



GİRESUN
ÜNİVERSİTESİ



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YÖNEYLEM ARAŞTIRMASINDA ŞEBEKE
MODELLERİNE VEKİL KISIT UYGULAMALARI**

**MATEMATİK
ANA BİLİM DALI
Yüksek Lisans Tezi
Ayşe SAKALLIOĞLU
162110009
Mayıs 2019**

GİRESUN

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÖNEYLEM ARAŞTIRMASINDA ŞEBEKE
MODELLERİNE VEKİL KISIT UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe SAKALLIOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Hande GÜNAY AKDEMİR

Mayıs 2019

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÖNEYLEM ARAŞTIRMASINDA ŞEBEKE
MODELLERİNE VEKİL KISIT UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe SAKALLIOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Bu tez 17/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr.
Selahattin MADEN**

Jüri Başkanı

**Prof. Dr.
Erol EĞRİOĞLU**

Üye

**Dr. Öğr. Üyesi
Hande GÜNAY
AKDEMİR
Üye**

**Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Ayşe SAKALLIOĞLU

12/04/2019

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım boyunca bana yön veren, zaman ayıran ve her türlü desteği sağlayan; sürekli öğrencisi ve daimi danışanı olmaktan mutlu olduğum danışmanım, değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Hande GÜNEY AKDEMİR'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım sırasında değerli bilgi ve görüşlerini benimle paylaşan, desteklerini esirgemeyen bölüm hocalarıma ayırdıkları zaman ve ilgileri için minnettarım. Bu süreç boyunca manevi destekleri için sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	III
ŞEKİLLER LİSTESİ	IV
TABLolar LİSTESİ	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	4
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	6
3.1. Kesen Düzlem Prosedürü ve Geleneksel Vekil Dual Arama.....	8
3.2. Lineer Olmayan (P -Norm) Vekil Dual Yöntem	10
3.2.1. Parametre Seçimi	12
3.3. Vekil Çarpanların Hesaplanması için Alternatif Yöntemler.....	12
3.4. Şebeke Problemleri	19
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	21
4.1. Maksimum Akış Problemi.....	21
4.2. Sadece Varış Düğümünde Mesafe Penceresi ile En Kısa Yol Problemi..	22
4.2.1. Geleneksel yöntemi nasıl kullanabiliriz?	24
4.3. Çoklu Sırt Çantası Problemi.....	25
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	27
KAYNAKLAR	29
ÖZGEÇMİŞ	33

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

P : Primal tamsayılı programlama problemi

S : Uygun çözümler kümesi

μ : Lagrange veya Vekil çarpanlar vektörü

IP : Çoklu sırt çantası problemi

μ : Vekil çarpan

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1 Maksimum akış problemi [53].....	21
Şekil 4.2 Mesafe pencereli en kısa yol problemi [54].....	23



TABLolar LİSTESİ

Tablo 3.1 Örnek 3.4 için parametre seçimi	12
Tablo 3.2 Örnek 3.5 için Yarılama Algoritması	14
Tablo 3.3 Örnek 3.6 için Yarılama Algoritması	15
Tablo 3.4 Örnek 3.5 için İyileştirilmiş Yarılama Algoritması	16
Tablo 3.5 Örnek 3.6 için İyileştirilmiş Yarılama Algoritması	16
Tablo 3.6 Örnek 3.9 problemi için Algoritma 3, Aşama 1	18
Tablo 3.7 Örnek 3.9 problemi için Algoritma 3, Aşama 2	18
Tablo 3.8 Örnek 3.9 problemi için Algoritma 3, Aşama 3	18
Tablo 3.9 Örnek 3.9 problemi için Algoritma 3, Aşama 4	18
Tablo 3.10 Örnek 3.9 problemi için Algoritma 3, Aşama 5	18
Tablo 4.1 Çoklu Sırt Çantası Problemleri ve Genelleştirilmiş Atama Problemi	26
Tablo 4.2 PB6 Probleminin Çözüm Adımları	26

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASINDA ŞEBEKE MODELLERİNE VEKİL KISIT UYGULAMALARI

ÖZET

Optimizasyon probleminin kısıtlarının tek bir vekil kısıt haline getirildiği gevşetmeye vekil gevşetme adı verilir. Tamsayılı programlama için Lagrange dual arama yöntemlerine benzer olarak, geleneksel vekil dual arama yöntemi de çarpanları güncellemek için yardımcı lineer programlama problemlerini kullanır. Bu yöntem, minimizasyon amaçlı problemin optimal amaç değerine bir alt sınır sağlar ve uygun çözümler kümesini genişletir. Bu alt sınır Lagrange gevşetmesinin sağladığı alt sınırdan daha büyük veya eşittir, dolayısıyla vekil gevşetme daha iyi bir yaklaşım sağlayabilir. Dualite boşluğu olması durumlarında, geleneksel yöntem ile problemin optimal amaç değeri bulunamayabilir. Bu durumda, lineer olmayan vekil kısıt yöntemleri kullanılabilir.

Bu çalışmada, kaynak düğümlerinden varış düğümlerine minimum maliyetli uygun akışların belirlendiği minimum maliyetli akış problemleri üzerinde gevşetme stratejileri ve uygun parametre seçimleri tartışılmıştır. Ayrıca, çoklu sırt çantası modelleri için problem boyutlarını azaltan, çoklu vekil kısıtları kullanan ve yarılama algoritmalarına dayalı bir sezgisel geliştirilmiştir.

Anahtar kelimeler: Vekil dual arama, Lagrange dual arama, Dualite boşluğu, Tamsayılı programlama, Minimum maliyetli akış problemleri

SURROGATE CONSTRAINT APPLICATIONS TO NETWORK MODELS IN OPERATIONS RESEARCH

SUMMARY

The relaxation by aggregation of multiple constraints into a single surrogate constraint is called surrogate relaxation. Similar to the Lagrangian dual search methods for integer programming, the conventional surrogate dual method utilizes an auxiliary linear programming problem for updating the multiplier vector. The technique provides a lower bound for the optimal objective value of the minimization problem and enlarges the feasible region. This bound is tighter than the Lagrangian lower bound, therefore it can give a better approximation. In some case there exists a duality gap, the conventional surrogate dual search method fails to find the optimal solutions of the primal problem. In order to eliminate this issue, nonlinear surrogate constraint methods can be used.

In this study, relaxation strategies and choosing the appropriate parameters are discussed on minimum-cost flow problems which are to find the feasible flows from the source nodes to the sink nodes with minimum cost. In addition, a heuristic that reduces the number of constraints, and uses multiple surrogate constraints, and is based on bisection algorithms, is developed.

Keywords: Surrogate dual search, Lagrangian dual search, Duality gap, Integer programming, Minimum-cost flow problems

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Karar değişkenlerinin bölünemeyen çokluklar olduğu veya evet-hayır tipli kararların söz konusu olduğu birçok gerçek hayat probleminde ancak tamsayılı çözümler anlamlıdır. Eğer değişkenlerin tümü tamsayılı ise optimizasyon problemi pür tamsayılı, aksi halde karma tamsayılı programlama problemi adını alır. Tamsayılı programlama problemlerinin çözümünde temel fikir, tamsayılı olma şartının kaldırılmasıyla elde edilen gevşek problemin (lineer programlama (LP) gevşetmesinin) bilinen sürekli algoritmalarla çözülmesiyle orijinal probleme bir alt (veya üst) sınır bulunması, her adımda dallanmalarla tamsayılı şartların da sağlatılmaya çalışılması ve alt (veya üst) sınırın güncellenmesine dayanır. Bu yöntem Dal-sınır algoritması olarak bilinir.

$X \subseteq \mathbb{Z}^n$ tamsayılı noktaların sonlu bir kümesi olmak üzere, aşağıdaki

$$(P) \quad \begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ & g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

primal tamsayılı programlama problemini göz önüne alalım. (P) probleminin uygun çözümler kümesi:

$$S = \{ \mathbf{x} \in X \mid g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \}$$

şeklindedir. Burada, g_i fonksiyonları lineer ya da lineer olmayan çok değişkenli fonksiyonlardır. $(g_i(\mathbf{x}) \leq b_i)$ kısıtları *ana kısıtlar*, $(\mathbf{x} \in X)$ kısıtları *tamsayılı kısıtlar* olarak adlandırılacaktır.

$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T \geq 0$ Lagrange çarpanları vektörü, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))^T$ ve $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ olmak üzere, (P) probleminin kısıtları amaç fonksiyonuna eklenerek,

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b})$$

Lagrange gevşetmesi elde edilir.

Benzer şekilde, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T \geq 0$ vekil çarpanlar vektörü olmak üzere, (P) probleminin ana kısıtları tek bir vekil kısıt haline getirilerek,

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ & \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}) \leq 0, \\ & \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

Vekil gevşetmesi üretilir.

Bu gevşetmeler (P) probleminin S uygun çözümler kümesini genişletir ve bunların optimal çözümleri (P) probleminin optimal amaç değerine alt sınırlar sağlar. Bu alt sınırlar, tamsayılı çözüm yöntemlerinde başlangıç sınır değeri olarak kullanılabilir.

(P) problemi için herhangi bir algoritmanın, alt sınırların

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_k \leq \dots \leq f^*$$

şeklindeki azalmayan dizisini ürettiğini farz edelim. Eyer noktasının bulunabilmesi, yani en sıkı gevşetmenin elde edilebilmesi için f_k değeri maksimize edilmelidir.

O halde, $\theta_L(\boldsymbol{\mu}) = \min_{\mathbf{x} \in X} \{ f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}) \}$ olmak üzere, Lagrange dual problemi:

$$\max_{\boldsymbol{\mu} \geq 0} \theta_L(\boldsymbol{\mu})$$

şeklinde tanımlanır. Dual problem, (P) probleminin ana kısıtlarını içine alan yeni bir amaç fonksiyonu üretir.

Benzer şekilde, $\theta_s(\mu) = \min_{\mathbf{x} \in X} \{ f(\mathbf{x}) \mid \mu^T (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}) \leq 0 \}$ olmak üzere, (P) probleminin ana kısıtlarını tek bir vekil kısıt haline getiren vekil dual problemi:

$$\max_{\mu \geq 0} \theta_s(\mu)$$

şeklinde tanımlanır.

Daha az kısıtlayıcı (gevşek) bir model kullanmaktaki ana fikir, tamsayılı programlamadaki LP gevşetmesinde olduğu gibi uygun olmadığı halde optimale yakın çözümler bulmak, primal probleme göre boyutu ve karmaşıklığı azaltmaktır.

Noktalar ve çizgiler kümesinden oluşan, çizgilerle bazı nokta çiftlerini birleştiren yapıya şebeke veya graf denir. Burada noktalar yerine düğümler veya köşeler; çizgiler yerine de kenarlar, dallar veya bağlantılar kullanılabilir. Bir haritada yollar; kenarlar ve kavşaklar ise düğümler olarak görülebilir. Hatta bir moleküldeki atomlar ve kimyasal bağlar şebekelerle temsil edilebilir. Taşıma, elektrik ve iletişim şebekeleri gibi şebeke yapılarıyla günlük hayatımızda sıkça karşılaşmaktayız. Yöneylem Araştırmasının konuları arasında yer alan, üretim, dağıtım, proje planlama, kaynak yönetimi ve finansal planlama gibi alanlarda da şebeke temsilleri yaygın bir biçimde kullanılmaktadır.

Bir düğümden diğer düğümlere akış mümkünse bu düğüme arz (kaynak) düğümü; diğer düğümlerden bir düğüme akış mümkünse bu düğüme talep düğümü adı verilir. Bu çalışmada özellikle, kaynak düğümlerinden varış düğümlerine minimum maliyetli uygun akışların belirlendiği Minimum maliyetli akış (Minimum cost flow) problemlerine odaklanılmaktadır.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Vekil kısıt kavramı ilk kez Balas [1], Geoffrion [2] ve Glover'in [3, 4] çalışmalarında yapılandırılmıştır. Glover'e [4] göre, bir vekil kısıt, bir tamsayı programlama probleminin kısıtları tarafından işaret edilen ve ana kısıtların bir sonucu olan yararlı bilgileri yakalamak için tasarlanmış bir eşitsizliktir. Matematiksel programlamada vekil dualitenin teorik incelemeleri [5-7] çalışmalarında verilmiştir. Karwan ve Rardin [8] tarafından Lagrange ve vekil dual problemlerden elde edilen sınırlar arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

Minimum maliyetli akış problemlerine vekil gevşetme uygulamalarından oluşan ilgili literatür şu şekildedir. Glover ve ark. [9] büyük ölçekli işgücü planlama problemi için gevşetme stratejilerini araştırmıştır. Venkataramanan ve ark. [10,11] şebeke optimizasyon problemleri için vekil kısıtları kullanmıştır. Kroon ve Ruhe [12] bazı ek kabuller altında vekil kısıtlar ve parametrik akışlara dayalı bir yöntem sunmuştur. Rogers ve ark. [13] vekil modelleme uygulama alanlarını kümeleme metodolojisi yaklaşımıyla incelemiştir. Şebeke akış problemlerinin bir uygulaması olan çizelgeleme problemi, problemin parametrik programlama ve vekil kısıtlara dayalı çözüm yöntemi [14]'de verilmiştir. Chu ve Beasley [15] çok boyutlu sırt çantası problemlerinin çözümü için vekil gevşetme ve genetik algoritmaya dayanan sezgisel bir yaklaşım önermiştir. Vekil gevşetmeleri kullanan sırt çantası problemlerinin diğer uygulamaları [16-19]'da verilmiştir. Narciso ve Lorena [20] maksimum kâr amaçlı atama probleminin optimal çözümünün bulunmasında Lagrange ve vekil gevşetmeleri bir arada kullanmıştır. Yazarlar aynı tekniği gezgin satıcı problemine uygulamıştır [21]. Wynants [22] blok vekil gevşetmesi adı verilen bir prensibe dayalı bir ayrışım tekniğini göz önüne almıştır. Cappanera ve ark. [23] fabrika yeri seçimi problemi için çevresel faktörleri göz önüne almış ve her iki gevşetmeyi birlikte kullanmıştır. Chen ve Pinto [24] kimyasal tedarik zinciri problemine Lagrange/vekil gevşetme yöntemini uygulamıştır. Nagih ve Soumis [25]

en kısa yol probleminin kaynak kısıtlarını gevşeten, yine Lagrange ve vekil dualiteye dayalı bir teknik önermiştir. Yu ve ark. [26] büyük ölçekli bir envanter rotalama probleminin çözümü için Lagrange gevşetmesi ve vekil gradyent yöntemlerini birlikte kullanmıştır. [27]'de yazarlar Lagrange/vekil sezgisellerinin yardımıyla dağıtım ve öbek büyüklüğü belirleme probleminin çözümü üzerinde durmuştur. Küme kapsama problemleri için bazı vekil kısıt normalizasyon kuralları [28]'de verilmiştir. Vekil modellemeyi kullanan diğer küme kapsama ve minimum örten ağaç uygulamaları [29-33]'de yer almaktadır. Jain ve ark. [34]'de pazar bölümlleme problemi uygulamasıyla tamsayılı programlama problemlerinin üst sınırları hesaplamak için yeni bir yöntem önermiştir. Diğer uygulamalar, proje çizelgeleme [35], ham petrol dağıtımı [36,37], enerji tüketimi [38], lokasyon seçimi [39-41] olarak verilebilir. Ayrıca, küçük boyutlu şebeke modellerine vekil gevşetme yaklaşımlarında parametrelerin ve çözüm stratejilerinin doğru seçilmesi için uygulama tabanlı bir çalışma için okuyucu [42]'ye başvurabilir.

Bu tezin ana katkısı, uygun parametrelerin seçilmesi için uygulamaya dayalı bir tartışma sunmasıdır. İkincil hedefimiz, bazı küçük boyutlu şebeke modellerinin yeniden formüle edilmesindeki gevşetme stratejilerini belirlemektir. Bunların yanı sıra, optimal vekil çarpanları hesaplamakta kullanılmış yarılama yöntemlerine dayalı, çoklu vekil kısıtları kullanan sezgisel bir algoritma önerilmiştir.

Tez çalışmasının bu kısımdan sonraki planı şu şekildedir. Bir sonraki Materyal ve Yöntem bölümünde, basit örneklerin yardımıyla vekil dualite hakkında bazı ön bilgiler ve Lagrange dualitesi ile karşılaştırmalar verilmiştir. Geleneksel vekil dualite yöntemi, geleneksel vekil dual yöntem başarısız olduğunda kullanılabilecek; doğrusal olmayan p -norm vekil kısıtlama yöntemi ve diğer bazı ön bilgiler yine bu bölümde anlatılmıştır. Araştırma Bulguları bölümü Bölüm 4'te, bazı sayısal uygulamalar verilmiştir. Yine Bölüm 4'te çoklu sırt çantası problemleri için ilk kez tez çalışmamızda önerilmiş sezgisel yöntem açıklanmıştır. Çalışma, Tartışma ve Sonuç bölümü ile tamamlanmıştır.

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Teorem 3.1 ile Lagrange alt sınırlarının vekil alt sınırlarından daha küçük veya eşit olduğu kanıtlanmıştır [5]. Bu nedenle, dal-sınır prosedürleri ile şebeke problemlerinin çözümünde vekil kısıtlamaların kullanılması, daha iyi alt sınırların hesaplanması için güçlü bir alternatif sağlayabilir. Güçlü gevşetmeler, problemlerin çözümlerine daha doğru yaklaşımlar sağlar, ancak primal probleme göre çözümü daha kolay olmalıdır.

Teorem 3.1. (Güçlü Vekil Dualite). Vekil alt sınırı, Lagrange alt sınırından daha büyük veya eşittir.

İspat. $\forall \mathbf{x} \in X$ için $\boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}) \leq 0$ olacak şekilde en az bir $\boldsymbol{\mu} \geq 0$ mevcut olsun. O halde, $\forall \mathbf{x} \in X$ ve yukarıda tanımlanan $\forall \boldsymbol{\mu} \geq 0$ için,

$$\theta_L(\boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{b}) \leq f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}) \leq f(\mathbf{x})$$

ve dolayısıyla,

$$\theta_L(\boldsymbol{\mu}) \leq \min_{\mathbf{x}} \{ f(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}) \leq 0, \mathbf{x} \in X \} = \theta_s(\boldsymbol{\mu}).$$

Buradan, $\max_{\boldsymbol{\mu} \geq 0} \theta_L(\boldsymbol{\mu}) \leq \max_{\boldsymbol{\mu} \geq 0} \theta_s(\boldsymbol{\mu})$ olduğu söylenir ve ispat tamamlanır.

Tanım 3.2. Primal ve dual amaç fonksiyonların optimal değerleri arasındaki farka dualite boşluğu denir.

Örnek 3.3. Aşağıdaki basit örneği [43] ele alalım:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 \\ & x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0, \\ & x_1, x_2 = 0, 1, 2 \text{ ya da } 3. \end{aligned}$$

Uygun çözümler kümesi, optimal çözüm ve optimal amaç değeri sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$S = \{(0,0)^T, (1,0)^T, (2,0)^T, (3,0)^T, (0,1)^T, (1,1)^T\}, \mathbf{x}^* = (3,0)^T, f(\mathbf{x}^*) = -3.$$

İlgili Lagrange dual problemi aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$\begin{aligned} \theta_L(\mu) &= \min_{x_1, x_2} \{-x_1 - x_2 + \mu(x_1 + 2x_2 - 3) : \mathbf{x} \in X\} \\ &= \min_{x_1, x_2} \{(\mu - 1)x_1 + (2\mu - 1)x_2 - 3\mu : \mathbf{x} \in X\}. \end{aligned}$$

Bu problemin optimal çözümü:

$$x_1^* = \begin{cases} 3, & \mu \leq 1 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}, \quad x_2^* = \begin{cases} 3, & \mu \leq 1/2 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olur.

$$\theta_L(\mu) = \begin{cases} 6\mu - 6, & 0 \leq \mu \leq 1/2 \\ -3, & 1/2 \leq \mu \leq 1 \\ -3\mu, & \mu \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonunu maksimize edersek, μ^* , $[1/2, 1]$ kapalı aralığından herhangi bir değer ve $\theta_L(\mu^*) \in [1/2, 1] = -3$ olarak bulunur. Dolayısıyla, dualite boşluğu yoktur.

Örnek 3.4. Aşağıdaki basit örneği [44] ele alalım:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 \\ & 3x_1 + 2x_2 - 9 \leq 0, \\ & x_1 + 4x_2 - 8 \leq 0, \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}. \end{aligned}$$

Uygun çözümler kümesi, alternatif optimal çözümler ve optimal amaç değeri sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} S &= \{(0,0)^T, (1,0)^T, (2,0)^T, (3,0)^T, (0,1)^T, (1,1)^T, (2,1)^T, (0,2)^T\}, \\ \mathbf{x}^* &= (0,2)^T, (2,1)^T, \\ f(\mathbf{x}^*) &= -4. \end{aligned}$$

Genel olarak, primal problem ile en iyi gevşetmenin bile optimal değerleri arasında bir dualite boşluğu vardır. Karşılık gelen Lagrange dual problemi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} \max_{\mu \geq 0} \theta_L(\mu) \\ \theta_L(\mu) = \min_{x_1, x_2} \{ -x_1 - 2x_2 + \mu_1(3x_1 + 2x_2 - 9) + \mu_2(x_1 + 4x_2 - 8) : \mathbf{x} \in X \} \\ = \begin{cases} 16\mu_1 + 17\mu_2 - 15, & 2\mu_1 + 4\mu_2 \leq 2, 3\mu_1 + \mu_2 \leq 1 \\ 6\mu_1 - 3\mu_2 - 5, & 2\mu_1 + 4\mu_2 > 2, 3\mu_1 + \mu_2 \leq 1 \\ \mu_1 + 12\mu_2 - 10, & 2\mu_1 + 4\mu_2 \leq 2, 3\mu_1 + \mu_2 > 1 \\ -9\mu_1 - 8\mu_2, & 2\mu_1 + 4\mu_2 > 2, 3\mu_1 + \mu_2 > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Bu problemin optimal çözümü $(\mu_1^*, \mu_2^*)^T = (1/5, 2/5)^T$, optimal amaç değeri $\theta_L(\mu_1^*, \mu_2^*) = -5$ olur. Primal ve dual problemlerin optimal amaç değerleri birbirinden farklı olduğundan, dualite boşluğu vardır.

3.1. Kesen Düzlem Prosedürü ve Geleneksel Vekil Dual Arama

Kullanılan algorithmada normalize edilmiş vekil çarpanlar kullanılmaktadır, yani $i = 1, \dots, m$ için $\mu_i \geq 0$ ve $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m \leq 1$ alınmaktadır. $g_i(\mathbf{x}) \leq b_i$ kısıtlarının bir alt kümesi, hesaplanan $\mu^T(\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b})$ ağırlıklı toplamı (vekil kısıt) ile değiştirilmektedir. Başlangıç vekil çarpanları rastgele seçilir ve başlangıç alt sınır $-\infty$ olarak alınır. Daha büyük bir alt sınır elde ediliyorsa ilgili adımda alt sınır güncellenir. Adım 1'de, gevşetilmiş problem çözülür, eğer ana kısıtlar sağlanıyorsa durulur. Aksi takdirde, yeni vekil çarpanlar hesaplanır, ardından Adım 1'e dönülüp aynı işlemler yinelenir. Ayrı bir aşamada, kısıt ihlal seviyelerini kullanan yardımcı LP problemleri vasıtasıyla yeni çarpanlar hesaplanır. Herhangi bir kısıt ihlal edilirse, o kısıtla ilgili vekil çarpan sonraki yinelemede artacaktır [45].

Bu algoritma ile kesenler kullanılarak uygun çözümler kümesinin nasıl daraltıldığını Örnek 3.4 üzerinde gösterelim.

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 \\
& \mu_1(3x_1 + 2x_2 - 9) + \mu_2(x_1 + 4x_2 - 8) \leq 0, \\
& x_1, x_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

vekil gevşetmesinde başlangıç çarpan vektörü $\mu^{(0)} = (0.5, 0.5)^T$ olarak alındığında, gevşetilmiş problemin optimal çözümü $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2)^T$ ve optimal amaç değeri $f(\mathbf{x}^{(1)}) = -5$ olarak elde edilir. Alt sınır -5 olarak güncellenir. Bu çözüm, $3x_1 + 2x_2 - 9 = -2 < 0$ şeklinde ilk kısıtı sağlar, ancak $x_1 + 4x_2 - 8 = 1 > 0$ olduğundan ikinci kısıt sağlanmaz. İlk iterasyonda kullanılan yardımcı LP problemi:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \beta \\
& \beta \leq -2\mu_1 + \mu_2, \\
& \mu_1 + \mu_2 \leq 1, \\
& \mu_1, \mu_2 \geq 0,
\end{aligned}$$

şeklinde. Bu problemin optimal çözümü $\mu^{(1)} = (0, 1)^T$ olarak bulunur. Bu ağırlıklar gevşetilmiş (3.1) probleminde kullanıldığında, optimal çözüm $\mathbf{x}^{(2)} = (4, 1)^T$ ve optimal amaç değeri $f(\mathbf{x}^{(2)}) = -6$ olarak elde edilir. Daha büyük bir alt sınır elde edilmediğinden bu adımda alt sınır güncellenmez. Benzer şekilde, bu çözüm ikinci kısıtlamayı $x_1 + 4x_2 - 8 = 0 \leq 0$ şeklinde sağlar, ancak ilkinin $3x_1 + 2x_2 - 9 = 5 > 0$ olarak sağlamaz. Bir sonraki iterasyonda, ilk yardımcı probleme $\beta \leq 5\mu_1$ kısıtı eklenerek elde edilen ikinci yardımcı LP probleminden vekil çarpanlar $\mu^{(2)} = (0.125, 0.875)^T$ olarak güncellenir. Bu çarpanlar gevşetilmiş (3.1) probleminde kullanılarak optimal çözüm ve optimal amaç değeri sırasıyla $\mathbf{x}^{(3)} = (3, 1)^T$ ve $f(\mathbf{x}^{(3)}) = -5$ olarak elde edilir. İkinci kısıt $x_1 + 4x_2 - 8 = -1 < 0$ şeklinde sağlanırken, ilkinin $3x_1 + 2x_2 - 9 = 2 > 0$ olarak sağlanmaz. Yine, $\beta \leq 2\mu_1 - \mu_2$ kısıtı eklenerek elde edilen üçüncü yardımcı LP probleminin optimal çözümü $\mu^{(3)} = (0, 0)^T$ olur. Böylece, en iyi alt sınır -5 olarak bulunmuştur. Örnek 3.4 gibi dualite

boşluğunun olduğu bazı durumlarda, geleneksel vekil dual arama yöntemi ile primal problemin optimal çözümleri bulunamaz.

Örnek 3.4 üzerinde Lagrange ve vekil çarpanları arasındaki ilişkiyi açıklamak üzere,

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 2x_2 + \lambda(\mu_1(3x_1 + 2x_2 - 9) + \mu_2(x_1 + 4x_2 - 8)) \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \end{aligned}$$

Lagrange/Vekil gevşetmesi [20] kullanılacaktır. Hatırlanacak olursa, Lagrange çarpanları:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda\mu_1 = \frac{1}{5}, \\ \lambda_2 &= \lambda\mu_2 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

olarak bulunmuştu. Buradan, $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{2}$ elde edilir. Dolayısıyla, normalize

edilmiş $\mu_1 = \frac{1}{3}, \mu_2 = \frac{2}{3}$ çarpanları gevşetilmiş (3.1) probleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 2x_2 \\ & x_1 + 2x_2 - 5 \leq 0, \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \end{aligned}$$

elde edilir, alternatif optimal çözümler $\mathbf{x}^* = (1, 2)^T, (3, 1)^T$ veya $(5, 0)^T$ ve optimal amaç değeri $f(\mathbf{x}^*) = -5$ şeklindedir.

3.2. Lineer Olmayan (P-Norm) Vekil Dual Yöntem

Bu yöntem, dualite boşluğunu azaltmak için uygun çözümler kümesini yeniden şekillendirir [46]. $\Lambda = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ olmak üzere, $p \in [1, \infty]$ reel sayısı için yöntemde kullanılacak sırasıyla ağırlıklı p -norm ve ağırlıklı ∞ -normaşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|\Lambda \mathbf{g}(\mathbf{x})\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^m [\mu_i g_i(\mathbf{x})]^p \right\}^{1/p},$$

$$\|\Lambda \mathbf{b}\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^m [\mu_i b_i]^p \right\}^{1/p} \text{ ve}$$

$$\|\Lambda \mathbf{g}(\mathbf{x})\|_\infty = \max \{ \mu_1 g_1(\mathbf{x}), \mu_2 g_2(\mathbf{x}), \dots, \mu_m g_m(\mathbf{x}) \},$$

$$\|\Lambda \mathbf{b}\|_\infty = \max \{ \mu_1 b_1, \mu_2 b_2, \dots, \mu_m b_m \}.$$

$\mu_1 b_1 = \dots = \mu_m b_m$ ve $\mu_1 + \dots + \mu_m = 1$ olmak üzere p -norm vekil kısıt formülasyonu aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ & \left\{ \sum_{i=1}^m [\mu_i g_i(\mathbf{x})]^p \right\}^{1/p} \leq \left\{ \sum_{i=1}^m [\mu_i b_i]^p \right\}^{1/p}, \\ & \mathbf{x} \in X. \end{aligned} \quad (3.2)$$

$\mu_1 b_1 = \dots = \mu_m b_m = B$ olarak alındığında her $i = 1, \dots, m$ için $(\mu_i g_i(\mathbf{x}))^p \leq (\mu_i b_i)^p$ olduğundan taraf tarafa toplama işlemiyle,

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1^p g_1^p + \dots + \mu_m^p g_m^p}{B^p} &\leq \frac{mB^p}{B^p}, \\ \frac{\mu_1^p g_1^p}{\mu_1^p b_1^p} + \dots + \frac{\mu_m^p g_m^p}{\mu_m^p b_m^p} &\leq m, \\ \sum_{i=1}^m \left(\frac{g_i}{b_i} \right)^p &\leq m \end{aligned}$$

elde edilir. Örnek 3.4'te $p=5$ alındığında optimal çözümü $\mathbf{x}^* = (0, 2)^T$, $f(\mathbf{x}^*) = -4$ olan ve (3.2) formülasyonuna karşılık gelen problem aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 2x_2 \\ & \left(\frac{3x_1 + 2x_2}{9} \right)^5 + \left(\frac{x_1 + 4x_2}{8} \right)^5 \leq 2, \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}. \end{aligned}$$

3.2.1. Parametre Seçimi

Hatırlanacak olursa, dualite boşluğu olması durumlarında (P) probleminin optimal çözümü geleneksel yöntem ile bulunamayabilirdi. Geleneksel yöntem ile elde edilen dual optimal amaç değerini veren tüm çözümler uygun çözümler kümesinin dışına itilmelidir. Uygun çözümler kümesinden bu çözümleri elemek için,

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{g_i}{b_i} \right)^p > m$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük p değeri aranır.

Örnek 3.4'te p 'nin optimal değeri Tablo 3.1'deki gibi bulunur.

Tablo 3.1 Örnek 3.4 için parametre seçimi

$-x_1 - 2x_2 = -5$	g_1	g_2	
$(1, 2)^T$	7	9	$\min \left\{ p : \left(\frac{7}{9} \right)^p + \left(\frac{9}{8} \right)^p > 2 \right\} = 5$
$(3, 1)^T$	11	7	$p \geq 2$ elimine edilir.
$(5, 0)^T$	15	5	$p \geq 2$ elimine edilir.

3.3. Vekil Çarpanların Hesaplanması için Alternatif Yöntemler

Bu yöntem katsayılar matrisinde negatif elemanlar bulunmayan karma tamsayılı LP problemleri (özellikle birden fazla kaynak kullanan nesnelerin en etkin kullanımını araştıran ve evet-hayır tipli karar problemi olan çoklu (çok kısıtlı veya çok boyutlu) sırt çantası problemi) için önerilmiştir. Öncelikle yöntem, iki kısıtlı problemler için açıklanmış sonrasında çok sayıda kısıtlama için genelleştirilmiştir. $\psi, \mu \geq 0$ sabit sayılar ve $\mathbf{A}$ iki satırlı katsayılar matrisi olmak üzere,

$$IP = \max \{ \mathbf{c}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \leq 0, x_j \in \{0, 1\} \}$$

iki kısıtlı sırt çantası probleminin vekil gevşetmesi:

$$S(\psi, \mu) = \max \{ \mathbf{c}\mathbf{x} \mid (\psi, \mu)(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \leq 0, x_j \in \{0,1\} \}$$

olsun. Optimal vekil çarpanlarının hesaplanmasında kullanılacak algoritma aşağıdaki şekilde özetlenebilir. Burada, kısıtlar tek tek ele alındığında daha küçük bir optimal amaç değeri üreten, yani daha sıkı olan kısıt Kısıt 1; diğer kısıt ise Kısıt 2 olarak tekrar etiketlenmektedir. Kısıt 1'e ait çarpan ψ her adımda 1'e eşit ve sabit kalmakta iken, Kısıt 2'ye ait çarpan μ her adımda güncellenmektedir. Güncelleme işlemi yarılama algoritması kullanılarak yapılmaktadır.

Algoritma 1 (Gavish Pirkul Yarılama Algoritması [47]):

Adım 1. μ_H ve μ_L , $S(1, \mu)$ problemindeki Kısıt 1'in $\mu = \mu_L$ için sağlandığı, $\mu = \mu_H$ için ise sağlanmadığı şekildeki iki çarpan değeri olsun.

Adım 2. Eğer $\mu_H - \mu_L \leq \varepsilon$ ise dur. (En iyi çarpanı veren ε değeri önceden belirlenmiştir.)

Adım 3. $\mu = \mu_L + (\mu_H - \mu_L) / 2$ olsun. $S(1, \mu)$ problemini çöz. $S(1, \mu)$ probleminin çözümü için;

- i. Her iki kısıt da sağlanıyorsa dur. (Optimal bir çözüm elde edilir.)
- ii. Sadece Kısıt 1 sağlanıyorsa $\mu_L = \mu$ al ve Adım 2'ye git.
- iii. Kısıt 1 sağlanmıyorsa $\mu_H = \mu$ al ve Adım 2'ye git.

Şimdi Örnek 3.5 üzerinde Algoritma 1'i açıklayalım.

Örnek 3.5. *IP* probleminde amaç fonksiyon katsayıları, katsayılar matrisi ve sağ taraf sabitleri sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiştir [47].

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (c_j) = (45 \ 57 \ 43 \ 44 \ 61 \ 35 \ 41 \ 54 \ 18 \ 22 \ 78), \\ \mathbf{A} &= (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 94 & 24 & 69 & 95 & 63 & 2 & 98 & 29 & 15 & 9 & 100 \\ 26 & 91 & 35 & 15 & 80 & 71 & 20 & 76 & 33 & 46 & 86 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{b} &= (b_i) = (351 \ 192)^T. \end{aligned}$$

Burada 11 nesne ve 2 kaynak (sırt çantası) bulunmaktadır. Burada 2. kısıt daha sıkı bir kısıttır, yani tek kısıtlı sırt çantası problemleri ele alındığında daha küçük bir

amaç fonksiyon değeri üretir. Bu nedenle, 2. kısıt Algoritma 1'de Kısıt 1'dir. Tablo 3.2, her bir iterasyonda elde edilen μ_L, μ_H, μ değerlerini, non-pozitif olması istenen kısıtların sol taraf değerlerini, Algoritma 1'in 3. adımında karşılaşılan durumları ve optimal amaç değerlerini göstermektedir.

Tablo 3.2 Örnek 3.5 için Yarılama Algoritması

İterasyon	μ_L	μ_H	μ	$\sum_{j=1}^{11} a_{2j}x_j - b_2$	$\sum_{j=1}^{11} a_{1j}x_j - b_1$	Durum	z^*
1	0	1	0.5	-20	34	ii	227
2	0.5	1	0.75	96	-132	iii	233
3	0.5	0.75	0.625	35	-63	iii	222
4	0.5	0.625	0.5625	-20	34	ii	227
5	0.5625	0.625	0.59375	35	-63	iii	222

Örnek 3.6. Aşağıdaki iki kısıtlı basit örneği [48] ele alalım.

$$\begin{aligned} \max \quad & f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \\ & 24x_1 + 8x_2 \leq 51, \\ & 4x_1 + 8x_2 \leq 17, \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Bu problemin LP gevşetmesi:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \\ & 24x_1 + 8x_2 \leq 51, \\ & 4x_1 + 8x_2 \leq 17, \\ & x_1, x_2 \leq 3, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

şeklindedir ve bu problemin optimal çözümü 2.975 olarak bulunmuştur. Bu çözüme karşılık gelen Lagrange çarpanlar sırasıyla 0.0250 ve 0.1000 olarak elde edilmiştir. Tamsayı problemin uygun çözümler kümesi, alternatif optimal çözümler ve optimal amaç değeri sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} S &= \{(0,0)^T, (1,0)^T, (2,0)^T, (0,1)^T, (1,1)^T, (0,2)^T\}, \\ \mathbf{x}^* &= (0,2)^T, (1,1)^T, (2,0)^T, \\ f(\mathbf{x}^*) &= 2. \end{aligned}$$

Sadece birinci kısıt ele alınarak problem çözülürse optimal çözüm $\mathbf{x}^* = (1, 3)^T$ ve optimal amaç değeri 4 olarak bulunurken, sadece ikinci kısıt ele alındığında optimal çözüm $\mathbf{x}^* = (3, 0)^T$ ve optimal amaç değeri ise 3 olmaktadır. Dolayısıyla, 2. kısıt, Kısıt 1 olarak, 1. kısıt ise Kısıt 2 olarak etiketlenir. Tablo 3.3'e göre, vekil kısıt $1(4x_1 + 8x_2 - 17) + 0.25(24x_1 + 8x_2 - 51) = 10x_1 + 10x_2 - 29.75 \leq 0$ olur.

Tablo 3.3 Örnek 3.6 için Yarılama Algoritması

İterasyon	μ_L	μ_H	μ	$4x_1 + 8x_2 - 17$	$24x_1 + 8x_2 - 51$	z^*	$\mathbf{x}^*$
1	0	1	0.5	7	-27	3	$(0, 3)^T$
2	0	0.5	0.25	-9	-3	2	$(2, 0)^T$

Algoritma 2 (Gavish, Glover ve Pirkul İyileştirilmiş Yarılama Algoritması [49]):

Adım 1. μ_H ve μ_L , $S(1, \mu)$ problemindeki Kısıt 1'in $\mu = \mu_L$ için sağlandığı, $\mu = \mu_H$ için ise sağlanmadığı şekildeki iki çarpan değeri olsun.

Adım 2. $\mu = \mu_L + (\mu_H - \mu_L) / 2$ olsun. $S(1, \mu)$ problemini çöz. $S(1, \mu)$ probleminin çözümü için;

- i. Her iki kısıt da sağlanıyorsa dur. $(1, \mu)$ optimal çarpan vektörüdür ve IP probleminin optimal çözümü elde edilmiştir.
- ii. Sadece Kısıt 1 sağlanıyorsa, Kısıt 1'in istenenden ne kadar fazla sağlandığı f ve Kısıt 2'nin istenenden ne kadar az sağlandığı g olmak üzere $\mu_L = f / g$ al.
- iii. Sadece Kısıt 2 sağlanıyorsa, Kısıt 1'in istenenden ne kadar az sağlandığı f ve Kısıt 2'nin istenenden ne kadar çok sağlandığı g olmak üzere $\mu_H = f / g$ al.

Adım 3. Eğer $\mu_H - \mu_L \geq \varepsilon$ ise Adım 2'ye git, aksi halde dur. Eğer $\mu_L \geq \mu_H$ ise $(1, \mu)$ optimal çarpan vektörüdür. Aksi halde μ_L, μ_H optimal μ çarpanının ε komşuluğundadır.

Örnek 3.7. Örnek 3.5 probleminin Algoritma 2 ile çözümü Tablo 3.4'te özetlenmiştir.

Tablo 3.4 Örnek 3.5 için İyileştirilmiş Yarılama Algoritması

İterasyon	μ_L	μ_H	μ	$\sum_{j=1}^{11} a_{2j}x_j - b_2$	$\sum_{j=1}^{11} a_{1j}x_j - b_1$	z^*
1	0	1	1/2	-20	34	227
2	20/34	1	27/34	76	-103	233
3	20/34	76/103	1161/1751	62	-100	222
4	20/34	62/100	1027/1700	35	-63	222
5	20/34	35/63		$\mu_L > \mu_H$	DUR	

Örnek 3.8. Örnek 3.6 probleminin Algoritma 2 ile çözümü Tablo 2.5’te özetlenmiştir.

Tablo 3.5 Örnek 3.6 için İyileştirilmiş Yarılama Algoritması

İterasyon	μ_L	μ_H	μ	$4x_1 + 8x_2 - 17$	$24x_1 + 8x_2 - 51$	z^*	$\mathbf{x}^*$
1	0	1	1/2	7	-27	3	$(0,3)^T$
2	0	7/27	7/54	-5	21	3	$(3,0)^T$
3	5/21	7/27	47/189	-9	-3	2	$(2,0)^T$

Bir azalış yönü tanımlayan bu algoritmalar, ikiden fazla kısıta sahip problemlerin çarpanlarını hesaplamak için bir sezgisel algoritmayla beraber kullanılabilir. İki kısıta ait çarpanlar dışındaki diğer çarpanlar sabit tutularak azalış yönü boyunca bir arama yapılır. Elde edilen çarpan kümesi yeni bir yönü tanımlamak için kullanılır ve arama bu yönde tekrarlanır. Artık $\mathbf{A}$ matrisinin ikiden fazla satırı olduğunu kabul edelim.

Algoritma 3 (Çok kısıtlı problem için vekil çarpanların hesaplanması [47]):

Adım 1. IP probleminin kısıtlarını tek tek ele alarak, yani diğerlerini ihmal ederek, en küçük amaç fonksiyon değerini üreten kısıtlamayı belirle. Bu kısıtı Kısıt 1 olarak yeniden numaralandır.

Adım 2. Orijinal amaç fonksiyon vektörü $\mathbf{c}$ ve Kısıt 1 tarafından oluşturulan tek kısıtlı sırt çantası probleminin çözümünde en çok ihlal edilen kısıtı belirle ve bu kısıtı Kısıt 2 olarak yeniden numaralandır.

Adım 3. Kısıt 1 ve 2 ile belirlenen probleme Algoritma 1’i (ya da Algoritma 2’yi) uygula. Herhangi bir iterasyonda amaç fonksiyon değeri azalmıyorsa veya yineleme sayısı üst sınırına ulaşırsa dur.

Adım 4. Adım 3'te belirlenen vekil kısıtı Kısıt 1 olarak al ve Adım 2'ye git.

Örnek 3.9. *IP* probleminde amaç fonksiyon katsayıları, katsayılar matrisi ve sağ taraf sabitleri sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiştir [50].

$$\mathbf{c} = (c_j) = (36 \ 83 \ 59 \ 71 \ 43 \ 67 \ 23 \ 52 \ 93 \ 25 \ 67 \ 89 \ 60 \ 47 \ 64),$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 7 & 19 & 30 & 22 & 30 & 44 & 11 & 21 & 35 & 14 & 29 & 18 & 3 & 36 & 42 \\ 3 & 5 & 7 & 35 & 24 & 31 & 25 & 37 & 35 & 25 & 40 & 21 & 7 & 17 & 22 \\ 20 & 33 & 17 & 45 & 12 & 21 & 20 & 2 & 7 & 17 & 21 & 11 & 11 & 9 & 21 \\ 15 & 17 & 9 & 11 & 5 & 5 & 12 & 21 & 17 & 10 & 5 & 13 & 9 & 7 & 13 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = (b_i) = (87 \ 75 \ 65 \ 55)^T.$$

Burada 15 nesne ve 4 kaynak (sırt çantası) bulunmaktadır. Problemin optimal amaç değeri 301'dir. Burada 1. kısıt daha sıkı bir kısıttır, yani tek kısıtlı sırt çantası problemleri ele alındığında daha küçük bir amaç fonksiyon değeri üretir. Bu nedenle, 1. kısıt Algoritma 3'te Kısıt 1'dir. Orijinal amaç fonksiyon vektörü $\mathbf{c}$ ve Kısıt 1 tarafından oluşturulan tek kısıtlı sırt çantası probleminin çözümünde en çok ihlal edilen kısıt 3. kısıttır. Bu nedenle, 3. kısıt Algoritma 3'te Kısıt 2'dir.

Tablo 3.6, Algoritma 3'ün ilk aşamasında elde edilen μ_L, μ_H, μ değerlerini, non-pozitif olması istenen kısıtların sol taraf değerlerini ve optimal amaç fonksiyon değerlerini göstermektedir. İlk aşamadan çıkarılan sonuçlarla elde edilen vekil kısıt yeni Kısıt 1'dir. Bu yeni vekil kısıt ile problemin çözümünde en çok ihlal edilen 2. kısıt Algoritma 3'te yeni Kısıt 2'dir. Burada, algoritmanın son iterasyonunda daha iyi bir amaç değeri elde edilemediği için her iki kısıtın da sağlanması durumu elde edilemeden bu aşama durdurulmuştur (Tablo 3.7).

Aşama 2'de belirlenen vekil kısıt yeni Kısıt 1 ve Adım 2'nin en çok ihlal edilen kısıtı 2. kısıt yeni Kısıt 2'dir (Tablo 3.8). Aşama 3'te belirlenen vekil kısıt yeni Kısıt 1 ve Adım 2 de en çok ihlal edilen kısıtı 3. kısıt yeni Kısıt 2'dir (Tablo 3.9).

Kısıt 1'i Aşama 4'te belirlenen vekil kısıt ve Kısıt 2'yi Adım 2 de en çok ihlal edilen 4. kısıt olarak güncellenmiş ve Aşama 5'e geçilmiştir. Burada, iterasyonlarla daha iyi bir amaç değeri elde edilemediği için her iki kısıtın da sağlanması durumu elde edilemeden bu aşama durdurulmuştur (Tablo 3.10).

Tablo 3.6 Örnek 3.9 problemi için Algoritma 3, Aşama 1

İterasyon	μ_L	μ_H	μ	$\sum_{j=1}^{15} a_{1j}x_j - b_1$	$\sum_{j=1}^{15} a_{3j}x_j - b_3$	z^*
1	0	1	0.5	-3	-14	330

Tablo 3.7 Örnek 3.9 problemi için Algoritma 3, Aşama 2

İterasyon	μ_L	μ_H	μ	Vekil kısıt	$\sum_{j=1}^{15} a_{2j}x_j - b_2$	z^*
1	0	1	0.5	3.5	-32	327
2	0	0.5	0.25	-10	28	330
3	0.25	0.5	0.375	3.5	-32	327
4	0.25	0.375	0.3125	-10	28	330

Tablo 3.8 Örnek 3.9 problemi için Algoritma 3, Aşama 3

İterasyon	μ_L	μ_H	μ	Vekil kısıt	$\sum_{j=1}^{15} a_{2j}x_j - b_2$	z^*
1	0	1	0.5	-6.5	-32	327

Tablo 3.9 Örnek 3.9 problemi için Algoritma 3, Aşama 4

İterasyon	μ_L	μ_H	μ	Vekil kısıt	$\sum_{j=1}^{15} a_{3j}x_j - b_3$	z^*
1	0	1	0.5	-22.5	27	327
2	0.5	1	0.75	-22.5	27	327
3	0.75	1	0.875	-19.1875	-3	325

Tablo 3.10 Örnek 3.9 problemi için Algoritma 3, Aşama 5

İterasyon	μ_L	μ_H	μ	Vekil kısıt	$\sum_{j=1}^{15} a_{4j}x_j - b_4$	z^*
1	0	8	4	-21.8125	1	325
2	4	8	6	87.3125	-16	330
3	4	6	5	-21.8125	1	325
4	5	6	5.5	87.3125	-16	330
5	5	5.5	5.25	91.125	-18	326
6	5	5.25	5.125	91.125	-18	326
7	5	5.125	5.0625	91.125	-18	326
8	5	5.0625	5.03125	-21.8125	1	325
9	5	5.03125	5.015625	-21.8125	1	325

3.4. Şebeke Problemleri

Sistem bileşenleri arasındaki ilişkileri resmettiğinden bir şebeke gösterimi (graf), görsel ve kavramsal açılardan problemin çözümünde güçlü bir araçtır. Kombinatorial optimizasyon problemleri adı verilen bu tür şebeke optimizasyonu problemlerinin, LP formülasyonları olduğu gibi, genellikle tamsayılı çözümler araştırıldığı için kendilerine özel çözüm algoritmaları mevcuttur [51]. Bu problemlerin en bilinenleri; En Kısa Yol Problemi, Taşıma Problemi, Atama Problemi, Araç Rotalama Problemi, Gezgin Satıcı Problemi, Çinli Postacı Problemi, Sırt Çantası Problemi, Minimum Örtün Ağaç Problemi, Maksimum Akış Problemi ve Minimum Maliyetli Akış Problemidir. Minimum maliyetli akış problemlerinde, mümkün olan en düşük maliyetle kaynak düğümlerden varış düğümlerine uygun akış yapılandırılmaya çalışılır.

Tanım 3.10. Bir $G = (V, A)$ grafi, düğümler (nodlar veya köşeler) adı verilen sonlu V kümesi ve sıralı olmayan düğüm ikililerinden oluşan, yaylar (arklar veya kenarlar) adı verilen sonlu A kümesinden oluşan bir yapıdır.

Eğer bir graftaki yaylar yön bilgisine sahipse, yani sıralı düğüm ikililerinden oluşuyorsa bu tür graflara yönlü graf (directed graph/digraph) denir. Bu yön bilgisi bağlantının nereden başlayıp nerede bittiğini belirtir. Bir yönlü grafta eğer iki yönde bağlantı mümkünse ters yönlü iki ayrı yay kullanılır ve bu tür graflara çoklu yönlü graf denir. Eğer bir yönlü graf, bir (j, k) yayını içeriyorsa, j düğümünden k düğüme hareket mümkündür, bu düğümler sırasıyla başlangıç düğümleri ve bitiş düğümleri olarak adlandırılır. Ayrıca, bu iki düğüme komşu (adjacent) düğümler denir.

Tanım 3.11. Bir graftaki yaylara belirli sayısal değerler atanmış ve bu değerler grafin yapısına katılmış ise bu tip graflara maliyetli veya ağırlıklı graf (weighted graph) denir.

Bir yol haritasındaki şehirler; düğümler, yollar; yaylar ve şehirler arası mesafeler; ağırlıklar (maliyetler) olarak düşünüldüğünde bu graf bir maliyetli graftır. İşlerin bitiş zamanlarını gösteren iş akış şemaları veya proje diyagramları maliyetli graflara

örnektir. Graf yapısına dahil edilen sayısal değerler, yol yapım maliyetleri, yol uzunlukları, varış süreleri, bir elektrik şebekesindeki akış kapasiteleri, yolun bozulma olasılıkları ve benzeri olabilir. Bu şekildeki ek bir yapıya sahip graflara şebeke denir [52].

Tanım 3.12. Her yayın, bir önceki yayla tam olarak tek bir ortak düğüm noktasına sahip olduğu yaylar dizisine zincir (chain) adı verilir.

Tanım 3.13. Her yayın bitiş düğümünün bir sonraki yayın başlangıç düğümüyle aynı olduğu zincire patika (path) denir.

Tanım 3.14. Bir taşıma şebekesinde çıkış ve varış noktası adı verilen iki nokta arasındaki en kısa süren veya en düşük maliyetli yolun (patikanın) bulunması problemine En kısa yol problemi denir.

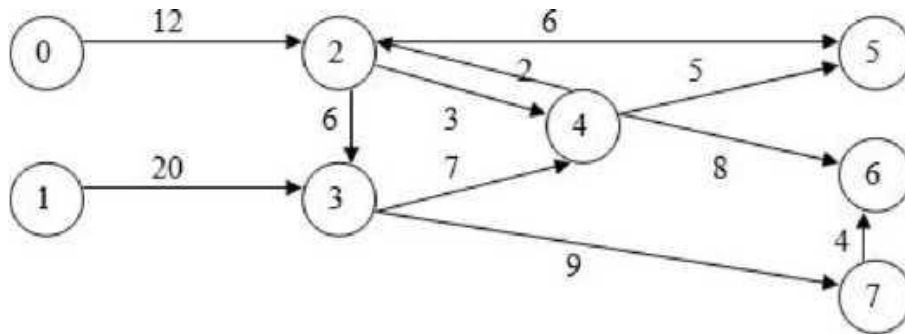
Genellikle yollar ve istasyonlar (ya da şehirler) sırasıyla yaylar ve düğümler olarak düşünülür. Optimizasyon problemlerinin büyük çoğunluğu en kısa yol problemi olarak modellenebildiği ve dinamik programlama gibi en kısa yol algoritmalarıyla çözülebildiği için tüm kombinatoriyal optimizasyon problemleri içerisinde en temel ve en önemli problem türleri arasındadır. Şebeke akış problemleri ise optimal çözümleri tamsayılar olan LP problemleridir.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, tamsayı programlama formülasyonları bulunan şebeke problemlerinden oluşan bazı minimum maliyetli akış problemlerine vekil dual yöntemler uygulanmıştır.

4.1. Maksimum Akış Problemi

Minimum maliyetli akış problemleriyle yakın ilişkili önemli bir alt sınıfıdır. Maksimum akış problemlerinde, bir yönlü grafta yaylarda negatif olmayan üst kapasite sınırlamaları olduğunda, kaynak düğümlerinden varış düğümlerine maksimum akış bulunmaya çalışılır. Şekil 4.1'deki şebeke, iki kaynak düğümü (0 ve 1) ve üç varış düğümüne (5, 6 ve 7) sahiptir. Her bir yay üzerinde gösterilen sayı kendi üst kapasitesini temsil eder. Ara düğümler 2, 3 ve 4 için, toplam gelen akışın toplam çıkan akışa eşit olmasını sağlamak gereklidir.



Şekil 4.1 Maksimum akış problemi [53]

Şekil 4.1'deki problemin LP formülasyonu:

$$\begin{aligned}
\max \quad & x_{02} + x_{13} \\
& x_{02} + x_{42} = x_{23} + x_{24} + x_{25}, \\
& x_{13} + x_{23} = x_{34} + x_{37}, \\
& x_{24} + x_{34} = x_{42} + x_{45} + x_{46}, \\
& x_{02} \leq 12, x_{13} \leq 20, x_{23} \leq 6, \\
& x_{24} \leq 3, x_{25} \leq 6, x_{34} \leq 7, \\
& x_{37} \leq 9, x_{42} \leq 2, x_{45} \leq 5, \\
& x_{46} \leq 8, x_{76} \leq 4, \\
& x_{02}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{37}, x_{42}, x_{45}, x_{46}, x_{76} \geq 0, \text{ tamsayı}
\end{aligned}$$

En kısıtlayıcı olan, 2 - 4, 4 - 2, 4 - 5 ve 7 - 6 yaylarındaki en küçük dört kapasiteyi göz önüne alarak vekil kısıt aşağıdaki gibi oluşturulsun:

$$\mu_1(x_{24} - 3) + \mu_2(x_{42} - 2) + \mu_3(x_{45} - 5) + \mu_4(x_{76} - 4) \leq 0.$$

Kesen düzlem algoritmasının her adımında elde edilen ağırlıklar, karşılık gelen optimal çözümler ve optimal amaç fonksiyon değerleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
\mu^{(0)} &= (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)^T, \mathbf{x}^{(1)} = (12, 16, 0, 6, 6, 7, 9, 0, 8, 5, 0)^T, f(\mathbf{x}^{(1)}) = 28, \\
\mu^{(1)} &= (0, 0, 1, 0)^T, \mathbf{x}^{(2)} = (12, 16, 0, 6, 6, 7, 9, 0, 5, 8, 0)^T, f(\mathbf{x}^{(2)}) = 28, \\
\mu^{(2)} &= (1, 0, 0, 0)^T, \mathbf{x}^{(3)} = (9, 16, 0, 3, 6, 0, 7, 9, 10, 0, 0)^T, f(\mathbf{x}^{(3)}) = 25, \\
\mu^{(3)} &= (0.625, 0, 0.375, 0)^T, \mathbf{x}^{(4)} = (10, 16, 0, 4, 6, 0, 7, 9, 3, 8, 0)^T, f(\mathbf{x}^{(4)}) = 26, \\
\mu^{(4)} &= (0.875, 0, 0.125, 0)^T, \mathbf{x}^{(5)} = (9, 16, 0, 3, 6, 0, 7, 9, 5, 5, 0)^T, f(\mathbf{x}^{(5)}) = 25.
\end{aligned}$$

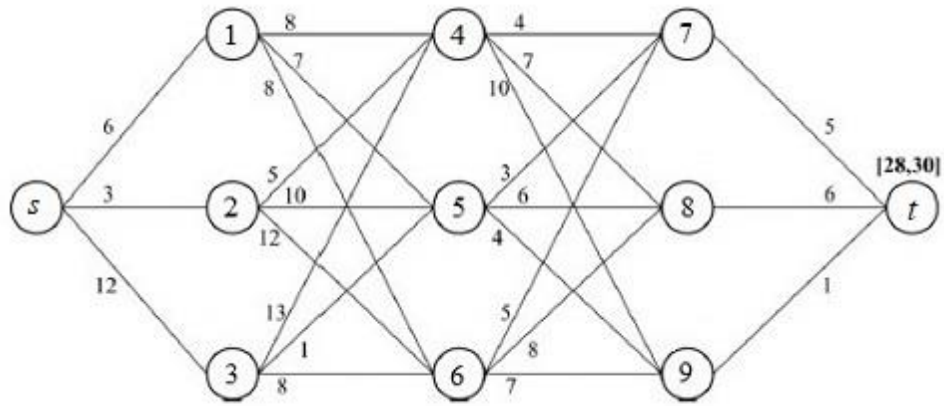
4.2. Sadece Varış Düğümünde Mesafe Penceresi ile En Kısa Yol Problemi

Bu uygulamada, en erken ve en geç varış zamanlarından oluşan bir periyot olan zaman pencerelerinde olduğu gibi bir mesafe penceresinde bir kaynak düğümünden bir varış düğümüne uygun patikalar aranmaktadır. En kısa yol ve k . en kısa yol problemlerinin bir uzantısı olan bu problem mesafe pencereci patika problemi (distance-confined path problem) olarak da adlandırılır. Şekil 4.2'deki çok aşamalı bir şebekede verilen [28,30] mesafe penceresi koşulu altında s kaynak düğümünden t varış düğümüne tüm patikaların bulunması problemidir. Belirli bir zaman diliminde gerçekleşecek bir randevuya kadar kalan zamanı en uygun bir biçimde geçirmek üzere çizelgelenecek randevular veya bir turistin uçağı kalkana kadar yapacağı

ziyaretler uygulama örnekleri arasındadır. Şekil 4.2’de herhangi iki bağlantılı komşu düğüm çiftini birleştiren yaylar üzerinde yazan sayı o yayın uzunluğunu temsil eder. Bu problemi modellemek için toplam mesafe olarak yardımcı bir değişken kullanılır:

$$z = 6x_{s1} + 3x_{s2} + 12x_{s3} + 8x_{14} + 7x_{15} + 8x_{16} + 5x_{24} + 10x_{25} \\ + 12x_{26} + 13x_{34} + x_{35} + 8x_{36} + 4x_{47} + 7x_{48} + 10x_{49} + 3x_{57} \\ + 6x_{58} + 4x_{59} + 5x_{67} + 8x_{68} + 7x_{69} + 5x_{7t} + 8x_{8t} + x_{9t},$$

Değişkenler = 0 ya da 1.



Şekil 4.2 Mesafe pencereli en kısa yol problemi [54]

Yine, 1’den 9’a kadar olan tüm düğümler için gelen ve giden akışların dengelenmesi aşağıdaki en kısa yol kısıtları ile sağlanır:

$$x_{s1} + x_{s2} + x_{s3} = 1, \\ x_{s1} = x_{14} + x_{15} + x_{16}, \\ x_{s2} = x_{24} + x_{25} + x_{26}, \\ x_{s3} = x_{34} + x_{35} + x_{36}, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = x_{47} + x_{48} + x_{49}, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = x_{57} + x_{58} + x_{59}, \\ x_{16} + x_{26} + x_{36} = x_{67} + x_{68} + x_{69}, \\ x_{47} + x_{57} + x_{67} = x_{7t}, \\ x_{48} + x_{58} + x_{68} = x_{8t}, \\ x_{49} + x_{59} + x_{69} = x_{9t}, \\ x_{7t} + x_{8t} + x_{9t} = 1.$$

$\mu_1 = 300/301$, $\mu_2 = 1/301$ olmak üzere, ilk olarak uzunluğu 28 olan yolu $(28.1 - z \leq 0.1)$ ve $(z \leq 30)$ mesafe penceresi kısıtlarını

$$\mu_1^2 (28.1 - z)^2 + \mu_2^2 z^2 \leq 2 \left(\frac{30}{301} \right)^2$$

vekil kısıtında birleştiren p -norm vekil kısıt yöntemi uygulandığında 28 uzunluğundaki yollar $(s \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow t)$ ve $(s \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow t)$ olarak bulunur.

Benzer şekilde, $\mu_1 = 30/31$, $\mu_2 = 1/31$ olmak üzere, uzunluğu 29 olan yol $(29 - z \leq 1)$, $(z \leq 30)$ mesafe penceresi kısıtları ve

$$\mu_1^2 (29 - z)^2 + \mu_2^2 z^2 \leq 2 \left(\frac{30}{31} \right)^2$$

vekil kısıtıyla $(s \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow t)$ olarak bulunur.

4.2.1. Geleneksel yöntemi nasıl kullanabiliriz?

Aşağıdaki şekilde belirtildiği gibi, yalnızca 3 eşitlik kısıtı vekil kısıtta toplanır:

$$\begin{aligned} & \mu_1 (x_{s1} - x_{14} - x_{15} - x_{16}) + \mu_2 (-x_{s1} + x_{14} + x_{15} + x_{16}) \\ & + \mu_3 (x_{14} + x_{24} + x_{34} - x_{47} - x_{48} - x_{49}) + \mu_4 (-x_{14} - x_{24} - x_{34} + x_{47} + x_{48} + x_{49}) \\ & + \mu_5 (x_{47} + x_{57} + x_{67} - x_{7t}) + \mu_6 (-x_{47} - x_{57} - x_{67} + x_{7t}) \leq 0. \end{aligned}$$

Vekil çarpanların başlangıç değerleri iyi bir şekilde seçilirse iyi alt sınırlar elde edilir. Daha iyi bir başlangıç çözümü üretmek için, kısıtların eş öneme ya da yakın öneme sahip olduğu kabul edilmiştir. Dikkat edilirse, $\mu_1, \mu_2 - \mu_3, \mu_4$ ve μ_5, μ_6 çarpanları sırasıyla üç eşitlik kısıtına karşılık gelir. Dolayısıyla, bu ağırlık ikililerin birbirine eşit seçilmesi aşikâr bir durum ortaya çıkarır ve bu uygulamada yakın öneme sahip kısıtlamalarla ilişkili vekil çarpanların başlangıç değerleri:

$$\mu^{(0)} = (0.2, 0.1, 0.15, 0.25, 0.2, 0.1)$$

olarak seçilmiştir. Ayrıca, mesafe penceresi kısıtı $z = 28$ olarak alındığında ilk iterasyonda optimal çözüm elde edilir. Bir sonraki problem için ise mesafe penceresi kısıtı $z = 29$ olarak alındığında aynı şekilde tek bir adımda sonuca ulaşılmıştır. $z = 30$ için de benzer şekilde çözülebilir.

4.3. Çoklu Sırt Çantası Problemi

Bu bölümde yöneylem araştırması kütüphanelerinden alınan örneklerle, ikinci bölümde verilen yarılama algoritmalarına (Algoritma 1 veya 2'ye) dayalı sezgisel bir yöntem uygulanmıştır. Tez çalışmasının orijinal kısmı olan bu sezgisel yöntem tek bir vekil kısıt yerine çoklu vekil kısıtları kullanır. Yöntemin başlangıç adımında, ilk vekil kısıtın vekil çarpanları LP gevşetmesi yapılmış problemin optimal Lagrange çarpanları olarak alınmıştır. Lagrange çarpanlar ilgili kısıtlara ait kaynakların gölge fiyatları olduğundan elde edilen bu vekil kısıt en güçlü vekil kısıttır ve dolayısıyla iyi bir üst sınırla başlanmış olur. Hatırlanacak olursa, LP gevşetmesinde $x_j \in \{0,1\}$ pür tamsayılı kısıtları yerine $0 \leq x_j \leq 1$ kısıtları gelir. Bu gevşetme paket programlarla çok etkin bir şekilde çözülebilir ve aynı anda optimal Lagrange çarpanlar da hesaplatılabilir.

Algoritma 4:

Başlangıç Çözümü: LP gevşetmesi yapılmış problemi çöz ve Lagrange çarpanlarını başlangıç vekil çarpanları olarak al. İlk vekil kısıt ve tamsayı gerektirmeleri ile problemi çöz. Elde edilen amaç değeri orijinal problemin optimal amaç değerine bir üst sınırdır.

Yeni Bir Vekil Kısıt Ekleme: Elde edilen çözümün en çok ihlal ettiği iki kısıtı belirle. Bu kısıtlara ait çarpanların (1,1) olduğu yeni bir vekil kısıt önceki vekil kısıta (kısıtlara) ekle ve problemi çöz. Eğer

- (i) Çarpanlar (1,1) iken iki kısıt da sağlanıyorsa bu vekil kısıtı “işlem görmemiş” olarak etiketle ve yeni bir vekil kısıt ekleyerek problemi çöz.

(ii) Aksi halde, pozitif olanı Kısıt 1 olarak etiketleyerek yarılama algoritmasını (Algoritma 1 veya 2'yi) uygula. Yarılama algoritmasının durdurma kriterlerinden herhangi biri sağlandığında yeni bir vekil kısıt ekleyerek problemi çöz.

Yeni bir vekil kısıt ekleme aşamasında en çok ihlal edilen kısıtlardan biri “işlem görmemiş” ise önceki ilgili vekil kısıta dön ve (ii) adımına git. Çarpanları (1,1) 'den farklı olan “işlem görmemiş” vekil kısıtın bu etiketini kaldır. Belirli bir tolerans değeri çerçevesinde tüm kısıtlar sağlanana kadar işlemleri tekrarla. Algoritmanın her iterasyonunda üst sınır azalacaktır. Eğer üst sınırdaki iyileşme durumu olmuyorsa bu durum bir durdurma kriteri olarak kullanılabilir.

Yöneylem araştırması kütüphanesinden [55,56] alınan beş örnek ile ilgili bilgiler Tablo 4.1'de özetlenmiştir. Ara aşamalarında Algoritma 2'nin kullanıldığı PB6 isimli örneğin Algoritma 4 ile çözümüne ait ayrıntılar Tablo 4.2'de verilmiştir.

Tablo 4.1 Çoklu Sırt Çantası Problemleri ve Genelleştirilmiş Atama Problemi

Problem	Kısıt Sayısı	Değişken Sayısı	İndirgenen Kısıt Sayısı
SENT01	30	60	10
SENT02	30	60	12
PB6	30	40	10
PB7	30	37	16
F2GAP	40	400	21

Tablo 4.2 PB6 Probleminin Çözüm Adımları

İşlem Gören Vekil Kısıt	En Çok İhlal Edilen Kısıtlar	İşlem Gören Vekil Kısıta Ait Çarpanlar	Etiket
2	(26,15)	(1,1)	İşlem Görmemiş
3	(5,3)	(1,1)	İşlem Görmemiş
4	(2,25)	(6 / 272,1)	-
3	(2,5)	(1,121/1184)	-
2	(2,15)	(321/1440,1)	-
5	(22,3)	(1,1)	İşlem Görmemiş
6	(24,12)	(1,171/2492)	-
7	(2,12)	(1,328/1391)	-
8	(14,26)	(227 / 3890,1)	-
9	(2,21)	(1,97/1228)	-
10	(16,1)	(1,1)	İşlem Görmemiş

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Genel olarak, vekil dual yöntem, Lagrange dual yöntemden daha iyi bir yaklaşım sağlar ve daha küçük dualite boşlukları verir. Problem boyutunun küçüldüğü bu yöntem lineer olmayan tamsayı programlama problemleri için de uygundur. Vekil problem için bulunan optimal çözüm primal problem için uygunsa bu çözüm primal için de optimaldir. Ayrıca Lagrange yönteminde olduğu gibi fazladan

$$\mu^T (g(x) - b) = 0$$

tümleyici aylaklık (complementary slackness) kısıtlarının sağlanması aranmaz. Esas kısıtların tamamını birleştirmek yerine bazılarını birleştirmek, yani ana kısıtların arasında gevşetilecek olanların uygun seçimi geleneksel yöntemi kullanılır kılar. Vekil gevşetme için dal-sınır prosedürleri hesaplama açısından dinamik programlama yaklaşımlarından daha verimli ve kullanışlıdır. Ancak, Lagrange çarpanlarına kıyasla optimal vekil çarpanlarının hesaplanması daha zor olabilir.

Yöntem taşıma problemlerine uygulandığında lineer olan problem yapısı lineer olmayan yapıya dönüşmüş; bilgisayar destekli çözümlerde değişkenler sürekli kabul edilebilirken tamsayı şartının göz önünde bulundurulması gerekmiş ve boyutun önceki duruma göre çok az miktarda azalmış olması gibi sorunlar ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla, yöntemlerin taşıma problemleri için etkin olmadığı gözlemlenmiştir.

Bu çalışmada, uygun parametrelerin seçimi ve bazı küçük boyutlu şebeke modellerinin yeniden formüle edilmesindeki gevşetme stratejileri için uygulamalara dayalı tartışmalar sunulmuştur. Ayrıca bu tezde, çoklu sırt çantası modelleri için problem boyutlarını azaltan bir prosedür geliştirilmiştir. Bu teknik, problemin çoklu kısıtlarının lineer bir kombinasyonu olan bir vekil kısıt ile başlar. Bu vekil kısıta ait vekil çarpanlar, problemin LP gevşetmesine ait optimal dual çarpanlardır. Ardından, her bir yinelemede algoritma, en çok ihlal edilen iki kısıtı yarılama yöntemiyle ele

alır. Buradaki amaç, lineer tamsayılı programlama tipindeki problemlerin kısıt sayısını azaltırken dal-sınır prosedürleri için iyi sınırlar elde etmektir. Yöneylem araştırması kütüphanesindeki bazı problemlere yöntem uygulanmıştır. Ayrıca bu sezgisel çoklu sırt çantası problemleri dışındaki diğer tamsayılı programlama problemlerine de uygulanabilir.



KAYNAKLAR

- [1] Balas, E., Discrete Programming by the Filter Method with Extension to Mixed-integer Programming and Application to Machine-sequencing. International Computation Centre, 1966.
- [2] Geoffrion, A. M., Implicit enumeration using an imbedded linear program (No. WMSI Working Paper-120). California Univ Los Angeles Western Management Science Inst, 1967.
- [3] Glover, F.. A multiphase-dual algorithm for the zero-one integer programming problem. Operations Research, 13(6), 879-919, 1965.
- [4] Glover, F.. Surrogate constraints. Operations Research, 16(4), 741-749, 1968.
- [5] Greenberg, H.J., Pierskalla, W.P., Surrogate mathematical programming, Operations Research 18 924–939, 1970.
- [6] Greenberg, H. J., Pierskalla, W. P.. Quasi-conjugate functions and surrogate duality. Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Operationelle, 15(19731), 437-448, 1973.
- [7] Glover, F.. Surrogate constraint duality in mathematical programming. Operations Research, 23(3), 434-451, 1975.
- [8] Karwan, M. H., Rardin, R. L., Some relationships between Lagrangian and surrogate duality in integer programming, Mathematical Programming 17.1 320–334, 1979.
- [9] Glover, F., Karney, D., Klingman, D., A study of alternative relaxation approaches for a manpower planning problem, In Quantitative Planning and Control 141–164, 1979.
- [10] Venkataramanan, M. A., Dinkel, J. J., Mote, J., A surrogate and Lagrangian approach to constrained network problems, Annals of Operations Research 20.1 283–302, 1989.
- [11] Venkataramanan, M. A., Dinkel, J. J., Mote, J., Vector processing approach to constrained network problems, Naval Research Logistics 38.1 71–85, 1991.
- [12] Kroon L.G., Ruhe G., Solution of a class of interval scheduling problems using network flows, In: Sebastian H.J., Tammer K. (eds) System Modelling and Optimization, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol 143, Springer, Berlin, Heidelberg, 1990.

- [13] Rogers, D. F., Plante, R. D., Wong, R. T., Evans, J. R., Aggregation and disaggregation techniques and methodology in optimization, *Operations Research* 39.4 553–582, 1991.
- [14] Ruhe G., Solution of Network Flow Problems with Additional Constraints, In: *Algorithmic Aspects of Flows in Networks, Mathematics and Its Applications*, Vol 69, Springer, Dordrecht, 1991.
- [15] Chu, P. C., Beasley, J. E., A genetic algorithm for the multidimensional knapsack problem, *Journal of Heuristics*, 4.1 63–86, 1998.
- [16] Kong, M., Tian, P., Kao, Y., A new ant colony optimization algorithm for the multidimensional knapsack problem, *Computers & Operations Research* 35.8 2672–2683, 2008.
- [17] Martello, S., Toth, P., An exact algorithm for the two-constraint 0-1 knapsack problem, *Operations Research* 51.5 826–835, 2003.
- [18] Pizzolato, N. D., Barcelos, F. B., Nogueira Lorena, L. A., School location methodology in urban areas of developing countries, *International Transactions in Operational Research* 11.6 667–681, 2004.
- [19] Da Silva, C. G., Climaco, J., Figueira, J., A scatter search method for the bi-criteria multi-dimensional {0-1}-knapsack problem using surrogate relaxation, *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms* 3.3 183–208, 2004.
- [20] Narciso, M. G., Lorena, L. A. N., Lagrangean/surrogate relaxation for generalized assignment problems, *European Journal of Operational Research* 114.1 165–177, 1999.
- [21] Lorena, L. A. N., Narciso, M. G., Using logical surrogate information in Lagrangean relaxation: An application to symmetric traveling salesman problems, *European Journal of Operational Research* 138.3 473–483, 2002.
- [22] Wynants C., Multicommodity Flow Requirements, In: *Network Synthesis Problems, Combinatorial Optimization*, Vol 8. Springer, Boston, MA, 2001.
- [23] Cappanera, P., Gallo, G., Maffioli, F., Discrete facility location and routing of obnoxious activities, *Discrete Applied Mathematics* 133.1-3 3–28, 2003.
- [24] Chen, P., Pinto, J. M., Lagrangean-based techniques for the supply chain management of flexible process networks, *Computers & Chemical Engineering*, 32(11), 2505-2528, 2008.
- [25] Nagih, A., Soumis, F., Nodal aggregation of resource constraints in a shortest path problem, *European Journal of Operational Research* 172.2 500–514, 2006.
- [26] Yu, Y., Chen, H., Chu, F., A new model and hybrid approach for large scale inventory routing problems, *European Journal of Operational Research* 189.3 1022–1040, 2008.
- [27] Molina, F., Santos, M. O. D., Toledo, F., Araujo, S. A. D., An approach using Lagrangian/surrogate relaxation for lot-sizing with transportation costs, *Pesquisa Operacional* 29.2 269–288, 2009.
- [28] Ablanedo-Rosas, J. H., Rego, C., Surrogate constraint normalization for the set covering problem, *European Journal of Operational Research* 205.3 540–551, 2010.

- [29] Batta, R., Mannur, N. R., Covering-location models for emergency situations that require multiple response units, *Management Science* 36.1 16–23, 1990.
- [30] Galvao, R. D., Espejo, L. G. A., Boffey, B., A comparison of Lagrangean and surrogate relaxations for the maximal covering location problem, *European Journal of Operational Research* 124.2 377–389, 2000.
- [31] Hernandez, F., Feillet, D., Giroudeau, R., Naud, O., Branch-and-price algorithms for the solution of the multi-trip vehicle routing problem with time windows, *European Journal of Operational Research* 249.2 551–559, 2016.
- [32] Lorena, L. A., Pereira, M. A., A Lagrangean/Surrogate Heuristic for the Maximal Covering Location Problem Using Hillman's Edition, *International Journal of Industrial Engineering* 9 57–67, 2002.
- [33] Rego, C., Mathew, F., Glover, F., Ramp for the capacitated minimum spanning tree problem, *Annals of Operations Research* 181.1 661–681, 2010.
- [34] Jain, S., Kadioglu, S., Sellmann, M., Upper bounds on the number of solutions of binary integer programs. In *International Conference on Integration of Artificial Intelligence (AI) and Operations Research (OR) Techniques in Constraint Programming* (pp. 203-218), 2010.
- [35] Riley, C., Rego, C., Li, H., A simple dual-RAMP algorithm for resource constraint project scheduling. In *Proceedings of the 48th Annual Southeast Regional Conference* (p. 67). ACM, 2010.
- [36] Shen, Q., Chu, F., Chen, H., Gong, Y., An-effective Lagrangian relaxation approach for multiple-mode crude oil transportation optimization. In *Mechatronics and Automation (ICMA), 2010 International Conference on* (pp. 360-366). IEEE, 2010.
- [37] Shen, Q., Chu, F., Chen, H., A Lagrangian relaxation approach for a multi-mode inventory routing problem with transshipment in crude oil transportation, *Computers & Chemical Engineering*, 35.10 2113–2123, 2011.
- [38] Nassiffe, R., Camponogara, E., Lima, G., Optimizing quality of service in real-time systems under energy constraints, *ACM SIGOPS Operating Systems Review* 46.1 82–92, 2012.
- [39] Monabbati, E., An application of a Lagrangian-type relaxation for the uncapacitated facility location problem, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics* 31.3 483–499, 2014.
- [40] ReVelle, C. S., Eiselt, H. A., Daskin, M. S., A bibliography for some fundamental problem categories in discrete location science, *European Journal of Operational Research* 184.3 817–848, 2008.
- [41] Senne, E. L., Lorena, L. A., Lagrangean/surrogate heuristics for p-median problems, In *Computing Tools for Modeling, Optimization and Simulation* (pp. 115-130). Springer, Boston, MA, 2000.
- [42] Akdemir, H., Sakallıoğlu, A., On Surrogate Dual Search Method for Minimum-Cost Flow Problems. In *Proceedings of International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2018)*, *Turk. J. Math. Comput. Sci.* Vol. 10 (pp. 107-116), 2018.

- [43] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., Shetty, C. M., Nonlinear programming: theory and algorithms, John Wiley & Sons, 2013.
- [44] Tanaka, Y., On the existence of duality gaps for mixed integer programming, *International Journal of Systems Science* 36.6 375–379, 2005.
- [45] Li, D., Sun, X., Nonlinear integer programming, Vol. 84, Springer Science & Business Media, 2006.
- [46] Li, D., Zero duality gap in integer programming: P-norm surrogate constraint method, *Operations Research Letters* 25.2 89–96, 1999.
- [47] Gavish, B., Pirkul, H., Efficient algorithms for solving multiconstraint zero-one knapsack problems to optimality. *Mathematical programming*, 31(1), 78-105, 1985.
- [48] Fréville, A., Plateau, G., An exact search for the solution of the surrogate dual of the 0–1 bidimensional knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, 68(3), 413-421, 1993.
- [49] Gavish, B., Glover, F., Pirkul, H., Surrogate constraints in integer programming. *Journal of Information and Optimization Sciences*, 12(2), 219-228, 1991.
- [50] Osorio, M. A., Glover, F., Hammer, P., Cutting and surrogate constraint analysis for improved multidimensional knapsack solutions. *Annals of Operations Research*, 117(1-4), 71-93, 2002.
- [51] Hillier, F. S. A. L., and G. Lieberman, Introduction to mathematical programming, 1977.
- [52] Lawler, E. L., Combinatorial optimization: networks and matroids. Courier Corporation, 2001.
- [53] Williams, H.P., Model Building in Mathematical Programming, John Wiley & Sons, Chichester, 1978.
- [54] Li, D., Wang, C. Y., Yao, Y. R., Distance confined path problem and separable integer programming, *Optimization* 62.4 447–462, 2013.
- [55] <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/files/mknab2.txt> Erişim tarihi: 28.03.2019.
- [56] http://miplib.zib.de/instance_details_f2gap40400.html Erişim tarihi: 28.03.2019.

ÖZGEÇMİŞ

1993 yılında Giresun’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Giresun’da tamamladı. 2015 yılında Giresun Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde lisans öğrenimini tamamladı. Aynı sene başladığı Giresun Üniversitesi Eğitim Fakültesi’nde pedagojik formasyon eğitimini bitirdi. 2016 yılında Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.