

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**YÜKSEK MERTEBEDEN FREDHOLM TİP LİNEER İNTEGRO-DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ABEL MATRİS YÖNTEMİ İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ**

BİHTER ERGÜL

**Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Kübra ERDEM BİÇER**



MANİSA-2022

**BİHTER YÜKSEK MERTEBEDEN FREDHOLM TIP LİNEER İNTEGRO-DİFERANSİYEL
ERGÜL DENKLEMLERİN ABEL MATRİS YÖNTEMİ İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ 2022**

TEZ ONAYI

Bihter Ergöl tarafından hazırlanan "**Yüksek Mertebeden Fredholm Tip Lineer İntegro- Diferansiyel Denklemlerin Abel Matris Yöntemi İle Yaklaşık Çözümleri**" adlı tez çalışması 04/03/2022 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuş ve **oybirliği** ile başarılı olarak kabul edilmiştir.

Danışman **Dr. Öğr. Üyesi Kübra Erdem Biçer**
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi **Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL**
Dokuz Eylül Üniversitesi

Jüri Üyesi **Prof. Dr. Ali KONURALP**
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Bihter ERGÜL



İÇİNDEKİLER.....	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
TABLO DİZİNİ.....	III
TEŞEKKÜR	IV
ÖZET	V
ABSTRACT	VI
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. Adi Diferansiyel Denklemler.....	3
2.2. Fredholm İntegral Denklemler	3
2.3. Fredholm Tip İntegro-Diferansiyel Denklemler.....	3
2.4. Başlangıç ve Sınır-Değer Problemleri	5
2.5. Abel Polinomları	5
2.5.1. Niels Henrik Abel ve Matematiğe Katkıları.....	5
2.5.2. Abel Polinomunun Tanımı ve Bazı Özellikleri.....	7
2.5.3. Abel Polinomunun Temel Matris Özellikleri.....	8
3. PROBLEMİN TANITILMASI VE ÇÖZÜM METODU.....	11
3.1. Temel Problem	11
3.2. Temel Matris Denklemleri.....	11
3.3. Abel Matris Sıralama Yöntemi.....	14
3.4. Hata Analizi.....	17
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	19
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	32
KAYNAKLAR.....	33
ÖZGEÇMİŞ.....	36

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$A_n(x, \alpha)$	Abel Polinomu
B	Bilinmeyen Abel Polinom Katsayı Matrisi
C	Taylor Polinomunun Türev Geçiş Matrisi
D	Abel Polinomu için Türev Geçiş Matrisi
$G(\alpha)$	Abel Polinomu Katsayı Matrisi
$K(x, t)$	Taylor Polinomu için Çekirdek Fonksiyonu
$K_a(x, t)$	Abel Polinomu için Çekirdek Fonksiyonu
N	Serinin Kesme Sınırı
$[U; \lambda]$	Koşullar İçin Arttırılmış Matris
$[W; F]$	Arttırılmış Matris
$[\tilde{W}; \tilde{F}]$	Koşulları Kullanılmış Yeni Arttırılmış Matris
x_i	Sıralama Noktaları
$X(x)$	Taylor Polinomu
$y(x)$	Denklemin Tam Çözümü
$y_N(x)$	Denklemin Yaklaşık Çözümü

TABLO DİZİNİ

Sayfa

Tablo 1. Tam çözüm $y(x) = \cos(x)$ ve $N = 2, 3$ değerleri için $y_N(x)$ Abel polinom çözümleri.....	26
Tablo 2. $ e_N $ mutlak hata fonksiyonunun $N = 2, 3$ için değerleri.....	26
Tablo 3. $N = 2, 3, 4$ değerleri için $y_N(x)$ Abel polinom çözümleri ile $y(x) = \sin x$ tam çözümünün karşılaştırılması.....	27
Tablo 4. $ e_N $ mutlak hata fonksiyonunun $N = 2, 3, 4$ değerleri için karşılaştırılması....	28
Tablo 5. Tam çözüm $y(x) = \cos(x)$ ve $N = 3, 4$ değerleri için $y_N(x)$ Abel polinom çözümleri.....	29
Tablo 6. $ e_N $ mutlak hata fonksiyonunun $N = 3, 4$ değerleri için karşılaştırılması.....	29
Tablo 7. $N = 4, 6, 8$ değerleri için $y_N(x)$ Abel polinom çözümleri ile $y(x) = -e^x$ tam çözümünün karşılaştırılması.....	30
Tablo 8. $ e_N $ mutlak hata fonksiyonunun $N = 4, 6, 8$ değerleri için karşılaştırılması....	31

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim sürecinde kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışmanım sayın Dr. Öğr. Üyesi Kübra ERDEM BİÇER' e sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Bihter ERGÜL
Manisa, 2022

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Yüksek Mertebeden Fredholm Tip Lineer İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Abel Matris Yöntemi ile Yaklaşık Çözümleri

BİHTER ERGÜL

**Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Kübra ERDEM BİÇER

Bu tez çalışmasında Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için Abel polinomlarına ve sıralama noktalarına dayalı matris yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemde, ele alınan denklem Abel polinomu ve sıralama noktaları kullanılarak matris denklemine dönüştürülmüştür. Bu matris denkleminin çözümünden bilinmeyen Abel katsayılarına ulaşılmış ve problemin yaklaşık çözümü bulunmuştur.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; diferansiyel denklemler, integral denklemler ve integro-diferansiyel denklemlerden ve bu denklemlerin kullanım alanlarından bahsedilmiştir. İkinci bölümde tez ile ilgili kaynak özetleri verilmiş olup Abel polinomunun tanımı, özellikleri ve Abel polinomunun temel matris bağıntılarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde; Abel matris yöntemi ve bu yöntemde kullanılan temel matris bağıntıları detaylı anlatılmıştır. Ayrıca mutlak hata analizine yer verilmiştir. Dördüncü bölümde; Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin çözümleri ile ilgili nümerik örnekler sunulmuştur. Beşinci bölümde ise sonuç ile ilgili kısım bulunmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Abel polinomu, Fredholm İntegro- Diferansiyel Denklemler, Abel Matris Yöntemi, Sıralama Noktaları.

2022, 36 sayfa

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

Approximate Solutions of Higher Order Linear Fredholm Integro-Differential Equations by Abel Matrix Method

BİHTER ERGÜL

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Kübra ERDEM BİÇER

This thesis uses a matrix method based on Abel polynomials and collocation points to approximate Fredholm integrodifferential equations. In this method, the equation in subject transforms matrix equation using Abel polynomials and calculation method. After solving this matrix equation, the unknown Abel coefficients are gathered, and the approximate solution is obtained.

This thesis contains five chapters. The first chapter explains differential equations, integral equations, and integrodifferential equations and their usage areas. The second chapter explains resource summary descriptions, definition, properties, and basic matrix relations of Abel polynomials. In the third chapter, the Abel matrix method and the fundamental matrix relations used in this method have been explained in detail; also, absolute error analyses are included. In the fourth chapter, some numeric examples regarding the solutions of Fredholm's integrodifferential equations are presented. Finally, the fifth chapter is the results.

Keywords: Abel polynomial, Fredholm Integro-Differential Equations, Abel Matrix Method, Collocation Points.

2022, 36 pages

1.GİRİŞ

Teorik ve uygulamalı matematiğin temel branşlarından birisi diferansiyel denklemlerdir. Bu konu ile ilgili araştırmalar, 17. yüzyılın ortasından sonra başlamış olup Newton ve Leibniz tarafından integral ve diferansiyel hesap ile ilgili yapılan çalışmalardan sonra ortaya çıkmıştır. Newton'un 1671 yılında yazdığı "Flux metodu ve sonsuz seriler" isimli eserinde diferansiyel denklem bağıntısına açık şekilde ilk olarak rastlanılmaktadır. Sonra diferansiyel denklemler teorisi sonsuz küçükler analizinden ayrılarak matematiğin hızla gelişen dalı olmuştur [1,2]. Ayrıca, diferansiyel denklemler bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun türevlerini içeren denklemlerdir. Bunlar geometri, mekanik, fizik, mühendislik, kimya, astronomi, biyoloji, psikoloji, sosyal bilimler ve ekonomi gibi dallarda problemleri temsil etmek amacıyla matematik modeller olarak kullanılırlar. Özellikle fen ve mühendislikte karşılaşılan problemlerin diferansiyel denklemler ile ilgisi vardır: İletken çubuktaki ısı akımı, elektrik devresindeki elektrik veya akım yükü, tel veya zarın titreşimi, kimyasal reaksiyonların tespit edilmesi, uydu ve roketlerin hareketi, radyoaktif maddenin parçalanması, belirli geometrik özelliğe sahip eğrilerin bulunması gibi. Bu tür problemlerin matematik modeli, diferansiyel denklemler olarak karşımıza çıkar [2,3].

İntegral denklemler, integral işareti altında bağımlı bir değişken içeren denklemlerdir [4]. Bu denklemler, uygulamalı matematiğin çeşitli alanlarında matematik model olarak karşımıza çıkar. Potansiyel, jeofizik, elektrik ve manyetizma, gazların kinetik teorisi, fizik ve biyolojideki kalıtsal kavramlar, yenileme teorisi, kuantum mekaniği, radyasyon, optimizasyon, optimal kontrol sistemler, iletişim teorisi, matematiksel ekonomi, nüfus genetiği, kuyruk teorisi, tıp, radyasyonla ilgili matematiksel problemler, astrofizik ve reaktör teorisinin cisimcik taşıma problemleri, akustik, akışkanlar mekaniği, ısı taşıma, kırılma mekaniği, radyasyon yayan ısı transfer problemleri ile ilgili uygulamalarda integral denklemler bulunmaktadır [5].

Kullanışlı denklemler olan integral denklemler teorisi, yıllardır etkili araştırma alanı olup analiz, fonksiyonlar teorisi ve fonksiyonel analize dayanmaktadır. İntegral denklemler teorisinin sonuçları, nümerik yöntemler analizinde önemli bir yeri tutarlar [6].

1900 lü yılların başlarında Volterra, nüfus artış problemlerini incelerken yeni bir denklem tipi olan integro-diferansiyel denklemleri geliştirmiştir [7]. Bilinmeyen $y(x)$ fonksiyonu ve $y(x)$ in türevlerini içeren integral denkleme integro-diferansiyel denklem denir [8]. Bu denklemler, ısı transformatörü, nötron difüzyonu, birlikte var olan biyolojik türlerin üreme oranlarının incelenmesi problemlerinde karşımıza çıkmaktadır [9]. Lineer ve lineer olmayan fonksiyonel analizin birçok dallarında, integro-diferansiyel denklemler önemli rol oynamıştır ve bunların uygulamaları fen bilimleri, mühendislik ve sosyal bilimlerinin teorisinde yer almaktadır.

Diğer yandan Adomian Ayrışım Metodu ve Değişken İterasyon Metodu'nun karşılaştırmalı çalışmasını uygulamakla integro-diferansiyel denklemlerin çeşitli problemlerinin yaklaşık çözümü bulundu. Metotların ayrıca tam çözümü ile birlikte karşılaştırılması, bu denklemlerin tam çözümünün olmasına bağlıdır [10]. Bu denklemlerin çözümü için kullanılan doğrudan- homotopi yöntemi [11], çok ölçekli Galerkin yöntemi [12], spektral homotopi analiz yöntemi [13], Chebyshev dalgacık yöntemi [14] şeklinde birçok yöntem vardır.

Lineer Fredholm integro- diferansiyel denklemlerin çözümü için Laguerre polinomu [15] kullanılmıştır. Ayrıca bu denklemler Bessel polinomuna dayalı [16] yöntem ile çözülmüştür. Belirtilen denklemleri çözmek için Homotopi analiz yöntemi de kullanılır [17].

Yüksek mertebeden integro-diferansiyel denklemleri ile ilgili sınır değer problemlerine ait çözümlerin teklik ve varlığı için koşulları belirten teoremler, nümerik analizin literatüründe yer almaktadır. Morchalo ve Agarwal bu denklemler için sınır değer problemlerini incelemiştir. Nümerik ve analitik çözümler elde etmenin, yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinde önemli bir yeri olduğu vurgulanmıştır [18].

Bu çalışmada, Fredholm integro-diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümünü bulmak için Abel polinomu ve sıralama noktalarını içeren bir sayısal matris yöntemi geliştirilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Adi Diferansiyel Denklemler

Adi diferansiyel denklemler, bir veya birden fazla bağımlı değişkenin tek bir bağımsız değişkene göre adi türevlerini içinde bulunduran denklemlerdir [19]. y bağımlı ve x bağımsız değişken olmak üzere n . mertebeden bir adi diferansiyel denklem en genel formda

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

olarak tanımlanır. Eğer böyle bir denklem

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(x) = f(x) \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilirse buna n . mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan lineer (doğrusal) diferansiyel denklem denir. Yani bir diferansiyel denklemin lineer (doğrusal) olması için bağımlı değişken ve bu değişkenin türevlerinin derecesi, kuvveti bir olmalıdır. Ayrıca bağımlı değişken ve türevleri aralarında çarpım halinde olmamalıdır. Burada $P_k(x)$ ve $f(x)$ verilen bir aralıkta türevlenebilir olduğu bilinen fonksiyonlardır.

2.2. Fredholm İntegral Denklemler

İntegral denklemlerin bir türü olan lineer Fredholm integral denklemler

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt \quad (2.2)$$

şeklindeki denklemlerdir [20]. Bu denklemde a ve b sabit sayılar, $y(x)$ bilinmeyen fonksiyon, $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonu, λ bir parametredir.

2.3. Fredholm Tip İntegro-Diferansiyel Denklemler

Hem denklemin tam çözümünün türevini hem de integralini bulunduran ve integral sınırları sabit sayı olan integro-diferansiyel denkleme Fredholm integro-

diferansiyel denklem denir. Bu integro-diferansiyel denklemde, bilinmeyen fonksiyon $y(x)$ ve bunun, $n \geq 1$ olmak üzere, $y^{(n)}(x)$ türevinden en az biri integralin içinde veya dışındadır. Bu durumda, integrasyon sınırları sabit sayı olup n . mertebeden Fredholm integro-diferansiyel en genel formda aşağıdaki bağıntı ile gösterilir:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x), \int_a^b K(x, t)y(t)dt) = 0$$

Genel lineer Fredholm integro-diferansiyel denklem, yani yukarıdaki denklemin $y(x)$ bağımlı değişkeni ve türevlerine göre lineer olması hali olan (2.1) ve (2.2) denklemlerinin birleşiminin

$$\sum_{k=0}^m P_k(x)y^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt \quad a \leq x, t \leq b \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır. Burada a ve b sabit sayılar, $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonu olup $f(x)$ ve $P_k(x)$ x değişkenine bağlı ifadeler, λ parametredir.

Örneğin,

$$\frac{y^v(x)}{x+5} + \frac{y^{iii}(x)}{x+3} - \frac{y(x)}{x} = -e + e^x + 1 + \int_0^1 \frac{y(t)}{x} dt$$

$$\frac{y^{vi}(x) + y^v(x)}{6} + y^{iv}(x) = -1 - e^{-\pi x} + \frac{\cos x - \sin x}{6} + \sin x - e^{-x} + \int_0^{\pi} y(t) dt$$

$$y^{(4)}(x) = 2e^x - e^{x+2} + \int_0^2 e^x y(t) dt$$

lineer Fredholm integro- diferansiyel denklemlerdir.

Son yıllarda, Fredholm integro- diferansiyel denklemin çözümlerini bulmak için aşağıdaki gibi çeşitli sayısal yöntemler kullanılmaktadır: Legendre spektral kollokasyon yöntemi, rasyonelleştirilmiş Haar fonksiyonları yöntemi, Adomian Ayırıştırma metodu, Varyasyon iterasyon metodu, çok ölçekli Galerkin yöntemi, spektral homotopi analiz yöntemi, Chebyshev dalgacık yöntemi, Laguerre polinom

çözümü, Bessel polinom yaklaşım, Bernoulli matris yöntemi, spektral- kollokasyon yöntemleri, Legendre polinom yaklaşımı, pratik matris metodu, Euler polinomları yöntemi, Lucas polinom yaklaşımı, ikinci dereceden doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri Bernoulli polinom metodu kullanarak çözmek için bir hesaplama yöntemi, Bernoulli matris metodu, Bernoulli matris-sıralama yöntemi [21 – 30].

2.4. Başlangıç Ve Sınır-Değer Problemleri

Başlangıç değer problemi, hepsi bağımsız değişkenin aynı değerinde verilen, bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun türevlerindeki ikincil koşullarla birlikte diferansiyel denklem tarafından oluşturulur. Başlangıç koşulları, ikincil koşullardır. Eğer ikincil koşullar, bağımsız değişkenin birden fazla değerinde verilirse problem sınır değer problemi olur ve koşullar sınır koşullarıdır [31]. Sınır değer problemi ile başlangıç değer problemi karşılaştırılırsa başlangıç değer problemi sınır değer problemine göre daha ayrıntılı teori içermektedir [32].

2.5. Abel Polinomları

2.5.1. Niels Henrik Abel Ve Niels Henrik Abel'in Matematiğe Katkıları



Niels Henrik Abel (1802- 1829)

Niels Henrik Abel, 5 Ağustos 1802'de Norveç'in batı kıyısındaki Stavanger

yakınlarındaki Finnøy' de doğdu [33]. Søren Georg Abel, vekilin oğlu ve Niels Henrik'in babası olup Anne Marie Simonsen ile evlendi [34]. Niels Henrik'in babası 13 yaşına kadar eğitimiyle ilgilendi ve Niels 1815 yılında katedral okuluna gönderildi. Matematik öğretmeni Bernt Michael Holmboe, Abel'in hayatını değiştirdi. Holmboe çocuklara matematiği sevdirmeyi başardı ve Abel' in Lagrange, Newton, Gauss, Laplace gibi matematikçilerinin çalışmalarını incelemesi bu öğretmenin sayesinde olmuştur.

Abel, Berlin'de Agust Crelle (1780-1856) ile tanıştı. Crelle, Abel' in çalışmalarının basılmasına çok yardım etti. 19. yüzyıl Alman matematiğinin en önemli dergisi Crelle tarafından çıkarılmaya başlanan Crelle Journal dır ve Abel' in 6 makalesi 1826 yılındaki ilk cildinde yayımlandı. Bu dönem Paris'te matematik ön plandaydı. Abel, Paris'te Fransız Bilimler Akademisi'ne transandantal fonksiyonlarla ilgili bir çalışmasını sundu. Augustin Louis akademi çalışmayı değerlendirmesi için Cauchy' e (1789-1857) bu akademi çalışmayı gönderdi ancak Cauchy Norveçli matematikçinin çalışmasını daha çok kendi zenginliğini düşündüğü için ya okumadı ya da kaybetti. Kendini kötü hisseden Abel, Paris'te ne yazık ki verem oldu. Rahatsızlığına rağmen Berlin'e dönen Abel, eliptik fonksiyonlarla ilgili çalışmasını bitirdi. Ülkesine 1827 yılında geri döndü. Sonsuz seriler, transandantal fonksiyonlar, integral dönüşümler konularıyla da ilgilendi. Çalışmaları özellikle eliptik integraller ile ilgili oldu. Matematikte önemi büyük olan grup teorisi hakkında Abel ve Fransız matematikçi Évariste Galois'in (1811-1832) çalışmaları oldu [35]. Abel, beşinci dereceden problemi inceledi ve bu problemin genel olarak radikallerde çözülemeyeceğini gösterdi [36].

Beşinci dereceden radikallerde çözülemeyen genel cebir denklemlerinin ispatı, Abel' in en ünlü eseridir. Ayrıca Abel' in eliptik fonksiyonlar olarak adlandırılan iki kat-periyodik fonksiyonlar ile ilgili çalışmaları da vardır. İntegrasyon ve kesirli mertebeden türevler için gerekli formüller Abel'in en etkileyici keşiflerinin içerisinde yer almaktadır [37].

Abel 1823 yılında, Profesör Hansteen' nin bulduklarını birleştirmesiyle oluşan Norveç'in ilk bilimsel dergisi "Magazin for Naturvidenskaberne" de belirli integrallerle ilgili ilk önemli makalesini yayınlamıştır.

Niels Henrik Abel, yaşamı boyunca zamanının matematiği ile ilgili çeşitli konularla çok ilgilendi. Konuları teorik matematikte seçmesi, Ay'ın bir sarkacın hareketi üzerindeki etkisi ile ilgili araştırmasından sonra olmuştur. Bu konular şu

şekilde sınıflandırılır: Yeni aşkın fonksiyonlar, özellikle eliptik integraller, eliptik fonksiyonlar, değişmeli integraller, fonksiyonel denklemler, integral dönüşümler, seriler teorisi, cebirsel denklemlerin radikallerle çözümüdür [38].

2.5.2. Abel Polinomun Tanımı Ve Bazı Özellikleri

Abel polinomları binom tipi bir polinom tipi oluştururlar. Bu polinomların üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(x; \alpha)}{n!} t^n = e^{xW(at)/\alpha}$$

bağıntısı ile verilir [39 – 41]. Burada $W(t)$ Lambert w-fonksiyonudur. Abel polinomunun genel formu ise

$$A_n(x, \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-n\alpha)^{n-k-1} x^{k+1}, \quad A_0(x, \alpha) = 1, \quad n = 1, \dots, N \quad (2.4)$$

veya

$$A_n(x; \alpha) = x(x - \alpha n)^{n-1}$$

olarak tanımlanılır [41 – 42].

Abel polinomlarının, (2.4) açık bağıntısını kullanarak $n=0,1,2, \dots, 10$ için aşağıdaki ifadeleri elde edilir:

- $A_0(x; \alpha) = 1$

$n=1$ için

- $A_1(x; \alpha) = x$

$n=2$ için

- $A_2(x; \alpha) = x^2 - 2\alpha x$

$n=3$ için

- $A_3(x; \alpha) = x^3 - 6\alpha x^2 + 9\alpha^2 x$

$n=4$ için

- $A_4(x; \alpha) = x^4 - 12\alpha x^3 + 48\alpha^2 x^2 - 64\alpha^3 x$

$n=5$ için

- $A_5(x; \alpha) = x^5 - 20\alpha x^4 + 150\alpha^2 x^3 - 500\alpha^3 x^2 + 625\alpha^4 x$

n=6 için

- $A_6(x; \alpha) = x^6 - 30\alpha x^5 + 360\alpha^2 x^4 - 2160\alpha^3 x^3 + 6480\alpha^4 x^2 - 7776\alpha^5 x$

n=7 için

- $A_7(x; \alpha) = x^7 - 42\alpha x^6 + 735\alpha^2 x^5 - 6860\alpha^3 x^4 + 36015\alpha^4 x^3 - 100842\alpha^5 x^2 + 117649\alpha^6 x$

n=8 için

- $A_8(x; \alpha) = x^8 - 56\alpha x^7 + 1344\alpha^2 x^6 - 17920\alpha^3 x^5 + 143360\alpha^4 x^4 - 688128\alpha^5 x^3 + 1835008\alpha^6 x^2 - 2097152\alpha^7 x$

n=9 için

- $A_9(x; \alpha) = x^9 - 72\alpha x^8 + 2268\alpha^2 x^7 - 40824\alpha^3 x^6 + 459270\alpha^4 x^5 - 3306744\alpha^5 x^4 + 14880348\alpha^6 x^3 - 38263752\alpha^7 x^2 + 43046721\alpha^8 x$

n=10 için

- $A_{10}(x; \alpha) = x^{10} - 90\alpha x^9 + 3600\alpha^2 x^8 - 84000\alpha^3 x^7 + 1260000\alpha^4 x^6 - 12600000\alpha^5 x^5 + 84000000\alpha^6 x^4 - 360000000\alpha^7 x^3 + 900000000\alpha^8 x^2 - 1000000000\alpha^9 x$

2.5.3 Abel Polinomunun Temel Matris Özellikleri

(2.4) bağıntısı ile tanımlanan Abel polinomlarının $n = 0, 1, 2, \dots, N$ için $A(x, \alpha)$ matris formu

$$A(x, \alpha) = X(x)G(\alpha) \quad (2.5)$$

olarak yazılır ve burada

$$A(x; \alpha) = [A_0(x; \alpha) \quad A_1(x; \alpha) \quad A_2(x; \alpha) \quad A_3(x; \alpha) \quad \dots \quad A_N(x; \alpha)]_{1 \times (N+1)},$$

$$X(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^N]_{1 \times (N+1)},$$

$$\mathbf{G}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2\alpha & 9\alpha^2 & (-4\alpha)^3 & \dots & (-N\alpha)^{N-1} \binom{N-1}{0} \\ 0 & 0 & 1 & -6\alpha & 48\alpha^2 & \dots & (-N\alpha)^{N-2} \binom{N-1}{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -12\alpha & \dots & (-N\alpha)^{N-3} \binom{N-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & (-N\alpha)^{N-4} \binom{N-1}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

şeklindedir.

Diğer yandan (2.5) ile tanımlanan $\mathbf{A}(x, \alpha)$ matrisinin türevleri aşağıdaki gibi hesaplanır [42]:

Önce $\mathbf{X}^{(k)}(x)$ türevinin matris formu

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'(x) &= \mathbf{X}(x)\mathbf{C}^1 \\ \mathbf{X}''(x) &= \mathbf{X}(x)\mathbf{C}^2 \\ \mathbf{X}'''(x) &= \mathbf{X}(x)\mathbf{C}^3 \\ &\vdots \\ \mathbf{X}^{(k)}(x) &= \mathbf{X}(x)\mathbf{C}^k \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklinde bulunur. Burada $\mathbf{C}$ matrisi

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

olmak üzere türev geçiş matrisidir [42]. Bu durumda (2.5) ve (2.6) eşitliklerinden

$$\mathbf{A}^{(k)}(x, \alpha) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}^k\mathbf{G}(\alpha), \quad k=0,1,2,3,\dots \quad (2.7)$$

matris bağıntısı elde edilir.

Ayrıca (2.5) ve (2.7) den elde edilen

$$\mathbf{A}(x, \alpha) = \mathbf{X}(x)\mathbf{G}(\alpha) \text{ ve } \mathbf{A}'(x, \alpha) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}\mathbf{G}(\alpha)$$

bağıntılarından, $\mathbf{A}'(x, \alpha)$ ve $\mathbf{A}(x, \alpha)$ arasındaki matris bağıntısı

$$\mathbf{A}'(x, \alpha) = \mathbf{A}(x, \alpha) \mathbf{G}^{-1}(\alpha) \mathbf{C} \mathbf{G}(\alpha)$$

veya kısaca

$$\mathbf{A}'(x, \alpha) = \mathbf{A}(x, \alpha) \mathbf{D} \quad (2.8)$$

olarak kurulur. Burada türev geçiş matrisi $\mathbf{D} = \mathbf{G}^{-1}(\alpha) \mathbf{C} \mathbf{G}(\alpha)$ ile tanımlanmıştır.

Ayrıca (2.8) de ardışık türev olarak $k=0,1,2, \dots$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(x, \alpha) &= \mathbf{A}(x, \alpha) \mathbf{D}^1 \\ \mathbf{A}''(x, \alpha) &= \mathbf{A}(x, \alpha) \mathbf{D}^2 \\ &\vdots \\ \mathbf{A}^{(k)}(x, \alpha) &= \mathbf{A}(x, \alpha) \mathbf{D}^k \end{aligned} \quad (2.9)$$

sonucuna varılır.

3. PROBLEMİN TANITILMASI VE ÇÖZÜM METODU

Bu çalışmada, yüksek mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denkleminin genelleştirilmiş ele alınmıştır. Verilen karışık koşullara göre, Abel polinomları cinsinden yaklaşık çözümlerini bulmak için bir matris-sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Bu amaç için işlem yolu aşağıda sunulmuştur:

3.1. Temel Problem

Bu çalışmadaki temel problem, $m_1, m_2 = 1, 2, \dots, m$ için $a \leq x, t \leq b$ olmak üzere yüksek mertebeden lineer değişken katsayılı

$$\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x) y^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{s=0}^{m_2} K_s(x, t) y^{(s)}(t) dt \quad (3.1)$$

genelleştirilmiş Fredholm integro-diferansiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)) = \lambda_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.2)$$

karışık koşulları altında

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N b_n A_n(x, \alpha) \quad (3.3)$$

formunda Abel polinom çözümleri araştırmaktır. Burada $P_k(x)$, $f(x)$ ve $K_s(x, t)$ çekirdek fonksiyon bilinen fonksiyonlar olup $[a, b]$ aralığında süreklidir. a_{jk} , b_{jk} ve λ parametresi sabit sayılardır. $y(x)$ bilinmeyen fonksiyon, b_n bulunması gereken Abel katsayılarıdır.

3.2. Temel Matris Denklemleri

Bu kesimde, (3.1)-(3.2) probleminin temel matris denklemlerini kurmak için önce (3.3) ile tanımlanan $y(x)$ çözüm fonksiyonunun matris formu, keyfi bir $N \geq 0$ sayısı için

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N b_n A_n(x, \alpha) = \mathbf{A}(x, \alpha) \mathbf{B} \quad (3.4)$$

olarak yazılır. Buradaki matrisler

$$\mathbf{A}(x, \alpha) = [A_0(x, \alpha) \quad A_1(x, \alpha) \quad \cdots \quad A_N(x, \alpha)],$$

$$\mathbf{B} = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_N]^T$$

ile gösterilmektedir. Ayrıca (3.4) çözüm matrisinin k. türevinde, (2.7) ve (2.9) matris bağıntıları kullanılarak $y^{(k)}(x)$ için aşağıdaki matris formları elde edilir:

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{A}^{(k)}(x, \alpha) \mathbf{B} = \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{G}(\alpha) \mathbf{B} \quad k=0,1, \dots \quad (3.5)$$

ve

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{A}^{(k)}(x, \alpha) \mathbf{B} = \mathbf{A}(x, \alpha) \mathbf{D}^k \mathbf{B} \quad k=0,1, \dots \quad (3.6)$$

(3.1) denkleminin integral parçasında $\mathbf{K}_s(x, t)$ çekirdek fonksiyonunun matris formunu bulmak için

$$\mathbf{K}_s(x, t) = \mathbf{X}(x) {}^t\mathbf{K}_s \mathbf{X}^T(t) \text{ (Taylor Tabanında)}$$

$$\mathbf{K}_s(x, t) = \mathbf{A}(x, \alpha) {}^A\mathbf{K}_s \mathbf{A}^T(t, \alpha) \text{ (Abel Tabanında)}$$

matris ifadeleri eşitlenir. ${}^A\mathbf{K}_s$ ve ${}^t\mathbf{K}_s$ arasında

$${}^A\mathbf{K}_s = (\mathbf{G}(\alpha))^{-1} ({}^t\mathbf{K}_s) (\mathbf{G}^T(\alpha))^{-1}$$

bağıntısı bulunur. Dolayısıyla çekirdek fonksiyonunun Abel tabanında matris formu

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_s(x, t) &= \mathbf{A}(x, \alpha) {}^A\mathbf{K}_s \mathbf{A}^T(t, \alpha) \\ &= \mathbf{A}(x, \alpha) (\mathbf{G}(\alpha))^{-1} ({}^t\mathbf{K}_s) (\mathbf{G}^T(\alpha))^{-1} \mathbf{A}^T(t, \alpha) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Burada $\mathbf{K}_s(x, t)$ nin (0,0) noktasındaki Taylor açılımından [43]

$${}^t\mathbf{K}_s = [{}^t\mathbf{K}_{mn}^s] = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{K}_{00} & {}^t\mathbf{K}_{01} & \dots & {}^t\mathbf{K}_{0N} \\ {}^t\mathbf{K}_{10} & {}^t\mathbf{K}_{11} & \dots & {}^t\mathbf{K}_{1N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ {}^t\mathbf{K}_{N0} & {}^t\mathbf{K}_{N1} & \dots & {}^t\mathbf{K}_{NN} \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

ve

$${}^t\mathbf{K}_{mn}^s = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} K_{mn}(0,0)}{\partial x^m \partial y^n} \quad m, n = 0, 1, \dots, N \quad (s = 0, 1, \dots, m_2)$$

ifadeleri elde edilir. Böylece (3.6) ve (3.7) de elde edilen matris bağıntıları (3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k(x) \mathbf{A}(x, \alpha) \mathbf{D}^k \mathbf{B} = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{s=0}^{m_2} \mathbf{A}(x, \alpha) (\mathbf{G}(\alpha))^{-1} ({}^t\mathbf{K}_s) (\mathbf{G}^T(\alpha))^{-1} \mathbf{A}^T(t, \alpha) \mathbf{A}(t, \alpha) \mathbf{D}^s \mathbf{B} dt$$

ve düzenlenirse

$$\sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k(x) \mathbf{A}(x, \alpha) \mathbf{D}^k \mathbf{B} = f(x) + \lambda \sum_{s=0}^{m_2} \mathbf{A}(x, \alpha) (\mathbf{G}(\alpha))^{-1} ({}^t\mathbf{K}_s) (\mathbf{G}^T(\alpha))^{-1} \mathbf{M} \mathbf{D}^s \mathbf{B} \quad (3.8)$$

matris denklemi elde edilir. Burada

$$\mathbf{M} = \int_a^b \mathbf{A}^T(t, \alpha) \mathbf{A}(t, \alpha) dt$$

veya

$$\mathbf{M} = \int_a^b \begin{bmatrix} A_0(t, \alpha) \\ A_1(t, \alpha) \\ \vdots \\ A_N(t, \alpha) \end{bmatrix} [A_0(t, \alpha) \quad \dots \quad A_N(t, \alpha)] dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \begin{bmatrix} A_0(t, \alpha)A_0(t, \alpha) & A_0(t, \alpha)A_1(t, \alpha) & \dots & A_0(t, \alpha)A_N(t, \alpha) \\ A_1(t, \alpha)A_0(t, \alpha) & A_1(t, \alpha)A_1(t, \alpha) & \dots & A_1(t, \alpha)A_N(t, \alpha) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_N(t, \alpha)A_0(t, \alpha) & A_N(t, \alpha)A_1(t, \alpha) & \dots & A_N(t, \alpha)A_N(t, \alpha) \end{bmatrix} dt \\
&= \int_a^b \mathbf{A}_i(t, \alpha) \mathbf{A}_j(t, \alpha) dt = [m_{ij}] \quad i, j = 0, 1, \dots, N
\end{aligned}$$

olarak açıklanabilir. Aynı zamanda (3.8) matris denklemi

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k(x) \mathbf{A}(x, \alpha) \mathbf{D}^k - \lambda \sum_{s=0}^{m_2} \mathbf{A}(x, \alpha)^A \mathbf{K}_s \mathbf{M} \mathbf{D}^s \right\} \mathbf{B} = f(x) \quad (3.9)$$

şeklinde de yazılabilir. Burada ${}^A\mathbf{K}_s$ matrisi

$${}^A\mathbf{K}_s = (\mathbf{G}(\alpha))^{-1} ({}^t\mathbf{K}_s) (\mathbf{G}^T(\alpha))^{-1} = \begin{bmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & \dots & k_{0N} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N0} & k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

ile tanımlanır.

3.3. Abel Matris Sıralama Yöntemi

Bu kesimde, (3.1)-(3.2) probleminin Abel polinomları cinsinden çözümünü bulmak için

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

ile tanımlanan standart sıralama noktalarına dayalı bir matris yöntemi kurulmaktadır.

Bunun için x_i noktaları önce (3.8) veya (3.9) matris denkleminde yerine koyarak $i = 0, 1, 2, \dots, N$ için

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k(x_i) \mathbf{A}(x_i, \alpha) \mathbf{D}^k - \lambda \sum_{s=0}^{m_2} \mathbf{A}(x_i, \alpha)^A \mathbf{K}_s \mathbf{M} \mathbf{D}^s \right\} \mathbf{B} = f(x_i)$$

matris denklemi elde edilir. Sonra bu denklem düzenlenerek (3.1) denklemine karşı gelen

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k \mathbf{A}(\alpha) \mathbf{D}^k - \lambda \sum_{s=0}^{m_2} \mathbf{A}(\alpha)^A \mathbf{K}_s \mathbf{M} \mathbf{D}^s \right\} \mathbf{B} = \mathbf{F} \quad (3.10)$$

temel matris denklemine dönüştürülür. Burada matrisler

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} A_0(x_0, \alpha) & A_1(x_0, \alpha) & \dots & A_N(x_0, \alpha) \\ A_0(x_1, \alpha) & A_1(x_1, \alpha) & \dots & A_N(x_1, \alpha) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_0(x_N, \alpha) & A_1(x_N, \alpha) & \dots & A_N(x_N, \alpha) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & P_k(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_k(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca (3.10) temel matris denklemi

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k \mathbf{A}(\alpha) \mathbf{D}^k - \lambda \sum_{s=0}^{m_2} \mathbf{A}(\alpha)^A \mathbf{K}_s \mathbf{M} \mathbf{D}^s$$

olmak üzere

$$\mathbf{W} \mathbf{B} = \mathbf{F} \quad \rightarrow \quad [\mathbf{W}; \mathbf{F}] \quad (3.11)$$

arttırılmış matris haline indirgenir.

Sonuç olarak (3.11) arttırılmış matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & w_{03} & \dots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & w_{13} & \dots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & w_{23} & \dots & w_{2N} & ; & f(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & w_{N2} & w_{N3} & \dots & w_{NN} & ; & f(x_N) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

şeklinde olur.

(3.2) koşullarına karşı gelen matris denklemi (3.6) bağıntısını kullanarak

$$\mathbf{U}_j = \sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} \mathbf{A}(a, \alpha) + b_{jk} \mathbf{A}(b, \alpha)) \mathbf{D}^k \mathbf{B} = [u_{j0} \quad u_{j1} \quad u_{j2} \quad \dots \quad u_{jN}]$$

olarak yazılırsa $j=0, 1, \dots, m-1$ için

$$\mathbf{U}_0 \mathbf{B} = [\lambda_0]$$

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{B} = [\lambda_1]$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{U}_{m-1} \mathbf{B} = [\lambda_{m-1}]$$

veya

$$[\mathbf{U}_j; \lambda_j] = [u_{j0} \quad u_{j1} \quad u_{j2} \quad \dots \quad u_{jN} ; \lambda_j]$$

arttırılmış formda gösterilir.

Burada

$$[\mathbf{U}_j; \lambda_j] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} & \dots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2N} & ; & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m-10} & u_{m-11} & u_{m-12} & \dots & u_{m-1N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}_{(m) \times (N+1)} \quad (3.13)$$

dir.

(3.12) matrisinden m satır silinir ve bu silinen m satır yerine (3.13) matrisi yazılırsa yeni arttırılmış matris aşağıdaki gibi elde edilir:

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & \dots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2N} & ; & f(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{(N-m)0} & w_{(N-m)1} & w_{(N-m)2} & \dots & w_{(N-m)N} & ; & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & u_{02} & \dots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{(m-1)0} & u_{(m-1)1} & u_{(m-1)2} & \dots & u_{(m-1)N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

olur ve

$$\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{F}}$$

matris formu olarak yazılır.

$\text{rank } \tilde{\mathbf{W}} = \text{rank}[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = N+1$ yani $\det \tilde{\mathbf{W}} \neq 0$ ise bu denklemin çözümü

$$\mathbf{B} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{F}}$$

dir. Burada B matrisi bilinmeyen Abel polinom katsayıları olduğu için

$$y(x) = [A_0(x, \alpha) \quad A_1(x, \alpha) \quad A_2(x, \alpha) \quad \dots \quad A_N(x, \alpha)]_{1 \times (N+1)} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

$$= [A_0(x, \alpha)b_0 \quad A_1(x, \alpha)b_1 \quad A_2(x, \alpha)b_2 \quad \dots \quad A_N(x, \alpha)b_N]_{1 \times (N+1)}$$

elde edilir. $y(x) \cong y_N(x)$ yaklaşık Abel polinom çözümü elde edilir.

3.4. Hata Analizi

$y(x)$ Fredholm integro-diferansiyel denklemin tam çözümü, $y_N(x)$ bu denklemin yaklaşık çözümü, N serinin kesme sınırı olmak üzere belirtilen denklemin mutlak hatası (mutlak hata fonksiyonu, hata miktarı) tam çözümünden yaklaşık çözümün çıkarılması ile oluşan ifadenin mutlak değeridir. Mutlak hata (mutlak hata fonksiyonu, hata miktarı)

$$|e_N(x)| = |y(x) - y_N(x)|$$

[43] şeklinde gösterilir.



4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde Fredholm integro-diferansiyel denklemler için geliştirilen Abel polinom yöntemi uygulanmıştır. Sonuçlar tablolarda karşılaştırılmıştır.

Örnek 4. 1 İlk olarak

$$2y''(x) - 2xy'(x) + y(x) = -3x^2 + \frac{x}{3} + \frac{9}{2} + 2 \int_0^1 (x+t)y(t)dt, \quad 0 \leq x, t \leq 1 \quad (4.1)$$

$y(0)=1$ ve $y'(0)=-\frac{3}{2}$ başlangıç koşulları ile verilen homojen olmayan 2. mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denkleminin $N=3$ için

$$y(x) \cong y_3(x) = \sum_{n=0}^3 b_n A_n(x) = b_0 A_0(x) + b_1 A_1(x) + b_2 A_2(x) + b_3 A_3(x) \quad (4.2)$$

Abel polinom çözümü aranacaktır. Burada $P_0=1$, $P_1=-2x$, $P_2=2$, $\lambda=2$ $a=0$,

$b=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$, $f(x)=-3x^2 + \frac{x}{3} + \frac{9}{2}$ ve $K(x,t)=x+t$ ' dir. $N=3$ için

sıralama noktaları

$$\left\{ x_0=0, x_1=\frac{1}{3}, x_2=\frac{2}{3}, x_3=1 \right\}$$

olarak elde edilir.

(4.1) denkleminin temel matris denklemi

$$\left[P_0 X C^0 G \left(\frac{1}{2} \right) + P_1 X C^1 G \left(\frac{1}{2} \right) + P_2 X C^2 G \left(\frac{1}{2} \right) - \lambda A K Q \right] B = F \quad (4.3)$$

şeklinde yazılır.

Burada

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \\ 1 & \frac{3}{3} & \frac{9}{9} & \frac{27}{27} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{77}{18} \\ \frac{61}{18} \\ \frac{11}{6} \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{49}{108} \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{25}{54} \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{30} & -\frac{17}{240} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{5} & -\frac{17}{240} & \frac{87}{560} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$[\mathbf{W}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & \frac{25}{6} & -\frac{62}{5} & ; & \frac{9}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{77}{18} & -\frac{1159}{135} & ; & \frac{77}{18} \\ -\frac{4}{3} & -2 & \frac{67}{18} & -\frac{524}{135} & ; & \frac{61}{18} \\ -2 & -\frac{8}{3} & \frac{5}{2} & \frac{3}{5} & ; & \frac{11}{6} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

olarak hesaplanır.

Koşulların matris formu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_0; \lambda_0 \\ \mathbf{U}_1; \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{4} & ; & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

şeklinde yazılır.

Yönteme göre (4.4) arttırılmış matrisinde 2 satır silinir ve yerine (4.5) arttırılmış matrisi yazılırsa

$$[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 9/4 & ; & -3/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ -4/3 & -2 & 67/18 & -524/135 & ; & 61/18 \\ -2 & -8/3 & 5/2 & 3/5 & ; & 11/6 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Bu matrisin çözümünden bilinmeyen Abel polinom katsayıları

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Abel katsayılarına göre (4.2) de belirtilen $y(x)$ çözümü

$$y(x) = 1.A_0(x) + \left(-\frac{1}{2}\right).A_1(x) + 1.A_2(x) + 0.A_3(x)$$

şeklinde yazılır. Bu çözüme Abel terimleri yazılır ve böylece çözüm

$$y(x) = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right).x + 1.(x^2 - x) + 0.\left(x^3 - 3x^2 + \frac{9}{4}x\right)$$

$$y(x) = x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

olarak elde edilir. Elde edilen çözüm (4. 1) homojen olmayan 2. mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denkleminin tam çözümüdür.

ÖRNEK 4. 2 Bu örnekte

$$y^{iv}(x) + y(x) = \int_0^1 y(t)dt + x - \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x, t \leq 1 \quad (4.6)$$

$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = 0$ başlangıç koşulları ile verilen homojen olmayan 4.mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denkleminin $N=4$ için

$$y(x) \cong y_4(x) = \sum_{n=0}^4 b_n A_n(x) = b_0 A_0(x) + b_1 A_1(x) + b_2 A_2(x) + b_3 A_3(x) + b_4 A_4(x) \quad (4.7)$$

Abel polinom çözümü aranacaktır.

Burada

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \lambda = 1, a = 0,$$

$b = 1, \alpha = \frac{1}{2}, f(x) = x - \frac{1}{2}$ ve $K(x, t) = 1$ 'dir. $N = 4$ için sıralama noktaları

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{2}{4}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1 \right\}$$

olarak elde edilir.

(4. 6) denkleminin temel matris denklemi

$$\left[\mathbf{P}_0 \mathbf{X} \mathbf{G}\left(\frac{1}{2}\right) + \mathbf{P}_4 \mathbf{X} \mathbf{C}^4 \mathbf{G}\left(\frac{1}{2}\right) - \lambda \mathbf{A} \mathbf{K} \mathbf{M} \right] \mathbf{B} = \mathbf{F} \quad (4.8)$$

şeklinde yazılır.

Burada

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}(\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{4} & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} & \frac{1}{256} \\ 1 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{16} & \frac{27}{64} & \frac{81}{256} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{16} & \frac{25}{64} & -\frac{343}{256} \\ 1 & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{27}{16} \\ 1 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{16} & \frac{27}{64} & -\frac{375}{256} \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{3}{8} & -\frac{13}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{5} & -\frac{7}{10} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{30} & -\frac{17}{240} & \frac{17}{70} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{5} & -\frac{17}{240} & \frac{87}{560} & -\frac{15}{28} \\ -\frac{13}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{17}{70} & -\frac{15}{28} & \frac{233}{126} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$[\mathbf{W}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{3}{8} & \frac{253}{10} & ; & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{48} & \frac{1}{64} & \frac{30669}{1280} & ; & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1889}{80} & ; & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{48} & \frac{3}{64} & \frac{30509}{1280} & ; & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{8} & \frac{243}{10} & ; & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

olarak hesaplanır.

Koşulların matris formu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_0; \lambda_0 \\ \mathbf{U}_1; \lambda_1 \\ \mathbf{U}_2; \lambda_2 \\ \mathbf{U}_3; \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{4} & -8 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 24 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -36 & ; & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

şeklinde yazılır.

Yönteme göre (4. 9) arttırılmış matrisinde 4 satır silinir ve yerine (4. 10) arttırılmış matrisi yazılırsa

$$[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{3}{8} & \frac{253}{10} & ; & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{4} & -8 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -36 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 24 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Bu matrisin çözümünden bilinmeyen Abel polinom katsayıları

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Abel katsayılarına göre (4. 7) $y_4(x)$ çözümü

$$y_4(x) = (0)A_0(x) + (1)A_1(x) + (0)A_2(x) + (0)A_3(x) + (0)A_4(x)$$

şeklinde olup bu çözüme Abel fonksiyonları yazılırsa ve çözüm $y_4(x)=x$ olarak elde edilir. Elde edilen çözüm (4. 6) homojen olmayan 4. mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denkleminin $N = 4$ için tam çözümüdür.

ÖRNEK 4.3

$$y''(x) + x^2 y'(x) = -1 - \cos x - x^2 \sin x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) dt, \quad (0 \leq x, t \leq \frac{\pi}{2}) \quad (4.11)$$

$y(0) = 1, y'(0) = 0$ karışık koşulları ile verilen homojen olmayan 2. mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemi verilmiştir. Bu denklemin tam çözümü $y(x)=\cos(x)$ tir.

Tablo 1’de (4.11) denkleminin tam çözümünün , $y_N(x)$ Abel polinom çözümünün $N = 2,3$ için değerleri verilmiştir. Tablo 2’de $N = 2,3$ değerleri için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonunun tablo değerleri verilmiştir.

Tablo 1. Tam çözüm $y(x) = \cos(x)$ ve $N=2, 3$ değerleri için $y_N(x)$ Abel polinom çözümleri

x_i	$y(x_i)$	$y_2(x_i)$	$y_3(x_i)$
0	1.0	1.0	1.0
$\pi/20$	0.987688341	0.985043641	0.987485215
$\pi/10$	0.951056516	0.940174564	0.950605943
$3\pi/20$	0.891006524	0.865392768	0.890359811
$\pi/5$	0.809016994	0.760698255	0.807744447
$\pi/4$	0.707106781	0.626091024	0.703757476
$3\pi/10$	0.587785252	0.461571074	0.579396525
$7\pi/20$	0.453990500	0.267138406	0.435659221
$2\pi/5$	0.309016994	0.0427930202	0.273543191
$9\pi/20$	0.156434465	-0.211465084	0.0940460619
$\pi/2$	0.0	-0.495635906	-0.101834541

Tablo 2. $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonunun $N=2, 3$ için değerleri

x_i	$N=2$ için $ e_2(x_i) $	$N=3$ için $ e_3(x_i) $
0	0.0	0.0
$\pi/20$	2.64469965e-03	2.03126e-04
$\pi/10$	1.08819525e-02	4.50573e-04
$3\pi/20$	2.56137557e-02	6.46713e-04
$\pi/5$	4.83187393e-02	1.272547e-03
$\pi/4$	8.10157577e-02	3.349305e-03
$3\pi/10$	0.126214178	8.388727e-03
$7\pi/20$	0.186852094	1.8331279e-02
$2\pi/5$	0.266223974	3.5473803e-02
$9\pi/20$	0.367899549	6.23884031e-02
$\pi/2$	0.495635906	1.01834541e-01

ÖRNEK 4. 4 Bu örnekte $y(0) = 0, y'(0) = 1$ ve $y''(0) = 0$ başlangıç koşulları ile verilen

$$y'''(x) - y'(x) = 2x(\cos 1 - \sin 1) - 2\cos x + \int_{-1}^1 xty(t)dt, \quad (4.12)$$

homojen olmayan 3. mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemi verilmiştir [44]. Bu denklemin tam çözümü $y(x) = \sin x$ 'tir.

Tablo 3'te (4. 12) denkleminin tam çözümünün, $y_N(x)$ Abel polinom çözümünün

$N = 2, 3, 4$ için değerleri verilmiştir. Tablo 4'te $N = 2, 3, 4$ değerleri için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonunun tablo değerleri verilmiştir.

Tablo 3. $N= 2, 3, 4$ değerleri için $y_N(x)$ Abel polinom çözümleri ile $y(x)= \sin x$ tam çözümünün karşılaştırılması

x_i	$y(x_i)$	$y_2(x_i)$	$y_3(x_i)$	$y_4(x_i)$
-1	-0.841470985	0	-0.509803922	-0.970452695
-0.8	-0.717356091	-0.16	-0.549019608	-0.785146120
-0.6	-0.564642473	-0.24	-0.494117647	-0.593849256
-0.4	-0.389418342	-0.24	-0.368627451	-0.398211850
-0.2	-0.198669331	-0.16	-0.196078431	-0.199780768
0	0.0	0	0.0	0.0
0.2	0.198669331	0.24	0.196078431	0.199789341
0.4	0.389418342	0.56	0.368627451	0.398349020
0.6	0.564642473	0.96	0.494117647	0.594543679
0.8	0.717356091	1.44	0.549019608	0.787340840
1	0.841470985	2	0.509803922	0.975810897

Tablo 4. $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonunun $N=2, 3, 4$ değerleri için karşılaştırılması

x_i	N=2iin $ e_2(x_i) $	N=3 için $ e_3(x_i) $	N=4 için $ e_4(x_i) $
-1	0.841470985	3.31667063e-01	1.28981710e-01
-0.8	0.557356091	1.68336483e-01	6. 77900288e-02
-0.6	0.324642473	7. 05248263e-02	2.9206783e-02
-0.4	0.149418342	2. 07908913e-02	8. 79350765e-03
-0.2	3. 86693308e-02	2. 59089942e-03	1. 11143701e-03
0	0.0	0.0	0.0
0.2	4. 13306692e-02	2. 59089942e-03	1. 12001014e-03
0.4	0.170581658	2. 07908913e-02	8. 93067764e-03
0.6	0.395357527	7. 05248263e-02	2. 99012061e-02
0.8	0.722643909	1.68336483e-01	6. 99847486e-02
1	1. 15852902	3.31667063e-01	1.34339913e-01

ÖRNEK 4. 5 Bu örnekte

$$y'''(x) = \sin x - x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xty'(t)dt, \quad 0 \leq x, t \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.13)$$

$y(0) = 1, y'(0) = 0$ ve $y''(0) = -1$ başlangıç koşulları ile verilen homojen olmayan 3. mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemi incelenmiştir [45]. Bu denklemin tam çözüümü $y(x) = \cos(x)$ tir.

Tablo 5'te (4.13) denkleminin tam çözüümünün $y_N(x)$ Abel polinom çözüümünün $N = 3, 4$ için değerleri verilmiştir. Tablo 6'da $N = 3, 4$ değerleri için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonunun tablo değerleri verilmiştir.

Tablo 5. Tam çözüm $y(x)=\cos(x)$ ve $N=3,4$ değerleri için $y_N(x)$ Abel polinom çözümleri

x_i	$y(x_i)$	$y_3(x_i)$	$y_4(x_i)$
0	1.0	1.0	1.0
$\pi/20$	0.987688341	0.987662994	0.987688318
$\pi/10$	0.951056516	0.950651978	0.951057162
$3\pi/20$	0.891006524	0.88896695	0.891018195
$\pi/5$	0.809016994	0.802607912	0.809090856
$\pi/4$	0.707106781	0.691574862	0.707402363
$3\pi/10$	0.587785252	0.555867802	0.588687707
$7\pi/20$	0.453990500	0.39548673	0.456289657
$2\pi/5$	0.309016994	0.210431648	0.314158756
$9\pi/20$	0.156434465	0.000702554390	0.166853325
$\pi/2$	0.0	-0.23370055	0.0195394593

Tablo 6. $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonunun $N=3,4$ değerleri için karşılaştırılması

x_i	$N=3$ için $ e_3(x_i) $	$N=4$ için $ e_4(x_i) $
0	0.0	0.0
$\pi/20$	2. 53460965e-05	2. 20955526e-08
$\pi/10$	4. 04538301e-04	6. 45714549e-07
$3\pi/20$	2. 0395737e-03	1. 16703761e-05
$\pi/5$	6. 40908240e-03	7. 38618457e-05
$\pi/4$	1. 55319187e-02	2. 95581871e-04
$3\pi/10$	3. 19174503e-02	9. 02454886e-04
$7\pi/20$	5. 85037693e-02	2. 29915697e-03
$2\pi/5$	9. 85853465e-02	5. 14176142e-03
$9\pi/20$	0.155731911	1. 04188596e-02
$\pi/2$	0.23370055	1. 95394593e-02

ÖRNEK 4.6 Son olarak

$$3y'''(x) - 2y''(x) = -e^x - e + 1 - \int_0^1 y(t)dt, \quad 0 \leq x, t \leq 1 \quad (4.14)$$

$y(0) = y'(0) = y''(0) = -1$ başlangıç koşulu ile birlikte homojen olmayan üçüncü mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemi verilmiştir. Bu denklemin tam çözümü $y(x) = -e^x$ 'tir.

Tablo 7'de (4. 14) denkleminin $y(x) = -e^x$ tam çözümünün, $y_N(x)$ Abel polinom çözümünün $N = 4, 6, 8$ için değerleri verilmiştir. Tablo 8' de $N = 4, 6, 8$ değerleri için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonunun tablo değerleri verilmiştir.

Tablo 7. N= 4,6,8 değerleri için $y_N(x)$ Abel polinom çözümleri ile $y(x) = -e^x$ tam çözümünün karşılaştırılması

x_i	$y(x_i)$	$y_4(x_i)$	$y_6(x_i)$	$y_8(x_i)$
0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0
0.1	-1. 10517092	-1. 10504491	-1. 10517102	-1. 10517092
0.2	-1. 22140276	-1. 22043477	-1. 22140421	-1. 22140276
0.3	-1. 34985881	-1. 34672213	-1. 34986509	-1. 34985881
0.4	-1. 49182470	-1. 48468599	-1. 49184153	-1. 4918247
0.5	-1. 64872127	-1. 63533183	-1. 64875601	-1. 64872128
0.6	-1. 8221188	-1. 79989159	-1. 82217971	-1. 82211881
0.7	-2. 01375271	-1. 97982368	-2. 01384838	-2. 01375272
0.8	-2. 22554093	-2. 17681296	-2. 22568007	-2. 22554095
0.9	-2. 45960311	-2. 39277078	-2. 45979473	-2. 45960314
1	-2. 71828183	-2. 62983495	-2. 71853555	-2. 71828186

Tablo 8. $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonunun $N=4,6,8$ değerleri için karşılaştırılması

x_i	N=4 için $ e_4(x_i) $	N=6 için $ e_6(x_i) $	N=8 için $ e_8(x_i) $
0	0.0	0.0	0.0
0.1	1. 26007799e-04	1. 04762642e-07	9. 72086192e-10
0.2	9. 67986843e-04	1. 45429993e-06	2. 12621283e-09
0.3	3. 13668029e-03	6. 27941105e-06	3. 49611034e-09
0.4	7. 13870979e-03	1. 68277073e-05	5. 20741522e-09
0.5	1. 33894425e-02	3. 47420266e-05	7. 89429295e-09
0.6	2. 22272113e-02	6. 09142545e-05	1. 204994e-08
0.7	3. 39290307e-02	9. 56722316e-05	1. 71263135e-08
0.8	4. 87279656e-02	1. 39142457e-04	2. 18946218e-08
0.9	6. 68323262e-02	1. 91614756e-04	2. 6700093e-08
1	8. 84468830e-02	2. 53716801e-04	3. 56267548e-08

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin karışık koşullar altındaki yaklaşık çözümleri için Abel matris yöntemine yer verilmiştir. Birinci bölümde diferansiyel denklemlere ve bu denklemlerin tarihçesine, diferansiyel denklemler teorisinin gelişimine, hangi dallarda problemleri temsil etmek için matematik modeller olarak diferansiyel denklemlerin kullanıldığına, integral denklemlere, integral denklemlerin nerelerde kullanıldığına, integro-diferansiyel denklemlere, integro-diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan metotlara yer verilmiştir. İkinci bölümde Niels Henrik Abel ve bu kişinin matematiğe katkılarından, Abel polinomundan, Abel polinomunun temel matris özelliklerinden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak amacıyla geliştirilen Abel polinomuna ve sıralama noktalarına bağlı matris yöntemi anlatılmıştır. Hata analizinde $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu kullanılmıştır. Yöntemin doğruluğunu ve uygulanabilirliğini inceleyebilmek için lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin Abel polinomu ile yaklaşık çözümleri ile ilgili örneklerle yer verilmiştir. Elde edilen sonuçlar tablolar ile karşılaştırılmıştır. Belirtilen tablolarda; örneklerdeki Fredholm integro-diferansiyel denklemler için N 'nin (serinin kesme sınırının) çeşitli değerleri için Abel polinom çözümleri ile tam çözümlerinin karşılaştırılması ve $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması gösterilmiştir. Sonuçta, Abel matris yönteminin uygulanabilirliği görülmüştür. Buna göre incelenen yöntem, Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini araştırmak için etkili bir yöntem olmuştur.

Bu çalışmada Abel matris yöntemi lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Bu yöntem lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlere, lineer olmayan integro-diferansiyel denklemlere ve denklem sistemlerine genişletilebilir olması açısından önemlidir.

KAYNAKLAR

- [1] Archibald, T., Fraser, C. Grattan- Guinness, I. The History of Differential Equations. Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach. 2004, 2729 – 2794.
- [2] Sezer, M., Daşcıoğlu, A. Diferansiyel Denklemler 1 Teori ve Problem Çözümleri. Dora Yayınları, Bursa, 2010.
- [3] Boyce, W., DiPrima, R. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems Sixth Edition. Barbara Holland, Tracey Kuehn, Sigmund Malinowski, John Wiley & Sons, Inc., New York, Chichester, Toronto, Brisbane, Singapore, 1997, 749 s.
- [4] Sezer, M., Daşcıoğlu, A. Diferansiyel Denklemler 2 Teori ve Problem Çözümleri. Dora Yayınları, Bursa, 2017, 320 s.
- [5] Esuabana, I., Abasiokwere, A., Moffat, I. Solution Methods For Integral Equations - A Survey. Journal of Mathematics and Computer Science. 2020,10(6), 3109-3142.
- [6] Hackbusch, W. Integral Equations Theory and Numerical Treatment. Ed. : K.- H. Hoffmann, D. Mittelman, R. J. Leveque, R. E. Bank, J. Todd, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, Switzerland, USA, 1995, 362 s.
- [7] Wazwaz, A. M. Second Edition A First Course In Integral Equations, World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Beijing, Shanghai, Hong Kong, Taipei, Chennai, USA, 2015, 330 s.
- [8] Aksoy, Y. İntegral Denklemler Cilt 1. Yıldız Üniversitesi Yayınları, İstanbul, 1983, 166 s.
- [9] Ahmed, S., Elzaki, T. On the comparative study integro-Differential equations using difference numerical methods. Journal of King Saud University-Science. 2020, 32 (1), 84- 89.
- [10] Alao, S., Akinboro, F., Akinpelu, F., Oderinu, R. Numerical Solution of Integro-Differential Equation Using Adomian Decomposition and Variational Iteration Methods. IOSR Journal of Mathematics. 2014, 10 (4), 18-22.
- [11] Bichi, S.L., Lawal, L.H., Lawan, S.M., Bello, M.Y. Direct-homotopy analysis for solving fredholm integro-differential equations. 2018, 1123, 012036, 1-10.
- [12] Chen, J., He, M., Huang, Y. A fast multiscale Galerkin method for solving second order linear Fredholm integro-differential equation with Dirichlet boundary conditions. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2020, 364, 1-11.
- [13] Nik, H. S., Effati, S., Motsa, S., Shirazian M. Spectral homotopy analysis method and its convergence for solving a class of nonlinear optimal control problems. Numerical Algorithms. 2014, 65(1), 171-194.
- [14] Adibi, H., Assari, P. Chebyshev Wavelet Method for Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind. Mathematical Problems in Engineering. 2010, 1-18.
- [15] Savasaneril, N., Sezer, M. Laguerre polynomial solution of high- order linear Fredholm integro- differential equations. New Trends in Mathematical Sciences. 2016, 4(2), 273-284.

- [16] Yüzbaşı, Ş., Şahin N., Sezer, M. Numerical solutions of systems of linear Fredholm integro-differential equations with Bessel polynomial bases. *Computers & Mathematics with Applications*. 2011, 61(10), 3079- 3096.
- [17] Jaradat, H., Alsayyed, O., Al-Shara, S. Numerical Solution of Linear Integro-Differential Equations. *Journal of Mathematics and Statistics*. 2008, 4 (4), 250-254.
- [18] Wazwaz, A. A reliable algorithm for solving boundary value problems for higher-order integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2001, 118, 327-342.
- [19] Engin, T., Çengel, Y. *Mühendisler İçin Diferansiyel Denklemler*. Sakarya, 2008, 168 s.
- [20] Reihani, M., Abadi Z. Rationalized Haar functions method for solving Fredholm and Volterra integral equations. *Journal of Computational Applied Mathematics*. 2007, 200, 12– 20.
- [21] Kurt, N., Sezer, M. Polynomial solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations with constant coefficients. *Journal of the Franklin Institute*. 2008,345(8), 839-850.
- [22] Baykus, N., Sezer, M. Solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations with piecewise intervals. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2011, 27(5),1327-1339.
- [23] Elmacı, D., Baykuş Savaşaneril, N. Euler polynomials method for solving linear integro differential equations. *New Trends in Mathematical Sciences*. 2021, 9(3), 21-34.
- [24] Elmacı, D., Baykuş Savaşaneril, N. Delay integro differential equations solutions with Euler polynomials method. *New Trends in Mathematical Sciences*. 2021, 9(3), 7-20.
- [25] Gümgüm, S., Baykuş Savaşaneril, N., Kürkçü, Ö.K., Sezer, M. A numerical technique based on Lucas polynomials together with standard and Chebyshev-Lobatto collocation points for solving functional integro-differential equations involving variable delays. *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*. 2018, 22(6), 1-7.
- [26] Yalçınbaş, S., Erdem, K. A new approximation method for the systems of nonlinear fredholm integral equations. *Applied Mathematics and Physics*. 2014, 2(2), 40-48.
- [27] Erdem Bicer, K., Sezer, M. A computational method for solving differential equations with quadratic nonlinearity by using Bernoulli polynomials. *Thermal Science*, 2019, 23(1), 275-283.
- [28] Erdem Biçer, K., Sezer, M., Kazaz, M. Numerical Solutions of System of First Order Normalized Linear Differential Equations by Using Bernoulli Matrix Method. *Celal Bayar University Journal of Science*. 2021, 17(2), 153-158.
- [29] Erdem Biçer, K., Sezer, M. Bernoulli matrix-collocation method for solving general functional integro-differential equations with hybrid delays. *Journal of Inequalities and Special Functions*. 2017, 8(3), 85-99.
- [30] Erdem, K., Yalçınbaş, S., Sezer, M. A Bernoulli polynomial approach with residual correction for solving mixed linear Fredholm integro-diferential-difference

- equations, *Journal of Difference Equations and Applications*. 2013, 19(10), 1619-1631.
- [31] Bronson, R., Costa, G. *Schaum's Outlines Differential Equations Third Edition*. McGraw-Hill Education, New York, 2003. 385 s.
- [32] Yaşar, İ. B. *Uygulamalı Matematik (İntegral Dönüşümleri ve Uygulamaları)*. Siyasal Kitabevi, Ankara, 2005, 289 s.
- [33] Sørensen, H. Abel and his mathematics in contexts. *NTM International Journal of History & Ethics of Natural Sciences, Technology & Medicine*. 2002, 10, 137-155.
- [34] Laudal, O. A., Piene, R. *The Legacy of Niels Henrik Abel: The Abel Bicentennial*, Oslo, Norveç, 2002, 784 s.
- [35] Coşkun, A. 26 Yaşında Hayata Veda Eden Deha Niels Henrik Abel. *Bilim ve Teknik*. 2010, 104-106.
- [36] Ore, è. *Niels Henrik Abel*. Prabhat Prakashan, 1954, 317 s.
- [37] Podlubny, I., Magin, R., Trymorush, I. *Niels Henrik Abel and the Birth of Fractional Calculus*. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2018, 1-9.
- [38] Houzel, C. *The Work of Niels Henrik Abel*. *The Legacy of Niels Henrik Abel*. 2004, 21-177.
- [39] Kruchinin, D. V., Kruchinin, V. V. Application of a composition of generating functions for obtaining explicit formulas of polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2013, 404 (2013) , 161-171.
- [40] Riordan, J. *Combinatorial Identities*. New York: Wiley, p. 18, 1979.
- [41] Roman, S. *The Umbral Calculus*. Springer, New York, 2005.
- [42] Güleç, İ. , Sezer, M., Baykuş Savaşaneril, N. , A Numerical Approach Based on Abel Polynomials for Solving Nonlinear Duffing Differential Equations, 2nd International Students Science Congress, 4-5 Mayıs, 2018, İzmir, (Bildiriler Kitabı, 115-122).
- [43] Bülbül, B. , Sezer, M. Numerical solution of Duffing Equation by using an improved Taylor Matrix Method. *Journal of Applied Mathematics*. 2013 (2013), 1-7.
- [44] Yalçınbaş, S. , Sezer, M. , Sorkun, H. H. Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2009, 210(2), 334-349.
- [45] Darania, P. , Ebadian, A. A method for the numerical solution of the integro - differential equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2007, 188 (1), 657-668.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Bihter ERGÜL

Yabancı Dili : İngilizce, Almanca

Eğitim Durumu

Lise : Selma Yiğitalp Lisesi (Ağırlıklı Yabancı Dil-İngilizce),2000

Lisans : 19 Mayıs Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2004

Yüksek Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, devam ediyor

Mesleki Deneyim

Toplum Gönüllüleri Eğitim Merkezi Samsun (Matematik Öğretmeni) 03.2008-06.2008

Nevvar Salih İşgören Eğitim Kampüsü Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi İzmir (Matematik Öğretmenliği) 11.2010-06.2011

Final Dergisi Dershaneleri Alsancak/İzmir (Stajyer Geometri Öğretmenliği) 08.2012-07.2013

Sınav Dergisi Dershaneleri (Özel Tek Ada Temel Lisesi) İzmir (Matematik ve Geometri Öğretmenliği) 08.2013-10.2015

Matematiksel Eğitim Hizmetleri İzmir (Matematik ve Geometri Öğretmenliği) 02.2016-06.2016