ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşegül DAĞDEVİREN

YÖN KORUYAN DÖNÜŞÜMLER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA - 2021

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÖN KORUYAN DÖNÜŞÜMLER

Ayşegül DAĞDEVİREN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Gonca AYIK
Yıl: 2021, Sayfa: 123
Jüri : Prof. Dr. Gonca AYIK
: Doç. Dr. Belgin ÖZER
: Doç. Dr. Leyla BUGAY

T_n, $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerindeki (tam) dönüşümler yarıgrubu olsun. OP_n ve OR_n sırasıyla X_n üzerindeki tüm yön koruyan dönüşümlerin yarıgrubu ve tüm yön değiştiren dönüşümlerin kümesi olmak üzere $P_n = OP_n \cup OR_n$ olsun.

Biz bu çalışmada OP_n regüler yarıgrubunu, OR_n kümesini ve P_n regüler yarıgrubunu inceledik. Bu incelemeler sonucunda OP_n regüler yarıgrubu ile ilgili yapılan çalışmaları derledik.

Anahtar Kelimeler: Yön koruyan dönüşüm, yön değiştiren dönüşüm, regüler yarıgrup.

ABSTRACT

MSc. THESIS

ORIENTATION PRESERVING MAPPINGS

Ayşegül DAĞDEVİREN

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Prof. Dr. Gonca AYIK
Year: 2021, Pages: 123
Jury : Prof. Dr. Gonca AYIK
: Doç. Dr. Belgin ÖZER
: Doç. Dr. Leyla BUGAY

Let T_n be the (full) transformations semigroup on the set $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Let $P_n = OP_n \cup OR_n$ where OP_n is the orientation-preserving transformations semigroup on X_n and OR_n is the set of all orientation-reversing transformations on X_n.

In this study, we investigated the regular semigroup OP_n, the set OR_n and the regular semigroup P_n. As a result of these researches, we compiled some of the studies on OP_n.

Key Words: Orientation preserving transformation, orientation reversing transformation, regular semigroup.

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

$(S, \cdot)$ bir grupoid olsun. Eğer, her $x, y, z \in S$ için

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

ise $(S, \cdot)$ ikilisine bir **yarıgrup** denir. Ayrıca, her $x \in S$ için $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$ olacak şekilde $1 \in S$ mevcut ise $(S, \cdot)$ ikilisine bir **monoid** ve $1 \in S$ ye de **birim eleman** denir.

S bir yarıgrup $\emptyset \neq T \subseteq S$ olsun. Eğer $T^2 \subseteq T$ ise T ye S nin **altyarıgrubu** denir ve $T \leq S$ şeklinde gösterilir. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $e \cdot e = e$ ise e elemanına S nin bir **idempotent elemanı** denir. S yarıgrubunun tüm idempotent elemanlarının kümesi $E(S)$ ile gösterilir. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer $a \cdot b \cdot a = a$ olacak şekilde bir $b \in S$ mevcut ise a ya S nin bir **regüler elemanı** denir. Eğer S nin tüm elemanları regüler ise S ye **regüler yarıgrup** denir. Birim eleman içeren regüler yarıgruba **regüler monoid** denir.

S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun. Eğer

$$a \cdot b \cdot a = a \text{ ve } b \cdot a \cdot b = b$$

ise b ye a nın bir **tersi** denir. Bir S yarıgrubunda $a \in S$ elemanının tüm terslerinin kümesini $V^S(a)$ ile gösterelim. Özellikle S yi belirtmek gerekmiyorsa $V^S(a)$ yı kısaca $V(a)$ olarak gösterebiliriz.

Bir zincirden sonlu bir $A = (a_1, a_2, \dots, a_t)$ dizisini alalım. Eğer $a_i > a_{i+1}$ olacak şekilde birden fazla i indisi yok ise $A = (a_1, a_2, \dots, a_t)$ dizisine bir **devir** veya **saat yönünde** denir. Eğer $a_i < a_{i+1}$ olacak şekilde birden fazla i indisi yok ise $A = (a_1, a_2, \dots, a_t)$ dizisine **anti-devir** veya **saat yönü tersinde** denir. $A =$

$(a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, a_t)$ bir dizi ise A^r ile göstereceğimiz $A^r = (a_t, a_{t-1}, \dots, a_2, a_1)$ dizisine A nın **ters dizisi (reversed sequence)** denir.

$k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ olsun. X_n üzerinde $\leq_k$ tam sıralama bağıntısını

$$k+1 \leq_k k+2 \leq_k \cdots \leq_k n \leq_k 1 \leq_k \cdots \leq_k k$$

olarak tanımlanır. Eğer $i \leq_k j$ ve $i \neq j$ ise $i <_k j$ yazarız. Kolayca görüleceği üzere

$$i \leq_k j \;\Leftrightarrow\; i - k \leq j - k$$

olur. Eğer $a_{i+1} <_k a_i$ olacak şekilde birden fazla i indisi yok ise $A = (a_1, a_2, \dots, a_t)$ dizisine $\boldsymbol{\leq_k}$ **ya göre devir** denir. Eğer $a_i <_k a_{i+1}$ olacak şekilde birden fazla i indisi yok ise $A = (a_1, a_2, \dots, a_t)$ dizisine $\boldsymbol{\leq_k}$ **ya göre anti-devir** denir.

$\alpha \in T_n$ olsun. Eger $(1\alpha, 2\alpha, \dots, \mathrm{n}\alpha)$ dizisi bir devir ise α ya X_n üstünde **yön koruyan (orientation-preserving) dönüşüm** denir. X_n üzerindeki tüm yön koruyan dönüşümlerin kümesini OP_n ile göstereceğiz. Eğer $(1\alpha, 2\alpha, \dots, \mathrm{n}\alpha)$ dizisi anti-devir ise α ya X_n üstünde **yön değiştiren (orientation-reversing) dönüşüm** denir. X_n üzerindeki tüm yön değiştiren dönüşümlerin kümesini OR_n ile göstereceğiz. $OP_n \cup OR_n$ deki tüm dönüşümlerin kümesi P_n ile gösterilir. $P_n = OP_n \cup OR_n$, T_n nin bir altyarıgrubu olur.

T herhangi bir yarıgrup olsun. $E = E(T)$, T nin idempotentlerinin kümesi olsun. T nin E yi içeren en küçük yarıgrubu $\langle E \rangle$ ile gösterilir; ve $\langle E \rangle$ ye T nin **çekirdek yarıgrubu (core)** denir. Eğer $T = \langle E \rangle$ ise T ye **yarıband** denir. S bir yarıgrup ve $e \in E(S)$ olsun. S nin e idempotentini birim eleman kabul eden maksimum altgrubuna e ye karşılık gelen maksimal altgrup denir; ve G_e ile

gösterilir. Bir $e \in E(S)$ için $w \in G_e$ ve $w^2 = e$ ise $w \in S$ elemanına **involution** denir.

Biz bu çalışma da yön koruyan veya yön değiştiren dönüşümlerle ilgili çalışmaları derledik.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimim sırasında çalışmalarımı yönlendiren ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Gonca AYIK'a, dönüşüm yarıgrupları hakkında bilgisi ve tecrübesi ile yol gösteren Prof. Dr. Hayrullah AYIK'a, Ç.Ü. Matematik Bölümü'nün tüm akademik, idari personeline ve tüm arkadaşlarıma, ayrıca hayatım boyunca beni yalnız bırakmayan, maddi ve manevi yönden desteklerini esirgemeyen anneme, babama ve ağabeylerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET III
TEŞEKKÜR VII
İÇİNDEKİLER VIII
ÇİZELGELER DİZİNİ X
ŞEKİLLER DİZİNİ XII
1. GİRİŞ 1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 3
3. TEMEL TANIM VE TEOREMLER 7
3.1. Yarıgruplar 7
3.2. Bağıntılar ve Denklikler 16
3.3. Grafik ve Fibonacci Sayıları 20
3.4. Dönüşümler Yarıgrubu 22
3.5. Doğuray Kümeleri 31
3.6. Kongrüanslar 43
3.7. Green Denklik Bağıntıları ve Regüler Yarıgruplar 47
4. YÖN KORUYAN DÖNÜŞÜMLERİN MONOİDİ 65
4.1. Devir ve Anti-devir 65
4.2. $\boldsymbol{OPn}$ Monoidi 71
4.3. $\boldsymbol{OPn}$ nin Bazı Özellikleri 84
4.4. $\boldsymbol{On}$ nin Eşlenik Altyarıgrupları 92
4.5. Yön Değiştiren Dönüşümler (Orientation Reversing Mappings) 107
5. SONUÇ 117
KAYNAKLAR 119
ÖZGEÇMİŞ 123

ÇİZELGELER DİZİNİ **SAYFA**

Çizelge 1. Bir $\mathcal{D}$ −Green Denklik Sınıfı Örneği 51
Çizelge 2. T_3 ün Green denklik sınıflarının yapısı 52

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

Şekil 2.1. $\varphi, \psi \in PT_X$ in Domain ve İmaj Kümelerinin Şekli..... 23
Şekil 2.2. Dönüşüm Yarıgruplarının Hasse Diyagramı 26
Şekil 2.3. Green Denklik Bağıntılarının Hasse Diyagramı 49

1. GİRİŞ

Grupları araştırmada büyük ölçüde sonlu gruplar ele alınsa da belirli genel teoremleri sonsuz duruma genişletme girişimleri sonucu "yarıgrup" terimi ortaya çıkmış ve ilk olarak 1904 yılında Monsieur l'Abbé J. A. Séguier'in "Éléments de la Théorie des Groupes Abstraits" adlı kitabında yer almıştır.

Diğer cebirsel teorilerde olduğu gibi yarıgrup teorisinde de yarıgrupların eleman sayısı, idempotent elemanları, doğuray (üreteç) kümeleri ve Green bağıntıları temel araştırma alanları arasında yer almaktadır.

1922 de A.K. Suschkewitsch dönüşüm grupları ile grup teorisinin temel kavramlarını ilişkilendirdi ve dönüşüm yarıgrupları ile yarıgrup teorisinin temel kavramlarını ilişkilendirmiştir. Bunlardan Cayley Teoremine paralel olarak her yarıgrubun bir dönüşüm yarıgrubuna izomorfik olmasıdır.

Çalışmalar hızla artmış ve 1950 li yılların sonunda yarıgrup teorisi Cebir ve Sayılar Teorisi anabilim dalının önemli bir alt dalı haline gelmiştir.

1987 de "Szeged International Semigroup Colloquium" da J.E. Pin sıra koruyan dönüşümler yarıgrubunun doğurduğu A yapısının etkin bir tarifini sordu. Başka bir ifade ile sonlu bir yarıgrubun A yapısına ait olup olmadığına karar verecek bir algoritmanın etkin bir tarifini sordu. Pin'in bu sorusu hala yanıtlanmamış olmasına karşın sıra koruyan dönüşümler yarıgrubunun çeşitli genişlemelerinin (yön değiştiren veya yön koruyan dönüşümlerin yarıgrubu) çalışılmasına motivasyon olmuştur.

Boş olmayan bir X kümesi üzerindeki (tam) dönüşümler yarıgrubu T_X ile gösterilir. Eğer X sonlu bir küme ise $X = X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ alınır; ve T_X yerine kısaca T_n yazılır.

Sıra koruyan dönüşümler yarıgrubu temeli üzerine inşa edilen ve T_n nin bir altyarıgrubu olan yön koruyan dönüşümler ilk olarak 1998 yılında Donald B. McAlister'ın "Semigroups Generated by a Group and an Idempotent" adlı

makalesinde ve bağımsız olarak 1999 yılında Catarino, P.M. ve Higgins, P.M.'nin "The Monoid of Orientation-Preserving Mappings on a Chain" makalesinde yer almıştır. Catarino, P.M. ve Higgins, P.M. 1999 yılında yaptıkları bu çalışmada yön koruyan dönüşümü ve yön değiştiren dönüşümü şöyle tanımlamışlardır:

Bir zincirden sonlu bir $A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_t)$ dizisini alalım. Eğer $a_i > a_{i+1}$ olacak şekilde birden fazla i indisi yok ise $A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_t)$ dizisi bir devir ve eğer $a_i < a_{i+1}$ olacak şekilde birden fazla i indisi yoksa $A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_t)$ dizisi anti-devir denir. Bir $\alpha \in T_n$ için eğer $(1\alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha)$ dizisi bir devir ise α ya X_n de yön koruyan (orientation-preserving) dönüşüm ve eğer $(1\alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha)$ dizisi bir anti-devir ise α ya X_n de yön değiştiren dönüşüm (orientation-revesing mapping) denir.

Biz de bu çalışmada yön koruyan dönüşümler yarıgrubunu ve yön değiştiren dönüşümleri araştırdık. Bu araştırmalar sonucunda yön değiştiren dönüşümler ve yön koruyan dönüşümler yarıgrubu ile ilgili yapılan çalışmaları derledik.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Donald B. McAlister (1998) tarafından monoidlerin birçok önemli sınıfları bir tek e idempotenti ile birlikte birimlerin (unit) G grubu tarafından üretilmekte olup burada G nin devir (cyclic) ve dihedral olduğu durumlar incelendi.

Vitor H. Fernandes (2000) tarafından n elemanlı bir zincirde tüm injective yön koruyan kısmi dönüşümlerin oluşturduğu $POPI_n$ monoidlerinin bazı yapısal özellikleri, bu monoidlerin kongrüansları ve idealleri incelendi. $POPI_n$ nin her $n \in \mathbb{N}$ için $2-$üreteçli bir yarıgrup olduğu gösterildi. Ayrıca bu monoidler için bir takdim verildi.

Manuel Delgado, Vitor H. Fernandes (2000) tarafından n elemanlı bir zincirde tüm injective sıra koruyan kısmi dönüşümlerin monoidi POI_n, tüm injective yön koruyan kısmi dönüşümlerin monoidi $POPI_n$ olmak üzere POI_n ve $POPI_n$ monoidlerinin abelyen çekirdekleri incelenmektedir.

Vitor H. Fernandes (2001) tarafından sonlu bir zincirde yön koruyan tam dönüşümlerin tüm yarıgrupları tarafından üretilen OP yarıgruplarının pseudovariety (bölenlerin ve sonlu direkt çarpımın altında kapalı olan sonlu yarıgrupların bir sınıfı) için bir bölme teoremi verildi ki bu X in bir alt kümesinin dönüşümlerinin bir monoidi olarak X kümesinin dönüşümlerinin belirli bir monoidinin doğal bir temsilini kullanarak elde edildi.

P.M. Catarino, P.M. Higgins (2002) tarafından bir zincirde yön koruyan tam dönüşümlerin monoidi OP_n olmak üzere tüm OP_n monoidleri tarafından üretilen OP pseudovariety yarıgrubu çalışıldı ve diğer sonuçların yanısıra OP nin self-dual olduğu ve tüm değişmeli yarıgrupları içerdiği gösterildi.

Vitor H. Fernandes, G.M.S. Gomes ve M.M. Jesus (2005) tarafından yön koruyan ve yön koruyan veya yön değiştiren kısmi dönüşümlerin monoidlerinin takdimleri incelendi.

Lei Sun, Huisheng Pei ve Zhengxing Cheng (2007) tarafından E, X_n üzerinde trivial olmayan bir denklik bağıntısı olmak üzere;

$$T_E(X_n) = \{f \in T_n\colon \forall\,(x,y) \in E, (f(x), \mathrm{f(y)}) \in E\}$$

kümesindeki tüm yön koruyan dönüşümlerin kümesi için Green bağıntıları ve elemanlarının regülerliği incelendi.

Paula Catarino, Inessa Levi (2008) tarafından X_n de G, S_n simetrik grubunun bir alt grubu, S bir yarıgrup ve G_S her $f \in S$ için $h^{-1}fh \in S$ olacak şekilde tüm h permütasyonlarının kümesi olmak üzere G_S nin D_n dihedral grubuna izomorfik olduğu gösterildi. S yarıgruplarının birçok örneklerini inşa etmek için yön koruyan dönüşümlerin belirli yarıgrupları kullanıldı.

P. Zhao, X. Bo, Y. Mei (2008) tarafından sonlu singüler yön koruyan dönüşüm yarıgruplarının locally maximal idempotent doğuraylı (üreteçli) altyarıgrupları çalışıldı.

Vitor H. Fernandes (2008) tarafından sonlu bir zincirde sıra koruyan veya sıra değiştiren (yön koruyan veya yön değiştiren) tam dönüşümlerin tüm yarıgrupları tarafından üretilen OD (OR) yarıgruplarının pseudovariety için bir bölme teoremi verildi.

V.H. Fernandes, G.M.S. Gomes ve M.M. Jesus (2009) tarafından X_n üzerinde yön değiştiren veya yön koruyan tüm kısmi ve tam dönüşümlerin monoidleri ve bunların alt monoidleri olan tüm yön koruyan kısmi ve tam dönüşümlerin kongrüansları incelendi.

Ping Zhao(2009) tarafından sonlu singüler yön koruyan dönüşüm yarıgruplarının maksimal idempotent üreteçli alt yarıgrupları tanımlandı ve sınıflandırmaları elde edildi.

V.H. Fernandes, P. Honyam, T.M.Quinterio ve B. Singha (2016) tarafından Y, X_n nin boş olmayan herhangi bir alt kümesi olmak üzere yön koruyan dönüşümlerin

$$OP_n(Y) = \{\alpha \in OP_n\colon \mathrm{im}(\alpha) \subseteq Y\}$$

alt yarıgrubu incelendi.

Ping Zhao $(2018a)$ tarafından yön koruyan dönüşüm yarıgruplarının principal çarpanlarının nilpotent rankları incelendi.

Ping Zhao $(2018b)$ tarafından tüm yön koruyan kısmi dönüşümlerin yarıgrubu POP_n olmak üzere

$$POP(n,r) = \{\alpha \in POP_n\colon |im(\alpha)| \leq r\}$$

yarıgrubunun maksimal regüler alt yarıbandları ve maksimal alt yarıgrupları incelendi.

P.M. Higgins (2019) tarafından yön koruyan veya yön değiştiren bütün dönüşümlerin yarıgrubu üzerinde bir involution eşlemenin nasıl inşa edileceğinin iki yolu gösterildi.

3. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

3.1. Yarıgruplar

Tanım 3.1.1. $S \neq \emptyset$ bir küme olsun. Herhangi $\mu: S \times S \to S$ fonksiyonuna bir **ikili işlem** denir ve (S, μ) ikilisine de bir **grupoid** denir.

(S, μ) bir grupoid olsun. Eğer μ ikili işlemi S üzerinde birleşme özelliğine sahip, yani her $x, y, z \in S$ için

$$\big((x, y)\mu, z\big)\mu = (x, (y, z)\mu)\mu$$

ise (S, μ) ikilisine bir **yarıgrup** denir. Burada dönüşüm sembollerin sağına yazılmıştır. Her $x, y \in S$ için $(x, y)\mu$ yerine $x \cdot y$ yazarsak bu durumda yukarıdaki eşitlik

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

şeklindeki elementer cebirdeki birleşme özelliği formuna dönüşmüş olur. Bu durumda (S, μ) yerine $(S, \cdot)$ yazacağız. Eğer işlemi ayrıca belirtmeye ihtiyaç yoksa $(S, \cdot)$ yerine kısaca S ve $x \cdot y$ yerinede kısaca xy yazacağız.

Tanım 3.1.2. S bir yarıgrup olsun. Eğer $e \in S$ için $e \cdot e = e$ ise e elemanına S nin bir **idempotent elemanı** denir. S yarıgrubunun tüm idempotent elemanlarının kümesi $E(S)$ ile gösterilir.

S bir yarıgrup olsun. S nin her elemanı bir idempotent ise S ye bir **band** denir. S bir yarıgrup ve her $s, t \in S$ için $s \cdot t = t \cdot s$ ise S ye **değişmeli bir yarıgrup** denir. Değişmeli bir banda bir **yarılatis** denir.

Tanım 3.1.3. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer her $s \in S$ için $e \cdot s = s$ ise e ye bir **sol birim eleman** denir. Eğer her $s \in S$ için $s \cdot e = s$ ise e ye bir **sağ birim eleman** denir. Eğer e hem sağ, hem de sol birim eleman ise e ye **birim eleman** denir ve kolayca ispatlanacağı üzere tektir. Bu teklikten dolayı birim eleman 1 ile gösterilir. Bir S yarıgrubunun birim elemanı varsa S ye bir **monoid** denir.

Tanım 3.1.4. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer her $s \in S$ için $e \cdot s = e$ oluyor ise e ye S nin bir **sol sıfır elemanı** denir. Eğer her $s \in S$ için $s \cdot e = e$ oluyor ise e ye S nin **sağ sıfır elemanı** denir. Eğer e hem sağ, hem de sol sıfır eleman ise e ye S nin **sıfır elemanı** denir ve kolayca ispatlanacağı üzere tektir. Bu teklikten dolayı sıfır eleman 0 ile gösterilir.

S sıfır (0) içeren bir yarıgrup ve $x \in S$ olsun. Eğer bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{k\ tane} = 0$$

ise x e bir **nilpotent eleman** denir. $x^k = 0$ koşulunu sağlayan en küçük k pozitif tamsayısına **nilpotentlik derecesi** denir. Ayrıca S yarıgrubunun tüm nilpotent elemanlarının kümesi $N(S)$ ile gösterilir.

Örnekler 3.1.5.

1) $(\mathbb{Z}, +)$ değişmeli bir monoiddir. (Sıfır elemanı yoktur.)

2) $(\mathbb{Z}, .)$ değişmeli ve sıfır içeren bir monoiddir.

3) $(\mathbb{Z}, \oplus)$ ($modulo\ n$ toplamı ile) değişmeli bir monoiddir. (Sıfır elemanı yoktur.)

4) $(\mathbb{Z}_n, \odot)$ ($modulo\ n$ çarpımı ile) değişmeli ve sıfır içeren bir monoiddir.

5) $X_n = \{1,2, \dots, n\}$ olsun. $C_n = (X_n, min\{x, y\})$ olarak alalım. Her $x, y, z \in X_n$ için

$$(x \cdot y) \cdot z = min\{min\{x, y\}, z\} = min\{x, y, z\},$$
$$x \cdot (y \cdot z) = min\{x, min\{y, z\}\} = min\{x, y, z\} \text{ ve}$$
$$x \cdot y = min\{x, y\} = min\{y, x\} = y \cdot x \text{ ve}$$

olduğundan C_n bir değişmeli yarıgrup olur; bu yarılatise n inci dereceden zincir denir. Ayrıca, her $x \in X_n$ için;

$$x \cdot n = min\{x, n\} = x$$

olup n, C_n yarıgrubunun birim elemanıdır. Her $x \in X_n$ için;

$$x \cdot 1 = min\{x, 1\} = 1$$

olup 1, C_n yarıgrubunun sıfır elemanıdır. Her $x \in X_n$ için

$$x \cdot x = min\{x, x\} = x$$

olup C_n nin her elemanı bir idempotent olur. Böylece C_n bir band, ve dolayısıyla, C_n bir **yarılatis** olur. Ayrıca C_n yarılatisine n inci dereceden **zincir (chain)** denir.

Tanım 3.1.6. $X_n = \{1,2, \dots, \mathrm{n}\}$ ve $P(X_n)$ de X_n nin tüm altkümelerinin kümesi olsun. Altkümelerin birleşkesi ikili işlemi ile $P(X_n)$ de bir yarılatis olur. Bu yarılatis $SL_n = (P(X_n), \cup)$ veya kısaca, SL_n ile gösterilir. SL_n nin birim elemanı $\emptyset$ (boş küme) ve sıfır elemanı X_n olur. SL_n yarılatisine ***n* inci dereceden serbest yarılatis** denir.

Tanım 3.1.7. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme olsun. X üzerinde, her $x, y \in X$ için $x \cdot y = x$ şeklinde tanımlanan ikili işlem ile X bir yarıgruptur. Bu yarıgruba **sol sıfır (left zero) yarıgrup** denir ve L_X ile gösterilir. L_X deki her eleman hem bir sol sıfır hem de bir sağ birim elemandır.

Tanım 3.1.8. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme olsun. X üzerinde, her $x, y \in X$ için $x \cdot y = y$ şeklinde tanımlanan ikili işlem ile X bir yarıgruptur. Bu yarıgruba **sağ sıfır (right zero) yarıgrup** denir ve R_X ile gösterilir. R_X deki her eleman hem bir sağ sıfır hem de bir sol birim elemandır.

Tanım 3.1.9. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve $z \in X$ olsun. X üzerinde, her $x, y \in X$ için $x \cdot y = z$ şeklinde tanımlanan ikili işlem ile X bir yarıgruptur. Bu yarıgruba **sıfır yarıgrubu** denir ve Z_X ile gösterilir.

Eğer $|X| = n$ ise L_X, R_X, Z_X yerine sırasıyla L_n, R_n, Z_n yazılır. Z_n nin sıfır elemanı 0 ile gösterilir ve $n \geq 2$ kabul edilir. $n \geq 2$ olmak üzere sol sıfır yarıgrup L_n ve sağ sıfır yarıgrup R_n göz önüne alındığında L_n de sağ birim ve sol sıfır elemanlar, R_n de sol birim ve sağ sıfır elemanlar açıkça tek değildir.

Tanım 3.1.10. S bir yarıgrup olsun.

$$S^1 = \begin{cases} S, & S \text{ bir monoid ise} \\ S \cup \{1\}, & S \text{ monoid değilse} \end{cases}$$

olarak alalım. S^1 kümesi üzerinde

$$\forall s, t \in S^1 \quad \text{için} \qquad s \cdot t = \begin{cases} s \cdot t, & s \neq 1, t \neq 1 \; ise \\ t, & s = 1 \; ise \\ s, & t = 1 \; ise \\ 1, & s = t = 1 \; ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem ile S^1 bir monoiddir. Bu monoide **"S den, gerekli ise, birim eleman eklenerek elde edilen monoid"** denir.

Tanım 3.1.11. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. O zaman

$$Sa = \{sa\colon\ s \in S\},\ aS = \{as\colon\ s \in S\} \text{ ve } SaS = \{sat\colon s, t \in S\}$$

olarak tanımlanır.

S birim elemanı olmayan bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Bu durumda $a \in Sa$ ve/veya $a \in aS$ olmayabilir. Ancak aS yerine aS^1 alırsak $aS^1 = aS \cup \{a\}$, Sa yerine S^1a alırsak $S^1a = Sa \cup \{a\}$ ve SaS yerine S^1aS^1 alırsak $S^1aS^1 = Sa \cup aS \cup SaS \cup \{a\}$ elde ederiz.

Tanım 3.1.12. S bir yarıgrup olsun. Eğer her $a \in S$ için $Sa = S$ ve $aS = S$ ise S ye bir **grup** denir.

Tanım 3.1.13. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer her bir $a \in S$ için

$$e \cdot a = a \quad \text{ve} \quad b \cdot a = e \quad (a \cdot e = a \quad \text{ve} \quad a \cdot b = e)$$

olacak şekilde $b \in S$ varsa S ye bir **grup** denir.

Aslında bu iki tanıma denk olarak şu tanımı verebiliriz:

Tanım 3.1.14. S bir yarıgrup olsun. $e \in S$ olmak üzere her bir $a \in S$ için

$$e \cdot a = a \cdot e = a \quad \text{ve} \quad b \cdot a = a \cdot b = e$$

olacak şekilde bir $b \in S$ var ise S ye bir **grup** denir.

Tanım 3.1.15. S bir monoid ve $a \in S$ olsun. Eğer $b \cdot a = 1$ olacak şekilde bir $b \in S$ var ise b ye a nın **sol tersi**, ve $a \cdot c = 1$ olacak şekilde $c \in S$ varsa c ye a nın **sağ tersi** denir. Eğer a nın hem bir sağ hem de bir sol tersi var ise a ya bir **birim (unit)** denir ve S nin tüm birimlerinin kümesi $U(S)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.16. S bir grup ve $a \in S$ olsun. O zaman

$$b \cdot a = 1 \quad \text{ve} \quad a \cdot b = 1$$

olacak şekilde $b \in S$ vardır. Bu b elemanına a nın tersi denir; ve kolayca gösterileceği üzere tektir. Bu teklikten dolayı a nın tersi a^{-1} ile gösterilir.

Örnekler 3.1.17.

1) Bir $(\mathbb{R}, +, .)$ halkasında $(\mathbb{R}, .)$ bir yarıgruptur.

2) $(\mathbb{N}, .)$ bir monoiddir.

3) $(\mathbb{N}, +)$ bir yarıgruptur.

4) $(\mathbb{N}^0, +)$ ve $(\mathbb{N}^0, .)$ birer monoiddir.

5) I ve J boştan farklı iki küme, $T = I \times J$ olsun. T üzerinde ki çarpmayı her (i, j), $(k, l) \in T$ için

$$(i, j) \cdot (k, l) = (i, l)$$

olarak tanımlayalım. T bu çarpma ile bir yarıgruptur. Ayrıca, her $(i, j) \in T$ için;

$$((\mathrm{i}, \mathrm{j}))^{\,2} = (i, j) \cdot (i, j) = (i, j)$$

olup T nin her elemanı idempotent olur. Yani T bir band olur. Fakat yarılatis değildir. Ayrıca, her $(i,j),\ (k,l) \in T$ için;

$$(i,j) \cdot (k,l) \cdot (i,j) = (i,j)$$

olduğundan T nin her elemanı regüler olur. Yani T bir regüler band olup, buna dikdörtgen band denir.

Tanım 3.1.18. S bir sıfır eleman içeren yarıgrup olsun. Eğer $G = S\backslash\{0\}$ bir grup ise S yarıgrubuna bir (0-grup) **sıfır grup veya sıfırlı grup** denir. Bu yarıgrup $S = G^0 = G \cup \{0\}$ ile gösterilir.

Sıfırlı bir yarıgrup en az iki elemanlı kabul edilir.

Tanım 3.1.19. S bir yarıgrup $\emptyset \neq T \subseteq S$ olsun.

i) $T^2 = \{tu : t,u \in T\} \subseteq T$ ise T ye S nin **alt yarıgrubu** denir ve $T \leq S$ şeklinde gösterilir.

ii) $ST = \{st : s \in S \text{ ve } t \in T\} \subseteq T$ ise T ye S nin **sol ideali** denir.

iii) $TS = \{ts : t \in T \text{ ve } s \in S\} \subseteq T$ ise T ye S nin **sağ ideali** denir.

iv) $ST \subseteq T$ ve $TS \subseteq T$ ise T ye S nin (iki-taraflı) **ideali** denir ve $T \trianglelefteq S$ şeklinde gösterilir.

Dikkat edilirse sol idealler, sağ idealler ve idealler birer alt yarıgruptur. Bir S yarıgrubunda sıfır eleman var ise $\{0\}$ kümesi S nin bir idealidir. I, S yarıgrubunun bir ideali olsun. Eğer $I \neq \{0\}$ ve $I \neq S$ ise I ya S nin bir **öz ideali** denir.

Tanım 3.1.20. S ile T iki yarıgrup ve $\phi: S \to T$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $s, t \in S$ için

$$(s \cdot t)\phi = (s\phi) \cdot (t\phi)$$

ise ϕ ye bir (**yarıgrup) homomorfizmi** denir. S ile T iki monoid ve $\phi: S \to T$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $s, t \in S$ için

$$(s \cdot t)\phi = (s\phi) \cdot (t\phi) \quad \text{ve} \quad 1_S\phi = 1_T$$

ise ϕ ye bir **monoid homomorfizmi** denir.

Tanım 3.1.21. S ile T iki yarıgrup ve $\phi: \mathrm{S} \to \mathrm{T}$ bir yarıgrup homomorfizmi olsun. Eğer

1) ϕ bire-bir ise ϕ ye bir **monomorfizm;**
2) ϕ örten ise ϕ ye bir **epimorfizm;**
3) ϕ bire-bir ve örten ise ϕ ye bir **izomorfizm;**
4) $\mathrm{S} = \mathrm{T}$ ise ϕ ye bir **endomorfizm;** ve
5) $\mathrm{S} = \mathrm{T}$ ve ϕ bire-bir ise ϕ ye bir **otomorfizm**

denir. Eğer S den T ye bir izomorfizm mevcut ise S ile T ye **izomorfik yarıgruplar** denir ve $S \cong T$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.22. S ve T iki yarıgrup olsun. Her $(x, y), (z, t) \in S \times T$ için

$$(x, y)(z, t) = (xz, yt)$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem ile $S \times T$ kartezyen çarpımı bir yarıgrup olup, bu yarıgruba S ile T nin **direkt çarpım yarıgrubu** denir.

Tanım 3.1.23. S ve T iki yarıgrup olsun. $\phi: \mathrm{S} \rightarrow \mathrm{T}$ bir homomorfizm olmak üzere

$$im\phi = \{s\phi:\ s \in S\} \quad \text{ve} \quad ker\phi = \{(x\,, y) \in S \times S:\ x\phi = y\phi\}$$

şeklinde tanımlanan kümelere sırasıyla ϕ nin **görüntü (imaj) kümesi** ve **çekirdek (kernel) kümesi** denir.

Tanım 3.1.24. Her $a, b \in S$ için $aba = a$ ise S yarıgrubuna **dikdörtgen band (rectangular band)** denir.

Teorem 3.1.25. S bir yarıgrup olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

1) S bir dikdörtgen banddır.
2) S nin her elemanı idempotenttir ve her $a, b, c \in S$ için $abc = ac$ olur.
3) $S \cong L \times R$ olacak şekilde bir sol sıfır yarıgrup L, bir sağ sıfır yarıgrup R vardır.
4) A ve B boştan farklı kümeler ve $A \times B$ üzerindeki ikili işlem

$$\forall\ (a, b), (c, d) \in A \times B \ \text{ için } \ (a, b)(c, d) = (a, d)$$

Şeklinde tanımlı ise $A \times B$ bu ikili işlem ile bir yarıgrup olup, S yarıgrubu $A \times B$ formundaki bir yarıgruba izomorfiktir.

İspat: Howie (1995), Theorem 1.1.3. e bakınız.

3.2. Bağıntılar ve Denklikler

Tanım 3.2.1. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $X \times X$ kartezyen çarpımının her alt kümesine bir **bağıntı** denir. X üzerindeki tüm bağıntıların kümesi B_X ile gösterilir.

$\emptyset \neq X$ bir küme ρ da X üzerinde bir bağıntı olsun $(\rho \subseteq X \times X)$. Eğer $(x, y) \in \rho$ ise $x\rho y$ şeklinde de yazılır. $\emptyset$ ye X üzerinde ki **boş bağıntı** denir. $X \times X$ e X üzerinde ki **evrensel bağıntı** denir.

$1_X = \Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$ kümesine **birim=eşitlik=köşegen bağıntı** denir.

B_X üzerinde her $\alpha, \beta \in B_X$ için

$$\alpha \circ \beta = \{(x\,, y) \in X \times X\colon\ \exists z \in X\ için\ (x\,, z) \in \alpha \text{ ve } (z\,, y) \in \beta\}$$

şeklinde tanımlanan (ikili işlem) bileşke işlemi ile B_X bir yarıgrup olup, bu yarıgruba **tüm bağıntılar yarıgrubu** denir.

$\sigma, \rho, \tau \in B_X$ olsun. Eğer $\rho \subseteq \sigma$ ise

$$\rho \circ \tau \subseteq \sigma \circ \tau \quad \text{ve} \quad \tau \circ \rho \subseteq \tau \circ \sigma$$

olur. Genellikle $\rho o \rho$ yerine ρ^2 yazılır. Herhangi $\alpha \in B_X$ için

$$dom(\alpha) = \{x \in X\colon\ \exists y \in X\ için\ (x\,, y) \in \alpha\} \quad \text{ve}$$
$$im(\alpha) = \{y \in X\colon\ \exists x \in X\ için\ (x\,, y) \in \alpha\}$$

şeklinde tanımlanan X in alt kümelerine sırasıyla α nın **tanım** ve **görüntü (imaj) kümesi** denir. Ayrıca $im(\alpha)$ yerine $X\alpha$ da yazılabilir. $X\alpha$ nın eleman sayısına α nın **rankı** ya da **yüksekliği** denir. Herhangi $\rho, \tau \in B_X$ için eğer $\rho \subseteq \tau$ ise

$$dom(\rho) \subseteq dom(\tau) \quad \text{ve} \quad im(\rho) \subseteq im(\tau)$$

olduğu açıktır. Eğer $\rho \in B_X$, $x \in X$ ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ ise

$$x\rho = \{y \in X: \ (x, y) \in \rho\} \text{ ve } A\rho = \bigcup_{x \in A} x\rho = \bigcup\{ x\rho : x \in A\}$$

olarak tanımlanır. Dolayısıyla, $x\rho \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul $x \in dom(\rho)$ olmasıdır.

Her $\rho \in B_X$ için

$$\rho^{-1} = \{(y, x) \in X \times X: \ (x, y) \in \rho\}$$

olarak tanımlanan $\rho^{-1} \in B_X$ bağıntısına **ρ nun ters bağıntısı** denir. Her σ, ρ, ρ_1, ... , $\rho_n \in B_X$ için

$$(\rho^{-1})^{-1} = \rho$$
$$(\rho_1 \circ \cdots \circ \rho_n)^{-1} = \rho_n{}^{-1} \circ \cdots \circ \rho_2{}^{-1} \circ \rho_1{}^{-1}$$
$$\rho \subseteq \sigma \Rightarrow \rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$$

olduğu açıkça görülür. Ayrıca dikkat edilirse

$$dom(\rho^{-1}) = im(\rho), im(\rho^{-1}) = dom(\rho)$$

olur; ve böylece $x\rho^{-1} \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul $x \in im(\rho)$ olmasıdır.

Tanım 3.2.2. $\emptyset \neq X$ bir küme ve ρ, X üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere

1) $\Delta_X \subseteq \rho$ ise ρ ya **yansımalı bağıntı** ,
2) $\rho = \rho^{-1}$ ise ρ ya **simetrik bağıntı** ,
3) $\rho \cap \rho^{-1} = \Delta_X$ ise ρ ya **ters simetrik bağıntı** ve

4) $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ ise ρ ya **geçişmeli bağıntı**

denir. Eğer ρ bağıntısı yansımalı, ters simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise ρ ya X üzerinde bir **kısmi sıralama bağıntısı** denir.

ρ bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. Her $x, y \in X$ için, $(x, y) \in \rho$ ise $x \leq_\rho y$ veya $x \leq y$ yazılır.

ρ, X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise ρ ya **tam sıralı bağıntı** denir. X üzerinde bir kısmi veya tam sıralı bağıntı varsa $(X, \leq)$ ile gösterilir.

$(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme, $Y \subseteq X$ ve $a, b \in Y$ olsun. Eğer

1) her $y \in Y$ için $y \leq a$ olduğunda $y = a$ olmak zorunda ise a ya Y nin bir **minimal elemanı** denir; ve
2) her $y \in Y$ için $b \leq y$ ise b ye Y nin **minimum elemanı** denir.

Tanım 3.2.3. $(X, \leq)$ kısmi sıralı küme olsun. Eğer X in boş olmayan her alt kümesinin bir minimal elemanı var ise $(X, \leq)$ ye **minimal koşulunu sağlıyor** denir.

Eğer X hem tam sıralı hem de minimal koşulunu sağlıyor ise X e **iyi sıralı küme** denir.

Benzer tanımlar **maksimal, maksimum** ve **maksimum koşulu** içinde yapılır.

Tanım 3.2.4. $\emptyset \neq X$ bir küme ve ρ, X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Eğer ρ yansımalı, simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise ρ ya X üzerinde bir **denklik bağıntısı** denir. ρ, X üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in X$ olmak üzere

$$x\rho = \{y \in X : (x, y) \in \rho\}$$

kümesine $\boldsymbol{x}$ **in denklik sınıfı** ve X in tüm denklik sınıflarının ailesi olan

$$X/_{\rho} = \{x\,\rho : \ x \in X\}$$

kümesine de X in ρ ile elde edilen **bölüm kümesi** denir.

$\{\rho_i : i \in I\}$, X kümesi üzerindeki denklik bağıntılarının boştan farklı bir ailesi olsun. Kolayca gösterilebileceği üzere $\bigcap\{\rho_i : \ i \in I\}$ kümesi de X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Önerme 3.2.5. $\varphi : X \to Y$ herhangi bir dönüşüm olsun. $\varphi \circ \varphi^{-1}$, X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Howie (1995), $Proposition$ 1.4.7. ye bakınız. □

Tanım 3.2.6. $\varphi \circ \varphi^{-1}$ e φ nin **çekirdeği (kernel)** denir ve $ker\varphi$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.7. $\emptyset \neq X$ bir küme, R de X üzerinde bir bağıntı olsun. $R \subseteq X \times X$ ve $X \times X$ de, X üzerinde bir denklik bağıntısı olup R yi içeren bir denklik bağıntısı vardır. O halde

$$\{\rho : \ R \subseteq \rho \text{ ve } \rho, X \text{ üzerinde bir denklik bağıntısı}\}$$

kümesi boştan farklıdır. Bu kümenin tüm elemanlarının arakesitine $\boldsymbol{R}$ **tarafından doğurulan denklik bağıntısı** denir ve R^e ile gösterilir. Yani

$$R^e = \bigcap\{\rho : \ R \subseteq \rho \text{ ve } \rho\,, X \text{ üzerinde bir denklik bağıntısı}\}$$

olur. Dikkat edilirse R^e, R yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır. Ayrıca, açıkça görüleceği üzere

1) $R = \emptyset \Rightarrow R^e = \Delta_X$,
2) R denklik bağıntısı ise $R^e = R$ ve
3) $R^e = (R^{-1})^e$ olur.

3.3. Grafik ve Fibonacci Sayıları

Tanım 3.3.1. Köşeler kümesi olarak adlandırılan boş olmayan sonlu bir küme ve kenarlar listesi olarak adlandırılan köşeler kümesinin sırasız ikililerinin oluşturduğu listeden oluşan yapıya **grafik** denir. Bir G grafiği köşeler kümesi $V(G)$ ile kenarların listesi $E(G)$ olmak üzere $G = (V(G), E(G))$ ile gösterilir.

Eğer bir kenarın iki ucunda aynı köşe ise bu kenara **halka (loop = trivial cycle = aşikar devir)** denir. u ve v köşelerini birleştiren birden fazla kenar varsa bu kenara **katlı kenar** denir. G grafiğinde halka ve katlı kenar yok ise bu grafiğe **basit grafik** denir.

Tanım 3.3.2. Köşeler kümesi olarak adlandırılan boş olmayan sonlu bir küme ve oklar (yönlendirilmiş kenarlar) listesi olarak adlandırılan köşeler kümesinin sıralı ikililerinin oluşturduğu listeden oluşan grafiğe **yönlendirilmiş grafik** veya **diyagram (directed graph, digraph)** denir. Bir G yönlü grafiği köşeler kümesi $V(G)$ ile okların listesi $A(G)$ olmak üzere $G = (V(G), A(G))$ ile gösterilir.

G bir yönlü grafik olsun. G nin oklarının yönü silindiğinde (yani sıralı ikilileri sırasız kabul edildiğinde) elde edilen grafiğe G nin **öz grafiği** denir.

İki köşeyi aynı yönde birleştiren birden fazla oka **katlı ok** denir. iki köşesi de aynı olan oka **halka (loop = trivial cycle = aşikar devir)** denir. G yönlü grafiğinde halka ve katlı ok yok ise bu grafiğe **basit yönlü grafik** denir.

Tanım 3.3.3. G bir (yönlü) grafik olsun. $v_1, v_2, \dots, v_{k+1} \subseteq V(G)$ olmak üzere $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_kv_{k+1}$ şeklindeki G nin kenarlarından (oklarından) elde edilen diziye uzunluğu k olan bir **yol** denir ve $v_1v_2 \dots v_{k+1}$ ile gösterilir. Bir yolda tüm kenarlar (oklar) birbirinden farklı ise bu yola bir **iz** denir. Tüm köşeleri farklı olan bir ize **patika** denir. uv_1, $v_1v_2, \dots, v_{k-1}v_k, v_ku$ şeklinde u dan u ya olan bir yola **kapalı yol** denir. Tüm kenarları (okları) birbirinden farklı olan bir kapalı yola bir **kapalı iz** ve ayrıca, u, v_1, $v_2, \dots, v_k$ köşeleri de bir birinden farklı ise bu kapalı ize bir **devir** denir.

Tanım 3.3.4. Bir G grafiğinde her farklı iki köşe arasında bir patika var ise G ye **bağlantılı grafik** denir. G bir yönlü grafik olsun. Eğer G nin öz grafiği bağlantılı ise G ye **bağlantılı yönlü grafik** denir. Eğer G yönlü grafiğinin her farklı iki köşesini birleştiren bir yönlü patika var ise G ye **sıkı bağlantılı yönlü grafik** denir.

Tanım 3.3.5. Bağlantılı ve devir içermeyen bir grafiğe bir **ağaç** denir. Bileşenleri ağaç olan ancak kendisi (bağlantılı olmadığı için) ağaç olmayan grafiğe **orman** (**forest**) denir.

Tanım 3.3.6. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \in \mathbb{Z}, n \geq 2)$ şeklinde tanımlanan negatif olmayan tamsayılar dizisindeki sayılara **Fibonacci sayıları** ve F_n e n-inci **Fibonacci sayısı** denir. İlk birkaçı

$$F_0 = 0, F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,\ F_7 = 13,\ F_8 = 21, \dots$$

şeklindedir.

Teorem 3.3.7. n inci Fibonacci sayısı F_n olmak üzere

i) $\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$

ii) $\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$

İspat i) $\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$ olduğunu tümevarım ile gösterelim. $n = 1$ için $F_2 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1$ olup, eşitlik sağlanır. $n \geq 1$ için eşitlik doğru olsun. O zaman $n + 1$ için

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_{2k} = \left(\sum_{k=1}^{n} F_{2k}\right) + F_{2(n+1)} = F_{2n+1} - 1 + F_{2n+1}$$
$$= F_{2n+1} + F_{2n+1} - 1 = F_{2n+3} - 1 = F_{2(n+1)+1} - 1$$

olur.

ii) $\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$ olduğunu tümevarım ile gösterelim. $n = 1$ için $F_1 + F_3 = 1 + 2 = 3 = F_{2.1+2} = F_4$ olup, eşitlik sağlanır. $n \geq 1$ için eşitlik doğru olsun. O zaman $n + 1$ için

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} F_{2k}\right) + F_{2(n+1)+1} = F_{2n+2} + F_{2n+3} = F_{2n+4} = F_{2(n+1)+2}$$

olur. □

3.4. Dönüşümler Yarıgrubu

Tanım 3.4.1. $\alpha \in B_X$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $|x\alpha| \leq 1$ ise α ya bir **kısmi dönüşüm** denir. B_X in tüm kısmi dönüşümlerinin kümesi PT_X ile gösterilir.

Önerme 3.4.2. PT_X, B_X in bir altyarıgrubudur.

İspat: Howie (1995), Proposition 1.4.2. ye bakınız. □

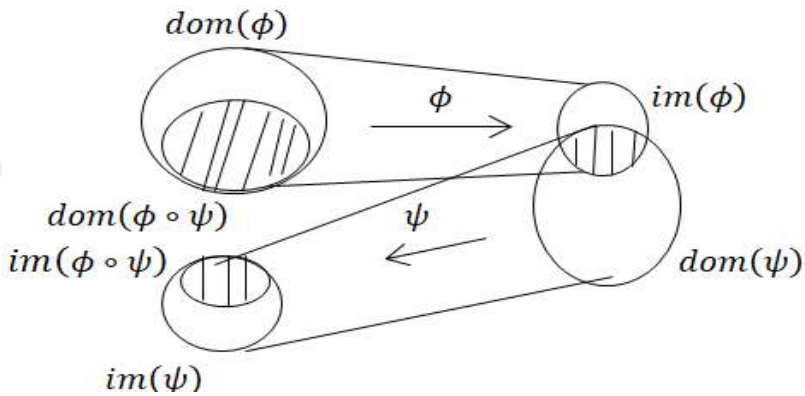
PT_X altyarıgrubuna **(tüm) kısmi dönüşümler yarıgrubu** denir.

Önerme 3.4.3. $\varphi, \psi \in PT_X$ için

i.$dom(\varphi \circ \psi) = [im\varphi \cap dom\psi]\, \varphi^{-1}$,
ii.$im(\varphi \circ \psi) = [im\varphi \cap dom\psi]\psi$,

olur.

İspat:



Şekil 2.1. $\varphi, \psi \in PT_X$ in Domain ve İmaj Kümelerinin Şekli

$i)$ $x \in dom(\varphi \circ \psi)$ olsun. O zaman $(x, y) \in \varphi \circ \psi$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Dolaysıyla $(x, z) \in \varphi$ ve $(z, y) \in \psi$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Bu durumda $z \in im\varphi$ ve $z \in dom\psi$ olup, $z \in im\varphi \cap dom\psi$ olur. Ayrıca, $(x, z) \in \varphi$ olduğundan $(z, x) \in \varphi^{-1}$ olup $x \in [im\varphi \cap dom\psi]\, \varphi^{-1}$ olur. Böylece,

$$dom(\varphi \circ \psi) \subseteq [im\varphi \cap dom\psi]\, \varphi^{-1}$$

elde edilir.

Tersine $x \in [im\varphi \cap dom\psi]\, \varphi^{-1}$ alalım. O zaman $(z,x) \in \varphi^{-1}$ olacak şekilde bir $z \in im\varphi \cap dom\psi$ vardır. Dolaysıyla, $z \in dom\psi$ olup, $(z,y) \in \psi$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Ayrıca, $(x,z) \in \varphi$ olduğundan $(x,y) \in \varphi \circ \psi$ olur. O halde $x \in dom(\varphi \circ \psi)$ olur. Böylece

$$[im\varphi \cap dom\psi]\, \varphi^{-1} \subseteq dom(\varphi \circ \psi)$$

elde edilir. Dolayısıyla $[im\varphi \cap dom\psi]\, \varphi^{-1} = dom(\varphi \circ \psi)$ olduğu görülür.

$ii)$ $x \in im(\varphi \circ \psi$ olsun. O zaman $(y,x) \in \varphi \circ \psi$ olacak şekilde $y \in X$ vardır. Dolayısıyla $(y,z) \in \varphi$ ve $(z,x) \in \psi$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. O halde $z \in im\varphi \cap dom\psi$ olup, $(z,x) \in \psi$ olduğundan $x \in [im\varphi \cap dom\psi]\psi$ olur. Böylece

$$im(\varphi \circ \psi) \subseteq [im\varphi \cap dom\psi]\psi$$

elde edilir.

Tersine $x \in [im\varphi \cap dom\psi]\psi$ olsun. O zaman $(z,x) \in \psi$ olacak şekilde bir $z \in im\varphi \cap dom\psi$ vardır. Ayrıca $z \in im\varphi$ olduğundan da $(y,z) \in \varphi$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Ayrıca, $(z,x) \in \psi$ olduğundan $(y,x) \in \varphi \circ \psi$ olur. O halde $x \in im(\varphi \circ \psi)$ olur. Böylece

$$[im\varphi \cap dom\psi]\psi \subseteq im(\varphi \circ \psi)$$

elde edilir. Dolayısıyla $im(\varphi \circ \psi) = [im\varphi \cap dom\psi]\psi$ olduğu görülür. □

Tanım 3.4.4. $\alpha \in PT_X$ için

$$ker\alpha = \{(x,y) \in X \times X : \; x,y \in dom(\alpha)\; ise\; x\alpha = y\alpha \text{ veya } x,y \notin dom(\alpha)\}$$

kümesine α nın **çekirdek kümesi** denir.

Tanım 3.4.5. $\alpha \in PT_X$ olsun. Eğer $dom(\alpha) = X$ ise α ya bir **(fonksiyon) tam dönüşüm** denir. X üzerindeki tüm dönüşümlerin kümesi T_X ile gösterilir.

Dolayısıyla $\alpha \in T_X \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $|x\alpha| = 1$ olur.

Teorem 3.4.6. T_X, PT_X in bir altyarıgrubudur. (Dolayısıyla T_X, B_X in de bir altyarıgrubudur.) □

Tanım 3.4.7. $\alpha \in T_X$ için

$$ker\alpha = \{(x, y) \in X \times X\colon\ x\alpha = y\alpha\}$$

kümesine α nın **çekirdek kümesi** denir.

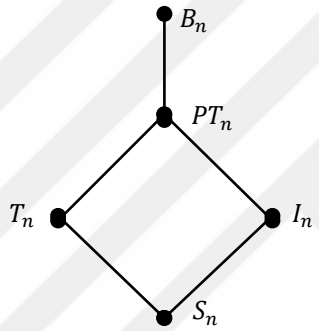
Tanım 3.4.8. $\alpha \in PT_X$ olsun. Eğer $dom(\alpha) \neq \emptyset$ ve her $x_1, x_2 \in dom(\alpha)$ için $x_1\alpha = x_2\alpha$ olduğunda $x_1 = x_2$ oluyor ise α ya bir **kısmi bire-bir dönüşüm** denir. Ayrıca boş dönüşüm (bağıntı) de bir kısmi bire-bir dönüşüm kabul edilir. Kısmi bire-bir dönüşümlerin kümesi I_X ile gösterilir. I_X dönüşümlerin bileşke işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba **kısmi bire-bir dönüşümler yarıgrubu** veya **simetrik inverse yarıgrubu** denir. Ayrıca $I_X \leq PT_X$ olduğu açıktır.

Tanım 3.4.9. $\alpha \in PT_X$ olsun. Eğer her $y \in im\alpha$ için $x\alpha = y$ olacak şekilde bir $x \in dom(\alpha)$ mevcut ise α ya bir **örten dönüşüm** denir.

Tanım 3.4.10. $\alpha \in T_X$ olsun. Eğer α hem bire-bir hem örten ise α ya X üzerinde bir **permütasyon** denir. X üzerindeki tüm permütasyonların kümesi S_X

ile gösterilir. S_X dönüşümlerin bileşke işlemi ile bir grup olup bu gruba **simetrik dönüşümler grubu (simetrik grup)** veya **simetrik permütasyonlar grubu** denir. Ayrıca $S_X \leq I_X, T_X$ olduğu görülür.

Biz çalışmamız boyunca $X = X_n = \{1,2,\dots,n\}$ sonlu kümesini ele alacağız ve B_X, PT_X, T_X, I_X, S_X yerine sırasıyla B_n, PT_n, T_n, I_n, S_n yazacağız. Böylece $S_n \subseteq I_n, T_n \subseteq PT_n \subseteq B_n$ olup aralarındaki bu ilişki aşağıdaki diyagram ile ifade edilebir. Bu diyagrama **Hasse diyagramı** denir.



Şekil 2.2. Dönüşüm Yarıgruplarının Hasse Diyagramı

Ayrıca $\alpha \in B_n$ için $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \subseteq X_n$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada bazı Y_i ler boş küme olabilir. Eğer $\alpha \in PT_n$ ise her $x \in dom(\alpha)$ için $|x\alpha| \leq 1$ olacağından $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ kümelerine ihtiyaç yoktur. Bunların yerine $x \in dom(\alpha)$ ise $x\alpha$ yazılır; ve $x \notin dom(\alpha)$ ise hiç bir şey yazılmaz. Dolayısıyla $\alpha \in T_n$ ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\alpha & 2\alpha & \dots & n\alpha \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır.

Buradan $|X_n \times X_n| = n^2$, $|B_n| = 2^{n^2}$, $|PT_n| = (n+1)^n$, $|T_n| = n^n$, $|I_n| = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2 r!$ ve $|S_n| = n!$ olduğu kolayca görülmektedir.

Tanım 3.4.11. S bir yarıgrup ve $X \neq \emptyset$ olsun. $\phi : S \to T_X$ olacak şekilde bir ϕ homomorfizmi varsa ϕ ye S nin bir **temsili** denir. $\phi: S \to T_X$ homomorfizmi bire-bir ise ϕ ye S nin **sadık (güvenilir, faithfull) temsili** denir.

Tanım 3.4.12. $\alpha \in PT_n$ olmak üzere

$$Fix(\alpha) = \{x \in dom(\alpha) \ : \ x\alpha = x\}$$
$$Shift(\alpha) = \{x \in dom(\alpha) \ : \ x\alpha \neq x\}$$

kümelerine sırasıyla α nın **sabit noktalarının kümesi** ve α nın **sabit olmayan noktalarının kümesi** denir. $Fix(\alpha)$ yerine $F(\alpha)$ da yazılabilir. $Shift(\alpha)$ kümesinin eleman sayısı $shift(\alpha)$ ile gösterilir.

Teorem 3.4.13. $\alpha, \beta \in T_n$ için

$$im(\alpha \circ \beta) \subseteq im(\beta)$$
$$ker(\alpha) \subseteq ker(\alpha \circ \beta)$$

olur.

İspat $im(\alpha \circ \beta) \subseteq im(\beta)$ olduğunu gösterelim. $y \in im(\alpha \circ \beta)$ ise $(x, y) \in \alpha \circ \beta$ olacak şekilde bir $x \in X_n$ vardır. Dolayısıyla da $(x, z) \in \alpha$ ve $(z, y) \in \beta$ olacak şekilde bir $z \in X_n$ vardır. Böylece $y \in im(\beta)$ olup, $im(\alpha \circ \beta) \subseteq im(\beta)$ olur.

$ker(\alpha) \subseteq ker(\alpha \circ \beta)$ olduğunu gösterelim. $(x, y) \in ker(\alpha)$ ise $x\alpha = y\alpha$ olup, $(x\alpha)\beta = (y\alpha)\beta$ yani $x(\alpha \circ \beta) = y(\alpha \circ \beta)$ olduğundan $(x, y) \in ker(\alpha \circ \beta)$ olur. Böylece $ker(\alpha) \subseteq ker(\alpha \circ \beta)$ olur. □

Tanım 3.4.14. $T_n \setminus S_n = ST_n = Sing_n = \{\alpha \in T_n\colon |im(\alpha)| \leq n - 1\}$ olarak alalım. ST_n nin elemanlarına **singüler dönüşümler** denir.

$S_n \leq T_n$ ancak $S_n \ntrianglelefteq T_n$ olduğu ve $ST_n \trianglelefteq T_n$ olduğu kolayca görülür.

Tanım 3.4.15. X_n kısmi sıralı bir küme ve $\alpha \in T_n$ olsun. Her $x, y \in X_n$ için $x \leq y$ olduğunda $x\alpha \leq y\alpha$ oluyor ise α ya bir **sıra koruyan dönüşüm** denir. Tüm sıra koruyan dönüşümlerin kümesini O_n ile gösterilir.

Bu çalışmada, aksi belirtilmedikçe X_n üzerindeki standart sıralama (yani $1 \leq 2 \leq \cdots \leq n$) bağıntısı göz önüne alınacaktır

Teorem 3.4.16. O_n, T_n nin bir altmonoidi olur.

İspat: $\alpha, \beta \in O_n$ olsun. Her $x, y \in X_n$ için $x \leq y$ ise $\alpha \in O_n$ olduğundan $x\alpha \leq y\alpha$ olur; ve dolayısıyla $\beta \in O_n$ olduğundan $(x\alpha)\beta \leq (y\alpha)\beta$ yani $x(\alpha\beta) \leq y(\alpha\beta)$ olur. Böylece, $\alpha\beta \in O_n$ olup O_n, T_n nin bir altyarıgrubudur. Ayrıca $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in O_n$ birim dönüşüm olduğundan O_n, T_n nin bir alt monoididir. □

Şimdi de O_n nin eleman sayısını bulalım: Hatırlayacağımız üzere

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$$

denkleminin her $i = 1, 2, \dots, r$ için $x_i \geq 0$ olacak şekilde

$$\binom{n+r-1}{r-1}=\binom{n+r-1}{n}$$

tane sıralı tamsayı çözümü vardır. Her $i=1,2,\dots,n$ için x_i sayısı $\{x : x\alpha=i\}$ kümesinin eleman sayısı olarak tanımlanır ise her $i=1,2,\dots,n$ için $x_i \geq 0$ ve $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ olur. Böylece

$$|O_n|=\binom{n+n-1}{n-1}=\binom{2n-1}{n-1}=\binom{2n-1}{n}$$

olur. Ayrıca $O_n \cap S_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{smallmatrix}\right)\right\}$ olup $|O_n \cap S_n|=1$ olur. Ayrıca her $\alpha,\beta \in O_n$ için $\alpha\beta=\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{smallmatrix}\right)$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha=\beta=\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{smallmatrix}\right)$ olduğundan $O_n\backslash\left\{\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{smallmatrix}\right)\right\}$ kümesi de bir yarıgrup olup, bazı kaynaklar O_n yarıgrubunu birim dönüşümsüz olarak tanımlar.

Tanım 3.4.17. $\alpha \in PT_n$ olsun. Eğer her $x,y \in dom(\alpha)$ için $x \leq y$ iken $x\alpha \leq y\alpha$ oluyorsa α ya bir **kısmi sıra koruyan dönüşüm** denir. Tüm kısmi sıra koruyan dönüşümlerin kümesini PO_n ile gösterelim.

Benzer şekilde PO_n nin eleman sayısını bulalım: $\alpha \in PO_n$ olsun. Eğer $|dom(\alpha)|=n$ ise $\alpha \in O_n$ olduğundan $|dom(\alpha)|=n$ olacak şekilde $\binom{2n-1}{n}$ tane kısmi sıra koruyan vardır. Eğe $1 \leq r \leq n-1$ için $|dom(\alpha)|=r$ ise $\binom{n}{r}$ farklı tanım kümesi vardır. Ayrıca, her bir tanım kümesi için

$$\binom{n+r-1}{r-1}=\binom{n+r-1}{n}$$

tane kısmi sıra koruyan dönüşüm vardır. Boş dönüşüm de sıra koruyan olduğundan

$$|PO_n| = 1 + \left(\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}\binom{n+r-1}{n}\right) + \binom{2n-1}{n} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{n+r-1}{n}$$

$$=$$

olur.

Tanım 3.4.18. $\alpha \in T_n$ olsun. Köşe kümesi X_n ve yönlü kenar listesi $\{(x, x\alpha): x \epsilon X_n\}$ olan yönlü grafiğe $\boldsymbol{\alpha}$ **nın yönlü grafiği** denir. Ayrıca α nın yönlü grafiğinin bağlantılı bileşenlerinin köşelerine $\boldsymbol{\alpha}$ **nın orbitleri** denir. Ayrıca X_n üzerinde $\equiv$ bağıntısı her $x, y \in X_n$ için

$$x \equiv y \Leftrightarrow x\alpha^q = y\alpha^r$$

olacak şekilde $q, r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ mevcut olmasıdır şeklinde tanımlanır ise $\equiv$ bağıntısı X_n üzerinde bir denklik bağıntısı olur. Bu denklik bağıntısının denklik sınıflarına da $\boldsymbol{\alpha}$ **nın orbitleri** denir. Kolayca görüleceği üzere bu iki orbit tanımı birbirine denktir.

$\emptyset \neq A \subseteq X_n$ olsun. Eğer $x, y, z \in X_n$ için $x, z \in A$ ve $x < y < z$ olduğunda $y \in A$ ise A ya bir **konveks küme** denir.

Önerme 3.4.19. $\alpha \in O_n$ olsun. α nın her bir orbiti bir tek sabit nokta içerir. Ayrıca her bir orbit konvekstir.

İspat: Higgins (1993), Proposition 1.5. e bakınız. □

3.5. Doğuray Kümeleri

Tanım 3.5.1. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ olsun. S nin A yı içeren en küçük altyarıgrubuna $\boldsymbol{A}$ **tarafından doğurulan altyarıgrup** denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir. Eğer $\langle A \rangle = S$ ise $\boldsymbol{A}$ **ya** $\boldsymbol{S}$ **nin bir doğurayı** denir.

Teorem 3.5.2. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ olsun.

i. $\langle A \rangle = \cap \{T \leq S : A \subseteq T\}$

ii. $\langle A \rangle = \{ a_1 a_2 \cdots a_n : n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } a_1, a_2, \dots, a_n \in A \}$

olur. □

Eğer $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ise $\langle A \rangle = \langle \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \rangle$ yerine $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ yazılır. Eğer $A = \{a\}$ ise $\langle A \rangle = \langle \{a\} \rangle$ yerine $\langle a \rangle$ yazılır. Bu durumda $\langle a \rangle$ ya **tek doğuraylı (monogenic) alt yarıgrup** denir.

Tanım 3.5.3. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun.

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots\} = \{a^k : k \in \mathbb{Z}^+\}$$

kümesi sonsuz sayıda farklı eleman içeriyor (diğer bir ifade ile $a^k = a^l \Rightarrow k = l$) ise $\langle a \rangle$ ya **sonsuz monogenic yarıgrup** denir. Aksi halde $\{a, a^2, \dots\}$ kümesi sonlu olur. Gerçekten $a^k = a^l$ olacak şekilde farklı iki pozitif tamsayı mevcut ise

$$A = \{ k \in \mathbb{N} : a^k = a^l \text{ ve } k \neq l \in \mathbb{N} \}$$

kümesi boş olmayıp minimum elemanı mevcuttur. $\min(A) = m$ ise

$$B = \{ k \in \mathbb{N} : a^{m+k} = a^m \ (k \in \mathbb{N}) \}$$

kümesi de boş olmayıp minimum elemanı mevcuttur. $\min(B) = r$ ise

$$\langle a \rangle = \{ a, a^2, a^3, \dots, a^{m-1}, a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1} \}$$

olur. Bu durumda m ye a nın **indeksi** ve r ye de a nın **periyodu** denir. Ayrıca bu monogenic yarıgrup $M_{m,r}(a)$ ile gösterilir, yani

$$\langle a \rangle = M_{m,r}(a) = \{ a, a^2, a^3, \dots, a^{m-1}, a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1} \}$$

olup, $m + r - 1$ elemanlı ve $a^{m+r} = a^m$ olur.

Teorem 3.5.4. S bir yarıgrup $a \in S$ ve a nın indeksi m, periyodu r olsun. $k, l \in \{0,1,2, \dots, r-1\}$ elemanları

$$m + k \equiv 0 \ \ (mod\, r) \quad \text{ve} \quad m + l \equiv 1 \ \ (mod\, r)$$

olacak şekilde seçilirse

$$K_a = \{a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1}\}$$

kümesi birim elemanı a^{m+k} olan ve a^{m+l} tarafından doğurulan bir devirli gruptur. □

Tanım 3.5.5. S bir yarıgrup olsun. Her $a \in S$ için $\langle a \rangle$ monogenic yarıgrubu sonlu ise S ye **periyodik yarıgrup** denir. Her sonlu yarıgrup periyodiktir.

Tanım 3.5.6. $\langle A \rangle = S$ olacak şekilde S yarıgrubunun bir sonlu A alt kümesi mevcut ise S ye **sonlu doğuraylı yarıgrup** denir. Eğer S sonlu doğuraylı yarıgrup ise

$$rank(S) = min\{\, |A| : \langle A \rangle = S \text{ ve } A \subseteq S \text{ sonlu}\}$$

sayısına S nin **rankı** denir. Eğer S idempotentlerden oluşan sonlu bir küme tarafından doğruluyor ise S nin **idempotent rankı**

$$idrank(S) = min\{\, |A| : \langle A \rangle = S \text{ ve } A \subseteq E(S) \text{ sonlu }\}$$

olarak tanımlanır. Eğer S nilpotentlerden oluşan sonlu bir küme tarafından doğruluyor ise S nin **nilpotent rankı**

$$nilrank(S) = min\{\, |A| : \langle A \rangle = S \text{ ve } A \subseteq N(S) \text{ sonlu }\}$$

olarak tanımlanır.

Bu tanımlamalardan açıkça görüleceği üzere $rank(S) \leq idrank(S)$ ve $rank(S) \leq nilrank(S)$ olur.

Tanım 3.5.7. $\alpha \epsilon S_n$ ve $a_1, a_2, \dots, a_r \epsilon X_n$ farklı elemanlar olmak üzere her $i = 1, 2, \dots, r-1$ için $a_i\, \alpha = a_{i+1}$, $a_r\, \alpha = a_1$ ve her $x \epsilon X_n \backslash \{\, a_1, a_2, \dots, a_r \,\}$ için $x\alpha = x$ ise α ya bir r**-devir** denir; ve $\alpha = (a_1 a_2 \cdots a_r)$ yazılır. Bir 2-devire $(a_1 a_2)$ bir **transpozisyon** denir.

Tanım 3.5.8. $k, l \in \mathbb{Z}^+$ için eğer $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ve $\{b_1, b_2, \dots, b_l\}$ iki ayrık küme ise $(a_1 a_2 \cdots a_k)$ ve $(b_1 b_2 \cdots b_l)$ devirlerine **ayrık devir** denir.

Permütasyon grubu S_n (n ≥ 2) ayrık devirlerin çarpımı olarak yazılabilir. Her devir transpozisyonların çarpımı olduğundan S_n, transpozisyonlarının oluşturduğu küme tarafından doğrulur. $(a_1 a_2) = (a_2 a_1)$ olduğundan S_n de $\frac{n(n-1)}{2}$ tane transpozisyon vardır. Şimdi $\alpha = (12)$ ve $\beta = (12 \dots n)$ olarak alalım. O zaman

$$\beta^{-1} = \beta^{n-1}, \quad \beta^{-1} \circ \alpha \circ \beta = (23)$$

ve daha genel olarak her $= 1, 2, \dots, n-1$ için

$$\beta^{-i+1} \circ \alpha \circ \beta^{i-1} = (i\ i+1)$$

olur. Ayrıca, her $j = 2, 3, \dots, n-1$ için

$$(j\ j+1) \circ (j-1\ j) \circ \cdots \circ (23) \circ (12) \circ (23) \circ \cdots \circ (j\ j+1) = (1\ j+1)$$

olur. Yani $(12), (23), \dots, (n-1\ n)$ transpozisyonları ile $(12), (13), \dots, (1n)$ transpozisyonları α ve β permütasyonlarının çarpımı olarak yazılabilir. Son olarak; her $1 \leq i < j \leq n$ için

$$(1\ j) \circ (1\ i) \circ (1\ j) = (i\ j)$$

olur. Böylece her transpozisyon α ve β permütasyonlarının çarpımı olarak yazılabilir. Dolayısıyla her $n \geq 2$ için

$$S_n = \langle \alpha, \beta \rangle = \langle (12), (13), \dots, (1n) \rangle = \langle (12), (23), \dots, (n-1\ n) \rangle$$

olur. Ayrıca, $n \geq 3$ için S_n değişmeli olmadığından devirli olamaz. Böylece aşağıdaki sonuca sahibiz.

Sonuç 3.5.9. $n \geq 3$ için $rank\ (S_n) = 2$ olur.

Teorem 3.5.10. $n \geq 3$ için $rank\ (T_n) = 3$ olur.

İspat: Her farklı $i, j \in X_n$ için $i\delta_{i,j} = j$ ve her $i \neq x \in X_n$ için $x\delta_{i,j} = x$ olarak tanımlanan $\delta_{i,j}$ dönüşümleri $\|ij\|$ ile gösterelim. Ayrıca, $\delta = \delta_{1,2} = \|12\| \in T_n$ $\alpha = (12)$ ve $\beta = (12 \dots n)$ olarak alalım. O zaman

$$
\begin{aligned}
&(1\ i) \circ \|12\| \circ (1\ i) = \|i2\| && (i \geq 3)\\
&(2\ j) \circ \|12\| \circ (2\ j) = \|1j\| && (j \geq 3)\\
&(1\ i) \circ (2\ j) \circ \|12\| \circ (2\ j) \circ (1\ i) = \|ij\| && (i, j \geq 3, i \neq j)\\
&(i\ j) \circ \|ij\| \circ (i\ j) = \|ji\| && (i, j \geq 1, i \neq j)
\end{aligned}
$$

olur. Şimdi kabul edelim ki $\phi \in T_n$ ve $|im(\phi)| = r \leq n - 1$ olsun. O zaman $i\phi = j\phi$ olacak şekilde $i \neq j$ ve $k \in \{1,2, \dots, n\} \setminus im(\phi)$ vardır. Eğer $\hat{\phi}$ dönüşümünü $i\hat{\phi} = k$ ve her $l \neq i$ için $l\hat{\phi} = l\phi$ olarak tanımlanır ise

$$\left|im(\hat{\phi})\right| = r + 1 \text{ ve } \|ij\|\hat{\phi} = \phi$$

olur. Eğer $\hat{\phi} \in S_n$ ise açıkça $\hat{\phi} \in \langle \alpha, \beta, \delta \rangle$ olur. Aksi halde benzer şekilde devam edilir. Böylece $T_n = \langle \alpha, \beta, \delta \rangle$ olur. Ayrıca $T_n \backslash S_n$ yani singüler dönüşümler yarıgrubu T_n in ideali olduğundan T_n in her doğuray kümesi S_n in bir doğuray kümesini içermek zorundadır. Bununla birlikte S_n in herhangi bir doğuray kümesi singüler dönüşümleri doğuramayacağından en az bir singüler dönüşüm doğuray kümesinde olmalıdır. Böylece $rank\ (S_n) = 2$ olduğundan $rank\ (T_n) \geq 3$ olup, $T_n = \langle \alpha, \beta, \delta \rangle$ olduğundan ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.5.11 $n \geq 3$ için $T_n = \langle \alpha, \beta, \delta \rangle$ olur.

J. M. Howie, 1978 deki çalışmasıyla singüler dönüşümler yarıgrubunun idempotent rankının $\frac{n(n-1)}{2}$ ve 1987 de Gomes ile birlikte yaptığı çalışmada singüler dönüşümler yarıgrubunun rankının idempotent rankına eşit olduğunu göstermiştir.

Tanım 3.5.12. $Z(\alpha) = X_n \setminus im(\alpha)$ olsun. $|Z(\alpha)|$ sayısına α nın **noksanlığı (defecti)** denir.

Teorem 3.5.13. $n \geq 2$ için T_n nin noksanlığı sıfır olmayan idempotentler tarafından üretilen alt yarıgrubu $ST_n = T_n \setminus S_n$ olur. Diğer bir ifade ile $ST_n = \langle E(ST_n) \rangle$ olur. Ayrıca, ST_n nin her elemanı noksanlığı 1 olan idempotentlerin bir çarpımı olarak yazılabilir.

İspat $n \geq 2$ için aşikar. $n \geq 3$ olduğunu varsayalım. Noksanlığı 1 olan herhangi bir α elemanını ele alalım. Eğer $shift(\alpha) = 1$ ise α zaten noksanlığı 1 olan bir idempotent olup ispat biter. Genelliği bozmaksızın

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} \quad (r \geq 2)$$

ve her $1 \leq i \leq r$ için $a_i \neq i$ olacak şekilde alalım. Ayrıca, $Z(\alpha) = \{z\}$ olsun. O halde 4 farklı durum vardır:

(i) $1 \leq i \leq r$ için $a_i \in \{1,2,\dots,r\}$, $a_1 = a_2 \notin \{1,2\}$, $z \notin \{1,2\}$;

(ii) $1 \leq i \leq r$ için $a_i \in \{1,2,\dots,r\}$, $a_1 = a_2 \notin \{1,2\}$, $z = 1$;

(iii) $a_r = r+1$, $z \in \{1,2,\dots,r-1\}$;

(iv) $a_r = r+1$, $z = r$.

(i) durumunda; eğer

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ a_1 & 2 & a_3 & \dots & a_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} \text{ ve } \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

alınır ise ε noksanlığı 1 olan idempotent, β noksanlığı 1 ve $shift(\beta) = r - 1$ olan dönüşüm ve $\alpha = \varepsilon\beta$ elde edilir.

(ii) durumunda; eğer

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & 1 & a_3 & \dots & a_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} \text{ ve } \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

alınır ise ε noksanlığı 1 olan idempotent, β noksanlığı 1 ve $shift(\beta) = r - 1$ olan dönüşüm ve $\alpha = \beta\varepsilon$ elde edilir.

(iii) durumunda; eğer

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r-1 & r & \dots & n \\ a_1 & \dots & a_{r-1} & r & \dots & n \end{pmatrix} \text{ ve } \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & r-1 & r+1 & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

alınır ise ε noksanlığı 1 olan idempotent, β noksanlığı 1 ve $shift(\beta) = r - 1$ olan dönüşüm ve $\alpha = \beta\varepsilon$ elde edilir.

(iv) durumunda eğer

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & \dots & n \\ r & a_2 & \dots & a_{r-1} & r & \dots & n \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & r-1 & r+1 & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & r-1 & a_1 & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

alınır ise ε ve η noksanlığı 1 olan idempotentler, β noksanlığı 1 ve $shift(\beta) = r - 1$ olan dönüşüm ve $\alpha = \varepsilon\beta\eta$ elde edilir.

Eğer $r - 1 = 1$ ise β da noksanlığı 1 olan idempotent olup, ispat tamamlanır. Aksi halde benzer işlemler β için yapılır; her seferinde $shift(\alpha)$ bir azalacağından α, noksanlığı 1 olan idempotentlerin çarpımı olarak yazılır. □

Teorem 3.5.14. O_n yarıgrubunun her elemanı O_n deki idempotentlerin bir çarpımı olarak ifade edilebilir. Yani $O_n = \langle E(O_n) \rangle$ olur.

İspat $Z(\alpha)$ kümesi Tanım 3.5.12. de tanımlandığı gibi olsun. O_n nin noksanlığı sıfır olan tek elemanı birim eleman ve birim eleman da bir idempotent olduğundan noksanlığı sıfırdan farklı olan elemanları inceleyeceğiz. O halde bu teoremin ispatı için

1) O_n nin noksanlığı 1 den büyük olan bir elemanı, noksanlığı 1 olan idempotentlerin ve noksanlığı 1 olan bir tek elemanın çarpımı olarak ifade edilebilir
2) O_n nin noksanlığı 1 olan bir elemanı, noksanlığı 1 olan idempotentlerin bir çarpımı olarak ifade edilebilir olduğunu göstermemiz yeterlidir.

1) $\alpha \in O_n$ ve $def(\alpha) = k > 1$ olsun.

$\mathcal{P}(\alpha) = \{y \in X_n\alpha : \ |y\alpha^{-1}| \geq 2\}$ ve $d_\alpha = min\{|z - p|: \ z \in \mathrm{Z}(\alpha), \ \mathrm{p} \in \mathcal{P}(\alpha)\}$ alalım. α bire-bir olmadığından $\mathcal{P}(\alpha) \neq \emptyset$ ve $Z(\alpha) \cap \mathcal{P}(\alpha) = \emptyset$ olur; ve dolayısıyla $d_\alpha \geq 1$ olur. d_α üzerine tümevarım uygulayalım.

Eğer $d_\alpha = 1$ ise genelliği kaybetmeksizin $p + 1 \in Z(\alpha)$ ve $p \in \mathcal{P}(\alpha)$ varsayabiliriz.

$$q = max\{x \in X_n: \ x\alpha = p\}$$

olsun. $p\alpha^{-1}$, birden fazla eleman içerdiğinden dolayı $q'\alpha = p$ olacak şekilde $q' \leq q - 1$ vardır. Bu durumda $p = q'\alpha \leq (q-1)\alpha \leq q\alpha = p$ olduğundan $(q-1)\alpha = p$ olur. O zaman $\varepsilon: X_n \to X_n$ dönüşümü

$$q\varepsilon = q - 1 \quad \text{ve} \quad x\varepsilon = x \quad (x \neq q)$$

olarak tanımlansın. Bu dönüşüm O_n de defecti 1 olan bir idempotent olur. Ayrıca, $\beta: X_n \to X_n$ dönüşümü de

$$q\beta = p + 1 \quad \text{ve} \quad x\beta = x\alpha \quad (x \neq q)$$

olarak tanımlansın. O halde $\beta \in O_n$, $|Z(\beta)| = |\mathrm{Z}(\alpha)| - 1 = k - 1$ ve $\alpha = \varepsilon\,\beta$ olur..

Eğer $d_\alpha > 1$ ise genelliği kaybetmeksizin

$$z + 1, \dots, z + d_\alpha - 1 \in X_n\alpha \setminus \mathcal{P}(\alpha) \quad \text{ve} \quad z + d_\alpha \in \mathcal{P}(\alpha)$$

olacak şekilde $z \in \mathrm{Z}(\alpha)$ olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda $(z + 1)\alpha^{-1} = t$ ve $(t + 1)\alpha = z + 2$ olur. Eğer $\gamma: X_n \to X_n$ dönüşümü

$$t\gamma = z \quad \text{ve} \quad x\gamma = x\alpha \quad (x \neq t)$$

olarak tanımlanırsa $\gamma \in O_n$ ve $|Z(\gamma)| = |\mathrm{Z}(\alpha)| = k$ olur. Ayrıca

$$(z + 1) \in Z(\gamma) \quad \text{ve} \quad z + d_\alpha \in \mathcal{P}(\gamma),$$

ve dolayısıyla $d_\gamma = d_\alpha - 1$ olur. Ayrıca $\eta: X_n \to X_n$ dönüşümü de

$$z\eta = z + 1 \quad \text{ve} \quad x\eta = x \quad (x \neq z)$$

olarak tanımlansın. Bu dönüşüm O_n de noksanlığı 1 olan bir idempotent olup $\gamma\eta = \alpha$ olur.

Tümevarım hipotezinden $\gamma = \varepsilon_1\beta\varepsilon_2 \dots \varepsilon_s$ olacak şekilde noksanlığı $k-1$ olan β ve O_n de noksanlığı 1 olan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s$ idempotentlerinin var olduğunu varsayarsak $\alpha = \varepsilon_1\beta\varepsilon_2 \dots \varepsilon_s\eta$ olur.

$\beta \in O_n$ ve eğer $def(\beta) = k-1 > 1$ ise yukarıdaki gibi noksanlığı 1 olan idempotentlerin ve noksanlığı $k-2$ olan δ nın çarpımı şeklinde yazarız. Bu şekilde devam edilirse $\alpha \in O_n$ ve $def(\alpha) = k > 1$ elemanı noksanlığı 1 olan idempotentlerin ve noksanlığı 1 olan bir tek elemanın çarpımı olarak ifade edilebilir.

2) $\alpha \in O_n$ için $S(\alpha) = \{x \in X_n\colon\ x\alpha \neq x\}$ kümesinin eleman sayısını s_α ile gösteririz. $s_\alpha = 1$ ise α defecti 1 olan bir idempotenttir. Bunu görmek için $S(\alpha) = \{u\}$ alalım. O halde $u\alpha \neq u$ olup $u\alpha^2 = u\alpha$ olur. Eğer $x \neq u$ ise $x\alpha = x\alpha^2 = x$ olur. Böylece α idempotentir ve α nın görüntü kümesi X_n nin u hariç tüm elemanlarını içerdiğinden noksanlığı 1 olur.

α nın noksanlığı 1 ve $s_\alpha > 1$ olsun. O halde $u\alpha = (u+1)\alpha$ olacak şekilde bir tek $u \in X_n$ vardır. (α sıra koruyan olduğu için X_n nin ardışık iki elemanının görüntüsü aynı olur.) Ayrıca $\mathrm{Z}(\alpha) = \{v\}$ olduğunu varsayalım.

$u < v$ ise

$$x\alpha = x \quad (x \leq u),\ \ x\alpha = x-1 \quad (u+1 \leq x \leq v) \ \text{ ve } \ x\alpha = x \quad (x \geq v+1)$$

olur. Şimdi $\varepsilon_1\colon X_n \to X_n$ ve $\beta\colon X_n \to X_n$ dönüşümleri sırası ile

$$(u+1)\varepsilon_1 = u \quad \text{ve} \quad x\varepsilon_1 = x \quad (x \neq u+1)$$
$$(u+1)\beta = u+1 \quad \text{ve} \quad x\beta = x\alpha \quad (x \neq u+1)$$

olarak tanımlanır ise ε_1 ve β nın her ikisi de O_n de ve noksanlığı 1 olur. Ayrıca ε_1 bir idempotent, $s_\beta = s_\alpha - 1$ ve $\alpha = \varepsilon_1\beta$ olur.

$u \geq v$ ise

$$x\alpha = x \quad (x < v), \quad x\alpha = x + 1 \quad (v \leq x \leq u) \text{ ve } x\alpha = x \quad (x \geq u + 1)$$

olur. Şimdi de $\varepsilon_1 : X_n \to X_n$ ve $\beta : X_n \to X_n$ dönüşümleri sırası ile

$$u\varepsilon_1 = u + 1 \quad \text{ve} \quad x\varepsilon_1 = x \quad (x \neq u)$$
$$u\beta = u \quad \text{ve} \quad x\beta = x\alpha \quad (x \neq u)$$

olarak tanımlanır ise ε_1 ve β nın her ikisi de O_n de ve noksanlığı 1 olur. Ayrıca ε_1 bir idempotent, $s_\beta = s_\alpha - 1$ ve $\alpha = \varepsilon_1\beta$ olur.

Böylece $\alpha \in O_n$ noksanlığı 1 ve $s_\alpha > 1$ ise $\alpha = \varepsilon_1\beta$ ve $s_\beta = s_\alpha - 1$ olacak şekilde O_n de noksanlığı 1 olan bir β elemanı ve O_n de noksanlığı 1 olan bir ε_1 idempotenti vardır. $\beta \in O_n$ noksanlığı 1 ve $s_\beta > 1$ ise yukarıdaki gibi $\beta = \varepsilon_2\eta$ ve $s_\eta = s_\beta - 1$ olacak şekilde O_n de noksanlığı 1 olan ε_2 idempotenti ve O_n de noksanlığı 1 olan bir η elemanı vardır. Bu şekilde devam edilirse $\alpha \in O_n$ noksanlığı 1 ve $s_\alpha > 1$ olan elemanı

$$\alpha = \varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_r\varepsilon \quad \text{ve} \quad s_\varepsilon = 1$$

olacak şekilde O_n de noksanlığı 1 olan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$ idempotentleri ve O_n de noksanlığı 1 olan ε elemanı vardır. Ayrıca $s_\varepsilon = 1$ olup, ε idempotent olur.

Böylece O_n nin noksanlığı 1 olan bir elemanı noksanlığı 1 olan idempotentlerin bir çarpımı olarak yazılabilir. □

Teorem 3.5.15. $n \geq 2$ ve $\mathcal{O}_n = \{\alpha \in Sing_n : (\forall x, y \in X_n) x \leq y \Rightarrow x\alpha \leq y\alpha\}$ olsun. O halde $rank(\mathcal{O}_n) = n$ olur.

İspat: Gomes and Howie (1992), Theorem 2.7. ye bakınız. □

Teorem 3.5.16. $n \geq 2$ ve $\mathcal{O}_n = \{\alpha \in Sing_n\colon (\forall x, y \in X_n)\ x \leq y \Rightarrow x\alpha \leq y\alpha\}$ olsun. O halde $idrank(\mathcal{O}_n) = 2n - 2$ dir.

İspat: Gomes and Howie (1992), Theorem 2.8. e bakınız. □

Teorem 3.5.17. $n \geq 3$ için $\alpha = (1\ 2)$, $\beta = (1\ 2 \cdots n)$ ve $\delta = \|12\|$ daha önce tanımlandığı gibi; ve ayrıca, $\xi = \binom{2\ 3 \ldots n}{2\ 3 \ldots n} \in PT_n$ $(dom(\xi) = \{2, \ldots, n\}$ ve her $x \in dom(\xi)$ için $\xi x = x$) olsun. $PT_n = \langle \alpha, \beta, \delta, \xi \rangle$ olur.

İspat $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ nin her bir öz alt kümesi Y için $X_n \backslash Y$ kümesi üzerinde tanımlı birim dönüşümünü $1_{X_n \backslash Y}$ yerine ξ_Y ile gösterelim. Böylece $\xi = \xi_{\{1\}}$ olur. Bu durumda her $= 2, 3, \ldots, n$ için

$$(1i)\xi(1i) = \xi_{\{i\}}$$

ve ayrıca, her boş olmayan öz alt kümesi Y için

$$\xi_Y = \prod_{i \in Y} \xi_{\{i\}}$$

olur. Her bir $\alpha \in PT_n$ için $\hat{\alpha}$ tam dönüşümü

$$x\hat{\alpha} = \begin{cases} x\alpha, & \text{eğer } x \in dom(\alpha) \\ x, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda eğer $X_n \setminus dom(\alpha) = Y$ alınır ise $\alpha = \xi_Y \hat{\alpha}$ olur. Dolayısıyla $T_n = \langle \alpha, \beta, \delta \rangle$ olduğundan $PT_n = \langle \alpha, \beta, \delta, \xi \rangle$ olur.

Sonuç 3.5.18. $n \geq 3$ $rank\ (PT_n) = 4$ olur.

İspat $PT_n \backslash T_n$ mutlak kısmi dönüşümler yarıgrubu PT_n in bir ideali olduğundan PT_n in her doğuray kümesi T_n in bir doğuray kümesini içermek zorundadır. Ayrıca, T_n in herhangi bir doğuray kümesi mutlak kısmi dönüşümleri doğuramayacağından en az bir mutlak kısmi dönüşüm doğuray kümesinde olmalıdır. Böylece $rank\ (T_n) = 3$ olduğundan $rank\ (PT_n) \geq 4$ olup, $PT_n = \langle \alpha, \beta, \delta, \xi \rangle$ olduğundan ispat tamamlanır. □

3.6. Kongrüanslar

Tanım 3.6.1. S bir yarıgrup R de S üzerinde bir bağıntı (yani $R \subseteq S \times S$) olsun. Eğer her $a \in S$ ve her $(s,t) \in R$ için;

1) $(as, at) \in R$ ise R ye **sol uyumlu (left compatible) bağıntı**,
2) $(sa, ta) \in R$ ise R ye **sağ uyumlu (right compatible) bağıntı** ve
3) $\forall (s,t), (u,v) \in R$ için $(su, tv) \in R$ ise R ye **uyumlu (compatible)** bağıntı

denir.

S bir yarıgrup olsun. S üzerinde sol (sağ) uyumlu bir R denklik bağıntısına **sol (sağ) kongrüans** denir. S üzerinde uyumlu (compatible) bir denklik bağıntısına **kongrüans** denir.

Yani $R \subseteq S \times S$ bir denklik bağıntısı ve R, $S \times S$ nin bir alt yarıgrubu ise R ye bir **kongrüans** denir.

Önerme 3.6.2. S bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde bir bağıntısı olsun.

ρ bir kongrüanstır $\Leftrightarrow$ ρ hem sağ hem de sol kongrüanstır.

İspat: Howie (1995), Proposition 1.5.1. e bakınız. □

Tanım 3.6.3. S bir yarıgrup olsun. $S \times S$ ve Δ_S bağıntıları S üzerinde birer kongrüans olup bu kongrüanslara S nin **aşikar (trivial) kongrüansları** denir. Eğer S yarıgrubunun aşikar olmayan kongrüansı yok ise S ye **kongrüans serbest (free) yarıgrup** denir.

Açıkça görüleceği üzere $|S| = 2$ ise S bir kongrüans serbest yarıgruptur.

S bir yarıgrup ρ da S üzerinde bir kongrüans olsun. Kolayca gösterilebilir ki her $a\rho, b\rho \in S/\rho$ için

$$(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile S/ρ (ρ denklik sınıflarının kümesi) bir yarıgruptur. S/ρ yarıgrubuna **bölüm yarıgrubu** denir.

Teorem 3.6.4. S bir yarıgrup ρ da S üzerinde bir kongrüans olsun.

$$\rho^{\#}: S \to S/\rho$$
$$a \to a\rho$$

şeklinde tanımlanan $\rho^{\#}$ örten bir homomorfizm olur. □

İspat: Howie (1995), Theorem 1.5.2. ye bakınız. □

Teorem 3.6.5. S ve T iki yarıgrup, $\phi: S \to T$ bir yarıgrup homomorfizmi olsun.

$$ker\phi = \phi \circ \phi^{-1} = \{(a\,, b) \in \mathrm{S} \times \mathrm{S}:\ a\phi = b\phi\}$$

kümesi S üzerinde bir kongrüanstır.

İspat: Daha önce $ker\phi$ nin bir denklik bağıntısı olduğunu gösterdik. $ker\phi$ nin uyumlu olduğunu göstermeliyiz. Her $(a,b),(c,d) \in ker\phi$ için $a\phi = b\phi$ ve $c\phi = d\phi$ olduğundan

$$(ac)\phi = (a\phi)(c\phi) = (b\phi)(d\phi) = (bd)\phi$$

olup $(ac, bd) \in ker\phi$ olur. Böylece $ker\phi$ uyumlu olup, bir kongrüans olur.□

Tanım 3.6.6. S bir yarıgrup ve R de S üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. S nin R yi içeren en küçük kongrüansına R tarafından doğurulan kongrüans denir ve $R^{\#}$ ile gösterilir.

Bu durumda

$$R^{\#} = \bigcap\{\rho\colon\ R \subseteq \rho \text{ ve } \rho,\ S \text{ üzerinde kongrüanstır}\}$$

olur. Ayrıca

$$R^{C} = \{(xay\,, xby)\colon\ (a\,, b) \in R \text{ ve } x, y \in S^{1}\}$$

olarak tanımlayalım.

Önerme 3.6.7. R^{C}, R yi içeren en küçük sağ ve sol uyumlu (compatible) bağıntıdır.

İspat: Howie (1995), Lemma 1.5.7. ye bakınız. □

Önerme 3.6.8. R ve Q bir S yarıgrubu üzereinde iki bağıntı olsun. O halde

1) $R \subseteq Q \Rightarrow R^C \subseteq Q^C$,
2) $(R^{-1})^C = (R^C)^{-1}$ ve
3) $(R \cup Q)^C = R^C \cup Q^C$

olur.

İspat: Howie (1995), Lemma 1.5.6. ya bakınız. □

Önerme 3.6.9. R sağ ve sol uyumlu ise $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için R^n de sağ ve sol uyumludur.

İspat: Howie (1995), Lemma 1.5.7. ye bakınız. □

Teorem 3.6.10. S bir yarıgrup ve R de S üzerinde bir bağıntı olsun.

$$R^{\#} = (R^C)^e$$

olur.

İspat: Howie (1995), Proposition 1.5.8. e bakınız. □

Tanım 3.6.11. S bir yarıgrup I da S nin bir ideali olsun. S üzerinde tanımlanan

$$\rho_I = (I \times I) \cup 1_S$$

bağıntısı bir kongrüans olup, bu kongrüansa **Rees kongrüansı** denir.

3.7. Green Denklik Bağıntıları ve Regüler Yarıgruplar

S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. O zaman S nin a yı içeren en küçük sol/sağ ve iki yanlı idealleri sırasıyla

$$S^1a = Sa \cup \{a\} = \{xa\colon\ x \in S^1\}$$
$$aS^1 = aS \cup \{a\} = \{ax\colon\ x \in S^1\}$$
$$S^1aS^1 = SaS \cup aS \cup Sa \cup \{a\} = \{xay\colon\ x, y \in S^1\}$$

olur.

Tanım 3.7.1. S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun.

$$a\mathcal{L}b \Leftrightarrow S^1a = S^1b$$
$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow aS^1 = bS^1$$
$$a\mathcal{J}b \Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$ bağıntılarına sırasıyla **sol Green (*L* −Green), sağ Green (*R* −Green)** ve ***J* −Green bağıntıları** denir.

Bunlar birer denklik bağıntısıdır.

Önerme 3.7.2. S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun.

1) $a\mathcal{L}b \Leftrightarrow a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
2) $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a = bx$ ve $b = ay$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
3) $a\mathcal{J}b \Leftrightarrow a = xby$ ve $b = uav$ olacak şekilde $x, y, u, v \in S^1$ vardır.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.1. e bakınız. □

Önerme 3.7.3. $\mathcal{L}$ bir sağ kongrüans ve $\mathcal{R}$ bir sol kongrüans olur.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.2. e bakınız. □

Önerme 3.7.4. $\mathcal{L}$ ile $\mathcal{R}$ değişmelidir. Yani $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ olur.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.3. e bakınız. □

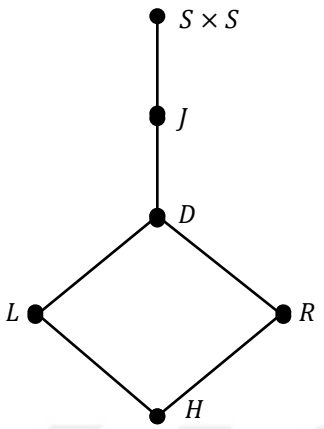
Tanım 3.7.5. S bir yarıgrup $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ de S üzerinde sol ve sağ Green bağıntıları olsun. $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ olarak tanımlanan denklik bağıntısına $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ **−Green denklik bağıntısı** denir. $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ yi içeren en küçük denklik bağıntısına da $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ **−Green denklik bağıntısı** denir; ve $\mathcal{D} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$ ile gösterilir.

O halde

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D} = (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^e &= \cup_{n \in \mathbb{Z}^+}[(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^{-1} \cup 1_S]^n = \cup_{n \in \mathbb{Z}^+}(\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^n \\
&= (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup [(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \circ (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})] \cup [(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \circ (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \circ (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})] \cup \dots \\
&= (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup [(\mathcal{L} \circ \mathcal{L}) \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{R} \circ \mathcal{L}) \cup (\mathcal{R} \circ \mathcal{R})] \cup (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^3 \cup \dots \\
&= (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup [\mathcal{L} \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup \mathcal{R}] \cup (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^3 \cup \dots \\
&= (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup [(\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^2 \circ (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})] \dots \\
&= (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \dots \\
&\vdots \\
&= \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Bir S yarıgrubu üzerindeki $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}, \mathcal{H}$ ve $\mathcal{D}$ −Green denklik bağıntıları için $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{J} \subseteq S \times S$ olup, aralarındaki bu ilişki hasse diyagramı ile ifade edilebilir.



Şekil 2.3. Green Denklik Bağıntılarının Hasse Diyagramı

Örnek 3.7.6.

1) S bir grup ise $\mathcal{H} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{J} = S \times S$
2) S bir değişmeli yarıgrup ise $\mathcal{H} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{J}$ olur.

Önerme 3.7.7. S bir periyodik yarıgrup ise $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ olur.

İspat: Howie (1995),Proposition 2.1.4. e bakınız. □

Teorem 3.7.8. S, T_n ve PT_n yarıgruplarından herhangi biri ve $\alpha, \beta \in S$ olsun. O halde

(i) $\alpha \mathcal{R} \beta$ ancak ve ancak $ker(\alpha) = ker(\beta)$

(ii) $\alpha \mathcal{L} \beta$ ancak ve ancak $im(\alpha) = im(\beta)$

(iii) $\alpha \mathcal{H} \beta$ ancak ve ancak $im(\alpha) = im(\beta)$ ve $ker(\alpha) = ker(\beta)$

(iv) $\alpha \mathcal{D} \beta$ ancak ve ancak $|im(\alpha)| = |im(\beta)|$

olur.

İspat Ganyushkin, Mazorchuk (2009),Theorem 4.5.1. e bakınız. □

Tanım 3.7.9. $m \geq n$ olmak üzere m farklı nesneyi n tane özdeş kutuya kutular boş kalmayacak şekilde dağıtmanın sayısına (**İkinci Tip**) **Stirling Sayısı** denir ve $S(m,n)$ ile gösterilir.

O halde

$$S(m,n) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

olur. Ayrıca, $S(m,1) = S(m,m) = 1$ ve $1 < n \leq m$ olmak üzere

$$S(m+1,n) = S(m,n-1) + nS(m,n)$$

indirgeme bağıntısı sağlanır.

Önerme 3.7.10. T_n yarıgrubunda

i. $2^n - 1$ tane $\mathcal{L}$ −Green denklik sınıfı
ii. $\sum_{r=1}^{n} S(n,r)$ tane $\mathcal{R}$ −Green denklik sınıfı
iii. $1 \leq r \leq n$ için $D_r = \{\alpha \in \mathrm{T_n} : |im(\alpha)| = r\}$ olacak şekilde n tane $\mathcal{D}$ −Green denklik sınıfı vardır.

İspat: Ganyushkin, Mazorchuk (2009), Proposition 4.6.1. e bakınız.□

Önerme 3.7.11. $1 \leq r \leq n$ olmak üzere T_n yarıgrubundaki D_r sınıfı

i. $\binom{n}{r}$ tane $\mathcal{L}$ −Green denklik sınıfı
ii. $S(n,r)$ tane $\mathcal{R}$ −Green denklik sınıfı

iii. $\binom{n}{r} S(n,r)$ tane $\mathcal{H}$ −Green denklik sınıfı içerir.

İspat Ganyushkin, Mazorchuk (2009),Proposition 4.6.3, Proposition 4.6.4. ve Proposition 4.6.5. e bakınız. □

S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. a yı içeren $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}$ ve $\mathcal{D}$ −Green denklik sınıflarını L_a, R_a, J_a H_a ve D_a ile göstereceğiz.

Denklik sınıfları ayrık olduğundan $\mathcal{D}$ −Green denklik sınıfı ayrık $\mathcal{R}$ −Green denklik sınıflarının (ve $\mathcal{L}$ −Green denklik sınıflarının) birleşimidir. $a\mathcal{D}b$ olsun. O halde $(a,b) \in D = L \circ R$ olup, $(a,c) \in L$ ve $(c,b) \in R$ olacak şekilde $c \in S$ vardır. $c \in L_a$ ve $c \in R_b$ olup $c \in L_a \cap R_b$ dir. O halde $L_a \cap R_b \neq \emptyset$ olur. $a \in \mathcal{D}$ olmak üzere H_a Green denklik sınıfını alalım. O zaman

$$\begin{aligned} b \in H_a \Leftrightarrow (a,b) \in H = L \cap R &\Leftrightarrow (a,b) \in L \text{ ve } (a,b) \in R \\ &\Leftrightarrow b \in L_a \text{ ve } b \in R_a \\ &\Leftrightarrow b \in L_a \cap R_a \end{aligned}$$

olduğundan $H_a = L_a \cap R_a$ olur. Böylece bir $\mathcal{D}$ −Green denklik sınıfı bir yumurta kutusu (eggbox) şeklindedir. Her bir satır $\mathcal{R}$ −Green denklik sınıfını, her bir sütun $\mathcal{L}$-Green denklik sınıfını ve her bir hücre $\mathcal{H}$ −Green denklik sınıfını gösterir.

Çizelge 1. Bir $\mathcal{D}$ −Green Denklik Sınıfı Örneği

D_a	L_a				
R_a		H_a			

Örnek 3.7.12. T_3 ün Green denklik sınıflarının yapısı aşağıdadır.

Çizelge 2. T_3 ün Green denklik sınıflarının yapısı

D_3	$L_{1,2,3}$
$R_{1,2,3}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$

D_2	$L_{1,2}$	$L_{1,3}$	$L_{2,3}$
$R_{1,23}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{pmatrix}$
$R_{13,2}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&3\end{pmatrix}$
$R_{12,3}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}$

D_1	L_1	L_2	L_3
R_{123}	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\end{pmatrix}$

Teorem (Green Teoremi) 3.7.13. S bir yarıgrup $a, b \in S$ olsun.

- $(a, b) \in R$ ise $as = b$ ve $bt = a$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ vardır.

$$\rho_s : L_a \to L_b \qquad \rho_t : L_b \to L_a$$
$$x \to xs \qquad y \to yt$$

şeklinde tanımlanan bire-bir ve örten olan ρ_s ve ρ_t fonksiyonları birbirlerinin tersidir. Ayrıca her ikiside bir H −sınıfını yine bir H −sınıfına götürür.

- $(a,b) \in L$ ise $sa = b$ ve $tb = a$ olacak şekilde $s,t \in S^1$ vardır.

$$\begin{aligned} \lambda_s : R_a &\to R_b \\ x &\to sx \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \lambda_t : R_b &\to R_a \\ y &\to ty \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan bire-bir ve örten olan λ_s ve λ_t fonksiyonları birbirlerinin tersidir. Ayrıca her ikisi de bir H −sınıfını yine bir H −sınıfına götürür.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.1. ve Lemma 2.2.2. ye bakınız. □

Sonuç 3.7.14.

i. S bir yarıgrup ve a,b elemanları aynı $\mathcal{D}$ −Green denklik sınıfı D nin elemanları olsun. O zaman $|L_a| = |L_b|$ ve $|R_a| = |R_b|$ olur.

ii. $L,R \subseteq D$ ve $|D| < \infty$ ise $|L|$ ve $|R|$ sayıları $|D|$ sayısını böler. □

Sonuç 3.7.15. S bir yarıgrup ve a,b elemanları aynı $\mathcal{D}$ −Green denklik sınıfının elemanları ise $|H_a| = |H_b|$ olur.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.3. e bakınız. □

Teorem 3.7.16. H bir S yarıgrubunun $\mathcal{H}$ −sınıfı ise ya $H^2 \cap H = \emptyset$ ya da $H^2 = H$ ve H, S nin bir altgrubu olur.

İspat: Howie (1995), Theorem 2.2.5. e bakınız. □

Sonuç 3.7.17. Eğer e, S nin bir idempotenti ise H_e, S nin bir altgrubudur. Dolayısıyla bir $\mathcal{H}$ −sınıfında birden fazla idempotent bulunmaz. □

Tanım 3.7.18. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer $aba = a$ olacak şekilde bir $b \in S$ varsa a ya S nin bir **regüler elemanı** denir. Eğer S nin her elemanı regüler ise S ye **regüler yarıgrup** denir.

Örnek 3.7.19.

- Bandlar ve dolayısıyla yarılatisler regüler yarıgruptur.
- Her dikdörtgen band bir regüler yarıgruptur.
- Gruplar regüler yarıgruplardır
- PT_n ve T_n dönüşüm yarıgrupları regüler yarıgruptur.

Teorem 3.7.20. O_n bir regüler yarıgruptur.

İspat Herhangi bir $\alpha \in O_n$ alalım. Eğer $im(\alpha) = Y = \{y_1 < \cdots < y_r\}$ ise her $i = 1, \dots, r$ için $y_i\alpha^{-1} = A_i$ ve $\min(A_i) = x_i$ olsun. her $y \in Y$ için $x\alpha = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X_n$ vardır. Her bir $y \in Y$ için $x_y\alpha = y$ olacak şekilde en küçük $x_y \in X_n$ alalım. Yani $x_y\alpha = y$ ve $x\alpha = y$ ise $x_y \leq x$ olsun. O zaman her $x \in X_n$ için

$$x\beta = \begin{cases} 1 = x_1 & 1 \leq \mathrm{x} \leq y_2 - 1 \\ x_i & y_i \leq \mathrm{x} \leq y_{i+1} \quad \text{her } \mathrm{i} = 2, \dots, \mathrm{r} - 1 \\ x_r & y_r \leq \mathrm{x} \leq n \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\beta: X_n \to X_n$ dönüşümünü sıra-koruyan olur. Her $i = 1, \dots, r$ için

$$A_i(\alpha\beta\alpha) = (A_i\alpha)\beta\alpha = (y_i\beta)\alpha = x_i\alpha = y_i = A_i\alpha$$

olup, $\alpha\beta\alpha = \alpha$ olur. O halde $\alpha \in O_n$ elemanı regülerdir. Dolayısıyla O_n bir regüler yarıgruptur. □

Tanım 3.7.21. S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun. Eğer

$$aba = a, \ bab = b$$

ise b ye $\boldsymbol{a}$ **nın tersi** denir. Bir S yarıgrubunda $a \in S$ elemanının tüm terslerinin kümesini $V^S(a)$ ile gösterelim. Özellikle S yi belirtmek gerekmiyor ise $V^S(a)$ yı $V(a)$ olarak kısaca yazabiliriz.

Bir $a \in S$ elemanının birden fazla tersi olabilir. Örneğin dikdörtgen bandlarda her hangi bir eleman tersi diğer tüm elemanlar olur. Yani S bir dikdörtgen band ve $a \in S$ ise $V(a) = S$ olur.

Teorem 3.7.22. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. a nın bir tersi olması için gerek ve yeter koşul a nın regüler olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) Aşikar.

($\Leftarrow$) $a \in S$ regüler olsun. O halde $axa = a$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. O zaman $b = xax$ alınır ise

$$bab = (x\underbrace{ax)a}_{a}(xax) = x\underbrace{axa}_{a}x = xax = b$$

ve

$$aba = \underbrace{a(xa}_{a}x)a = axa = a$$

olup b, a nın tersi olur. □

S bir yarıgrup, $a \in S$ bir regüler eleman ve $b \in L_a$ olsun. O zaman $axa = a$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Ayrıca, $ua = b$ ve $vb = a$ olacak şekilde $u, v \in S^1$ vardır. Dolayısıyla

$$b = ua = u(axa) = (ua)xa = bxa = bx(vb) = b(xv)b$$

olup b regülerdir. Böylece, a regüler ise L_a nın her elemanı regülerdir. Benzer şekilde a regüler ise R_a nın her elemanı regülerdir. Böylece aşağıdaki önermeye sahibiz.

Önerme 3.7.23. S bir yarıgrup ve $a \in S$ bir regüler eleman ise D_a nın tüm elemanları regülerdir.

İspat: $a \in S$ regüler ve $b \in D_a$ olsun. O zaman $(a, b) \in D = L \circ R$ olup, $(a, c) \in L$ ve $(c, b) \in R$ olacak şekilde $c \in S$ vardır. Bu durumda $c \in L_a$ olduğundan c regüler; ve $b \in R_c$ olduğundan b de regüler olur. □

Dolayısıyla bir $\mathcal{D}$ −sınıfı D nin ya tüm elemanları regülerdir ya da hiçbir elemanı regüler değildir. Tüm elemanları regüler ise D −sınıfına **regüler**, aksi taktirde **irregüler** denir.

Sonuç 3.7.24. $e \in S$ bir idempotent ise $eee = e$ olacağından e regüler olur. Böylece bir D −sınıfı bir idempotent içeriyor ise D −sınıfı regüler olur. Ayrıca, her regüler D −sınıfı en az bir idempotent içerir.□

Aşağıdaki önerme bunu ve daha fazlasını ifade etmektedir.

Önerme 3.7.25. Bir regüler $D-$sınıfında her $\mathcal{L}-$sınıfı ve $\mathcal{R}-$sınıfı bir idempotent içerir.

İspat: a bir regüler $D-$sınıfının elemanı olsun. a regüler olacağından $axa = a$ olacak şekilde S yarıgrubunda bir x elemanı vardır. Böylece

1) xa idempotent ve $xa\mathcal{L}a$
2) ax idempotent ve $ax\mathcal{R}a$

olur. Gerçekten;

1) $axa = a$ ve $xa = xa$ olduğundan $(a, xa) \in L$ olup $xa \in L_a$ dır. $(xa)^2 = (xa)(xa) = x(axa) = xa$ olup xa idempotenttir
2) Benzer şekilde ispat edilir.□

Önerme 3.7.26. Eğer e bir idempotent ise e, R_e için bir sol ve L_e için bir sağ birim eleman olur.

İspat: Eğer $a \in R_e$ ise $ex = a$ olacak şekilde $x \in S^1$ vardır. Dolayısıyla,

$$ea = e(ex) = (ee)x = ex = a$$

olup e, R_e nin sol birimidir. Eğer $b \in L_e$ ise $ye = b$ olacak şekilde $y \in S^1$ vardır. Benzer şekilde $be = (ye)e = y(ee) = ye = b$ olup e, L_e nin sağ birimidir. □

$\mathcal{D}$ −sınıflarının yumurta kutusu resmi ters elemanın yerini belirlemek için faydalı olacaktır. Dikkat edilirse a bir regüler $\mathcal{D}$ −sınıfı D nin bir elemanı ise a nın her a' tersi D nin içindedir ve $a\mathcal{R}aa'$ ve $aa'\mathcal{L}a'$ olur.

Teorem 3.7.27. a bir S yarıgrubunda regüler $\mathcal{D}$ −sınıfı D nin bir elemanı olsun.

1) Eğer $a' \in V(a)$ ise $a' \in D$ ve iki $\mathcal{H}$ −sınıfı $H_1 = R_a \cap L_{a'}$ ve $H_2 = L_a \cap R_{a'}$ sırasıyla aa' ve $a'a$ idempotentlerini içerir.

2) Eğer $R_a \cap L_b$ ve $L_a \cap R_b$ sırasıyla e ve f idempotentlerini içerecek şekilde $b \in D$ ise H_b,

$$aa^* = e, \quad a^*a = f$$

olacak şekilde a nın a^* tersini içerir.

3) $\mathcal{H}$ −sınıfı a nın birden fazla tersini içermez.

İspat 1) a regüler olup a nın tersi mevcut olup, $V(a) \neq \emptyset$ olur. $a' \in V(a)$ olsun.

	L_a		$L_{a'}$	
R_a	a		aa'	
$R_{a'}$	$a'a$		a'	

O zaman $aa'a = a$ ve $a'aa' = a'$ olup, $(aa')(aa') = (aa'a)a' = aa'$ ve $(a'a)(a'a) = (a'aa')a = a'a$ olduğundan aa' ve $a'a$, D de iki idempotent olur. Ayrıca $(aa')a = a$ ve $(a)a' = aa'$ olduğundan $(a, aa') \in R$, yani $aa' \in R_a$ ve $a'(aa') = a'$ ve $a(a') = aa'$ olduğundan $(aa', a') \in L$, yani $aa' \in L_{a'}$

olur. Böylece $(a, aa') \in R$ ve $(aa', a') \in L$ olduğundan $(a, a') \in D$, yani $a' \in D_a$ olur.

Ayrıca $aa' \in H_1 = R_a \cap L_{a'}$ ($H_1 = R_a \cap L_{a'}$ bir grup) ve benzer şekilde $a'a \in H_2 = L_a \cap R_{a'}$ ($H_2 = L_a \cap R_{a'}$ bir grup) olur.

2)

	L_a		L_b	
R_a	a		e	
R_b	f		a^*, b	

$e \in R_a \cap L_b$, $f \in L_a \cap R_b$ olsun. $a^* \in V(a)$ olduğunu gösterelim. $a\mathcal{R}e$ olup e idempotenti R_e için sol birim (Önerme 3.7.26.) olacağından $ea = a$ olur. Benzer şekilde $a\mathcal{L}f$ olup, f idempotenti L_f için sağ birim (Önerme 3.7.26.) olacağından $af = a$ olur. $a\mathcal{R}e$ olduğundan $ax = e$ ve $a\mathcal{L}f$ olduğundan $ya = f$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır. Şimdi $a^* = fxe$ alalım. O zaman

$$aa^*a = a(fxe)a = (af)x(ea) = axa = ea = a$$
$$a^*aa^* = (fx\underbrace{e)a}_{a}(fxe) = fx\underbrace{(af)}_{a}xe = fx\underbrace{(ax)}_{e}e = fxe = a^*$$

olup $a^* \in V(a)$ olur. Ayrıca,

$$aa^* = a(fxe) = axe = e^2 = e$$
$$a^*a = (fxe)a = fxa = yaxa = yea = ya = f$$

olduğundan $a^* \in L_e$ ve $a^* \in R_f$ olur. O halde $a^* \in L_e \cap R_f$ olur. Ayrıca $e \in R_a \cap L_b$ ise $e \in L_b$ ve $f \in L_a \cap R_b$ ise $f \in R_b$ olup, $a^* \in L_e \cap R_f = L_b \cap R_b = H_b$ olur.

3) Kabul edelim ki $\mathcal{H}$ −sınıfı H_b de a nın a^*, a' gibi iki tersi bulunsun. aa' ve aa^*, $\mathcal{H}$ −sınıfı $R_a \cap L_b$ de idempotent olduğunu (2) den dolayı biliyoruz. Böylece bir $\mathcal{H}$ −sınıfı birden fazla idempotent içermeyeceğinden (Sonuç 3.7.17.) $aa' = aa^*$ olur. Benzer şekilde $a'a = a^*a$ olur. Dolayısıyla, arzu edildiği gibi

$$a^* = a^*aa^* = a^*aa' = a'aa' = a'$$

olur. □

Sonuç 3.7.28. Böylece bu teorem bize regüler bir $\mathcal{D}$ −sınıfında bir a elemanının tersini $\mathcal{L}$ deki bir idempotenti ve $\mathcal{R}$ deki bir idempotenti kullanarak inşa edebileceğimizi gösteriyor ($a^* = fxe$). O halde bir sonlu yarıgrupta

$$|V(a)| = |E(L_a)||E(R_a)|$$

olur.□

Önerme 3.7.29. e ve f bir S yarıgrubunda idempotent olsunlar. O zaman $(e, f) \in \mathcal{D}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$aa' = e, \quad a'a = f$$

olacak şekilde bir $a \in S$ ve a nın tersi a' elemanının mevcut olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $(e,f) \in \mathcal{D}$ olsun. Yani e ve f aynı regüler $\mathcal{D}-$sınıfı D ye aittir. (Çünkü e ve f idempotent olduğundan D regülerdir.)

	L_f		L_e	
R_e	a		e	
R_f	f		a'	

$a \in R_e \cap L_f$ alalım. O zaman Teorem 3.7.27. (2) den dolayı $aa' = e$ ve $a'a = f$ olacak şekilde $L_e \cap R_f$ de a nın bir a' tersi mevcuttur.

($\Leftarrow$) $aa' = e,\ a'a = f$ olacak şekilde bir $a \in S$ ve a nın bir a' tersi mevcut olsun. Teorem 3.7.27. (1) den dolayı $e\mathcal{R}a,\ a\mathcal{L}f$ olup $e\mathcal{D}f$ olur. □

Önerme 3.7.30. Eğer H ve K aynı (regüler) $\mathcal{D}-$sınıfında iki grup olan $\mathcal{H}-$sınıfları ise H ve K izomorfiktir.

İspat: H_e ve H_f gruplarının birimleri sırasıyla e ve f olmak üzere $H = H_e$, $K = H_f$ olduğunu kabul edelim.

	L_e		L_f	
R_e	e		a	
R_f	a'		f	

$a \in R_e \cap L_f$ ($(e,f) \in \mathcal{D}$ olduğundan $R_e \cap L_f \neq \emptyset$) alalım. Teorem 3.7.27. den dolayı $L_e \cap R_f$ de a nın bir tersi a' vardır ve

$$aa' = e,\ a'a = f,\ ea = af = a,\ a'e = fa' = a'$$

olur. Green teoreminden dolayı $\rho_a|H_e: H_e \to H_a$ ve $\lambda_{a'}|H_a: H_a \to H_f$ dönüşümleri birebir ve örten olur. $\phi = \rho_a\lambda_{a'}: H_e \to H_f$ dönüşümü her $x \in H_e$ için

$$x\phi = a'xa$$

olarak tanımlanırsa ϕ de bire-bir ve örten olur. ϕ nin tersi $\phi^{-1}: H_f \to H_e$ dönüşümü her $y \in H_f$ için

$$y\phi^{-1} = aya' \ \left(\forall y \in H_f\right)$$

olarak tanımlanır. Her $x_1, x_2 \in H_e$ için

$$(x_1\phi)(x_2\phi) = (\underbrace{a'\,x_1\,\underbrace{a)(a'}_{e}\,x_2\ a}_{x_1x_2}) = a'(x_1x_2)a = (x_1x_2)\phi$$

olup ϕ bir homomorfizm olur. Böylece $H = H_e \cong H_f = K$ olur. □

Önerme 3.7.31. a ve b bir $\mathcal{D}$ −sınıfı D nin elemanları olsunlar. $ab \in R_a \cap L_b$ olması için gerek ve yeter koşul $L_a \cap R_b$ nin bir idempotent elemana sahip olmasıdır.

İspat (⇒) $ab \in R_a \cap L_b$ olsun. O zaman $ab \in R_a$ olup $abc = a$ olacak şekilde $c \in S^1$ vardır. Teorem 3.7.13. den bire-bir ve örten $\rho_c: H_b \to L_a \cap R_b$ dönüşümü

her $x \in H_b$ için $x\rho_c = xc$ olarak tanımlıdır. Böylece $b \in H_b$ olup $b\rho_c = bc \in L_a \cap R_b$ olur. Her $y \in L_a \cap R_b$ için $y\rho_b = yb$ olarak tanımlı $\rho_b: L_a \cap R_b \to H_b$ dönüşümü de bire-bir ve örten olup ρ_c nin tersidir. Dolayısıyla

	L_a		L_b	
R_a	a		ab	
R_b	$\exists e$		b	

$$(bc)^2 = bcbc = \big((b\rho_c)\rho_b\big)\rho_c = b\rho_c = bc$$

olup bc, $L_a \cap R_b$ nin bir idempotent elemanıdır.

($\Leftarrow$) Tersine $L_a \cap R_b$ bir e idempotentine sahip olsun. $e \in L_a \cap R_b$ olduğundan $e \in L_a$ ve $e \in R_b$ olur. Dolayısıyla e, L_a nın sağ birimi ve e, R_b nin sol birim elemanı olur. Her $x \in H_a$ için $x\rho_a = xb$ olarak tanımlanan $\rho_a: H_a \to R_a \cap L_b$ dönüşümü bire-bir ve örten olup $(a)\rho_a = ab \in R_a \cap L_b$ olur. □

Sonuç 3.7.32. H, S nin bir $\mathcal{H}$ −sınıfı olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir :

i) H bir idempotent içerir;

ii) her $a, b \in H$ için $ab \in H$ olur;

iii) H, S nin bir maksimal alt grubudur.

İspat: Higgins (1992),Corollary 1.2.6. ya bakınız.□

4. YÖN KORUYAN DÖNÜŞÜMLERİN MONOİDİ

4.1. Devir ve Anti-devir

Tanım 4.1.1. Bir zincirden sonlu bir $A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_t)$ dizisini alalım. Eğer $a_i > a_{i+1}$ olacak şekilde birden fazla i indisi yoksa bu $A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_t)$ dizisine bir **devir** veya **saat yönünde** denir. Eğer $a_i < a_{i+1}$ olacak şekilde birden fazla i indisi yoksa $A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_t)$ dizisine **anti-devir** veya **saat yönü tersinde** denir.

Örneğin;

$(1, 1 \underset{\nearrow}{,} 2 \underset{\nearrow}{,} 5 \underset{\searrow}{,} 1, 1, 1)$ dizisi bir devirdir.

$(1, 1, 1 \underset{\nearrow}{,} 5 \underset{\searrow}{,} 2 \underset{\searrow}{,} 1, 1)$ dizisi bir anti-devirdir.

$(1, 1, 1 \underset{\nearrow}{,} 5 \underset{\searrow}{,} 1, 1, 1)$ dizisi hem devir hem de anti-devirdir.

$(1, 1 \underset{\nearrow}{,} 2 \underset{\nearrow}{,} 5 \underset{\nearrow}{,} 6 \underset{\searrow}{,} 3 \underset{\nearrow}{,} 4, 4, \underbrace{4)/1}_{\searrow}$ dizisi hem devir hem de anti-devir değildir.

$A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_t)$ dizisinin bir devir olması için gerek ve yeter koşul bir tek $i \in \{0, 1, \dots, t-1\}$ için

$$a_{i+1} \leq a_{i+2} \leq \cdots \leq a_t \leq a_1 \leq \cdots \leq a_i$$

olmasıdır. (Burada $i = 0$ ise $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_t$ olur.) Benzer şekilde $A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_t)$ dizisinin bir anti-devir olması için gerek ve yeter koşul bir tek $i \in \{0, 1, \dots, t-1\}$ için

$$a_{i+1} \geq a_{i+2} \geq \cdots \geq a_t \geq a_1 \geq \cdots \geq a_i$$

olmasıdır. (Burada $i = 0$ ise $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_t$ olur.)

$(1, 1 \underset{\nearrow}{\smile} 2 \underset{\nearrow}{\smile} 5 \underset{\searrow}{\smile} 1, 1, 1)$ dizisinde $i = 4$ olur. $a_5 \leq a_6 \leq a_7 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ yani $1 \leq 1 \leq 1 \leq 1 \leq 1 \leq 2 \leq 5$ olup bu dizi bir devirdir. Halbuki $(1, 1, 2, 5, 6, 3, 4, 4)$ dizisinde ise $a_{i+1} \leq \cdots \leq a_7 \leq a_8 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_1$ olacak şekilde bir i yoktur; yani bu dizi devir değildir.

Lemma 4.1.2. A bir devir (anti-devir) olsun. Ayrıca, A nın bir anti-devir (devir) olması için gerek ve yeter koşul A dizisinde en fazla iki farklı terim olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $A = (a, a, \dots, a)$ şeklinde bir sabit dizi ise, açıkça A hem bir devir hem de bir anti-devirdir.

A sabit olmayan bir devir olsun. $A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_t)$ olsun. O zaman $a_i > a_{i+1}$ olacak şekilde bir tek i indisi vardır. $a_i > a_{i+1}$ olacak şekilde i var olup $a_i \neq a_{i+1}$ şeklinde A da iki değer vardır. Kabul edelim ki A da ikiden fazla değer olsun. A da 3 tane değer olduğunu varsayalım. O halde $a_j \neq a_i$, $a_j \neq a_{i+1}$ olacak şekilde $j < i$ mevcut olsun.

$$A = \left(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_t\right) / a_1$$

dizisinde $a_i > a_{i+1}$ olacak şekilde bir tek i indisi olup $a_j \lneqq a_i$ olur. A devir olup

$$A = (a_j, a_j, \dots, a_j \underset{\nearrow}{\smile} a_i \underset{\searrow}{\smile} a_{i+1}, a_{i+1}, \dots, a_{i+1}) \underset{\nearrow}{/} a_j$$

dizisinde birden fazla artan değer olduğundan A anti-devir olamaz. Burada $a_j < a_i$, $a_{i+1} < a_j$ ve $j = i - 1$ olmalıdır. Eğer A da 3 den fazla değer olsa 1 den fazla artan değer olacağından A anti-devir olamaz. O halde A da en fazla 2 değer olmalıdır.

($\Leftarrow$) A ikiden fazla değere sahip olmasın. A bir devir olup $a_i \neq a_{i+1}$, $a_i > a_{i+1}$ olur. O halde

$$A = (a_i, \dots, a_i \underbrace{,}_{\searrow} a_{i+1}, \dots, a_{i+1} \underbrace{)/}_{\nearrow} a_i$$

olup A da bir artış bir azalış mevcuttur. O halde A bir anti-devir olur.

A bir anti-devir olsun. O zaman A nın bir devir olması için gerek ve yeter koşul A nın en fazla iki farklı değere sahip olması benzer şekilde gösterilir. □

Tanım 4.1.3. $A = (a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, a_t)$ bir dizi ise $A^r = (a_t, a_{t-1}, \dots, a_1)$ olarak tanımlanan A^r dizisine A nın **ters dizisi (reversed sequence)** denir.

Lemma 4.1.4. $A = (a_1, a_2, \dots, a_t)$, X_n üzerinde bir dizi olsun. A nın bir devir (anti-devirdir) olması için gerek ve yeter koşul A^r nin anti-devir (devir) olmasıdır.

İspat A bir sabit dizi ise Lemma 4.1.2. ve $A = A^r$ olduğundan sonuç açıktır. Bu nedenle sabit olmayan diziler için ispatı tamamlayalım:

($\Rightarrow$) $A = (a_1, a_2, \dots, a_t)$ sabit olmayan bir devir olsun. O zaman sadece bir i indisi için $a_i > a_{i+1}$ olur. Dolayısıyla $A^r = (a_t, a_{t-1}, \dots, a_1) = (b_1, b_2, \dots, b_t)$ olarak tanımlanır ise bir tek $j = t - i$ için $b_j < b_{j+1}$ olduğundan A^r bir anti-devir olur.

($\Leftarrow$) Benzer şekilde gösterilir.□

Örnek 4.1.5. $A = (1, 2, 3, 4, 1, 1, 1)$ dizisini alalım. $A = (1 \underset{\nearrow}{\smile} 2 \underset{\nearrow}{\smile} 3 \underset{\nearrow}{\smile} 4 \underset{\searrow}{\smile} 1, 1, 1)$ dizisi devirdir. Ayrıca $A^r = (1, 1, 1 \underset{\nearrow}{\smile} 4 \underset{\searrow}{\smile} 3 \underset{\searrow}{\smile} 2 \underset{\searrow}{\smile} 1)$ olup, A^r dizisi de bir anti-devirdir.

Lemma 4.1.6. $A = (a_1, a_2, \dots, a_t)$ dizisi bir devir olsun.

a) $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ olmak üzere $B = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r})$ alt dizisi de bir devir olur.

b) Her $1 \leq j \leq t$ için $(a_j, a_{j+1}, \dots, a_t, a_1, \dots, a_{j-1})$ dizisi de bir devirdir.

İspat a) $B = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r})$ dizisi sabit ise devirdir. $B = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r})$ sabit olmayan bir dizi olsun. $A = (a_1, a_2, \dots, a_t)$ dizisi bir devir olduğundan bir tek $i \in \{0, 1, \dots, t-1\}$ için

$$a_{i+1} \leq a_{i+2} \leq \cdots \leq a_t \leq a_1 \leq \cdots \leq a_i$$

olur. Ayrıca, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq t$ ve $r \geq 2$ olduğundan bir tek $k \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ için $i_k \leq i < i_{k+1}$ olur. Böylece

$$a_{i_k+1} \leq a_{i_k+2} \leq \cdots \leq a_{i_r} \leq a_{i_1} \leq \cdots \leq a_{i_k}$$

olduğundan B dizisi devirdir.

b) Tanım gereği açık. □

Tanım 4.1.7. $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ olsun. X_n üzerinde $\leq_k$ tam sıralama bağıntısını

$$k+1 \leq_k k+2 \leq_k \dots \leq_k n \leq_k 1 \leq_k \dots \leq_k k$$

olarak tanımlayalım. Eğer $i \leq_k j$ ve $i \neq j$ ise $i <_k j$ yazarız. Dikkat edilirse

$$i \leq_k j \;\Leftrightarrow\; i - k \leq j - k$$

olur.

Böylece eğer $a_{i+1} <_k a_i$ olacak şekilde birden fazla i indisi yok ise o zaman $A = (a_1, a_2, \dots, a_t)$ dizisine $\leq_{\boldsymbol{k}}$ **ya göre devir** denir. Eğer $a_i <_k a_{i+1}$ olacak şekilde birden fazla i indisi yoksa $A = (a_1, a_2, \dots, a_t)$ dizisine $\leq_{\boldsymbol{k}}$ **ya göre anti-devir** denir.

Kolayca görüleceği üzere A nın $\leq_k$ ya göre bir devir olması için gerek ve yeter koşul

$$a_{j+1} \leq_k a_{j+2} \leq_k \dots \leq_k a_t \leq_k a_1 \leq_k \dots \leq_k a_j$$

olacak şekilde bir tek $j \in \{0, 1, \dots, t-1\}$ mevcut olmasıdır.

Örnek 4.1.8. $A = (1, 1, 2, 5, 1, 1, 1)$ dizisini göz önüne alalım. $a_{i+1} <_k a_i$ olacak şekilde bir tek $i = 4$ indisi var olup A dizisi $\leq_k$ ya göre devirdir.

- $k = 4$ için; $5 \leq_4 6 \leq_4 7 \leq_4 1 \leq_4 2 \leq_4 3 \leq_4 4$ olduğundan $i = 3$

$a_4 = 5 \leq_4 a_5 = 1 \leq_4 a_6 = 1 \leq_4 a_7 = 1 \leq_4 a_1 = 1 \leq_4 a_2 = 1 \leq_4 a_3 = 2$

olup, A dizisi $\leq_4$ ya göre devir olur.

- $k = 1$ için; $2 \leq_1 3 \leq_1 4 \leq_1 5 \leq_1 6 \leq_1 7 \leq_1 1$ olduğundan $i = 2$

$a_3 = 2 \leq_1 a_4 = 5 \leq_1 a_5 = 1 \leq_1 a_6 = 1 \leq_1 a_7 = 1 \leq_1 a_1 = 1 \leq_1 a_2 = 1$

olup, A dizisi $\leq_1$ ya göre devir olur.

Lemma 4.1.9. $A = (a_1, a_2, \dots, a_t)$, X_n nin elemanlarının herhangi bir dizisi olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir:

a) A, $\leq_0 = \leq$ sıralamasına göre bir devirdir.
b) En az bir $k = 0,1, \dots, n-1$ için $\leq_k$ sıralamasına göre A bir devirdir.
c) Her $k = 0,1, \dots, n-1$ için $\leq_k$ sıralamasına göre A bir devirdir.

İspat (a) ⇒ (b) $k = 0$ mevcuttur.
(b) ⇒ (c) Bir k için, $\leq_k$ sıralamasına göre A bir devir olsun. O zaman $j \in \{0, 1, \dots, t-1\}$ için

$$k+1 \leq_k a_{j+1} \leq_k a_{j+2} \leq_k \dots \leq_k a_t \leq_k a_1 \leq_k \dots \leq_k a_j \leq_k k$$

olur. Eğer $k+2 \leq_k a_{j+1}$ ise

$$a_{j+1} \leq_{k+1} a_{j+2} \leq_{k+1} \dots \leq_{k+1} a_t \leq_{k+1} a_1 \leq_{k+1} \dots \leq_{k+1} a_j$$

olur. Eğer bir $s \in \{1, 2, \dots, t\}$ için

$$k+1 = a_{j+1} = \dots = a_{j+s} <_k k+2 \leq_k a_{j+s+1} \leq_k \dots \leq_k a_j$$

ise

$$a_{j+s+1} \leq_{k+1} \dots \leq_{k+1} a_j \leq_{k+1} \dots \leq_{k+1} a_{j+s} = k+1$$

olur. Böylece, her iki durumda da A, $\leq_{k+1}$ e göre bir devir olur.. Dolayısıyla k üzerinde tümevarımla A her k için, $\leq_k$ sıralamasına göre devir olur.

(c) ⇒ (a) $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ olup her k için $\leq_k$ ya göre devir olduğundan $k = 0$ için de $\leq_0 = \leq$ sıralamasına göre devir olur. □

4.2. OP_n Monoidi

Tanım 4.2.1. $\alpha \in T_n$ olsun. Eğer $(1\alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha)$ dizisi bir devir ise α ya X_n de **yön koruyan (orientation-preserving) dönüşüm** denir. Lemma 4.1.9 dan bu dizi her $0 \leq k \leq n-1$ için $\leq_k$ ya göre devirdir. X_n deki tüm yön koruyan dönüşümlerin kümesini OP_n ile gösterilir.

Lemma 4.2.2. $\alpha \in OP_n$ ve X_n nin elemanlarından oluşan $(b_1, b_2, \dots, b_t)$ dizisi bir devir olsun. O zaman $(b_1\alpha, b_2\alpha, \dots, b_t\alpha)$ dizisi de bir devirdir.

İspat: $(b_1, b_2, \dots, b_t)$ devir olduğundan bir $i \in \{0, 1, \dots, t-1\}$ için

$$b_{i+1} \leq b_{i+2} \leq \cdots \leq b_t \leq b_1 \leq \cdots \leq b_i$$

olur. Ayrıca, $\alpha \in OP_n$ olduğundan bir $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ için

$$(j+1)\alpha \leq (j+2)\alpha \leq \cdots \leq n\alpha \leq 1\alpha \leq \cdots \leq j\alpha$$

olur. Dolayısıyla α , $\{j+1, \dots, n\}$ ve $\{1, 2, \dots, j\}$ kümeleri üzerinde bir sıra-koruyan dönüşüm olur. Eğer $b_{i+1} \in \{j+1, \dots, n\}$ veya $b_i \in \{1, 2, \dots, j\}$ ise açıkça

$$b_{i+1}\alpha \leq b_{i+2}\alpha \leq \cdots \leq b_t\alpha \leq b_1\alpha \leq \cdots \leq b_i\alpha$$

olur. Yani $(b_1\alpha, b_2\alpha, \dots, b_t\alpha)$ dizisi devirdir. Kabul edelim ki $b_{i+1} < j+1$ ve $b_i > j$ olsun. O zaman bir r için ya

$$i+1 < r \leq t \quad \text{ve} \quad b_{i+1}, \dots, b_{r-1} \in \{1, 2, \dots, j\}$$

ya da $1 \leq r \leq i$ için

$$b_{i+1}, \dots, b_t, b_1, \dots, b_{r-1} \in \{1, 2, \dots, j\} \text{ ve } b_r, \dots, b_i \in \{j+1, \dots, n\}$$

olup her iki durumda da

$$b_r\alpha \leq \cdots \leq b_t\alpha \leq b_1\alpha \leq \cdots \leq b_{r-1}\alpha$$

olur. □

Teorem 4.2.3. OP_n, O_n yi içeren T_n nin bir alt monoidi olur.

İspat: Her $\alpha \in O_n$ için $1\alpha \leq 2\alpha \leq \cdots \leq n\alpha$ olduğundan $(1\alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha)$ bir devir olup $\alpha \in OP_n$ yani $O_n \subseteq OP_n$ olur. Şimdi $OP_n \leq T_n$ olduğunu gösterelim.

$\alpha, \beta \in OP_n$ alalım. $\alpha \in OP_n$ olduğundan $(1\alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha)$ bir devirdir. Böylece, $1\alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha \in X_n$ ve $(1\alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha)$ devir olup Lemma 4.2.2. den $((1\alpha)\beta, (2\alpha)\beta, \dots, (n\alpha)\beta)$ da devirdir. Dolayısıyla

$$((1\alpha)\beta, (2\alpha)\beta, \dots, (n\alpha)\beta) = (1(\alpha\beta), 2(\alpha\beta), \dots, n(\alpha\beta))$$

bir devir olup $\alpha\beta \in OP_n$ ve böylece, $OP_n \leq T_n$ olur. Ayrıca $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \in OP_n$ olduğundan OP_n, T_n nin alt monoididir. □

Önerme 4.2.4. Sabit olmayan bir $\alpha \in OP_n$ elemanının bir sıra koruyan dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul $1\alpha < n\alpha$ olmasıdır.

İspat: (⇒) $\alpha \in O_n$ sabit olmasın. O zaman $1\alpha \leq 2\alpha \leq \cdots \leq n\alpha$ ve α sabit olmadığından $1\alpha < n\alpha$ olur.

(⇐) $\alpha \in OP_n$ ve $1\alpha < n\alpha$ olsun. Eğer $i \neq 0$ için $(i+1)\alpha < i\alpha$ ise

$$(i+1)\alpha \leq (i+2)\alpha \leq \cdots \leq n\alpha \leq 1\alpha \leq \cdots \leq i\alpha$$

oluşu $1\alpha < n\alpha$ olması ile çelişir. O halde $i = 0$ olup,

$$1\alpha \leq 2\alpha \leq \cdots \leq n\alpha$$

olduğundan α sıra koruyandır. □

i tamsayısı $i-1$ ve $i+1$ arasında bulunacak şekilde X_n nin elemanlarını bir devirin çevresine saat yönünde yerleştirilmiş olarak görebiliriz. Bu durumda farklı üç eleman $i, j, k \in X_n$ için (i, j, k) dizi ya bir devir ya da bir anti-devir olur.

Önerme 4.2.5. $\alpha \in OP_n$ ve (i, j, k) X_n nin 3 farklı elemanlarının herhangi bir üçlüsü olsun. Eğer elemanları farklı ise o zaman $(i\alpha, j\alpha, k\alpha)$ üçlüsü (i, j, k) gibi aynı yöne sahiptir.

$i, k \in X_n$ için bir $[i, k]$ aralığı

$[i,k] = \{i, i+1, \dots, k-1, k\}$ ile saat yönünü veya

$[i,k] = \{i, i-1, \dots, k+1, k\}$ ile saat yönünün tersi ifade edilebilir.

Bundan sonra bütün aralıklar saat yönünde ifade edilir.

Tanım 4.2.6. Eğer K bir $i \in X_n$ ve $0 \leq t \leq n-1$ için $[i, i+t]$ formuna sahip ise $K \subseteq X_n$ kümesi **konveks**tir. Eğer $\alpha \in OP_n$ ise

$$\pi_\alpha = \{(x,y) \in X_n \times X_n : x\alpha = y\alpha\}$$

denklik bağıntısını belirler.Bu denklik bağıntısına $\boldsymbol{\alpha}$ **nın çekirdeği (kernel)** denir ve bu denklik bağıntısının denklik sınıfları $x\alpha^{-1}$ alt kümeleridir. Eğer bir kernel sınıfı bir tek eleman (sadece yansımalı olan elemanları) içerirse bu kernel sınıfına **trivialdir** denir. α nın kernel sınıflarının kümesini $Ker(\alpha)$ ile gösterilir.

Önerme 4.2.7. $\alpha \in O_n$ nin kernel sınıfları konveks olur..

İspat: Herhangi bir $\alpha \in O_n$ için

$$ker(\alpha) = \{(x,y) \in X_n \times X_n : x\alpha = y\alpha\}$$

$(x,y) \in ker(\alpha)$ ve $x < y$ olsun. $x < z < y$ olacak şekilde bir $z \in X_n$ alalım. $\alpha \in O_n$ olup $x\alpha \leq z\alpha \leq y\alpha = x\alpha$ olduğundan $x\alpha = y\alpha = z\alpha$ olur. □

$a = (12 \dots n)$ tarafından doğrulan devirli grup Z_n olsun. X_n kümesinin $a = (12 \dots n)$ altındaki görüntü dizisi $(2, 3, \dots, n, 1)$ olup, bir devir olduğundan $a = (12 \dots n) \in OP_n$ olur.

Lemma 4.2.8. $g \in O_n$ olsun. Bir $1 \leq r \leq n-1$ için $a^r g \in O_n$ olması için gerek ve yeter koşul g nin sabit olmasıdır.

İspat ($\Leftarrow$) $g \in O_n$ ve g sabit olsun. Her $0 \leq r \leq n-1$ için $a^r g = g \in O_n$ olur.

($\Rightarrow$) $g \in O_n$ ve bir $1 \leq r \leq n-1$ için $a^r g \in O_n$ olsun. Kabul edelim ki g sabit dönüşüm olmasın. O zaman

$$i = 1g < ng = j$$

olur. Böylece $n - r < n - r + 1$ olduğundan

$$(n-r)a^r g = ng = j > i = 1g = (n-r+1)a^r g$$

olur ki bu durum $a^r g \in O_n$ olması ile çelişir. O halde g sabittir. □

Teorem 4.2.9. Her $\alpha \in OP_n$ için $\alpha = a^r f$ olacak şekilde $0 \leq r \leq n-1$ tamsayısı ve $f \in O_n$ elemanı vardır. Sabit olmayan $\alpha \in OP_n$ için bu parçalanış tektir. Böylece $OP_n = \langle O_n \cup \{a\} \rangle$ olur.

İspat: $\alpha \in OP_n$ olsun. α sabit bir dönüşüm ise $f = \alpha \in O_n$ ve $r = 0$ alınır ise $a^0 f = f = \alpha$ olur. Kabul edelim ki α sabit olmayan bir dönüşüm olsun. O zaman $i\alpha > (i+1)\alpha$ olacak şekilde bir tek $i \in X_n$ vardır ve

$$min_{1 \leq j \leq n} j\alpha = (i+1)\alpha \leq \cdots \leq n\alpha \leq 1\alpha \leq \cdots \leq i\alpha = max_{1 \leq j \leq n} j\alpha$$

olur. Her $x \in X_n$ için $xf = (x+i)\alpha$ olarak f'yi tanımlayalım. O zaman

$$1f = (1+i)\alpha \leq 2f = (2+i)\alpha \leq \cdots \leq nf = (n+i)\alpha = i\alpha$$

olup, $f \in O_n$ olur. Ayrıca $r = n - i$ alınır ise her $1 \leq j \leq n$ için

$$j(a^r f) = (j+r)f = (j+r+i)\alpha = (j+n)\alpha = j\alpha$$

olup, $\alpha = a^r f$ olur.

α sabit olmayan dönüşüm ve $f, g \in O_n$ ve $0 \leq k, l \leq n-1$ olmak üzere $\alpha = a^k f = a^l g$ olduğunu varsayalım. O zaman $f = a^{l-k} g$ olup, g sabit olmadığından Lemma 4.2.8. den dolayı $l - k = 0$ olur. Dolayısıyla da $f = g$ olur. □

Sonuç 4.2.10. $|OP_n| = nC(2n-1, n-1) - n(n-1)$ olur.

İspat: $|OP_n| = |Z_n|(|O_n| - n) + n = n|O_n| - n^2 + n$
$= nC(2n-1, n-1) - n(n-1)$. □

Teorem 4.2.11. $a = (12 \ldots n) \in OP_n$ ve $f = \binom{1\ 2\ 3\ \ldots\ n}{1\ 1\ 3\ \ldots\ n} \in OP_n$ olmak üzere $OP_n = \langle a, f \rangle$ dir. Dolayısıyla $rank(OP_n) = 2$ olur.

İspat: Catarino (1998), Theorem 2.1. e bakınız. □

Lemma 4.2.12. $\alpha \in OP_n$ ve K da α nın herhangi bir kernel sınıfı olsun. O halde K konvekstir.

İspat: $\alpha \in OP_n$ ise bir tek $i \in X_n$ için

$$(i+1)\alpha \leq \cdots \leq n\alpha \leq 1\alpha \leq \cdots \leq i\alpha$$

olur. Böylece bir $j \leq_i k$ için $j\alpha = k\alpha$ ise

$$j\alpha = (j+1)\alpha = \cdots = (k-1)\alpha = k\alpha$$

olup, bu kernel sınıflarının konveks olduğunu ispatlamak için yeterlidir. □

Lemma 4.2.13. n inci fibonacci sayısı F_n olsun. O zaman her $n \geq 1$ için

i) $|E(O_n)| = F_{2n}$
ii) $|E(OP_n)| = n + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 F_{2(n-k)}$

İspat i) $|E(O_n)| = e_n$ ile gösterelim. Herhangi bir $\alpha \in E(O_{n+1})$ alalım. O zaman iki durum söz konusudur;

$$1.\ X_{n+1}\alpha \subseteq X_n \quad \text{ve} \quad 2.\ X_{n+1}\alpha \nsubseteq X_n.$$

1. Durum : $X_{n+1}\alpha \subseteq X_n$ olsun. O zaman $n\alpha \leq (n+1)\alpha \leq n$ olup, $\alpha^2 = \alpha$ olduğundan

$$n\alpha \leq (n+1)\alpha = (n+1)\alpha^2 \leq n\alpha$$

olur, ve böylece $(n+1)\alpha = n\alpha$ olur. O halde $\alpha|_{X_n} \in E(O_n)$ olur. Ayrıca $\beta \in E(O_n)$ ise

$$x\hat{\beta} = \begin{cases} x\beta, & x \leq n \\ n\beta, & x = n+1 \end{cases}$$

olarak tanımlananan $\hat{\beta} \in E(O_{n+1})$ ve $X_{n+1}\hat{\beta} \subseteq X_n$ olur. Böylece, birinci durumda $E(O_{n+1})$ de $|E(O_n)| = e_n$ tane idempotent vardır.

2. Durum: $X_{n+1}\alpha \nsubseteq X_n$ olsun. O zaman en az bir $i \in X_{n+1}$ için $i\alpha = n+1$ olur. Ayrıca, her $j \geq i$ için $n+1 = i\alpha \leq j\alpha$ olacağından $j\alpha = n+1$ olur. Şimdi $k = min\{i \in X_{n+1}\colon\ i\,\alpha = n+1\}$ olarak alalım. $k \geq 2$ ve $(k-1)\alpha = l \leq n$ olsun. Eğer $l \geq k$ olsaydı $\alpha \in E(O_{n+1})$ ve $l \in im(\alpha)$ olduğundan

$$l = l\alpha = n+1$$

olur ki bu da k nın seçimi ile çelişir. Böylece $l < k$ yani $l \leq k-1$ olup $(k-1)\alpha \leq k-1$ olur. Dolayısıyla $\alpha \in E(O_{n+1})$ olduğundan her $1 \leq i \leq k-1$ için $i\alpha \leq (k-1)\alpha \leq k-1$ olduğundan $\alpha|_{X_{k-1}} \in E(O_{k-1})$ olur. Her $2 \leq k \leq n+1$ için

$$E_k = \{\alpha \in E(O_{n+1})\colon\ (k-1)\alpha \leq k-1 \text{ ve } k\alpha = n+1\}$$

olarak tanımlayalım. Böylece $|E_k| = |E(O_{k-1})| = e_{k-1}$ olur. Ayrıca $k = 1$ ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \\ n+1 & n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{pmatrix}$$

olup $|E_1| = 1$ olur. E_k lar ayrık olduğundan ikinci durumda

$$1 + e_1 + e_2 + \cdots + e_n$$

tane idempotent vardır.

Böylece $|E(O_{n+1})| = e_n + (e_n + e_{n-1} + \cdots + e_1 + 1)$ olur. Teorem 3.3.7 de gösterildiği üzere $\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$ olduğundan $e_n = F_{2n}$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. $n = 1$ için $e_1 = 1 = F_2$ olur. $n = 2$ için

$$e_2 = e_1 + e_1 + 1 = F_2 + F_2 + F_1 = F_2 + F_3 = F_4$$

olur. Her $1 \leq k \leq n$ için $e_k = F_{2k}$ olsun. O zaman

$$e_{n+1} = e_n + (e_n + e_{n-1} + \cdots + e_1 + 1) = F_{2n} + \sum_{k=1}^{n} F_{2k} + 1$$
$$= F_{2n} + F_{2n+1} - 1 + 1 = F_{2n+2} = F_{2(n+1)}$$

olur. Dolayısıyla $e_n = F_{2n}$ olur.

ii) Önce idempotent elemanların bazı örneklerine bakalım. İmajı $2, 4, 6$ olan OP_8 de idempotent yazalım.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

OP_n için idempotent elemanları yazmayı genelleyelim. $\alpha \in E(OP_n)$ alalım.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & \vdots & i+1 & \dots & n-j-1 & n-j & \vdots & n-j+1 & \dots & n-1 & n \\ r & r & \dots & r & r & \vdots & & \dots & & & \vdots & r & \dots & r & r \end{pmatrix}$$

1 hariç 1 den sonraki kısmı bloklama yapalım. $1\alpha = r$ ve $|r\alpha^{-1}| = k$ olsun. O zaman yukarıdaki gibi r leri yerleştirebiliriz. $\alpha \in E(OP_n)$ olduğundan $r \in r\alpha^{-1}$ olur. $k = n$ ise α sabit olup n tane sabit idempotent vardır. O zaman $1 \leq k \leq n - 1$ kabul edebiliriz.

$i = k$ ise $r\alpha^{-1} = \{1, 2, \dots, k-1, k\}$,

$i = k-1$ ise $r\alpha^{-1} = \{1, 2, \dots, k-1, n\}$,

$i = k-2$ ise $r\alpha^{-1} = \{1, 2, \dots, k-2, n, n-1\}$,

$i = k-3$ ise $r\alpha^{-1} = \{1, 2, \dots, k-3, n, n-1, n-2\}$,

$\vdots$

$i = k-(k-i)$ ise $r\alpha^{-1} = \{1, 2, \dots, i, n, n-1, \dots, n-(k-i-1)\}$,

$\vdots$

$i = 3$ ise $r\alpha^{-1} = \{1, 2, 3, n, n-1, \dots, n-(k-4)\}$,

$i = 2$ ise $r\alpha^{-1} = \{1, 2, n, n-1, \dots, n-(k-3)\}$, ve

$i = 1$ ise $r\alpha^{-1} = \{1, n, n-1, \dots, n-(k-2)\}$ olur.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & \vdots & \underbrace{i+1 \dots n-j-1 \quad n-j}_{\beta} & \vdots & n-j+1 & \dots & n-1 & n \\ r & r & \dots & r & r & & \dots & & r & \dots & r & r \end{pmatrix}$$

$C = X_n \setminus r\alpha^{-1}$ olmak üzere $\beta = \alpha|_C$ olsun. O zaman 1. $im(\beta) \subseteq C$ ve 2. $\beta \in E(O_n)$ olduğunu gösterelim.

<u>1. İddia:</u> Kabul edelim ki $im(\beta) \subseteq C$ olmasın. O zaman $x\beta = y$ olacak şekilde $x \in C$ ve $y \in r\alpha^{-1}$ mevcut olur. O zaman

$$x\beta = x\alpha = x\alpha^2 = (x\alpha)\alpha = y\alpha = r$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $im(\beta) \subseteq C$ olur.

<u>2. İddia:</u> Her $x \in C$ için

$$x\beta^2 = (x\beta)\beta = (\underbrace{x\alpha}_{\in C})\beta = (x\alpha)\alpha = x\alpha^2 = x\alpha = x\beta$$

olup, β idempotenttir.

Şimdi de β nın sıra koruyan olduğunu gösterelim.

$i = k$ ise $1 \leq r \leq k$ ve $im(\beta) \subseteq C$ olduğundan $(n+1)\alpha = 1\alpha < n\alpha$ olur. Her $x, y \in C$ için $\alpha \in OP_n$ olup $x < y$ ise $x\beta = x\alpha < y\alpha = y\beta$ olur. β sıra koruyandır.

$i < k$ olsun. Eğer $1 \leq r \leq i$ ise $n - k + i \in C$ ve $im(\beta) \subseteq C$ olduğundan $(n-k+i)\beta = (n-k+i)\alpha > (n-k+i+1)\alpha = r$ olur. Eğer $n - k + i + 1 \leq r \leq n$ ise $i + 1 \in C$ ve $im(\beta) \subseteq C$ olduğundan $i\alpha = r > (i+1)\alpha$ olur. Böylece , her iki durumda β sıra koruyandır.

Sonuç olarak $|r\alpha^{-1}| = k$ olup $|C| = n - k$ olduğundan (i) den dolayı $F_{2(n-k)}$ tane β vardır. k farklı $r\alpha^{-1}$ olduğundan k farklı C kümesi olur. Ayrıca $|r\alpha^{-1}| = k$ ve $r \in r\alpha^{-1}$ olduğundan k farklı r seçebiliriz. Böylece $kkF_{2(n-k)} = k^2F_{2(n-k)}$ tane $|(1\alpha)\alpha^{-1}| = k$ olacak şekilde OP_n de α idempotenti vardır. Dolayısıyla

$$|E(OP_n)| = n + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 F_{2(n-k)}$$

olur. □

Teorem 4.2.14. Her $n \geq 1$ için $|E(OP_n)| = F_{2n-1} + F_{2n+1} - (n^2 - n + 2)$ olur.

İspat: Daha önce $\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$ ve $\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$ olduğu Teorem 3.3.7 de gösterildi. $|E(OP_n)| = e_n$ olsun. Ayrıca,

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_{2(n-k)} = F_{2n} + F_{2(n-1)} + \cdots + F_4 + F_2 = \sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$$

olur. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\, F_{2(n-k)} = F_{2(n-1)} + 2F_{2(n-2)} + \cdots + (n-1)F_{2.1} = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1} F_{2(n-k)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} F_{2.1} + F_{2.2} + \cdots + F_{2(n-j)} = \sum_{j=1}^{n-1} F_{2(n-j)+1} - \sum_{j=1}^{n-1} 1$$

$$= F_{2n-1} + \cdots + F_5 + F_3 - (n-1) + 1 - 1 = F_{2n} - n$$

bulunur.

$e_n = |E(OP_n)| = n + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 F_{2(n-k)}$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$e_{n+1} - e_n = n + 1 + \sum_{k=1}^{n} k^2 F_{2(n+1-k)} - n - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 F_{2(n-k)}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} k^2 F_{2(n-(k-1))} - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 F_{2(n-k)}$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 F_{2(n-k)} - \sum_{k=0}^{n-1} k^2 F_{2(n-k)}$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} ((k+1)^2 - k^2) F_{2(n-k)} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_{2(n-k)} + 2\sum_{k=1}^{n-1} kF_{2(n-k)}$$

$$= 1 + (F_{2n+1} - 1) + 2(F_{2n} - n) = F_{2n} + F_{2n+2} - 2n$$

elde edilir. Dolayısıyla

$e_{n+1} = e_n + F_{2n} + F_{2n+2} - 2n$

$e_n = e_{n-1} + F_{2(n-1)} + F_{2(n-1)+2} - 2(n-1)$

$e_{n-1} = e_{n-2} + F_{2(n-2)} + F_{2(n-2)+2} - 2(n-2)$

$\vdots$

$e_3 = e_2 + F_{2.2} + F_{2.2+2} - 2.2$

$e_2 = e_1 + F_2 + F_4 - 2$

olup,

$$e_{n+1} = e_1 + F_2 + F_4 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2(n-2)} + F_{2(n-2)+2} + F_{2(n-1)} + F_{2(n-1)+2} + F_{2n} + F_{2n+2} - 2 - 2.2. - \cdots - 2(n-2) - 2(n-1) - 2n$$

$e_{n+1} = 2(F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n}) + F_{2n+2} - n(n+1)$

$e_{n+1} = 2(F_{2n+1} - 1) + F_{2n+2} - n(n+1)$

$e_{n+1} = F_{2n+1} + F_{2n+3} - n^2 - n - 2$

bulunur. n yerine $n-1$ yazılır ise

$$e_n = F_{2n-1} + F_{2n+1} - (n^2 - n + 2)$$

elde edilir. □

Önerme 4.2.15. $Z_n = \langle a = (1\ 2 \ldots n) \rangle$ olmak üzere.

$$O_n \cdot Z_n = \{\alpha \in OP_n\colon\ 1\alpha \neq n\alpha\} \cup \{\alpha \in OP_n\colon\ |X_n\alpha| = 1\}$$

olur.

İspat: $A_1 = \{\alpha \in OP_n\colon\ 1\alpha \neq n\alpha\}$ ve $A_2 = \{\alpha \in OP_n\colon\ |X_n\alpha| = 1\}$ alalım ve $O_n \cdot Z_n = A_1 \cup A_2$ olduğunu gösterelim.

$\alpha \in O_n \cdot Z_n$ olsun. α sabit dönüşüm ise $\alpha \in A_2$ olur. $\alpha \in O_n \cdot Z_n$ sabit olmasın. O zaman $\alpha = fa^m$ olacak şekilde $f \in O_n$ ve $0 \leq m \leq n-1$ vardır. $f \in O_n$ de sabit olmadığından $1f \neq nf$ olup $1\alpha = (1f)a^m \neq (nf)a^m = n\alpha$ olur. Böylece $\alpha \in A_1$ olup $O_n \cdot Z_n \subseteq A_1 \cup A_2$ olur.

Tersine $\alpha \in A_1 \cup A_2$ olsun. $\alpha \in A_2$ ise α sabit olup, $\alpha \in O_n$ ve dolayısıyla $\alpha = \alpha a^0 \in O_n \cdot Z_n$ olur. $\alpha \in A_1$ olsun. O zaman $1\alpha \neq n\alpha$ olur. Eğer $n\alpha > 1\alpha$

ise Önerme 4.2.4. den α bir sıra koruyan dönüşümdür ve $\alpha = \alpha a^0 \in O_n \cdot Z_n$ olur. Eğer $n\alpha < 1\alpha$ ise; $1\alpha = k$ ve $m = n - k + 1$ olmak üzere f dönüşümü $xf = x\alpha + m$ $(x \in X_n)$ olarak tanımlayalım. Her $b \in X_n$ için

$$b(fa^{-m}) = (bf)a^{-m} = bf - m = (b\alpha + m) - m = b\alpha$$

olduğundan $fa^{-m} = \alpha$ ve dolayısıyla $f = \alpha a^m \in OP_n$ olur. Ayrıca, $1\alpha = k$ ve $m = n - k + 1$ olduğundan

$$1f = 1\alpha + m = k + m = n + 1 = 1$$

olur. $n\alpha \neq 1\alpha = k$ olduğundan

$$nf = n\alpha + m \neq k + m = 1$$

yani $nf \neq 1$ olur. O halde $1f < nf$, $f \in OP_n$ ve Önerme 4.2.4. den $f \in O_n$ olur. □

Bu önermeden dolayı $OP_n \neq O_n \cdot Z_n$ olur. Fakat Teorem 4.2.9. dan $OP_n = Z_n \cdot O_n$, olduğunu biliyoruz. Buradan $O_n \cdot Z_n \neq OP_n$ olmakla birlikte

$$(O_n \cdot Z_n) \cdot O_n = O_n \cdot (Z_n \cdot O_n) = O_n \cdot OP_n = OP_n$$

ve böylece, $(O_n \cdot Z_n)^2 = OP_n$ olur.

4.3. OP_n nin Bazı Özellikleri

Teorem 4.3.1. OP_n regüler bir yarıgruptur.

İspat: $\alpha \in OP_n$ olsun. Teorem 4.2.9. dan $\alpha = a^r f$ olacak şekilde $0 \leq r \leq n-1$ tamsayısı ve $f \in O_n$ elemanı vardır. Ayrıca Teorem 3.7.20. den O_n regüler bir yarıgrup olup $f \cdot g \cdot f = f$ olacak şekilde $g \in O_n$ vardır. Önerme 4.2.5 ten $\beta = ga^{n-r} \in O_n \cdot Z_n \subseteq OP_n$ alınır ise

$$\alpha \cdot \beta \cdot \alpha = a^r f \cdot g(a^{n-r} \cdot a^{r)} f = a^r f \cdot g \cdot f = a^r f = \alpha$$

olup, $\alpha \in OP_n$ regülerdir. □

OP_n regüler olduğundan dolayı

$$\mathcal{R}^{OP_n} = \mathcal{R}^{T_n} \cap (OP_n \times OP_n)$$
$$\mathcal{L}^{OP_n} = \mathcal{L}^{T_n} \cap (OP_n \times OP_n)$$
$$\mathcal{H}^{OP_n} = \mathcal{H}^{T_n} \cap (OP_n \times OP_n)$$

Yani $\alpha, \beta \in OP_n$ için

$$\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow ker(\alpha) = \ker(\beta)$$
$$\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow X_n \alpha = X_n \beta$$
$$\alpha \mathcal{H} \beta \Leftrightarrow X_n \alpha = X_n \beta \text{ ve } ker(\alpha) = \ker(\beta)$$

ve OP_n sonlu bir yarıgrup olduğundan dolayı $\mathcal{D}^{OP_n} = \mathcal{J}^{OP_n}$ olur.

Lemma 4.3.2. $0 \leq k, m \leq n-1$ ve $f, g \in O_n$ için $\alpha = a^k f$ ve $\beta = a^m g$ olsun. O halde OP_n de $\alpha \mathcal{L} \beta$ olması için gerek ve yeter koşul O_n de $f \mathcal{L} g$ olmasıdır.

İspat: $im(\alpha) = im(a^k f) = im(f)$ ve $im(\beta\ ) = im(a^m g) = im(g)$ olduğundan sonuç açıktır □

Yukardaki lemmanın bir benzeri $n > 2$ için $\mathcal{R}$ sınıfları için geçerli değildir. Örneğin; $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ve $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ise $ker(f) = ker(g)$ olur. Fakat $\alpha = a^2 f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ve $\beta = ag = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ise $ker(\alpha) \neq ker(\beta)$ olur. Tersi örneği için $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in O_3$ olmak üzere $\alpha = af = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\beta = a^2 g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ olsun. O zaman $ker(\alpha) = ker(\beta)$ ve $ker(f) \neq ker(g)$ olur.

$\alpha, \beta \in OP_n$ olsun. $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow ker(\alpha) = ker(\beta)$ ve kernel sınıfları konvekstir. $t \geq 2$ için t −ranklı $\mathcal{R}$ sınıfları ile X_n den aşağıdaki gibi seçilen bir t −kümesinin seçimi arasında bire-bir bir eşleme vardır. A kümesi $a_1 < a_2 < \cdots < a_t$ olacak şekilde $K = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ olarak alalım. Burada $\mathcal{R}$ −sınıfları

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_t \\ r_1 & r_2 & \dots & r_t \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_1, a_1 + 1, \dots, a_2 - 1\}, \\ A_2 &= \{a_2, a_2 + 1, \dots, a_3 - 1\}, \\ &\vdots \\ A_t &= \{a_t, a_t + 1, \dots, a_1 - 1\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Dikkat edilirse her bir a_i içinde bulunduğu kernel sınıfı A_i nin (en küçük) başlangıç noktasıdır (initial point). K kümesi ile A_i kümelerinden biri biliniyorsa karşılıklı olarak diğeri inşa edilebilir. Ayrıca

$$\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow X_n \alpha = X_n \beta$$

olduğundan dolayı $\mathcal{L}$ −sınıfları ayrıca X_n den bir t −kümesinin seçimlerine de karşılık gelir. Burada $t = |X_n\alpha|$ olur. Bu nedenle $t \geq 2$ için $K = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ kümesi $\mathcal{R}$ −sınıfının kernel sınıflarının t −kümesi ve $R = \{r_1, r_2, \dots, r_t\}$ kümesi de aynı $\mathcal{R}$ −sınıfındakilerin imaj kümesi olmak üzere OP_n nin $\mathcal{H}$ −sınıfı H yi (K, R) ikilisi ile kodlayacağız. $\alpha \in H$ için $a_i\alpha = r_1$ olsun. Lemma 4.1.6. (b) den $(a_i, a_{i+1}, \dots, a_t, a_1, \dots, a_{i-1})$ bir devirdir ve Lemma 4.2.2. den

$$(a_i\alpha, a_{i+1}\alpha, \dots, a_t\alpha, a_1\alpha, \dots, a_{i-1}\alpha)$$

dizisi de devirdir. $a_i\alpha = r_1 = minX_n\alpha$ ve a_j, α nın kernel sınıflarının transversal bir şekli olduğundan dolayı

$$a_i\alpha < a_{i+1}\alpha < \cdots < a_t\alpha < a_1\alpha < \cdots < a_{i-1}\alpha$$

elde edlir; ve $a_i\alpha = r_1$, $a_{i+1}\alpha = r_2$, …, $a_{i-1}\alpha = r_t$ olur. Böylece $\alpha \in H$, $a_i\alpha = r_1$ olacak şekilde i −nin seçimi ile birlikte (K, R) t −kümelerinin ikilisi ile tanımlanır. Verilen bir (K, R) ikilisi ve verilen i −seçimi için $\alpha \in H$ elemanını aşağıdaki gibi inşa edeceğiz;

K_1, K_2, …, K_t; α nın kernel sınıfları ve a_j; K_j nin başlangıç noktası olmak üzere $\alpha \in H$ yi $K_j\alpha = r_{j-i+1}$ olarak tanımlanır.

Teorem 4.3.3. $t \geq 2$ ve $1 \leq i \leq t$ için A kümesi tüm (K, R, i) üçlülerinin kümesi ve $B = \{\alpha \in OP_n\colon |X_n\alpha| = t\}$ olmak üzere A ile B arasında bire-bir bir eşeme vardır.

İspat $t \geq 2$ ve $1 \leq i \leq t$ için A kümesi tüm (K, R, i) üçlülerinin kümesi ve $B = \{\alpha \in OP_n\colon |X_n\alpha| = t\}$ olsun. Her $(K, R, i) \in A$ için a_j, K_j'nin başlangıç

noktası olmak üzere $\alpha \in H$ yi $a_j\alpha = r_{j-i+1}$ olarak tanımlı ise $\Phi: A \to B$ dönüşümünü $\Phi(K, R, i) = \alpha$ şeklinde tanımlayalım. Önce Φ'nin bire-bir olduğunu gösterelim.

$(K', R', i_1), (K'', R'', i_2) \in A$ alalım. $\Phi(K', R', i_1) = \alpha_1$, $\Phi(K'', R'', i_2) = \alpha_2$ yani

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} K_1' & K_2' & \dots & K_t' \\ r_1' & r_2' & \dots & r_t' \end{pmatrix} \text{ ve } \alpha_2 = \begin{pmatrix} K_1'' & K_2'' & \dots & K_t'' \\ r_1'' & r_2'' & \dots & r_t'' \end{pmatrix}$$

için $\alpha_1 = \alpha_2$ olsun. $\alpha_1 = \alpha_2$ olduğundan her $1 \leq j \leq t$ için $K_j' = K_j''$ ve $r_j' = r_j''$ olur. $1 \leq j \leq t$ için $K_j' = K_j''$ olduğundan her bir K_j' nün başlangıç noktalarının kümesi K' ne ve her bir K_j'' nün başlangıç noktalarının kümesi K'' ye eşit olur. $1 \leq j \leq t$ için $r_j' = r_j''$ olduğundan $R' = \{r_1', r_2', \dots, r_t'\} = \{r_1'', r_2'', \dots, r_t''\} = R''$ elde edilir. Lemma 4.1.6. (b) den dolayı $i_1 = i_2$ olacak şekilde $i_1 = i_2 = i_k$ $(1 \leq k \leq t)$ seçilebilir. O halde $(K', R', i_1) = (K'', R'', i_2)$ olup Φ bire-bir olur. □

Lemma 4.3.4. $\alpha \in E(OP_n)$ ve H_α, α içeren $\mathcal{H}$ −sınıfı olsun. $\beta = \Phi\,(K, R, i-1)$ olmak üzere $H_\alpha = \langle \beta \rangle$ ve $|H_\alpha| = |X_n\alpha|$ olur.

İspat: $\alpha \in E(OP_n)$ ve H_α, α içeren $\mathcal{H}$ −sınıfı olsun. $K_1, K_2, \dots, K_t$; $r_1, r_2, \dots, r_t$ ve i daha önce tanımlandığı gibi olsun. O zaman her bir $a_j \in K$, α nın kernel sınıflarının bir başlangıç noktasıdır ve $a_j\alpha = r_{j-i+1}$ olur. Ayrıca $H_\alpha = \{\Phi\,(K, R, i)\colon\ i = 1, 2, \dots, t\}$ olup, $|H_\alpha| = t = |X_n\alpha|$ olur. Ayrıca $\alpha \in E(OP_n)$ olduğundan $\{r_j\colon\ j = 1, 2, \dots, t\}$ kernel sınıflarının bir transversalı olur. Böylece her , $j = 1, 2, \dots, t$ için $r_{j-i+1} \in K_j$ olup,

$$K_j\beta = a_j\beta = r_{j-(i-1)+1} = r_{j-i+2},$$

olur. Bir $p = 1, 2, \dots, t$ için $a_{i-1}\beta^p = r_p$ olduğunu p üzerine tümevarımla gösterelim. $p = 1$ için; $a_{i-1}\beta = r_{i-1-i+2} = r_1$ olur. $p \geq 2$ ve hipotezin $p - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim. O zaman için $r_{p-1} \in K_{p+i-2}$ ve $K_{p+i-2}\beta = r_p$ olduğundan

$$a_{i-1}\beta^p = (a_{i-1}\beta^{p-1})\beta = r_{p-1}\beta = K_{p+i-2}\beta = r_p$$

olur. O halde $|\langle\beta\rangle| \geq t$ olup, $\beta \in H_\alpha$ ve $|H_\alpha| = t$ ve dolayısıyla, $H_\alpha = \langle\beta\rangle$ olur. □

Önerme 4.3.5. $\alpha, \beta \in OP_n$ olsun. O halde

$$\alpha\mathcal{D}^{OP_n}\beta \Leftrightarrow |X_n\alpha| = |X_n\beta|$$

olur.

İspat: ($\Leftarrow$) $\alpha, \beta \in OP_n$ ve $|X_n\alpha| = |X_n\beta| = t$ olsun. K, α nın kernel sınıflarının başlangıç noktalarının kümesi ve $R = X_n\beta$ olsun. γ, (K, R) tarafından belirlenen $\mathcal{H}$ −sınıfının herhangi bir üyesi olsun. O halde $\alpha\mathcal{R}\gamma\mathcal{L}\beta$ olup, $\alpha\mathcal{D}^{OP_n}\beta$ olur.

($\Rightarrow$) $\alpha, \beta \in OP_n$ ve $\alpha\mathcal{D}^{OP_n}\beta$ olsun. O halde $OP_n \subseteq T_n$ olduğundan $\alpha, \beta \in T_n$ olup $\alpha\mathcal{D}^{T_n}\beta$ olur. Böylece $\alpha\mathcal{D}^{T_n}\beta$ olduğundan $|X_n\alpha| = |X_n\beta|$ olur. □

Sonuç 4.3.6. D_t, α'yı içeren $\mathcal{D}$ −sınıfını göstersin. O zaman $D_t = \{\beta \in OP_n\colon |X_n\beta| = |X_n\alpha| = t\}$ olur. Ayrıca, D_t nin maksimal alt grupları t −dereceli devirli gruptur. Özel olarak OP_n nin her alt grubu devirlidir. □

OP_n nin eleman sayısını başka bir method ile de bulalım. Bir $1 \leq t \leq n$ için $|X_n\alpha| = t$ olacak şekilde $\alpha \in OP_n$ olsun. D_t, α içeren $\mathcal{D}$ −sınıfını

göstersin. Önerme 4.3.5. den $D_t = \{\beta \in OP_n\colon |X_n\beta| = t\}$ olur. $t = 1$ ise n tane sabit dönüşüm vardır. $t \geq 2$ olsun. Teorem 4.3.3. den β, $(K_\beta, X_n\beta, i)$ üçlüsü tarafından belirlenen dönüşüm olsun. Burada K_β, $a_i\beta = r_1$ $(a_i \in K_\beta)$ olacak şekilde i −nin seçimi ile birlikte β −nın kernel sınıflarının başlangıç noktalarının t −kümesidir. K_β ve $X_n\beta$ için $C(n,t)$ seçimi ve i için t tane seçim vardır. Dolayısıyla $t \geq 2$ için D_t nin derecesi:

$$|D_t| = tC(n,t)C(n,t)$$

olur. O halde OP_n nin derecesi:

$$|OP_n| = n + \sum_{t=2}^{n} t[C(n,t)]^2$$

olur. Dikkat edilirse,

$$\sum_{t=1}^{n} C\,(n-1, t-1)C(n,t) = \sum_{t=1}^{n} C(n-1, n-t)C(n,t)$$

sayısı $(1 + x)^{n-1}(1 + x)^n = (1 + x)^{2n-1}$ açılımında x^n in katsayısıdır. Böylece

$$\sum_{t=1}^{n} C\,(n-1, t-1)C(n,t) = C(2n-1, n)$$

olur. Ayrıca

$$\sum_{t=1}^{n} C\,(n-1, t-1)C(n,t) = \sum_{t=1}^{n} \left[\frac{(n-1)!}{(t-1)!\,(n-t)!} \cdot \frac{n!}{t!\,(n-t)!}\right]$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{t}{n} \cdot \left[\frac{n}{t} \cdot \frac{(n-1)!}{(t-1)!\,(n-t)!} \cdot \frac{n!}{t!\,(n-t)!}\right] = \sum_{t=1}^{n} \frac{t}{n} (C(n,t))^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} t(C(n,t))^2 = C(2n-1,n)$$

olduğundan,

$$\sum_{t=1}^{n} t[C(n,t)]^2 = nC(2n-1,n-1)$$

olur. Böylece,

$$nC(2n-1,n-1) = \sum_{t=1}^{n} t(C(n,t))^2 = n^2 + \sum_{t=2}^{n} t(C(n,t))^2$$

olduğundan da

$$\sum_{t=2}^{n} t(C(n,t))^2 = nC(2n-1,n-1) - n^2$$

ve dolayısıyla,

$$|OP_n| = n + \sum_{t=2}^{n} t(C(n,t))^2 = n + nC(2n-1,n-1) - n^2$$

olur.

4.4. O_n nin Eşlenik Altyarıgrupları

Bu bölümde Z_n ye göre O_n eşleniğinin alt yarıgruplarının bazı özelliklerine ve bunların OP_n yarıgrubu ile bağlantılarına çalışacağız.

$a = (1\ 2 \dots n)$, Z_n nin sabit üreteci olmak üzere

$$O_n{}^k = \{a^{-k} f a^k \colon\ f \in O_n\},\ \ (0 \leq k \leq n-1)$$

olsun.

Lemma 4.4.1. Her bir $0 \leq k \leq n-1$ için $O_n{}^k$, OP_n nin alt monoidi olur.

İspat: Her $f \in O_n$ ve her $0 \leq k \leq n-1$ için Teorem 4.2.9. ve Önerme 4.2.14. den $O_n Z_n \subseteq OP_n = Z_n O_n$ olduğundan $h = a^{-k} f a^k \in OP_n$ olup, $O_n{}^k \subseteq OP$ olur. Şimdi $h, f \in O_n$ ve $0 \leq k, m \leq n-1$ için $a^{-k} h a^k, a^{-k} f a^k \in O_n{}^k$ alalım. $hf \in O_n$ olduğundan $(a^{-k} h a^k)(a^{-k} f a^k) = a^{-k}(hf)a^k \in O_n{}^k$ olup, $O_n{}^k$, OP_n nin bir alt yarıgrubu olur. Ayrıca $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \in O_n$ olduğundan $a^{-k} I a^k = I \in O_n{}^k$ olup $O_n{}^k$, OP_n nin bir alt monoidi olur. □

Lemma 4.4.2. Her $0 \leq k \leq n-1$ ve her $h \in O_n$ için

$$h\varphi_k = h^{a^k} = a^{-k} h a^k$$

şeklinde tanımlanan $\varphi_k \colon O_n \to O_n{}^k \subseteq OP_n$ dönüşümü bir izomorfizm olur.

İspat: φ_k homomorfizmdir: Her $0 \leq k \leq n-1$ ve her $h, f \in O_n$ için

$$(hf)\varphi_k = a^{-k}(h\,f)a^k = a^{-k}h(a^k a^{-k})fa^k$$
$$=(a^{-k}ha^k)(\,a^{-k}fa^k) \;= (h\varphi_k)(f\varphi_k)$$

olup φ_k bir homomorfizm olur.

φ_k bire-birdir: Her $0 \leq k \leq n-1$ ve her $h, f \in O_n$ için $h\varphi_k = f\varphi_k$ ise $a^{-k}ha^k = a^{-k}fa^k$ olduğundan

$$h = (a^k a^{-k})h(a^k a^{-k}) = a^k(a^{-k}ha^k)a^{-k} = a^k(a^{-k}fa^k)a^{-k}$$
$$= (a^k a^{-k})f(a^k a^{-k}) = f$$

olur. Böylece φ_k bire-birdir.

Açıkça φ_k örten olduğundan φ_k izomorfizm olup, $O_n \cong {O_n}^k$ olur. □

$\varphi_k: O_n \to OP_n$ olarak alınır ve yukardaki gibi tanımlanırsa φ_k bir bire-bir homomorfizmdir. Fakat φ_k örten değildir.

Lemma 4.4.3. Her $0 \leq k \leq n-1$ için ${O_n}^k$, $\leq_k$ sıralama bağıntısına göre X_n üzerinde tüm sıra koruyan dönüşümlerin monoididir. Yani ${O_n}^k = O_n$ olur.

İspat: Herhangi bir $h \in {O_n}^k$ olsun. O zaman bir $f \in O_n$ için $h = a^{-k}fa^k$ olur. Herhangi $i, j \in X_n$ için $i \leq_k j$ olsun. O zaman $i - k \leq j - k$ olup,

$$ia^{-k}f = (i-k)f \leq (j-k)f = ja^{-k}f$$

olur. Böylece

$$ih = (i-k)f + k \leq_k (j-k)f + k = jh$$

olup, $h \in O_n$ ve dolayısıyla, ${O_n}^k \subseteq O_n$ olur.

Tersine $g \in O_n$ ve $f = a^k g a^{-k}$ olsun Eğer $i, j \in X_n$ için $i \leq j$ ise $i + k \leq_k j + k$ olur. O zaman $(i + k)g \leq_k (j + k)g$ olup,

$$if = i(a^k g a^{-k}) = (i + k)g - k \leq (j + k)g - k = j(a^k g a^{-k}) = jf$$

olur. Yani $f \in O_n$ olur. Böylece $g = a^{-k} f a^k \in {O_n}^k$ olup $O_n \subseteq {O_n}^k$ elde edilir. Dolayısıyla $O_n \subseteq {O_n}^k$ ve ${O_n}^k \subseteq O_n$ olduğundan $O_n = {O_n}^k$ olur. □

Hatırlatma: T herhangi bir yarıgrup olsun. $E = E(T)$, T nin idempotentlerinin kümesi olsun. O halde $\langle E \rangle$ ye T nin çekirdek yarıgrubu denir. Eğer $T = \langle E \rangle$ ise T ye yarıband denir.

S herhangi bir yarıgrup $\mathcal{G}$ herhangi bir Green bağıntısı ve $b \in S$ olmak üzere S yarıgrubunda b yi içeren $\mathcal{G}$ −sınıfını ${G_b}^S$ ile göstereceğiz.

Lemma 4.4.4. $g \in O_n$, ve $e \in E(OP_n)$ için $e\mathcal{R}^{OP_n} g$ olsun. O halde $e \in O_n$ ve $e\mathcal{R}^{O_n} g$ olur.

İspat: $e\mathcal{R}^{OP_n} g$ olduğundan $ker(e) = ker(g)$ olur. Yani

$$e = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_t \\ r_1 & r_2 & \dots & r_t \end{pmatrix} \text{ ve } g = \begin{pmatrix} K & K_2 & \dots & K_t \\ s_1 & s_2 & \dots & s_t \end{pmatrix}$$

olacak şekilde X_n nin $K_1, K_2 \dots, K_t$ konveks parçalanışı ve $r_l, s_l \in X_n$ $(1 \leq l \leq t)$ vardır. Ayrıca, $g \in O_n$ olduğundan $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_t$ olur. $i, j \in X_n$ için $i \leq j$ olsun. Eğer i, j aynı kernel sınıfında ise $ie = je$ olur. Aksi halde $i \in K_i = r_i e^{-1}$ ve $j \in K_j = r_j e^{-1}$ olacak şekilde $r_i, r_j \in X_n e$ vardır. Ayrıca $e \in E(OP_n)$ olduğundan $r_i \in K_i$ ve $r_j \in K_j$ olur. Kernel sınıfları X_n nin (sıralı) konveks

parçalanışı olduğundan $r_i \leq r_j$ olur. Böylece $ie = r_i \leq r_j = je$ olup, $e \in O_n$ olur.

O_n, OP_n nin regüler bir alt yarıgrubu olduğundan $e\mathcal{R}^{O_n}g$ olur. □

Teorem 4.4.5. Her $0 \leq k \leq n-1$ ve her $g \in E({R_f}^{O_n})$ için

$$g\varphi_k = g^{a^k} = a^{-k}ga^k$$

şeklinde tanımlanan $\varphi_k: E({R_f}^{O_n}) \to E({R_{a^{-k}fa^k}}^{OP_n})$ dönüşümü bire-bir ve örten olur. Dolayısıyla bir $0 \leq k \leq n-1$ ve $f \in O_n$ için $\alpha = a^k f \in OP_n$ ise $\left|E({R_f}^{O_n})\right| = \left|E({R_\alpha}^{OP_n})\right|$ olur.

İspat Dikkat edilirse burada tanımlanan φ_k daha önce tanımlanan φ_k nın $E({R_f}^{O_n})$ kümesine kısıtlaması olup, φ_k bire-birdir. Herhangi bir $e \in E({R_{a^{-k}fa^k}}^{OP_n})$ için $e^{a^{-k}} = a^k e a^{-k} \in OP_n$ alalım. Eğer $i \in im(e^{a^{-k}})$ ise $je^{a^{-k}} = i$ olacak şekilde $j \in X_n$ vardır. Ayrıca, $(j+k)e = l$ olsun. O zaman e bir idempotent olduğundan $le = l$ olur. Böylece

$$je^{a^{-k}} = j\left(a^k e a^{-k}\right) = (j+k)e - k = l - k = i$$

olduğundan $k = l - i$ olup,

$$ie^{a^{-k}} = i\ (a^k e a^{-k}) = (i+k)e - k = (i+l-i)e - k = le - k = l - k = i$$

olur. Dolayısıyla $e^{a^{-k}} = a^k e a^{-k} \in E(OP_n)$ olur. Ayrıca $(e^{a^{-k}})a^k = a^k e$ ve $(a^k e)a^{-k} = e^{a^{-k}}$ olduğundan $e^{a^{-k}}\mathcal{R}^{OP_n}a^k e$ olur. $e \in E({R_{a^{-k}fa^k}}^{OP_n})$

olduğundan da $e\mathcal{R}^{OP_n}a^{-k}fa^k$ olup, $ex = a^{-k}fa^k$ ve $e = (a^{-k}fa^k)y$ olacak şekilde $x, y \in OP_n$ vardır. Böylece

$$(a^k e)x = a^k(ex) = a^k(a^{-k}fa^k) = fa^k \quad \text{ve} \quad (fa^k)y = a^k(a^{-k}fa^k)y = a^k e$$

olup, $a^k e\mathcal{R}^{OP_n}fa^k$ olur. Ayrıca $fa^k = fa^k$ ve $(fa^k)a^{-k} = f$ olduğundan $fa^k\mathcal{R}^{OP_n}f$ olur. O halde

$$e^{a^{-k}}\mathcal{R}^{OP_n}a^k e\mathcal{R}^{OP_n}fa^k\mathcal{R}^{OP_n}f$$

olup, $e^{a^{-k}}\mathcal{R}^{OP_n}f$ olur. Böylece Lemma 4.4.4. den $e^{a^{-k}}\mathcal{R}^{O_n}f$ ve dolayısıyla $e^{a^{-k}} \in E(R_f{}^{O_n})$ olur. Ayrıca,

$$e^{a^{-k}}\varphi_k = a^{-k}e^{a^{-k}}a^k = a^{-k}(a^k e a^{-k})a^k = a^{-k}a^k e a^{-k}a^k = e$$

olup, φ_k örtendir.

φ_k bire-bir ve örten olduğundan

$$\left|E(R_f{}^{O_n})\right| = \left|E(R_{a^{-k}fa^k}{}^{OP_n})\right| = \left|E(R_{a^k fa^{-k}}{}^{OP_n})\right| = \left|E(R_{a^k f}{}^{OP_n})\right| = \left|E(R_\alpha{}^{OP_n})\right|$$

elde edilir. □

Bu sonuçlar $\mathcal{L}$ −sınıfları için söz konusu değildir. Genel olarak

$$L_f{}^{O_n} \subseteq L_f{}^{OP_n} = L_{a^m f}{}^{OP_n}$$

olduğundan $\left|E({L_f}^{O_n})\right| \leq \left|E({L_{a^m f}}^{OP_n})\right|$ olur. Fakat bu kapsama $n \geq 3$ için ${L_f}^{O_n} \subseteq {L_{a^m f}}^{OP_n}$ olup $\left|E({L_f}^{O_n})\right| < \left|E({L_{a^m f}}^{OP_n})\right|$ olur. Örneğin; $n = 3$ için $f = \binom{1\ 2\ 3}{1\ 2\ 2} \in O_3$ ve $\alpha = a^0 f \in OP_3$ alalım. Ayrıca, $\beta = \binom{1\ 2\ 3}{1\ 2\ 1} \in PO_3 \backslash O_3$ dönüşümünü göz önünde bulundurulur ise $\beta \in E({L_{\alpha\,=\,a^0 f}}^{OP_3})$ fakat $\beta \notin E({L_\alpha}^{O_3})$ olur. Böylece, $\left|E({L_f}^{O_3})\right| < \left|E({L_\alpha}^{OP_3})\right|$ olur.

$a = (1\ 2 \dots n)$, $f \in O_n$ ve f nin ${O_n}'$de ki bir tersi f' yani $f' \in V^{O_n}(f)$ olsun. Bir $0 \leq m \leq n-1$ için $\alpha = a^m f \in OP_n$ olsun. O zaman $f' a^{n-m} \in OP_n$,

$$(f' a^{n-m})(a^m f)(f' a^{n-m}) = (f' f f') a^{n-m} = f' a^{n-m}$$

ve

$$(a^m f)(f' a^{n-m})(a^m f) = a^m (f f' f) = a^m f$$

olduğundan $f' a^{n-m} \in V^{OP_n}(a^m f)$ olur.

Teorem 4.4.5 den $\left|E({R_f}^{O_n})\right| = \left|E({R_{\alpha = a^m f}}^{OP_n})\right|$ olduğunu ve yukarıdan $\left|E({L_f}^{O_n})\right| < \left|E({L_{a^m f}}^{OP_n})\right|$ olduğunu biliyoruz. Sonuç 3.7.28. den $|V^S(\alpha)| = \left|E({L_\alpha}^S)\right|\left|E({R_\alpha}^S)\right|$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$|V^{O_n}(f)| = \left|E({L_f}^{O_n})\right|\left|E({R_f}^{O_n})\right| < \left|E({L_{a^m f}}^{OP_n})\right|\left|E({R_{a^m f}}^{OP_n})\right| = |V^{OP_n}(a^m f)|$$

elde edilir. O halde $|V^{O_n}(f)| < |V^{OP_n}(a^m f)|$ olduğundan $a^m f \in OP_n$ elemanı $f' a^{n-m}$ $(f' \in V^{O_n}(f))$ formu dışında da terslere sahiptir.

Teorem 3.5.13. $\mathrm{T_n} \setminus \mathrm{S_n} = \langle E(\mathrm{T_n} \setminus \mathrm{S_n})\rangle$ olduğu gösterildi. O halde $\mathrm{T_n} \setminus \mathrm{S_n} = \langle E(\mathrm{T_n} \setminus \mathrm{S_n})\rangle$ olup $\mathrm{T_n} \setminus \mathrm{S_n}$ bir yarıband olur. Ayrıca, Teorem 3.5.14. den $O_n = \langle E(O_n)\rangle$ olduğundan O_n de bir yarıband olur.

Lemma 4.4.6. Her bir $\alpha \in O_n$ en az bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: Herhangi bir $\alpha \in O_n$ için $a\alpha = a$ olacak şekilde bir $a \in X_n$ olduğunu göstermeliyiz.

$$A = \{x \in X_n\colon\ x \leq x\alpha\}$$

olsun. $1 \leq 1\alpha$ olduğundan $1 \in A$ olup, $A \neq \emptyset$ olur. Ayrıca $a = maxA$ olsun. O halde $a \in A$ olduğundan $a \leq a\alpha$ ve $\alpha \in O_n$ olduğundan $a\alpha \leq (a\alpha)\alpha$ olur. Böylece $a\alpha \in A$ olup, a nın maksimalliğinden $a\alpha = a$ olur. □

Lemma 4.4.7. Bir $0 \leq k \leq n-1$ ve $f \in O_n$ için $\alpha = a^{-k}fa^k$ olsun. O zaman $x \in F(\alpha) = \{x \in X_n : x\alpha = x\}$ olması için gerek ve yeter koşul $x - k \in F(f) = \{x \in X_n : xf = x\}$ olmasıdır. Böylece, $\alpha \in U = \bigcup_{k=0}^{n-1} {O_n}^k$ ise $F(\alpha) \neq \emptyset$ olur.

İspat: Bir $0 \leq k \leq n-1$ ve $f \in O_n$ için $\alpha = a^{-k}fa^k$ yani $\alpha \in {O_n}^k \subseteq U$ olsun. O zaman bir $x \in X_n$ için

$$x \in F(\alpha) \Leftrightarrow x\left(a^{-k}fa^k\right) = x \Leftrightarrow (x-k)f + k = x$$
$$\Leftrightarrow (x-k)f = x - k \Leftrightarrow x - k \in F(f)$$

olur. □

Eğer $\alpha \in T_n$ için $i\alpha = j$ ise bir ij −yayı (kenarı) ile n köşe üzerinde bir yönlü grafik elde edilir. Yani grafiğin köşeleri; X_n, grafiğin kenarları; $i\alpha = j$ ise $i \to j$ (i,j) olur. Bu yönlü grafiğin her bir bağlantılı bileşeni bir tek devir (cycle) ve bu devirin noktalarına köklendirilmiş ağaç grafiklerinden oluşur. $\alpha \in T_n$ elemanının yönlü grafiğinin her bir C bileşeni aşağıdaki gibi tanımlanan bir $K(C)$

devirine sahiptir. Bir $x \in C$ için $x \in K(C)$ olması için gerek ve yeter koşul $x\alpha^p = x$ olacak şekilde $p > 0$ mevcut olmasıdır.

Lemma 4.4.8. $\alpha \in OP_n$ olsun. Eğer α nın bir sabit noktası var ise α nın (yönlü) grafiğinde aşikar olmayan bir devir yoktur.

İspat: $\alpha \in OP_n$ elemanının bir sabit noktası x mevcut olsun. Ayrıca, kabul edelim ki α, boyu (uzunluğu) $p \geq 2$ olan bir C devirine sahip olsun. Eğer $\leq_{x-1}$ sıralaması göz önüne alınır ise x, $(X_n, \leq_{x-1})$ in minimumu

$$x \leq_{x-1} x+1 \leq_{x-1} \dots \leq_{x-1} n \leq_{x-1} 1 \leq_{x-1} \dots \leq_{x-1} x-1$$

olur. Ayrıca, yazımda kolaylık için bu ispatta $\leq_{x-1}$ yerine sadece $\leq$ sembolünü kullanalım. . $p \geq 2$ olduğundan herhangi bir $i \in C$ için ya $i < i\alpha$ ya da $i > i\alpha$ olur. Kabul edelim ki her $i \in C$ için $i > i\alpha$ olsun. O zaman

$$i > i\alpha > (i\alpha)\alpha > \cdots > i\alpha^{p-1} > i\alpha^p = i$$

olup, $i > i$ çelişkisi elde edilir. Şimdi de en bir $i \in C$ için $i < i\alpha$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\alpha \in OP_n$ ve $x\alpha = x$ olduğundan

$$(x, i, i\alpha), (x, i\alpha, i\alpha^2), \dots, (x, i\alpha^j, i\alpha^{j+1})$$

birer devirdir. Eğer bir $j > 0$ için $i\alpha^j > i\alpha^{j+1}$ olsaydı $(x, i\alpha^j, i\alpha^{j+1})$ bir devir olduğundan

$$x \underset{\nearrow}{\smile} i\alpha^j \underset{\searrow}{\smile} i\alpha^{j+1} \underset{\nearrow}{\smile} x$$

olup, $i\alpha^{j+1} < x$ olur ki bu x in minimum oluşu ile çelişir. O halde her $j > 0$ için $i\alpha^{j} < i\alpha^{j+1}$ olup

$$i < i\alpha < i\alpha^2 < \cdots < i\alpha^{p-1} < i\alpha^p = i$$

olur ki bu durumda da $i < i$ çelişkisi elde edilir. Böylece bir sabit nokta içeren $\alpha \in OP_n$ elemanı $|C| = p \geq 2$ olacak şekilde bir C devirine sahip olamaz. □

Teorem 4.4.9. $\alpha \in OP_n$ olsun. O halde α nın (yönlü) grafiği farklı uzunluklarda iki devire sahip olamaz.

İspat: $\alpha \in OP_n$ olsun. Kabul edelim ki $t < r$ olmak üzere α nın t uzunluğuna sahip bir C_t devirine ve r uzunluğuna sahip bir C_r devirine sahip olsun. $\alpha^t \in OP_n$ elemanını göz önüne alalım. O zaman C_t nin her bir noktası α^t ile sabitlenir. Böylece $F(\alpha^t) \neq \emptyset$ olur. Ayrıca, her $x \in C_r$ için $x\alpha^t \neq x$ olup,

$$x\alpha^{tr} = x(\alpha^r)^t = x$$

olduğundan x, α^t nin bir devirinde bir noktadır. Ayrıca $x\alpha^t \neq x$ olup, bu devirin uzunluğu en az 2 olur ki bu durum Lemma 4.4.8. ile çelişir. .Böylece α nın yönlü grafiği farklı uzunlukta iki devire sahip olamaz. □

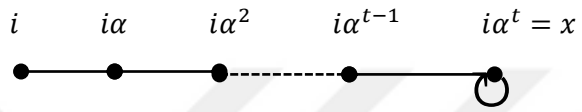
Lemma 4.4.10. $\alpha \in OP_n$ olsun. Eğer $F(\alpha) \neq \emptyset$ ise α nın yönlü grafiği bir ormandır. Ayrıca bu ormandaki her bir C bileşeni α nın sabit bir noktasının bulunduğu bir aralıktır.

İspat: $F(\alpha) \neq \emptyset$ ise o zaman Lemma 4.4.8. den α nın yönlü grafiği trivial olmayan bir devir yoktur. Böylece α nın yönlü grafiğinin her bir $C = C(x)$

bileşeni için $x\alpha = x$ olacak şekilde bir $x \in F(\alpha)$ vardır. Ayrıca, her bir $i \in C(x)$ için

$$i,\ i\alpha,\ \ldots,\ i\alpha^{t-1},\ i\alpha^{t} = x$$

olacak şekilde $t \in \mathbb{Z}^{+}$ vardır. O halde C bileşeni aşağıdaki şekildedir.



Böylece her bir bileşen trivial olmayan bir devire sahip olmadığından C bileşeni ağaç olup α nın yönlü grafiği ormandır. Böylece, k yeterince büyük alınırsa

$$C(x) = \{y \in X_n : y\alpha^k = x\}$$

olup, $\beta = \alpha^k$ alınır ise $C(x) = x\beta^{-1}$ (kernal sınıfı) olur. Böylece $\alpha^k \in OP_n$ olup, Konvekslik Lemması gereği $C(x) = x\beta^{-1}$ bir aralık olur. □

Lemma 4.4.11. $F(\alpha) \neq \emptyset$ olacak şekilde $\alpha \in OP_n$ ve C de α nın herhangi bir bileşeni olsun. O zaman

- $C\alpha \subseteq C$,
- $C = [i, j]$ olacak şekilde $i, j \in X_n$ vardır ve
- α nın C ye kısıtlaması $\leq_{i-1}$ sıralama bağıntısına göre bir sıra koruyan dönüşümdür.

İspat: Bileşen tanımından $C\alpha \subseteq C$ olduğu açık. Ayrıca, Lemma 4.4.10. dan α'nın C'ye kısıtlamasının sabit bir x noktasına sahip olduğu biliniyor. Eğer $C = X_n$

(yani α nın bir tek bileşeni var) ise $C = [x, x-1]$ olur. Ayrıca, $a \leq_{x-1} b$ olsun. O zaman x 'nin $\leq_{x-1}$ sıralamasına göre minimalliğinden $b\alpha = x$ veya $x <_{x-1} b\alpha$ olur. Eğer $b\alpha = x$ ise Konvekslik Lemması gereği

$$x = x\alpha = a\alpha = b\alpha$$

olur. Eğer $x <_{x-1} b\alpha$ ise $(x \underset{\nearrow}{\smile} a \underset{\nearrow}{\smile} b \underset{\searrow}{\smile} / x$ bir devir olup, Lemma 4.2.2. den $(x\alpha = x, a\alpha, b\alpha)$ de bir devir olur. Böylece $x \leq_{x-1} a\alpha \leq_{x-1} b\alpha$ yani, $a \leq_{x-1} b$ iken $a\alpha \leq_{x-1} b\alpha$ olup, α sıra koruyandır.

Şimdi $C \neq X_n$ olsun; ve herhangi bir $z \in X_n \setminus C$ seçelim. Bileşen tanımından $z\alpha \notin C$ olur. Ayrıca, Lemma 4.4.10. dan $C = [i, j]$ olacak şekilde $i, j \in X_n$ vardır. Bu durumda $j <_{i-1} z$ ve $j <_{i-1} z\alpha$ olur. Herhangi bir $y \in C$ olsun. Eğer $y \leq_{i-1} x$ ise bir $(y \underset{\nearrow}{\smile} x \underset{\nearrow}{\smile} z \underset{\searrow}{\smile} / y$ devir olup, Lemma 4.2.2. den

$$(y\alpha, x\alpha = x, z\alpha)$$

da devir olur. Böylece, $y\alpha <_{i-1} x\alpha = x$ olur. Eğer $x \leq_{i-1} y$ ise $(x \underset{\nearrow}{\smile} y \underset{\nearrow}{\smile} z \underset{\searrow}{\smile} / x$ bir devir olup, Lemma 4.2.2. den

$$(x\alpha = x, y\alpha, z\alpha)$$

da devir olur. Böylece $x \leq_{i-1} y\alpha$ olur.

Şimdi $\alpha|_C$ nın sıra koruyan olduğunu gösterelim. Herhangi $a, b \in C$ için $a <_{i-1} b$ olduğunu kabul edelim.

Eğer $a \leq_{i-1} x \leq_{i-1} b$ ise biraz önce gösterildiği üzere $a\alpha \leq_{i-1} x = x\alpha \leq_{i-1} b\alpha$ olur.

Eğer $a, b \leq_{i-1} x$ ise (a, b, x) bir devir olacağından $(a\alpha, b\alpha, x\alpha = x)$ de bir devir olur. Yukarda gösterildiği üzere $a\alpha, b\alpha \leq_{i-1} x$ olur. Eğer $a\alpha = x$ ise $a\alpha = x\alpha$ olup, Konvekslik Lemması gereği $a\alpha = b\alpha = x$ olur. Aksi halde $a\alpha <_{i-1} x$ ve $b\alpha <_{i-1} x$ olup, devirlilikten $a\alpha \leq_{i-1} b\alpha$ olur.

Eğer $x \leq_{i-1} a, b$ ise (x, a, b) bir devir olacağından $(x\alpha = x, a\alpha, b\alpha)$ de bir devir olur. Yukarda gösterildiği üzere $x \leq_{i-1} a\alpha, b\alpha$ olur. Eğer $a\alpha = x$ ise $a\alpha = x\alpha$ olup, Konvekslik Lemması gereği $a\alpha = b\alpha = x$ olur. Aksi halde $x <_{i-1} a\alpha$ ve $x <_{i-1} b\alpha$ olup, devirlilikten $a\alpha \leq_{i-1} b\alpha$ olur.

O halde $a, b \in C$ ve $a <_{i-1} b$ iken $a\alpha \leq_{i-1} b\alpha$ olup, $\alpha|_C$, $\leq_{i-1}$ sıralama bağıntısına göre sıra koruyandır. □

Teorem 4.4.12. $U = \bigcup_{k=0}^{n-1} {O_n}^k = \{\alpha \in OP_n : F(\alpha) \neq \emptyset\}$ olur.

İspat: $A = \{\alpha \in OP_n : F(\alpha) \neq \emptyset\}$ olsun. Herhangi bir $\alpha \in U$ için Lemma 4.4.7. den $F(\alpha) \neq \emptyset$ olup, $\alpha \in A$ olur. Böylece $U \subseteq A$ olur.

Tersine $\alpha \in A$ ve C de α nın herhangi bir bileşeni olsun. O zaman Lemma 4.4.11. den $C = [i, j]$ olacak şekilde $i, j \in X_n$ mevcut olup, $\alpha|_C$, $\leq_{i-1}$ sıralama bağıntısına göre bir sıra koruyan dönüşümdür. Ayrıca, (eğer mevcut ise) D de C den farklı herhangi bir bileşen olsun. O zaman Lemma 4.4.11. den $D = [k, l]$ olacak şekilde $k, l \in X_n$ mevcut olup, $\alpha|_D$ de $\leq_{k-1}$ sıralama bağıntısına göre bir sıra koruyan dönüşümdür. Ayrıca, $i \notin D$ ve D bir aralık olduğundan

$$\leq_{i-1} \cap (D \times D) = \leq_{k-1} \cap (D \times D)$$

olup, $\alpha|_D$ sıralama bağıntısına göre bir sıra koruyan dönüşüm olur. Dolayısıyla, $\alpha \in U$ olup, $A \subseteq U$ olur.

Böylece $U \subseteq A$ ve $A \subseteq U$ olduğundan $U = A$ olur. □

U ne $a = (1\ 2 \dots n)$ ne de onun idempotent olmayan kuvvetlerini içermez. Ayrıca $OP_n \setminus Z_n$ de U da olmayan elemanlar vardır. Örneğin; $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ise α, $a = (1234)$ ün bir kuvveti olmadığından dolayı $\alpha \notin Z_4$ olup, $\alpha \in OP_4 \setminus Z_4$. Ayrıca $F(\alpha) = \emptyset$ olduğundan $\alpha \notin U$ olur.

Sonuç 4.4.13. $E = E(OP_n)$ ve $U = \bigcup_{k=0}^{n-1} {O_n}^k$ olsun. O zaman $E \subseteq U$ ve $\langle E \rangle = \langle U \rangle$ olur.

İspat: Eğer $\alpha \in E(OP_n)$ ise $F(\alpha) \neq \emptyset$ olup, Teorem 4.4.12. den $\alpha \in U$ dur. Böylece $E(OP_n) \subseteq U$ olur, ve dolayısıyla, $\langle E \rangle \subseteq \langle U \rangle$ dur.

O_n bir yarıband olup, her bir $k = 0, 1, \dots, n-1$ için Lemma 4.4.1. den ${O_n}^k$ da bir yarıband olur. Eğer $\alpha \in U = \bigcup_{k=0}^{n-1} {O_n}^k$ ise $\alpha \in {O_n}^k$ olacak şekilde bir $0 \leq k \leq n-1$ vardır. Böylece, $\alpha \in \langle E({O_n}^k) \rangle$ olup, $E\left({O_n}^k\right) \subseteq E(OP_n) = E$ olduğundan $\alpha \in \langle E \rangle$ olur. O halde $U \subseteq \langle E \rangle$ olup, $\langle U \rangle \subseteq \langle E \rangle$ olur.

Böylece, $\langle E \rangle \subseteq \langle U \rangle$ ve $\langle U \rangle \subseteq \langle E \rangle$ olduğundan $\langle E \rangle = \langle U \rangle$ dur. □

Böylece Sonuç 4.4.13. den U, OP_n nin idempotent doğuraylı alt yarıgrubudur.

Lemma 4.4.14. $\alpha \in OP_n$ olsun. O halde bir $0 \leq p \leq n-1$ için $\alpha a^p \in U$ olur.

İspat: $\alpha \in OP_n$ olsun. O zaman Teorem 4.2.9. dan $\alpha = a^m g$ olacak şekilde $0 \leq m \leq n-1$ ve $g \in O_n$ vardır. O halde $\alpha a^{n-m} = a^m g a^{n-m} = a^{-(n-m)} g a^{n-m} \in {O_n}^{n-m} \subseteq U$. Böylece $p = n-m$ alındığında ispat tamamlanmış olur. □

Lemma 4.4.15. $R \subseteq X_n$ olsun. O halde f dönüşümünü, $a = (1\ 2 \dots n)$ olmak üzere, her $x \in X_n$ için

$$xf = \begin{cases} xa, & x \in R \text{ ise} \\ x, & x \notin R \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır ise $f \in OP_n$ olur. Ayrıca, $R \neq X_n$ ise $f \in U$ olur.

İspat: Her $1 \leq i \leq n-1$ için $(i-1)f \leq i \leq if$ olduğu tanımlamadan açıktır. Böylece,

$$1f \leq 2f \leq \cdots \leq (n-1)f$$

olur. Ayrıca, $n \in R$ ise $nf = 1$, aksi halde $nf = n$ olur. Böylece, $nf = 1$ ise

$$1 = nf \leq 1f \leq 2f \leq \cdots \leq (n-1)f$$

olup, $f \in OP_n$ olur. Eğer $nf = n$ ise

$$1f \leq 2f \leq \cdots \leq (n-1)f \leq nf = n$$

olup, $f \in O_n \subseteq OP_n$ olur.

Eğer $R \neq X_n$ ise $F(f) = X_n \setminus R$ olup, $F(f) \neq \emptyset$ olur. Böylece, Teorem 4.4.12. den $f \in U = \{\alpha \in OP_n : F(\alpha) \neq \emptyset\} = \bigcup_{k=0}^{n-1} {O_n}^k$ dır. □

Lemma 4.4.16. $u \in \langle U \rangle$ ve $u \neq 1_{X_n}$ olduğunu varsayalım. O zaman $ua \in \langle U \rangle$ olur.

İspat: $U = \bigcup_{m=0}^{n-1} a^{-m} O_n a^m$ olduğundan birim dönüşüm U nun ve O_n nin görüntü kümesi X_n olan tek üyesidir. Dolayısıyla $u \in \langle U \rangle$ ve $u \neq 1_{X_n}$ ise

$X_n u \neq X_n$ olur. Eğer $R = X_n u$ alınır ise Lemma 4.4.15. de tanımlanan $f \in OP_n$ için $f|_{X_n u} = a|_{X_n u}$ olur. O halde, her $x \in X_n$ için

$$x(ua) = (xu)a = (xu)f = x(uf)$$

olup, $ua = uf$ olur. Ayrıca, Lemma 4.4.15. den $f \in U$ olup, $u \in \langle U \rangle$ olduğundan $ua = uf \in \langle U \rangle$ olur. Böylece $ua \in \langle U \rangle$ elde edilir. □

Teorem 4.4.17. $\langle U \rangle = \langle E(OP_n) \rangle = (OP_n \setminus Z_n) \cup \{1_{X_n}\}$

İspat $\alpha \in (OP_n \setminus Z_n) \cup \{1_{X_n}\}$ olsun. $\alpha = 1_{X_n}$ ise sonuç açık. $\alpha \neq 1_{X_n}$, yani $\alpha \in OP_n \setminus Z_n$ olduğunu varsayalım. Lemma 4.4.14. den $\alpha a^p \in \langle U \rangle$ olacak şekilde bir $0 \leq p \leq n-1$ vardır ve $\alpha a^p \neq 1_{X_n}$ olur. İlgili ispatta görüldüğü üzere $p = n - m$ olup, $p + m \equiv 0 (mod\ n)$ olur. Dolayısıyla, Lemma 4.4.16. dan

$$\alpha = \alpha a^{p+m} = \alpha a^p a^m \in \langle U \rangle$$

olur. O halde $(OP_n \setminus Z_n) \cup \{1_{X_n}\} \subseteq \langle U \rangle$ olur.

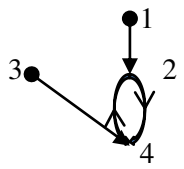
Tersine U , ve dolayısıyla, $\langle U \rangle$, OP_n nin görüntü kümesinde n eleman içeren, yani örten olan 1_{X_n} hariç hiçbir elemanını içermediğinden $\langle U \rangle \subseteq (OP_n \setminus Z_n) \cup \{1_{X_n}\}$ olur. Böylece, $\langle U \rangle = (OP_n \setminus Z_n) \cup \{1_{X_n}\}$ olur. Ayrıca,

$$Z_n \cap \langle U \rangle = \{1_{X_n}\}$$

olduğu da görülür. □

Sonuç olarak OP_n nin çekirdek yarıgrubu $\langle E(OP_n) \rangle = \langle U \rangle$ olur. OP_n nin singüler dönüşümleri alt monoidi $\left((OP_n \setminus S_n) \cup \{1_{X_n}\}\right)$ idempotent üreteçli olup

bir yarıband olmasına rağmen OP_n bir yarıband değildir. OP_n nin çekirdek yarıgrubu $\langle U \rangle$ da sabit noktası olmayan dönüşümler var. Örneğin Sonuç 4.4.13. den önce gösterilen $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ dönüşümünün yönlü grafiği bir bileşene sahip.



Yönlü grafiği iki bileşene sahip olan $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in OP_6$ alalım.

$F(\alpha) = \emptyset$ olduğundan $\alpha \notin U$ ancak $\alpha \in \langle U \rangle$ olur. Gerçekten;

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}}_{\in U} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{\in U}$$

olur.

4.5. Yön Değiştiren Dönüşümler (Orientation Reversing Mappings)

Tanım 4.5.1. $\alpha \in T_n$ olsun. $(1\alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha)$ dizisi anti-devir ise α ya X_n de **yön değiştiren dönüşüm (orientation revesing map)** denir. X_n de tüm yön değiştiren dönüşümlerin kümesi OR_n ile gösterilir.

S bir yarıgrup olsun. $e \in E(S)$ için e idempotentine karşılık gelen maksimal alt grup G_e olsun. Bir $e \in E(S)$ için $w \in G_e$ ve $w^2 = e$ ise $w \in S$ elemanına **involution** denir.

$$\gamma: X_n \to X_n$$
$$i \to n+1-i$$

dönüşümünü ele alalım. Örneğin, $n=6$ ise $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ olup, $\gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 1_{X_n}$ olur. T_n de birim dönüşüme karşılık gelen maksimal alt grup S_n olur. O halde $\gamma^2 = 1_{X_n}$ ve $\gamma \in S_6$ olup γ, T_6 de bir involution olur. Ayrıca,

$$(1\gamma, 2\gamma, \dots, n\gamma) = (n \underset{\searrow}{,} n-1 \underset{\searrow}{,} \dots, 1 \underset{\nearrow}{)} / n$$

olduğundan anti-devir olup, $\gamma \in OR_n$ olur. Şimdi

$$\Gamma_r: T_n \to T_n \qquad\qquad \Gamma_l: T_n \to T_n$$
$$\alpha \to \alpha\gamma \qquad\qquad \alpha \to \gamma\alpha$$

olarak Γ_r ve Γ_l dönüşümlerini tanımlayalım.

Lemma 4.5.2. Γ_r ve Γ_l dönüşümleri T_n de involution olur. Ayrıca, Γ_r, OP_n den OR_n ye ve Γ_l de OR_n den OP_n ye bire-bir ve örten dönüşüm olurlar.

İspat: γ nin tersinir ($\gamma^{-1} = \gamma \in S_n$) olduğundan Γ_r ve Γ_l dönüşümleri T_n üzerinde iki permütasyon, yani $\Gamma_r, \Gamma_l \in S_{T_n}$ olduğu açıktır. Ayrıca, $\gamma \in S_n$ bir anti-devir ve involution olduğundan her $\alpha \in OP_n$ ($\alpha \in OR_n$) için $\alpha\gamma \in OR_n$ ($\gamma\alpha \in OP_n$) olup,

$$\Gamma_r: OP_n \to OR_n \qquad\qquad \Gamma_l: OR_n \to OP_n$$
$$\alpha \to \alpha\gamma \qquad\qquad \alpha \to \gamma\alpha$$

dönüşümler iyi tanımlıdır. Herhangi $\alpha_1, \alpha_2 \in OP_n$ için $(\alpha_1)\Gamma_r = (\alpha_2)\Gamma_r$ olsun. O halde $\alpha_1\gamma = \alpha_2\gamma$ olup,

$$\alpha_1 = \alpha_1\gamma^2 = (\alpha_1\gamma)\gamma = (\alpha_2\gamma)\gamma = \alpha_2\gamma^2 = \alpha_2$$

olduğundan Γ_r bire-bir olur. Benzer şekilde Γ_l nin de bire-bir olduğu gösterilir. Her $\beta \in OR_n$ için $\beta\gamma \in OP_n$ ve $(\beta\gamma)\Gamma_r = \beta$ olduğundan Γ_r örtendir. Benzer şekilde Γ_l nin de örten olduğu gösterilir. Böylece,

$$|OP_n| = |OR_n|$$

olur. Şimdi Γ_r ve Γ_l nin birer involution olduğunu gösterelim. Her $\alpha \in OP_n$ için

$$\alpha(\Gamma_r)^2 = (\alpha\Gamma_r)\Gamma_r = (\alpha\gamma)\Gamma_r = (\alpha\gamma)\gamma = \alpha(\gamma^2) = \alpha$$

olur. Böylece ${\Gamma_r}^2 = 1_{T_n}$ olup, Γ_r bir involution olur. Benzer şekilde Γ_l nin de bir involution olduğu gösterilir. □

Sonuç 4.5.3. $OP_n \cdot OR_n = OR_n \cdot OP_n = OR_n$ ve $(OR_n)^2 = (OP_n)^2 = OP_n$ olur.

İspat: Yukarda tanımlanan $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_n$ olsun. Eğer $\delta \in OP_n \cdot OR_n$ ise $\delta = \alpha\beta$ olacak şekilde $\alpha \in OP_n$ ve $\beta \in OR_n$ vardır. O halde

$$\delta = \alpha\beta = \alpha\left(1_{X_n}\right)\beta = \alpha(\gamma^2)\beta = (\alpha\gamma)(\gamma\beta) \in OR_n \cdot OP_n$$

olup, $OP_n \cdot OR_n \subseteq OR_n \cdot OP_n$ olur. Eğer $\delta' \in OR_n \cdot OP_n$ ise $\delta' = \alpha'\beta'$ olacak şekilde $\alpha' \in OR_n$ ve $\beta' \in OP_n$ vardır. Ayrıca, Lemma 4.5.2 den $\alpha' = \alpha''\gamma$ olacak şekilde $\alpha'' \in OP_n$ ve $\beta' = \gamma\,\beta''$ olacak şekilde $\beta'' \in OR_n$ vardır. O halde

$$\delta' = \alpha'\beta' = (\alpha''\gamma)(\gamma\,\beta'') = \alpha''(\gamma\gamma)\beta'' = \alpha''\beta'' \in OP_n \cdot OR_n$$

olup, $OR_n \cdot OP_n \subseteq OP_n \cdot OR_n$ olur. Böylece

$$OP_n \cdot OR_n \subseteq OR_n \cdot OP_n \text{ ve } OR_n \cdot OP_n \subseteq OP_n \cdot OR_n$$

olduğundan $OR_n \cdot OP_n = OP_n \cdot OR_n$ olur.

Şimdi $OP_n \cdot OR_n = OR_n$ olduğunu gösterelim. Eğer $\sigma \in OR_n$ ise $\sigma = \alpha\gamma$ olacak şekilde $\alpha \in OP_n$ vardır. Ayrıca, $\gamma \in OR_n$ olduğundan $\sigma = \alpha\gamma \in OP_n \cdot OR_n$ olup $OR_n \subseteq OP_n.OR_n$ olur. Eğer $\delta \in OP_n \cdot OR_n$ ise $\delta = \alpha\beta$ olacak şekilde $\alpha \in OP_n$ ve $\beta \in OR_n$ vardır. Ayrıca Lemma 4.5.2 den $\beta = \eta\gamma$ olacak şekilde $\eta \in OP_n$ vardır. O halde $\alpha\eta \in OP_n$ olup, Lemma 4.5.2 den

$$\delta = \alpha\beta = \alpha(\eta\gamma) = (\alpha\eta)\gamma \in OR_n$$

olduğundan $OP_n \cdot OR_n \subseteq OR_n$ olur. Böylece

$$OR_n \subseteq OP_n \cdot OR_n \text{ ve } OP_n \cdot OR_n \subseteq OR_n$$

olup $OP_n \cdot OR_n = OR_n$ olur. Dolaysıyla, $OP_n \cdot OR_n = OR_n \cdot OP_n = OR_n$ elde edilir.

$(OR_n)^2 = (OP_n)^2 = OP_n$ olduğunu gösterelim. OP_n bir yarıgrup olduğundan kapalılık gereği $(OP_n)^2 \subseteq OP_n$ ve $1_{X_n} \in OP_n$ olduğundan $OP_n \subseteq 1_{X_n} \cdot OP_n \subseteq (OP_n)^2$ olup, $(OP_n)^2 = OP_n$ olur. Eğer $\alpha, \beta \in OR_n$ ise $\alpha = \mu\gamma$ olacak şekilde $\mu \in OP_n$ vardır. O halde $\gamma\beta \in OP_n$ ve OP_n bir yarıgrup olduğundan

$$\alpha\beta = (\mu\gamma)\beta = \mu(\gamma\beta) \in OP_n$$

olup, $(OR_n)^2 \subseteq OP_n$ olur. Eğer $\sigma, \delta \in OP_n$ ise $\delta = \gamma\eta$ olacak şekilde $\eta \in OR_n$ vardır. O halde $\sigma\gamma \in OR_n$ olduğundan

$$\sigma\delta = \sigma(\gamma\eta) = (\sigma\gamma)\eta \in (OR_n)^2$$

olup, $OP_n = (OP_n)^2 \subseteq (OR_n)^2$ olur. Böylece $(OR_n)^2 = (OP_n)^2 = OP_n$ olur. □

Dikkat edilirse $(OR_n)^2 = OP_n$ olup, OR_n kapalılık özelliğini sağlamadığından yarıgrup değildir. $OP_n \cup OR_n$ deki tüm dönüşümlerin kümesi P_n ile gösterilir.

Teorem 4.5.4. $P_n = OP_n \cup OR_n$, T_n nin bir alt monoididir.

İspat: $OP_n \subseteq T_n$ ve $OR_n \subseteq T_n$ olduğundan $P_n = OP_n \cup OR_n \subseteq T_n$ olur. Herhangi
$\alpha, \beta \in P_n$ alalım. Eğer $\alpha, \beta \in OP_n$ veya $\alpha, \beta \in OR_n$ ise Sonuç 4.5.3. den $\alpha\beta \in OP_n \subseteq P_n$ olup $\alpha\beta \in P_n$ olur. Eğer $\alpha \in OP_n$ ve $\beta \in OR_n$ veya $\alpha \in OR_n$ ve $\beta \in OP_n$ ise Sonuç 4.5.3. den $\alpha\beta \in OR_n \subseteq P_n$ olup $\alpha\beta \in P_n$ olur. O halde P_n, T_n nin bir alt yarıgrubudur. Ayrıca, $1_{X_n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \in OP_n \subseteq P_n$ olup, P_n, T_n nin alt monoidi olur.□

Ayrıca, Lemma 4.1.2. den aşağıdaki lemmayı ifade edebiliriz:

Lemma 4.5.5. $OP_n \cap OR_n = \{\alpha \in OP_n : |X_n\alpha| \leq 2\}$. □

Teorem 4.5.6. $|P_n| = 2|OP_n| - n - 2C^2(n, 2)$

İspat: $P_n = OP_n \cup OR_n$ ve $|OP_n| = |OR_n|$ olduğundan

$$|P_n| = |OP_n| + |OR_n| - |OP_n \cap OR_n| = 2|OP_n| - |OP_n \cap OR_n|$$

olur. Ayrıca, Lemma 4.5.5. den $OP_n \cap OR_n = \{\alpha \in OP_n : |X_n\alpha| \leq 2\}$ ve $|OP_n| = n + \sum_{t=2}^{n} |D_t| = n + \sum_{t=2}^{n} t(C(n,t))^2$ olduğundan

$$|OP_n \cap OR_n| = n + 2(C(n,2))^2$$

olur. Böylece

$$|P_n| = 2|OP_n| - n - 2(C(n,2))^2$$

olur. □

Ayrıca gerekli hesaplamalar yapılır ise

$$|P_n| = 2n + 2n\frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!} - 2n^2 - n - 2\left(\frac{n!}{(n-2)!\,2!}\right)^2$$

$$= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} - \frac{n}{2}(n^3 - 2n^2 + 5n - 2)$$

olur. Burada dikkat edilirse $n \leq 3$ için $P_n = T_n$ olduğu görülür.

Teorem 4.5.7. P_n bir regüler monoid olur.

İspat: $P_n = OP_n \cup OR_n$ ve OP_n nin bir regüler monoid olduğunu biliyoruz. O halde P_n nin bir regüler monoid olduğunu göstermek için OR_n nin elemanlarının tersinir olduğunu göstermek yeterlidir.

$\beta \in OR_n$ ise $\beta = \alpha\gamma$ olacak şekilde $\alpha \in OP_n$ vardır. OP_n de her eleman tersinir olduğundan $\alpha\alpha'\alpha = \alpha$ ve $\alpha'\alpha\alpha' = \alpha'$ olacak şekilde $\alpha' \in V(\alpha) \subseteq OP_n$ vardır. Ayrıca, her $\alpha' \in V(\alpha) \subseteq OP_n$ için

$$\beta(\alpha'\gamma)\beta = (\alpha\gamma)(\gamma\alpha')(\alpha\gamma) = \alpha(\gamma\gamma)\alpha'(\alpha\gamma) = (\alpha\alpha'\alpha)\gamma = \alpha\gamma = \beta$$

ve

$$(\alpha'\gamma)\beta(\alpha'\gamma) = (\gamma\alpha')(\alpha\gamma)(\gamma\alpha') = \gamma\alpha'\alpha(\gamma\gamma)\alpha' = \gamma(\alpha'\alpha\alpha') = \alpha'\gamma$$

olduğundan $\gamma\alpha' \in V(\alpha\gamma) = V(\beta)$ olur. □

Tersine eğer $\beta' \in V(\beta) \subseteq P_n$ ise benzer şekilde $\beta' = \alpha'\gamma$ olacak şekilde bir $\alpha' \in V(\alpha) \subseteq OP_n$ mevcut olduğu gösterilir. Böylece, $\beta \in OR_n$ için

$$V(\beta) = V(\alpha) \cdot \gamma$$

olur.

Lemma 4.5.8. $\alpha, \beta \in P_n$ olsun. O zaman $\alpha\mathcal{D}^{P_n}\beta$ olması için gerek ve yeter koşul $|X_n\alpha| = |X_n\beta|$ olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $\alpha, \beta \in P_n$ ve $\alpha\mathcal{D}^{P_n}\beta$ olsun. O halde $P_n \subseteq T_n$ olduğundan $\alpha, \beta \in T_n$ olup, $\alpha\mathcal{D}^{T_n}\beta$ olur. Dolayısıyla, $|X_n\alpha| = |X_n\beta|$ olur.

($\Leftarrow$) $\alpha, \beta \in P_n$ ve $|X_n\alpha| = |X_n\beta|$ olsun. Eğer $\alpha, \beta \in OP_n$ ise Önerme 4.3.5. den $\alpha\mathcal{D}^{OP_n}\beta$ olup, $\alpha\mathcal{D}^{P_n}\beta$ olur. Eğer $\alpha, \beta \in OR_n$ ise $\alpha\gamma, \beta\gamma \in OP_n$ olup, $|X_n\alpha| = |X_n\beta|$ olduğundan $|X_n\alpha\gamma| = |X_n\beta\gamma|$ olur. Böylece, Önerme 4.3.5. den $\alpha\gamma\mathcal{D}^{OP_n}\beta\gamma$ olur. Ayrıca, $\alpha\mathcal{R}^{P_n}\alpha\gamma$ ve $\beta\gamma\mathcal{R}^{P_n}\beta$ olduğundan $\alpha\mathcal{R}^{P_n}\alpha\gamma\mathcal{D}^{OP_n}\beta\gamma\mathcal{R}^{P_n}\beta$ olup, $\alpha\mathcal{D}^{P_n}\beta$ olur. Eğer $\alpha \in OP_n$ ve $\beta \in OR_n$ ise $\beta\gamma \in$

OP_n olduğundan $\alpha\mathcal{D}^{OP_n}\beta\gamma\mathcal{R}^{P_n}\beta$ olup $\alpha\mathcal{D}^{P_n}\beta$ olur. Benzer şekilde eğer $\alpha \in OR_n$ ve $\beta \in OP_n$ ise $\alpha\mathcal{R}^{P_n}\alpha\gamma\mathcal{D}^{OP_n}\beta$ olup, $\alpha\mathcal{D}^{P_n}\beta$ olur.□

Lemma 4.5.9. $3 \leq t \leq n$ ve $\alpha \in P_n$ için $|X_n\alpha| = t$ olsun. Eğer H_α, α içeren $\mathcal{H}$ −sınıfı ise $|H_\alpha| = 2t$ olur.

İspat: $3 \leq t \leq n$ ve $\alpha \in P_n$ için $|X_n\alpha| = t$ ve ${D_t}^{P_n}$ de α içeren $\mathcal{D}$ −sınıfını olsun. Lemma 4.5.8. den ${D_t}^{P_n} = \{\beta \in P_n\colon |X_n\beta| = t\}$ olur. Ayrıca, Lemma 4.5.5. den $t \leq 2$ için ${D_t}^{P_n} \cap OP_n = {D_t}^{P_n} \cap OR_n$ ve $t \geq 3$ için

$$ {D_t}^{P_n} = ({D_t}^{P_n} \cap OP_n) \cup ({D_t}^{P_n} \cap OR_n) $$

(${D_t}^{P_n} \cap OP_n$ ve ${D_t}^{P_n} \cap OR_n$ kümeleri ayrıktır) olur. Γ_r dönüşümünün ${D_t}^{P_n} \cap OP_n$ kümesine kısıtlaması $\Gamma_r\colon {D_t}^{P_n} \cap OP_n \to {D_t}^{P_n} \cap OR_n$ bire-bir ve örten dönüşüm olup, $\left|{D_t}^{P_n} \cap OP_n\right| = \left|{D_t}^{P_n} \cap OR_n\right|$ olur. Ayrıca, ${D_t}^{P_n} \cap OP_n = {D_t}^{OP_n}$ olduğundan $\left|{D_t}^{P_n}\right| = 2\left|{D_t}^{OP_n}\right|$ olur. ${D_t}^{P_n}$ ve ${D_t}^{OP_n}$ aynı sayıda $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ sınıflarına sahip olduğundan aynı sayıda $\mathcal{H}$ −sınıflarına sahiptir. Aynı $\mathcal{D}$ −sınıfı içindeki tüm $\mathcal{H}$ −sınıflarının eleman sayısı eşit olduğundan ${D_t}^{P_n}$ deki her $\mathcal{H}$ −sınıfının derecesi ${D_t}^{OP_n}$ deki her $\mathcal{H}$ −sınıfının derecesinin iki katıdır. Sonuç 4.3.6. dan $\alpha \in OP_n$, $\beta \in H_\alpha$ için $|H_\alpha| = |\langle\beta\rangle| = t$ olduğunu biliyoruz. O halde $\alpha \in P_n$ için $|H_\alpha| = 2t$ olur. □

Teorem 4.5.10. $t \geq 3$ için ${D_t}^{P_n}$ nin maksimal alt grupları $2t$ dereceli dihedral grup olur.

İspat: $2n$ dereceli $\boldsymbol{D_n}$ dihedral grubunun $n \geq 3$ için S_n nin bir alt grubu olup, aşağıdaki takdim ile tanımlanan grup olduğunu hatırlayalım:

$$\boldsymbol{D_n} = \langle x, y : \ x^n = 1, \ y^2 = 1, \ yx = x^{-1}y \rangle.$$

Tersine bu koşulları sağlayan herhangi bir grup $\boldsymbol{D_n}$ e izomorfiktir.

Bir t için $|X_n\alpha| = t$ olacak şekilde $\alpha \in E(P_n)$ olsun. $\alpha = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_t \\ r_1 & r_2 & \dots & r_t \end{pmatrix}$ olacak şekilde önceden tanımlandığı gibi $K_1, K_2, \dots, K_t$ yi α nın kernel sınıfları olarak ve $r_1, r_2, \dots, r_t$ yi α nın imajı olarak alalım. Ayrıca, $\delta = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_t \\ r_t & r_{t-1} & \dots & r_1 \end{pmatrix}$ olacak şekilde δ dönüşümünü tanımlayalım. Görüldüğü üzere $X_n\delta = X_n\alpha$ ve $ker\delta = ker\alpha$ olur. Ayrıca, $(r_t, r_{t-1}, \dots, r_1)$ dizisi anti-devir olduğundan $\delta \in OR_n$ olur. Şimdi de $\beta = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_{t-1} & K_t \\ r_2 & r_3 & \dots & r_t & r_1 \end{pmatrix} \in OP_n$ olacak şekilde Lemma 4.3.4. ün ispatında kullanılan dönüşümünü alalım. Bu durumda

$$\beta^t = \alpha \ \text{ ve } \ 0 < k < n \ \text{ için } \ \beta^k \neq \alpha$$

olur. (Dikkat edilirse $\boldsymbol{D_n}$ dihedral grubunda x yerine β, y yerine δ ve 1 yerine α alındı.) Her $j = 1, 2, \dots, t$ için

$$K_j\delta^2 = r_{t-j+1}\delta = r_{t-(t-j+1)+1} = r_j$$

olup $\delta^2 = \alpha$ olur. H_α da β dönüşümünün tersi $\beta^{-1} = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_t \\ r_t & r_1 & \dots & r_{t-1} \end{pmatrix}$ olarak tanımlanır ise her $j = 1, 2, \dots, t$ için

$$(K_j\beta^{-1})\delta = r_{j-1}\delta = r_{t-(j-1)+1} \quad \text{ve} \quad (K_j\delta)\beta = r_{t-j+1}\beta = r_{(t-j+1)+1}$$

olup, $\delta\beta = \beta^{-1}\delta$ olur.

Böylece, $\delta, \beta \in P_n$ $(\delta \in OR_n, \beta \in OP_n)$ için H_α, ${D_t}^{P_n}$ nin δ ve β doğurayları ile $\beta^t = \alpha$, $\delta^2 = \alpha$, $0 < k < n$ ise $\beta^k \neq \alpha$ ve $\delta\beta = \beta^{-1}\delta$

koşullarını sağlayan $2t$ dereceli dihedral alt grubudur. Dolayısıyla da ${D_t}^{P_n}$ nin maksimal alt grupları $2t$ dereceli dihedral gruplar olur. □

5. SONUÇ

Sıra koruyan dönüşümlerin monoidi O_n nin genişlemesi olan yön koruyan dönüşümlerin monoidi OP_n sıra koruyan dönüşümler gibi T_n nin bir alt monoididir, bir regüler monoiddir ve her kernel sınıfı konvekstir.

İki sıra koruyan dönüşümün çarpımı veya iki sıra değiştiren dönüşümün çarpımı sıra koruyan dönüşümdür. Bir sıra koruyan dönüşüm ile bir sıra değiştiren dönüşümün çarpımı ise sıra değiştiren dönüşümdür. Benzer şekilde iki yön koruyan dönüşümün veya iki yön değiştiren dönüşümün çarpımı yön koruyan dönüşümdür. Bir yön koruyan dönüşüm ile bir yön değiştiren dönüşümün çarpımı yön değiştiren dönüşümdür.

Eğer $\alpha \in O_n$ ise α, en az bir sabit noktaya sahiptir. Fakat $\alpha \in OP_n$ ise α, sabit bir noktaya sahip olmayabilir.

O_n nin çekirdek yarıgrubu $\langle E(O_n)\rangle = O_n$ iken OP_n nin çekirdek yarıgrubu $\langle U\rangle = \langle E(OP_n)\rangle = (OP_n \setminus Z_n) \cup \{1_{X_n}\}$ olup O_n nin aksine OP_n yarıband değildir.

KAYNAKLAR

Catarino, P.M., 1998. Monoids of Orientation-preserving Transformations of a Finite Chain and Their Presentations. Semigroups and Applications, Howie, J.M., Ruskuc, N., eds., World Scientific, Singapore, 39-46.

Catarino, P.M., Higgins, P.M., 1999. The Monoid of Orientation-preserving Mappings on a Chain. Semigroup Forum, 58: 190-206.

_____, 2002.The Pseudovariety Generated by All Semigroups of Orientation Preserving Transformations on a Finite Cycle. International Journal of Algebra and Computation, 12(3): 387-405.

Catarino, P., Levi, I., (2008). D_n −normal Semigroups of Transformations. Semigroup Forum, 76: 368-378.

Delgado, M., Fernandes, V.H., 2000. Abelian Kernels of Some Monoids of Injective Partial Transformations and an Application. Semigroup Forum, 61: 435-452.

Fernandes, V.H., 2000. The Monoid of All Injective Orientation Preserving Partial Transformations on a Finite Chain. Communications In Algebra, 28(7): 3401-3426.

_____, 2001. A Division Theorem for The Pseudovariety Generated by Semigroups of Orientation Preserving Transformations On a Finite Chain. Communications In Algebra, 29(1): 451-456.

_____, 2008. On Divisors of Pseudovarieties Generated by Some Classes of Full Transformation Semigroups. Algebra Colloquium, 15(4): 581-588.

Fernandes, V.H., Gomes, G.M.S., Jesus, M.M., 2005. Presentations For Some Monoids of Partial Transformations on a Finite Chain. Communications in Algebra, 33: 587-604.

_____, 2009. Congruences on Monoids of Transformations Preserving the Orientation on a Finite Chain. Journal of Algebra, 321: 743-757.

Fernandes, V.H., Honyam, P., Quinteiro, T.M., Singha, B., 2016. On Semigroups of Orientation-Preserving Transformations with Restricted Range. Communications in Algebra, 44: 253-264.

Ganyushkin, O., Mazorchuk, V., 2009. Classical Finite Transformation Semigroups. Springer-Verlag, London, 314 s.

Gomes, G.M.S., Howie, J.M., 1987. On The Ranks of Certain Finite Semigroups of Transformations. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 101: 395-403.

_____, 1992. On The Ranks of Certain Semigroups of Order-preserving Transformations. Semigroup Forum, 45: 272-282.

Grimaldi, R.P., 1994. Discrete and Combinatorial Mathematics, New York, 871 s.

Higgins, P.M., 1992. Techniques of Semigroup Theory, Oxford University Press, New York, 258 s.

_____, 1993. Combinatorial Results for Semigroups of Order-preserving Mappings. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 113: 281-296.

_____, 2019. Involution Matchings, the Semigroup of Orientation-preserving and Orientation-reversing Mappings, and Inverse Covers of The Full Transformation Semigroup. Semigroup Forum, 98: 669-689.

Howie, J.M., 1966. The Subsemigroup Generated By The Idempotents of a Full Transformation Semigroup. Journal London Math. Soc.,41: 707-716.

_____, 1970. Products of Idempotents in Certain Semigroups of Transformations. Universty of St.Andrews, 223-236.

_____, 1978. Idempotent Generators in Finite Full Transformation Semigroups. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 81A: 317-323.

_____, 1995. Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford University Press, New York, 351 s.

McAlister, D.B., 1998. Semigroups Generated by a Group and an Idempotent. Communications In Algebra, 26(2): 515-547.

Sun, L., Pei, H., Cheng, Z., 2007. Regularity and Green's Relations for Semigroups of Transformations Preserving Orientation and an Equivalence. Semigroup Forum, 74: 473-486.

Zhao, P.,Bo, X., Mei, Y, 2008. Locally Maximal Idempotent–Generated Subsemigroups of Singular Orientation Preserving Transformation Semigroups. Semigroup Forum, 77: 187-195.

Zhao, P., 2009. A Classification of Maximal Idempotent-generated Subsemigroups of Singular Orientation Preserving Transformation Semigroups. Semigroup Forum, 79: 377-384.

_____, 2018a. On the Nilpotent Ranks of the Principal Factors of Orientation-preserving Transformation Semigroups. Bull. Malays. Sci. Soc.,41: 1795-1803.

_____, 2018b. Maximal Regular Subsemibands of Finite Orientation-preserving Partial Transformation Semigroup. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 41: 1467-1475.

Wilson, R.J., 2010. Introduction to Graph Theory, London, 181 s.

ÖZGEÇMİŞ

İlköğretim, Ortaokul ve Lise öğrenimini Adana'da tamamladı. Lisans öğrenimine 2011 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü'nde başladı ve 2015 yılında mezun oldu. 2018 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2020 yılında Ç.Ü. Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı.