B, \mathcal{U})$ olacak şekilde vardır. Her bir $b \in B$ için $b \in U_b$ olacak şekilde bazı $U_b \in \mathcal{U}$ seçelim. $\mathcal{V} = \{U_b : b \in B\}$ olsun. Böylece $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ 'nun sayılabilir altkümesidir ve $X = St(B, \mathcal{U}) \subseteq St(\cup \mathcal{V}, \mathcal{U}) \subseteq X$. Böylece $St(\cup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = X$.

Teorem 3.1.1.14 X bir topolojik uzay olsun.

- i. X Lindelöf ise X kuvvetli yıldız Lindelöf'tür ($L \Rightarrow SSL$).
- ii. X kuvvetli yıldız Lindelöf ise X yıldız-L-Lindelöf'tür ($SSL \Rightarrow star-L-Lindelöf$).
- iii. X yıldız-L-Lindelöf X yıldız Lindelöf'tür ($star-L-Lindelöf \Rightarrow SL$).

İspat i. ($L \Rightarrow SSL$)

X bir topolojik uzay ve $\mathcal{U}$ ise X 'in bir açık örtüsü olsun. X Lindelöf olduğundan $\mathcal{U}$ açık örtüsünün sayılabilir bir $\mathcal{V}$ altörtüsü $\cup \mathcal{V} = X$ olacak şekilde vardır. Her bir $V \in \mathcal{V}$ için bir $x_V \in V$ noktası seçelim ve $B = \{x_V : V \in \mathcal{V}\}$ kümesini oluşturalım bu şekilde. $\mathcal{V}$ sayılabilir olduğundan B de X 'in sayılabilir bir altkümesi olur. Açık bir şekilde, $X = St(B, \mathcal{U})$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

ii. ($SSL \Rightarrow star-L-Lindelöf$)

X bir topolojik uzay ve $\mathcal{U}$ ise X 'in bir açık örtüsü olsun. $X = St(L, \mathcal{U})$ olacak şekilde X 'in bir L Lindelöf altuzayını bulmamız gerekir. X kuvvetli yıldız Lindelöf (SSL) olduğundan X 'in sayılabilir bir A altkümesi $St(A, \mathcal{U}) = X$ olacak şekilde vardır. $\mathcal{U}$, X 'in bir açık örtüsü olduğundan $\mathcal{U}$ ayrıca A için de bir açık örtüdür. A sayılabilir olduğundan A 'yı örten sayılabilir bir $\mathcal{V}$ altörtüsü vardır ($\mathcal{V} = \{V : x_V \in L\} \ni x_V \in V \subset U, U \in \mathcal{U}$) ve böylece A Lindelöf'tür. Buna göre $L = A$ için sonuç elde edilir.

iii. ($star-L-Lindelöf \Rightarrow SL$)

X bir topolojik uzay ve $\mathcal{U}$ ise X 'in bir açık örtüsü olsun. X bir yıldız-L-Lindelöf olduğundan X 'in bir A Lindelöf altuzayı $St(A, \mathcal{U}) = X$ olacak şekilde vardır. $\mathcal{U}$, X 'in bir açık örtüsü

olduğundan $\mathcal{U}$ ayrıca A için de bir açık örtüdür. A bir Lindelöf uzayı olduğundan $\mathcal{U}$ açık örtüsünün A 'yı örten sayılabilir bir $\mathcal{V}$ altörtüsü $A \subset \cup \mathcal{V}$ olacak şekilde vardır. Buna göre, $X = St(A, \mathcal{U}) \subseteq St(\cup \mathcal{V}, \mathcal{U}) \subseteq X$ olur ve böylece $St(\cup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = X$ olur ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1.1.15 $L \Rightarrow SSL \Rightarrow star-L-Lindelöf \Rightarrow SL$.

3.1.2. Yıldız Menger ve Kuvvetli Yıldız Menger Tipi Seçme Prensipleri

Bu kısımda yıldız Menger, yıldız Hurewicz, yıldız Rothberger, yıldız Gerlits-Nagy seçme prensipleri ile bunların daha güçlü formları olan kuvvetli yıldız Menger, kuvvetli yıldız Hurewicz, kuvvetli yıldız Rothberger, kuvvetli yıldız Gerlits-Nagy ile yıldız-K-Menger, yıldız-L-Lindelöf kavramları incelenmiş ve bu örtü özellikleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Tanım 3.1.2.1 [12] Bir X topolojik uzayına yıldız-Menger (SM) denir eğer X 'in açık örtülerinin her bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için bir $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki

- i) $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$, her bir $n \in \mathbb{N}$ için,
- ii) $\mathcal{V}_n$ sonlu, her bir $n \in \mathbb{N}$ için,
- iii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\cup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n) = X$.

Teorem 3.1.2.2 [12] X topolojik uzayı yıldız-Menger (SM) ise yıldız-Lindelöf (SL) tür $(SM \Rightarrow SL)$.

İspat X yıldız-Menger uzayı ve $\mathcal{U}$ ise X 'in bir açık örtüsü olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}$ olacak şekilde $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini düşünelim. X yıldız-Menger olduğundan bir $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n = \mathcal{U}$ sonlu altkümesi ve $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\cup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}) = X$ olacak şekilde vardır.

$\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n = \mathcal{U} \cup \mathcal{U} \cup \dots = \mathcal{U}$ olur ki $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}$ 'nun sayılabilir bir alt ailesi demektir.

Böylece X 'in her $\mathcal{U}$ açık örtüsünün sayılabilir bir $\mathcal{V}$ alt örtüsü $St(\cup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = X$ olacak şekilde var olduğundan X yıldız Lindelöf uzayıdır.

Tanım 3.1.2.3 [12] Bir X topolojik uzayına yıldız-K-Menger'dir ($S_K M$) denir eğer X 'in açık örtülerinin her bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için X 'in kompakt alt kümelerinin bir $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki $\{St(K_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ X 'in bir açık örtüsüdür; yani $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(K_n, \mathcal{U}_n) = X$.

Tanım 3.1.2.4 [12] Bir X topolojik uzayına eğer X 'in açık örtülerinin her bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için bir $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \in \mathcal{U}_n$ ve $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(U_n, \mathcal{U}_n) = X$ olacak şekilde varsa yıldız Rothberger (SR) denir.

Tanım 3.1.2.5 [32] X topolojik uzayına yıldız Hurewicz (SH) denir eğer X 'in açık örtülerinin her bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için bir $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$ 'nin sonlu alt örtüsü ve her $x \in X$ için $x \in St(\bigcup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n)$ sonlu çokluktaki hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için (hemen hemen her n için).

Not 3.1.2.6 [8] da tanımlanan Gerlits-Nagy örtü özelliğinin Rothberger ve Hurewicz örtü özelliklerinin birleşimi olduğunu biliyoruz. [13] de tanımlanan yıldız Rothberger ve [33] de tanımlanan yıldız Hurewicz kavramlarından yola çıkılarak yıldız Gerlits-Nagy örtü özelliği tanımı verilebilir.

Tanım 3.1.2.7 X topolojik uzayına yıldız Gerlits-Nagany (SGN) denir eğer X 'in açık örtülerinin her bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için bir $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \in \mathcal{U}_n$ ve her $x \in X$ için $x \in St(U_n, \mathcal{U}_n)$ sonlu çokluktaki hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için.

Tanım 3.1.2.8 [12] Bir X topolojik uzayının açık örtülerinin her bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için bir $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi

- i) $F_n \subset X$, her bir $n \in \mathbb{N}$ için,
- ii) F_n sonlu, her bir $n \in \mathbb{N}$ için,
- iii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{U}_n) = X$

olacak şekilde varsa bu uzaya kuvvetli yıldız Menger (SSM) denir.

Not 3.1.2.9 [12] de aşağıdaki teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır. Bu teoremin ispatını bu tezde verdik.

Teorem 3.1.2.10 X uzayı kuvvetli yıldız-Menger ise kuvvetli yıldız Lindelöf uzayıdır ($SSM \Rightarrow SSL$).

İspat X kuvvetli yıldız-Menger uzayı ve $\mathcal{U}$ ise X 'in bir açık örtüsü olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}$ olacak şekilde $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini düşünelim. X kuvvetli yıldız-Menger olduğundan öyle bir $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için F_n sonlu, $F_n \subset X$ her n için ve $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{U}_n) = X$ olacak şekilde vardır. her $n \in \mathbb{N}$ için F_n sonlu olduğundan, F_n sayılabilir. $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, X 'in $St(F, \mathcal{U}) = X$ şartını sağlayan, sayılabilir bir altkümesidir. Böylece, X uzayı kuvvetli yıldız-Lindelöf uzayıdır.

Tanım 3.1.2.11 [12] Eğer bir X topolojik uzayının açık örtülerinin her bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için X 'de bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(x_n, \mathcal{U}_n) = X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{U \in \mathcal{U}_n : U \cap \{x_n\} \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}\}$ olacak şekilde varsa X uzayına kuvvetli yıldız Rothberger (SSR) denir.

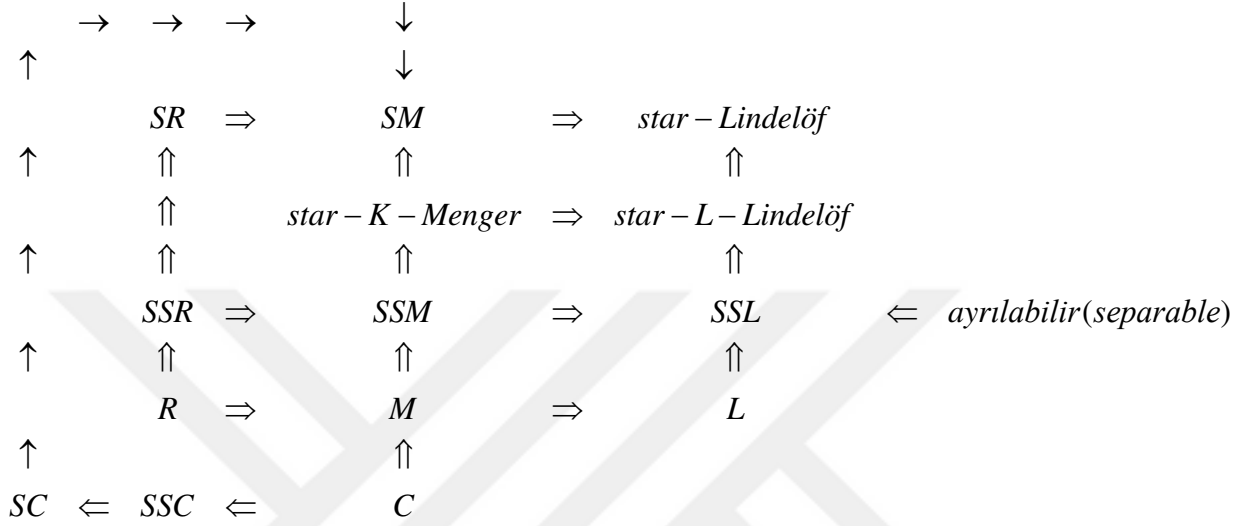
Tanım 3.1.2.12 [31] Bir X topolojik uzayına kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) denir eğer X 'in her bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ açık örtüsü için bir $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her bir $n \in \mathbb{N}$ için $F_n \subset X$ ve her $x \in X$ için $x \in St(F_n, \mathcal{U}_n)$ sonlu çokluktaki hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için.

Not 3.1.2.13 [8] da tanımlanan Gerlits-Nagy örtü özelliğinin Rothberger ve Hurewicz örtü özelliklerinin birleşimi olduğunu biliyoruz. [12] de tanımlanan kuvvetli yıldız Rothberger ve [31] de tanımlanan kuvvetli yıldız Hurewicz kavramlarından yola çıkılarak yıldız Gerlits-Nagy örtü özelliği tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 3.1.2.14 Bir X topolojik uzayına kuvvetli yıldız Gerlits-Nagy (SSGN) denir eğer X 'in açık örtülerinin her bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için X 'de bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $x \in X$ için

$x \in St(x_n, \mathcal{U}_n)$ sonlu çokluktaki hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için. Yani, $x \in \{St(x_1, \mathcal{U}_1), St(x_2, \mathcal{U}_2), \dots, St(x_n, \mathcal{U}_n), \dots\}$ hemen hemen her $n \in \mathbb{N}$ için.

Not 3.1.2.15 Aşağıdaki Şekil 3.1 [Diagram 1, 12] de gösterilmiştir. Fakat bu ve buna benzer örtü özelliklerinin aralarındaki ilişkilerin ispatı verilmemiştir. Biz bu tezde bu ispatları vereceğiz.



Şekil 3.1. Örtü özellikleri arasındaki ilişki

Teorem 3.1.2.16 Bir X topolojik uzayı Yıldız-K-Menger ise yıldız-L-Lindelöf uzayıdır. $(star-K-Menger \Rightarrow star-L-Lindel\ddot{o}f)$.

İspat X bir topolojik uzay ve $\mathcal{U}$ ise X 'in bir açık örtüsü olsun. X 'in bir A Lindelöf altuzayının $St(A, \mathcal{U}) = X$ olacak şekilde var olduğunu göstermek istiyoruz. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}$ olacak şekilde X 'in açık örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini göz önünde bulunduralım. X yıldız-K-Menger olduğundan X 'in kompakt altkümelerinin bir $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(K_n, \mathcal{U}) = X$. Bu durumda $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, X 'in σ -kompakt bir altuzayıdır. σ -kompakt uzay Lindelöf uzayı olduğundan, A bu durumda X 'in $St(A, \mathcal{U}) = X$ şartını sağlayan bir Lindelöf uzayı olduğundan X yıldız-L-Lindelöftür.

Teorem 3.1.2.17 Her Menger uzayı (M) kuvvetli yıldız Menger (SSM) dir $(M \Rightarrow SSM)$.

İspat X bir topolojik uzay ve X 'in açık örtülerinin bir dizisi $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olsun. X Menger olduğundan bir $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$, $\mathcal{V}_n$ sonlu, her bir $n \in \mathbb{N}$ için ve $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup \mathcal{V}_n) = X$ olacak şekilde vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $V \in \mathcal{V}_n$ için bir $x_V \in V$ noktası seçelim ve $F_n := \{x_V : V \in \mathcal{V}_n\}$ olarak alalım. Buna göre F_n , X 'in sonlu bir altkümesidir. Açık bir şekilde, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{U}_n) = X$ olur.

Teorem 3.1.2.18 Her kuvvetli yıldız Menger uzayı (SSM) yıldız Menger (SM) dir ($SSM \Rightarrow SM$).

İspat X bir topolojik uzay ve X 'in açık örtülerinin bir dizisi $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olsun. X kuvvetli yıldız-Menger olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $F_n \subset X$, F_n sonlu, her bir $n \in \mathbb{N}$ için ve $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{U}_n) = X$ olacak şekilde bir $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in F_n$ için $x \in U_n$ olacak şekilde bazı $U_n \in \mathcal{U}_n$ seçelim. $\mathcal{V}_n = \{U_n : x \in F_n\}$ olsun. Buna göre her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$ sonludur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir alt kümesidir ve $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{U}_n) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\bigcup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n) \subseteq X$ elde edilir. Bu da $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\bigcup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n)$ olduğunu gösterir.

Sonuç 3.1.2.19 $M \Rightarrow SSM \Rightarrow SM$.

Teorem 3.1.2.20 Her Rothberger uzayı (R) kuvvetli yıldız Rothberger (SSR) dir ($R \Rightarrow SSR$).

İspat X bir topolojik uzay ve X 'in açık örtülerinin bir dizisi $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olsun. X Rothberger olduğundan her bir $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \in \mathcal{U}_n$ 'ler $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = X$ olacak şekilde vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in U_n$ alalım. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \subseteq St(x_n, \mathcal{U}_n)$ gerçeğini takip ederek $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(x_n, \mathcal{U}_n) \subseteq X$ ve buradan $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(x_n, \mathcal{U}_n)$ elde edilir. Yani, X kuvvetli yıldız-Rothberger'dir.

Teorem 3.1.2.21 Her kuvvetli yıldız Rothberger uzayı (SSR) yıldız Rothberger (SR) dir. $(SSR \Rightarrow SR)$.

İspat X bir topolojik uzay ve X 'in açık örtülerinin bir dizisi $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olsun. X kuvvetli yıldız Rothberger olduğundan X 'de bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(x_n, \mathcal{U}_n) = X$ olacak şekilde vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in U_n$ alalım. Açıkça, her $n \in \mathbb{N}$ için $St(x_n, \mathcal{U}_n) \subset St(U_n, \mathcal{U}_n)$ olur. Böylece, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(x_n, \mathcal{U}_n) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(U_n, \mathcal{U}_n) \subseteq X$ elde edilir. Yani, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(U_n, \mathcal{U}_n)$ ve buradan X yıldız-Rothberger'dir.

Sonuç 3.1.2.22 $R \Rightarrow SSR \Rightarrow SR$.

Not 3.1.2.23 Aşağıdaki Şekil 3.2 [31] de gösterilmiştir. Fakat bu ve buna benzer örtü özelliklerinin aralarındaki ilişkilerin ispatının açık olduğu belirtilerek verilmemiştir. Biz bu tezde bazı ispatları vereceğiz.

$$\begin{array}{ccccc} C & \Rightarrow & SSH & \Rightarrow & SSM \\ & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & SH & \Rightarrow & SM \end{array}$$

Şekil 3.2. Örtü özellikleri arasındaki ilişki

Teorem 3.1.2.24 Her Hurewicz uzayı (H) kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) dir $(H \Rightarrow SSH)$.

İspat X bir topolojik uzay ve X 'in açık örtülerinin bir dizisi $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olsun. X Hurewicz olduğundan bir $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$ sonlu, vardır öyle ki her $x \in X$ için $x \in \cup \mathcal{V}_n$ sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $V \in \mathcal{V}_n$ için bir $x_V \in V$ noktası seçelim ve $F_n := \{x_V : V \in \mathcal{V}_n\}$ olarak alalım. Buna göre F_n , X 'in sonlu bir altkümesidir. Buna göre, $\forall x \in X, x \in \cup \mathcal{V}_n \subset St(F_n, \mathcal{U}_n)$ sonlu tanesi hariç tüm n için.

Teorem 3.1.2.25 Her kuvvetli yıldız Hurewicz uzayı (SSH) yıldız Hurewicz (SH) dir $(SSH \Rightarrow SH)$.

İspat X bir topolojik uzay ve X 'in açık örtülerinin bir dizisi $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olsun. X kuvvetli yıldız Hurewicz olduğundan bir $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır her $n \in \mathbb{N}$ için $F_n \subset X$, F_n sonlu, her bir $n \in \mathbb{N}$ için ve $\forall x \in X$ için $x \in St(F_n, \mathcal{U}_n)$ sonlu tanesi hariç tüm n için.

Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in F_n$ için $x \in U_n$ olacak şekilde bazı $U_n \in \mathcal{U}_n$ seçelim. $\mathcal{V}_n = \{U_n : x \in F_n\}$ olsun, buna göre her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$ sonludur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir alt kümesidir ve $\forall x \in X$ için $x \in St(F_n, \mathcal{U}_n) \subset St(\cup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n)$ sonlu tanesi hariç tüm n için. Buradan $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\cup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n)$ sonlu tanesi hariç tüm n için, olur ki bu da X 'in yıldız-Hurewicz olduğunu gösterir.

Sonuç 3.1.2.26 $H \Rightarrow SSH \Rightarrow SH$.

Teorem 3.1.2.27 [12] Her kuvvetli yıldız Menger (SSM), meta-kompakt uzayı bir Menger (M) uzayıdır. $(SSM + \text{metakompakt} \Rightarrow M)$.

İspat X topolojik uzayının açık örtülerinin bir dizisi $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olsun. X uzayı meta-kompakt olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$ 'nin açık, sonlu-nokta bir $\mathcal{V}_n$ incesi vardır. X kuvvetli-yıldız Menger (SSM) olduğundan (bu gerçeği $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ açık alt örtülerinin dizisi üzerine uygularsak), X 'in sonlu alt kümelerinin bir $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{V}_n) = X$, yani; $\{St(F_n, \mathcal{V}_n) : n \in \mathbb{N}\}$, X 'in bir açık örtüsüdür. $\mathcal{V}_n$ sonlu-nokta olduğundan F_n 'nin elemanları $\mathcal{V}_n$ 'nin sonlu çokluktaki elemanları tarafından kapsanır ve $St(F_n, \mathcal{V}_n)$ ise $\mathcal{W}_n$ 'nin birleşimi olacaktır. $W \in \mathcal{W}_n$ (öyle ki $\mathcal{V}_n$ 'nin gerçekte bir elemanı olan) için W elemanını içeren bir $U_W \in \mathcal{U}_n$ vardır. $\mathcal{H}_n = \{U_W : W \in \mathcal{W}_n\}$ olmak üzere $\mathcal{H}_n$, $\mathcal{V}_n$ 'nin sonlu alt kümesidir ve $\bigcup \mathcal{H}_n \supset \bigcup \mathcal{W}_n = St(F_n, \mathcal{V}_n)$. Böylece $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup \mathcal{H}_n)$ elde edilir ve buradan X Menger uzayıdır.

Teorem 3.1.2.28 [12] Her kuvvetli yıldız-Menger (SSM) ve meta-Lindelöff X uzayı Lindelöff 'tür. $(SSM + \text{meta-Lindelöff} \Rightarrow L)$.

İspat X 'in bir açık örtüsü $\mathcal{U}$ olsun. $\mathcal{U}$ 'nun sayılabilir bir alt örtüsünün olduğunu göstermek istiyoruz. X meta-Lindelöff uzay olduğundan $\mathcal{U}$ 'nun nokta-sayılabılır, açık bir $\mathcal{V}$ incesi vardır. $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ 'nun nokta-sayılabılır, açık bir incesi olduğundan $\mathcal{V}$ 'nin kendisi de X 'i örter. X kuvvetli yıldız-Menger uzayı olduğundan (SSM), X 'in sonlu alt kümelerinin bir $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ dizisi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{V}) = X$ olacak şekilde vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{W}_n$ ile, $\mathcal{W}_n = \{V \in \mathcal{V} : F_n \cap V \neq \emptyset\}$ olacak şekilde $\mathcal{V}$ 'nin F_n ile kesişen elemanlarının ailesi gösterilsin. $\mathcal{V}$ nokta-sayılabılır ve F_n sonlu olduğundan, $\mathcal{W}_n$ sayılabilir. Böylece $\mathcal{W} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n$ kolleksiyonu, $\mathcal{V}$ 'nin sayılabilir bir alt ailesi ve X 'in bir örtüsüdür. Her $W \in \mathcal{W}$ için $W \subset U_W$ olacak şekilde bir $U_W \in \mathcal{U}$ elemanını karşılık getirelim. Buna göre, $\{U_W : W \in \mathcal{W}\}$ kümesi $\mathcal{U}$ 'nun sayılabilir bir alt örtüsüdür. O halde X topolojik uzayının herhangi bir $\mathcal{U}$ açık örtüsünün sayılabilir bir $\mathcal{W}$ alt örtüsü var olduğundan X uzayına Lindelöff uzayı denir.

Not 3.1.2.29 Teorem 3.1.1.4 ve Teorem 3.1.1.6 dan elde edilen Sonuç 3.1.1.7 den bilindiği üzere Hausdorff uzaylarda kuvvetli yıldız kompaktlık (SSC) ve sayılabilir kompaktlık (CC) çakışmaktadır. Böylece sayılabilir kompakt Hausdorff uzayları kuvvetli yıldız Menger (SSM) dir. Bir önceki teoremden sonraki iyi bilinen sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1.2.30 Sayılabilir kompakt meta-Lindelöf uzayı kompaktır.

Not 3.1.2.31 Aşağıdaki Şekil 3.3 [12] de gösterilmiştir. Aşağıdaki Teorem 3.1.2.32 bu makalede verilen bir teoremdir. Fakat bu tezde tüm şıkların ispatı verilecek olup ispat daha detaylı bir şekilde incelenecektir.

$$SSM + \text{Meta-Lindelöf} \Rightarrow \text{Lindelöf}$$

$$\begin{array}{ccc} M & \Rightarrow & \text{Lindelöf} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ SSM & \Rightarrow & SSL \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ SM & \Rightarrow & SL \end{array}$$

Şekil 3.3. Örtü özellikleri arasındaki ilişki

Teorem 3.1.2.32 [12] Bir parakompakt Hausdorff X uzayı için aşağıdakiler denktir:

- (a) X yıldız-Menger (SM) uzayıdır.
- (b) X yıldız-K-Menger ($S_K M$) uzayıdır.
- (c) X kuvvetli yıldız-Menger (SSM) uzayıdır.
- (d) X Menger (M) uzayıdır.

İspat $(d) \Rightarrow (c): M \Rightarrow SSM$, Teorem 3.1.2.14 te gösterilmişti.

$(c) \Rightarrow (b): SSM \Rightarrow S_K M$ olduğunu göstermek istiyoruz. X kuvvetli yıldız-Menger uzayı ve $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun. Bu durumda X 'in sonlu alt kümelerinin bir $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{U}_n) = X$ olacak şekilde vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için F_n sonlu olduğundan kompakttır. Böylece, X 'in kompakt alt kümelerinin bir $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{U}_n) = X$ olacak şekilde elde etmiş oluruz. Bu da X 'in bir yıldız-K-Menger ($S_K M$) olduğu anlamına gelir.

$(b) \Rightarrow (a): S_K M \Rightarrow SM$ olduğunu göstermek istiyoruz. X yıldız-K-Menger ve $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun. X yıldız-K-Menger olduğundan $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(K_n, \mathcal{U}_n) = X$ (yani, $\{St(K_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ X 'in bir açık örtüsü) olacak şekilde X 'in kompakt alt kümelerinin bir $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için K_n kompakt olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$, K_n için bir açık örtüdür ve $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 'nin sonlu alt kümelerinin bir $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki $K_n \subset \bigcup \mathcal{V}_n = St(K_n, \mathcal{U}_n)$. $St(K_n, \mathcal{U}_n) = \bigcup \mathcal{V}_n$ olduğundan $\{\bigcup \mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$, X 'in bir açık örtüsü olur. Buna göre, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup \mathcal{V}_n) = X$, yani X Menger uzayıdır. Sonuç 3.1.2.15 ten $M \Rightarrow SSM \Rightarrow SM$ olduğundan X yıldız-Menger uzayıdır.

$(a) \Rightarrow (d): SM \Rightarrow M$ olduğunu göstermeliyiz. Böylece ispat tamamlanmış olur. X yıldız-Menger ve $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun. Parakompaktlığın Stone-karakterizasyonu uygulanırsa her bir $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \dots, \mathcal{U}_n, \dots$ için $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3, \dots, \mathcal{V}_n, \dots$ dizisi vardır öyle ki $\mathcal{V}_1, \mathcal{U}_1$ 'in bir yıldız incesidir, o halde, $\forall V \in \mathcal{V}_1$ için $\exists U_V \in \mathcal{U}_1$ vardır öyle ki $St(V, \mathcal{V}_1) \subset U_V$. $\mathcal{V}_2, \mathcal{U}_2$ 'in bir yıldız incesidir, o halde, $\forall V \in \mathcal{V}_2$ için $\exists U_V \in \mathcal{U}_2$ vardır öyle ki $St(V, \mathcal{V}_2) \subset U_V$. $\mathcal{V}_3, \mathcal{U}_3$ 'in bir yıldız incesidir, o halde, $\forall V \in \mathcal{V}_3$ için $\exists U_V \in \mathcal{U}_3$ vardır öyle ki $St(V, \mathcal{V}_3) \subset U_V$.
...
 $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$ 'in bir yıldız incesidir, o halde, $\forall V \in \mathcal{V}_n$ için $\exists U_V \in \mathcal{U}_n$ vardır öyle ki $St(V, \mathcal{V}_n) \subset U_V$.
...
 X yıldız-Menger olduğundan her $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için bir $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{W}_n \subset \mathcal{V}_n$ $\mathcal{W}_n$ sonlu (her $n \in \mathbb{N}$ için) ve $\{St(\cup \mathcal{W}_1, \mathcal{V}_1), St(\cup \mathcal{W}_2, \mathcal{V}_2), \dots, St(\cup \mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n), \dots\} \in \mathcal{O}$, yani $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\cup \mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n) = X$. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $W \in \mathcal{W}_n \subset \mathcal{V}_n$ için en az bir $U_W \in \mathcal{U}_n$ vardır öyle ki $St(W, \mathcal{V}_n) \subset U_W$. $\mathcal{U}_n' := \{U_W : W \in \mathcal{W}_n\}$ olsun. $\mathcal{U}_n'$ her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$ nin sonlu altkümesidir. $(\mathcal{U}_n')_{n \in \mathbb{N}}$, X 'in açık altkümelerinin bir ailesidir öyle ki $\mathcal{U}_n'$ her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu altkümesi, $St(\cup \mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n) \subset \cup \mathcal{U}_n'$. Her $n \in \mathbb{N}$ için $St(\cup \mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n)$ kümeleri X bir örtü oluşturur. Böylece, $\{\cup \mathcal{U}_1', \cup \mathcal{U}_2', \cup \mathcal{U}_3', \dots\} \in \mathcal{O}$ olur ve buradan X Menger'dir.

Not 3.1.2.33 Kocinac [12] benzer bir yolla, parakompakt bir X uzayında Rothberger, yıldız Rothberger, kuvvetli yıldız Rothberger özelliklerinin birbirlerine denk olduklarının gösterilebileceğine değinmiştir ve bu ispatı okuyucuya bırakmıştır. Biz bu tezde ispatını aşağıda vereceğiz.

Teorem 3.1.2.34 Bir parakompakt X uzayı, Rothberger (R) uzayıdır $\Leftrightarrow$ yıldız Rothberger (SR) uzayıdır $\Leftrightarrow$ kuvvetli yıldız Rothberger (SSR) uzayıdır.

İspat Sonuç 3.1.2.22 de $R \Rightarrow SSR \Rightarrow SR$ olduğu gösterilmişti. $SR \Rightarrow R$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, parakompakt yıldız-Rothberger bir X uzayının açık örtülerinin bir

dizisi olsun. Parakompaktlığın Stone-karakterizasyonu uygulanırsa her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$ 'nin açık bir yıldız incesidir. X yıldız-Rothberger olduğundan her $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için bir $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $W_n \in \mathcal{V}_n$ ve $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(W_n, \mathcal{V}_n) = X$. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $W' \in W_n$ için bir $U_{W'} \in \mathcal{U}_n$ vardır öyle ki $St(W', \mathcal{V}_n) \subset U_{W'}$. $U_n' := \{U_{W'} : W' \in W_n\}$ olsun. $(U_n')_{n \in \mathbb{N}}, X$ 'in açık altkümelerinin bir dizisi olup her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n' \in \mathcal{U}_n$ ve $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(W_n, \mathcal{V}_n) = X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n' \subset X$. Buradan $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n' = X$ olur ve böylece X Rothberger'dir.

Not 3.1.2.35 Teorem 3.1.2.28, Teorem 3..2.32 ve regüler Lindelöf uzayların parakompakt olması gerçeğinden yola çıkarak aşağıdaki sonuç elde edilir. Ayrıca herhangi bir ayırma aksiyomuna gerek kalmadan Teorem 3.1.2.37 deki sonucun sağlandığını gözlemleyebiliriz.

Sonuç 3.1.2.36 [12] Bir regüler kuvvetli yıldız Menger (SSM) meta-Lindelöf (meta-L) uzayı Menger (M) uzayıdır.

Teorem 3.1.2.37 [12] Bir parakompakt X uzayı yıldız-K-Menger uzayıdır $(S_K M) \Leftrightarrow$ Menger (M) uzayıdır.

İspat Menger uzayının yıldız-K-Menger $(M \Rightarrow SSM \Rightarrow S_K M)$ olduğunu Teorem 3.1.2.32 den biliyoruz. Yıldız-K-Menger uzayının Menger olması için uzayın parakompakt olması gerektiğini bu teoremde göstermiş olacağız.

Teorem 3.1.2.38 Parakompakt X uzayı yıldız-K-Mengerdir $\Leftrightarrow X$ Menger uzayıdır.

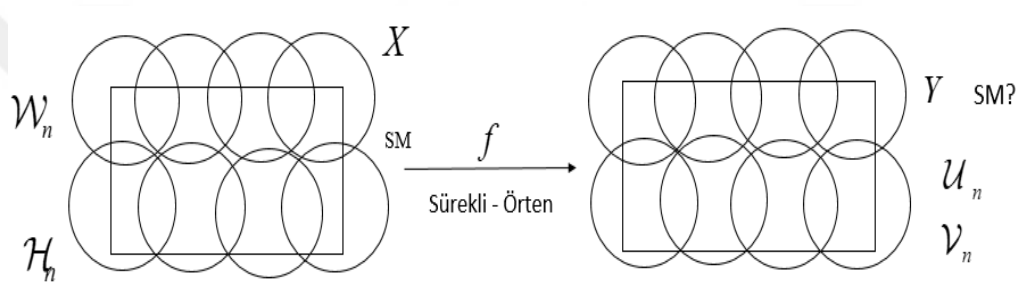
İspat X uzayının açık örtülerinin bir dizisi $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olsun. X parakompakt olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{U}_n$ 'nin açık, yerel-sonlu bir $\mathcal{V}_n$ incesi vardır. X yıldız-K-Menger olduğundan, X 'in $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(K_n, \mathcal{V}_n) = X$ şartını sağlayan kompakt altkümelerinin bir dizisi $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olsun. $\mathcal{V}_n$ yerel sonlu olduğundan, $\mathcal{V}_n$ 'nin K_n ile kesişen tüm elemanlarının kümesi $\mathcal{V}_n'$ sonludur ve $\bigcup \mathcal{V}_n' = St(K_n, \mathcal{V}_n)$. Buna göre $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup \mathcal{V}_n') = X$. Her $V \in \mathcal{V}_n'$ için $V \subset U_V$ ile birlikte bir $U_V \in \mathcal{U}_n$

alalım ve $\mathcal{W}_n = \{U_V : V \in \mathcal{V}_n\}$ olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{W}_n, \mathcal{U}_n$ 'nin sonlu altkümesidir. Buna göre $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup \mathcal{W}_n) = X$ ve böylece X Menger uzayıdır.

Sonuç 3.1.2.39 Metrik uzaylar da parakompakt uzaylar olduğundan metrik uzaylarda Menger, yıldız-Menger, kuvvetli yıldız Menger, yıldız-K-Menger çakışmaktadır.

Teorem 3.1.2.40 Yıldız Menger (SM) bir X uzayının sürekli ve örten bir f dönüşümü altındaki görüntüsü olan Y uzayı da yıldız Menger (SM) uzayıdır.

İspat



Şekil 3.4. Yıldız Menger uzayının sürekli ve örten bir f dönüşümü altındaki görüntüsü

X bir yıldız Menger (SM) uzayı ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. $Y = f(X)$ uzayının da yıldız Menger (SM) olduğunu göstereceğiz. $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, Y topolojik uzayının açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir alt kümesi ve $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ olacak şekilde bir $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin varlığını göstermemiz gerekir. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{W}_n = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$ olarak alalım. Buna göre, f sürekli olduğundan, $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X 'in açık örtülerinin bir dizisi olur. X bir yıldız Menger olduğundan öyle bir $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{H}_n, \mathcal{W}_n$ 'nin sonlu bir alt kümesi ve

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\bigcup \mathcal{H}_n, \mathcal{W}_n) \quad (3.1.2.1)$$

Burada $St(\bigcup \mathcal{H}_n, \mathcal{W}_n) = \bigcup \{W \in \mathcal{W}_n : (\bigcup \mathcal{H}_n) \cap W \neq \emptyset\}$ olduğunu biliyoruz. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{V}_n = \{f(H) : H \in \mathcal{H}_n\}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir alt kümesidir. (3.1.2.1) den,

$$\begin{aligned}
Y = f(X) &= f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\mathcal{U}_n, \mathcal{W}_n)\right) \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(f(\mathcal{U}_n), f(\mathcal{W}_n)) \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n).
\end{aligned}$$

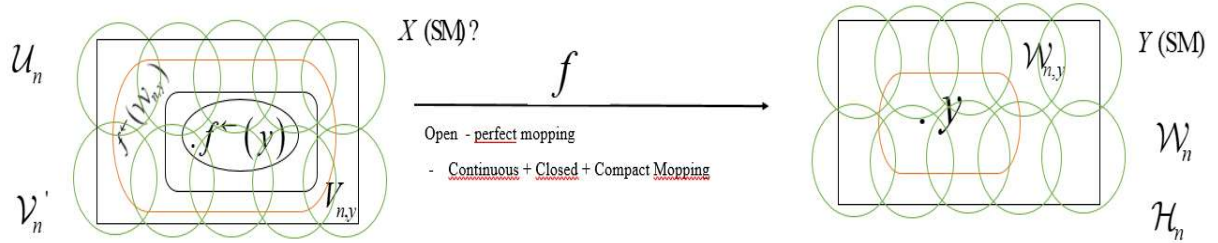
Burada,

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(St(\mathcal{U}_n, \mathcal{W}_n)) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{f(W) \in f(\mathcal{W}_n) : f(\mathcal{U}_n) \cap f(W) \neq \emptyset\} \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{U \in \mathcal{U}_n : (\mathcal{V}_n) \cap U \neq \emptyset\}.
\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece, Y bir yıldız Menger uzayıdır.

Teorem 3.1.2.41 Eğer f , bir X uzayından yıldız-Menger (SM) bir Y uzayına tanımlanan bir açık mükemmel dönüşüm ise X de yıldız-Menger (SM) dir.

İspat



Şekil 3.5. Yıldız Menger uzayının açık-mükemmel dönüşüm altındaki ters görüntüsü

$(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun ve $y \in Y$ olsun. $f : X \rightarrow Y$ açık ve mükemmel bir dönüşüm olduğundan sürekli, kapalı, kompakt ve açık bir dönüşümdür. f , kompakt bir dönüşüm olduğundan, $f^{-1}(y)$ kümesi X de kompakttır ve bu sebeple her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir $\mathcal{V}_{n,y}$ alt kümesi vardır. $f^{-1}(y) \subseteq \bigcup \mathcal{V}_{n,y} = V_{n,y}$ olacak şekilde. f kapalı olduğundan $y \in W_{n,y}$ ve $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(W_{n,y}) \subset V_{n,y}$ olacak şekilde $W_{n,y} \subset Y$ açık kümesi vardır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için, $W_n = \{W_{n,y} : y \in Y\}$ (ailesi) Y 'nin bir açık örtüsüdür. Y Yıldız – Menger (SM) olduğundan bir $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için H_n , W_n 'nin sonlu alt kümesidir ve

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\mathcal{U}_n, W_n) \quad (3.1.2.2)$$

Her $H \in H_n$ için buna karşılık gelen $\mathcal{V}_{n,H} \subset \mathcal{U}_n$ vardır $\mathcal{V}_n' = \{v \in \mathcal{V}_{n,H}, H \in H_n\}$ kümesi, bu durumda, $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir alt kümesidir ve her $n \in \mathbb{N}$ için. Ayrıca, (3.1.2.2) dan

$$\begin{aligned} X &= f^{\leftarrow}(Y) = f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\bigcup \mathcal{H}_n, \mathcal{W}_n)\right) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\bigcup f^{\leftarrow}(\mathcal{H}_n), f^{\leftarrow}(\mathcal{W}_n)) \\ &\Rightarrow X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\bigcup \mathcal{V}_n', \mathcal{U}_n). \end{aligned}$$

olur. Böylece X Yıldız – Mengerdir.

Teorem 3.1.2.42 (Proposition 4.1, [2]) Bir X parakompakt Hausdorff uzayı yıldız Hurewicz özelliğine sahip ise Hurewicz özelliğini sağlar.

İspat $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun. Parakompaktlığın Stone-karakterizasyonundan her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{U}_n$ 'nin açık bir $\mathcal{V}_n$ yıldız incesi vardır. X yıldız-Hurewicz uzayı olduğundan, bir $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{W}_n$, $\mathcal{V}_n$ 'nin sonlu altkümesi ve her $x \in X$ için, $x \in St(\bigcup \mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n)$ sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için. Her $W \in \mathcal{W}_n$ için $St(W, \mathcal{V}_n) \subset U_W$ olacak şekilde $\mathcal{U}_n$ 'nin bir elemanı U_W olsun. Buna göre, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{H}_n = \{U_W : W \in \mathcal{W}_n\}$ kümesi sonlu ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{U}_n$ dir.

$$\begin{aligned} St(\bigcup \mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n) &= \bigcup \{V \in \mathcal{V}_n : (\bigcup \mathcal{W}_n) \cap V \neq \emptyset\} \\ \forall W \in \mathcal{W}_n &\Rightarrow St(W, \mathcal{V}_n) \subset U_W \Rightarrow St(\bigcup \mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(W, \mathcal{V}_n) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{U_W : W \in \mathcal{W}_n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n \\ \mathcal{H}_n &= \{U_W : W \in \mathcal{W}_n\} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{U_W : W \in \mathcal{W}_n\} \end{aligned}$$

ve buradan, $\forall x \in X$ için $x \in St(\bigcup \mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$, sonlu tanesi hariç tümüne ait olur ve böylece

$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$ sonlu tanesi hariç tümüne ait, yani; X Hurewicz uzayıdır.

Teorem 3.1.2.43 (Theorem 2.6, [32]) Yıldız Hurewicz (SH) bir X uzayının sürekli ve örten bir f dönüşümü altındaki $Y = f(X)$ görüntüsü de yıldız Hurewicz (SH) uzayıdır.

İspat $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü yıldız Hurewicz bir X uzayından Y uzayına tanımlanan sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, Y 'nin açık örtülerinin bir dizisi olsun Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$, X 'in açık örtülerinin bir dizisidir. X uzayı yıldız Hurewicz olduğundan, bir $(\mathcal{V}_n)'_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n'$, $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir altkümesidir ve her $x \in X$ için, $x \in St(\bigcup \mathcal{V}_n', \mathcal{V}_n)$ sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{U}_n' = \{f(U) : U \in \mathcal{V}_n'\}$ olsun, buna göre $\mathcal{U}_n'$ her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu altkümesidir. Her $y \in Y$ için, sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için, $y \in St(\bigcup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n)$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$y \in Y$ olsun. Bu durumda $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Böylece sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için $x \in St(\bigcup \mathcal{V}_n', \mathcal{V}_n)$ olur. Buna göre, $f(\bigcup \mathcal{V}_n') = \bigcup \mathcal{U}_n'$, $f(\mathcal{V}_n) = \mathcal{U}_n$ ve $St(\bigcup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n) = \{f(U) : U \in \mathcal{V}_n'\}$, $x \in St(\bigcup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n) = \{f(U) : U \in \mathcal{V}_n'\}$ olacak şekilde

$$y = f(x) \in f(St(\bigcup \mathcal{V}_n', \mathcal{V}_n)) = St(f(\bigcup \mathcal{V}_n'), f(\mathcal{V}_n)) = St(\bigcup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n) = \{f(U) : U \in \mathcal{V}_n'\}$$

sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için. Böylece, Y yıldız Hurewicz (SH) uzayıdır.

Theorem 3.1.2.44 (Theorem 2.8, [32]) $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü bir X uzayından yıldız Hurewicz bir Y uzayına tanımlı açık-mükemmel bir dönüşüm ise X de yıldız Hurewicz uzayıdır.

İspat $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X 'in açık örtülerinin bir dizisi ve $y \in Y$ olsun. $f : X \rightarrow Y$ kompakt bir dönüşüm olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{-1}(y)$ kümesi X de kompaktır. O halde, her $U \in \mathcal{U}_{n,y}$ için $f^{-1}(y) \subseteq U$ ve $U \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$ olacak şekilde $\mathcal{U}_n$ nin sonlu bir $\mathcal{U}_{n,y}$ alt ailesi vardır. f kapalı bir dönüşüm olduğundan $f^{-1}(V_{n,y}) \subseteq \bigcup \{U : U \in \mathcal{U}_{n,y}\}$ olacak şekilde $y \in Y$ 'nin açık bir $V_{n,y}$ komşuluğu vardır. Sonlu tane açık kümenin kesişimi açık ve f açık bir dönüşüm olduğundan,

$$V_{n,y} \subseteq \bigcap \{f(U) : U \in \mathcal{U}_{n,y}\} \quad (3.1.2.3)$$

olduğu varsayılabilir. Bu durumda $\mathcal{V}_n = \{V_{n,y} : y \in Y\}$ ailesi Y 'nin bir açık örtüsüdür. Y yıldız Hurewicz uzayı olduğundan, bir $(\mathcal{V}_n)'_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{V}_n'$, $\mathcal{V}_n$ 'nin sonlu alt kümesidir ve her $y \in Y$ için, $y \in St(\bigcup \mathcal{V}_n', \mathcal{V}_n)$ sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için. Geleneği

bozmaksızın $\mathcal{V}_n' = \{V_{n,y} : i < n'\}$ varsayalım. $\mathcal{U}_n' = \bigcup_{i < n} \mathcal{U}_{n_{y_i}}$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n'$, $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu altkümesidir ve

$$f^{-1}(\bigcup \mathcal{V}_n) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_n'. \quad (3.1.2.4)$$

Her $x \in X$ 'in, sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için $x \in St(\bigcup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n)$ olduğunu göstermek istiyoruz. $x \in X$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} x &\in St(\bigcup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n) \\ \Rightarrow y = f(x) &\in f(St(\bigcup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n)) = St(f(\bigcup \mathcal{U}_n'), f(\mathcal{U}_n)) = St(\bigcup \mathcal{V}_n', \mathcal{V}_n) \\ \Rightarrow y = f(x) &\in St(\bigcup \mathcal{V}_n', \mathcal{V}_n) \end{aligned}$$

sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $y = f(x) \in St(\bigcup \mathcal{V}_n', \mathcal{V}_n)$ ise $V_{n_{y_i}} \cap V_{n_{y_j}} \neq \emptyset$ ve $y \in V_{n_{y_i}}$ olacak şekilde $i < n'$ ve $y' \in Y$ vardır. $x \in f^{\leftarrow}(V_{n_{y_i}}) \subseteq \bigcup \{U : U \in \mathcal{U}_{n_{y_i}}\}$ olduğundan $x \in U$ ile birlikte bir $U \in (\mathcal{U}_{n_{y_i}})$ seçebiliriz. Buna göre, (3.2.3) den $V_{n_{y_i}} \subseteq f(U)$ olur. Böylece $U \cap f^{\leftarrow}(\bigcup \mathcal{V}_n') \neq \emptyset$. Bu yüzden, sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için $x \in St(f^{\leftarrow}(\bigcup \mathcal{V}_n'), \mathcal{U}_n)$ ve (4.2.4) denkleminde $x \in St(\bigcup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n)$ olur ki bu da her $x \in X$ 'in, sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için $x \in St(\bigcup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n)$, olduğunu gösterir. Sonuç olarak X yıldız Hurewicz uzayıdır.

Teorem 3.1.2.45 (Theorem 2.13, [32]) Her para-Lindelöf yıldız Hurewicz uzayı Lindelöf uzayıdır.

İspat $\mathcal{U}$, X 'in açık bir örtüsü olsun. X para-Lindelöf bir topolojik uzayı olduğundan $\mathcal{U}$ 'nun yerel sayılabilir, açık bir $\mathcal{V}$ incesi vardır. Her $x \in X$ için, $\{V \in \mathcal{V} : V_x \cap V \neq \emptyset\}$ sayılabilir ve bazı $V \in \mathcal{V}$ için $V_x \subseteq V$ olacak şekilde x 'in bir açık V_x komşuluğu vardır. $\mathcal{V}' = \{V_x : x \in X\}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{V}'$, $\mathcal{V}$ 'nin açık bir incesidir. X yıldız Hurewicz olduğundan, bir $(\mathcal{V}_n')_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n' \subset \mathcal{V}'$, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n'$ sonlu ve her $x \in X$ için $x \in St(\bigcup \mathcal{V}_n', \mathcal{V}_n')$ sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n' = \{V \in \mathcal{V} : \text{bazı } V' \in \mathcal{V}_n' \text{ vardır } \ni V \cap V' \neq \emptyset\}$ olsun. O halde, $\mathcal{V}_n'$ her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}$ 'nin sayılabilir bir altkümesidir. $\mathcal{W} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n'$ olsun. Buna göre, $\mathcal{W}$, X 'in sayılabilir bir açık örtüsüdür. Her $V \in \mathcal{W}$ için $V \subseteq U_V$ olacak şekilde $U_V \in \mathcal{U}$ seçelim.

Bu durumda, $\{U_V : V \in \mathcal{W}\}$ ailesi $\mathcal{U}$ 'nun sayılabilir bir altörtüsü olur ki bu da X uzayının Lindelöf olduğunu gösterir.

Not 3.1.2.46 [32] Her parakompakt topolojik uzay para-Lindelöf olduğundan aşağıdaki sonuç bir önceki teoremden elde edilir.

Sonuç 3.1.2.47 [32] Parakompakt yıldız Hurewicz X uzayı Lindelöf uzayıdır.

$$\begin{array}{ccccc}
 H & & \rightarrow & & M \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 C \rightarrow SSH & & \rightarrow & & SSM \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 SH & & \rightarrow & & SM
 \end{array}$$

Şekil 3.6. Örtü özellikleri arasındaki ilişki

Teorem 3.1.2.48 (Theorem 2.1, [31]) Kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) uzayının sürekli bir dönüşüm altındaki görüntüsü de kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) uzayıdır.

İspat $f : X \rightarrow Y$ bir kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) X uzayından bir Y uzayına tanımlı sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. Y uzayının da kuvvetli yıldız Hurewicz özelliğini sağlayan bir topolojik uzay olduğunu göstermek istiyoruz. $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, Y uzayının açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$ olsun. Buna göre, $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X uzayının açık örtülerinin bir dizisi olur. X kuvvetli yıldız Hurewicz uzayı olduğundan X 'in sonlu altkümelerinin bir $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $x \in X$ için $x \in St(A_n, \mathcal{V}_n)$ olur, sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için. Bu yüzden $(f(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$, Y 'nin sonlu altkümelerinin bir dizisidir öyle ki her $y \in Y$ için $y \in St(f(A_n), \mathcal{U}_n)$, sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için. $y \in Y$ alalım. Buna göre, $f(x) = y$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Bu yüzden, $f(\mathcal{V}_n) = \mathcal{U}_n$ iken

$$\begin{aligned}
 y = f(x) &\in St(f(A_n), \{f(U) : U \in \mathcal{V}_n\}) \\
 St(f(A_n), \{f(U) : U \in \mathcal{V}_n\}) &= St(f(A_n), \mathcal{U}_n)
 \end{aligned}$$

sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için, olur ki böylece Y kuvvetli yıldız Hurewicz uzayıdır.

Teorem 3.1.2.49 (Theorem 2.6, [31]) $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü bir X uzayından kuvvetli yıldız Hurewicz Y uzayına tanımlanan açık-kapalı (clopen), sonludan-bire (finite-to-one) sürekli bir dönüşüm olsun. Buna göre, X uzayı da kuvvetli yıldız Hurewicz uzayıdır (veya kuvvetli yıldız Hurewicz özelliğini sağlar).

İspat $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü bir X uzayından kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) Y uzayına tanımlanan açık-kapalı (clopen), sonludan-bire (finite-to-one) sürekli bir dönüşüm olsun. X uzayının da kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) uzayı olduğunu göstermek istiyoruz. $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X 'in açık örtülerinin bir dizisi ve $y \in Y$ olsun. $f^{-1}(y)$ sonlu olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için, $f^{-1}(y) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_{n_y}$ ve her $U \in \mathcal{U}_{n_y}$ için $U \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$ olacak şekilde $\mathcal{U}_n$ 'nin bir $\mathcal{U}_{n_y}$ sonlu alt koleksiyonu vardır. f kapalı bir dönüşüm olduğundan $f^{-1}(V_{n_y}) \subseteq \bigcup \{U : U \in \mathcal{U}_{n_y}\}$ olacak şekilde $y \in Y$ 'nin bir V_{n_y} açık komşuluğu vardır. f açık bir dönüşüm olduğundan

$$V_{n_y} \subseteq \bigcap \{f(U) : U \in \mathcal{U}_{n_y}\} \quad (3.1.2.5)$$

olduğunu kabul edebiliriz. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $y \in Y$ için bu şekilde V_{n_y} açık kümeleri olarak Y nin $\mathcal{V}_n = \{V_{n_y} : y \in Y\}$ bir açık örtüsü elde edilir. Bu yüzden $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, Y 'nin açık örtülerinin bir dizisidir. Böylece, Y kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) uzayı olduğundan Y 'nin sonlu alt kümelerinin bir $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $y \in Y$ için $y \in St(A_n, \mathcal{V}_n)$, sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için, f sonludan-bire (finite-to-one) tanımlanan bir dönüşüm olduğundan Y 'deki her bir noktanın ters görüntüsü X de sonlu bir kümeye denk gelecektir. O halde $(f^{-1}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi X in sonlu alt kümelerinin bir dizisidir. Her $x \in X$ için $x \in St(f^{-1}(A_n), \mathcal{U}_n)$, sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için. $x \in X$ olsun, buna göre $f(x) \in St(A_n, \mathcal{V}_n)$, sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için. $f(x) \in St(A_n, \mathcal{V}_n)$ ise $f(x) \in V_{n_y}$ ve $V_{n_y} \cap A_n \neq \emptyset$ olacak şekilde $y \in Y$ vardır. $x \in f^{-1}(V_{n_y}) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_{n_y}$ olduğundan, $x \in U$ ile birlikte $U \in \mathcal{U}_{n_y}$ seçebiliriz. Buna göre, (1) denkleminde $V_{n_y} \subseteq f(U)$ olur. Böylece $U \cap f^{-1}(A_n) \neq \emptyset$ ve sonuç olarak $x \in St(f^{-1}(A_n), \mathcal{U}_n)$ olur.

$$f(x) \in St(A_n, \mathcal{V}_n) = \bigcup \{V \in \mathcal{V}_n : A_n \cap V \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

$\Rightarrow x \in St(f^{-1}(A_n), f^{-1}(\mathcal{V}_n)) = St(f^{-1}(A_n), \mathcal{U}_n)$ ($f^{-1}(\mathcal{V}_n) = \mathcal{U}_n$) sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için, ve böylece X kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) uzayıdır.

Teorem 3.1.2.50 (Theorem 2.11, [31]) Her meta-Lindelöf strongly star-Hurewicz (SSH) uzayı Lindelöf (L) uzayıdır.

İspat $\mathcal{U}$, X 'in açık bir örtüsü olsun. X meta-Lindelöf olduğundan, $\mathcal{U}$ açık örtüsünün noktasayılabılır açık bir $\mathcal{V}$ incesi vardır. X uzayı kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) olduğundan, X 'in sonlu altkümelerinin bir $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $x \in X$ için $x \in St(A_n, \mathcal{V}) = \bigcup \{V \in \mathcal{V} : A_n \cap V \neq \emptyset\}$, sonlu tanesi hariç tüm $n \in \mathbb{N}$ için. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n = \{V \in \mathcal{V} : V \cap A_n \neq \emptyset\}$ olsun. Buna göre, $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{V}$ örtüsünün sayılabılır bir alt kümesidir. $\mathcal{W} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ olsun. Bu durumda $\mathcal{W}$, X uzayının sayılabılır, açık bir örtüsüdür. Her $V \in \mathcal{W}$ için $V \subseteq U_V$ olacak şekilde $U_V \in \mathcal{U}$ seçelim. Buna göre, $\{U_V : V \in \mathcal{W}\}$ ailesi $\mathcal{U}$ örtüsünün sayılabılır bir altörtüsü olur.

$$\mathcal{W} = St(A_n, \mathcal{V}) = \bigcup \{V \in \mathcal{V} : V \cap A_n \neq \emptyset\} = \bigcup \mathcal{V}_n$$

$$\forall V \in \mathcal{W}, U_V \in \mathcal{U} \ni V \subseteq U_V$$

olduğundan $\mathcal{H} = \{U_V : V \in \mathcal{W}\} \subset \mathcal{U}$ olur ve böylece $\mathcal{H}$, $\mathcal{U}$ 'nun sayılabılır bir altörtüsü olur.

Böylece, X 'in her $\mathcal{U}$ açıkörtüsünün sayılabılır bir $\mathcal{H}$ altörtüsü olduğundan X uzayının Lindelöf uzayı olduğu kanıtlanmış olur.

Not 4.2. 3.1.2.51 Her para-Lindelöf uzayı meta-Lindelöf olduğundan aşağıdaki sonuç bir önceki teoremden elde edilir.

Sonuç 3.1.2.52 (Corollary 2.12, [31]) Bir para-Lindelöf kuvvetli yıldız Hurewicz X uzayı Lindelöf uzayıdır.

Not 3.1.2.53 Her Lindelöf uzayı meta-Lindelöf ve para-Lindelöf olduğundan aşağıdaki sonuçlar yukarıdaki teoremden elde edilir.

Sonuç 3.1.2.54 (Corollary 2.13, [31]) X kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) uzayı olsun. Buna göre, X meta-Lindelöf $\Leftrightarrow X$ Lindelöf (L).

Sonuç 3.1.2.55 (Corollary 2.14, [31]) X kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) uzayı olsun. Buna göre, X para-Lindelöf $\Leftrightarrow X$ is Lindelöf (L).

Teorem 3.1.2.56 (Theorem 2.13, [30]) $f : X \rightarrow Y$ bir X uzayından kuvvetli yıldız Menger (SSM) bir Y uzayına tanımlanan açık, kapalı, sürekli, sonludan-bire () dönüşüm ise X uzayı da kuvvetli yıldız Menger uzayıdır (SSM).

İspat $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X 'in açık örtülerinin bir dizisi ve $y \in Y$ olsun. $f^{-1}(y)$ sonlu olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için her $U \in \mathcal{U}_{n_y}$ için $f^{-1}(y) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_{n_y}$ and $U \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$ olacak şekilde $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu $\mathcal{U}_{n_y}$ alt kolleksiyonu vardır. f kapalı olduğundan $f^{-1}(V_{n_y}) \subseteq \bigcup \{U : U \in \mathcal{U}_{n_y}\}$ olacak şekilde Y de y 'nin bir V_{n_y} açık komşuluğu vardır. f açık olduğundan

$$V_{n_y} \subseteq \bigcap \{f(U) : U \in \mathcal{U}_{n_y}\} \quad (3.1.2.6)$$

olacak şekilde varsayılabilir. Her $y \in Y$ için bu şekildeki V_{n_y} açık kümelerini alarak, her $n \in \mathbb{N}$ için Y 'nin bir $\mathcal{V}_n = \{V_{n_y} : y \in Y\}$ açık örtüsü elde edilir. Y kuvvetli yıldız Menger olduğundan $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, Y 'nin açık örtülerinin bir dizisi olur, böylece $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(K_n, \mathcal{V}_n) = Y$ olacak şekilde Y 'nin sonlu altkümelerinin bir $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır. f sonludan-bire (finite-to-one) dönüşüm olduğundan $(f^{-1}(K_n))_{n \in \mathbb{N}}$, X 'in sonlu altkümelerinin bir dizisidir. $\{St(f^{-1}(K_n), \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesinin X 'in bir açık örtüsü olduğunu göstereceğiz. $x \in X$ olsun. Buna göre, $f(x) = V_{n_y}$ ve $V_{n_y} \cap K_n \neq \emptyset$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ ve $y \in Y$ vardır. $x \in f^{-1}(V_{n_y}) \subseteq \bigcup \{U : U \in \mathcal{U}_{n_y}\}$ olduğundan $x \in U$ ile birlikte $U \in \mathcal{U}_{n_y}$ seçebiliriz. (1) den $V_{n_y} \subseteq f(U)$ ve böylece $U \cap f^{-1}(K_n) \neq \emptyset$ olur ki bu da $x \in St(f^{-1}(K_n), \mathcal{U}_n)$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak, $\{St(f^{-1}(K_n), \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi X in bir açık örtüsüdür ve bu da X uzayının kuvvetli yıldız Menger olduğunu gösterir.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında çok önemli bir topolojik özellik olan kompaktlığın daha genel formları olan örtü özellikleri çalışılmıştır. Yıldız kompaktlık ve yıldız Seçme Prensipleri Teorisi üzerine şu ana kadar yapılmış bazı temel çalışmalar incelenip derlenerek kompaktlık, yıldız kompaktlık, σ -kompaktlık, Lindelöf özelliği ile bunların kendi aralarındaki ilişkiler ve seçme prensipleriyle yıldız seçme prensipleri arasındaki ilişkiler çalışılmıştır. Menger, Rothberger, Hurewicz örtü özellikleri, yıldız-Menger, yıldız-Rothberger, yıldız-Hurewicz örtü özellikleri, kuvvetli yıldız-Menger, kuvvetli yıldız-Rothberger, kuvvetli yıldız Hurewicz örtü özellikleri ve bu özellikleri sağlayan uzayların bazı topolojik özelliklerini araştırdık. Şu ana kadar ilgili uzayların özellikle temel nitelikteki yapılmış çalışmalar üzerine yoğunlaştık ve ilgili makalelerde elde edilen ve ispatı verilmemiş bazı sonuçları veya okuyucuya bırakılan teoremleri burada ispatladık. Bu anlamda bu tez çalışması, son zamanlarda önemli bir çalışma alanı olarak karşımıza çıkan klasik ve yıldız seçme prensipleri konusuna yeni başlamak isteyenler için temel oluşturmak adına faydalı bir derleme çalışma niteliğindedir.

5. KAYNAKLAR

- [1] Babinkostova L, Kocinac LDR, Scheepers M, 2007. Combinatorics of open covers (XI): Menger and Rothberger bounded groups. *Topology and its Applications*, 154 (7): 1269-1280.
- [2] Bonanzinga M, Cammaroto F, Kocinac LDR, 2004. Star-Hurewicz and related properties. *Applied General Topology*, 5(1): 79-89.
- [3] J. Casas-de la Rosa, S.A. Garcia-Balan, and P.J. Szeptycki, Some star and strongly star selection principles, *Topology and its Applications*, in press.
- [4] Engelking R, 1989. *General Topology* (revised and completed edition), Heldermann.
- [5] Eysen AE, 2012. Topolojide seçme prensipleri. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- [6] Fleishman WM, 1970. A new extension of countable compactness. *Fundamenta Mathematicae*, 67 (1): 1-9.
- [7] Fremlin DH, Miller AW, 1988. On some properties of Hurewicz, Menger and Rothberger. *Fundamenta Mathematicae*, 129: 17-33.
- [8] Gerlits J, Nagy ZS, 1982. Some Properties of $C(X)$ I. *Topology and its Applications* 14(2): 151-161.
- [9] Hurewicz W, 1925. Über die Verallgemeinerung des Borelschen Theorems. *Mathematische Zeitschrift*, 24: 401-425
- [10] Just W, Miller AW, Scheepers M, Szeptycki P J, 1996. Combinatorics of open covers (II). *Topology and its Applications*, 73(3): 241-266.
- [11] Karaca İ, 2013. Topoloji Ders Notları. Ege Üniversitesi açık erişim ders notları. <https://www.coursehero.com/file/20088104/Topoloji/>
- [12] Kočinac LDR, 1999. Star-Menger and related spaces. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 55 (3-4): 421-431.
- [13] Kočinac LDR, 2011. On the α_i -selection principles and games, set theory and its applications. *Contemporary Mathematics*. 533: 107-124.
- [14] Kočinac LDR, Scheepers M, 2003. Combinatorics of open covers (VII): Groupability. *Fundamenta Mathematicae*, 179 (2): 131-155.
- [15] Kočinac LDR, 2004. Selected results on selection principles, In: *Proceedings of the Third Seminar on Geometry and Topology*. July 15-17, 71-104, Tabriz, Iran (Sh. Rezapour, ed.).
- [16] Kočinac LDR, 2015. Star selection principles: A survey. *Khayyam Journal of Mathematics*, 1 (1): 82-106.

- [17] Kočinac LDR, 2006. Some covering properties in topological and uniform spaces. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 252 (1): 122-137.
- [18] Kočinac LDR, 2019. Variations of classical selection principles: An overview. *Quaestiones Mathematicae*, 2019: 1-33. DOI: 10.2989/16073606.2019.1601646
- [19] Koçak M, 2015. Genel Topolojiye Giriş ve Problem Çözümleri. Pelikan Kitabevi, Ankara.
- [20] Konca Ş, 2019. Seçme Prensipleri Teorisi Ders Notları (Lecturer Notes: The Theory of Selection Principles, Lecture notes obtained as a result of collaboration, interviews, personal communications with Professor Ljubisa Kocinac during the visitation on September 12-23, 2018; December 23, 2017-January 2, 2018; August 3-12, 2017).
- [21] Matveev MV, 1998. A survey on star covering properties. *Topology Atlas*, Preprint No. 330.
- [22] Menger K, 1924. Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre, *Sitzungsberichte Abt. 2a, Mathematik, Astronomie, Physik. Meteorologie und Mechanik (Wiener Akademie, Wien)*, 133: 421-444.
- [23] Rothberger F, 1938. Eine Verschärfung der Eigenschaft C. *Fundamenta Mathematicae*, 30: 50-55.
- [24] Sakai M, 2014. Star covering versions of the Menger property. *Topology and its Applications*, 176: 22-34.
- [25] Sakai M, Scheepers M, 2014. The combinatorics of open covers, In: (K.P. Hart, J. van Mill, P. Simon (eds.)). *Recent Progress in General Topology III*, Atlantis Press, 751-800. Atlantis Press, Amsterdam/Paris, ISBN 978-94-6239-023-2.
- [26] Scheepers M, 1996. Combinatorics of open covers I: Ramsey theory. *Topology and its Applications*, 69(1): 31-62.
- [27] Scheepers M, 2001. Selection principles in Topology: New directions. *Filomat* 15: 111-126.
- [28] Scheepers M, 2003-2004. Selection principles and covering properties in Topology. *Nota di Matematica*, 22 (2): 3-41.
- [29] Sierpiński W, 1964. Elementary theory of numbers. *Monografie Matematyczne*, 42, ISBN 0 444-86662-0.
- [30] Song YK, 2013. Remarks on strongly star-Menger spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 54(1): 97–104.
- [31] Song YK, 2013. Remarks on strongly star-Hurewicz spaces. *Filomat* 27(6): 1127–1131. DOI 10.2298/FIL1306127S
- [32] Song YK, 2013. Remarks on star-Hurewicz spaces. *Bulletin of the Polish Academy of*

- Sciences. Mathematics, 61(3-4): 247-255.
- [33] Song YK, 2014. On star-K-Menger spaces. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 43(5): 769-776.
 - [34] Tsaban B, 2003/2004. Selection principles in Mathematics: a milestone of open problems. Note di Matematica, 22 (2): 179-208.
 - [35] Tsaban B, 2015. Combinatorial aspects of selective star covering properties in Ψ -spaces. Topology and its Applications, 192: 198-207.
 - [36] Tsaban B, 2006. Some new directions in infinite-combinatorial topology, In: Set Theory, J. Bagaria, S. Todorcevic (eds.), 225-255, Trends in Mathematics, Birkhauser.
 - [37] Tsaban B, 2007. Selection principles and special sets of reals, In: Open Problems in Topology II. E. Pearl (ed.), 91-108, Elsevier Science, Amsterdam.
 - [38] Van Douwen EK, Reed AW, Roscoe IJ Tree, 1991. Star Covering Properties. Topology and its Applications, 39(1): 71-103.

ÖZGEÇMİŞ

1 Aralık 1996 yılında Diyarbakır'da doğdu. İlköğretimini Nükhet ve Coşkun Akyol İlköğretim Okulu'nda, ortaöğretimini Birlik Lisesi'nde tamamladı. 2014 yılında kazandığı Muş Alparslan Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nden 2018 yılının Mayıs ayında mezun oldu. Temmuz 2018'de Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladı.

Nuran ALAR

