

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

83949

**YÜKSEK GERİLİMLİ SİSTEMLERDE ELEKTRİK
ALANLARININ SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ
YARDIMIYLA İNCELENMESİ**

Selçuk YILDIRIM

**DOKTORA TEZİ
ELEKTRİK - ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI**

T.C. FİRAT ÜNİVERSİTESİ
DOKÜMANİSYON MERKEZİ

Bu Tez, 13.10.1999 Tarihinde, Aşağıda Belirtilen Jüri Tarafından
Oybirliği / Oyçokluğu ile Başarılı / Başarısız Olarak Değerlendirilmiştir.

(İmza)

Danışman

Doç. Dr. Mehmet CEBECİ

(İmza)

Üye

Doç. Dr. Hasan KÜRÜM

(İmza)

Üye

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ÖZET**DOKTORA TEZİ****YÜKSEK GERİLİMLİ SİSTEMLERDE ELEKTRİK ALANLARININ
SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ YARDIMIYLA İNCELENMESİ****Selçuk YILDIRIM**

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

1999, Sayfa : 113

Bu tezde, Sınır Elemanları Yöntemi kullanılarak yüksek gerilim sistemlerinde iki boyutlu elektrik alan dağılımları hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar, analitik olarak hesaplanan sonuçlarla ve 'ELECTRO' isimli paket program sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Bu amaçla önce, Sınır Elemanları Yöntemi'nin literatürdeki ve uygulamadaki yeri araştırılmıştır. Ayrıca Sınır Elemanları Yöntemi'nin temel özellikleri ile Sonlu Farklar Yöntemi ve Sonlu Elemanlar Yöntemi gibi bölge tipi yöntemlere göre sağladığı üstünlükler belirlenmiştir.

İlk olarak, elektrik alanlarını matematiksel olarak modelleyen Laplace ve Poisson denklemlerine ağırlıklı artıklar yöntemi uygulanarak sınır integral denklemleri elde edilmiştir. Sınır integral denklemleri, lineer sınır elemanları ile ayrıştırılarak matris formuna getirilmiştir.

Daha sonra iki boyutlu ve açık sınırlı elektrostatik alanların analizini yapmak için bir bilgisayar programı (SINEL) geliştirilmiştir. Bu programda, problem geometrisinin koordinatları ile sınır şartları ve malzeme özelliklerinden oluşan veri girişi yapılmaktadır.

III

Programda, matrislerin katsayıları Gauss sayısal integrasyonu kullanılarak hesaplanmaktadır. Probleme Dirichlet ve Neumann sınır şartları uygulanarak, sınır üzerindeki bilinmeyenlerden oluşan bir lineer denklem sistemi elde edilmektedir. Bu lineer denklem sistemi Gauss Eliminasyon Yöntemi ile çözülerek sınır bilinmeyenleri hesaplanmaktadır. Hesaplanan sınır değerleri kullanılarak istenen iç noktalardaki potansiyel değerleri bulunmaktadır.

Program yardımıyla yüksek gerilim elektrot sistemleri, yüksek gerilim kablosu ve yüksek gerilim izolatör düzeneği üzerinde uygulamalar yapılmıştır. Program sonuçları, analitik sonuçlar ve paket program sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Sınır Elemanları Yöntemi, Sınır İntegral Denklemi, Elektrostatik Alan, Laplace ve Poisson Denklemleri.

ABSTRACT

PhD Thesis

**THE INVESTIGATION OF ELECTRIC FIELDS IN HIGH VOLTAGE SYSTEMS
USING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD**

Selçuk YILDIRIM

Firat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Electrical and Electronics Engineering

1999, Page : 113

In this thesis, two-dimensional electric field distribution in high voltage systems using Boundary Element Method (BEM) has been obtained. The computed results have been compared with both the analytical results and the results obtained from commercially available software package 'ELECTRO'.

For this purpose, first the application area of the BEM has been investigated in the literature. Furthermore, the fundamental advantages of the BEM over Finite Difference Method and Finite Element Method are determined.

First, Laplace and Poisson equations which model the electric field have been obtained. Boundary integral equations were obtained by applying weighted residual method to Laplace and Poisson equations. In order to put the boundary integral equations into matrix form they were discretized by linear boundary elements.

Then a computer program called SINEL has been developed to analyse two-dimensional open boundary electrostatic fields. This program takes the coordinates of the problem geometry, boundary conditions and the properties of the material as input data.

The coefficients of the matrices were computed by using Gauss numerical integration method. Then Dirichlet and Neumann boundary conditions were applied to get the linear set of equation which contains the unknowns on the boundary. The set of equation has been solved using Gauss Elimination Method. The potential values of the internal points can be calculated using computed boundary values.

The high voltage electrode systems, a high voltage cable and a high voltage insulator have been analyzed using the developed program. The output of the program has been compared with both analytical and commercial program results.

Key Words : Boundary Element Method, Boundary Integral Equation, Electrostatic Field, Laplace and Poisson Equations.



TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasını değerli fikirleri ve tecrübeleriyle yönlendiren tez yöneticim, kıymetli hocam Doç. Dr. Mehmet Cebeci'ye göstermiş olduğu yakın ilgi ve yardımlarından dolayı şükranlarımı arz ederim. Bu çalışmayı 249 no.lu Proje olarak destekleyen Fırat Üniversitesi Araştırma Fonu (FÜNAF) yöneticilerine de teşekkür ederim.

Fırat Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'ndeki öğretim üyesi hocalarıma ve Teknik Eğitim Fakültesi'ndeki mesai arkadaşlarıma desteklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca kaynak teminindeki yardımları nedeniyle İTÜ Elektrik Mühendisliği öğretim üyesi Doç. Dr. Özcan Kalenderli'ye de teşekkür ederim.

Tez çalışması boyunca gösterdikleri sabır ve destekten dolayı anneme, eşime, çocuklarım İhsan ve Burhan'a en içten sevgilerimi sunarım. Ayrıca hayatı boyunca büyük sıkıntılarla bizleri yetiştiren babamı rahmetle anıyorum.

İÇİNDEKİLER

		<u>Sayfa</u>
1. GİRİŞ		
1.1.	Genel Bilgi	1
1.2.	Sınır Elemanları Yönteminin Elektrik Mühendisliği Literatüründeki Yeri	6
1.3.	Bu Çalışmanın Amacı	9
2. ELEKTRİK ALANLARI		
2.1.	Genel Bilgi	10
2.2.	Statik Alanlar	11
2.3.	Dinamik Alanlar	16
2.4.	Yaklaşık Çözüm Yöntemleri	19
3. SINIR İNTEGRAL DENKLEMLERİ		
3.1.	Bölge Denklemlerinin Sınır İntegral Denklemlerine Dönüştürülmesi	21
3.2.	İki veya Üç Boyutlu Kısmi İntegrasyon	22
3.3.	Temel Çözümün Uygulanması	28
3.4.	İç Nokta Formülasyonu	29
3.5.	Sınır İntegral Denklemi	30
4. SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ		
4.1.	Laplace Denklemi İçin Sınır Elemanları Yöntemi	32
4.2.	Sabit Elemanlar	33
4.3.	Lineer Elemanlar	37
4.3.1.	Köşedeki Düğümelerin Davranışı	40
4.3.2.	c Katsayılarının Sayısal Olarak Bulunması	42
4.4.	Karesel ve Daha Yüksek Dereceli Elemanlar	44
4.5.	Kübik Elemanlar	47
4.6.	Poisson Denklemi İçin Sınır Elemanları Yöntemi	50

4.6.1.	Hücre (Cell) İntegrasyon Yaklaşımı	51
4.7.	Farklı Bölgelerin Birleştirilmesi	53

5. ETKİ KATSAYILARI

5.1.	Sabit Elemanlar	55
5.1.1.	G_{ij} Etki İntegrallerinin Hesaplanması	57
5.1.2.	$\hat{H}_{ij}$ Etki İntegrallerinin Hesaplanması	58
5.1.3.	Tekil İntegrallerin Hesaplanması	59
5.2.	Lineer Elemanlar	61
5.2.1.	g_{ij}^1 ve g_{ij}^2 Etki İntegrallerinin Hesaplanması	61
5.2.2.	h_{ij}^1 ve h_{ij}^2 Etki İntegrallerinin Hesaplanması	62
5.2.3.	Tekil İntegrallerin Hesaplanması	62

6. BİLGİSAYAR PROGRAMI

6.1.	Genel Bilgi	63
6.2 .	SINEL Ana Programı	64
6.2.1.	INPUT Alt Programı	66
6.2.1.1.	Eleman Bağlantılarının Belirlenmesi ve Eleman Uzunluklarının Hesaplanması	67
6.2.1.2.	Sınır Elemanları Yönteminde Numaralandırma Kuralları	68
6.2.2.	MATRX Alt Programı	69
6.2.3.	SOLVER Alt Programı	69
6.2.4.	INTERM Alt Programı	69
6.2.5.	OUTPT Alt Programı	69
6.3.	ELECTRO Paket Programı	70
6.3.1.	Geometri Modelleme	71
6.3.2.	İki Boyutlu ve Rotasyonel Simetrik Modelleme	71
6.3.3.	Fiziksel Büyüklüklerin Uygulanması	72
6.3.4.	Sınırların ve Arakesitlerin Bölmelenmesi	72
6.3.5.	Modelin Analizi	73

6.3.6.	İletim Hattı Analizi	73
6.3.7.	Kuasi-statik Alan Hesaplamaları	73
6.4.	Uygulama Örnekleri	74
6.4.1.	Tek Yalıtkanlı Elektrot Sistemi	74
6.4.1.1.	Küre - Küre Sistemi	74
6.4.2.	Çok Yalıtkanlı Elektrot Sistemleri	75
6.4.2.1.	Düzlemsel Elektrot Sistemi	75
6.4.2.2.	Silindir - Düzlem Elektrot Sistemi	77
6.4.2.3.	Koaksiyel Kablo	79
6.4.2.4.	Güç Kablosu	80
6.4.2.5.	Yüksek Gerilim İzolatörü	83
7.	SONUÇLAR	85
	KAYNAKLAR	88
	EK-A YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER	
A.1.	Ağırlıklı Artıklar Yöntemi	93
A.2.	Kollokasyon Yöntemi	94
	EK-B TEMEL ÇÖZÜMLER	
B.1.	İki Boyutlu Laplace Denkleminin Temel Çözümünün Bulunması	98
B.2.	Üç Boyutlu Laplace Denkleminin Temel Çözümünün Bulunması	102
	EK-C SAYISAL İNTEGRASYON	
C.1.	Genel Bilgi	104
C.2.	Bir Boyutlu Gauss Alan Hesabı (Quadrature)	104
C.3.	Üçgensel Bölgeler İçin İki Boyutlu Alan Hesabı	105
	EK-D SINEL PROGRAMI	107

SİMGELER

A	: Manyetik vektör potansiyel (wb/m).
D	: Elektriksel akı yoğunluğu (C/ m ²).
E	: Elektrik alan şiddeti (V/m).
E_n	: Birim vektör yönünde alan şiddeti (V/m).
E_x, E_y, E_z	: x, y, z yönlerindeki elektrik alan şiddetleri (V/m).
$\epsilon, \epsilon_r, \epsilon_0$	: Mutlak, bağıl ve boşluk için dielektrik sabitleri (F/m).
$\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}_r$	: Mutlak kompleks ve bağıl kompleks dielektrik sabitleri.
f	: Frekans (Hz).
u	: Potansiyel (V).
Q	: Elektrik yükü (C).
J	: Yüzeysel akım yoğunluğu (A/m ²).
ρ	: Hacimsel yük yoğunluğu (C/m ³).
σ	: Elektriksel iletkenlik (1/Ω m).
t	: Zaman (s).
ω	: Açısal hız (rad/s).
∇	: Gradient operatörü.
Δ	: Laplace operatörü.
Δ_i	: Dirac delta fonksiyonu
$\bar{u}$	: Sınır üzerinde bilinen potansiyel değeri.
$\bar{q}$	: Sınır üzerinde bilinen potansiyelin türevinin değeri.
u^*	: Laplace denkleminin temel çözümü.
q^*	: Temel çözümün normale göre türevi.
N_1, N_2	: Lineer şekil fonksiyonları.
ϕ_1, ϕ_2	: Lineer eleman interpolasyon fonksiyonları.
x, y	: Global koordinat sistemi.
ξ, η	: Lokal koordinat sistemi.

ŞEKİLLER

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 : Alan şiddetinin eşpotansiyel yüzeyler yardımıyla hesabı	12
Şekil 3.1 : Problemin geometrik tanımları	21
Şekil 3.2 : İki boyutlu kısmi integrasyon bölgesi	23
Şekil 3.3 : Dirac delta fonksiyonu	28
Şekil 3.4 : İki ve üç boyutlu durumlar için sınır noktalarının, küçük bir yarım daire veya bir yarım küre ile büyütülmesi	30
Şekil 4.1 : (a) Sabit, (b) Lineer, (c) Karesel sınır elemanları	32
Şekil 4.2 : Sabit eleman	33
Şekil 4.3 : 'i' sınır düğümündeki temel çözüm ile sınır elemanları arasındaki ilişki	35
Şekil 4.4 : 'i' iç noktasındaki temel çözüm ile sınır elemanları arasındaki ilişki	36
Şekil 4.5 : Lineer eleman tanımları	37
Şekil 4.6 : Elemanların kesişmesi	40
Şekil 4.7 : Süreksiz elemanlar	42
Şekil 4.8 : Eğrisel sınır	44
Şekil 4.9 : Karesel eleman	45
Şekil 4.10: Dört düğümlü kübik elemanlar	47
Şekil 4.11: İki düğümlü kübik elemanlar	49
Şekil 4.12: Sınır elemanları ve iç hücreler	51
Şekil 4.13: Problem bölgesinin iki alt bölgeye ayrılması	53
Şekil 5.1 : Eleman koordinat sistemi	55
Şekil 5.2 : Lineer şekil fonksiyonları	56
Şekil 5.3 : Geometrik tanımlar	58
Şekil 5.4 : (a) Kurallı bir eleman boyunca integrasyon, (b) Tekil bir eleman boyunca integrasyon	59
Şekil 6.1 : Sınır Elemanları Yöntemi ile sınır problemlerinin çözüm aşamaları	64

Şekil 6.2 :	(a) Dış yüzey, (b) İç yüzey için, numaralandırma kuralı	68
Şekil 6.3 :	Sınırlı ve sınırsız bölgeler için tanımlar. (a) Sınırsız durum, saat yönünde (INFB=1), (b) Sınırlı durum, saat yönünün tersinde (INFB=0), (c) Çok yüzeyli durum (INFB=0)	68
Şekil 6.4 :	Tek yalıtkanlı küre-küre elektrot sistemi	74
Şekil 6.5 :	Tek yalıtkanlı küre-küre elektrot sisteminin sonuçlarının karşılaştırılması	75
Şekil 6.6 :	Düzlemsel elektrot sistemi	75
Şekil 6.7 :	Çok yalıtkanlı düzlemsel elektrot sisteminin sonuçlarının karşılaştırılması	76
Şekil 6.8 :	Silindir-düzlem elektrot sistemi	77
Şekil 6.9 :	Simetri eksenı boyunca potansiyel dağılımı	78
Şekil 6.10:	İzolasyon yüzeyi boyunca potansiyel dağılımı	78
Şekil 6.11:	Koaksiyel kablonun çeyrek kesiti	79
Şekil 6.12:	Radyal yön boyunca potansiyel dağılımı	80
Şekil 6.13:	Güç kablosu	80
Şekil 6.14:	$y=0$ eksenı boyunca potansiyel dağılımı	81
Şekil 6.15:	$x=0$ eksenı boyunca potansiyel dağılımı	82
Şekil 6.16:	Yüksek gerilim izolatörü	83
Şekil 6.17:	Alt elektrot ile üst elektrot arasında potansiyelin değişimi	84
Şekil A.1 :	Dirac delta fonksiyonu	95
Şekil B.1 :	u^* fonksiyonu için global (x, y) ve lokal (ξ, η) koordinat sistemleri	98
Şekil B.2 :	İki boyutlu çözüm bölgesi	99
Şekil B.3 :	Temel çözüm için yaklaşım	100
Şekil C.1 :	Üçgensel koordinatlar	106

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. Genel Bilgi

Yüksek gerilimli sistemlerde elektrik alanlarının sayısal analizi, yüksek gerilim cihazlarının tasarımı için çok önemlidir. Bu cihazların optimum imalat ve işletme karakteristiklerinin belirlenebilmesi amacıyla, elektrik alanı ve potansiyel dağılımının hesaplanmasında kullanılan çeşitli sayısal yöntemler geliştirilmiştir.

İki veya üç boyutlu alanların, farklı dielektrik sabitli ve iletkenlikli yalıtkan malzemelerden oluşan yüksek gerilim sistemlerinin matematiksel modellerini oluşturan, Laplace ve Poisson tipindeki kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan en son yöntemlerden biri Sınır Elemanları Yöntemi (*Boundary Element Method, BEM*)'dir. Sınır elemanları yöntemi, elektrostatik alan hesaplamalarında doğru ve hızlı bir şekilde sayısal çözüm elde edilmesini sağlar.

Sınır elemanları yöntemi, sınır integral denklemlerinin (*boundary integral equations*) çözümü için kullanılan sayısal bir tekniktir. Bu teknikte elektromanyetik olaylar, matematiksel olarak integral şeklindeki Maxwell denklemleri ile tanımlanır. Eşdeğer kaynaklar veya alan değişkenleri gibi bilinmeyenlerden oluşan sınır integral denklemlerinin elde edilmesi, malzeme arakesitleri boyunca sınır şartlarının uygulanmasına imkan sağlar. Sınırlar, üzerinde bilinmeyenlerin gösterildiği sınır elemanlarına ayrıştırıldıktan sonra bir lineer denklem sistemi elde edilir. Böylece sınır elemanları yöntemi verilen bir problemi çözer. Uzayda herhangi bir noktadaki bütün alan değişkenleri, sınırlardaki alanlar (direkt yaklaşım) veya eşdeğer kaynaklar (indirekt yaklaşım) benzetimleriyle gerçekleştirilen integrasyonlarla elde edilebilir (IES Software, 1996).

Sınır elemanları yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi ve sonlu farklar yöntemi gibi bölge tipi yöntemlere göre önemli üstünlükler gösterir. Bu üstünlükler, problemin sadece yüzeyinin tanımlanması imkanı ve sonsuzdaki sınırların kolaylıkla temsil edilebilmesidir. Sınır elemanları yönteminin bu üstünlükleri, optimizasyon problemlerine uygulanabildiği durumlarda çok önemlidir (Enokizono, 1988).

Mühendislikte sürekli problemler klasik olarak genellikle sonlu elemanlar yönteminde olduğu gibi seri elemanlara bölünerek ve sonlu farklar yönteminde olduğu gibi bir ızgara şeklinde bölge ayrışımı kullanılarak çözülürler.

Sonlu farklar yöntemi, ilk geliştirilen sayısal teknikler arasında geniş bir uygulanabilme sahası göstermiştir (Forsythe vd., 1960). Bu yöntemde, her bir koordinat yönünde kesilmiş bir Taylor serisi açılımı kullanılarak Laplace denklemi ayrıştırılır ve problem bölgesine yerleştirilen doğrusal bir ızgaranın her noktasında uygulanır. Bilinmeyenlerin sayısı ve denklemlerin sayısı, sınır şartlarının potansiyel olarak verilmediği ızgara noktalarının sayısına eşit olur. Elde edilen sonuç denklem sistemi iteratif olarak veya doğrudan çözülerek bilinmeyenler bulunur. Yöntemin kötü yanları, problem geometrisinin kaba modellenmesi (eğrisel geometrik yapıların tam olarak elde edilememesi) ve özellikle açık alan problemlerinde bilinmeyenlerin sayısının çok olmasıdır. Ancak sonlu farklar yöntemi, matrislerin elde edilmesinde ve ilgili işlemlerin yapılmasında sağladığı kolaylıktan dolayı, çok sayıda tekrar işlemlerinin ve bölmelemelerinin gerektiği yerlerde oldukça yaygın şekilde kullanılır.

Sonlu elemanlar yöntemi, bir varyasyonel formülasyon kullanır (Zienkiewicz, 1971). Bu yöntemde problem bölgesi, eleman olarak isimlendirilen sonlu sayıda çok küçük alt alanlara ayrıştırılır. Eleman geometrileri ve potansiyeller, katsayıları düğüm değerleri olan polinomlar ile ifade edilirler. Bu yaklaşımların Laplace denklemi ile ilişkisi, düğümlerde çözüm değerlerini veren sistemin enerjisi ile orantılı bir fonksiyonelin minimizasyonu sayesinde belirlenir. Bu yöntemde, problem bölgesinin sınırlarını modellemek için polinom yaklaşımları kullanılması daha iyi sonuçlar verir. Bununla birlikte, birçok pratik uygulamada, özellikle üç boyutlu problemlerde, bütün bölgenin ayrıştırılması için çok sayıda veri girişi gerektirmesi, geometrik modeldeki türev süreksizlikleri ve sonsuzluk içeren bölgelerin modellenmesi için yeterli olamayışı gibi kötü yanları da vardır.

Sınır elemanları yöntemi, diğer yöntemlerdeki zorlukları aşmak için geliştirilmiştir. Yöntem sadece sınır ayrışımını gerektirdiğinden, bir problemi çözmek için gerekli veri sayısını indirger. Temelde bu yöntem, analitik fonksiyonları (temel çözümü) kullanarak farklı sınır noktalarındaki değişkenlerin ilişkisinden oluşmaktadır. Bu yöntemde, bir matris şekline getirilebilen etki katsayıları (*influence coefficients*) elde edilerek, sonlu

elemanlar yöntemine benzer şekilde sınır şartları uygulanır. Sınır elemanları yönteminde problemin boyutsallığı bir derece indirgenir ve eğrisel sınırlar kolaylıkla modellenebilir. Temel çözüm terimlerinden oluşan problem formülasyonu nedeniyle, süreksizlikler ve tekillikler gibi durumlarda özel zorluklar olmaksızın modelleme yapılabilir. Çözüm sadece sınırda istendiğinden yöntem, hareketli ve serbest yüzey problemleri için oldukça uygundur. Yöntemin diğer önemli bir üstünlüğü ise sonsuzluk bulunan problemlere, sonlu hale getirecek alanlara bölmeksizin uygulanmasıdır (Partridge vd., 1992).

Sonlu farklar yöntemi problemi tanımlayan diferansiyel denklemlerin sadece yaklaşımını yapar. Sonlu elemanlar yöntemi ise polinom şeklindeki fonksiyonları kullanarak değişkenlerin tanımlanmasından elde edilen bölge terimlerinin kısmi integrasyonunu gerektirir. Buna karşılık sınır elemanlar yönteminde, problem sadece sınır integralleri kullanılarak tanımlanır. Ancak bu tanımlama sonlu elemanlar yöntemindeki gösterimden daha komplekstir. Bundan dolayı, doğru sonuçlar elde etmek için özel integrasyon teknikleri geliştirmek ve yeni yaklaşımlar elde etmek üzere ilk çalışmalar integrallerin hesaplanması üzerinde yoğunlaşmıştır.

İlk olarak Jaswon (1963) ve Symm (1963), Fredholm tipi sınır integral denklemlerinin çözümü için bir sayısal teknik sunmuşlardır. Bu teknik, sınırın küçük parçalara (elemanlara) ayrıştırılması ve her bir parça içinde kaynak yoğunluğunun sabit olarak kaldığının kabul edilmesinden meydana gelmiştir. Kollokasyon yöntemi kullanılarak ayrıştırılan denklem, her bir elemandaki belirli noktalara (düğümlere) uygulanmış ve etki katsayıları Simpson kuralı kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanmıştır. Ayrıca bir istisna olarak, her bir elemanın kendisine etkisinin (*self-influence*) sonucu olan etki katsayıları, ya analitik olarak veya köşegen olmayan katsayıların toplamı olarak hesaplanmıştır (Brebbia vd., 1984).

Jaswon ve Symm (1977) böyle teknikler uygulayarak basit iki boyutlu Neumann ve Dirichlet problemleri için doğru çözümler elde etmişlerdir. Ayrıca Cauchy sınır değer problemlerinin çözümü için de üçüncü Green özdeşliğini uygulayarak daha genel bir sayısal formülasyon teklif etmişlerdir. Bu çalışmada, potansiyeller ve potansiyellerin normale göre türevleri gibi fiziksel değişkenlerin kaynak yoğunluğu yerine kullanıldığı (direkt yaklaşım) daha genel bir sınır integral denklemi elde etmişlerdir. Bu formülasyon

kullanılarak alınan sonuçlar, Symm (1963) ile Jaswon ve Ponter (1963) tarafından verilmiştir.

Sınır elemanları yönteminde, kaynak tanımlanması şeklinde verilen '*indirekt yaklaşım*' ile doğrudan potansiyel ve akı gibi fiziksel değişkenleri kullanma esasına dayanan '*direkt yaklaşım*' yöntemleri kullanılmaktadır. İlk yıllarda indirekt yaklaşım kullanılırken, daha sonraki yıllarda bilgisayar çözümlerine uygunluğu nedeniyle direkt yaklaşım tercih edilmiştir. Bu tez çalışmasında direkt yaklaşım yöntemi kullanılmıştır.

İndirekt yaklaşım yöntemlerinde integral formülasyonundaki potansiyel doğrudan çözülemez, fakat alanı destekleyen bir eşdeğer kaynak bulunur. Eşdeğer kaynak, kaynağın yeri ve sınırdaki herhangi bir noktaya kaynağın etkisi ile ilişkili olan bir fonksiyon altında, tanımlanmış sınır şartlarını sağlamaya zorlanarak bulunur. Bu fonksiyon, bir Green fonksiyonu veya daha genel bir şekilde etki fonksiyonu olarak verilir. Bu şekilde kaynak bulunarak tekrar integralin içine yazılır ve bölgede herhangi bir noktadaki potansiyel hesaplanır. Kaynaklar sadece sınırlara ve farklı malzemelerin arakesitlerine yerleştirilir. Birçok pratik problemde kaynak bilinmez, ancak sınır üzerinde potansiyel veya potansiyelin normale göre türevi belirtildiğinden, bu şartları destekleyecek bir kaynak bulunur. Bu durum fiziksel olarak, sınır şartlarının yüzey üzerindeki kaynak dağılımlarına eşdeğer olduğu anlamındadır (Klimpke, 1983).

Direkt yaklaşım yöntemlerinde, eşdeğer kaynak yoğunluğu dağılımları hesaplanmaksızın problem bölgesinde potansiyel ve potansiyelin normale göre türevi için doğrudan çözüm yapılır. Bilinmeyen potansiyel ve potansiyelin normale göre türevi için sınır integral denklemi, problem bölgesi üzerinde alan noktası alınarak Green teoreminden elde edilir (Yıldır, 1985).

1970'li yıllar sınır integral alanındaki araştırmaların ve uygulamaların, uygulandığı yıllar olarak görülmektedir. 1970'lerin ortalarında sınır integral yaklaşımının birçok pratik problemlerin çözümü için sonlu elemanlara en iyi alternatif olduğu açıkça ortaya çıkmıştır. Bu sırada, değişkenlerin interpolasyon fonksiyonlarına bağlı olarak tanımlanması ile eğrilerden meydana gelen (*curvilinear*) sınır elemanlarının kullanılması düşüncesi doğmuştur. Bu gelişme sınır elemanlarını, problem geometrisinin tanımlanması için sonlu elemanlar gibi çok yönlü bir teknik haline getirmiştir. Birçok araştırmacı

indirekt sınır integral yaklaşımının yerine, direkt formülasyonu kullanarak bu tekniğin avantajlarını ortaya çıkarmışlardır.

Genel olarak 1978 yılı, günümüzde kullanılan notasyonlarıyla sınır elemanları yönteminin modern tanımının yapıldığı tarih olarak kabul edilir. Bunun nedeni, kısmen sınır elemanları yöntemi hakkındaki ilk uluslararası konferansın yayınlanması (Brebbia, 1978-a) ve kısmen de Southampton'daki bilgisayarlı mekanik araştırma grubu tarafından konu hakkındaki ilk kitabın çıkarılmasıdır (Brebbia, 1978-b). Southampton grubu tarafından yayınlanan diğer kitaplarda da aynı notasyonlar kullanılmıştır (Brebbia vd., 1979, 1984, 1989).

Bu oluşumlar sınır elemanları yönteminin pek çok önemli karakteristik özelliklerinin anlaşılmasına ve daha klasik sınır integral formülasyonu ile arasındaki farkların açıkça ortaya konmasına sebep olmuştur. Bu farklar;

1- Ağırlıklı artıklar formülasyonuna ya da varyasyonel prensiplere dayanan sınır elemanları yönteminin önemi, doğrudan integral denklemlerinin elde edilmesinden kaynaklanmaktadır. Ağırlıklı artıklar formülasyonu problemin tanım denklemlerine doğrudan uygulandığından, bu durum lineer olmayan veya zaman bağımlı problemler ile çalışmak için oldukça uygundur. Bu yaklaşım, normalde kullanılan Galerkin, küçük kareler vb. kollokasyon yöntemleri gibi, sınır üzerinde farklı tip hata minimizasyonlarının kullanımını kolaylaştırır. Formülasyon genel bir yapıdadır ve temel çözümler olarak Green fonksiyonlarının kullanımıyla sınırlı değildir.

2- Yöntem, problem yüzeyinin uygun bir şekilde tanımlanmasına imkan sağlayan (özellikle eğrisel sınırlar için) yüksek dereceli sınır elemanlarının geliştirilmesine uygundur. Yüksek dereceli elemanlar, birçok pratik uygulamalarda problemin tanımlanması için önemli olduğu gibi, çözümün yaklaşımını da sağlar.

3- Tekillik noktalarını daha iyi tanımlayan ve süreksizliğin oluşmasına neden olan sınır eleman formülasyonları düşük dereceli süreklilik gerektirir. Bu önemli karakteristik, sonlu farklar yöntemi ya da sonlu elemanlar yönteminde ihtiyaç duyulan yüksek dereceli süreklilik gerektirmeksizin, kompleks sınır şartlarının daha basit bir şekilde tanımlanmasını sağlar.

1.2. Sınır Elemanları Yönteminin Elektrik Mühendisliği Literatüründeki Yeri

Elektrik alanlarını sınır elemanları yöntemini kullanarak inceleyen çeşitli çalışmalar gerçekleştirilmiştir.

İlk olarak Harrington vd. (1969), tekniği bazı iki boyutlu elektrik mühendisliği problemlerini çözmek için kullanmıştır. Burada potansiyel ile normale göre türevi arasında lineer bir ilişki tanımlayan daha genel empedans sınır şartı (Robin tipi) kullanılmıştır.

Daha sonra Mautz ve Harrington (1970), her bir eleman içinde kaynak yoğunluğunu sabit kabul ederek ve indirekt formülasyonu kullanarak, Dirichlet sınır şartları ile elektrik mühendisliğinin eksenel simetrik problemlerini çözmüşlerdir.

Kлимпке (1983)'nin master çalışmasında, Dirichlet, Neumann ve karışık tip sınır şartları ile, sınırlı veya sınırsız bölgelerde Laplace denkleminin çözümü için sınır elemanları yöntemi kullanılarak iki boyutlu elektrostatik alan hesaplamaları yapılmıştır. Bu çalışmada indirekt yaklaşım kullanılarak, farklı dielektrik ortamlardan oluşan problemler için elde edilen sonuçlar, analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Yıldır (1985), yaptığı doktora çalışmasında, üç boyutlu Laplace denkleminin çözümü için bir sınır elemanları yöntemi geliştirmiştir. Kübik B-spline eğrilerini kullanarak problem geometrisinin ayrışımını ve yaklaşımını yapmış ve veri üretimini gerçekleştirmiştir. Alan analizi yapmak için, Green teoremini kullanarak sınırdaki potansiyel ve potansiyelin normale göre türevi için bir integral denklemi elde ederek (direkt yaklaşım), veri üretimi ve alan çözümü için örnekler vermiştir. Çalışmanın sonunda, içerisinde küresel bir hava kabarcığı olan porselen bir izolatörün içindeki ve etrafındaki alan dağılımını bulmak üzere problemi modellemiş ve çözümünü gerçekleştirmiştir.

Sınır elemanları yöntemi kullanılarak yüksek gerilim cihazlarının bilgisayar destekli analizi konulu bir çalışmada, 'Electro' paket programı kullanılarak bazı yüksek gerilim test düzenlerinin alan analizleri gerçekleştirilmiştir. Sınır elemanları yönteminin, sonlu farklar ve sonlu elemanlar gibi yöntemlere göre üstün özelliklere sahip olduğu belirtilmiştir (Yıldır, 1987).

Yine benzer bir çalışmada, elektrostatik alan problemlerinin çözümü için kullanılan bilgisayar uyumlu yöntemlerden sınır elemanları yöntemi ile sonlu elemanlar

yöntemi karşılaştırılmıştır. Bu çalışmada da, sınır elemanları yöntemi yardımıyla elektrostatik alan hesaplamaları yapan 'Electro' yazılımı kullanılarak bazı örnek problemler incelenmiş ve elde edilen sonuçlar; eşpotansiyel eğriler, elektrik alanları eğrileri ve üç boyutlu elektrik alan profilleri olarak çizdirilmiştir. Ayrıca 'Electro' programının iletim hattı parametrelerinin (kapasite, indüktans, empedans vb.) hesaplanmasında da kullanıldığı belirtilmiştir (Knutson vd., 1991).

Bir başka çalışmada, yüksek gerilim deşarj cihazları için sınır elemanları yönteminin bazı uygulamaları yapılmıştır. Çalışmada çok yalıtkanlı elektrot sistemleri ile iki elemanlı bir cam izolatör zinciri için hesaplamalar yapılmış ve eşpotansiyel eğriler çizdirilmiştir. Çalışmanın sonunda, elektrik alanlarının ve potansiyel dağılımlarının hesaplanmasında sınır elemanları yönteminin oldukça kullanışlı olduğu ispatlanmıştır (Turri vd., 1992).

Sınır elemanları yöntemi kullanılarak elektrostatik alanlarda kapasite ve kuvvet hesaplanması ile ilgili bir çalışmada, farklı potansiyellerdeki iki küreden oluşan bir sistem ile iki düzlem elektrot arasındaki bir küreden oluşan örnek sistemler için kapasite ve kuvvet hesaplamaları yapılmıştır. Bulunan sayısal sonuçlar, analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Böylece sınır elemanları yönteminin alan çözümlerindeki yüksek doğruluğunun bir sonucu olarak, elektrik alanlarındaki kapasite ve kuvvet gibi parametrelerin de çok yüksek bir doğrulukla elde edildiği gösterilmiştir (Liu vd., 1992).

Yüksek gerilim izolatörleri ile ilgili olarak yapılan bir çalışmada, kirli bir izolatör üzerindeki potansiyel ve elektrik alanları hesaplanmıştır. Düzlemsel geometrilerden oluşan iki ve üç boyutlu problemler için bulunan sonuçlar analitik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca bir pin izolatör için, yüzey iletkenliği olarak hesaplanan kaçak akımlar, deneysel olarak ölçülen kaçak akımlar ile karşılaştırılmıştır (Rasolonjanahary vd., 1992).

Bamji vd., (1993) tarafından yapılan bir çalışmada sınır elemanları yöntemi kullanılarak polietilen içine gömülü iğne tipindeki bir yük için elektrik alan dağılımları elde edilmiştir. Elektrik alanı, sınır elemanları yöntemini kullanan 'Coulomb' paket programı ile hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar, daha önceden sonlu farklar yöntemi ile elde edilen değerlerle karşılaştırılmıştır.

Başka bir tür çalışmada, iki boyutlu Laplace problemi için varyasyonel sınır elemanları formülasyonu geliştirilmiştir. Uygulama olarak farklı potansiyelerde iki adet koaksiyel iletkenin oluşan problem varyasyonel sınır elemanları yöntemi ile çözülmüş, sınırdaki hesaplanan ve bir radyal eksen boyunca iç noktalarda hesaplanan potansiyel ve akı değerleri analitik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Diğer bir uygulamada koaksiyel bir kapasitörde, potansiyel dağılımları hesaplanarak eşpotansiyel eğriler çizdirilmiş ve kapasitesi hesaplanmıştır (Sun vd., 1994).

Diğer bir çalışmada, 150 kV 'luk SF₆ 'lu bir gerilim transformatörünün üç boyutlu elektrik alan hesaplaması yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar, daha önceden hesaplanan eksenel simetrik hesaplama sonuçları ile karşılaştırılmıştır (Defourny, 1986).

Elektromanyetik alanların analizinde de sınır elemanları yönteminin kullanıldığı çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Böyle bir çalışmada, iki ve üç boyutlu süreksiz elemanlar kullanılarak senkron motorların analizi gerçekleştirilmiştir (Brebbia vd., 1987).

Faucheux ve Burnet (1988), sınır elemanları yöntemi ile sonlu elemanlar yöntemini birleştirerek anahtarlı bir relüktans motorun manyetik analizini gerçekleştirmişlerdir. Bu çalışmada, doyma etkilerinin meydana geldiği stator ve rotorun çekirdek bölgeleri sonlu elemanlar ile, manyetik olmayan (hava aralığı, stator, sarımlar gibi) bölgeler de sınır elemanları yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir.

Elektromanyetik alan hesaplamaları ile ilgili başka bir çalışmada, eksenel simetrik skin-effect problemlerinin geçici durum çözümü için sınır elemanlarına dayalı bir yöntem verilmiştir (Huang vd., 1988).

Son yıllarda sınır elemanları yöntemi kullanılarak Eddy akımlarının analizi konusunda da önemli çalışmalar yapılmıştır (Shao vd., 1991; Enokizono vd., 1992; Shen vd., 1992; Enokizono vd., 1993; Tanaka vd., 1993; Sakurai vd., 1993).

Ayrıca iki veya üç boyutlu lineer olmayan elektromanyetik alan problemlerinin analizi için de sınır elemanları yöntemi kullanılmıştır (Lean vd., 1984; Shao vd., 1988; Krstajic vd., 1992; Nowak vd., 1994).

1.3. Bu Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasının amacı, Laplace ve Poisson tipindeki kısmi diferansiyel denklemler ile matematiksel modelleri oluşturulabilen elektrik alan problemlerinin çözümü için kullanılan sayısal analiz yöntemlerinden, sınır elemanları yöntemini yüksek gerilim sistemlerine uygulayarak, bu sistemlerde oluşacak elektrik alanlarını hesaplamaktır.

Bu amaçla yapılan işlemler şunlardır:

- 1) Elektrik alanlarının matematiksel modellerini oluşturan Laplace ve Poisson tipi, ikinci dereceden kısmi diferansiyel denklemleri elde etmek,
- 2) Ağırlıklı artıklar yöntemini ve iki boyutlu Laplace denkleminin temel çözümünü kullanarak, problemi tanımlayan kısmi diferansiyel denklemi sınır integral denklemine dönüştürmek,
- 3) Sınır integral denklemlerini, sınır elemanları ile ayrıştırarak, sınırdaki bilinmeyenlerden oluşan lineer bir denklem sistemi elde etmek,
- 4) Bu denklemleri elde ettikten sonra, sınır elemanları yöntemi ile iki boyutlu, izotropik bir ortamda elektrostatik alan dağılımını hesaplamaktır. Bu amaçla geliştirilen programın sahip olduğu özellikler şunlardır:
 - a) Problem bölgesinin istenen sıklıkta lineer sınır elemanları ile bölmelenerek, eleman düğümlerinin koordinatları, potansiyelin hesaplanacağı iç noktaların koordinatları ile malzeme özellikleri ve sınır şartlarından oluşan basit bir veri girişinin yapılması,
 - b) Sayısal integrasyon yöntemi yardımıyla, lineer denklem sisteminin katsayılarını hesaplayarak denklem sisteminin çözülmesi,
 - c) Denklem sisteminin çözümüyle elde edilen sınır değerlerini (potansiyel ve normale göre türevini) kullanarak, istenen iç noktalardaki potansiyellerin hesaplanması,
 - d) Sonsuz sınırlı problemlerde de, istenen noktalardaki potansiyellerin aynı yöntemle çözülebilmesi.

BÖLÜM 2

ELEKTRİK ALANLARI

2.1. Genel Bilgi

Elektrik alanı, yüksek gerilim cihazlarının yalıtımında dikkate alınması gereken en önemli faktörlerden biridir. Enerji iletim hattı sistemlerinde gerilimler gün geçtikçe yükseldiğinden, yalıtım malzemelerinin de daha büyük elektriksel zorlanmalar altında çalışması gerekmektedir. Sadece daha kalın yalıtım malzemesi kullanarak iyi bir sonuç alınması mümkün değildir. Çünkü bu durumda hem termik empedans büyümekte ve hem de uzayan zincir boyu direk ebatlarının büyümesine ve iletim hattı toplam maliyetinin önemli bir kısmını oluşturan direk masraflarının artmasına neden olmaktadır. Bunun için elektrik alan dağılımının ve kritik bölgelerdeki alan şiddeti değerlerinin bilinmesi gerekir (Rumeli, 1969).

Doğru akım şartlarında veya çok düşük frekanslarda, elektrik alanının bir yaklaşımı olarak statik elektrik alanı veya kuasi-stasyonel elektrik alanı kullanılır. Bu, dielektriklerin ve metaller gibi yüksek iletkenlikli malzemelerin bulunduğu problemler için çözüme çok iyi bir yaklaşım sağlar. Ancak iletkenler ile dielektrikler arasında orta iletkenlikli malzemeler varsa, alternatif elektrik alanı statik elektrik alanından farklıdır. İnce yarı iletken tabaka ile kaplanmış veya kirlenmiş sınır yüzeylerinin bulunduğu böyle durumlarda statik elektrik alanı yaklaşımı uygulanamaz. Yüksek gerilimli iletim hattı ve şalt tesisleri ile güç kabloları bağlantılarının tasarımında alternatif elektrik alanının büyük önemi vardır (Kato vd, 1979).

Özellikle dış ortamdaki çimento tozları, baca gazları gibi endüstriyel kirlilik ve kıyı bölgelerindeki deniz suyu kirliliği, yüksek gerilim izolatorlerinin yüzeyinde iletken bir tabaka oluşturur. Bu durumda izolator yüzeyinden rezistif - kapasitif bir kaçak akım akar ve alan dağılımı statik alan hesaplamaları ile belirlenemez. Bu nedenle elektrik alanları, statik ve dinamik elektrik alanları olmak üzere iki kısımda incelenir (Cebeci, 1991).

2.2. Statik Alanlar

Bir yüklü parçacık, elektrik alanının bulunduğu bir bölgede, başladığı noktaya gelecek şekilde kapalı bir yol boyunca hareket ettirilirse, toplam olarak bu parçacığa karşı ve parçacık tarafından iş yapılmamış olur. Bu durum, parçacığın izlediği yolun şekline bağlı değildir; daire, kare veya herhangi bir kapalı eğri olabilir. Ayrıca sonuç, elektrik alanının kaynağından da bağımsızdır (yükün hareketi anında kaynağın değişmemesi şartıyla).

Enerji kuvvetle yolun skaler çarpımına eşit ve toplam enerji de kapalı yol boyunca her bir küçük yol parçası üzerinde meydana gelen enerjilerin toplamı veya integrali olduğundan,

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.1)$$

dır. $\vec{F}$ yerine $q\vec{E}$ yazılırsa ($q=1$ C olarak),

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.2)$$

olur. Burada $\vec{s}$, integrasyon yolunu göstermektedir. Denk.(2.2)'ye vektör analizinden bilinen Stokes teoremi uygulanırsa,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = \int (\text{rot } \vec{E}) \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.3)$$

elde edilir.

Denk.(2.2)'nin bütün kapalı yollara, dolayısıyla denk.(2.3)'ün bütün kapalı yollara karşılık olan yüzeylere uygulandığı düşünülürse, bunun tek yolunun,

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.4)$$

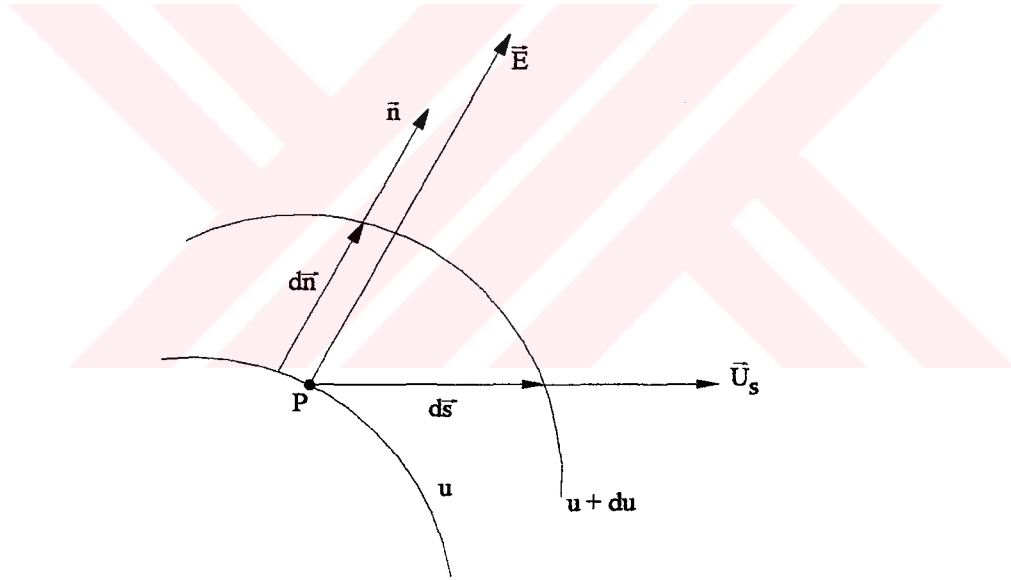
olduğu görülür. Bu sonuç gösteriyor ki, elektrik alanı rotasyonelsiz bir alandır. Rotasyonelsiz bir alan, skaler bir u potansiyel alanından türer.

Statik elektrik alanı problemlerinin çözümünde, çoğu kez u potansiyel alanı olarak bilinir. Böylece u yardımıyla sabit eşpotansiyel yüzeyler elde edilir (Özkaya, 1988).

Bilindiği gibi, potansiyelleri birbirine eşit olan noktaları birleştiren yüzeylere eşpotansiyel yüzeyler denir. Bir eşpotansiyel yüzey üzerinde iki nokta arasındaki potansiyel fark ve dolayısıyla bu iki nokta arasında yapılan iş sıfıra eşittir. Eşpotansiyel yüzeylerin belirli bir yüzey üzerindeki izleri, eşpotansiyel çizgileri verir.

Bir elektrik alanı, alan çizgileri ile gösterileceği gibi, eşpotansiyel çizgiler ile de gösterilebilir. Eşpotansiyel çizgiler sabit bir potansiyel farkı esas tutularak çizildiği takdirde elde edilen şekil, alan hakkında fikir verir. Bu çizgilerin sık veya seyrek olması, sözkonusu noktalarda alan şiddetinin büyük veya küçük olduğunu gösterir (Cebeci, 1991).

Şekil 2.1'den görüldüğü üzere aralarında du kadar, sonsuz küçüklükte potansiyel farkı bulunan iki eşpotansiyel yüzey verilmiş olsun.



Şekil 2.1 Alan şiddetinin eşpotansiyel yüzeyler yardımıyla hesabı.

Pozitif birim yükün, eşpotansiyel yüzeyin normali yönündeki $\vec{n}$ birim vektörü doğrultusunda $d\vec{n}$ kadar hareket etmesi halinde alan tarafından yapılan iş,

$$du = - \vec{E} \cdot d\vec{n} = -E_n \cdot dn \quad (2.5)$$

olur.

Bu bağıntıdan,

$$E_n = -\frac{du}{dn} \quad (2.6)$$

elde edilir. Burada E_n , alan şiddeti vektörünün eşpotansiyel yüzeye dik $\vec{n}$ birim normal vektörü yönündeki bileşenidir.

Genel olarak potansiyel, koordinat sisteminin bir fonksiyonu olduğundan, denk.(2.6) kısmi türev şeklinde,

$$E_n = -\frac{\partial u}{\partial n} \quad (2.7)$$

olarak ifade edilir. Bu denklem vektörel olarak,

$$\vec{E} = -\vec{n} \frac{\partial u}{\partial n} \quad (2.8)$$

şeklinde yazılır. Bu bağıntılarda eksi işareti potansiyelin, alan şiddeti vektörü yönünde azaldığını gösterir.

Alan şiddeti vektörünün kartezyen koordinat sistemindeki bileşenleri,

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x} ; \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} ; \quad E_z = -\frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.9)$$

bağıntıları yardımıyla bulunur. Buradan, potansiyel gradyan vektörü,

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \quad (2.10)$$

olarak yazılır ve böylece, alan şiddeti ile potansiyel arasında,

$$\vec{E} = -\text{grad } u \quad (2.11)$$

bağıntısı elde edilir.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (2.12)$$

olarak denk.(2.11),

$$\vec{E} = -\nabla u \quad (2.13)$$

şeklinde kısaca ifade edilir (Gönenç, 1977).

Denk.(2.13), elektrik alanının eşpotansiyel yüzeylere dik (ortogonal) ve potansiyelin azaldığı yönde olduğunu gösterir.

Şimdi uzay içine kapalı bir yüzey konulduğunu kabul edelim. Kapalı yüzeyin şekli ne olursa olsun, her türlü kapalı yüzey boyunca eğrisel integralin değeri,

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \quad (2.14)$$

olacaktır. Kapalı yüzeyin içinde hiç elektrik yükü yoksa veya pozitif elektrik yüküne eşit miktarda negatif elektrik yükü varsa, denklemin sağ tarafı sıfır olur.

Bu kapalı yüzey herhangi bir yalıtkan madde içerisinde bulunuyorsa, denk.(2.14)'ün bütün yalıtkan maddelere uygulanabilmesi için, bu denklemi yalıtkan maddelerin bir karakteristiği olan ϵ_r katsayısı ile çarpmak gerekir. Bu durumda denk.(2.14) şu şekilde yazılır:

$$\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \quad (2.15)$$

ϵ_r 'nin değeri yalıtkanın cinsine bağlı olup, sıcaklıkla ve diğer bazı şartlarla bir miktar değişir. Eğer birçok yalıtkan madde içerisinden geçen kapalı bir yüzey düşünülecek olursa; bu durumda integrasyon yüzeyi kısmen hava, kısmen yağ ve kısmen bir diğer madde olabilir. Bu, bir yalıtkan maddeden diğerine geçişte ϵ_r 'nin değişmesi demektir. Dolayısıyla denk.(2.15), daha genel olarak,

$$\oint \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \quad (2.16)$$

şeklinde yazılabilir. $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$ konularak,

$$\oint \epsilon \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \quad (2.17)$$

elde edilir. Burada ϵ , söz konusu yalıtkan maddenin mutlak dielektrik sabitidir. Eğer,

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad (2.18)$$

ile gösterilirse, denk.(2.17),

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (2.19)$$

şeklini alır. D 'ye elektriksel akı yoğunluğu veya kısaca deplasman vektörü denir.

Denk.(2.19)'a Green teoremi uygulandığında,

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (2.20)$$

yazılır. Eğer $Q \neq 0$ ise, diverjans sıfır değildir ve bunu, ρ ile gösterilen hacimsel yük yoğunluğu cinsinden ifade etmek uygun olacaktır. Böylece kapalı bir yüzey içindeki elektrik yükü, yük yoğunluğunun bu yüzey içindeki hacimsel integraline eşit yani,

$$\int \rho \cdot dV = \int (\nabla \cdot \vec{D}) \cdot dV = \int (\text{div } \vec{D}) \cdot dV = Q \quad (2.21)$$

olduğundan,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.22)$$

bulunur. Bu denklem, dielektrik sabitinin noktadan noktaya değişmediği homojen bir madde içinde,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.23)$$

şeklinde yazılabilir. Denk.(2.23), elektrik alanı ile yük arasındaki bağıntıyı vermektedir. Denk.(2.13), denk.(2.23)'te yerine yazılırsa, potansiyel ile yük yoğunluğu arasındaki bağıntı elde edilir:

$$\nabla (\nabla \cdot u) = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{veya} \quad \nabla^2 \cdot u = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.24)$$

Denk.(2.24), ikinci dereceden diferansiyel bir denklemdir (*Poisson denklemi*). Elektrik yükü bulunmayan bir uzay parçası içinde sağ taraf sıfır olur (*Laplace denklemi*).

Laplace denklemi, kartezyen koordinat sisteminde açık olarak,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (2.25)$$

şeklinde yazılır. Alanın sadece x eksenı boyunca değışmesi halinde potansiyel,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.26)$$

ve elektrik alan şiddeti de,

$$E = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.27)$$

formülünden hesaplanabilir (Özkaya, 1988).

2.3. Dinamik Alanlar

Statik elektrik alanına ait klasik hesaplamalarda, malzemenin elektriksel iletkenlik değerinı yalıtkan kısımlar için sıfır, iletken kısımlar için de sonsuz olduğu kabul edilir. Eğer dielektrik bir ortamda elektriksel iletkenlik sıfırdan farklı ise, o zaman statik elektrik alanı çözümleri hatalı olabilir. Böyle dinamik alan durumlarında E , σ 'ya bağımlıdır ve genellikle bölgenin farklı kısımlarında farklı anlarda pik yapar. Bu sebeple ϵ ile birlikte σ 'nın da aşağıda gösterildiğı gibi hesaplara katılması gerekir.

$\vec{E}$ için diferansiyel eşitlik, süreklilik denkleminde türetilir:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.28)$$

Burada $\vec{J}$ akım yoğunluğu, ρ hacimsel yük yoğunluğu ve t zamandır. Denk.(2.18) ve denk.(2.22)'den,

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{D}) \quad (2.29)$$

elde edilebilir. Buradan

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.30)$$

yazılarak, ohm kanunu ve denk.(2.18) yardımıyla

$$\nabla \cdot \left(\sigma \vec{E} + \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.31)$$

elde edilir (Marshall ve Skitek, 1990). Bu denklem, f frekanslı sinüsoidal $\vec{E}$ durumu için ($\omega = 2\pi f$),

$$\nabla \cdot (\sigma + j\omega\epsilon) \vec{E} = 0 \quad (2.32)$$

şekline girer. Faraday Kanunu ve manyetik vektör potansiyel tanımından yararlanarak, bu denklem

$$\nabla * \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.33)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla u \quad (2.34)$$

olup,

$$\vec{E} = -\nabla u - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.35)$$

elde edilir. Eğer sağ tarafın ikinci terimi, birinci terime göre çok küçükse,

$$\vec{E} = -\nabla u \quad (2.36)$$

yazılır. Böylece, denk.(2.32)'den

$$\nabla \cdot (\sigma + j \omega \epsilon) \nabla u = 0 \quad (2.37)$$

ve açık olarak,

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma + j \omega \epsilon) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma + j \omega \epsilon) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.38)$$

elde edilir. Denk.(2.37), sinüsoidal elektrik alanları için diferansiyel eşitliktir. $(\sigma + j\omega \cdot \epsilon)$ terimi, kompleks dielektrik sabitidir. Bu ifade, kompleks bağıl dielektrik sabiti olarak $\epsilon_r' = \sigma / \epsilon_0 + j\omega \cdot \epsilon_r$ şeklinde yazılabilir. Eğer $\sigma = 0$ ise, statik elektrik alanları için bilinen,

$$\nabla \cdot \epsilon \nabla u = 0 \quad (2.39)$$

eşitliği elde edilir. Eğer $\omega \cdot \epsilon \ll \sigma$ ise; o zaman denk.(2.37), iletken malzemelerdeki akım akışı için bilinen,

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u = 0 \quad (2.40)$$

denkleme dönüşür.

Dinamik elektrik alanlarının incelenmesini sağlayan kompleks dielektrik sabiti,

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' \quad (2.41)$$

(Kuffel ve Zaengl, 1984) ve

$$\bar{\epsilon} = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \quad (2.42)$$

şeklinde de verilmiştir (Denegri vd., 1975). Bağıl kompleks dielektrik sabiti ise,

$$\bar{\epsilon}_r = \epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \cdot \epsilon_0} \quad (2.43)$$

şeklinde verilmiştir (Tareev, 1978). Denk.(2.42)'nin her iki tarafı ϵ_0 ile bölünürse, denk.(2.43)'ün bulunacağı görülmektedir.

Denk.(2.37)'de eşitliğin her iki tarafı $-j$ ile çarpılıp ω ile bölünürse,

$$\nabla \left(\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \nabla u = 0 \quad (2.44)$$

elde edilir. Burada $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ ve $\omega = 2\pi f$ olmak üzere, parantez içindeki terim kompleks mutlak dielektrik sabitini gösterir.

2.4. Yaklaşık Çözüm Yöntemleri

Elektrik alanlarının sayısal olarak analizi için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Basit yapıdaki elektrik alan problemleri doğrudan analitik olarak çözülebilir. Fakat diferansiyel denklem şeklinde ifade edilen pratik problemler, karmaşık olmasından dolayı yaklaşık çözüm yöntemleri kullanılarak çözülebilmektedir. Genel olarak kullanılan yöntemler, sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleridir. Bu iki yöntem, görünüşte farklı olmasına rağmen, serbestlik derecesi sonsuz olan sürekli bir sistem, sonlu bir diziye indirgenerek benzer amaçlar için kullanılır. Böylece problem sayısal olarak çözülebilir ve bilgisayar çözümü için uyumlu hale getirilebilir. Sonlu farklar tekniği, diferansiyel denklemin ayrık versiyonunu sağlayan bir dizi düğümü tanımlar. Sonlu elemanlarda, diferansiyel denklem veya onun iç çarpım versiyonu, bir bölge veya eleman üzerinde ortalama olarak sağlanır. Bu iki teknik, incelenen bölgenin sınırlarına ilaveten bölgeyi de ayrıştırır. Buna karşılık sınır elemanları yöntemi, sadece dış sınırın ayrışımı esasına dayanır. Bu üç teknik, içerilen yaklaşım üzerinde bir odaklama yapılırsa, yakından ilişkilidir.

Örnek olarak, aşağıdaki sınır şartları ile,

$$\begin{aligned} S(u_0) &= s & S_1 \text{ sınırında,} \\ G(u_0) &= g & S_2 \text{ sınırında.} \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$L(u_0) = b \quad B \text{ bölgesinde,} \quad (2.46)$$

denklem takımı verilsin.

Genellikle bulunması mümkün olmayan, problemin tam çözümü u_0 ile gösterilir. u_0 fonksiyonunun bir $\varphi_k(x)$ fonksiyon takımı ile yaklaşımı,

$$u = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k + \alpha_0 \quad (2.47)$$

şeklinde yapılabilir.

α_0 katsayısı sınır şartlarının homojen olmayan kısımlarının sağlanması için hesaba katılır. α_k , belirsiz parametrelerdir ve φ_k , aşağıdaki şekilde verilen bir fonksiyonlar dizisinden alınan, lineer olarak bağımsız fonksiyonlardır.

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x); \quad (2.48)$$

x ise, B bölgesindeki uzaysal koordinatları gösterir.

Bu fonksiyonlar genellikle, kabul edilebilir şartlar olarak isimlendirilen, sınır şartları ve süreklilik derecesine bağlı olarak verilen belirli şartları sağlayacak şekilde seçilirler.

Eğer denk.(2.48)'de tanımlandığı gibi bir fonksiyonlar dizisi,

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_n \varphi_n = 0 \quad (2.49)$$

ise lineer olarak bağımsız olacaktır (Bu sadece bütün α_i 'ler sıfır olduğu zaman doğrudur).

Yaklaşık çözüm yöntemlerinden, ağırlıklı artıklar yöntemi ve kollokasyon yöntemi Ek-A'da açıklanmıştır.

BÖLÜM 3

SINIR İNTEGRAL DENKLEMLERİ

3.1. Bölge Denklemlerinin Sınır İntegral Denklemlerine Dönüştürülmesi

Elektrostatik, elektromanyetik, ısı iletimi, gerilme, burulma, akışkanlar mekaniği gibi birçok mühendislik probleminin analizinde kullanılan ve problem bölgesini tanımlayan kısmi diferansiyel denklemler, Poisson denklemi veya onun homojen şekli olan Laplace denklemi tipindedir.

Poisson denklemi iki boyutlu sistemlerde,

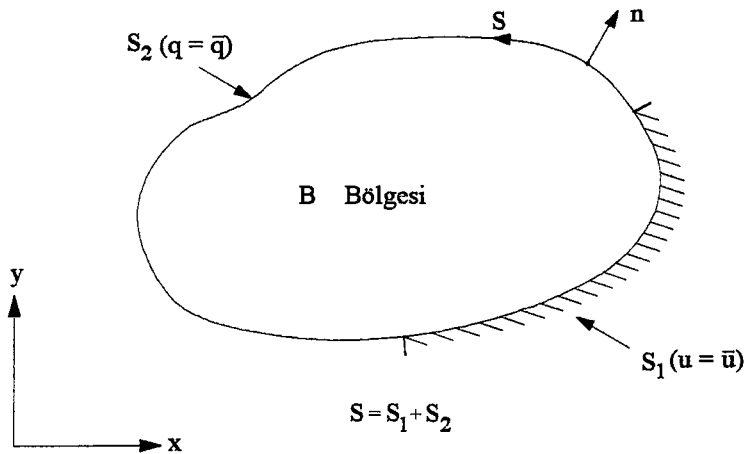
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b \quad (\text{B bölgesinde}) \quad (3.1)$$

veya,

$$\nabla^2 u = b \quad (\text{B bölgesinde}) \quad (3.2)$$

şeklinde yazılır.

Burada $b = b(x, y)$ olmak üzere, bilinen bir fonksiyondur. B, içinde denklemin uygulandığı ve S ile çevrelendiği kabul edilen bir bölgedir. Ayrıca n, normal olarak tanımlanır (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Problemin geometrik tanımları.

Burada,

$$\nabla^2 () = \frac{\partial^2 ()}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 ()}{\partial y^2} \quad (3.3)$$

Laplace operatörü olarak adlandırılır.

Poisson denkleminde ağırlıklı artıklar yöntemi uygulanarak sınır integral ifadeleri elde edilebilir. Bunun için denk.(3.2) bir w ağırlık fonksiyonu ile çarpılır. Bu durumda,

$$\iint_B (\nabla^2 u - b) w dB = 0 \quad (3.4)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem, x ve y koordinatları cinsinden,

$$\iint_B (\nabla^2 u - b) w dB = \iint_B \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - b \right) w dB = 0 \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir.

3.2. İki veya Üç Boyutlu Kısmi İntegrasyon (Green Teoremi)

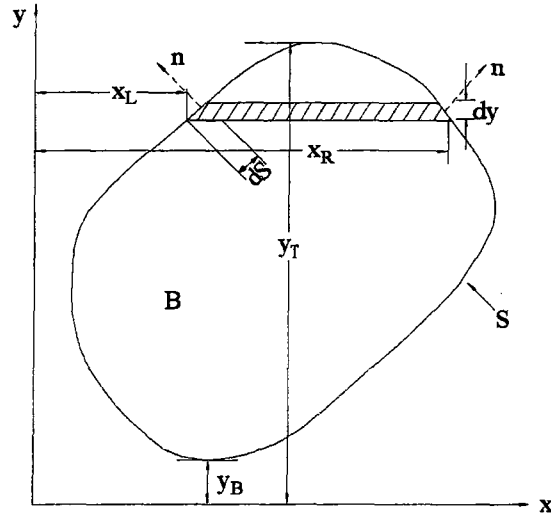
İkinci dereceden bir kısmi diferansiyel denklemini, birinci dereceden kısmi diferansiyel denkleme dönüştürmek için kısmi integrasyon uygulanır. Böylece bölge integral ifadesinden, sınır integral ifadeleri elde edilmiş olur.

Aşağıda verilen iki boyutlu ifadenin kısmi integrasyonu incelenecek olursa;

$$\iint_B \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy \quad (3.6)$$

önce x 'e göre integral alınır ve Şekil 3.2'deki semboller ile bilinen kısmi integrasyon bağıntısı kullanılır:

$$\int_{x_L}^{x_R} u dv = - \int_{x_L}^{x_R} v du + (u v)_{x=x_R} - (u v)_{x=x_L} \quad (3.7)$$



Şekil 3.2 İki boyutlu kısmi integrasyon bölgesi.

Kısmi integrasyon için ,

$$\iint_B \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = - \iint_B \frac{\partial \phi}{\partial x} \psi dx dy + \int_{y=y_B}^{y=y_T} \left[\phi \psi \right]_{x=x_L}^{x=x_R} dy \quad (3.8)$$

ifadesi yazılır. Sınırdaki bir dS doğru parçası gözönüne alınırsa,

$$dy = n_x dS \quad (3.9)$$

yazılabilir. Burada n_x , normal ile x yönü arasındaki açının kosinüsüdür.

$$\iint_B \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = - \iint_B \frac{\partial \phi}{\partial x} \psi dx dy + \int_S \phi \psi n_x dS \quad (3.10)$$

Benzer şekilde y yönünde de aynı işlemler gerçekleştirilirse,

$$\iint_B \phi \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy = - \iint_B \frac{\partial \phi}{\partial y} \psi dx dy + \int_S \left[\phi \psi \right]_{y=y_L}^{y=y_R} n_y dx \quad (3.11)$$

ve burada

$$dx = n_y dS \quad (3.12)$$

yazılarak,

$$\iint_B \phi \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy = - \iint_B \frac{\partial \phi}{\partial y} \psi dx dy + \int_S \phi \psi n_y dS \quad (3.13)$$

ifadesi elde edilir.

Denk.(3.10) ve denk.(3.13)'te, her iki tarafta ψ 'nin x 'e ve y 'ye göre türevleri alınır,

$$\iint_B \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dB = - \iint_B \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dB + \int_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} n_x dS \quad (3.14)$$

$$\iint_B \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} dB = - \iint_B \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} dB + \int_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial y} n_y dS \quad (3.15)$$

denklemleri elde edilir (Zienkiewicz, 1977).

Yukarıda bulunan denk.(3.14) ve denk.(3.15)'in toplamı aşağıdaki denklemi verir:

$$\iint_B \phi \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) dB = \iint_B \left(- \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dB + \int_S \phi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} n_y \right) dS \quad (3.16)$$

Burada,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} n_y = \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad (3.17)$$

'dir. Bu durumda denk.(3.16),

$$\iint_B \phi \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) dB = \iint_B \left(- \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dB + \int_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (3.18)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece kısmi integrasyon sonucunda bir sınır integral terimi elde edilmiş olur. Bu ifade denk.(3.5)'teki terimler cinsinden,

$$\iint_B w \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - b \right) dB = \iint_B \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - bw \right) dB + \int_S w \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \quad (3.19)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu durumda ikinci dereceden diferansiyel denklemin kısmi integrasyonu, u 'nun normale göre türevini yani, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 'i verir (Bu terim daha sonra q olarak isimlendirilecek ve

$q = \frac{\partial u}{\partial n}$ olarak kullanılacaktır).

Elde edilen bölge integrallerinin tekrar kısmi integrasyonu sonucunda,

$$\iint_B \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dB = -\iint_B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u dB + \int_S \frac{\partial w}{\partial x} u n_x dS \quad (3.20)$$

$$\iint_B \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} dB = -\iint_B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} u dB + \int_S \frac{\partial w}{\partial y} u n_y dS \quad (3.21)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler taraf tarafa toplanıp düzenlendikten sonra,

$$\iint_B \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dB = \iint_B u \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dB - \int_S u \frac{\partial w}{\partial n} dS \quad (3.22)$$

bulunur. Bu sonuç denk.(3.19)'da yerine yazılırsa,

$$\iint_B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} u - bw \right) dB + \int_S \frac{\partial u}{\partial n} w dS - \int_S u \frac{\partial w}{\partial n} dS = 0 \quad (3.23)$$

veya

$$\iint_B \left\{ (\nabla^2 w) u - bw \right\} dB + \int_S \frac{\partial u}{\partial n} w dS - \int_S u \frac{\partial w}{\partial n} dS = 0 \quad (3.24)$$

elde edilir. Denk.(3.24), denk.(3.4)'e eşit olduğundan

$$\iint_B (\nabla^2 u) w dB = \iint_B (\nabla^2 w) u dB + \int_S \frac{\partial u}{\partial n} w dS - \int_S u \frac{\partial w}{\partial n} dS = 0 \quad (3.25)$$

yazılabilir. Bu eşitlik aynı zamanda Green Teoremi olarak bilinen şekilde de ifade edilebilir:

$$\iint_B \{(\nabla^2 u)w - (\nabla^2 w)u\} dB = \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial n} w - u \frac{\partial w}{\partial n} \right) dS \quad (3.26)$$

B bölgesinin S sınırı, S_1 ve S_2 ($S = S_1 + S_2$) olmak üzere, aşağıdaki sınır şartlarıyla ikiye bölünebilir:

$$S_1 \text{ sınırında, } u = \bar{u} \quad \text{"Dirichlet Tipi" Sınır Şartı}$$

$$S_2 \text{ sınırında, } q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{"Neumann Tipi" Sınır Şartı}$$

Daha sonra, denk.(3.24) şöyle yazılabilir:

$$\iint_B \{(\nabla^2 w)u - bw\} dB + \int_{S_1} qwdS + \int_{S_2} \bar{q}wdS - \int_{S_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} dS - \int_{S_2} u \frac{\partial w}{\partial n} dS = 0 \quad (3.27)$$

Sınır şartlarının denkleme etkisini görmek ve Laplace denklemi $\nabla^2 u$ 'yu tekrar elde etmek için, bir kere daha kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\iint_B \left\{ -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - bw \right\} dB + \int_S \frac{\partial w}{\partial n} u dS + \int_{S_1} qwdS + \int_{S_2} \bar{q}wdS - \int_{S_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} dS - \int_{S_2} u \frac{\partial w}{\partial n} dS = 0 \quad (3.28)$$

ifadesi elde edilir. S sınırındaki integral, S_1 ve S_2 olmak üzere iki terimin toplamı şeklinde yazılabilir. Bu durumda son integral yok edilir. Böylece,

$$\iint_B \left\{ -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - bw \right\} dB + \int_{S_1} \frac{\partial w}{\partial n} u dS + \int_{S_1} qwdS + \int_{S_2} \bar{q}wdS - \int_{S_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} dS = 0 \quad (3.29)$$

elde edilir. Tekrar kısmi integrasyon ile,

$$\iint_B \{(\nabla^2 u)w - bw\} dB - \int_S qwdS + \int_{S_1} \frac{\partial w}{\partial n} u dS + \int_{S_1} qwdS + \int_{S_2} \bar{q}wdS - \int_{S_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} dS = 0 \quad (3.30)$$

ifadesi elde edilir. S sınırındaki integral, biri S_1 ve diğeri S_2 sınırı olmak üzere iki integralin toplamı olarak yazılabilir. Buradan çıkacak olan S_1 integrali, denk.(3.30)'daki qw 'nun S_1 integrali ile yok edilebilir. Bu durumda denklem şu şekli alır:

$$\iint_B \left\{ (\nabla^2 u)w - bw \right\} dB - \int_{S_2} qw dS + \int_{S_1} \frac{\partial w}{\partial n} u dS + \int_{S_2} \bar{q} w dS - \int_{S_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} dS = 0 \quad (3.31)$$

Bu formül,

$$\iint_B \left\{ (\nabla^2 u)w - bw \right\} dB - \int_{S_2} (q - \bar{q})w dS + \int_{S_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} dS = 0 \quad (3.32)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu ifade bir kere daha gösteriyor ki, sınır şartlarının iki tipi (S_1 'de temel şartlar $u = \bar{u}$ ve S_2 'de tabii şartlar $q = \bar{q}$) ve bir bölgede diferansiyel denklem sağlanmaya çalışılmaktadır.

$b=0$ olması durumunda Laplace denklemi elde edilir ve denk.(3.32) şu şekilde yazılır:

$$\iint_B (\nabla^2 u)w dB = \int_{S_2} (q - \bar{q})w dS - \int_{S_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} dS \quad (3.33)$$

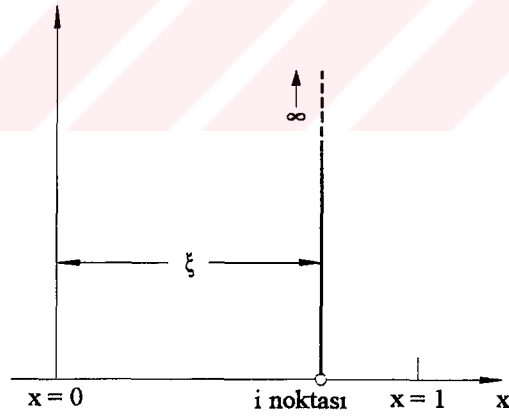
3.3. Temel Çözümün Uygulanması

Sınır integral denklemlerini elde etmek için yapılacak ilk ve en önemli işlem; problemi tanımlayan diferansiyel denklemin 'temel çözüm'ünün bulunmasıdır. Bu temel çözüm, kısmi diferansiyel denklemi B bölgesinde sağlar ve bu denklemi bir sınır integral denklemine dönüştürür. Böylece problem iki boyutlu durumdan, bir boyutlu duruma indirgenmiş olur (Ek-B).

$\nabla^2 u = 0$ Laplace Denklemi'nin temel çözümü u^* olsun. Bu temel çözüm, bir 'i' noktasında bulunan bir kaynak tarafından meydana getirilen alanı ifade eder. Bu kaynağın etkisi, herhangi bir sınır şartı gözönüne alınmaksızın, 'i' noktasından sonsuza kadar yayılır. Bu nedenle u^* , aşağıdaki Poisson Denklemi'ni sağlar (Partridge vd., 1992):

$$\nabla^2 u^* + \Delta_i = 0 \quad (3.34)$$

Burada, Δ_i bir Dirac delta fonksiyonudur. Bu fonksiyon $x = x_i$ noktasında sonsuza giderken, bu nokta dışındaki herhangi bir noktada sıfıra eşittir. Δ_i fonksiyonunun bir bölge üzerindeki integrali ise 1'e eşittir.



Şekil 3.3 Dirac delta fonksiyonu.

Bir Dirac delta fonksiyonunun herhangi bir fonksiyonla çarpımının integrali, bu fonksiyonun 'i' noktasındaki değerine eşittir. Buradan,

$$\iint_B u(\nabla^2 u^*) dB = \iint_B u(-\Delta_i) dB = -u_i \quad (3.35)$$

yazılabilir.

Denk.(3.27)'de $b = 0$ ve $w = u^*$ yazılarak,

$$\iint_B \left\{ (\nabla^2 u^*) u \right\} dB = - \int_{s_1} q u^* dS - \int_{s_2} \bar{q} u^* dS + \int_{s_1} \bar{u} \frac{\partial u^*}{\partial n} dS + \int_{s_2} u \frac{\partial u^*}{\partial n} dS \quad (3.36)$$

ifadesi elde edilir. Bu önemli denklem, sınır elemanları yönteminin uygulanması için bir başlangıç noktasıdır. Amaç, bu denklemi bir sınır integral denklemine dönüştürmektir. Bu işlem, temel çözüm (u^*) kullanılarak yapılır.

3.4. İç Nokta Formülasyonu

Denk.(3.35)'te bulunan ifade denk.(3.36)'da yerine yazılırsa,

$$-u_i = - \int_{s_1} q u^* dS - \int_{s_2} \bar{q} u^* dS + \int_{s_1} \bar{u} q^* dS + \int_{s_2} u q^* dS \quad (3.37)$$

elde edilir. Daha sonra denklem düzenlenerek,

$$u_i + \int_{s_1} \bar{u} q^* dS + \int_{s_2} u q^* dS = \int_{s_1} q u^* dS + \int_{s_2} \bar{q} u^* dS \quad (3.38)$$

şeklinde yazılır. Bu ifadede sınır şartları gözönüne alındığında integraller,

$$\int_s q u^* dS = \int_{s_1} q u^* dS + \int_{s_2} \bar{q} u^* dS \quad (3.39)$$

$$\int_s u q^* dS = \int_{s_1} \bar{u} q^* dS + \int_{s_2} u q^* dS \quad (3.40)$$

toplam sınır ifadeleri şeklinde özetlenebilir (Tang, 1988). Buradan,

$$u_i + \int_s u q^* dS = \int_s q u^* dS \quad (3.41)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem, B bölgesi içindeki herhangi bir 'i' noktasında geçerlidir.

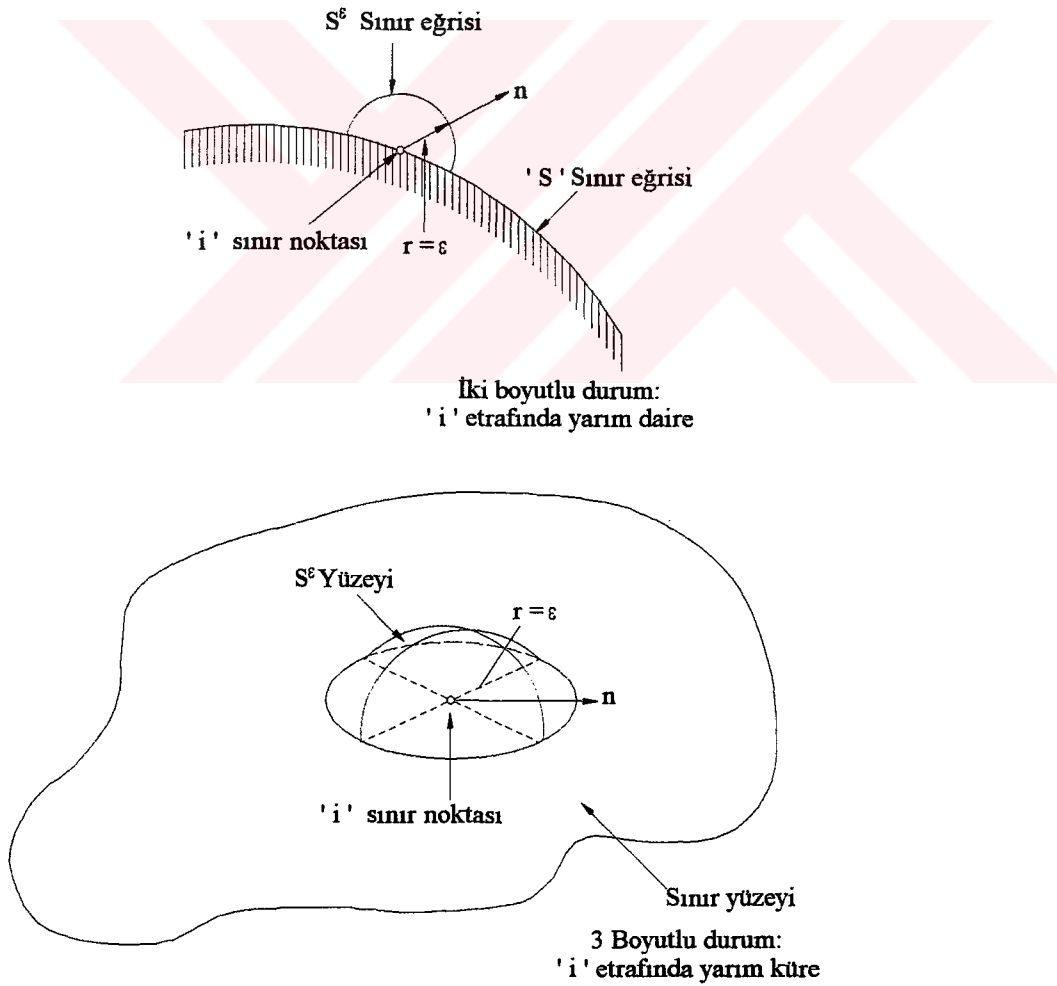
Bu nedenle denkleme '*iç nokta formülasyonu*' adı verilir.

3.5. Sınır İntegral Denklemi

'i' noktasının sınır üzerinde olduğu durumlar için sınır integral denkleminin elde edilmesi gerekir. Bunun için 'i' noktasının sınıra taşınması gerekir.

Bu amaçla 'i' noktasının sınır üzerinde olduğu, fakat kendi bölgesinin iki boyutlu durumda bir yarım daire ile veya üç boyutlu durumda ε yarıçaplı bir yarım küre ile büyütüldüğü gözönüne alınır.

Bu durumda 'i' noktasının S^ε ile gösterilen yarım dairenin veya yarım kürenin merkezinde olduğu (Şekil 3.4) ve limitin ε yarıçapı sıfıra giderken ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$) hesaplandığı gözönüne alınacaktır. Bu yolla 'i' noktası bir sınır noktası haline gelecektir ve sonuç ifadesi sınır üzerindeki herhangi bir nokta için geçerli olacaktır.



Şekil 3.4 İki ve üç boyutlu durumlar için sınır noktalarının, küçük bir yarım daire veya bir yarım küre ile büyütülmesi.

Bu amaçla denk.(3.41)'in her iki tarafındaki sınır integral ifadeleri, $\int_{s-s^e}$ ve $\int_{s^e}$ olmak üzere iki integralin toplamı şeklinde yazılabilir:

$$u_i + \int_{s-s^e} u q^* dS + \int_{s^e} u q^* dS = \int_{s-s^e} q u^* dS + \int_{s^e} q u^* dS \quad (3.42)$$

Üç boyutlu durumda, S^e çevresindeki integraller aşağıdaki sonuçları verir:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{s^e} q u^* dS \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{s^e} q \frac{1}{4\pi\varepsilon} dS \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ q \frac{2\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon} \right\} \equiv 0 \quad (3.43)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{s^e} u q^* dS \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{s^e} u \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} dS \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -u \frac{2\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon^2} \right\} = -\frac{1}{2} u_i \quad (3.44)$$

İki boyutlu durumda, denk.(3.41)'in sağ tarafındaki integral aynı şekilde sıfır olur. Denklemin sol tarafındaki integral ise aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{s^e} u q^* dS \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{s^e} u \frac{1}{2\pi\varepsilon} dS \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -u \frac{\pi\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \right\} = -\frac{1}{2} u_i \quad (3.45)$$

Bu durumda ε sıfır olduğu için denk.(3.42)'nin her iki tarafındaki $S-S^e$ sınırı tekrar S sınırı haline gelecektir. Hesaplanan değerler denk.(3.41)'de yerine yazılarak 'i' noktasının sınırda olması durumunda, iki veya üç boyutlu problemler için aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\frac{1}{2} u_i + \int_s u q^* dS = \int_s q u^* dS \quad (3.46)$$

Denk.(3.46)'ya '*sınır integral denklemi*' adı verilir ve genellikle sınır elemanları yönteminin başlangıç formülasyonu olarak kullanılır. 'i' noktasının düzgün sınırda olduğu durum için bulunan bu denklem aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir:

$$c_i u_i + \int_s u q^* dS = \int_s q u^* dS \quad (3.47)$$

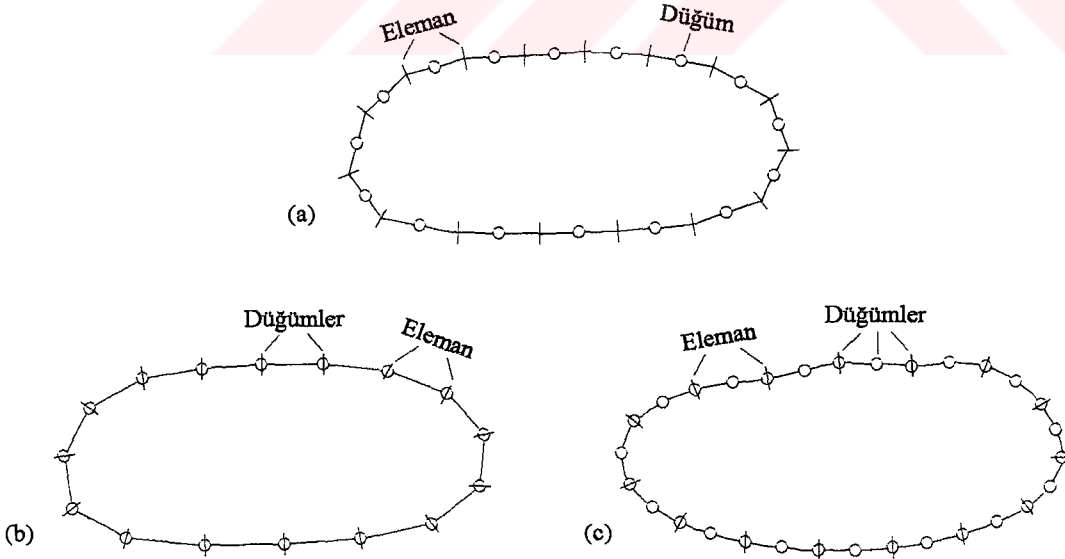
BÖLÜM 4

SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

4.1. Laplace Denklemi İçin Sınır Elemanları Yöntemi

$$c_i u_i + \int_S u q^* dS = \int_S q u^* dS \quad (4.1)$$

Sınır integral denkleminin ayrıştırılarak, sınır bilinmeyenlerinin elde edilmesi işlemi **Sınır Elemanları Yöntemi** ile yapılır. İki boyutlu durumda sınırlar N parçaya bölünerek sabit, lineer ve karesel eleman yaklaşımı olmak üzere üç tip sınır elemanı ile bir sınır problemi çözülebilir. Yöntemde, bilinmeyen değerlerin olduğu noktalar 'düğümler' olarak isimlendirilir ve sabit eleman olarak isimlendirilen durum için elemanın orta noktasında alınır (Şekil 4.1.a). Lineer elemanlı durumda düğümlerin elemanların uç noktalarında veya sonlarında olduğu kabul edilir (Şekil 4.1.b). Karesel elemanlarda ise, ilave olarak bir orta nokta kabul edilir (Şekil 4.1.c).



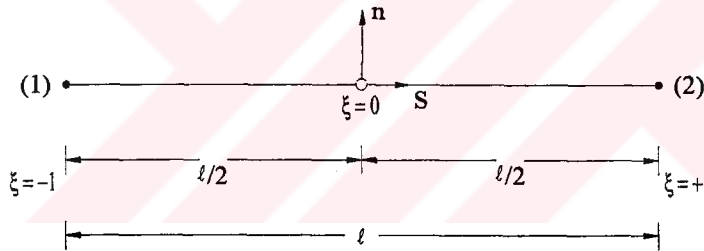
Şekil 4.1 (a) Sabit, (b) Lineer, (c) Karesel (*quadratic*) Sınır Elemanları.

4.2. Sabit Elemanlar

Sabit elemanlı sınır elemanları yönteminde, sınırın N sayıda elemana ayrıştırıldığı kabul edilir. Buna uygun olarak denk.(4.1), sınır şartları uygulanmadan önce verilen bir 'i' noktası için şu şekilde yazılabilir (Burada, 'i' noktası herhangi bir sınır düğümünü temsil etmektedir):

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^N \int_{s_j} u q^* dS = \sum_{j=1}^N \int_{s_j} q u^* dS \quad (4.2)$$

Her eleman üzerindeki u ve q değerlerinin sabit ve elemanın ortasındaki düğümün değerine eşit olduğu kabul edilir. Elemanların uçlarındaki noktalar sadece problemin geometrisinin tanımı için kullanılır (Şekil 4.2). Sabit eleman tipi için, düğümler elemanların merkezinde alındığından dolayı düğümlerdeki sınır daima düzdür. Bu nedenle u_i 'nin çarpanı her zaman $1/2$ 'dir.



Şekil 4.2 Sabit eleman.

u ve q değerleri, her eleman üzerinde sabit olduğundan dolayı integral dışına alınabilirler.

$$u(\xi) = u_1 = u_2 \quad (4.3)$$

$$q(\xi) = q_1 = q_2 \quad (4.4)$$

Bu değerler 'j' elemanı için, u_j ve q_j olarak isimlendirilecektir. Buradan,

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^N u_j \int_{s_j} q^* dS = \sum_{j=1}^N q_j \int_{s_j} u^* dS \quad (4.5)$$

elde edilir. Bu durumda elemanlar üzerinde hesaplanacak iki tip integral vardır:

$$\int_{s_j} q^* dS \quad \text{ve} \quad \int_{s_j} u^* dS$$

Bu integraller, temel çözümün uygulandığı 'i' düğümünün, herhangi bir 'j' düğümü ile ilişkisini sağlar. Bu etkileşim nedeniyle, bu integrallerin sonuç değerleri genellikle 'etki katsayıları' (*influence coefficients*) olarak isimlendirilir. Etki katsayıları, $\hat{H}_{ij}$ ve G_{ij} ile gösterilir:

$$\hat{H}_{ij} = \int_{s_j} q^* dS, \quad G_{ij} = \int_{s_j} u^* dS \quad (4.6)$$

Her ne kadar indislerin fazlaşmasından kaçınmak için u^* ve q^* içindeki notasyonlar açıkça gösterilmemişse de her yerde, temel çözümün özel bir 'i' düğümüne uygulandığı kabul edilmektedir (Şekil 4.3). Bu nedenle özel bir 'i' noktası için denklem,

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (4.7)$$

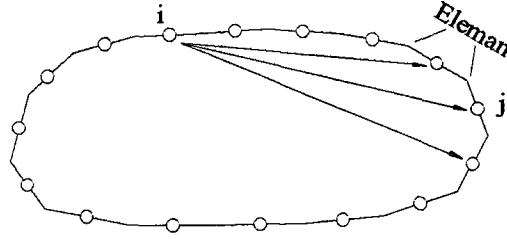
şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \hat{H}_{ij} & i \neq j & \text{ için,} \\ H_{ij} &= \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} & i = j & \text{ için,} \end{aligned} \quad (4.8)$$

olup, böylece denk.(4.7),

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (4.9)$$

şeklinde yazılır.



Şekil 4.3 'i' sınır düğümündeki temel çözüm ile sınır elemanları arasındaki ilişki.

Eğer 'i' düğümünün pozisyonunun 1'den N'e kadar değiştiği ve temel çözümün sırasıyla her bir düğüme uygulandığı kabul edilirse, denk.(4.9)'un her bir sınıra uygulanması sonucunda bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi matris şeklinde,

$$H u = G q \quad (4.10)$$

olarak ifade edilebilir. Burada H ve G, (N×N) boyutlu iki matris ve u ile q, (N) boyutlu vektörlerdir.

u 'nun değerlerinin S_1 sınırı üzerinde N_1 ve q 'nun değerlerinin S_2 sınırı üzerinde N_2 sayıda olduğu bilinmektedir ($N_1 + N_2 = N$). Denk.(4.10)'a sınır şartlarını uygulamak için H ve G 'nin sütunları bir taraftan diğer tarafa taşınarak sistem yeniden düzenlenir. Bütün bilinmeyenler sol tarafa toplanarak,

$$A x = y \quad (4.11)$$

yazılabilir. Burada x, u ve q 'nun bilinmeyen sınır değerlerinden oluşan bir vektördür. y ise u ve q 'nun bilinen değerlerine karşılık gelen H veya G 'nin kolonlarının çarpılmasıyla bulunur. Burada ilginç bir nokta, bilinmeyenler vektörünün sonlu elemanlardaki gibi sadece potansiyelden değil, potansiyel ve potansiyel türevin bir karışımından meydana gelmesidir. Bu, sınır elemanları yönteminin karışık formülasyonunun bir sonucudur ve sonlu elemanlara göre önemli bir üstünlük teşkil etmektedir.

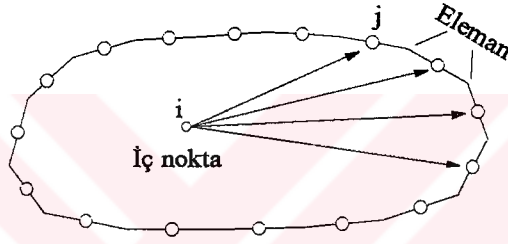
Şimdi denk.(4.11) çözülerek bütün sınır değerleri bulunabilir. Bu çözüm yapıldıktan sonra u veya u 'nun türevlerinin iç noktadaki değerlerini hesaplamak mümkündür. u 'nun herhangi bir 'i' iç noktasındaki değerleri denk.(4.37) kullanılarak bulunabilir:

$$u_i + \int_{s_2} u q^* dS + \int_{s_1} \bar{u} q^* dS = \int_{s_2} \bar{q} u^* dS + \int_{s_1} q u^* dS \quad (4.12)$$

Bu denklem özet olarak,

$$u_i = \int_s q u^* dS - \int_s u q^* dS \quad (4.13)$$

şeklinde yazılabilir. Denk.(4.13), u ve q 'nın sınır değerleri ile 'i' iç noktası arasındaki integral ilişkisini gösterir (Şekil 4.4).



Şekil 4.4 'i' iç noktasındaki temel çözüm ile sınır elemanları arasındaki ilişki.

Denk.(4.13)'te, temel çözümün bir 'i' iç noktası üzerinde etkili olduğu ve bütün u ve q değerlerinin daha önceden bilindiği gözönüne alınmaktadır.

Sınır integralleri ayrıştırılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$u_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j \quad (4.14)$$

Burada, G_{ij} ve $\hat{H}_{ij}$ katsayıları her bir farklı iç nokta için yeniden hesaplanır.

İki kartezyen yöndeki iç akıların değerleri, $q_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ve $q_y = \frac{\partial u}{\partial y}$,

denk.(4.13)'te türevlerin alınmasıyla hesaplanır:

$$(q_x)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \int_s q \frac{\partial u^*}{\partial x} dS - \int_s u \frac{\partial q^*}{\partial x} dS \quad (4.15)$$

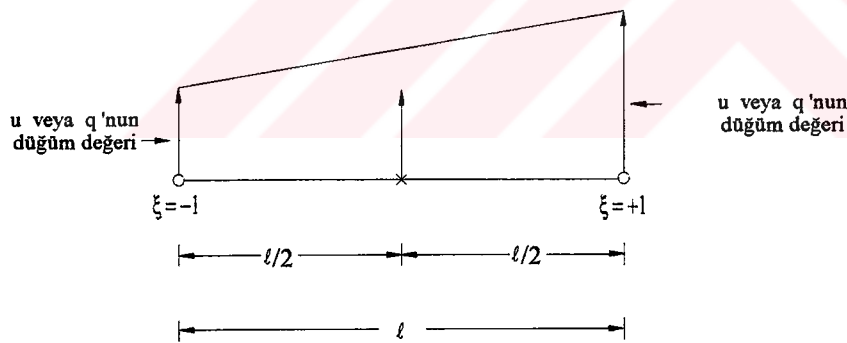
$$\left(q_y\right)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i = \int_s q \frac{\partial u^*}{\partial y} dS - \int_s u \frac{\partial q^*}{\partial y} dS \quad (4.16)$$

Burada, 'i' noktası çevresindeki akı değişimleri hesaplandığından dolayı türevler sadece u^* ve q^* temel çözümleri üzerinde yürütülür (Brebbia vd., 1984).

Denk.(4.14) ile denk.(4.15) ve denk.(4.16)'daki iç nokta integrallerinin hesaplanması genellikle sayısal olarak yapılır. Bu işlemleri yapmak biraz zordur, fakat Dual Reciprocity Method (Nardini vd., 1982, 1985) gibi daha basit yaklaşımlar kullanılarak bu integraller hesaplanabilmektedir.

4.3. Lineer Elemanlar

Bu bölüme kadar sadece, değişkenlerin değerlerinin bütün eleman üzerinde aynı olduğu kabul edilen sabit elemanlar incelendi. Bu bölümde ise, Şekil 4.5'te gösterildiği gibi düğümlerin, elemanların uç noktalarında olması hali için u ve q 'nun lineer bir değişim gösterdiği durum incelenecektir.



Şekil 4.5 Lineer eleman tanımları.

Genelleştirilmiş sınır integral ifadesi denk.(4.1)'de verildiği gibi,

$$c_i u_i + \int_S u q^* dS = \int_S q u^* dS \quad (4.17)$$

şeklindeydi ve u_i 'nin katsayısı olan $\frac{1}{2}$, bilinen bir c_i değeri olarak yazılmıştı. Sabit elemanlarda kullanılan $c_i = \frac{1}{2}$ katsayısı, sadece sınırın düzgün bir kısmına yerleştirilen bir düğüm için uygulanır. Herhangi bir sınır noktası için c_i değerleri,

$$c_i = \frac{\theta}{2\pi} \quad (4.18)$$

olarak gösterilebilir. Burada θ radyan olarak i 'i noktasındaki iç açıdır. Bu sonuç, nokta etrafında küçük bir küresel veya dairesel bölge tanımlayarak ve bunların yarıçapını sıfıra götürerek elde edilir. Diğer bir imkan c_i 'nin tam değerinin bulunmasıdır ve bu durumda açının hesaplanmasına gerek kalmaz.

Sınır N sayıda elemana ayrıştırıldıktan sonra denk.(4.1),

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \int_{s_j} u q^* dS = \sum_{j=1}^N \int_{s_j} q u^* dS \quad (4.19)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada u ve q her bir S_j elemanı üzerinde lineer olarak değiştiğinden, bu integrallerin hesaplanması sabit elemanlar için yapılan hesaplamadan daha zordur. Bu nedenle u ve q 'nun integral dışına alınması mümkün değildir.

Eleman üzerindeki herhangi bir noktada u ve q değerleri, Şekil 4.6'da gösterildiği gibi ξ homojen koordinatlarında verilen ϕ_1 ve ϕ_2 gibi iki lineer interpolasyon fonksiyonu ve bunların düğüm değerlerinde tanımlanabilir:

$$u(\xi) = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$q(\xi) = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

ξ , boyutsuz koordinatı -1 'den +1 'e değişir ve iki interpolasyon fonksiyonu,

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (4.22)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.23)$$

olarak verilir. Lineer eleman tanımlarında, sabit elemanlardaki gibi lineer şekil fonksiyonları kullanılır:

$$x(\xi) = N_1 x_1 + N_2 x_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi) x_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi) x_2 \quad (4.24)$$

$$y(\xi) = N_1 y_1 + N_2 y_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi) y_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi) y_2 \quad (4.25)$$

Bir eleman şekli için kullanılan şekil fonksiyonu ile eleman içindeki fiziksel değerlerin tanımı için kullanılan interpolasyon fonksiyonları aynı ise böyle bir elemana eş parametrelili (*isoparametric*) eleman adı verilir (Beer vd., 1991).

Bir 'j' elemanı üzerindeki integral denk.(4.19)'un sol tarafı için,

$$\int_{s_j} u q^* dS = \int_{s_j} [\phi_1 \quad \phi_2] q^* dS \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{ij}^1 & h_{ij}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

şeklinde yazılır. Burada, her bir 'j' elemanı için hesaplanacak iki integral terimi vardır:

$$h_{ij}^1 = \int_{s_j} \phi_1 q^* dS \quad (4.27)$$

ve

$$h_{ij}^2 = \int_{s_j} \phi_2 q^* dS \quad (4.28)$$

Benzer olarak sağ taraftaki integral,

$$\int_{s_j} q u^* dS = \int_{s_j} [\phi_1 \quad \phi_2] u^* dS \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{ij}^1 & g_{ij}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

olarak yazılır. Burada da

$$g_{ij}^1 = \int_{s_j} \phi_1 u^* dS \quad (4.30)$$

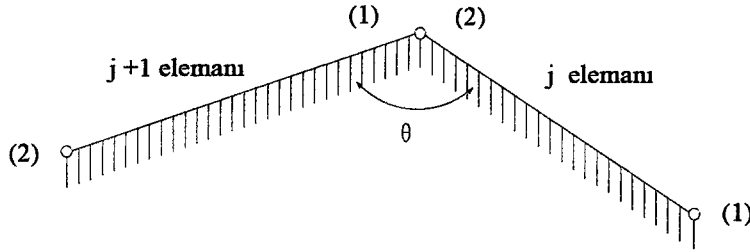
ve

$$g_{ij}^2 = \int_{s_j} \phi_2 u^* dS \quad (4.31)$$

şeklinde hesaplanır.

4.3.1. Köşedeki Düğümlerin Davranışı

Genel olarak, sınır elemanlarının kesişmesi durumunda her iki taraftaki şartlar aynı olmayabileceğinden, özel bir dikkat gerektiren geometrik olarak süreksizliğe sahip noktalar ortaya çıkacaktır. Bölgenin sınırı lineer elemanlar ile ayrıştırıldığında 'j' elemanının 2. düğümü ile 'j+1' elemanının 1. düğümü aynı noktada olur (Şekil 4.6).



Şekil 4.6 Elemanların kesişmesi.

Pratikte çoğu problemlerde, köşelerin her iki tarafında farklı akı değerleri mevcut olmasına karşın, potansiyel değerlerin süreksizliği nadiren tanımlanır. Potansiyel, sınırın herhangi bir noktasında aynı olduğundan, 'j' elemanının u^2 potansiyeli ile 'j+1' elemanının u^1 potansiyeli aynı değere sahiptir. Bununla birlikte, bu fikir genel bir kural olarak akıya uygulanamaz.

Bir elemanın 2. düğümündeki akının bir sonraki elemanın 1. düğümündeki akıdan farklı olabileceği hesaba katılarak akılar, $2N$ boyutunda düzenlenebilir.

Denk.(4.26) ve denk.(4.29) bütün 'j' elemanları için, denk.(4.19)'da yerine konursa, 'i' düğümü için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$c_i u_i + \begin{bmatrix} \hat{H}_{i1} & \hat{H}_{i2} & \dots & \hat{H}_{iN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{i1} & G_{i2} & \dots & G_{i2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{2N} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Burada $\hat{H}_{ij}$, 'j' elemanının h_{ij}^1 terimi ile 'j-1' elemanının $h_{i,j-1}^2$ teriminin toplamına eşittir. Bu nedenle denk.(4.32), 'i' düğümü için toplam denklemi gösterir. Denklemi basitleştirmek için

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{2N} G_{ij} q_j \quad (4.33)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem daha önceden denk.(4.9)'da sabit elemanlar için gösterildiği gibi,

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{2N} G_{ij} q_j \quad (4.34)$$

şeklinde ifade edilebilir. Denklemin tamamı matris şeklinde,

$$H u = G q \quad (4.35)$$

olarak yazılır. Burada G, N x 2N boyutunda dikdörtgen bir matristir.

Bir sınır düğümünde çeşitli durumlar meydana gelebilir. Birincisi, düğümün düz sınır üzerinde olmasıdır. Bu durumda, düğümden önceki ve sonraki akılar farklı tanımlanmadıkça, potansiyel veya akıdan sadece biri bilinmeyecektir. İkincisi, düğümün bir köşe noktasında olmasıdır. Burada, sınır şartlarına bağlı olarak dört durum ortaya çıkar:

1. Bilinen değerler : Köşeden önceki ve sonraki akılar.
Bilinmeyen değer : Potansiyel.
2. Bilinen değerler : Potansiyel ve köşeden önceki akı.
Bilinmeyen değer : Köşeden sonraki akı.
3. Bilinen değerler : Potansiyel ve köşeden sonraki akı.
Bilinmeyen değer : Köşeden önceki akı.
4. Bilinen değer : Potansiyel.
Bilinmeyen değerler: Köşeden önceki ve sonraki akılar.

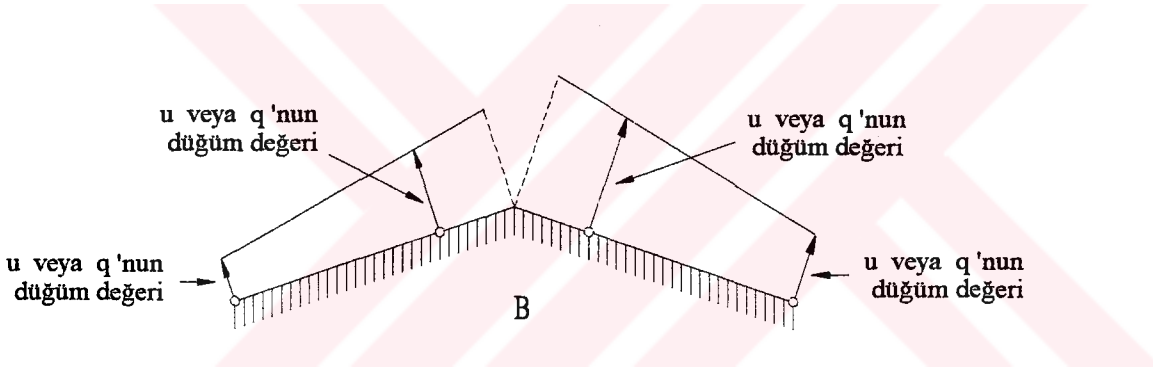
İlk üç durum için, her düğümde sadece bir bilinmeyen vardır; bilinen iki değer sağ tarafa alınır ve alışılmış (N x N) boyutlu denklem sistemi elde edilir:

$$A x = y \quad (4.36)$$

Burada x, bilinmeyenler vektörü ve A, bir kare matristir. A matrisi, işareti değiştirildikten sonra G matrisinin kolonları ile H matrisinin kolonlarını veya karşılık

gelen düğümdeki akının tek değeri bilinmediği zaman, bir işaret değişimi ile G 'nin ardışıl iki kolonunun toplamını içerir. Bilinenler vektörü y , G veya H matrislerinin karşılık gelen katsayıları ile bilinen sınır şartlarının çarpımından hesaplanır.

Bir köşe düğümünde bilinmeyenlerin sayısı iki olduğunda (4. durum), bu düğüm için fazladan bir denklem gerekir. Problem, süreksiz elemanlar düşüncesi kullanılarak ta çözülebilir (Danson vd., 1985). Bu durumda, ' j ' elemanının ikinci düğümü ve ' $j+1$ ' elemanının birinci düğümü, köşede birleşen iki lineer elemanın iç tarafına kaydırılır ve köşede birleşme yerine bağımsız iki düğüm olarak kalır (Şekil 4.7). Böylece, her düğüm için bir denklem yazılabilir. Potansiyel ve akı, bütün eleman boyunca ilgili düğüm değerlerinde lineer fonksiyonlar olarak gösterilirler, fakat prensip olarak köşede süreksizdirler.



Şekil 4.7 Süreksiz elemanlar.

4.3.2. c Katsayılarının Sayısal Olarak Bulunması

Eğer ' i ' noktasındaki sınır düzgün değilse, denk.(3.46)'da verilen $c_i = \frac{1}{2}$ değeri geçerli değildir ve denk.(4.18)'in uygulanması gerekir. Diğer bir imkan; üniform bir potansiyel, sınırlanmış bir bölgeye uygulandığında bütün türevlerin (q değerlerinin) sıfır olması zorunluluğundan hareketle denk.(4.35)'teki H matrisinin köşegen terimlerinin hesaplanmasıdır. Bu durumda denk.(4.35),

$$H u = 0 \quad (4.37)$$

olur. Burada u , bir sabit değerler vektörüdür. Böylece, H 'ın herhangi bir satırının bütün elemanlarının toplamı sıfır olmalıdır ve köşegen katsayılarının değerleri, bütün köşegen olmayan katsayıların değerleri bilindiğinden kolayca hesaplanabilir.

$$H_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i \text{ iç in})}}^N H_{ij} \quad (4.38)$$

Böylece, c_i değerlerinin açıkça hesaplanmasına gerek kalmaz.

Kapalı bölgeler için yukarıdaki formül tam manasıyla geçerli değildir. Sonsuz bölgeler ile ilgilenildiğinde denk.(4.38) düzenlenmelidir. Eğer birim potansiyel sınırsız bir bölgede tanımlanmışsa,

$$\int_{S_{\infty}} q * dS \quad (4.39)$$

integrali sonsuzdaki hayali bir S_{∞} dış sınırında sıfır olamaz ve aşağıdaki sonucu verir:

$$\int_{S_{\infty}} q * dS = -1 \quad (4.40)$$

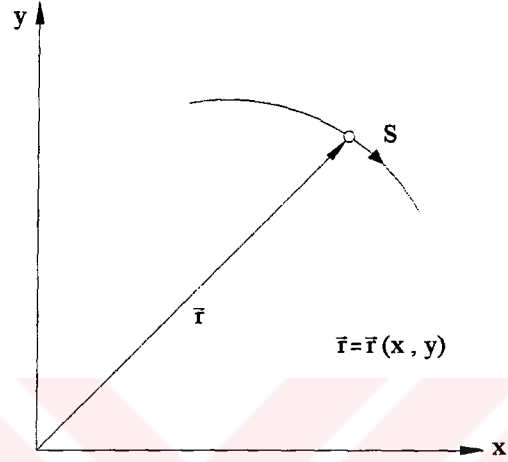
Bu durumda köşegen terimleri,

$$H_{ii} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i \text{ iç in})}}^N H_{ij} \quad (4.41)$$

formülü ile hesaplanır (Brebbia vd., 1984).

4.4. Karesel ve Daha Yüksek Dereceli Elemanlar

Genellikle rastgele geometriler için bazı eğrisel eleman tiplerinin kullanılması daha uygun olur. Bunların en basiti, dönüştürme ile çalışmayı gerektiren üç düğümlü ikinci dereceden elemanlardır.



Şekil 4.8 Eğrisel sınır.

Şekil 4.8'de, S 'nin sınır boyunca tanımlandığı ve $\bar{r}$ pozisyon vektörünün kartezyen koordinat sisteminin (x,y) bir fonksiyonu olarak gözönüne alındığı eğrisel bir sınır gösterilmiştir. Burada, u veya q değişkenleri ξ homojen koordinatlarında ifade edilen interpolasyon fonksiyonlarına bağlı olarak yazılabilir:

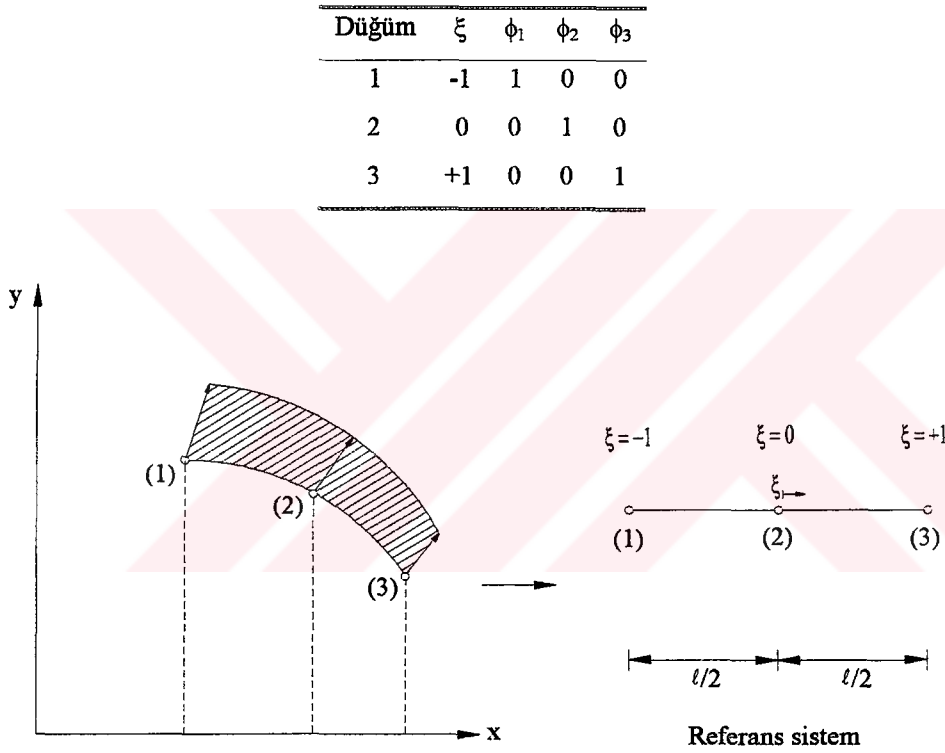
$$u(\xi) = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \phi_3 u_3 = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$q(\xi) = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 + \phi_3 q_3 = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Burada interpolasyon fonksiyonları,

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \\
\phi_2 &= (1 - \xi) (1 + \xi) \\
\phi_3 &= \frac{1}{2} \xi (\xi + 1)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

olarak verilir. Bu fonksiyonlar ξ cinsinden ikinci derecedendir. Denk.(4.42) ve denk.(4.43) ifadeleri, Şekil 4.9'daki referans ile verilen düğümler için kullanıldığında, u veya q değişkenlerinin düğüm değerlerini verir.



Şekil 4.9 Karesel eleman.

Karesel elemanlar boyunca alınan integraller, lineer elemanlar için hesaplanan integrallere benzerdir, fakat burada üç bilinmeyen düğüm değeri vardır. Mesela, H matrisinin katsayıları için integraller gözönüne alınırsa,

$$\int_{s_j} u q^* dS = \int_{s_j} [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] q^* dS \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{ij}^1 & h_{ij}^2 & h_{ij}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

Burada,

$$\begin{aligned} h_{ij}^1 &= \int_{s_j} \phi_1 q^* dS \\ h_{ij}^2 &= \int_{s_j} \phi_2 q^* dS \\ h_{ij}^3 &= \int_{s_j} \phi_3 q^* dS \end{aligned} \quad (4.46)$$

ϕ_i fonksiyonları ξ 'ye bağılı olarak ifade edildiklerinden dolayı, denk.(4.46)'daki terimlerin hesaplanması için bir Jacobian kullanımı gerekir, fakat integraller S 'nin fonksiyonlarıdır. $|G|$ bir Jacobian olmak üzere, Şekil 4.8'de verilen bir eğri için dönüşüm basit olarak,

$$dS = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi = |G| d\xi \quad (4.47)$$

şeklinde yapılabilir. Buradan,

$$h_{ij}^k = \int_{s_j} \phi_k q^* dS = \int_{-1}^{+1} \phi_k q^* |G| d\xi \quad (4.48)$$

yazılabilir. Bu formülü analitik olarak integre etmek çok zordur ve bütün durumlarda sayısal integrasyon kullanılması gerekir.

Denk.(4.47)'deki $|G|$ Jacobianının değerlerini hesaplamak için ξ 'ye bağılı olarak x ve y koordinatlarının değişiminin bilinmesi gerekir. Elemanın geometrik şeklinin tanımlanması, u ve q değişkenlerini tanımlamak için kullanılan karesel (ikinci dereceden) interpolasyon fonksiyonları kullanılarak yapılabilir:

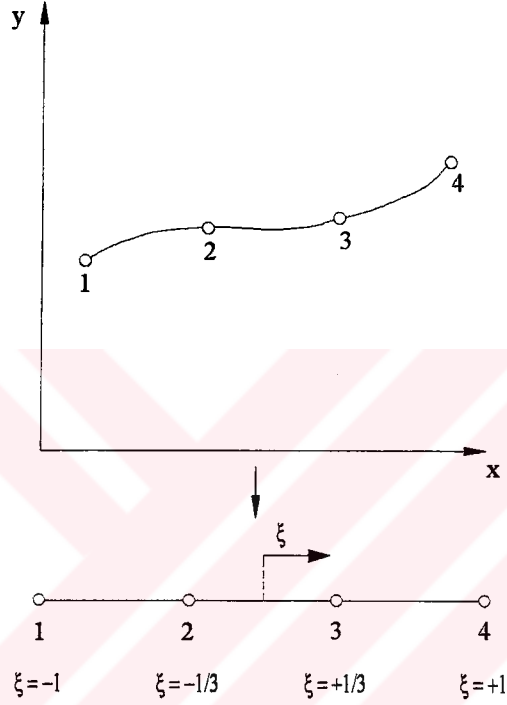
$$\begin{aligned} x &= \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 \\ y &= \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \phi_3 y_3 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Burada indisler düğüm numarasını gösterir. Bu genellikle sonlu elemanlar analizinde kullanılan eşparametrelili elemanlara benzer bir kavramdır.

4.5. Kübik Elemanlar

İkinci dereceden daha yüksek dereceli elemanlar pratikte nadiren kullanılırlar, fakat bazı özel uygulamalarda dikkate değer olabilirler.

Geometrinin ve u veya q değişkenlerinin kübik bir değişim göstermesi durumunda, fonksiyonlar her bir eleman üzerinde dört düğüm alınarak tanımlanır (Şekil 4.10).



Şekil 4.10 Dört düğümlü kübik elemanlar.

u ve q fonksiyonları,

$$u = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \phi_3 u_3 + \phi_4 u_4 \quad (4.50)$$

$$q = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 + \phi_3 q_3 + \phi_4 q_4 \quad (4.51)$$

şeklinde ve benzer olarak,

$$x = \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 + \phi_4 x_4 \quad (4.52)$$

$$y = \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \phi_3 y_3 + \phi_4 y_4 \quad (4.53)$$

yazılabilir.

Burada interpolasyon fonksiyonları,

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{1}{16} (1 - \xi) \left[-10 + 9 (\xi^2 + 1) \right] \\
 \phi_2 &= \frac{9}{16} (1 - \xi^2) (1 - 3\xi) \\
 \phi_3 &= \frac{9}{16} (1 - \xi^2) (1 + 3\xi) \\
 \phi_4 &= \frac{1}{16} (1 + \xi) \left[-10 + 9 (\xi^2 + 1) \right]
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

şeklinde verilir. İnterpolasyon fonksiyonları düğümlerde aşağıdaki değerleri alırlar:

Düğüm	ξ	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
1	-1	1	0	0	0
2	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	0
3	$+\frac{1}{3}$	0	0	1	0
4	+1	0	0	0	1

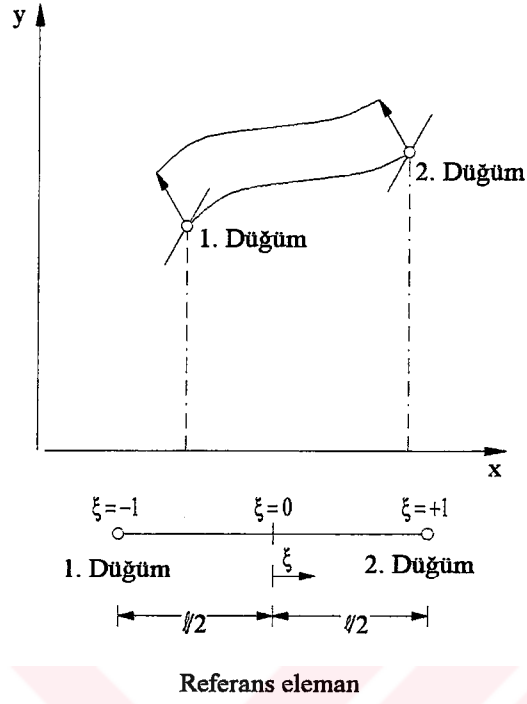
Kübik elemanlarda diğer bir imkan, fonksiyon ile ilgili olarak u ve q 'nun değişimini ve eleman boyunca türevini, Şekil 4.11'de gösterildiği gibi iki uç noktada tanımlamaktır.

u için uygun fonksiyon,

$$u = \phi_1 u_1 + \phi_2 \left(\frac{\partial u}{\partial S} \right)_1 + \phi_3 u_2 + \phi_4 \left(\frac{\partial u}{\partial S} \right)_2 \tag{4.55}$$

olarak verilir. İnterpolasyon fonksiyonları ise şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{1}{4} (\xi - 1)^2 (2 + \xi) \\
 \phi_2 &= \frac{1}{8} \ell (\xi - 1)^2 (\xi + 1) \\
 \phi_3 &= \frac{1}{4} (\xi + 1)^2 (2 - \xi) \\
 \phi_4 &= \frac{1}{8} \ell (\xi + 1)^2 (\xi - 1)
 \end{aligned} \tag{4.56}$$



Şekil 4.11 İki düğümlü kübik elemanlar.

Burada ℓ eleman uzunluğudur. Bir ℓ eğrisel elemanlı durumda, eleman üzerinde denk.(4.47) ile verilen $|G|$ Jacobianı integre edilerek hesaplanabilir. Aynı ϕ fonksiyonları, q , x ve y için kullanılır.

4.6. Poisson Denklemi İçin Sınır Elemanları Yöntemi

Sınır elemanları yönteminde yüzeysel veya hacimsel yükler, lineer olmayan terimler vb. etkiler nedeniyle bölge integralleri ortaya çıkabilir. Bunun için homojen olmayan Poisson diferansiyel denklemi incelenecektir.

İlk olarak aşağıdaki Poisson denklemi gözönüne alınsın:

$$\nabla^2 u = b \quad (\text{B bölgesinde}) \quad (4.57)$$

Burada $b = b(x, y)$ olmak üzere bilinen bir fonksiyon kabul edilecektir. Bundan başka, $b = b(x, y, u)$ şeklinde potansiyelin bir fonksiyonu veya $b = b(x, y, u, t)$ şeklinde zaman bağımlı bir fonksiyon olabilir. Böylece zaman bağımlı veya lineer olmayan problemler de analiz edilebilir. Geniş anlamdaki bu problemler için, DRM (*The Dual Reciprocity Method*) (Patridge vd., 1992) ve MRM (*The Multiple Reciprocity Method*) (Nowak vd., 1994) gibi özel sınır elemanları yöntemleri geliştirilmiştir.

Poisson denklemi için temel integral denklemlerinin elde edilmesi, Laplace denkleminde izlenen yola benzerdir.

$$\int_B (\nabla^2 u - b) u^* dB = \int_{S_2} (q - \bar{q}) u^* dS - \int_{S_1} (u - \bar{u}) q^* dS \quad (4.58)$$

denkleminin iki defa kısmi integrasyonu neticesinde,

$$\int_B (\nabla^2 u^*) u dB - \int_B b u^* dB = - \int_{S_1} q u^* dS - \int_{S_2} \bar{q} u^* dS + \int_{S_1} \bar{u} q^* dS + \int_{S_2} u q^* dS \quad (4.59)$$

elde edilir. Laplace denkleminin temel çözümü u^* yerine yazıldıktan sonra bütün sınır terimleri ve bölge terimi ile birlikte,

$$c_i u_i + \int_S u q^* dS + \int_B b u^* dB = \int_S q u^* dS \quad (4.60)$$

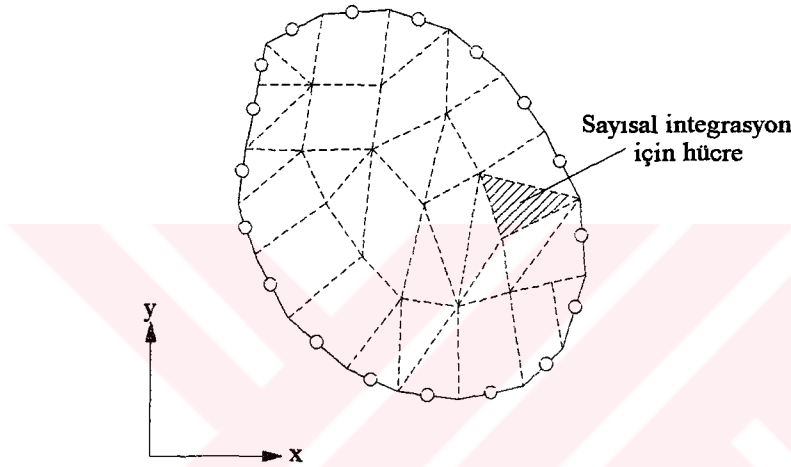
ifadesi elde edilir.

b fonksiyonu bilinmektedir ve bu sebeple B bölgesindeki integral herhangi bir yeni bilinmeyen içermemektedir. Sınır integrallerine ilaveten bir bölge integrali hesaplanması

gerektiğinden problemin karakterinde değışiklik olmuştur. c_i sabiti, önceden açıklandığı gibi, sadece incelenen 'i' noktasındaki sınır geometrisine bağlıdır.

4.6.1. Hücre (Cell) İntegrasyon Yaklaşımı

Son denklemdeki bölge teriminin hesaplanmasının en basit yolu, her birine Şekil 4.12'de gösterildiği gibi bir sayısal integrasyon kuralı uygulanabilen iç hücrelerle bölgenin ayrıştırılmasıdır.



Şekil 4.12 Sınır elemanları ve iç hücreler.

Bu durumda, her bir 'i' sınır noktası için bölge integrali,

$$d_i = \int_B bu^* dB = \sum_{e=1}^M \left[\sum_{k=1}^R w_k (bu^*)_k \right] B_e \quad (4.61)$$

olarak yazılabilir.

Burada integralin, farklı hücreler üzerinde bir toplam olarak yaklaşımı yapılmıştır. B bölgesini tanımlayan hücrelerin toplam sayısı M olmak üzere, 1 'den M 'e kadar değışir. w_k Gauss integrasyonu ağırlık katsayılarıdır ve (bu^*) fonksiyonunun her bir hücre üzerindeki k integrasyon noktalarında hesaplanması gerekir. Her bir hücre üzerindeki integrasyon noktalarının toplam sayısı R olmak üzere, k 1 'den R 'ye kadar değışir.

B_e , 'e' hücresinin alanıdır. d_i terimi, sayısal integrasyonun sonucudur ve sınır düğümlerinin her 'i' pozisyonu için farklıdır.

Son denklem,

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j + d_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (4.62)$$

şeklinde yazılabilir. Matris şeklinde ise,

$$H u + d = G q \quad (4.63)$$

olarak gösterilir.

Burada iç noktalarda herhangi bir potansiyel veya akı değeri hesaplandığında da bölge integrallerinin hesaplanması gerektiği bilinmelidir. Buradan iç nokta formülasyonu,

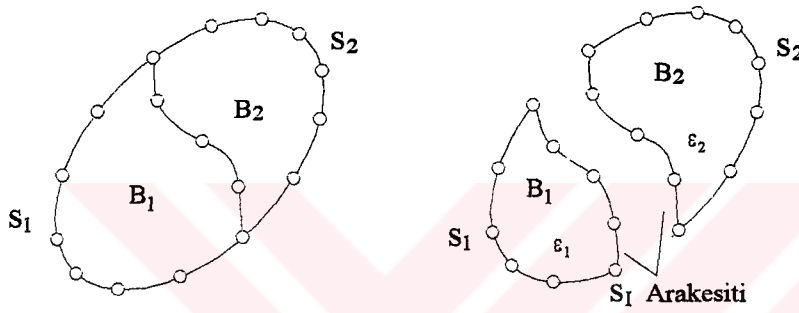
$$u_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j - d_i \quad (4.64)$$

şeklinde yazılabilir.

4.7. Farklı Bölgelerin Birleştirilmesi

Eğer incelenen problem homojen olmayan bir yapıda ise, problem bölgesi aynı özelliklere sahip homojen alt bölgelere ayrılarak sayısal işlemler uygulanabilir. Bu bölgeleri birleştiren arakesitlerde sınır şartları olarak potansiyelin sürekliliği ve akıların süreksizliği uygulanarak (Jaswon vd., 1977), (Klimpke, 1983), her bir alt bölge için denklem takımlarının toplanmasıyla tüm bölge için bir sonuç denklem sistemi elde edilir.

Basitlik açısından Şekil 4.13'te B bölgesi, B_1 ve B_2 olmak üzere sadece iki alt bölgeye ayrılmıştır.



Şekil 4.13 Problem bölgesinin iki alt bölgeye ayrılması.

B_1 alt bölgesi üzerinde;

U^1, Q^1 : S_1 dış sınırındaki düğüm potansiyelleri ve normale göre türevleri,

U_I^1, Q_I^1 : B_1 bölgesine ait olan S_I arakesitindeki düğüm potansiyelleri ve normale göre türevleri.

B_2 alt bölgesi üzerinde;

U^2, Q^2 : S_2 dış sınırındaki düğüm potansiyelleri ve normale göre türevleri,

U_I^2, Q_I^2 : B_2 bölgesine ait olan S_I arakesitindeki düğüm potansiyelleri ve normale göre türevleri.

B_1 alt bölgesi için,

$$\epsilon_1 \cdot \nabla^2 u = 0 \quad (4.65)$$

şeklinde yazılabilen Laplace denkleminden aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\epsilon_1 \begin{bmatrix} H^1 & H_I^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U_I^1 \end{Bmatrix} = \epsilon_1 \begin{bmatrix} G^1 & G_I^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q_I^1 \end{Bmatrix} \quad (4.66)$$

B₂ alt bölgesi için de

$$\varepsilon_2 \cdot \nabla^2 u = 0 \quad (4.67)$$

Laplace denkleminde,

$$\varepsilon_2 \begin{bmatrix} H^2 & H_I^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^2 \\ U_I^2 \end{Bmatrix} = \varepsilon_2 \begin{bmatrix} G^2 & G_I^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^2 \\ Q_I^2 \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

denklem sistemi elde edilir. Tüm bölge için denklem sistemi,

$$\varepsilon_1 \cdot \nabla^2 u + \varepsilon_2 \cdot \nabla^2 u = 0 \quad (4.69)$$

şeklinde yazılabilir. Denk.(4.66) ve denk.(4.68), denk.(4.69)'da yerine yazılarak,

$$\varepsilon_1 \begin{bmatrix} H^1 & H_I^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U_I^1 \end{Bmatrix} + \varepsilon_2 \begin{bmatrix} H^2 & H_I^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^2 \\ U_I^2 \end{Bmatrix} = \varepsilon_1 \begin{bmatrix} G^1 & G_I^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q_I^1 \end{Bmatrix} + \varepsilon_2 \begin{bmatrix} G^2 & G_I^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^2 \\ Q_I^2 \end{Bmatrix} \quad (4.70)$$

denklem sistemi elde edilir. Dielektrik malzemelerden oluşan, B₁ ve B₂ alt bölgelerinin birleştiği S_I arakesitinde; Potansiyelin sürekliliği,

$$U_I^1 = U_I^2 = U_I \quad (4.71)$$

ve normal gradyentin süreksizliği,

$$\varepsilon_1 Q_I^1 = -\varepsilon_2 Q_I^2 = Q_I \quad (4.72)$$

şartları geçerlidir. Bu şartlar gözönüne alınarak alt bölgelere ait denklem sistemleri birleştirildiğinde, tüm bölge için sonuç denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 H^1 & \varepsilon_1 H_I^1 + \varepsilon_2 H_I^2 & \varepsilon_2 H^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U_I \\ U^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 G^1 & G_I^1 - G_I^2 & \varepsilon_2 G^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q_I \\ Q^2 \end{Bmatrix} \quad (4.73)$$

BÖLÜM 5

ETKİ KATSAYILARI

5.1. Sabit Elemanlar

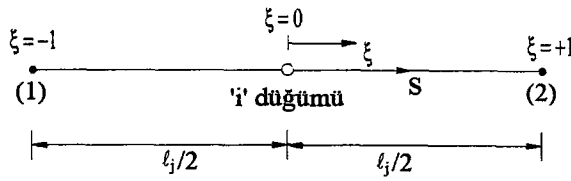
$\hat{H}_{ij}$ ve G_{ij} etki katsayılarının değerleri, iki boyutlu durumda çizgisel ve üç boyutlu durumda yüzeysel integrallerin sayısal olarak hesaplanması ile bulunur. Bunun için bilinen sayısal integrasyon yöntemleri kullanılır. Bu tez çalışmasında, tekil olmayan integrallerin hesaplanması için Gauss Alan Hesabı Yöntemi kullanılmıştır (Ek-C).

Lokal koordinat sisteminde verilen bir eleman üzerindeki bir noktanın koordinatları, global koordinat sisteminde aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$x(\xi) = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} \xi \quad (5.1)$$

$$y(\xi) = \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 - y_1}{2} \xi \quad (5.2)$$

Bu denklemlerde, $\xi = -1$ ve $\xi = +1$ yazılarak sabit elemanın uç noktalarının koordinatları elde edilebilir (Şekil 5.1).



Şekil 5.1 Eleman koordinat sistemi.

Denk.(5.1) ve denk.(5.2),

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) x_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi) x_2 \quad (5.3)$$

$$y(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) y_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi) y_2 \quad (5.4)$$

şeklinde veya özet olarak,

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^2 N_n(\xi) \mathbf{x}_n \quad (5.5)$$

$$\mathbf{y} = \sum_{n=1}^2 N_n(\xi) \mathbf{y}_n \quad (5.6)$$

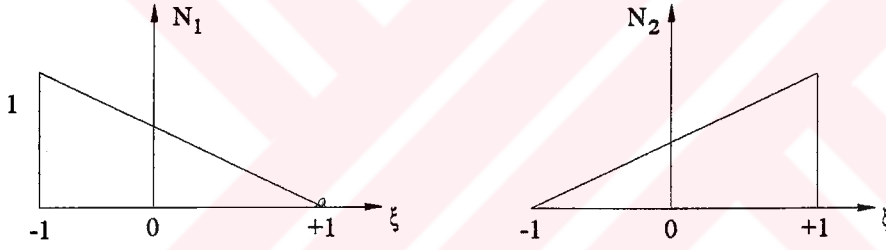
şeklinde yazılır. N_n eleman şekil fonksiyonlarıdır.

Bu durumda lineer şekil fonksiyonları,

$$N_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi) \quad (5.7)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi) \quad (5.8)$$

olarak yazılır. Lineer şekil fonksiyonları Şekil 5.2'de gösterilmiştir.



Şekil 5.2 Lineer şekil fonksiyonları.

Böylece, sabit elemanlar için global ve lokal koordinat sistemleri arasındaki ilişki, sabit elemanın (1) ve (2) noktaları arasında lineer şekil fonksiyonları ile verilir:

$$\mathbf{x}(\xi) = N_1 \mathbf{x}_1 + N_2 \mathbf{x}_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi) \mathbf{x}_2 \quad (5.9)$$

$$\mathbf{y}(\xi) = N_1 \mathbf{y}_1 + N_2 \mathbf{y}_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \mathbf{y}_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi) \mathbf{y}_2 \quad (5.10)$$

5.1.1. G_{ij} Etki İntegrallerinin Hesaplanması

Denk.(5.11)'de verilen G_{ij} etki integralini hesaplamak için u^* temel çözümü kullanılır.

$$G_{ij} = \int_{s_j} u^* dS \quad (5.11)$$

Sınır integrallerini hesaplamak amacıyla, sınırdaki bir dS sınır parçası için,

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \cdot d\xi \quad (5.12)$$

şeklinde bir koordinat dönüşümü yapılabilir. Denk.(5.9) ve denk.(5.10)'da türev alınarak,

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{y_2 - y_1}{2} \quad (5.13)$$

bu türevler denk.(5.12)'de yerine yazılırsa,

$$dS = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{2} \cdot d\xi = \frac{\ell_j}{2} \cdot d\xi \quad (5.14)$$

şeklinde basit bir koordinat dönüşümü yapılmış olur (Burada ℓ_j elemanın uzunluğudur).

$$G_{ij} = \int_{s_j} u^* dS = \int_{s_j} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS \quad (5.15)$$

$$G_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{s_j} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^{+1} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi$$

$$G_{ij} = \frac{\ell_j}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi = \frac{\ell_j}{4\pi} \sum_{k=1}^N \ln\left(\frac{1}{r_k}\right) w_k$$

$$G_{ij} = \frac{\ell_j}{4\pi} \sum_{k=1}^N \ln\left(\frac{1}{r_k}\right) w_k \quad (5.16)$$

5.1.2. $\hat{H}_{ij}$ Etki İntegrallerinin Hesaplanması

Denk.(5.17)'de verilen $\hat{H}_{ij}$ etki integralini hesaplamak için ilk önce, q^* teriminin bulunması gerekir.

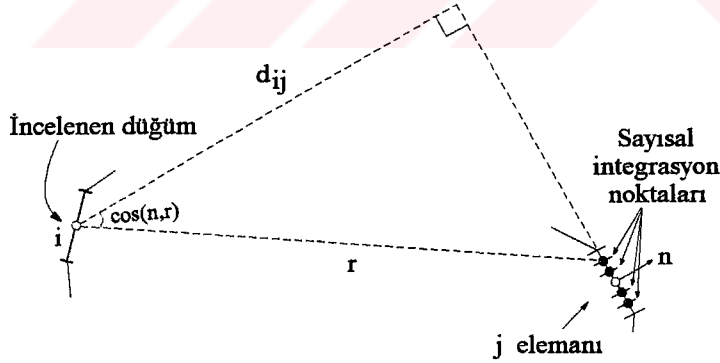
$$\hat{H}_{ij} = \int_{s_j} q^* dS \quad (5.17)$$

Burada q^* , temel çözümün (u^*) normale göre türevidir.

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad \text{ve} \quad u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right)$$

olduğundan, $\frac{\partial u^*}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r}$ (5.18)

bulunur. Ayrıca, $\frac{\partial r}{\partial n} = \cos(n, r)$ olduğundan, $\cos(n, r) = \frac{d_{ij}}{r}$ şeklinde yazılır (Şekil 5.3). (d_{ij} , 'i' düğümünün 'j' elemanına dik uzaklığıdır).



Şekil 5.3 Geometrik tanımlar.

Yazılan eşitliklere göre, denk.(5.17) şu şekilde hesaplanır:

$$\hat{H}_{ij} = \int_{s_j} q^* dS = \int_{s_j} \frac{\partial u^*}{\partial n} dS = \int_{s_j} \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS \quad (5.19)$$

$$\hat{H}_{ij} = \int_{s_j} -\frac{1}{2\pi r} \frac{d_{ij}}{r} dS = -\frac{1}{2\pi} \int_{s_j} \frac{d_{ij}}{r^2} dS$$

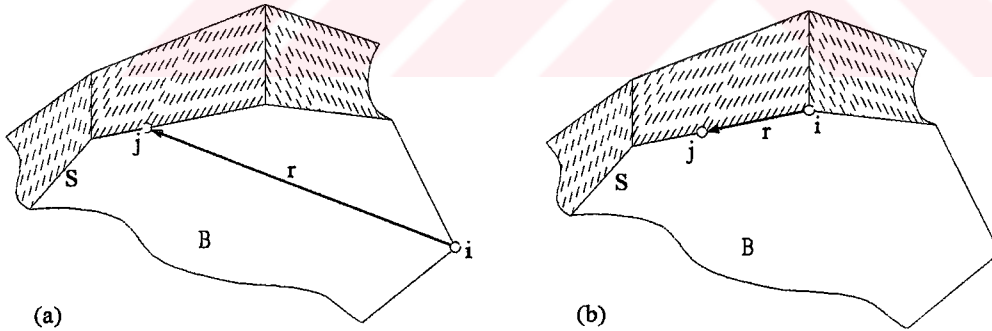
$$\hat{H}_{ij} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d_{ij}}{r^2} d\xi = -\frac{\ell_j}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{d_{ij}}{r_k^2} w_k$$

$$\hat{H}_{ij} = -\frac{\ell_j}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{d_{ij}}{r_k^2} w_k \quad (5.20)$$

5.1.3. Tekil İntegrallerin Hesaplanması

Daha önceki ifadelerdeki G_{ij} ve $\hat{H}_{ij}$ katsayıları $i \neq j$ durumu için, 'Gauss Alan Hesabı' gibi bir sayısal integrasyon formülü kullanılarak hesaplanabilir (Şekil 5.4.a).

'i' ve 'j' düğümlerinin aynı eleman üzerinde olması durumunda ($i = j$), bir tekillik meydana geleceğinden (Şekil 5.4.b) daha doğru bir integrasyon kuralı gerekir. Bu integraller için yüksek dereceden integrasyon kuralları veya özel bir formül kullanılması tavsiye edilir.



Şekil 5.4 (a) Kurallı bir eleman boyunca integrasyon,
(b) Tekil bir eleman boyunca integrasyon.

Sabit elemanların özel durumu için H_{ii} ve G_{ii} katsayıları analitik olarak hesaplanabilir. n normali ile kaynak noktasına olan r uzaklığı daima birbirine dik olduğundan dolayı $\hat{H}_{ii}$ terimleri sıfır olur:

$$\hat{H}_{ii} = \int_{s_i} q^* dS = \int_{s_i} \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS \equiv 0 \quad (5.21)$$

G_{ii} integralleri ise özel işlem gerektirir. Mesela, iki boyutlu bir eleman için,

$$G_{ii} = \int_{s_i} u^* dS = \frac{1}{2\pi} \int_{s_i} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS \quad (5.22)$$

şeklindedir. Denk.(5.22)'deki ifadeyi integre etmek için Şekil 5.1'deki ve denk.(5.14)'teki gibi bir koordinat dönüşümü gerçekleştirilebilir:

$$r = \frac{\ell_j}{2} |\xi| \quad (5.23)$$

$$dS = dr = \frac{\ell_j}{2} d\xi \quad (5.24)$$

Buradan simetri hesaba katılarak aşağıdaki ifade yazılır:

$$\begin{aligned} G_{ii} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\text{Nokta (1)}}^{\text{Nokta (2)}} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{1}{\pi} \int_{\text{düğüm '1'}}^{\text{Nokta (2)}} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dr \\ &= \frac{\ell_j}{2\pi} \int_0^1 \ln\left(\frac{2}{\ell_j \xi}\right) d\xi \\ &= \frac{\ell_j}{2\pi} \left\{ \ln\left(\frac{2}{\ell_j}\right) + \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) d\xi \right\} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Son integralin, 1'e eşit olduğu gösterilebilir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) d\xi &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \ln(\xi) d\xi \\ &= 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Burada, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \ln \varepsilon) = 0$ olduğundan integralin değeri,

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) d\xi = 1 \quad (5.27)$$

olarak verilir. Böylece G matrisinin köşegen terimleri,

$$G_{ii} = \frac{\ell_j}{2\pi} \left\{ \ln\left(\frac{2}{\ell_j}\right) + 1 \right\} \quad (5.28)$$

formülü kullanılarak hesaplanabilir. Eğrisel elemanlar gibi daha karmaşık durumlarda özel ağırlık formülleri kullanılmalıdır.

5.2. Lineer Elemanlar

Lineer elemanlar için, köşegen olmayan G_{ij} ve $\hat{H}_{ij}$ etki katsayıları, sabit elemanlar için bulunan denk.(5.16) ve denk.(5.20)'ye benzer şekilde hesaplanır. Lineer elemanlardaki farklılık, integraller içerisinde interpolasyon fonksiyonlarının olmasıdır.

Lineer elemanlarda iki düğüm bulunmaktadır. Bu nedenle incelenen 'i' düğümünün 'j' elemanının 1. düğümüne etkisi (g_{ij}^1 ve h_{ij}^1) ile 2. düğümüne etkisi (g_{ij}^2 ve h_{ij}^2) ayrı ayrı hesaplanmalıdır. Daha sonra, 'i' düğümünün 'j' elemanının 1. düğümüne etkisi ile 'j-1' elemanının 2. düğümüne etkisi toplanarak G_{ij} ve $\hat{H}_{ij}$ etki katsayıları hesaplanır.

5.2.1. g_{ij}^1 ve g_{ij}^2 Etki İntegrallerinin Hesaplanması

Lineer bir 'j' elemanı üzerindeki integral, denk.(4.30) ve denk.(4.31)'de verilen iki integralden oluşur:

$$g_{ij}^1 = \int_{s_j} \phi_1 u^* dS \quad \text{ve} \quad g_{ij}^2 = \int_{s_j} \phi_2 u^* dS$$

Burada, ϕ_1 ve ϕ_2 lineer interpolasyon fonksiyonlarıdır. Fiziksel büyüklükler elemanın düğüm noktalarında belirtildiğinden dolayı, interpolasyon fonksiyonları bu düğümler arasındaki değerlerin hesaplanması için kullanılır.

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (5.29)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (5.30)$$

Gauss sayısal integrasyon yöntemi kullanılarak aşağıdaki sonuç ifadeleri elde edilir:

$$g_{ij}^1 = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (1 - \xi_k) \ell_j \ln\left(\frac{1}{r_k}\right) w_k \quad (5.31)$$

$$g_{ij}^2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (1 + \xi_k) \ell_j \ln\left(\frac{1}{r_k}\right) w_k \quad (5.32)$$

5.2.2. h_{ij}^1 ve h_{ij}^2 Etki İntegrallerinin Hesaplanması

Benzer şekilde denk.(4.27) ve denk.(4.28)'de verilen,

$$h_{ij}^1 = \int_{s_j} \phi_1 q^* dS \quad \text{ve} \quad h_{ij}^2 = \int_{s_j} \phi_2 q^* dS \quad (5.33)$$

etki integralleri sayısal olarak aşağıdaki formüllerle hesaplanır:

$$h_{ij}^1 = - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (1 - \xi_k) \frac{d_{ij}}{r_k^2} \ell_j w_k \quad (5.34)$$

$$h_{ij}^2 = - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (1 + \xi_k) \frac{d_{ij}}{r_k^2} \ell_j w_k \quad (5.35)$$

5.2.3. Tekil İntegrallerinin Hesaplanması

'i' ve 'j' düğümlerinin aynı eleman üzerinde olması durumunda, H_{ii} katsayıları köşegen olmayan H_{ij} terimlerinin toplanmasıyla (denk.(4.38)), G_{ii} katsayıları ise,

$$G_{ii} = \frac{1}{4\pi} \ell_j \left(\frac{3}{2} - \ln(\ell_j) \right) \quad (5.36)$$

formülü ile analitik olarak hesaplanır (Partridge vd., 1992).

BÖLÜM 6

BİLGİSAYAR PROGRAMI

6.1. Genel Bilgi

Bu bölümde, iki boyutlu elektrostatik alan problemlerinin çözümü için geliştirilen ve Fortran dilinde yazılan bir bilgisayar programı açıklanmıştır. Programın adı SINEL 'dir ve program listesi Ek-D'de verilmiştir. Programda lineer sınır elemanları kullanılmıştır. Uygulama örnekleri için, analitik sonuçlarla da karşılaştırmanın yapılabileceği temel elektrot sistemleri seçilmiştir.

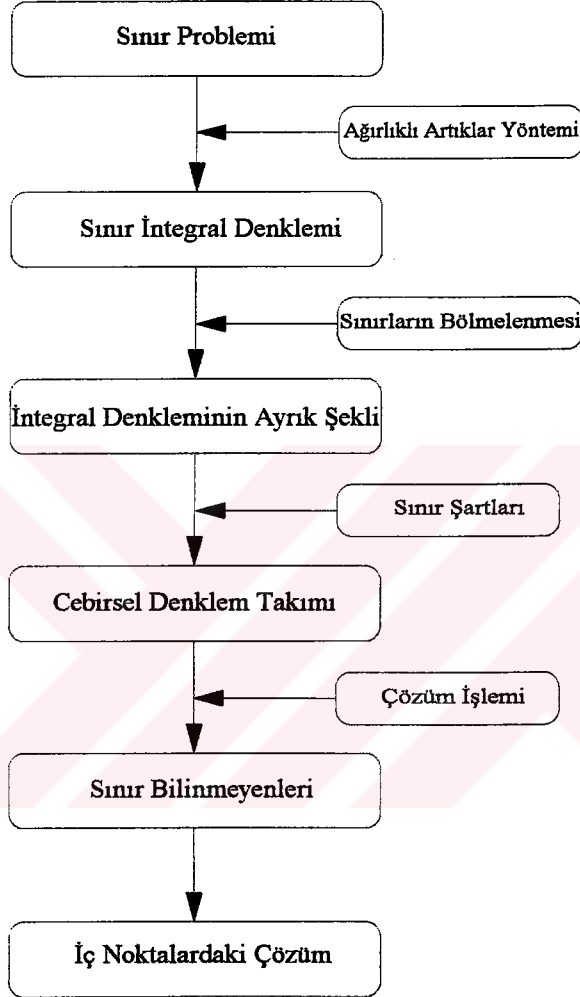
Laplace denklemi ile modellenen bir elektrostatik alan probleminin Sınır Elemanları Yöntemi ile analizinde ilk olarak problem bölgesi lineer sınır elemanları ile ayrıştırılır. Sınır elemanlarının uç noktalarının (düğüm) koordinatları ve eleman sayısı, düğüm sayısı, sınır şartları, malzeme özellikleri gibi basit bir veri girişi problemin analiz edilebilmesi için yeterlidir. Bu nedenle yöntemin en önemli özelliklerinden birisi, denklem sisteminin küçük olması ve bir problemin çözümü için gerekli veri sayısında sağladığı önemli ölçüdeki azalmadır.

Denklem sistemi, sadece sınır düğümlerindeki bilinmeyenlerden meydana gelmektedir. Buna karşılık, sistem matrisi doludur ve simetrik değildir. Ayrıca iç noktalardaki sonuçların sadece istenen noktalarda hesaplanabilmesi, yöntemin ve programın diğer önemli bir özelliğidir. Bu program;

- a) İzotropik malzeme özellikleri ile iki boyutlu elektrostatik alan problemlerinin çözülmesi,
- b) Sınırlardaki ve iç noktalardaki potansiyel dağılımının hesaplanması,
- c) Çok yüzeyli problemlerin çözümü,
- d) Açık sınırlı (sonsuz sınırlı) alan problemlerinin kolaylıkla analiz edilebilmesi, özelliklerini taşımaktadır.

Bir ana program ve beş alt programdan oluşan programda, denklem sisteminin maksimum boyutu 1000 'dir. Böylece, maksimum sınır elemanı sayısı 1000 (NE=1000) ve maksimum sınır düğümü sayısı 1000 (NN=1000) alınarak bir problem tanımlanabilir.

SINEL programı, Sınır Elemanları Yöntemi yardımıyla bir elektrostatik problemin analizinde kullanılan aşağıdaki çözüm aşamaları gözönünde bulundurularak geliştirilmiştir (Şekil 6.1).



Şekil 6.1 Sınır Elemanları Yöntemi ile sınır problemlerinin çözüm aşamaları.

6.2. SINEL Ana Programı

SINEL Ana programı aşağıdaki alt programlardan oluşur:

- INPUT** Program girişi okunur ve eleman bağlantıları belirlenerek, eleman uzunlukları hesaplanır.
- MATRX** H ve G etki matrisleri hesaplanır. Sınır şartları uygulandıktan sonra $Hu = Gq$ denklemi, $Ax = y$ sistemine indirgenir.

- SOLVER* Gauss eliminasyon yöntemi ile denklem sistemi çözülerek x vektörü hesaplanır. u ve q 'nun bilinmeyen sınır değerleri elde edilir.
- INTERM* İç düğümlerle ilişkili olan H ve G matrisleri ile bilinen u ve q sınır değerleri kullanılarak, seçilen iç noktalardaki potansiyel değerleri hesaplanır.
- OUTPT* Sınırlarda hesaplanan potansiyel ve potansiyelin normale göre türev değerleri ile iç noktalarda hesaplanan potansiyel değerleri yazılır.

Programda kullanılan değişkenler ve anlamları şu şekildedir:

- NE* Sınır elemanlarının sayısı.
- NN* Sınır düğümlerinin sayısı.
- NI* İç noktaların sayısı.
- NP* Tanımlanmış potansiyel sınır şartı sayısı.
- NS* Farklı bölge sayısı.
- NT* Sınır düğümleri ile iç noktaların toplam sayısı.
- INFB* Sonsuz sınır göstergesi ($INFB=1$ ise sonsuzda bir sınır tanımlanmıştır, $INFB=0$ ise problem bölgesi sınırlıdır).
- IFAIL* A matrisinin tekil olduğunu belirten gösterge.

Programda aşağıdaki diziler kullanılır:

- XI(6,3)* Gauss integrasyon noktalarının apsisleri.
- W(6,3)* Gauss integrasyon noktalarının ağırlık faktörleri
- X(NT)* Sınır düğümleri ve iç noktaların X koordinatları.
- Y(NT)* Sınır düğümleri ve iç noktaların Y koordinatları.
- INC(NE,2)* Eleman bağlantısı.
- LJ(NE)* Eleman uzunluğu vektörü.
- NL(NS)* Farklı bölgelerin son düğüm numaralarını içeren vektör.
- EPS(NN)* Bölgeyi oluşturan malzemenin dielektrik sabiti.
- KOD(NN)* Eleman düğümlerindeki sınır şartlarının tipini gösteren vektör
(Potansiyel tanımlanmış ise $KOD=1$, akı tanımlanmış ise $KOD=0$ alınır).
- U(NN)* Dirichlet sınır şartı vektörü.
- Q(NN)* Neumann sınır şartı vektörü.
- VAL(NS)* Karışık tip sınır şartı tanımlandığında potansiyellerin saklandığı vektör.

$H1(I, J)$	i. düğümün j. elemanın 1. düğümüne etkisini ifade eden H1 etki vektörü.
$H2(I, J)$	i. düğümün j. elemanın 2. düğümüne etkisini ifade eden H2 etki vektörü.
$HI(NN,NT)$	Sınır düğümlerinin iç noktalara etkisini ifade eden HI etki vektörü.
$G1(I, J)$	i. düğümün j. elemanın 1. düğümüne etkisini ifade eden G1 etki vektörü.
$G2(I, J)$	i. düğümün j. elemanın 2. düğümüne etkisini ifade eden G2 etki vektörü.
$GI(NN,NT)$	Sınır düğümlerinin iç noktalara etkisini ifade eden GI etki vektörü.
$A(NN,NN)$	Sistem matrisi.
$XM(NN)$	Denklem sistemindeki sağ taraf vektörü.

6.2.1. INPUT Alt Programı

Bu alt programda, program tarafından istenen bütün veri girişi okunur. Veri girişi aşağıdaki gruplardan oluşur:

1. *Problemin başlığı.*
2. *Problem hakkında genel bilgi.* Problemin sınır durumunu gösteren INFB, Şekil 6.3'teki kurallara göre tanımlanır:
 $INFB, NE, NN, NI, NP$
 $FORMAT(I1, I4, 3I5).$
3. *Bölgelerin son düğüm numaraları.* Problemi oluşturan bölgelerin son düğüm numaraları, elemanlara ait düğümleri (eleman bağlantılarını) belirlemek için kullanılır (INC(NE,1): 'j' elemanının 1. düğümü, INC(NE,2): 'j' elemanının 2. düğümü). Eleman bağlantıları aynı zamanda, elemanların uzunluklarını hesaplamak için de kullanılır:
 $NS, (NL(I), I = 1, NS)$
 $FORMAT(I1, I4, 4I5).$
4. *Bölgelerin malzeme özellikleri (dielektrik sabitleri).* Her bölge için ayrı ayrı tanımlanabilen dielektrik sabitleri, bölgeyi çevreleyen bütün sınır elemanlarına uygulanır:
 $EPS(I), I = 1, NS$
 $FORMAT(5F6.0).$

5. *Dirichlet tipi problemlerde potansiyel sınır şartları.* Bölgelerde sadece potansiyel sınır şartı uygulanmışsa ($NP = 0$ ise) her bölgenin ayrı ayrı potansiyeli buradan okunur. Bütün düğümler $KOD = 1$ olarak tanımlanır:

READ (IRE,8) (P(I),I=1,NS)

FORMAT (5F6.0).

6. *Sınır düğümlerinin ve iç noktaların koordinatları.* Lineer sınır elemanlarının düğümlerinin koordinatları ve $NN+1 \leq K \leq NT$ olmak üzere iç noktaların koordinatları aynı dizide tanımlanır ($NT=NN+NI$). Sınır elemanlarının düğümlerinin numaralandırılmasında 6.2.1.2. kısımdaki kurallar uygulanır:

K, X(K), Y(K)

FORMAT (I5, 2F10.0).

7. *Karışık tip (Dirichlet ve Neumann) sınır şartları.* Problemden Dirichlet ve Neumann tipi sınır şartları birlikte tanımlandığında, NP sayısı kadar potansiyel sınır şartı, uygulandığı düğüm numaraları ve $KOD=1$ ile verilir. Burada tanımlananların dışındaki düğümler otomatik olarak Neumann tipi sınır şartı ($KOD=0$ ve $Q=0$) olarak atanır:

K, KOD(K), VAL(K)

FORMAT(2I5, F15.4).

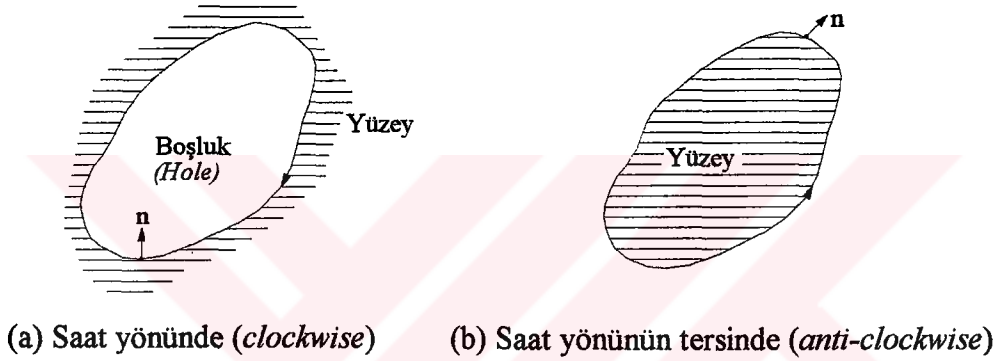
6.2.1.1. Eleman Bağlantılarının Belirlenmesi ve Eleman Uzunluklarının Hesaplanması

INPUT alt programının son kısmında, bölgelerin son düğüm numaraları kullanılarak her bölge için sınır elemanlarının birbirleri ile olan bağlantıları belirlenir. Daha sonra eleman bağlantıları yazdırılan NE sayısı kadar lineer sınır elemanının birinci düğümünün koordinatları; $X(N1)$, $Y(N1)$ ve ikinci düğümünün koordinatları; $X(N2)$, $Y(N2)$ kullanılarak, bütün elemanların uzunlukları hesaplanır.

6.2.1.2. Sınır Elemanları Yönteminde Numaralandırma Kuralları

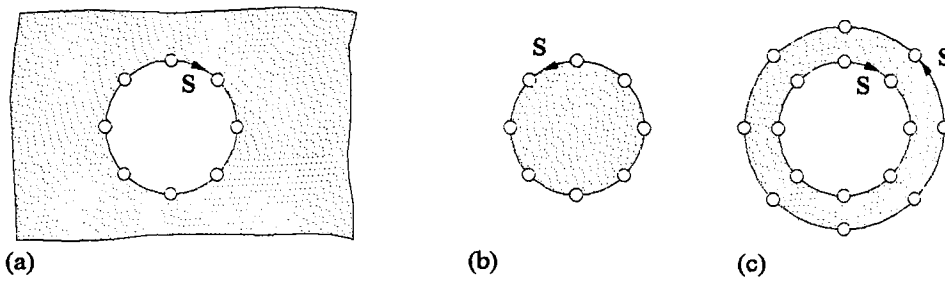
Sınır elemanları yönteminde bir dış veya iç sınır tanımlamak için normalin yönü özdeşliği kullanılır (Brebbia, 1978). Buna göre iki boyutlu problemler için, sınır düğümlerinin numaralandırılması işleminde aşağıdaki kurallar geçerlidir:

1. Dış yüzeyler için numaralandırma kuralı, saat yönünde (sağa doğru) tanımlanır (Şekil 6.2.a).
2. İç yüzeyler için numaralandırma kuralı, saat yönünün tersinde (sola doğru) tanımlanır (Şekil 6.2.b).



Şekil 6.2 (a) Dış yüzey ve (b) İç yüzey için, numaralandırma kuralı.

Sınırlı ve sınırsız bölgeler için numaralandırma yönleri, Şekil 6.3'te gösterilmiştir.



Şekil 6.3 Sınırlı ve sınırsız bölgeler için tanımlar.

- (a) Sınırsız durum; saat yönünde (INFB=1),
- (b) Sınırlı durum; saat yönünün tersinde (INFB=0),
- (c) Çok yüzeyli durum (INFB=0).

6.2.2. MATRX Alt Programı

Bu alt programda, denklem sistemi için gerekli bütün eleman etki matrisleri hesaplanır. Sayısal integraller, tekil olmayan elemanlar üzerinde 2, 4 veya 6 Gauss integrasyon noktası kullanılarak gerçekleştirilir. Noktaların sayısı, ayrı bir düğüm veya noktadan incelenen elemanın merkezine olan bağıl uzaklığa göre seçilir. İntegrasyon noktalarının sayısı belirlendikten sonra, bu noktaların koordinatları ile incelenen düğümün bu noktalara uzaklıkları (r_k) ve sınır elemanlarına dik uzaklıkları (d_{ij}) hesaplanır.

Tekillik içeren elemanlar için G matrisinin köşegen katsayıları daha doğru sonuçlar elde etmek için analitik olarak hesaplanır (GE). H matrisinin köşegen katsayıları ise aynı satırda köşegen olmayan terimlerin toplanmasıyla hesaplanır (FF(NN)).

Daha sonra sınır şartları uygulanır. u 'nun bilinen değerleri H matrisinin katsayıları ile çarpılır ve XM 'den çıkarılır. q 'nun bilinen değerleri G matrisinin katsayıları ile çarpılır ve XM 'e eklenir (XM vektörü çözümünden sonra bilinmeyenleri içerecektir). u ve q 'nun bilinmeyen değerlerine karşılık gelen H ve G matrisinin katsayıları A matrisi şeklinde kaydedilir. Böylece $H.u = G.q$ denklem sistemi, $A.x = y$ şekline dönüşür.

6.2.3. SOLVER Alt Programı

Bu alt programda, Gauss eliminasyon yöntemi kullanılarak $A.x = y$ denklem sistemi çözülür. Eğer A matrisinin köşegeninde sıfır varsa, verilen bir satır durumu için, sıfır olmayan bir köşegen katsayısı elde edilinceye kadar satırları değiştirilir.

Sonuçta bilinmeyen sınır değerleri, ana programdaki XM(NN) matrisine karşılık gelen B(NN) matrisine yazılır.

6.2.4. INTERM Alt Programı

Bu alt programda, bütün sınır değerleri bilindiğinden MATRX alt programında hesaplanarak saklanan ve iç noktaların sınır düğümlerine etkisini içeren HI ve GI etki matrisleri kullanılarak iç noktalardaki potansiyeller hesaplanır.

6.2.5. OUTPT Alt Programı

Son olarak bu alt programda, sınır düğümlerindeki potansiyel ve potansiyel türev değerleri ile istenen iç noktalardaki potansiyel değerleri yazdırılır.

6.3. ELECTRO PAKET PROGRAMI

ELECTRO yazılımı, 1987 yılında Integrated Engineering Software (IES) tarafından hazırlanmıştır. ELECTRO, elektrik teçhizatının analizi ve tasarımında özel problemlerin çözümüne yardımcı olmak için tasarlanmıştır.

ELECTRO'da, alan dağılımlarının ve iletim hattı parametrelerinin hesaplanmasında Sınır Elemanları Yöntemi'nin indirekt yaklaşımı (eşdeğer kaynak tanımlanması) kullanılmaktadır. Bu yaklaşımda, potansiyel doğrudan çözülmez, bunun yerine alanı destekleyen ve tanımlanan sınır şartlarını sağlamaya zorlanarak, eşdeğer bir kaynak bulunur. Kaynak bulunduktan sonra herhangi bir noktadaki potansiyel veya potansiyelin türevleri hesaplanabilir.

Bu tez çalışmasında, yukarıda verilen program ile elde edilen sonuçları karşılaştırmak için, 1996 'da çıkan ELECTRO V4.0 versiyonu ve daha sonra 1997 'de çıkan ELECTRO V4.1 versiyonu kullanılmıştır. ELECTRO yazılımında, Sınır Elemanları Yöntemi 'nin etkisi, ileri simülasyon özellikleri ile birleştirilmiştir.

ELECTRO 'da dört farklı çözücü mevcuttur:

- 1- Skaler ve vektörel alan dağılımlarını veren iki boyutlu alan çözücü.
- 2- Skaler ve vektörel alan dağılımlarını veren Rotasyonel simetrik alan çözücü.
- 3- İki boyutlu iletim hattı parametreleri (kapasiteler, indüktanslar, empedanslar, admittanslar ve propagasyon sabitleri).
- 4- Rotasyonel simetrik yapılar için kapasiteler ve eşdeğer serbest uzay kapasiteleri.

ELECTRO 'da iki farklı analiz modu vardır:

- 1- Sabit zamanlı elektrik alanları için statik mod.
- 2- Tipik olarak üç fazlı güç iletim hatlarının analizi için kuasi-statik mod.

Ayrıca kolaylıkla görülebilir sonuçlar elde etmek için değişik analiz araçlarının kullanımına imkan sağlar:

- * Model bölgesinin tamamında, istenen herhangi bir yerdeki potansiyel ve elektrik alan değerleri,
- * Eğri çizimleri, profil çizimleri ve grafikler şeklinde potansiyel ve elektrik alan bileşenleri gösterilir.
- * Elektrik alanları ok çizimleri ve grafikler şeklinde gösterilir.
- * Herhangi bir çizgi veya parça boyunca grafikler elde edilir.

ELECTRO ile herhangi bir problemi modellemek ve çözmek için, sistemin fiziksel parametrelerinin tanımlanması istenir. Tam bir problem tanımı aşağıdaki adımlardan meydana gelir:

- * Problemin geometrisi,
- * Malzeme özellikleri,
- * Sınır şartları ile kaynaklar (alan analizi için) veya iletkenler (iletim hattı parametrelerini hesaplamak için),
- * Sınır elemanları ayrışımı.

6.3.1. Geometri Modelleme

ELECTRO, herhangi bir geometrinin modellenmesinde çizgiler, yaylar, daireler ve spline eğrileri gibi temel özellikleri kullanır. Bu özellikler, hem problemin yeterli modellenmesini ve hem de modelin doğruluğunu artırmak için klavye veya mouse kullanılarak girilir. Geometri girilirken iyi bir referans yol gösterici işini gören bir ızgara kullanılır. Geometri noktalarını girmek için dikdörtgensel (*rectangular*) veya kutupsal (*polar*) koordinat sistemleri kullanılabilir.

6.3.2. İki Boyutlu (2D) ve Rotasyonel Simetrik (RS) Modelleme

Gerçek hayatta bütün problemler üç boyutludur. Bununla birlikte, bir çok problemler için, diğer boyutta alan değişiminin önemsiz olması durumunda sadece problemin bir kesitinin analizi istenir. Bu şekilde boyutsallığın indirgenmesi, bir problemin çözümü ile beraber veri girişini de azaltır. ELECTRO 'da iki boyutlu (2D) veya Rotasyonel Simetrik (RS) modeller oluşturulabilir.

Kartezyen koordinat sisteminde, alan büyüklüğünün x-y düzleminde değiştiği fakat üçüncü yönde (z yönünde) değişmediği kabul edilir. Bu koordinat sisteminde verilen iki boyutlu bir problemin çözümü ile geometri düzleminin iki yönündeki (x-y) alanların değişimi elde edilir.

Silindirik koordinat sistemi için, eğer çözüm açısal koordinattan bağımsız ise, Rotasyonel Simetrik (RS) durum sözkonusu olur. Bu durumda, düzlemde açısal koordinatın sadece bir değerinde bir çözüm istenir ve alan büyüklükleri sadece r-z düzleminde değişir. RS ($r=0$) eksenleri x veya y eksenlerine paralel olmalıdır.

6.3.3. Fiziksel Özelliklerin Uygulanması

ELECTRO ile çözülecek bir problemi tam olarak tanımlamak için, geometriye malzeme özellikleri, sınır şartları ve kaynaklar şeklindeki karakteristikler verilmelidir. Bu bağlamda, ELECTRO sınırın ayrıştırılmasını ve kaynak bölgelerinin bölmelenmesini ister.

Elektrik alan problemlerinin çözümünde, iletkenlik (*conductivity*) veya geçirgenlik (*permittivity*) istenir. Genel olarak uygulanan alan veya gerilim ile malzemelerin hem iletkenliği ve hem de geçirgenliği arasında lineer olmayan bir ilişki vardır. Bununla birlikte, bir çok durumda bu değişim küçüktür ve lineer bir yaklaşım kullanılır. Böyle durumlarda malzemenin iletkenliği veya geçirgenliği olarak sabit bir değer uygulanır. Değişimin çok büyük olduğu durumlarda ise bu ilişkiyi tanımlamak için bir eğri kullanılır. Bu eğriler, $E - J$ (lineer olmayan iletkenlik için) ve $E - D$ (lineer olmayan geçirgenlik için) olarak tanımlanır.

6.3.4. Sınırların ve Arakesitlerin Bölmelenmesi

ELECTRO açık bölgesi alanları çözmek için ve uygulanan sınır şartlarını sağlayan eşdeğer kaynakları meydana getirmek için Sınır Elemanları Yöntemi'ni kullanır. Sınır Elemanları Yöntemi'ni kullanmak amacıyla, kaynakların tanımlandığı ve sınır şartlarının sağlandığı ayrık parçalara (elemanlara) sınırların bölünmesi gerekir.

Bir model oluşturulurken, malzeme arakesitlerinde veya sınır şartlarının uygulandığı sınırlardaki bütün parçalar üzerinde sınır elemanları istenir. Rotasyonel simetrik modeller için, rotasyonel simetrik eksen üzerinde veya bu eksenin tanımlanmamış tarafı üzerinde sınır elemanları uygulanmaz.

Bir model üzerinde bir eleman dağılımı yapmak için iki yöntem kullanılır. Bunlardan birincisi, gerekli parçalar üzerinde sınır elemanlarını arttırarak veya azaltarak bir dağılım oluşturmak, diğeri ise otomatik olarak eleman dağılımı üretmektir. Bunlara ilaveten, bir modele manuel olarak sınır elemanları eklenmesi yerine Self-Adapt modu kullanılabilir. Self-Adapt modelin çözümü sırasında otomatik olarak elemanlar ekler. ELECTRO, çözüm tanımlanan doğruluğa erişinceye kadar eleman dağılımları meydana getirir ve çözümleme yapar. Ayrıca, hacimsel kaynaklar veya lineer olmayan malzemeler uygulandığında, çözümün yapılabilmesi için bölgelerin alt alanlara bölünmesi gerekir. Bunun amacı, kaynakların alan dağılımı üzerindeki etkisini hesaplamaktır.

6.3.5. Modelin Analizi

ELECTRO, oluşturulan modeli çözmek için, modeldeki alanları hesaplayan ve iletim hattı parametrelerini hesaplayan iki farklı çözücü kullanır. Ayrıca, varolan eleman dağılımlarını kullanarak çözümü hesaplayan (Manual) ve tanımlanan doğruluk derecesine ulaşıncaya kadar eleman dağılımı üreterek modeli tekrar tekrar çözen (Self-Adapt), iki çözücü yöntemi kullanır.

6.3.6. İletim Hattı Analizi

ELECTRO ile iletim hattı parametreleri, ekrana dik yönde sürekli kabul edilecek olan, iki boyutlu bir geometri için hesaplanabilir. Bir iletim hattı analizi gerçekleştirmek için, iletkenlerden oluşan bir model verilmelidir.

Değişik iletim hattı sistemlerinin tasarım parametrelerini hesaplamak için Sınır Elemanları Yöntemi kullanılır. Alanı destekleyen eşdeğer yükü hesaplamak amacıyla, Laplace denklemi tanımlanan sınır şartları altında çözülür. Eşdeğer yük biliniyorsa herhangi bir parametre elde edilebilir. Bu yolla kapasitans, indüktans ve empedans hesaplamaları yapılır.

6.3.7. Kuasi-Statik Alan Hesaplamaları

Statik alanlar için, elektrik alanı uzaydaki her bir yönde sabit bir vektör ile gösterilebilir. Bu, alanı tanımlamak için her bir uzay bileşeni boyunca bir fazör gerektiren sürekli durumlu sinüsoidal alanlardan farklıdır. Bu durumda her uzay bileşeni bir vektör değil, bir fazördür. Vektörler uzay açılarına sahip iken, fazörler zaman açılarına sahiptir.

Kuasi-statik elektrik alanlarının tanımlanması için faydalı bir yöntem, bir düzlemde elips çizen bir vektörün dönmesidir.

Her bir noktadaki potansiyel de bir fazör ile gösterilir. Bundan dolayı, sınır şartlarını girmek için bir büyüklük ve zaman açısı gerekir. Örneğin, dengeli üç fazlı bir iletim hattında ilk iletken $380\angle 120^\circ$ V, ikinci iletken $380\angle 0^\circ$ V ve üçüncü iletken $380\angle -120^\circ$ V uygulanmalıdır.

ELECTRO, kompleks potansiyelleri ve alanları hesaplayabilmek için Sınır Elemanları Yöntemi'nin kompleks bir şeklini kullanır.

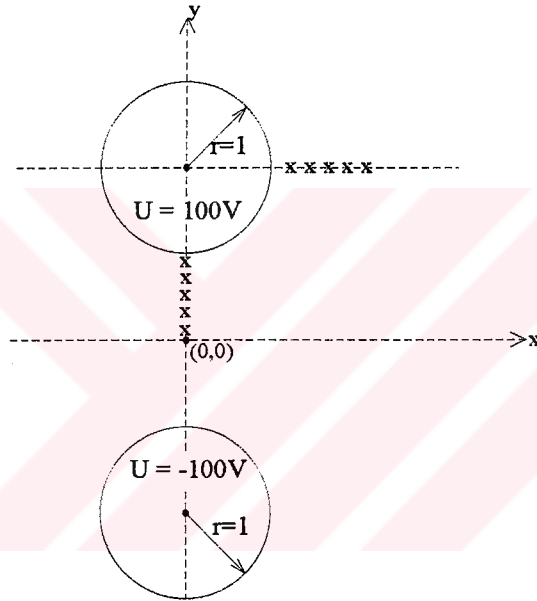
6.4. Uygulama Örnekleri

6.4.1. Tek Yalıtkanlı Elektrot Sistemi

6.4.1.1. Küre - Küre Sistemi

Ele alınan örnek sistem Şekil 6.4'te gösterilmiştir. Bu sistem, Sınır Elemanları Yöntemi'nin uygulandığı ve çözümün kolaylıkla elde edildiği açık sınır (sonsuz sınır) örneğidir. Kürelerin yarıçapı 1m olup, her bir küre 24'er sınır elemanı ile bölmelenmiştir.

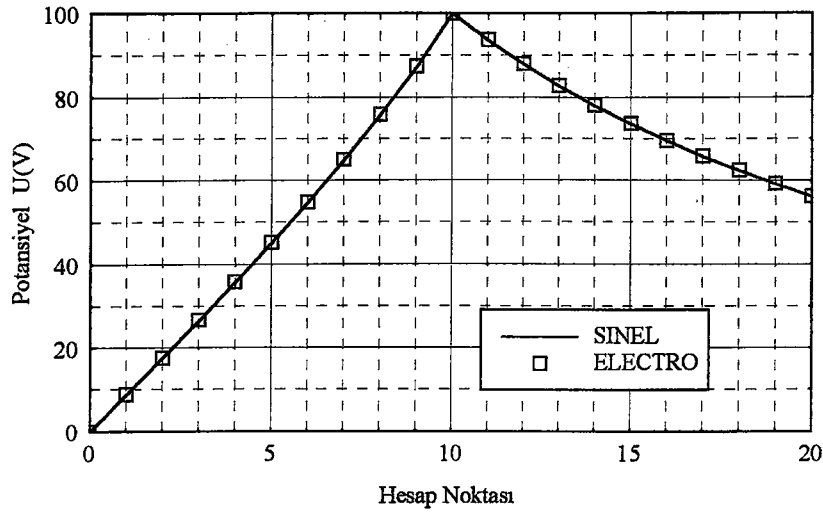
Bu çalışmada geliştirilen SINEL Programı ve ELECTRO paket programı sonuçları Tablo 6.1.'de verilmiş ve sonuçlar Şekil 6.5'te grafik olarak çizilmiştir.



Şekil 6.4 Tek yalıtkanlı küre-küre elektrot sistemi.

Tablo 6.1. Tek yalıtkanlı küre-küre elektrot sisteminin çözümü.

Hesap Noktası	Koordinatlar(m)		SINEL Programı	ELECTRO Programı	Fark
	x	y			
1	0.0	0.1	8.747	8.777	0.030
3	0.0	0.3	26.479	26.572	0.093
5	0.0	0.5	44.964	45.122	0.158
7	0.0	0.7	64.857	65.088	0.231
9	0.0	0.9	87.148	87.446	0.298
12	1.2	2.0	87.884	88.044	0.160
14	1.4	2.0	77.939	78.084	0.145
16	1.6	2.0	69.538	69.667	0.129
18	1.8	2.0	62.360	62.476	0.116
20	2.0	2.0	56.173	56.277	0.104

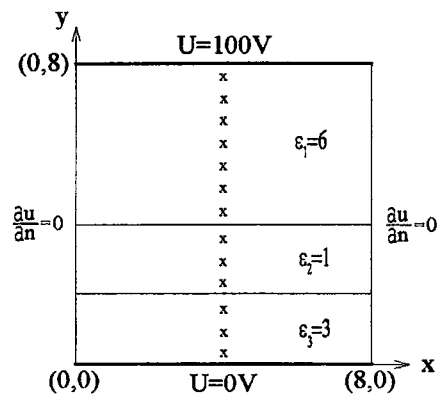


Şekil 6.5 Tek yalıtkanlı küre-küre elektrot sisteminin sonuçlarının karşılaştırılması.

64.2. Çok Yalıtkanlı Elektrot Sistemleri

6.4.2.1. Düzlemsel Elektrot Sistemi

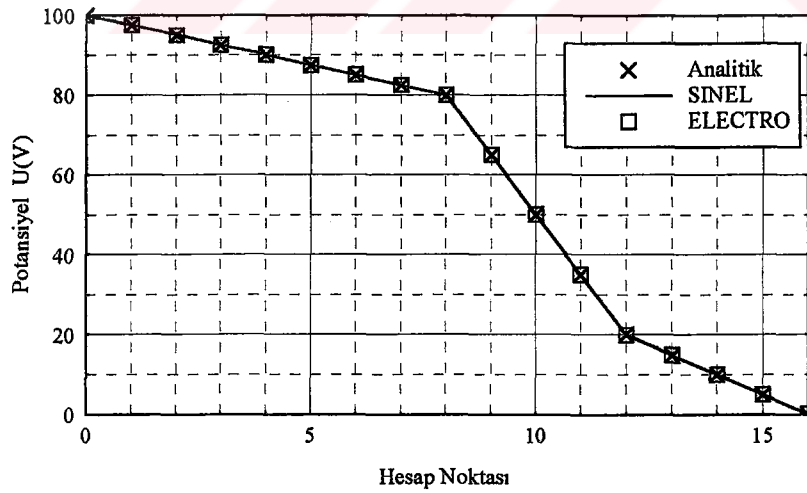
Şekil 6.6'da verilen örnek sistem, dielektrik sabitleri farklı olan üç bölgeden oluşmaktadır. Problem bölgesi 32 sınır elemanıya bölmelenmiştir. Belirtilen noktalardaki potansiyel değerleri SINEL ve ELECTRO programları ile hesaplanmış, analitik olarak bulunan sonuçlarla Tablo 6.2. ve Şekil 6.7'de karşılaştırılmıştır.



Şekil 6.6 Düzlemsel elektrot sistemi.

Tablo 6.2. Çok yalıtkanlı düzlemsel elektrot sisteminin çözümü.

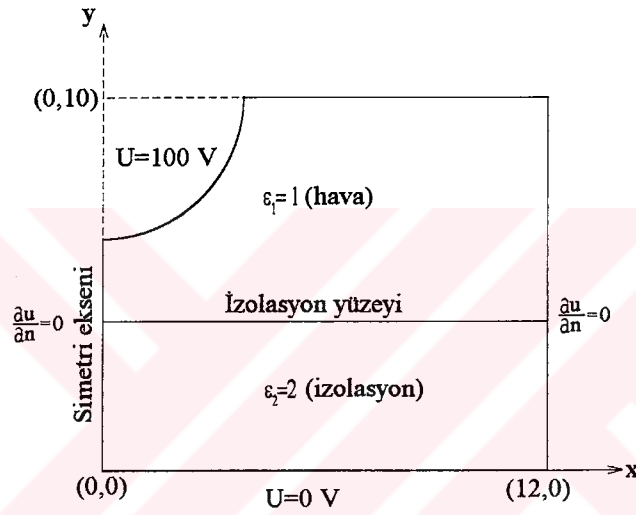
Hesap Noktası	Koordinatlar(cm)		SINEL Programı	ELECTRO Programı	Analitik Çözüm	SINEL % Hatası
	x	y				
1	4.0	7.5	97.491	97.539	97.500	0.009
2	4.0	7.0	95.000	95.008	95.000	0.000
3	4.0	6.5	92.500	92.500	92.500	0.000
4	4.0	6.0	90.000	90.001	90.000	0.000
5	4.0	5.5	87.500	87.503	87.500	0.000
6	4.0	5.0	85.000	85.006	85.000	0.000
7	4.0	4.5	82.494	82.508	82.500	0.007
8	4.0	4.0	80.000	80.028	80.000	0.000
9	4.0	3.5	65.035	64.993	65.000	-0.053
10	4.0	3.0	50.000	49.974	50.000	0.000
11	4.0	2.5	35.004	34.954	35.000	-0.011
12	4.0	2.0	20.000	20.003	20.000	0.000
13	4.0	1.5	15.000	14.949	15.000	0.000
14	4.0	1.0	10.001	9.968	10.000	-0.010
15	4.0	0.5	5.001	4.997	5.000	-0.020
16	4.0	0.0	0.000	-0.237	0.000	0.000



Şekil 6.7 Çok yalıtkanlı düzlemsel elektrot sisteminin sonuçlarının karşılaştırılması.

6.4.2.2. Silindir - Düzlem Elektrot Sistemi

Şekil 6.8'de verilen sistemde, 100 V potansiyelindeki silindir elektrot ile toprak potansiyelindeki düzlem elektrot arasındaki potansiyel dağılımı, $x = 0$ simetri eksenini ve dielektrik ortamları ayıran izolasyon yüzeyi boyunca hesaplanmıştır. SINEL, ELECTRO ve Sonlu Elemanlar Yöntemi sonuçları, analitik olarak hesaplanan sonuçlarla Tablo 6.3. ve Tablo 6.4.'te karşılaştırılmıştır. 133 düğümlü çözüm yapan Sonlu Elemanlar'a göre, 88 elemanlı Sınır Elemanları çözümünün daha iyi olduğu bu karşılaştırmada görülmektedir. Sonuçlar, Şekil 6.9 ve Şekil 6.10'da grafik olarak ta verilmiştir.



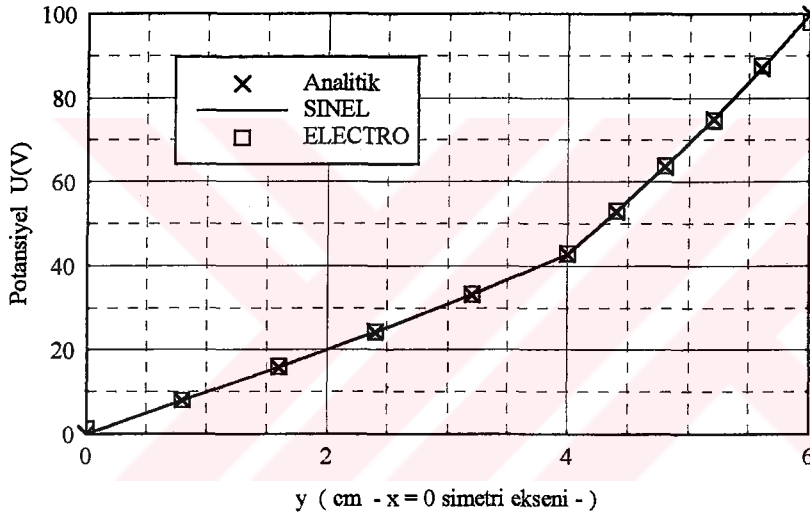
Şekil 6.8 Silindir - düzlem elektrot sistemi.

Tablo 6.3. Silindir - düzlem elektrot sisteminin çözümü (simetri eksenini boyunca).

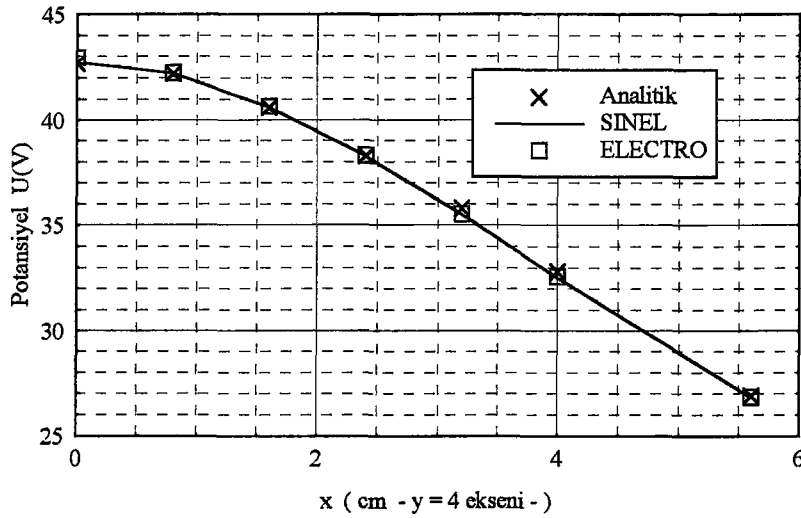
Koordinatlar(cm)		SINEL	ELECTRO	Sonlu Eleman	Analitik	SINEL
x	y	Programı	Programı	Çözümü	Çözüm	% Hatası
0.0	0.0	0.000	1.008	0.0	0.0	0.000
0.0	0.8	7.893	7.916	7.8	7.9	0.088
0.0	1.6	15.932	15.959	15.8	15.9	-0.201
0.0	2.4	24.273	24.311	24.0	24.2	-0.301
0.0	3.2	33.112	33.170	32.9	33.1	-0.036
0.0	4.0	42.732	42.951	42.5	42.7	-0.075
0.0	4.4	53.028	53.020	53.1	53.0	-0.052
0.0	4.8	63.696	63.756	63.6	63.6	-0.150
0.0	5.2	74.925	74.619	75.0	74.9	-0.033
0.0	5.6	86.908	87.777	86.9	87.0	0.105
0.0	6.0	100.00	97.922	100.0	100.0	0.000

Tablo 6.4. Silindir - düzlem elektrot sisteminin çözümü (izolasyon yüzeyi boyunca).

Koordinatlar(cm)		SINEL	ELECTRO	Sonlu Eleman	Analitik	SINEL
x	y	Programı	Programı	Çözümü	Çözüm	% Hatası
0.0	4.0	42.732	42.951	42.5	42.7	-0.075
0.8	4.0	42.199	42.217	41.9	42.2	0.002
1.6	4.0	40.622	40.647	40.5	40.6	-0.054
2.4	4.0	38.287	38.314	38.2	38.3	0.034
3.2	4.0	35.499	35.524	36.0	35.8	0.840
4.0	4.0	32.534	32.557	33.1	32.8	0.811
5.6	4.0	26.845	26.865	27.7	26.9	0.204



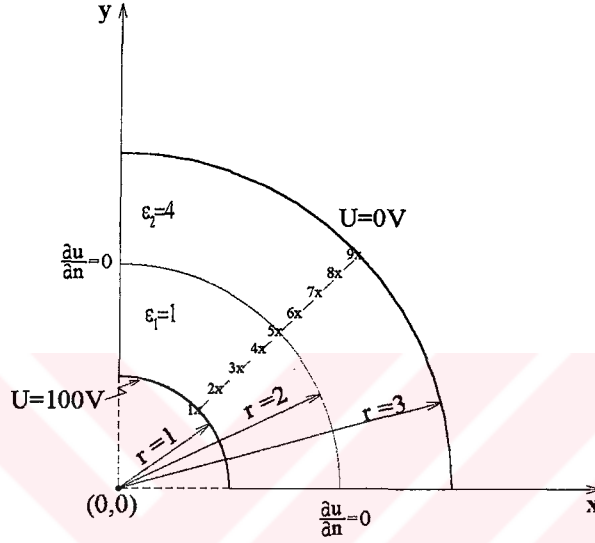
Şekil 6.9 Simetri ekseninde potansiyel dağılımı.



Şekil 6.10 İzolasyon yüzeyinde potansiyel dağılımı.

6.4.2.3. Koaksiyel Kablo

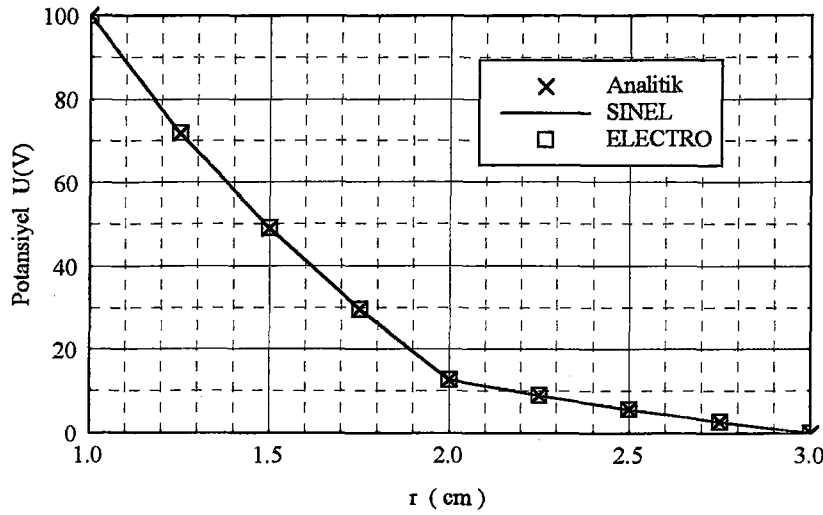
Şekil 6.11'de gösterildiği gibi bir koaksiyel kablonun çeyrek kesiti alınarak 44 sınır elemanı ile bölmelenmiştir. Verilen sınır şartları ile radyal yöndeki potansiyel değerleri hesaplanmıştır. Analitik olarak bulunan sonuçlar, SINEL ve ELECTRO programları yardımıyla bulunan sonuçlarla Tablo 6.5. ve Şekil 6.12'de karşılaştırılmıştır.



Şekil 6.11 Koaksiyel kablonun çeyrek kesiti.

Tablo 6.5. Radyal yöndeki potansiyel dağılımı.

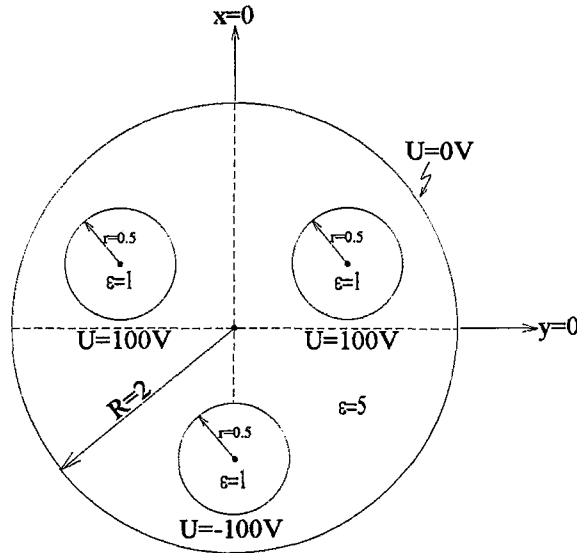
Hesap Noktası	Koordinatlar(cm)		SINEL Programı	ELECTRO Programı	Analitik Çözüm	SINEL % Hatası
	x	y				
1	0.7071	0.7071	100.00	100.00	100.00	0.000
2	0.8838	0.8838	71.883	71.957	71.914	0.043
3	1.0607	1.0607	48.960	49.013	48.966	0.012
4	1.2374	1.2374	29.560	29.595	29.565	0.017
5	1.4142	1.4142	12.746	12.770	12.758	0.094
6	1.5910	1.5910	9.038	9.058	9.052	0.154
7	1.7678	1.7678	5.720	5.740	5.736	0.279
8	1.9445	1.9445	2.718	2.739	2.737	0.694
9	2.1213	2.1213	0.000	0.000	0.000	0.000



Şekil 6.12 Radyal yön boyunca potansiyel dağılımı.

6.4.2.4. Güç Kablosu

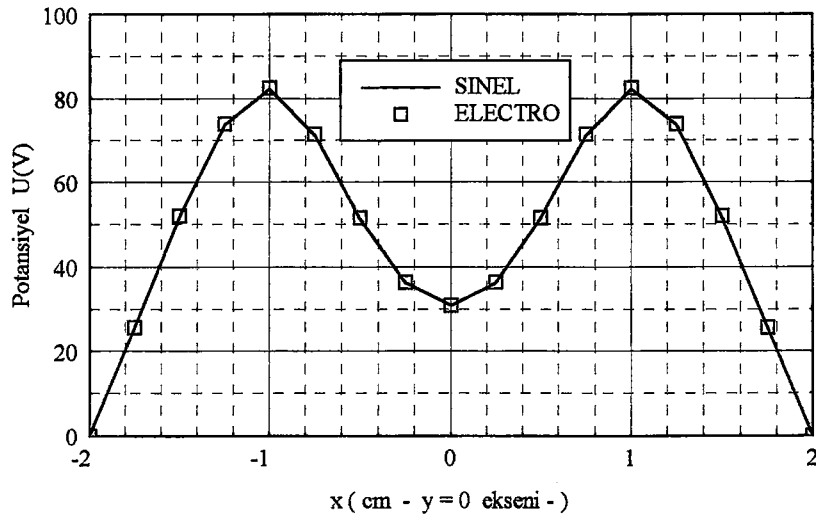
Örnek olarak incelenen güç kablosu Şekil 6.13'te verilmiştir. Bu örnek, Sınır Elemanları Yöntemi'nin çok yüzeyli problemlere de kolaylıkla uygulanabildiğini göstermektedir. Kablonun dış yüzeyi 48, her bir iç yüzeyi de 24 sınır elemanı ile bölmelenmiştir (toplam 120 sınır elemanı). SINEL ve ELECTRO programlarıyla hesaplanan sonuçlar Tablo 6.5. ve Tablo 6.6.'da verilmiş ve sonuçlar Şekil 6.14 ve Şekil 6.14'te grafik olarak çizilmiştir.



Şekil 6.13 Güç kablosu.

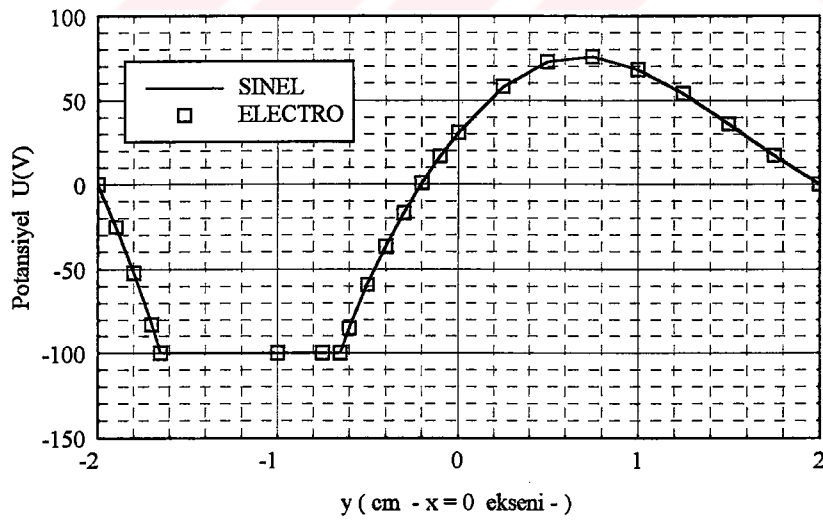
Tablo 6.6. Güç kablosunda $y=0$ eksenı boyunca potansiyel dağılımı.

Hesap Noktası	Koordinatlar(cm)		SINEL Programı	ELECTRO Programı	Fark
	x	y			
1	-2.00	0.0	0.122	0.011	-0.111
2	-1.75	0.0	25.423	25.611	0.188
3	-1.50	0.0	51.799	52.017	0.218
4	-1.25	0.0	73.702	73.946	0.244
5	-1.00	0.0	82.186	82.448	0.262
6	-0.75	0.0	71.218	71.441	0.223
7	-0.50	0.0	51.455	51.573	0.118
8	-0.25	0.0	36.313	36.357	0.044
9	0.00	0.0	30.856	30.876	0.020
10	0.25	0.0	36.313	36.357	0.044
11	0.50	0.0	51.455	51.573	0.118
12	0.75	0.0	71.218	71.441	0.223
13	1.00	0.0	82.186	82.448	0.262
14	1.25	0.0	73.702	73.946	0.244
15	1.50	0.0	51.799	52.017	0.218
16	1.75	0.0	25.423	25.611	0.188
17	2.00	0.0	0.122	0.011	-0.111

Şekil 6.14 $y=0$ eksenı boyunca potansiyel dağılımı.

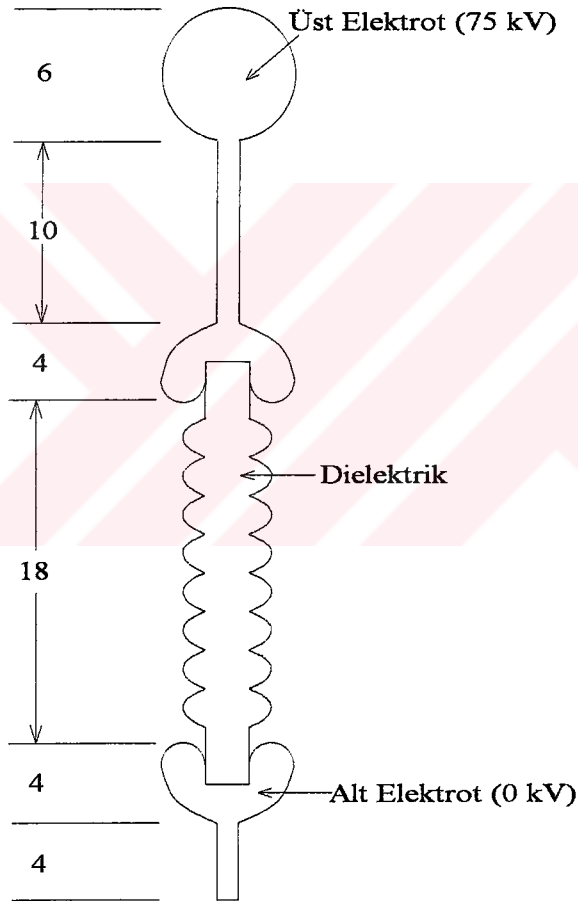
Tablo 6.7. Güç kablosunda $x=0$ eksenı boyunca potansiyel dağılımı.

Hesap Noktası	Koordinatlar(cm)		SINEL Programı	ELECTRO Programı	Fark
	x	y			
1	0.0	2.00	0.0830	0.0050	0.078
2	0.0	1.50	35.936	36.082	-0.146
3	0.0	1.00	68.291	68.444	-0.153
4	0.0	0.50	72.889	73.015	-0.126
5	0.0	0.00	30.856	30.876	-0.020
6	0.0	-0.10	16.844	16.822	0.022
7	0.0	-0.20	1.0510	0.9780	0.073
8	0.0	-0.30	-16.624	-16.755	0.131
9	0.0	-0.40	-36.437	-36.636	0.199
10	0.0	-0.50	-58.879	-59.159	0.280
11	0.0	-0.60	-84.854	-85.204	0.350
12	0.0	-1.00	-100.00	-100.00	0.000
13	0.0	-1.70	-82.369	-82.804	0.435
14	0.0	-1.80	-51.844	-52.237	0.393
15	0.0	-1.9	-24.744	-25.065	0.321
16	0.0	-2.0	-0.310	0.058	-0.368

Şekil 6.15 $x=0$ eksenı boyunca potansiyel dağılımı.

6.4.2.5. Yüksek Gerilim İzolatörü

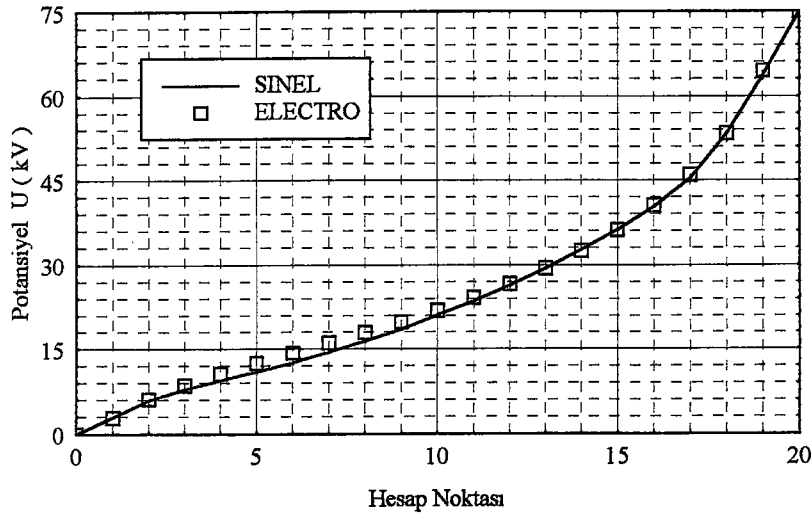
Şekil 6.16'da gösterilen çubuk tipindeki bir yüksek gerilim izolatörü incelemesinde, üst elektroda 75 kV'luk bir gerilim uygulanmış, alt elektrot ise 0 kV'ta topraklanmıştır. İki elektrodu, bağıl dielektrik sabiti 5 olan bir dielektrik malzeme ayırmaktadır. Problem bölgesi 146 sınır elemanı ile bölmelenmiş ve elde edilen sonuçlar Tablo 6.8. ve Şekil 6.17'de verilmiştir (ELECTRO programında 61 sınır elemanı ile aksel simetrik çözüm yapılmıştır).



Şekil 6.16 Yüksek gerilim izolatörü.

Tablo 6.8. Alt elektrot ile üst elektrot arasındaki potansiyel dağılımı.

Hesap Noktası	Koordinatlar(cm)		SINEL Programı	ELECTRO Programı	Fark
	x	y			
1	3.0	8.00	2.962	2.808	-0.154
2	3.0	9.00	5.958	6.133	0.175
3	3.0	10.00	7.933	8.604	0.671
4	3.0	11.00	9.528	10.651	1.123
5	3.0	12.00	10.994	12.511	1.517
6	3.0	13.00	12.665	14.306	1.641
7	3.0	14.00	14.418	16.098	1.680
8	3.0	15.00	16.447	17.932	1.485
9	3.0	16.00	18.590	19.854	1.264
10	3.0	17.00	21.017	21.905	0.888
11	3.0	18.00	23.568	24.140	0.572
12	3.0	19.00	26.403	26.605	0.202
13	3.0	20.00	29.385	29.379	-0.006
14	3.0	21.00	32.681	32.531	-0.150
15	3.0	22.00	36.216	36.201	-0.015
16	3.0	23.00	40.296	40.543	0.247
17	3.0	24.00	45.438	45.988	0.550
18	3.0	25.00	53.331	53.376	0.045
19	3.0	26.00	63.635	64.481	0.846
20	3.0	27.00	75.000	74.974	-0.026



Şekil 6.17 Alt elektrot ile üst elektrot arasında potansiyelin değişimi.

BÖLÜM 7

SONUÇLAR

Bu çalışmada, Sınır Elemanları Yöntemi'nin matematiksel teorisi ve sayısal formülasyonu verilerek iki boyutlu elektrostatik alan analizi yapan SINEL isimli bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Matematiksel teori için ilk önce, problemi bölgede sağlayan tanım denklemleri (Laplace ve Poisson tipi kısmi diferansiyel denklemler), ağırlıklı artıklar yöntemi ve kısmi integrasyon kullanılarak, sınır integral denklemlerine dönüştürülmüştür. Fiziksel değişkenler (potansiyeller ve normale göre türevleri) interpolasyon fonksiyonları ile ifade edildikten sonra sınır integral denklemi ayrıştırılmış ve sistem matrisi elde edilmiştir. Matrislerin katsayıları, sayısal integrasyon formülleri kullanılarak hesaplanmıştır. Sınır şartları uygulandıktan sonra, sınır bilinmeyenlerinden oluşan bir lineer denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sistemi çözülerek sınır düğümlerindeki potansiyeller ve türevleri hesaplanmıştır. Bulunan sonuçlar kullanılarak istenen iç noktalardaki potansiyel değerleri belirlenmiştir.

Bu incelemeler ışığında, Sınır Elemanları Yöntemi'nin önemli özellikleri şu şekilde özetlenebilir:

- 1) Sınır Elemanları Yöntemi, problem bölgesinde sadece sınırın bölmelenmesini gerektirmektedir. Böylece problemin boyutsallığı bir derece azalmaktadır. Analiz için, iki boyutlu problemlerde sınırın bölmelenmesi ve üç boyutlu problemlerde yüzeyin bölmelenmesi yeterlidir.
- 2) Sınır Elemanları Yöntemi'nde temel çözümlerin uygulanması, hem sonuçların doğruluğunu artırır ve hem de sonsuz sınır şartının kolayca gözönüne alınmasını sağlar. Böylece yöntem, açık sınır problemlerini göstermek için sonlu farklar ve sonlu elemanlarda olduğu gibi fazla sayıda bölmeleme yapılması veya bunun çözümü için özel teknikler kullanılması zorunluluğunu ortadan kaldırır.
- 3) Yöntem, problemin analizi için gerekli veri sayısını önemli ölçüde azaltmaktadır. Bu nedenle sistem matrisinin boyutu küçüktür. Buna karşılık, sistem matrisi tamamen doludur ve simetrik değildir.

6. Bölümde verilen uygulama örneklerinde, analitik olarak hesaplanan sonuçlarla, SINEL programı ve ELECTRO paket programı kullanılarak alınan sonuçlar tablolar halinde ve grafik olarak karşılaştırılmıştır. Ayrıca analitik olarak çözülebilen problemlerin, SINEL program hataları da tablolara eklenmiştir.

Buna göre çok yalıtkanlı düzlemsel elektrot sisteminde (Şekil 6.6), 32 sınır elemanı ile yapılan bölmelemede SINEL program sonuçlarının analitik sonuçlara göre hatası % 0.06'dan küçüktür. Hatanın çok küçük olmasının nedeni sınırların düzgün olması ve dolayısıyla problem geometrisinin tam olarak modellenemesidir. Daha az sayıda eleman kullanıldığında, integrasyon adımlarının sayısı azalacağından hassasiyet azalacaktır.

88 elemanla bölmelenen silindir-düzlem elektrot sisteminde (Şekil 6.8) maksimum hata oranı % 0.84 'tür. 44 elemanla bölmelenen koaksiyel kabloda ise (Şekil 6.11) % 0.7 civarındadır. SINEL programı ile hesaplanan bu sonuçlara yakın sonuçlar, aynı sayıda sınır elemanları kullanılarak ELECTRO programı ile de elde edilmiştir.

Ayrıca analitik çözümü bilinmeyen problemler için de SINEL ve ELECTRO çözümlerinin birbiriyle uyumlu olduğu görülmektedir (Şekil 6.5 ve Tablo 6.1.).

Sonsuz sınır problemi olarak verilen tek yalıtkanlı küre-küre elektrot sisteminde (Şekil 6.4) toplam 48 sınır elemanı ve çok yüzeysel problem örneği olarak verilen güç kablosu modeli için de (Şekil 6.13) 120 sınır elemanı ile yapılan çözümde yüksek doğruluklu sonuçlar elde edilmiştir. $x=0$ ve $y=0$ eksen boyunda çizilen grafiklerden de (Şekil 6.5 ve Şekil 6.14, Şekil 6.15) sonuçların hassasiyeti görülmektedir.

Son örnek olarak yüksek gerilim izolatorü (Şekil 6.16) incelenmiştir. Çubuk tipindeki bu izolatorün 146 sınır elemanı kullanılarak yapılan analizi sonucunda, izolatorün gerilim altındaki elektroda yakın kısmında potansiyel değerinin büyük olduğu ve aşağıya doğru azaldığı, SINEL ve ELECTRO sonuçlarının birbirine yakın olduğu görülmektedir (Şekil 6.17 ve Tablo 6.8.).

Sonuç olarak, analitik sonuçlarla program sonuçlarının son derece uyumlu olduğu ve Sınır Elemanları Yöntemi'nin az miktarda veri girişi ile oldukça hassas sonuçlar sağladığı, geliştirilen programa (SINEL) yapılacak yeni katkılarla daha karmaşık problemlerin de çözülebileceği görülmüştür.

İleride yapılacak çalışmalarda, bu çalışmadaki prosedür izlenerek ve hazırlanan programdan yararlanarak, Sınır Elemanları Yöntemi ile iletim hattı parametreleri (kapasite, empedans, indüktans vb.) hesaplanabilir. Bunun için Laplace denklemi, verilen sınır şartları altında çözülerek alanı destekleyen eşdeğer yük hesaplanır (indirekt yaklaşım). Eşdeğer yük bulunduktan sonra herhangi bir iletim hattı parametresi hesaplanabilir.

Ayrıca zaman bağımlı problemler ile lineer olmayan problemler de DRM ve MRM gibi sınır eleman yöntemleri kullanılarak analiz edilebilir.



KAYNAKLAR

- Bamji, S.S., Bulinski, A.T., and Prasad, K.M., 1993, **Electric Field Calculations with the Boundary Element Method**. IEEE Transactions on Electrical Insulation, 28, 3, 420-424.
- Beer, G., and Watson, J.O., 1991, **Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers**. John Wiley and Sons, New York.
- Brebbia, C.A. (Ed), 1978, **Recent Advances in Boundary Element Methods**. Pentech Press, London.
- Brebbia, C.A., 1978, (Reprinted, 1980, 1982, 1984), **The Boundary Element for Engineers**. Pentech Press, London.
- Brebbia, C.A., and Walker, S., 1979, **Boundary Element Techniques in Engineering**. Newnes-Butterworths, London.
- Brebbia, C.A., Telles, J.F.C., and Wrobel, L.C., 1984, **Boundary Element Techniques**. Springer-Verlag, Berlin, New York, Tokyo.
- Brebbia, C.A., and Magureanu, R., 1987, **Boundary Element Method for Electromagnetic Problems**. Engineering Analysis, Computational Mechanics Inst., Southampton, 4, 4, 178-185.
- Brebbia, C.A., and Dominguez, J., 1989, **Boundary Elements: An Introductory Course**. Computational Mechanics Publications, Southampton and McGraw-Hill, New York.
- Cebeci, M., 1991, **Zincir İzolatörlerde Elektrik Alan Dağılımının İncelenmesi**. Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- Danson, D.J., Brebbia, C.A., and Adey, R.A., 1985, BEASY, A Boundary Element Analysis System, in **Finite Element Systems Handbook**. Computational Mechanics Publications, Southampton and Springer-Verlag, Berlin and New York.
- DeFigueiredo, T.G.B., 1991, **A New Boundary Element Formulation in Engineering**. Springer-Verlag, Berlin, New York, London.

- Denegri, G.B., Molinari, G., and Viviani, A., 1975, **A Program for Electric Field Computation Using a Finite Difference Method with Curvilinear Grid**. Proc. of Int. High Voltage Sym., 6-11, Zürich.
- Enokizono, M., and Todaka, T., 1992, **Three-dimensional Eddy Current Analysis on Thin Conductors with Boundary Element Method**. IEEE Transactions on Magnetism, 28, 2, 1655-1658.
- Enokizono, M., and Todaka, T., 1993, **Approximate Boundary Element Formulation for High-frequency Eddy Current Problem**. IEEE Transactions on Magnetism, 29, 2, 1504-1507.
- Faucheux, and Burnet, M., 1988, **Magnetic Analysis of a Switched Reluctance Motor Using a Boundary Element - Finite Element Coupling Method**. IEEE Transactions on Magnetism, 24, 1.
- Forsythe, G.E., and Wasow, W.R., 1960, **Finite-difference Methods for Partial Differential Equations**. John Wiley, New York.
- Gönenç, İ., 1977, **Yüksek Gerilim Tekniği Cilt 1**. İTÜ, İstanbul.
- Hammer, P.C., Marlowe, O.J., and Stroud, A.H., 1956, **Numerical Integration over Simplexes and Cones**. Mathematics of Computation, 10, 130-139.
- Harrington, R.F., Pontoppidan, K., Abrahamsen, P., and Albertsen, N.C., 1969, **Computation of Laplacian Potentials by an Equivalent-Source Method**. Proc. IEE 116, 1715-1720.
- Huang, Q.S., Krähenbühl, L., and Nicolas, A., 1987, **Numerical Calculation of Steady-State Skin Effect Problems in Axisymmetry**. Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, Graz, Austria, 201-204.
- Integrated Engineering Software Inc., 1997, **ELECTRO : Two-dimensional Electric Field Solver, Version 4.1, Users and Technical Manual**. Winnipeg, Manitoba, Canada.
- Jaswon, M.A., 1963, **Integral Equation Methods in Potential Theory I**. Proceedings of the Royal Society, Series A, 275, 23-32.
- Jaswon, M.A., and Ponter, A.R.S., 1963, **An Integral Equation Solution of the Torsion Problem**. Proceedings of the Royal Society, Series A, 273, 237-246.

- Jaswon, M.A., and Symm, G.T., 1977, **Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics**. Academic Press, London.
- Kato, S., Kokai, H., Nakajima, Y., Kouno, T., 1979, **Finite Element Method for the Calculation of Potential Distribution to the Porcelain Insulator with Semiconducting Surface Layer**. Third Int. Sym. on High Voltage Engineering, 12, 11, 1-4, Milan.
- Klimpke, B.W., 1983, **A Two-Dimensional, Multi-Media Boundary Element Method**. Master Thesis, The University of Manitoba, Canada.
- Knutson, S.R., Abdalla, M.D., and Pixton, R.M., 1991, **PC-Based Electrostatic Field Calculation Techniques**. Presented at the 12th Annual Ideas in Science and Electronics Exposition/Symposium, May 10, 166-171.
- Krstajic, Andelic, Z., and Salon, S., 1992, **Non-linear 3D Magnetostatic Field Calculation by the Integral Equation Method with Surface and Volume Magnetic Charges**. IEEE Transactions on Magnetics, 28, 1088-1091.
- Kuffel, E., and Zaengl, W.S., 1984, **High Voltage Engineering**. Pergamon Press, Oxford.
- Lean, M.H., and Bloomberg, D.S., 1984, **Non-linear Boundary Element Method for Two-Dimensional Magnetostatics**. J. Appl. Phys., 55(6), 2195-2197.
- Liu, J., Shirkoohi, G.H., and Freeman, E.M., 1992, **The Calculation of Capacitance and Force in Electrostatic Field by Using the Boundary Element Method**. IEEE Transactions on Magnetics, 28, 2, 1072-1075.
- Marshall, S.V., and Skitek, G.G., 1990, **Electromagnetic Concepts and Applications**. Prentice-Hall, Inc., USA.
- Mathews, J.H., 1992, **Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering**. Prentice-Hall, Inc., USA.
- Mautz, J.R., and Harrington, R.F., 1970, **Computation of Rotationally Symmetric Laplacian Potentials**. Proc. IEE 117, 850-852.
- Nardini, D. and Brebbia, C.A., 1982, **Boundary Element Methods in Engineering**. Computational Mechanics Publications, Southampton and Springer-Verlag, Berlin and New York.

- Nardini, D. and Brebbia, C.A., 1985, **Topics in Boundary Element Research**. Springer-Verlag, Berlin and New York.
- Nowak, A.J. and Neves, A.C., 1994, **The Multiple Reciprocity Boundary Element Method**. Computational Mechanics Publications, Southampton, UK.
- Özkaya, M., 1988, **Yüksek Gerilim Tekniği 1**. İTÜ, İstanbul.
- Partridge, P.W., Brebbia, C.A., and Wrobel, L.C., 1992, **The Dual Reciprocity Boundary Element Method**. Computational Mechanics Publications, Southampton, UK.
- Rasolonjanahary, J.L., Krähenbühl, L., Nicolas, A., 1992, **Computation of Electric Fields and Potential on Polluted Insulators Using a the Boundary Element Method**. IEEE Transactions on Magnetics, 28, 2, 1473-1476.
- Rumeli, A., 1969, **Yüksek Gerilim Sistemlerinin İzolasyon Dizayn ve Koordinasyonu**. ODTÜ-TEK Eğitim Konferansları Notları, Ankara.
- Sakurai, A., Tsuchiya, T., and Kagawa, Y., 1993, **Boundary Element Estimation of Current Density Distribution and Eddy Current Loss in Bundled Multi-Wire Cables**. International Journal of Numerical Modelling, 6, 169-181.
- Shao, K.R., and Zhou, K.D., 1988, **The Iterative Boundary Element Method for Non-linear Electromagnetic Field Calculations**. IEEE Transactions on Magnetics, 24, 150-153.
- Shao, K.R., Zhou, K.D., and Lavers, J.D., 1991, **Boundary Element Analysis Method for 3-D Eddy Current Problems Using the Second Order Vector Potential**. IEEE Transactions on Magnetics, 27, 5, 4089-4092.
- Shen, J., and Kost, A., 1992, **BEM with Special Shape Functions for 2D Eddy Current Problems**. IEEE Transactions on Magnetics, 28, 2, 1220-1223.
- Stroud, A.H., and Secrest, D., 1966, **Gaussian Quadrature Formulas**. Prentice-Hall, New York.
- Sun, Y., Kagawa, Y., and Murai, T., 1994, **A Variational Approach to Boundary Elements-Two Dimensional Laplace Problem**. International Journal of Numerical Modelling, 7, 1-14.
- Symm, G.T., 1963, **Integral Equation Methods in Potential Theory II**. Proceedings of the Royal Society, Series A, 275, 33-46.

- Tanaka, M., Tsuboi, H., Kobayashi, F., and Misaki, T., 1993, **Transient Eddy Current Analysis by the Boundary Element Method Using Fourier Transforms.** IEEE Transactions on Magnetics, 29, 2, 1722-1725.
- Tang, W., 1988, **Transforming Domain into Boundary Integrals in BEM.** Springer-Verlag, Berlin, New York, London.
- Tareev, B.M., Korotkova, N.V., Petrov, V.M., and Preobrazhensky, A.A., 1980, **Electrical and Radio Engineering Materials.** English Translation, Mir Publishers, Moskow.
- Turri, R., Davies, A.J., and Zullo, G., 1992, **Some Applications of the Boundary Element Method to High-Voltage Discharge Devices.** IEEE Transactions on Magnetics, 28, 2, 1501-1504.
- Yildir, Y. B., 1985, **A Boundary Element Method for the Solution of Laplace's Equation in Three-Dimensional Space.** Ph. D. Thesis, The University of Manitoba, Canada.
- Yildir, Y.B., 1987, **Computer-Aided Field Analysis of High Voltage Apparatus Using the Boundary Element Method.** Proceedings of the International Coil Winding Conference, Illionis, USA, 42-48.
- Zienkiewicz, O.C., 1971, **The Finite Element Method in Engineering Science.** McGraw-Hill, New York.
- Zienkiewicz, O.C., 1977, **The Finite Element Method.** McGraw-Hill, England.

EK - A

YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER

A.1. Ağırlıklı Artıklar Yöntemi

Artık veya hata fonksiyonlarının aşağıdaki gibi olduğu kabul edilirse,

$$\left. \begin{array}{l} R \quad B \text{ bölgesinde} \\ R_1 \quad S_1 \text{ sınırında} \\ R_2 \quad S_2 \text{ sınırında} \end{array} \right\} S_1 + S_2 = S, \quad (\text{A.1})$$

ortalaması sıfır olacak şekilde bu hataların dağılımını yapmak mümkündür. Diğer bir lineer bağımsız fonksiyonlar takımı (ψ_i),

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots, \psi_k(x).$$

şeklinde tanımlanabilir.

Bu fonksiyonların çoğunlukla homojen sınır şartlarını sağladığı kabul edilir. ψ_i denklem takımını, w fonksiyonu olarak yazmak için β_i keyfi katsayılar takımı aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$w = \beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2 + \beta_3 \psi_3 + \dots \quad (\text{A.2})$$

u yaklaşım fonksiyonunun problemin bütün sınır şartlarını sağladığı kabul edilirse bu durumda, $R_1 = R_2 \equiv 0$ ve $R \neq 0$ olur. Ağırlık fonksiyonu adı verilen bir w ile çarpılarak, B bölgesindeki R hatasının dağılımı yapılabilir.

$$\langle R, w \rangle = \int_B R w \, dB = 0 \quad (\text{A.3})$$

Bu formül R hatasının, w 'daki fonksiyonlara göre dağılımının yapıldığını gösterir. β_i katsayıları keyfi olduğundan bu denklem,

$$\int_B R \psi_i dB = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (A.4)$$

şeklinde yazılabilir.

A.2. Kollokasyon Yöntemi

Diferansiyel denklemleri ortalama bir şekilde sağlamak yerine, sadece seçilen noktalarda (kollokasyon noktalarında) sağlamak ta mümkündür. Bu noktalar çoğunlukla, bölge içinde eşit bir şekilde dağıtılır.

Homojen sınır şartları durumunda bir yaklaşım fonksiyonu,

$$u = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \quad (A.5)$$

şeklinde tanımlanır. Burada φ_k fonksiyonları, homojen sınır şartlarını sağlar.

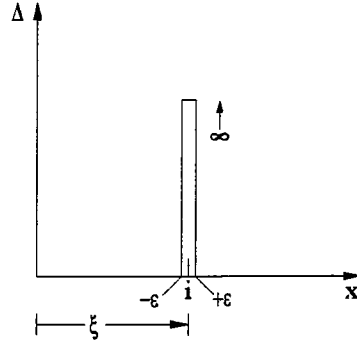
B bölgesinde, n sayıda noktada sağlanacak olan bir artık fonksiyonu,

$$R = L(u) - b \neq 0 \quad (B \text{ bölgesinde}) \quad (A.6)$$

şeklinde yazılabilir. Prensip olarak α_k 'nın sayısı, seçilen kollokasyon noktalarının sayısı ile aynı olacaktır. Bu şart, ψ_i 'yi Dirac delta fonksiyonları olarak tanımlayarak bir ağırlıklı artıklar şeklinde ifade edilebilir. Dirac delta fonksiyonu, bir normal fonksiyonun limiti olarak tanımlanabilen, genelleştirilmiş bir fonksiyondur (Şekil A.1). Bu fonksiyonun limiti, bölge dışındaki her noktada sıfırdır (Eğer $x = \xi$ olursa, Dirac fonksiyonunun uygulandığı 'i' noktasının koordinatı ξ olur). Buradan,

$$\Delta(x - \xi) = \Delta_i \quad (A.7)$$

yazılır.



Şekil A.1 Dirac delta fonksiyonu.

Dirac delta fonksiyonu, mühendislikte kullanılan çok faydalı bir özelliktir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x - \xi) dx = \int_{\xi_i - \varepsilon}^{\xi_i + \varepsilon} \Delta(x - \xi) dx = 1, \quad (\text{A.8})$$

Burada, ε herhangi bir pozitif sayıdır. x_i noktasında herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu, f_i veya $f(\xi)$, 'f' fonksiyonunun 'i' noktasındaki değeri olmak üzere,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Delta(x - \xi) dx = \int_{\xi_i - \varepsilon}^{\xi_i + \varepsilon} f(x) \Delta(x - \xi) dx = f(\xi) = f_i, \quad (\text{A.9})$$

şeklinde yazılabilir.

Kollokasyon yöntemi veya nokta kollokasyon yöntemi, bir 'i' noktalar dizisinde,

$$w = \beta_1 \Delta_1 + \beta_2 \Delta_2 + \beta_3 \Delta_3 + \dots + \beta_k \Delta_k \quad (\text{A.10})$$

olmak üzere, denk.(A.3) ile,

$$\int_B R w dB = 0 \quad (\text{A.11})$$

şeklinde gösterilebilir. Burada,

Δ_i , Kollokasyon noktalarındaki ($i = 1, 2, 3, \dots, k$) Dirac delta fonksiyonlarını gösterir.

Örnek :

$0 < x < 1$ Bölgesinde,

$$L(u) - b = \frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0 \quad (a)$$

denklemini,

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ 'da} \quad u &= 0 \\ x = 1 \text{ 'de} \quad u &= 0 \end{aligned}$$

homojen sınır şartları ile gözönüne alınırsa, sadece iki bilinmeyen parametresi olan,

$$u = x(1-x)(\alpha_1 - \alpha_2 x) \quad (b)$$

yaklaşım fonksiyonu ile yaklaşık çözüm yapılabilir.

Bu yaklaşım fonksiyonu denk.(a)'da yerine yazılarak,

$$R = \frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = (-2 + x - x^2)\alpha_1 + (-2 - 6x + x^2 - x^3)\alpha_2 + x \quad (c)$$

artık fonksiyonu elde edilir.

$\xi = \frac{1}{4}$ ve $\xi = \frac{1}{2}$ 'de uygulanan Dirac delta fonksiyonlarına bağlı olarak bir ağırlık fonksiyonu yazılabilir:

$$w = \beta_1 \Delta_1(x - \frac{1}{4}) + \beta_2 \Delta_2(x - \frac{1}{2}) \quad (d)$$

Bunun anlamı,

$$\int_0^1 R w dx = 0 \quad (e)$$

olduğudur.

$$x = \frac{1}{4} \text{ ve } x = \frac{1}{2} \text{ 'de } R = 0 \text{ olur.}$$

Buradan matris şeklinde yazılabilen iki denklem edilir:

$$\begin{bmatrix} \frac{29}{16} & -\frac{35}{64} \\ \frac{7}{4} & \frac{7}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (f)$$

Bu denklem sistemi çözülerek,

$$\alpha_1 = \frac{6}{31}, \quad \alpha_2 = \frac{40}{217} \quad (g)$$

değerleri elde edilir. Bu durumda,

$$u = \frac{x(1-x)}{217}(42 + 40x) \quad (h)$$

olur. Hata fonksiyonu ise,

$$R = \frac{6}{31}(-2 + x - x^2) + \frac{40}{217}(2 - 6x + x^2 - x^3) + x$$

$$R = \frac{1}{217}(-4 + 19x - 2x^2 - 40x^3) \quad (i)$$

şeklinde yazılır. Sonuçlar Tablo A.1.'de verilmiştir.

Tablo A.1.

x	u_0 (tam çözüm)	u (yaklaşık çözüm)	R
0.10	0.018641	0.019078	-0.009953
0.20	0.036097	0.036866	-0.002764
0.30	0.051194	0.052258	0.002027
0.40	0.062782	0.064147	0.003317
0.50	0.069746	0.071428	0.000000
0.60	0.071018	0.072995	-0.009032
0.70	0.065585	0.065806	-0.024884
0.80	0.052502	0.054562	-0.048663
0.90	0.030901	0.032350	-0.081474

EK - B

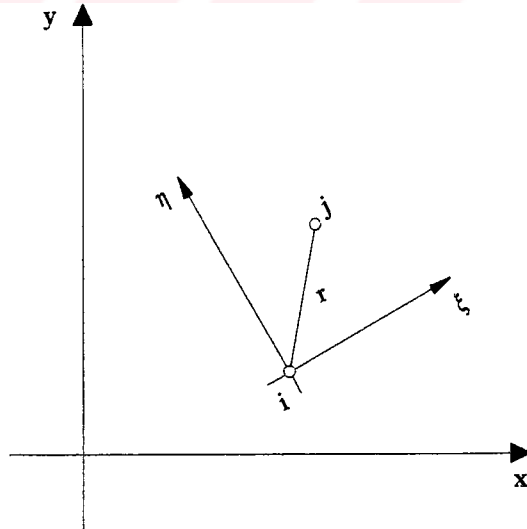
TEMEL ÇÖZÜMLER

B.1. İki Boyutlu Laplace Denkleminin Temel Çözümünün Bulunması

Sonsuz bir bölgede, 'i' noktasında yoğunlaşmış birim kaynak nedeniyle bir 'j' noktasındaki potansiyelin değeri, 'i' noktasındaki bir kaynak nedeniyle 'j' noktasındaki temel çözüm (*fundamental solution*) olarak isimlendirilir. Temel çözüm genellikle u^* şeklinde ifade edilir. 'j' noktası alan noktası (*field point*) olarak isimlendirilir. 'i' noktası, yoğunlaşmış birim kaynağın uygulandığı kaynak noktası (*source point*) olarak tanımlanır (DeFiguerido, 1991).

Burada kaynak, potansiyel alanı üreten büyüklüktür. İncelenen fiziksel probleme göre değişkenlik gösterir. Mesela; sıcaklık alanlarında bir ısı kaynağı veya elektrik alanlarında bir elektrik yükü kaynak olabilir.

u^* fonksiyonu iki parametre ile değişir: 'i' kaynak noktasının koordinatları ve 'j' alan noktasının koordinatları. Temel çözüm u^* , lokal koordinat sisteminde sadece 'i' ve 'j' noktaları arasındaki bir 'r' uzaklığına bağlı olarak ifade edilebilir (Nowak vd., 1994).



Şekil B.1 u^* fonksiyonu için global (x, y) ve lokal (ξ, η) koordinat sistemleri.

$\nabla^2 u = 0$ Laplace Denklemi'nin temel çözümü u^* olsun. Bu temel çözüm, 'i' noktasında bulunan kaynağın etkisi, 'i' noktasından sonsuza kadar yayıldığı için, aşağıdaki Poisson Denklemi'ni sağlar:

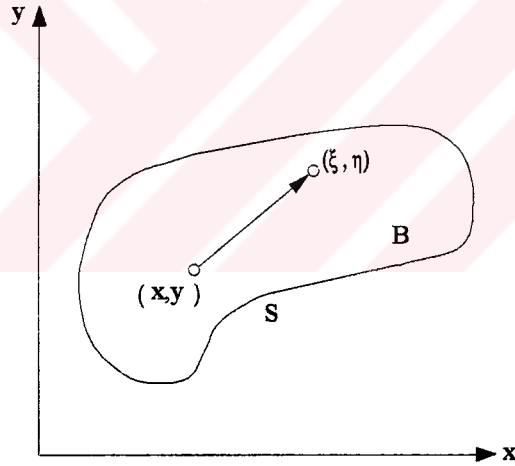
$$\nabla^2 u^* + \Delta_i = 0 \quad (\text{B.1})$$

Burada, Δ_i bir Dirac-delta fonksiyonu olmak üzere denk.(B.1)'in çözümü, Laplace Denklemi'nin temel çözümünü (u^*) verir.

Temel çözüm $u^*(\xi, \eta, x, y)$ olsun. Laplace denkleminde,

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \quad (\text{B.2})$$

dönüşümü yapılırsa, $u^*(\xi, \eta, x, y) \rightarrow u^*(r)$ 'ye dönüşür.



Şekil B.2 İki boyutlu çözüm bölgesi.

Silindirik koordinatlarda Laplace denklemi;

$$\nabla^2 u^*(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^*(r)}{\partial r} \right) \quad (\text{B.3})$$

şeklindedir.

Burada u^* , y veya z 'nin bir fonksiyonu olmadığı için kısmi türev, bayağı türev ile gösterilebilir:

$$\nabla^2 u^* = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du^*}{dr} \right) = 0 \quad (\text{B.4})$$

$r > 0$ için,

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du^*}{dr} \right) = 0 \quad (\text{B.5})$$

yazılabilir. Denklemin her iki tarafının integrali alınırsa,

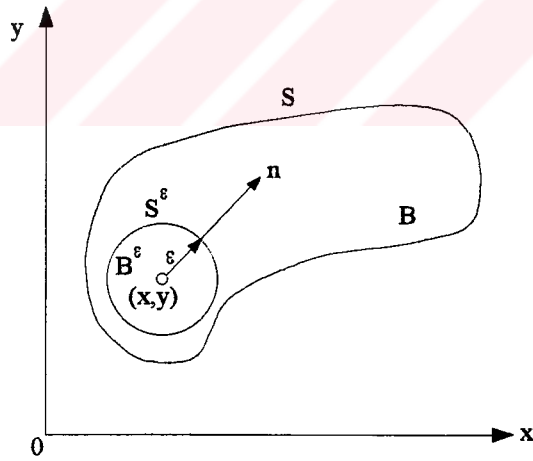
$$r \frac{du^*}{dr} = A \quad (\text{B.6})$$

yazılır. Buradan,

$$u^* = A \ln r + B \quad (\text{B.7})$$

elde edilir.

r ; Dirac delta fonksiyonunun uygulandığı noktanın incelenen noktaya uzaklığıdır. $r = 0$ için, r sıfıra yaklaşırken bir teklik söz konusudur. $r = 0$ durumunu incelemek için yükün bulunduğu noktayı çevreleyen ε yarıçaplı bir daire ele alınır ve daha sonra ε sıfıra götürülür (Şekil B.3).



Şekil B.3 Temel çözüm için yaklaşım.

Denk.(B.1)'den ($\nabla^2 u^* + \Delta_i = 0$),

$$\nabla^2 u^* = -\Delta_i \quad (\text{B.8})$$

yazılır. Her iki tarafın B^ε bölgesinde integrali alınarak,

$$\int_{B^e} \nabla^2 u^* dB^e = - \int_{B^e} \Delta_i dB^e \quad (B.9)$$

elde edilir. Diğer taraftan 1. Green özdeşliği,

$$\int_{B^e} \nabla^2 u^* dB^e = \int_{S^e} \frac{\partial u^*}{\partial n} dS^e \quad (B.10)$$

şeklinde yazılır. Ayrıca Dirac fonksiyonunun bir özelliği olarak,

$$\int_{B^e} \Delta_i dB^e = 1 \quad (B.11)$$

yazılabilir. Bu durumda, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\int_{S^e} \frac{\partial u^*}{\partial n} dS^e = -1 \quad (B.12)$$

Bu denklem,

$$\int_{S^e} \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS^e = -1 \quad (B.13)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$A = -\frac{1}{2\pi} \quad (B.14)$$

elde edilir. Bu sonuç denk.(B.7)'de yerine yazılarak,

$$u^* = -\frac{1}{2\pi} \ln r + B \quad (B.15)$$

elde edilir ($B = 0$ alınabilir). Ve iki boyutlu Laplace denkleminin temel çözümü,

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \quad (B.16)$$

şeklinde bulunur.

B.2. Üç Boyutlu Laplace Denkleminin Temel Çözümünün Bulunması

Temel çözüm $u^*(\xi, \eta, \zeta, x, y, z)$ olsun. İki boyutlu uzayda olduğu gibi,

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} \quad (\text{B.17})$$

dönüşümü yapılırsa,

$$u^*(\xi, \eta, \zeta, x, y, z) \rightarrow u^*(r) \text{ 'ye dönüşür.}$$

Küresel koordinatlarda Laplace denklemi,

$$\nabla^2 u^*(r) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u^*(r)}{\partial r} \right) \right) = \begin{cases} 0 & r < 0 \\ \Delta & r = 0 \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

şeklinde yazılabilir.

$r > 0$ için,

$$\nabla^2 u^* = \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du^*}{dr} \right) \right) = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du^*}{dr} \right) = 0 \quad (\text{B.20})$$

yazılabilir. Denklemin her iki tarafının integrali alınır,

$$r^2 \frac{du^*}{dr} = A \quad (\text{B.21})$$

yazılır. Buradan,

$$du^* = A \frac{dr}{r^2} \quad (\text{B.22})$$

$$u^* = -\frac{A}{r} + B \quad (\text{B.23})$$

elde edilir.

$r = 0$ için,

$$\nabla^2 u^* + \Delta_i = 0$$

$$\nabla^2 u^* = -\Delta_i \quad (\text{B.24})$$

ifadesinin bir V^ε küresi üzerinde integrali alınır,

$$\int_{V^\varepsilon} \nabla^2 u^* dV^\varepsilon = - \int_{S^\varepsilon} \Delta_i dS^\varepsilon \quad (\text{B.25})$$

elde edilir. Burada V^ε ; ε yarıçaplı küreyi, S^ε ise küre yüzeyini göstermektedir ($S^\varepsilon = 4\pi\varepsilon^2$).

Tekrar 1. Green özdeşliği şu şekilde yazılabilir:

$$\int_{V^\varepsilon} \nabla^2 u^* dV^\varepsilon = \int_{S^\varepsilon} \frac{\partial u^*}{\partial n} dS^\varepsilon \quad (\text{B.26})$$

Buradan,

$$A = -\frac{1}{4\pi} \quad (\text{B.27})$$

bulunur. Bu sonuç denk.(B.23)'te yerine yazılarak,

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} + B \quad (\text{B.28})$$

elde edilir (B sabiti sıfır olarak alınabilir).

Sonuç olarak üç boyutlu Laplace denkleminin temel çözümü,

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (\text{B.29})$$

şeklinde bulunur.

EK - C

SAYISAL İNTEGRASYON

C.1. Genel Bilgi

Sayısal integrasyon formülleri, kaynak noktası içermeyen sınır elemanları üzerindeki integrasyon için kullanılmaktadır. Eğer incelenmekte olan eleman kaynak noktası içeriyorsa integraller tekil olur. Bu durumda, ya analitik integrasyon (basit durumlar için) veya logaritmik sayısal integrasyon formülleri kullanılmalıdır.

Basit durumlarda, örnek olarak bir boyutlu sabit ve lineer elemanlarda, denk.(4.38)'deki bir analitik integrasyon ile uygun değerler elde edilebilir. Analitik integrasyon, üç boyutlu analizde sabit üçgensel sınır elemanları için de kullanılabilir (Brebbia vd., 1984).

Gauss alan hesabı, kurallı integraller için doğru ve kullanımı basit olduğundan dolayı sayısal integrasyon işlemlerinde tercih edilmektedir. Ayrıca iç hücreler üzerindeki integrasyon için de Gauss sayısal integrasyonu kullanılmaktadır.

C.2. Bir Boyutlu Gauss Alan Hesabı (*Quadrature*)

İki boyutlu problemlerde, bir boyutlu sınır elemanları üzerindeki integral için bir boyutlu Gauss alan hesabı kullanılmaktadır. Her bir integral için,

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) w_i \quad (C.1)$$

yazılır. Burada n , integrasyon noktalarının sayısı, ξ_i ; i . integrasyon noktasının lokal koordinatı ve w_i ağırlık faktörüdür.

ξ_i değerleri ve w_i ağırlık faktörleri, sekiz noktaya kadar olan değerler için Tablo C.1.'de verilmiştir. Ayrıca, Gauss alan hesabının hassasiyetini belirtmek için $E_n(f)$ hata terimi de tabloya eklenmiştir (Stroud ve Secrest, 1966). Burada düğümler (apsisler) gerçekte Legendre polinomlarının kökleridir, ağırlık faktörleri ise bir denklem sisteminin çözümüyle elde edilmiştir (Mathews, 1992).

Tablo C.1. Kurallı Gauss noktaları (apsisleri) ve ağırlık faktörleri.

n	Apsisler, ξ_i	Ağırlık faktörleri, w_i	Hata terimi, $E(f,n)$
2	-0.5773502692 0.5773502692	1.0000000000 1.0000000000	$\frac{f^{(4)}(c)}{135}$
3	± 0.7745966692 0.0000000000	0.5555555556 0.8888888888	$\frac{f^{(6)}(c)}{15,750}$
4	± 0.8611363116 ± 0.3399810436	0.3478548551 0.6521451549	$\frac{f^{(8)}(c)}{3,472,875}$
5	± 0.9061798459 ± 0.5384693101 0.0000000000	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888888	$\frac{f^{(10)}(c)}{1,237,732,650}$
6	± 0.9324695142 ± 0.6612093865 ± 0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346	$\frac{f^{(12)}(c)2^{13}[6!]^4}{[12!]^3 13!}$
7	± 0.9491079123 ± 0.7415311856 ± 0.4058451514 0.0000000000	0.1294849662 0.2797053915 0.3818300505 0.4179591837	$\frac{f^{(14)}(c)2^{15}[7!]^4}{[14!]^3 15!}$
8	± 0.9602898565 ± 0.7966664774 ± 0.5255324099 ± 0.1834346425	0.1012285363 0.2223810345 0.3137066459 0.3626837834	$\frac{f^{(16)}(c)2^{17}[8!]^4}{[16!]^3 17!}$

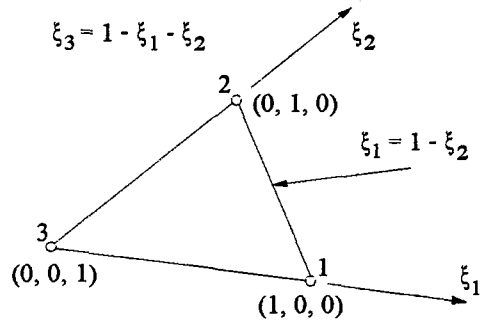
C.3. Üçgensel (*Triangular*) Bölgeler İçin İki Boyutlu Alan Hesabı

Bir üçgen üzerinde sayısal integrasyon, Şekil C.1'de gösterilen üçgensel koordinatlar (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ile aşağıdaki denklem kullanılarak yapılır:

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^{1-\xi_2} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 \right] d\xi_2 = \sum_{i=1}^n f(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i) w_i \quad (C.2)$$

Burada n ; integrasyon noktalarının sayısı, ξ_1, ξ_2 ve ξ_3 ; 'i' integrasyon noktasının üçgensel koordinatları ve w_i ağırlık faktörleridir. $\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i$ değerleri ve w_i , Tablo C.2.'de verilmiştir (Hammer vd., 1956).

İki boyutlu analizde üçgensel iç hücreler için ve üç boyutlu analizde üçgensel sınır elemanları için denk.(C.2) kullanılır. Üç boyutlu iç hücreler için kullanılan tetrahedra ve pentahedra için benzer formüller kurulabilir.



Şekil C.1 Üçgensel koordinatlar.

Tablo C.2. Üçgenler için düzeltilmiş Gauss noktaları ve ağırlık faktörleri.

n	i	ξ_1^i	ξ_2^i	ξ_3^i	w_i
1 (lineer)	1	1/3	1/3	1/3	1
2 (karesel)	1	1/2	1/2	0	1/3
	2	0	1/2	1/2	1/3
	3	1/2	0	1/2	1/3
4 (kübik)	1	1/3	1/3	1/3	-9/16
	2	3/5	1/5	1/5	25/48
	3	1/5	3/5	1/5	25/48
	4	1/5	1/5	3/5	25/48
7 (quintic)	1	0.33333333	0.33333333	0.33333333	0.22500000
	2	0.79742699	0.10128651	0.10128651	0.12593918
	3	0.10128651	0.79742699	0.10128651	0.12593918
	4	0.10128651	0.10128651	0.79742699	0.12593918
	5	0.05971587	0.47014206	0.47014206	0.13239415
	6	0.47014206	0.05971587	0.47014206	0.13239415
	7	0.47014206	0.47014206	0.05971587	0.13239415

EK - D

SINEL PROGRAMI

```

C          *****          *** SELÇUK YILDIRIM ***
C          *** SINEL ***          *** EYLÜL 1999 ***
C          *****

C      SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ İLE İKİ BOYUTLU
C      ELEKTROSTATİK ALAN PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

      COMMON / RW / IRE,IWR
      COMMON / A / XI(6,3),W(6,3),INC(1000,2),KOD(1000),LJ(1000),
+      X(1000),Y(1000),A(1000,1000),B(1000),XM(1000),
+      FF(1000),EPS(1000),U(1000),Q(1000),VAL(1000),
+      HI(1000,1000),H1(1000,1000),H2(1000,1000),
+      GI(1000,1000),G1(1000,1000),G2(1000,1000)

      OPEN (5,FILE='MULTI.DAT',FORM='FORMATTED')
      OPEN (6,FILE='BEMOUT.DAT',FORM='FORMATTED')

C      VERİ GİRİŞİ
      IRE = 5
      IWR = 6
      CALL INPUT (INFB,NE,NN,NI)

C      H ve G MATRİSLERİNİN HESAPLANMASI
      CALL MATRX (INFB,NE,NN,NI)

C      DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ
      CALL SOLVER (NN,IFAIL)

C      HESAPLANAN SINIR DEĞERLERİNİN (U veya Q),SINIR ŞARTI TİPİNE GÖRE
      YERİNE YAZILMASI
      DO 1 I=1,NN
      KK=KOD(I)
      IF(KK.NE.1)THEN
      U(I)=XM(I)
      ELSE
      Q(I)=XM(I)
      END IF
1      CONTINUE

      IF(IFAIL.NE.0) GO TO 2

C      İÇ NOKTALARDAKİ POTANSİYELLERİN HESAPLANMASI
3      CALL INTERM (NN,NI)

C      SONUÇLARIN YAZDIRILMASI
      CALL OUTPT (NN,NI)

2      STOP
      END

```

```

C      INPUT ALT PROGRAMI
SUBROUTINE INPUT (INFB,NE,NN,NI)
COMMON / RW / IRE,IWR
COMMON / A / XI(6,3),W(6,3),INC(1000,2),KOD(1000),LJ(1000),
+      X(1000),Y(1000),A(1000,1000),B(1000),XM(1000),
+      FF(1000),EPS(1000),U(1000),Q(1000),VAL(1000),
+      HI(1000,1000),H1(1000,1000),H2(1000,1000),
+      GI(1000,1000),G1(1000,1000),G2(1000,1000)
DIMENSION NL(100),P(100),PS(100)
WRITE (IWR,1)
1  FORMAT (///,15X,'*** SINIR ELEMANLARI YONTEMI İLE ELEKTROSTATİK
PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜ ***',/)
C      PROBLEM HAKKINDA GENEL BİLGİ
C      NE : SINIR ELEMANLARININ SAYISI
C      NN : SINIR DÜĞÜMLERİNİN SAYISI
C      NI : İÇ NOKTALARIN SAYISI
C      NP : TANIMLANMIŞ POTANSİYEL SINIR ŞARTI SAYISI
READ (IRE,2) INFB,NE,NN,NI,NP
2  FORMAT (I1,I4,3I5)
C      SONSUZ SINIR GÖSTERİMİ
IF (INFB.EQ.0) GO TO 4
WRITE (IWR,3)
3  FORMAT (///,15X,'* SONSUZ SINIR *')
C      BÖLGELERİN SON DÜĞÜM NUMARALARI (NS:FARKLI BÖLGE SAYISI)
4  READ (IRE,5) NS,(NL(I),I=1,NS)
5  FORMAT (I1,I4,4I5)
C      BÖLGELERİN DİELEKTRİK SABİTLERİ
READ (IRE,6) (PS(I),I=1,NS)
6  FORMAT (5F6.0)
C      BÖLGELERE DİRİCHLET SINIR ŞARTININ UYGULANMASI
IF (NP.NE.0) GO TO 9
DO 7 K=1,NN
7  KOD(K)=1
READ (IRE,8) (P(I),I=1,NS)
8  FORMAT (5F6.0)
9  WRITE (IWR,11) NE,NN,NI
11  FORMAT (///,15X,'ELEMANLARIN SAYISI      =',I5,/,15X,
+'DÜĞÜMLERİN SAYISI      =',I5,/,
+15X,'İÇ NOKTALARIN SAYISI      =',I5,////,15X,
+'SINIR DÜĞÜMLERİNİN KOORDİNATLARI',12X,'DÜĞÜM',16X,'X',15X,'Y')
C      DÜĞÜMLERİN VE İÇ NOKTALARIN KOORDİNATLARI
DO 10 I=1,NN
READ (IRE,12) K,X(K),Y(K)
12  FORMAT (I5,2F10.0)
10  CONTINUE
DO 15 K=1,NN
WRITE (IWR,16) K,X(K),Y(K)
16  FORMAT (10X,I5,5X,F15.4,1X,F15.4,7X)
15  CONTINUE
13  FORMAT (10X,I5,5X,F15.4,1X,F15.4)
IF (NI.EQ.0) GO TO 18
WRITE (IWR,14)
14  FORMAT (///,15X,'İÇ NOKTALARIN KOORDİNATLARI',11X,'NOKTA',17X,
+'X',15X,'Y',/)
KK = NN + 1
NT = NN + NI
READ (IRE,17) (J,X(J),Y(J),JJ=KK,NT)
17  FORMAT (I5,2F10.0)
WRITE (IWR,16) (J,X(J),Y(J),J=KK,NT)
C      POTANSİYELLERİN ve DİELEKTRİK SABİTLERİNİN,
HER BÖLGEYİ OLUŞTURAN SINIR ELEMANLARINA ATANMASI

```



```

18   DO 20 I = 1,NS
      NL(0) = 0
      M1 = NL(I-1) + 1
      M2 = NL(I)
        DO 25 K = M1,M2
          INC(K,1) = K
          INC(K,2) = K + 1
          U(K) = P(I)
          EPS(K) = PS(I)
25   CONTINUE
      INC(M2,2) = M1
20   CONTINUE
C    KARIŞIK TİP SINIR ŞARTININ UYGULANMASI
      IF(NP.EQ.0) GO TO 45
C    POTANSİYELLERİN OKUNMASI
      DO 30 I = 1,NP
        READ (IRE,35) K,KOD(K),VAL(K)
35   FORMAT (2I5,F15.4)
        U(K) = VAL(K)
30   CONTINUE
C    ELEMAN BAĞLANTILARININ VE ELEMAN UZUNLUKLARININ HESAPLANMASI
45   WRITE (IWR,50)
50   FORMAT(//,30X,'ELEMAN BAĞLANTISI',//,13X,'EL',13X,'N. 1',12X,
+         'N. 2',16X,'L',//)
      DO 55 I = 1,NE
        N1 = INC(I,1)
        N2 = INC(I,2)
55   LJ(I) = SQRT((X(N2) - X(N1))**2 + (Y(N2) - Y(N1))**2)
        WRITE (IWR,60) (I,INC(I,1),INC(I,2),LJ(I),I=1,NE)
60   FORMAT (10X,I5,11X,I5,11X,I5,5X,F15.4)
C    SINIR ELEMANLARI İÇİN SAYISAL İNTEGRASYON NOKTALARININ
C    KOORDİNATLARI VE AĞIRLIK FAKTÖRLERİ
C    6-NOKTALI GAUSS İNTEGRASYONU İÇİN APSİSLER VE AĞIRLIK FAKTÖRLERİ
      XI(1,3) = -0.932469514203152
      XI(2,3) = -0.661209386466265
      XI(3,3) = -0.238619186083197
      XI(4,3) = -XI(3,3)
      XI(5,3) = -XI(2,3)
      XI(6,3) = -XI(1,3)
      W(1,3) = 0.171324492379170
      W(2,3) = 0.360761573048139
      W(3,3) = 0.467913934572691
      W(4,3) = W(3,3)
      W(5,3) = W(2,3)
      W(6,3) = W(1,3)
C    4-NOKTALI GAUSS İNTEGRASYONU İÇİN APSİSLER VE AĞIRLIK FAKTÖRLERİ
      XI(1,2) = -0.861136311594053
      XI(2,2) = -0.339981043584856
      XI(3,2) = -XI(2,2)
      XI(4,2) = -XI(1,2)
      W(1,2) = 0.347854845137454
      W(2,2) = 0.652145154862546
      W(3,2) = W(2,2)
      W(4,2) = W(1,2)
C    2-NOKTALI GAUSS İNTEGRASYONU İÇİN APSİSLER VE AĞIRLIK FAKTÖRLERİ
      XI(1,1) = -0.577350269189626
      XI(2,1) = -XI(1,1)
      W(1,1) = 1.
      W(2,1) = 1.
      RETURN
      END

```

C MATRX ALT PROGRAMI

C LİNEER SINIR ELEMANLARI İÇİN H VE G MATRİSLERİNİN HESAPLANARAK
C SINIR ŞARTLARININ UYGULANMASI

SUBROUTINE MATRX (INFB,NE,NN,NI)

COMMON / RW / IRE,IWR

COMMON / A / XI(6,3),W(6,3),INC(1000,2),KOD(1000),LJ(1000),
+ X(1000),Y(1000),A(1000,1000),B(1000),XM(1000),
+ FF(1000),EPS(1000),U(1000),Q(1000),VAL(1000),
+ HI(1000,1000),H1(1000,1000),H2(1000,1000),
+ GI(1000,1000),G1(1000,1000),G2(1000,1000)
DIMENSION DXY(2),BN(2),DR(2)

PI = 3.141592654

C SINIR DÜĞÜMLERİ ÜZERİNDEKİ DÖNGÜ

DO 2 I = 1,NN+NI

DO 3 J = 1,NN

H1(I,J) = 0.

G1(I,J) = 0.

H2(I,J) = 0.

G2(I,J) = 0.

A(I,J) = 0.

HI(I,J) = 0.

GI(I,J) = 0.

3 CONTINUE

FF(I) = 0.

XM(I) = 0.

C İNCELENEN DÜĞÜMÜN KOORDİNATLARI

XS = X(I)

YS = Y(I)

C SINIR ELEMANLARI ÜZERİNDEKİ DÖNGÜ

DO 1 J = 1,NE

N1 = INC(J,1)

N2 = INC(J,2)

XX1 = X(N1)

YY1 = Y(N1)

XX2 = X(N2)

YY2 = Y(N2)

DXY(1) = X(N2) - X(N1)

DXY(2) = Y(N2) - Y(N1)

BN(1) = DXY(2)/LJ(J)

BN(2) = -DXY(1)/LJ(J)

C SAYISAL İNTEGRASYON NOKTALARININ SAYISININ SEÇİLMESİ

SEL=.5*SQRT((2.*XS-X(N1)-X(N2))**2+(2.*YS-Y(N1)-Y(N2))**2)/LJ(J)

NPI=4

IF(SEL.LE.1.5)NPI = 6

IF(SEL.GT.5.5)NPI = 2

INP = NPI/2

C SAYISAL İNTEGRASYON KULLANARAK TEKİL OLMAYAN İNTEGRALLERİN
HESAPLANMASI

DO 10 KK=1,NPI

XX = 0.5*(1.+ XI(KK,INP))*DXY(1) + X(N1) - XS

YY = 0.5*(1.+ XI(KK,INP))*DXY(2) + Y(N1) - YS

R=SQRT(XX**2 + YY**2)

B(1)=0.5*(1.- XI(KK,INP))*LJ(J)

B(2)=0.5*(1.+ XI(KK,INP))*LJ(J)

DR(1) = XX / R

DR(2) = YY / R

```

DRN=DR(1)*BN(1)+DR(2)*BN(2)
      HH=W(KK,INP)*(DRN)*EPS(J)/(4*PI)
      H1(I,J) = H1(I,J) - B(1)*HH/R
      H2(I,J) = H2(I,J) - B(2)*HH/R
GG=ALOG(1/R)*W(KK,INP)*EPS(J)/(4*PI)
      G1(I,J) = G1(I,J) + B(1)*GG
      G2(I,J) = G2(I,J) + B(2)*GG
10  CONTINUE
C    H MATRİSİNİN KÖŞEĞEN TERİMLERİNİN HESAPLANMASI
      FF(I) = FF(I) - H1(I,J) - H2(I,J)
C    G MATRİSİNİN KÖŞEĞEN TERİMLERİNİN ANALİTİK İNTEGRASYON
      KULLANILARAK HESAPLANMASI
      GE = LJ(J)*(1.5 - ALOG(LJ(J)))*EPS(J)/(4*PI)
      IF(N1.EQ.I) G1(I,J) = GE
      IF(N2.EQ.I) G2(I,J) = GE
C    NEUMANN TİPİ SINIRLARDAKİ G KATSAYILARININ Q=0 SINIR ŞARTI İLE
      ÇARPILMASI
      K1 = KOD(N1)
      K2 = KOD(N2)
      QQ = 0
      IF(K1.EQ.1.AND.K2.EQ.1) QQ = 1
      G1(I,J) = G1(I,J)*QQ
      G2(I,J) = G2(I,J)*QQ
C    İÇ NOKTALAR İÇİN ETKİ MATRİSLERİNİN HESAPLANMASI
      HI(I,N1) = HI(I,N1) + H1(I,J)
      HI(I,N2) = HI(I,N2) + H2(I,J)
      GI(I,N1) = GI(I,N1) + G1(I,J)
      GI(I,N2) = GI(I,N2) + G2(I,J)
C    SINIR DEĞERLERİNİN HESAPLANMASI İÇİN A.X=Y SİSTEMİNİN
      OLUŞTURULMASI
C    I DÜĞÜMÜNÜN, J ELEMANININ 1.DÜĞÜMÜNE ETKİSİ
      IF(K1.NE.1) THEN
        XM(I) = XM(I) - Q(N1)*G1(I,J)
        A(I,N1) = A(I,N1) - H1(I,J)
      ELSE
        XM(I) = XM(I) + U(N1)*H1(I,J)
        A(I,N1) = A(I,N1) + G1(I,J)
      END IF
C    I DÜĞÜMÜNÜN, J ELEMANININ 2.DÜĞÜMÜNE ETKİSİ
      IF(K2.NE.1) THEN
        XM(I) = XM(I) - Q(N2)*G2(I,J)
        A(I,N2) = A(I,N2) - H2(I,J)
      ELSE
        XM(I) = XM(I) + U(N2)*H2(I,J)
        A(I,N2) = A(I,N2) + G2(I,J)
      END IF
1    CONTINUE
C    KÖŞEĞEN TERİMLERİNE SINIR ŞARTLARININ UYGULANMASI
      KK = KOD(I)
      IF(KK.NE.1) THEN
        A(I,I) = -FF(I)
      ELSE
        XM(I) = XM(I) + U(I)*FF(I)
      END IF
2    CONTINUE
      RETURN
      END

```

C SOLVER ALT PROGRAMI
 C GAUSS ELİMİNASYON YÖNTEMİ İLE LİNEER DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ
 C A :SİSTEM MATRİSİ
 C B :İLK OLARAK BAĞIMSIZ KATSAYILARI İÇERİR,
 C ÇÖZÜMDEN SONRA SİSTEM BİLİNMEYENLERİNİ İÇERİR.

SUBROUTINE SOLVER (N,IFAIL)

```

COMMON / RW / IRE,IWR
COMMON / A / XI(6,3),W(6,3),INC(1000,2),KOD(1000),LJ(1000),
+          X(1000),Y(1000),A(1000,1000),Q(1000),B(1000),
+          XM(1000),FF(1000),EPS(1000),U(1000),VAL(1000),
+          HI(1000,1000),H1(1000,1000),H2(1000,1000),
+          GI(1000,1000),G1(1000,1000),G2(1000,1000)

N1 = N-1
  DO 10 K = 1,N1
    K1 = K + 1
    CC = A(K,K)
    IF (ABS(CC)) 1,1,3
1  DO 7 J = K1,N
  IF (ABS(A(J,K))) 7,7,5
5  DO 6 L = K,N
    CC = A(K,L)
    A(K,L) = A(J,L)
6  A(J,L) = CC
    CC = B(K)
    B(K) = B(J)
    B(J) = CC
    CC = A(K,K)
    GO TO 3
7  CONTINUE
8  WRITE (IWR,2) K
2  FORMAT (/////,20X,'** SATIRDA TEKİLLİK',I5,'**')
  IFAIL = 1
  GO TO 30
3  DO 4 J = K1,N
4  A(K,J) = A(K,J)/CC
  B(K) = B(K)/CC
  DO 15 I = K1,N
    CC = A(I,K)
    DO 9 J = K1,N
9    A(I,J) = A(I,J) - CC*A(K,J)
15   B(I) = B(I) - CC*B(K)
10  CONTINUE
11 B(N)=B(N)/A(N,N)
  DO 20 L = 1,N1
    K = N - L
    K1= K + 1
    DO 20 J = K1,N
20   B(K) = B(K) - A(K,J)*B(J)
  IFAIL=0
30  RETURN
  END
  
```

```

C      INTERM ALT PROGRAMI
C      İÇ NOKTALARDAKİ SONUÇLAR

SUBROUTINE INTERM (NN,NI)

COMMON / RW / IRE,IWR
COMMON / A / XI(6,3),W(6,3),INC(1000,2),KOD(1000),LJ(1000),
+          X(1000),Y(1000),A(1000,1000),B(1000),XM(1000),
+          FF(1000),EPS(1000),U(1000),Q(1000),VAL(1000),
+          HI(1000,1000),H1(1000,1000),H2(1000,1000),
+          GI(1000,1000),G1(1000,1000),G2(1000,1000)

PI = 3.141592654
JJ = NN + 1
NT = NN + NI
C      BİLİNEN SINIR DEĞERLERİ İLE İÇ NOKTALARDAKİ POTANSİYELLERİN
      HESAPLANMASI
DO 5 I = JJ,NT
  U(I) = 0
    DO 10 K = 1,NN
      U(I) = U(I) - U(K)*HI(I,K) + GI(I,K)*Q(K)
10    CONTINUE
  U(I) = U(I)/EPS(I)
5    CONTINUE
  RETURN
END

C      OUTPT ALT PROGRAMI
C      SONUÇLARIN YAZDIRILMASI

SUBROUTINE OUTPT (NN,NI)

COMMON / RW / IRE,IWR
COMMON / A / XI(6,3),W(6,3),INC(1000,2),KOD(1000),LJ(1000),
+          X(1000),Y(1000),A(1000,1000),B(1000),XM(1000),
+          FF(1000),EPS(1000),U(1000),Q(1000),VAL(1000),
+          HI(1000,1000),H1(1000,1000),H2(1000,1000),
+          GI(1000,1000),G1(1000,1000),G2(1000,1000)

WRITE (IWR,3)
3  FORMAT (//,15X,'SINIRLARDAKİ SONUÇLAR',///,12X,
+        'DÜĞÜM',11X,'U',13X,'E',/)
C      SINIRLARDAKİ POTANSİYELLER VE TÜREVLERİ
WRITE(IWR,4) (I,U(I),Q(I),I=1,NN)
4  FORMAT (10X,I5,5X,F10.4,5X,F10.4)
C      İÇ NOKTALARDAKİ POTANSİYELLER
WRITE (IWR,5)
5  FORMAT (//,15X,'İÇ NOKTALARDAKİ POTANSİYELLER',///,12X,
+        'NOKTA',11X,'U',/)
  JJ = NN + 1
  NT = NN + NI
  WRITE(IWR,6) (K,U(K),K=JJ,NT)
6  FORMAT (10X,I5,5X,F10.3)
  RETURN
END

```