



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**YÜKSEK MERTEBEDEN GRAVİTASYON TEORİLERİNDE
DİNAMİK SİSTEM ANALİZİ**

Ali Osman YILMAZ

Fizik Anabilim Dalı

Matematiksel Fizik Programı

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ

Aralık, 2021

İSTANBUL

Bu çalışma 17.12.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı Matematiksel Fizik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Değer SOFUOĞLU
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Sezgin AYGÜN
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneliği olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans ve tez sürecimde benden desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, kendisiyle çalışmayı büyük bir şans olarak gördüğüm değerli hocam Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ'ye ve her koşulda beni destekleyip motive eden sevgili eşim Bahar BAYKARA YILMAZ'a çok teşekkür ediyorum.

Aralık, 2021

Ali Osman YILMAZ



İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİL LİSTESİ	ix
TABLO LİSTESİ	xi
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	xiii
ÖZET	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	4
2.1. DİNAMİK SİSTEMLER TEORİSİ	4
2.1.1. Lineer Kararlılık Analizi	5
2.1.2. Denge Noktalarının Kararlılığı	6
2.1.3. Durum Uzayı	8
2.2. KOZMOLOJİ	10
2.2.1. Genel Görelilik Teorisi	10
2.2.1.1. Tansörler	11
2.2.1.2. Metrik Tansör	13
2.2.1.3. Christoffel Sembolleri	13
2.2.1.4. Kovaryant Türev	14
2.2.1.5. Riemann Eğrilik Tansörü	15
2.2.1.6. Enerji Momentum Tansörü	16
2.2.1.7. Einstein Alan Denklemleri	17
2.2.2. Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) Modelleri	17
2.2.2.1. RW (Robertson Walker) Metriği	17
2.2.2.2. Mükemmel Akışkan	18
2.2.2.3. Karanlık Bileşenler	19
2.2.2.4. Chaplygin Gazı	19

2.2.2.5. Kozmolojik Denklemler	20
3. MALZEME VE YÖNTEM	22
3.1. FLRW MODELLERİ İÇİN DİNAMİK SİSTEM	22
3.1.1. Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için Dinamik Sistem	22
3.1.2. Modifiye Chaplygin Gazı için Dinamik Sistem	24
4. BULGULAR	26
4.1. LİNEER BAROTROPİK MÜKEMMEL AKIŞKAN İÇİN DİNAMİK SİSTEM ANALİZİ	27
4.1.1. $\gamma = 0$ durumu	28
4.1.2. $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumu	32
4.1.3. $\gamma = \frac{2}{3}$ durumu	36
4.1.4. $\frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ durumu	40
4.2. MODİFİYE CHAPLYGIN GAZI İÇİN DİNAMİK SİSTEM ANALİZİ	44
4.2.1. $\gamma = 0$ durumu	48
4.2.2. $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumu	48
4.2.3. $\gamma = \frac{2}{3}$ durumu	53
4.2.4. $\frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ durumu	56
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	62
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	67

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

- Şekil 4.1:** Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $\gamma = 0$ durumunda durum uzayları (a) 3 boyutlu durum uzayı, z eksenini H'ye denk gelmektedir ve yörüngeler geçmiş çekicilerine göre renklendirilmiştir. (b) Durum uzayının projeksiyonu, grafik altta ve üstte sırasıyla $\Omega_\Lambda = 0$ ve $\Omega = 0$ alt manifoldları ile sınırlanmıştır (c) $\Omega = 0$ ve $\Omega_\Lambda = 0$ alt manifoldları (d) $k = 0$ alt manifoldu. Grafiklerdeki siyah noktalar çözüm noktalarını göstermekte ve F, M ve dS sırasıyla düz Friedmann çözümlerini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, k = 0, H = \text{Sabit}$), Milne çözümünü ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, k = -1, H = 0$) ve de Sitter çözümlerini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, k = 0, H = \text{Sabit}$) temsil etmektedir. (c)'de, okların rengi ivmenin büyüklüğüne göre koyulaşmaktadır. 31
- Şekil 4.2:** Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $\gamma = 0$ durumunda modellerin evrim grafiği. K0 düz modelleri ($k = 0$), M ise Milne modelini temsil etmektedir. 31
- Şekil 4.3:** Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $0 < \gamma < 2/3$ durumunda durum uzayları (a) 3 boyutlu durum uzayı, z eksenini H'ye denk gelmektedir ve yörüngeler geçmiş çekicilerine göre renklendirilmiştir. (b) Durum uzayının projeksiyonu, grafik altta ve üstte sırasıyla $\Omega_\Lambda = 0$ ve $\Omega = 0$ alt manifoldları ile sınırlanmıştır (c) $\Omega = 0$ ve $\Omega_\Lambda = 0$ alt manifoldları (d) $k = 0$ alt manifoldu. Grafiklerdeki siyah noktalar çözüm noktalarını göstermekte ve F, M ve dS sırasıyla düz Friedmann çözümünü ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, k = 0, H = \text{Sabit}$), Milne çözümünü ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, k = -1, H = 0$) ve de Sitter çözümlerini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, k = 0, H = \text{Sabit}$) temsil etmektedir. (c) ve (d)'de, okların rengi ivmenin büyüklüğüne göre koyulaşmaktadır. 35
- Şekil 4.4:** Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumunda modellerin evrim grafiği. F, M ve dS sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, k = 0$), Milne modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, k = -1$) ve de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, k = 0, H = \text{Sabit}$) temsil etmektedir. 36
- Şekil 4.5:** Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $\gamma = 2/3$ durumunda durum uzayları (a) 3 boyutlu durum uzayı, z eksenini H'ye denk gelmektedir ve yörüngeler geçmiş çekicilerine göre renklendirilmiştir. (b) Durum uzayının projeksiyonu, grafik altta ve üstte sırasıyla $\Omega_\Lambda = 0$ ve $\Omega = 0$ alt manifoldları ile sınırlanmıştır (c) $\Omega = 0$ ve $\Omega_\Lambda = 0$ alt manifoldları (d) $k = 0$ alt manifoldu. Grafiklerdeki siyah noktalar çözüm noktalarını göstermekte ve F, M, dS ve E sırasıyla düz Friedmann çözümünü ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, k = 0, H = 0$), Milne çözümünü ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, k = -1, H = 0$), de Sitter çözümlerini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, k = 0, H = \text{Sabit}$) ve Einstein statik çözümünü ($H = 0, H' = 0$) temsil etmektedir. (c) ve (d)'de, okların rengi ivmenin büyüklüğüne göre koyulaşmaktadır. 39
- Şekil 4.6:** Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $\gamma = \frac{2}{3}$ durumunda modellerin evrim grafiği. dS, de Sitter modelini; $\Lambda 0$ ise kozmolojik sabiti olmayan modelleri ($\Omega_\Lambda = 0$) temsil etmektedir. 40

Şekil 4.7: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $2/3 < \gamma \leq 2$ durumunda durum uzayları (a) 3 boyutlu durum uzayı, z eksenine H'ye denk gelmektedir ve yörüngeler geçmiş çekicilerine göre renklendirilmiştir. (b) Durum uzayının projeksiyonu, grafik altta ve üstte sırasıyla $\Omega_\Lambda = 0$ ve $\Omega = 0$ alt manifoldları ile sınırlanmıştır (c) $\Omega = 0$ ve $\Omega_\Lambda = 0$ alt manifoldları (d) $k = 0$ alt manifoldu. Grafiklerdeki siyah noktalar çözüm noktalarını göstermekte ve F, M ve dS sırasıyla düz Friedmann çözümünü ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, k = 0, H = 0$) Sabit), Milne çözümünü ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, k = -1, H = 0$) ve de Sitter çözümlerini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, k = 0, H = \text{Sabit}$) temsil etmektedir. (c) ve (d)'de, okların rengi ivmenin büyüklüğüne göre koyulaşmaktadır. 43

Şekil 4.8: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $\frac{2}{3} < \gamma < 2$ durumunda modellerin evrim grafiği. F, M, dS ve E sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, k = 0$), Milne modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, k = -1$), de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, k = 0, H = \text{Sabit}$) ve Einstein statik modelini ($H = 0, H' = 0$) temsil etmektedir. 44

Şekil 4.9: Modifiye Chaplygin Gazı için $\alpha = 1$ ve $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumunda durum uzayı. Burada noktalar çözümleri temsil ederken F, M, dS, CH ve CD sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = 0$), Milne modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = -1$), de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, \Omega_A = 0, k = 0$), Chaplygin Gaz modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = \alpha^{+1/\gamma}, k = 0$) ve Chaplygin-de Sitter çözüm çizgisini ($\Omega = \Omega, \Omega_\Lambda = 1 - \Omega, \Omega_A = \alpha^{+1/\gamma}\Omega, k = 0$) gösterir. z eksenine durum uzayının tümü için Ω_A 'ya denk gelmekte ve ortadaki $k = +1$ bölgesinde dikey ve yatay eksenler sırasıyla Ω ve Q 'yu gösterirken yan bölgelerdeki piramit şeklindeki $k = -1$ bölgelerinde M-F ve M-dS çizgileri Ω ve Ω_Λ eksenlerine denk gelmektedir. Durum uzayının sağ bölgesi genişleyen sol bölgesi ise büzüşen evrenleri temsil eder. Çözüm noktalarını gösteren harflerin altlarındaki indisler Hubble parametresinin o noktadaki işaretine referans verirken yörüngeler kırmızıdan başlayıp siyaha doğru gitmektedir. (MATLAB ver. R2019b) 51

Şekil 4.10: Modifiye Chaplygin Gazı için $\alpha = 1$ ve $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumunda durum uzayını sınırlandıran alt manifoldlar. Burada noktalar çözümleri temsil ederken F, M, dS, CH ve CD sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = 0$), Milne modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = -1$), de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, \Omega_A = 0, k = 0$), Chaplygin Gaz modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = \alpha^{+1/\gamma}, k = 0$) ve Chaplygin-de Sitter çözüm çizgisini ($\Omega = \Omega, \Omega_\Lambda = 1 - \Omega, \Omega_A = \alpha^{+1/\gamma}\Omega, k = 0$) gösterir. Yörüngeler kırmızıdan başlayıp siyaha doğru gitmektedir. (MATLAB ver. R2019b) 52

Şekil 4.11: Modifiye Chaplygin Gazı için Düz ($k = 0$) Alt Manifold. Bu manifold γ ve α 'nın değerlerinden bağımsızdır. Burada noktalar çözümleri temsil ederken F, dS, CH ve CD sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = 0$), de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, \Omega_A = 0, k = 0$), Chaplygin Gaz modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = \alpha^{+1/\gamma}, k = 0$) ve Chaplygin-de Sitter çözüm çizgisini ($\Omega = \Omega, \Omega_\Lambda = 1 - \Omega, \Omega_A = \alpha^{+1/\gamma}\Omega, k = 0$) gösterir. Yörüngeler kırmızıdan başlayıp siyaha doğru gitmektedir. (MATLAB ver. R2019b) 52

Şekil 4.12: Modifiye Chaplygin Gazı için $\alpha = 1$ ve $\gamma = \frac{2}{3}$ durumunda durum uzayı. Burada noktalar çözümleri temsil ederken F, M, dS, E, CH ve CD sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = 0$), Milne modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = -1$), de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, \Omega_A = 0, k = 0$), Einstein statik çözüm eğrisini ($H = 0, H' = 0$), Chaplygin Gaz modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = \alpha+1\sqrt{\gamma}, k = 0$) ve Chaplygin-de Sitter çözüm çizgisini ($\Omega = \Omega, \Omega_\Lambda = 1 - \Omega, \Omega_A = \alpha+1\sqrt{\gamma}\Omega, k = 0$) gösterirken M, F, E çözümlerini de içeren denge noktaları $\Lambda A0$ ($\Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0$) çözüm çizgisini oluşturmaktadır. z eksenini durum uzayının tümü için Ω_A 'ya denk gelmekte ve ortadaki $k = +1$ bölgesinde dikey ve yatay eksenler sırasıyla Ω ve Q 'yu gösterirken yan bölgelerdeki piramit şeklindeki $k = -1$ bölgelerinde M-F ve M-dS çizgileri Ω ve Ω_Λ eksenlerine denk gelmektedir. Durum uzayının sağ bölgesi genişleyen sol bölgesi ise büzüşen evrenleri temsil eder. Çözüm noktalarını gösteren harflerin altlarındaki indisler Hubble parametresinin o noktadaki işaretine referans verirken yörüngeler kırmızıdan başlayıp siyaha doğru gitmektedir. (MATLAB ver. R2019b) 55

Şekil 4.13: Modifiye Chaplygin Gazı için $\alpha = 1$ ve $\gamma = \frac{2}{3}$ durumunda durum uzayını sınırlandıran alt manifoldlar. Burada noktalar çözümleri temsil ederken F, M, dS, E, CH ve CD sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = 0$), Milne modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = -1$), de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, \Omega_A = 0, k = 0$), Einstein statik çözüm eğrisini ($H = 0, H' = 0$), Chaplygin Gaz modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = \alpha+1\sqrt{\gamma}, k = 0$) ve Chaplygin-de Sitter çözüm çizgisini ($\Omega = \Omega, \Omega_\Lambda = 1 - \Omega, \Omega_A = \alpha+1\sqrt{\gamma}\Omega, k = 0$) gösterirken M, F, E çözümlerini de içeren denge noktaları $\Lambda A0$ ($\Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0$) çözüm çizgilerini oluşturmaktadır. Yörüngeler kırmızıdan başlayıp siyaha doğru gitmektedir. (MATLAB ver. R2019b) 56

Şekil 4.14: Modifiye Chaplygin Gazı için $\alpha = 1$ ve $\frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ durumunda durum uzayı. Burada noktalar çözümleri temsil ederken F, M, dS, E, CH ve CD sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = 0$), Milne modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = -1$), de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, \Omega_A = 0, k = 0$), Einstein statik çözüm eğrisini ($H = 0, H' = 0$), Chaplygin Gaz modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = \alpha+1\sqrt{\gamma}, k = 0$) ve Chaplygin-de Sitter çözüm çizgisini ($\Omega = \Omega, \Omega_\Lambda = 1 - \Omega, \Omega_A = \alpha+1\sqrt{\gamma}\Omega, k = 0$) gösterir. z eksenini durum uzayının tümü için Ω_A 'ya denk gelmekte ve ortadaki $k = +1$ bölgesinde dikey ve yatay eksenler sırasıyla Ω ve Q 'yu gösterirken yan bölgelerdeki piramit şeklindeki $k = -1$ bölgelerinde M-F ve M-dS çizgileri Ω ve Ω_Λ eksenlerine denk gelmektedir. Durum uzayının sağ bölgesi genişleyen sol bölgesi ise büzüşen evrenleri temsil eder. Çözüm noktalarını gösteren harflerin altlarındaki indisler Hubble parametresinin o noktadaki işaretine referans verirken yörüngeler kırmızıdan başlayıp siyaha doğru gitmektedir. (MATLAB ver. R2019b) 60

Şekil 4.15: Modifiye Chaplygin Gazı için $\alpha = 1$ ve $\frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ durumunda durum uzayını sınırlandıran alt manifoldlar. Burada noktalar çözümleri temsil ederken F, M, dS, E, CH ve CD sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = 0$), Milne modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = -1$), de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, \Omega_A = 0, k = 0$), Einstein statik çözüm eğrisini ($H = 0, H' = 0$), Chaplygin Gaz modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = \alpha+1\sqrt{\gamma}, k = 0$) ve Chaplygin-de Sitter çözüm çizgisini ($\Omega = \Omega, \Omega_\Lambda = 1 - \Omega, \Omega_A = \alpha+1\sqrt{\gamma}\Omega, k = 0$) gösterir. Yörüngeler kırmızıdan başlayıp siyaha doğru gitmektedir. (MATLAB ver. R2019b) 61

TABLO LİSTESİ

	Sayfa No
Tablo 2.1: Hiperbolik Denge Noktalarının İki Boyuttaki Sınıflandırması	7
Tablo 2.2: Hiperbolik Denge Noktalarının Üç Boyuttaki Sınıflandırması	8
Tablo 4.1: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $k = 0, -1$ ve $\gamma = 0$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri	29
Tablo 4.2: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $k = +1$ ve $\gamma = 0$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri	30
Tablo 4.3: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $k = 0, -1$ ve $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri	34
Tablo 4.4: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $k = 0, +1$ ve $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri	34
Tablo 4.5: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $k = 0, -1$ ve $\gamma = \frac{2}{3}$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri	38
Tablo 4.6: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $k = 0, +1$ ve $\gamma = \frac{2}{3}$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri	38
Tablo 4.7: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $k = 0, -1$ ve $\frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri	42
Tablo 4.8: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $k = 0, +1$ ve $\frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri	42
Tablo 4.9: Modifiye Chaplygin Gazı için $k = 0, -1$ ve $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri	50
Tablo 4.10: Modifiye Chaplygin Gazı için $k = 0, +1$ ve $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri	51
Tablo 4.11: Modifiye Chaplygin Gazı için $k = 0, -1$ ve $\gamma = \frac{2}{3}$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri	54
Tablo 4.12: Modifiye Chaplygin Gazı için $k = 0, +1$ ve $\gamma = \frac{2}{3}$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri	54
Tablo 4.13: Modifiye Chaplygin Gazı için $k = 0, -1$ ve $\frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri	59

Tablo 4.14: Modifiye Chaplygin Gazı için $k = 0, +1$ ve $\frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri. Burada, $\xi = (\gamma\Omega^{\alpha+1} - \frac{2}{3}\Omega^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha+1}}$ ve $\Sigma = \sqrt{(3\gamma + 3\alpha\gamma - 2\alpha/\Omega + 1)}$ 'dir. 59



SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler

Açıklama

$R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$	: Riemann Eğrilik Tansörü
$R_{\alpha\beta}$	: Ricci Tansörü
R	: Uzay-Zamanın Skaler Eğriliği
$T_{\alpha\beta}$	: Enerji-Momentum Tansörü
$G_{\alpha\beta}$	: Einstein Tansörü
$g_{\alpha\beta}$	: Metrik Tansör
Λ	: Kozmolojik Sabit
H	: Hubble Parametresi
u^α	: Akışkanı Oluşturan Parçacıkların veya Gözlemcinin Dörtlü Hız Vektörü
$h_{\alpha\beta}$	: İzdüşüm Tansörü
q_α	: Enerji Akısı veya Momentum Yoğunluğu
p	: Eşyönlü Basınç
$\pi_{\alpha\beta}$	: Eşyönsüz Basınç
ds	: Yay Elemanı
$l(t)$	: FLRW Evreninin Ölçek Çarpanı
q	: Yavaşlama Parametresi
$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$	: Christoffel Sembolleri
3R	: Uzaysal Skaler Eğrilik

Kısaltmalar

Açıklama

dS	: de Sitter Modeli
F	: Düz Friedmann Modeli
M	: Milne Modeli
E	: Einstein Statik Modeli
$K0$	: Düz evren modelleri
CH	: Chaplygin Modeli
CD	: Chaplygin - de Sitter Modeli
$\Lambda 0$	: Kozmolojik Sabitsiz Modeller

$\Lambda A0$	: Kozmolojik Sabit ve Chaplygin Gazı İçermeyen Modeller
$FLRW$	: Friedmann-Lamaitre-Robertson-Walker
RW	: Robertson-Walker



ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÜKSEK MERTEBEDEN GRAVİTASYON TEORİLERİNDE DİNAMİK SİSTEM ANALİZİ

Ali Osman YILMAZ

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ

Bu tezde, RW metriği Einstein alan denklemlerinde kullanılarak evrim ve bağ denklemleri elde edildi. Bu denklemlerdeki basınç değişkeninin madde-enerji yoğunluğunun bir fonksiyonu olduğu kabul edildi ve bu koşulu sağlayan Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan ile Modifiye Chaplygin Gazı hal denklemleri ayrı ayrı kullanıldı. Bu evrim ve bağ denklemlerinden bir dinamik sistem elde edebilmek için boyutsuz değişkenler tanımlanarak denklemler boyutsuz hale getirildi. Dinamik sistemler oluşturulurken birer karanlık bileşen alternatifi olan Λ kozmolojik sabiti, efektif olarak kozmolojik sabite denk olan $\gamma = 0$ durumu ve Modifiye Chaplygin Gazı'nın evrende birlikte bulunabilecekleri kabul edildi. Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için sadece iki boyutlu kompakt bir durum uzayı kullanılabilecek olmasına rağmen grafikte üçüncü boyutu da kullanarak Hubble parametresi ile ilgili ekstra bilgi elde etmek için kompakt olmayan bir durum uzayı oluşturuldu ve iki boyut için oluşan kompakt durum uzayıyla birlikte verildi. Modifiye Chaplygin Gazı kullanıldığında ise birbirlerine kuple olan üç evrim denklemi olduğundan ve üç boyuttan fazlasını tek bir durum uzayında görselleştirmek mümkün olmadığından Hubble parametresi dışarda bırakıldı ve kompakt bir durum uzayı kullanıldı.

Bu dinamik sistemler incelendiğinde Hubble parametresine bir kısıtlama getirilmediğinde yani büzüşen ve genişleyen evren modellerinin her ikisinin de mümkün olduğu durumda kararlı bir denge noktası ya da bir çekicinin bulunmadığı, evrenin bir başlangıç ya da sona ihtiyaç duymadan bir modelden diğerine sürekli olarak evrilebildiği yani dinamik bir yapıya sahip olduğu görüldü.

Aralık, 2021, 65 sayfa.

Anahtar kelimeler: FLRW, Dinamik Sistemler, Chaplygin



SUMMARY

M.Sc. THESIS

DYNAMICAL SYSTEM ANALYSIS OF HIGH ORDER GRAVITATION THEORIES

Ali Osman YILMAZ

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Physics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ertan GÜDEKLİ

In this thesis, evolution and constraint equations are obtained by using RW metric in Einstein field equations. It is assumed that pressure variable is a function of matter-energy density and barotropic perfect fluid equation of state as well as Modified Chaplygin Gas equation of state are used separately. In order to obtain a dynamical system from these evolution and constraint equations, equations are made dimensionless by defining dimensionless variables. While creating the dynamical systems, it is assumed that Λ cosmological constant, Modified Chaplygin Gas and the $\gamma = 0$ state that is effectively equivalent to the cosmological constant, which are dark component candidates, could coexist in the universe. Although two-dimensional compact state space could be used for barotropic perfect fluid, in order to obtain extra information about Hubble parameter by using third dimension in the graphic, a noncompact state space is created and it is given alongside the two-dimensional compact state space. When using Modified Chaplygin Gas, Hubble parameter was left out and a compact state space is used, since there are three evolution equations coupled to each other and it is not possible to visualize more than three dimensions in a single state space.

When these dynamical systems are examined, unless a restriction is put on Hubble parameter, in other words when contracting and expanding universe models are both possible, it is seen that there is no stable equilibrium point or attractor and universe may continuously evolve from a model to another without the need for a beginning or an end, that is, it has a dynamic structure.

December, 2021, 65 pages.

Keywords: FLRW, Dynamical Systems, Chaplygin



1. GİRİŞ

A. Einstein ve W. de Sitter tarafından 1917 yılında sunulan ve Einstein'ın genel görelilik teorisine dayanan kozmolojik modeller, modern kozmolojinin temelini atmıştır. Genişleyen evren tasviri, A. Friedmann ve G. Lemaitre tarafından 1920'lerde sunulmuş ve E. Hubble'ın 1930'lardaki galaksilerin uzaklıkları ile orantılı olarak kızıla kaymalarının arttığı yolundaki gözlemleri ve Eddington'un Einstein statik modelinin kararsız olduğuna dair kanıtı ile önem kazanmıştır. 1940'lardan bu yana ise genişleyen evren modelleri; galaksi oluşumundan günümüze kadarki dönemi tasvir eden galaktik dönem, maddenin gaz olarak idealize edildiği galaktik öncesi dönem, evrenin ivmeli bir şekilde genişlediği kabul edilen enflasyonel dönem ve Planck zamanından önceki kuantum gravitasyon dönemi olmak üzere evrenin dört ayrı çağı için sistematik olarak incelenmektedir.

Evren genişliyor olmasının yanında genellikle uzayca homojen ve eşyönlü kabul edilir. Bu, dünyanın evrende özel bir konuma sahip olmadığını söyleyen Kopernik ilkesine dayanan teorik bir varsayımdır[1]. Buna göre, eğer biz evreni bulunduğumuz noktadan homojen olarak gözlüyorsak, evren her noktadan homojen olarak görünmelidir[2]. Uzaysal homojenliğe evrendeki galaksi dağılımı hakkındaki gözlemler; uzaysal eşyönlülüğe ise COBE uydusu aracılığıyla elde edilmiş kozmik mikrodalga arkaplan ışıması dayanak sunmaktadır [3–5].

İlk olarak henüz hiçbir gözlemsel ya da teorik dayanak olmadan varsayım olarak 1920'lerde Friedmann ve Lemaitre tarafından ele alınan uzaysal olarak homojen ve eşyönlü evren modelleri H. P. Robertson ve A. G. Walker tarafından geometrik bir zemine oturtulmuştur[6, 7]. Biz, evrimleri Einstein alan denklemleri tarafından kontrol edilen bu modeller için Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker(FLRW) evrenleri ismini kullanacağız. Standart varsayım, evrenin FLRW modeli olarak tasvir edilebileceği ve bu model etrafındaki pertürbasyonların galaksi ve diğer yapıların oluşumunu açıklamaya yeteceği yönündedir. Gözlemlerin bu varsayımı ne ölçüde gerekli kıldığı bir tartışma konusudur fakat FLRW modelleri geçmişte çok önemli öngörücülük özelliği göstermiş ve hem düşük kızıla kaymalarda Hubble kanununun keşfini sağlamış hem de evrenin büyük patlama ile başladığı düşüncesine yol açan kalıntı ışıının varlığını ve şiddetini öngörmüştür.

Dinamik sistemler teorisinin temelleri 19. yüzyılda Poincare'nin çalışmalarıyla atılmıştır[8]. Poincare, diferansiyel denklemin tam sonucunu bulmayı denemek yerine topolojik ve geometrik metotlar kullanılarak ve durum uzayındaki yörüngeler incelenerek tüm çözümlerin özelliklerinin belirlenebileceğini öne sürmüştür. Birkhoff ve diğer bilim insanları 1920'lerde bir diferansiyel denklemle ilişkilendirilen akış ve limit set kavramlarını sunarak dinamik sistemler teorisinin matematiksel gelişimini başlatmışlardır.

Uzaysal olarak homojen kozmolojilerin Einstein alan denklemleri, birinci dereceden otonom diferansiyel denklemler sistemi olarak yazılabilir. Çözüm eğrileri R^n 'i yörüngelere ayırır ve R^n 'de bir dinamik sistem tanımlar. Bu yaklaşım ilk olarak Collins tarafından kullanılmış ve sonrasında yoğun şekilde çalışılmıştır[9–15]. Bu çalışmalarda Einstein alan denklemlerini otonom bir dinamik sisteme çevirmek için değişken seçiminde büyük bir serbestlik olduğu görülmüş ve bu değişken seçiminin en çok benimsenenini ise Wainwright ve arkadaşları yapmıştır[16–18]. Bu seçimde fiziksel ve geometrik büyüklükler, Hubble parametresinin uygun kuvvetlerine bölünerek evrenin genişlemesine göre incelenir ve bu sayede hem boyutsuz değişkenler elde edilir hem de durum uzayı kompaktlaştırılmış olur. Bu değişkenlere genişlemeye normlanmış değişkenler denir ve yoğun biçimde kullanılmaktadırlar. Tezimizde biz de bu seçimi kullanacağız.

Dinamik sistemler teorisi, durum uzayı sonsuz boyutlu fonksiyon uzayları olan birinci dereceden otonom kısmi diferansiyel denklem sistemlerine de uygulanabilir, fakat bu konu sonlu boyutlu duruma göre hala gelişiminin başındadır[19–21]. Analitik olarak konunun ne kadar gelişim göstereceği henüz bilinmiyor ve nümerik metotların bu konuda çok büyük rol oynayacağı düşünülüyor olsa da bu fikirlerin Einstein alan denklemlerine uygulanması çalışmaları başlamıştır[22].

Literatürde dinamik sistemler teorisinin kozmolojideki kullanımıyla ilgili çok sayıda çalışma bulunmaktadır[23–28]. Bu çalışmalardaki genel yaklaşım, hal denklemini p ve μ 'nün sırasıyla basınç ve madde-enerji yoğunluğunu temsil ettiği ve γ 'nın bir parametre olduğu $p = (\gamma - 1)\mu$ şeklinde almaktır fakat son zamanlarda hal denklemi A 'nın pozitif bir sabit olduğu $p = -\frac{A}{\mu}$ şeklinde olan ve Chaplygin Gazı olarak anılan yeni bir akışkan modeli de gündeme gelmiştir[29]. Bu hal denklemi α 'nın bir parametre olduğu $p = -\frac{A}{\mu^\alpha}$ şekline genelleştirilmiş ve Genelleştirilmiş Chaplygin Gazı adını almış, daha sonra ise B 'nin pozitif bir sabit olduğu $p = B\mu - \frac{A}{\mu^\alpha}$ şekline dönüştürülmüş ve Modifiye Chaplygin Gazı olarak anılmaya

başlanmıştır[30–34]. Chaplygin Gazı, literatürde birçok çalışmaya konu olmuştur[35–41].

Biz, bu tezde hem $p = (\gamma - 1)\mu$ şeklindeki Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan hem de $p = (\gamma - 1)\mu - \frac{A}{\mu^\alpha}$ şeklindeki Modifiye Chaplygin Gazı hal denklemlerini kullanıyoruz. Modifiye Chaplygin Gazı'nın hal denklemi, görüleceği üzere $A = 0$ durumunda Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan, $\gamma = 1$ durumunda Genelleştirilmiş Chaplygin Gazı ve $\gamma = 1$, $\alpha = 1$ durumunda ise Chaplygin gazı hal denklemlerine dönüşmektedir[42, 43]. Dolayısıyla Modifiye Chaplygin Gazı'nın Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan ile Genelleştirilmiş Chaplygin Gazı'nın bir karışımı olduğu düşünülebilir. Tezimizde ayrıca Λ ile ifade edilen kozmolojik sabitin de var olduğunu ve negatif olmadığını kabul edeceğiz($\Lambda \geq 0$).

Tezimizin çalışma planı şu şekilde olacaktır:

Genel Kısımlar bölümünde Dinamik Sistemler Teorisi ve Einstein Alan Denklemleri ile bu denklemlerin dayandığı temel geometrik kavramları tezimizde kullanacağımız kadarıyla tanıtıyor ve FLRW modelleri çerçevesinde evrim ve bağ denklemlerinin nasıl elde edildiğini gösteriyoruz.

Malzeme ve Yöntem bölümünde, evrim ve bağ denklemlerini, tanımladığımız boyutsuz değişkenler ile nasıl boyutsuz hale getirdiğimizi ve bu denklemlerden bir dinamik sistem elde ettiğimizi gösteriyoruz.

Bulgular bölümünde, elde ettiğimiz dinamik sistemlerin davranışlarını gösteren ve Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan ile Modifiye Chaplygin Gazı için ayrı ayrı çizdirdiğimiz durum uzayları ile alt manifoldlarını sunuyor ve modellerin bu uzaylardaki davranışlarını detaylı bir biçimde inceliyoruz.

Tartışma ve Sonuç bölümünde ise yapılanların kısa bir değerlendirmesini sunuyoruz.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. DİNAMİK SİSTEMLER TEORİSİ

Dinamik sistem, bir uzaya (durum uzayı) ve bu uzaydaki her noktanın evrimini tanımlayan kurala sahip olan bir sistemdir. Evrimi bir adi diferansiyel denklem sistemi tarafından kontrol edilen sürekli dinamik sistemler ve fark denklemleri tarafından kontrol edilen ayrık dinamik sistemler olmak üzere iki tür dinamik sistem vardır. Bizim kullanacağımız Einstein alan denklemleri, adi bir diferansiyel denklem sistemi oluşturduğu için yalnızca sürekli dinamik sistemler ile ilgileneceğiz.

Dinamik sistemin standart formu genellikle

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ durum uzayının bir elemanı, $f : R^n \rightarrow R^n$ bir vektör alanıdır ve nokta zamana göre türevi temsil eder. Herhangi bir $x \in R^n$ noktası ve t zamanında $f(x)$, R^n 'de bir vektör alanı tanımlar.

(2.1), zamandan bağımsız olduğu sürece otonom olarak adlandırılır. Biz tezimizde yalnızca otonom sistemlerle çalışacağız.

$f : R^n \rightarrow R^n$ olmak üzere bir $f(x)$ fonksiyonu için

$$||f(x_1) - f(x_2)|| \leq L \leq ||x_1 - x_2||$$

şeklinde bir L sabiti bulunabiliyorsa, bu fonksiyonun $D \subset R^n$ tanım kümesinde Lipschitz koşulunu sağladığı söylenir. Eğer f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlıyorsa, fonksiyona Lipschitz sürekli fonksiyon denir.

Varlık ve Teklik Teoremi: Eğer f fonksiyonu Lipschitz sürekli ise $\dot{x} = f(x)$ otonom diferansiyel denklemi bir $x_0 \in D$ başlangıç noktası için eşsiz bir çözüme sahiptir.

Denge Noktası: $\dot{x} = f(x)$ otonom denkleminde $f(x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan $x_0 \in R^n$

noktasına denge noktası denir. Denge noktası için literatürde tekil nokta, kritik nokta isimleri de kullanılmaktadır.

Kararlı Denge Noktası: Her $\varepsilon > 0$ için tüm $t \geq t_0$ durumlarında $|x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta$ olduğunda $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa x_0 'a kararlı denge noktası denir.

Asimptotik Olarak Kararlı Denge Noktası: x_0 kararlı bir denge noktası olmak üzere, $x(t)$ 'nin $\dot{x} = f(x)$ denkleminin herhangi bir sonucu olduğu durumda

$$||x(t_0) - x_0|| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} ||x(t) - x_0|| = 0$$

koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa x_0 'a asimptotik olarak kararlı denge noktası denir.

2.1.1. Lineer Kararlılık Analizi

Özdeğer ve Özvektör: A, bir nxn matris olmak üzere

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

ya da eşdeğer biçimde, I'nın birim matris olduğu

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$$

eşitliklerini sağlayan sıfırdan farklı $\mathbf{x}$ vektörü ve λ skalerine sırasıyla özvektör ve özdeğer denir.

Jakobiyen Matris:

$\dot{x} = f(x)$ sisteminin Jakobiyen matrisi

$$J = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Hiperbolik Denge Noktası: x_0 , $\dot{x} = f(x)$ sisteminin bir denge noktası olmak üzere, Jakobiyen matrisinin x_0 noktasında hesaplanan özdeğerlerinden hiçbirinin reel kısmı sıfır değilse, x_0 'a hiperbolik denge noktası denir. Hiperbolik olmayan denge noktaları için lineer kararlılık analizi ile bilgi elde edilemez.

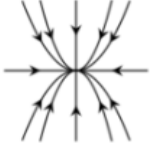
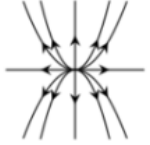
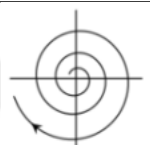
Hartman Teoremi: x_0 , lineer olmayan $\dot{x} = f(x)$ sisteminin hiperbolik denge noktası olmak üzere, dinamik sistemin bu nokta etrafındaki davranışı, sistemin bu noktada lineerleştirilmiş haliyle nitel olarak aynıdır.

Hartman teoremine göre Jakobiyen matrisinin hiperbolik x_0 denge noktasında hesaplanan özdeğerleri, bu denge noktasının kararlılığı hakkında bilgi verir. Bu nedenle Jakobiyen matrisine kararlılık matrisi de denir. Jakobiyen matrisi $n \times n$ bir matris ise n adet özdeğere sahiptir.

2.1.2. Denge Noktalarının Kararlılığı

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ J Jakobiyen matrisinin x_0 hiperbolik denge noktasında hesaplanan özdeğerleri olmak üzere tüm özdeğerlerin reel kısımları negatifse x_0 noktası kararlıdır; eğer özdeğerlerden en az biri pozitif reel kısma sahipse nokta kararsızdır. Hiperbolik denge noktalarının iki boyuttaki sınıflandırması Tablo 2.1'de; üç boyuttaki sınıflandırması ise Tablo 2.2'de verilmiştir.

Tablo 2.1: Hiperbolik Denge Noktalarının İki Boyuttaki Sınıflandırması

Özdeğerler	Koşullar	Davranış	Kararlılık	Örnek
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	Düğüm	Kararlı	
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	Kaynak	Kararsız	
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	Semer	Kararsız	
$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta$	$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha < 0$	Spiral Odak	Kararlı	
$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta$	$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha > 0$	Spiral Odak	Kararsız	

Tablo 2.2: Hiperbolik Denge Noktalarının Üç Boyuttaki Sınıflandırması

Özdeğerler	Koşullar	Davranış	Kararlılık	Örnek
$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$	Düğüm	Kararlı	
$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$	Kaynak	Kararsız	
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$	Semer	Kararsız	
$\lambda_1 > 0 > \lambda_2 > \lambda_3$	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$	Semer	Kararsız	
$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 = \overline{\lambda_3} = \alpha + i\beta$	$\lambda_1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha > 0$	Spiral Semer	Kararsız	
$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 = \overline{\lambda_3} = \alpha + i\beta$	$\lambda_1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha < 0$	Spiral Düğüm	Kararlı	
$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 = \overline{\lambda_3} = \alpha + i\beta$	$\lambda_1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha < 0$	Spiral Semer	Kararsız	
$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 = \overline{\lambda_3} = \alpha + i\beta$	$\lambda_1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha > 0$	Spiral Kaynak	Kararsız	

2.1.3. Durum Uzayı

Durum uzayı $\dot{x} = f(x)$ sisteminin davranışını gösteren n boyutlu grafikdir.

Yörünge: $\dot{x} = f(x)$ sisteminin her bir çözümü durum uzayında bir eğriyle temsil edilir. Bu çözüm eğrilerine yörünge adı verilir. Varlık ve teklik teoremi bu yörüngelerin çakışmayacağını garanti eder. Yörünge sayısı sonsuzdur ve tamamını çizdiğimiz takdirde durum uzayının tümünü doldurur fakat sistemin davranışını belirlemek için uygun sayıda

yörüngeyi çizmek yeterlidir. Durum uzayı için yeterli sayıda yörünge çizildiği takdirde herhangi bir başlangıç noktasının nerede sonlanacağı belirlenebilir.

Homoklinik Yörünge: x_0 bir denge noktası; $\gamma(t)$, γ yörüngesinin t anındaki konumu olmak üzere $\gamma(-\infty) = \gamma(\infty) = x_0$ ise γ 'ya homoklinik yörünge denir. Homoklinik yörünge çözüm noktasını kendisine bağlar.

Heteroklinik Yörünge: x_0 ve y_0 birbirinden farklı denge noktaları; $\gamma(t)$, γ yörüngesinin t anındaki konumu olmak üzere $\gamma(-\infty) = x_0$ ve $\gamma(\infty) = y_0$ ise γ 'ya heteroklinik yörünge denir. Heteroklinik yörünge bir çözüm noktasını başka bir çözüm noktasına bağlar.

Yörüngelerin spiral olduğu kısımlar dışında durum uzayı eksponansiyel olarak artan ya da azalan ve aynı çizgi üzerinde kalan yörüngelere sahiptir. Bu özel yörüngeler Jakobiyeen matrisinin hiperbolik denge noktalarındaki özvektörleri tarafından belirlenir ve manifold olarak adlandırılır. Bu özvektörlere karşılık gelen özdeğerler manifoldun kararlılık durumunu belirler. Özdeğer pozitifse manifold kararsız; negatifse kararludur.

İnvaryant manifold: Bir $S \subset X$ alt manifoldu, tüm $x \in S$ ve $t \in R$ için bir $t_0 \in R$ zamanında $\varphi(t_0) = x$ ise ve $\varphi(t) \in S$ koşulunu sağlıyorsa X 'in invaryant manifoldu olarak adlandırılır. Başka bir ifadeyle, invaryant manifoldun içindeki bir nokta hiçbir zaman bu manifoldu terk etmez. İnvaryant manifold, durum uzayının diğer bölgelerine hiçbir yörünge ile bağlı değildir. En basit invaryant manifold denge noktalarıdır. Literatürde invaryant alt manifold ismi de kullanılmaktadır. Bu isimlendirme manifoldun durum uzayından daha küçük bir boyuta sahip olduğunu belirttiği için kullanışlıdır.

Çekici: Durum uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan A alt kümesine çekici denir.

- 1) $\gamma(x, t)$, x 'ten geçen yörüngenin t anındaki konumunu belirtmek üzere, $\gamma(a, T) \in A$ ise tüm $t > T$ için $\gamma(a, t) \in A$ 'dır.
- 2) A 'nın, b noktalarından oluşan ve tüm b noktaları için $\gamma(b, \infty) \in A$ koşulunu sağlayan bir $B(A)$ komşuluğu vardır.
- 3) A 'nın, bu iki koşulu sağlayan ve boş olmayan bir öz alt kümesi yoktur.

Diğer bir ifade ile, komşuluğundaki yörüngelerin tümü A 'da sonlanıyorsa ve A 'nın bu özelliği gösteren bir öz alt kümesi yoksa A çekici olarak adlandırılır. Durum uzayındaki yörüngelerin tümü A 'da sonlanıyorsa A 'ya global çekici adı verilir.

İtici: Durum uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan A alt kümesine itici denir.

- 1) $\gamma(x, t)$, x 'ten geçen yörüngenin t anındaki konumunu belirtmek üzere, $\gamma(a, T) \in A$ ise tüm $t < T$ için $\gamma(a, t) \in A'$ 'dir.
- 2) A' 'nın, b noktalarından oluşan ve tüm b noktaları için $\gamma(b, -\infty) \in A$ koşulunu sağlayan bir $B(A)$ komşuluğu vardır.
- 3) A' 'nın, bu iki koşulu sağlayan ve boş olmayan bir öz alt kümesi yoktur.

Komşuluğundaki tüm yörüngelere A kaynaklık ediyorsa ve A' 'nın bu özelliği gösteren bir öz alt kümesi yoksa A' 'ya itici denir. Durum uzayındaki tüm yörüngelerin kaynağı A ise A global itici olarak adlandırılır.

Çekici ve iticiler; bir nokta, sonlu bir nokta kümesi, bir eğri ya da bir manifold olabilir. Bir yörüngenin $t \rightarrow \infty$ durumundaki limiti yörüngenin gelecek çekicisi; $t \rightarrow -\infty$ durumundaki limiti ise iticisi ya da geçmiş çekicisi olarak adlandırılır.

İnvariant alt manifoldların varlığı bir çekicinin genel olarak global bir özellik taşıyamayacağını gösterir. Çünkü durum uzayı birbirinden bağımsız bölümlere ayrılmıştır ve bu çekiciye ulaşmayan bir yörünge her zaman bulunabilir. Durum uzayındaki bir çekicinin global olabilmesi için tüm invariant alt manifoldların kesişiminde bulunması gerekir.

2.2. KOZMOLOJİ

2.2.1. Genel Görelilik Teorisi

Bu bölümde, kullandığımız dinamik sistemi oluşturan denklemlerin çıkış noktası olan Einstein Alan Denklemleri ile bu denklemlerin dayandığı temel geometrik kavramların bir özetini sunuyoruz.

2.2.1.1. Tansörler

Bir koordinat sisteminden diğerine dönüşümleri

$$\bar{A}^{\alpha\beta} = \sum_{\mu\nu} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu} A^{\mu\nu} \quad (2.3)$$

$$\bar{A}_{\alpha\beta} = \sum_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} A_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

$$\bar{A}^\alpha{}_\beta = \sum_{\mu\nu} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} A^\mu{}_\nu \quad (2.5)$$

şeklinde olan değerler sırasıyla kontravaryant tansör, kovaryant tansör ve karışık tansör olarak adlandırılırlar. Tansörün mertebesi sahip olduğu indis sayısı ile temsil edilir. Bizim örnek olarak kullandığımız bu tansörlerin mertebesi ikidir. Skaler ve vektörler sırasıyla sıfırıncı ve birinci mertebeden tansörlerdir. İndis sayısı artırılarak ve dönüşüm kurallarına bağlı kalınarak daha yüksek mertebeli tansörler de kolaylıkla tanımlanabilir. Ortonormal koordinat sisteminde kovaryant, kontravaryant ve karışık tansörler arasında bir ayrım bulunmaz.

Aynı mertebeye sahip tansörler

$$A^{\alpha\beta} + B^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta} \quad (2.6)$$

şeklinde toplanır, mertebesi farklı olan tansörler toplanamaz.

Tansörlerden

$$A^\alpha B^\beta{}_\gamma C_\delta = D^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \quad (2.7)$$

şeklinde daha üst mertebeli tansörler oluşturulabilir.

Tansör denklemlerini daha kompakt formda yazabilmek için Einstein toplam kuralı kullanılır. Bu kurala göre indis

$$\bar{B}^\alpha{}_\beta = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} B^\mu{}_\nu \quad (2.8)$$

şeklinde eşitliğin bir bölgesinde bir kere kontravaryant ve bir kere de kovaryant indis olarak

yazılmışsa, bu indis üzerinden toplama yapılır. Eğer tansör tüm α ve β değerleri için

$$A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha} \quad (2.9)$$

eşitliğini sağlıyorsa simetrik;

$$A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha} \quad (2.10)$$

eşitliğini sağlıyorsa da antisimetrik tansör olarak adlandırılır.

Bir tansörün simetrik kısmı

$$A_{(i_1 i_2 \dots i_n)} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n!-1} A_{\pi_j(i_1 i_2 \dots i_n)} \quad (2.11)$$

antisimetrik kısmı ise

$$A_{[i_1 i_2 \dots i_n]} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n!-1} (-1)^j A_{\pi_j(i_1 i_2 \dots i_n)} \quad (2.12)$$

şeklinde oluşturulabilir. Burada $\pi_j(i_1 i_2 \dots i_n)$ indislerin j 'inci permütasyonunu, yuvarlak parantez içindeki indisler simetrik kısmı, köşeli parantez içindeki indisler ise antisimetrik kısmı temsil etmektedir. Parantez içinde olmayan indisler simetrikleştirme ya da antisimetrikleştirme işlemine katılmazlar.

İkinci mertebeden bir tansörün simetrik ve antisimetrik kısımları sırasıyla

$$A_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}) \quad (2.13)$$

$$A_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}) \quad (2.14)$$

üçüncü mertebeden bir tansörün simetrik ve antisimetrik kısımları ise sırasıyla

$$A_{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{3!}(A_{\alpha\beta\gamma} + A_{\alpha\gamma\beta} + A_{\gamma\alpha\beta} + A_{\gamma\beta\alpha} + A_{\beta\gamma\alpha} + A_{\beta\alpha\gamma}) \quad (2.15)$$

$$A_{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{3!}(A_{\alpha\beta\gamma} - A_{\alpha\gamma\beta} + A_{\gamma\alpha\beta} - A_{\gamma\beta\alpha} + A_{\beta\gamma\alpha} - A_{\beta\alpha\gamma}) \quad (2.16)$$

şeklinde dir.

2.2.1.2. Metrik Tansör

Uzayzamanın iki olayı arasındaki uzaklık

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.17)$$

ile ölçülür. Buradaki $g_{\mu\nu}$ ifadesine metrik tansör denir ve bu tansör simetriktir ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$). Toplamda 16 bileşene sahip olmasına rağmen simetrik olduğundan dolayı 10 bağımsız bileşene sahiptir. Bir metrik uzayında, bir tansörün kovaryant ve kontravaryant bileşenleri metrik tansör aracılığıyla

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (2.18)$$

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (2.19)$$

şeklinde birbirlerine dönüştürülebilirler.

2.2.1.3. Christoffel Sembolleri

Christoffel sembollerinin birinci türü ve ikinci türü metrik tansör aracılığıyla sırasıyla

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (2.20)$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = g^{\alpha\delta} \Gamma_{\delta\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} \right) \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanır.

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\gamma\beta} \quad (2.22)$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \quad (2.23)$$

Christoffel sembolleri (2.22) ve (2.23)'de görüldüğü gibi son iki indislerine göre simetriktir.

Kartezyen koordinat sisteminde Christoffel sembollerinin bileşenlerinin tümü sıfıra eşittir fakat Riemann uzayında bu bileşenlerin tümünü sıfıra eşitleyebilecek bir koordinat sistemi bulmak olanaksızdır. Bir tansör bir koordinat sisteminde sıfıra eşitse tüm koordinat sistemlerinde de sıfır olmalıdır. Dolayısıyla Christoffel sembolleri tansör özelliği göstermezler.

2.2.1.4. Kovaryant Türev

Kovaryant türev; kontravaryant, kovaryant ve karışık tansörler için Christoffel sembolleri kullanılarak sırasıyla

$$\nabla_\gamma C^{\alpha\beta} = \frac{\partial C^{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \Gamma_{\delta\gamma}^\beta C^{\alpha\delta} + \Gamma_{\delta\gamma}^\alpha C^{\delta\beta} \quad (2.24)$$

$$\nabla_\gamma C_{\alpha\beta} = \frac{\partial C_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta C_{\delta\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^\delta C_{\alpha\delta} \quad (2.25)$$

$$\nabla_\gamma C^\alpha_\beta = \frac{\partial C^\alpha_\beta}{\partial x^\gamma} + \Gamma_{\delta\gamma}^\alpha C^\delta_\beta - \Gamma_{\beta\gamma}^\delta C^\alpha_\delta \quad (2.26)$$

şeklinde tanımlanır. Kovaryant türev noktalı virgül kullanılarak

$$\nabla_\gamma C_{\alpha\beta} \equiv C_{\alpha\beta;\gamma} \quad (2.27)$$

şeklinde de gösterilebilir.

Kovaryant Türevin Bazı Özellikleri:

- Kovaryant türev

$$\nabla_\gamma(\alpha A^\mu + \beta B^\mu) = \alpha \nabla_\gamma A^\mu + \beta \nabla_\gamma B^\mu \quad (2.28)$$

şeklinde davranan lineer bir operatördür.

- İki tansörün çarpımının kovaryant türevi

$$\nabla_\gamma(A^\alpha C_{\delta\beta}) = (\nabla_\gamma A^\alpha) C_{\delta\beta} + A^\alpha (\nabla_\gamma C_{\delta\beta}) \quad (2.29)$$

şeklinde iki fonksiyonun çarpımının adi türevinin hesaplanışına benzer bir biçimde hesaplanır.

- Metrik tansörün kovaryant türevi sıfıra eşittir ($\nabla g = 0$).
- Bir skaler fonksiyonun kovaryant türevi adi türevine eşittir.

2.2.1.5. Riemann Eğrilik Tansörü

Riemann eğrilik tansörü, Christoffel sembolleri aracılığıyla

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\lambda_{\beta\delta} \Gamma^\alpha_{\lambda\gamma} - \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} \Gamma^\alpha_{\lambda\delta} \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tansör, metrik tansör ile metrik tansörün birinci ve ikinci dereceden türevlerinden oluşturulabilen yegane tansördür ve

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = R^\alpha_{\beta[\gamma\delta]} \quad (2.31)$$

$$R^\alpha_{[\beta\gamma\delta]} = 0 \quad (2.32)$$

$$R^\alpha_{\beta[\gamma\delta;\lambda]} = 0 \quad (2.33)$$

şeklindeki simetri özelliklerine sahiptir. (2.33)'e Bianchi özdeşliği adı verilir.

Bir metrik uzayında Riemann eğrilik tansörü

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\lambda} R^\lambda_{\beta\gamma\delta} \quad (2.34)$$

şeklinde kovariant forma dönüştürülebilir. Bu durumda, öncekilere ek olarak

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{[\alpha\beta]\gamma\delta} \quad (2.35)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \quad (2.36)$$

$$R_{[\alpha\beta\gamma\delta]} = 0 \quad (2.37)$$

simetri özellikleri elde edilir. Bu simetri özellikleri dikkate alındığında Riemann eğrilik tansörünün 256 bileşeninden yalnızca 20'sinin bağımsız olduğu görülmektedir.

Riemann uzayında, iki nokta arasındaki paralel taşıma işlemi yola bağımlıdır ve farklı yollar için farklı sonuçlar verir. Eğer bir vektör kapalı bir yol üzerinden başlangıç noktasına taşınırsa ilk hali ile çakışmaz. A vektörünün u ve v tanjant vektörlerinin oluşturduğu dörtgenin etrafında döndürüldüğündeki değişimi Riemann eğrilik tansörü aracılığıyla

$$\delta A^\alpha + R^\alpha_{\beta\gamma\delta} A^\beta u^\gamma v^\delta = 0 \quad (2.38)$$

şeklinde bulunur. Metrik tansör aracılığıyla

$$R_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta} R_{\delta\alpha\beta\gamma} = \partial_\beta \Gamma^\gamma_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} \Gamma^\gamma_{\beta\lambda} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \Gamma^\lambda_{\lambda\gamma} \quad (2.39)$$

şeklinde tanımlanmış olan simetrik $R_{\alpha\beta}$ tansörü ($R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$), Ricci eğrilik tansörü olarak adlandırılırken

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad (2.40)$$

şeklinde tanımlanmış olan R invariantına Ricci skaleri denir.

2.2.1.6. Enerji Momentum Tansörü

Enerji momentum tansörü

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta \quad (2.41)$$

eşitliği kullanılarak

$$T_{\alpha\beta} = \mu u_\alpha u_\beta + q_\alpha u_\beta + u_\alpha q_\beta + p h_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta} \quad (2.42)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada μ enerji yoğunluğunu, q momentum yoğunluğunu, p eşyönlü basıncı, π ise eşyönsüz basıncı temsil ederken u , akışkanla birlikte hareket eden gözlemcinin dörtlü hız vektörüdür ve biz tezimizde bu vektörü eşhareketli koordinat sisteminde $u^\alpha = (-1, 0, 0, 0)$ şeklinde alacağız.

Enerji momentum tansörü simetriktir ($T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$) ve diverjansı sıfıra eşittir ($\nabla \cdot T = 0$). Biz, tezimizde

$$T_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \geq 0, \quad \mu \geq 0 \quad (2.43)$$

şeklinde verilen ve zayıf enerji koşulu olarak adlandırılan sınırlamaların da geçerli olduğunu kabul edeceğiz.

2.2.1.7. *Einstein Alan Denklemleri*

Einstein Alan Denklemleri uzayzamanın geometrisi ile madde dağılımı arasındaki ilişkiyi tanımlar ve

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \quad (2.44)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $G_{\alpha\beta}$ Einstein tansörü, Λ ise kozmolojik sabit olarak adlandırılır.

Einstein tansörü, bu denklemin kozmolojik sabitin bulunmadığı ilk halinde uzayın düz olması durumunda sıfıra eşittir fakat verdiğimiz son halinde sıfır olmaz. Bu tansör görüldüğü gibi sadece Riemann eğrilik tansörü ile metrik tansör aracılığıyla elde edilir, simetriktir ($G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$) ve diverjansı sıfıra eşittir ($\nabla \cdot G = 0$).

2.2.2. **Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) Modelleri**

Kozmolojik İlke: Evren, yeterince büyük ölçeklerde homojen ve izotropik bir yapıya sahiptir.

Modern kozmoloji, kozmolojik ilkeye dayandırılmaktadır. Bu ilke Dünya'nın ya da evrendeki herhangi bir noktanın özel bir konuma sahip olmadığını söyler. Bu ilkeden, evreni tanımlayan uzay-zamanın uzaysal kısmının çok büyük bir simetriye sahip olduğu sonucu çıkmaktadır ve bu simetriyi sağlayan en genel modeller Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) modelleridir.

2.2.2.1. *RW (Robertson Walker) Metriği*

FLRW modelleri uzaysal olarak homojen ve eşyönlüdürler ve bir $(t, \chi, \theta, \varphi)$ koordinat sisteminde

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + l^2(t)[d\chi^2 + f_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] \quad (2.45)$$

metriğiyle temsil edilirler. Bu metrik Robertson-Walker (RW) metriği olarak isimlendirilir ve k parametresine bağlı olan $f_k(\chi)$ fonksiyonu,

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & k = +1 & 0 \leq \chi \leq \pi \\ \chi & k = 0 & 0 \leq \chi \leq \infty \\ \sinh \chi & k = -1 & 0 \leq \chi \leq \infty \end{cases} \quad (2.46)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre evrene $k = +1$ ise eliptik ya da kapalı; $k = 0$ ise Öklidyen ya da düz ve $k = -1$ ise hiperbolik ya da açık denir. t ve $l(t)$ ise sırasıyla kozmik zaman ve ölçek faktörü olarak isimlendirilir.

2.2.2.2. *Mükemmel Akışkan*

Homojen ve izotropik evrendeki madde büyük ölçeklerde yüksek hassasiyetle bir mükemmel akışkan olarak tanımlanabilir. Mükemmel akışkanın enerji yoğunluğu ve basıncı arasındaki ilişki $p = p(\mu)$ şeklindedir ve hal denklemi olarak isimlendirilir. Bu ilişki ω 'nın sabit olduğu durumda $p = \omega\mu$ şeklindeyse akışkana Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan denir.

Biz, Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan hal denklemini

$$p = (\gamma - 1)\mu \quad (2.47)$$

şeklinde alacağız. Burada, γ bir parametre olup tanım aralığını, sesin

$$v_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \mu} \right)_{\text{sabit entropi}} \quad (2.48)$$

bağıntısı aracılığıyla tanımlanan v_s hızı belirler. Buna göre

$$|v_s^2| \leq 1 \iff 0 \leq \gamma \leq 2 \quad (2.49)$$

koşuluna ulaşırız. Mükemmel akışkanın enerji-momentum tansörü, enerji yoğunluğu μ ve eşyönlü basınç p aracılığıyla

$$T_{\alpha\beta} = pg_{\alpha\beta} + (\mu + p)u_\alpha u_\beta \quad (2.50)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Zayıf enerji koşulu mükemmel akışkan için

$$\mu \geq 0, \quad \mu + p \geq 0 \quad (2.51)$$

şeklindedir.

Mükemmel akışkan hal denkleminde $p = \mu$ katı akışkanı, $p = \frac{1}{3}\mu$ radyasyonu, $p = 0$ tozu, $p = -\frac{1}{3}\mu$ kozmik sicimi tasvir ederken $p = -\mu$ durumu efektif olarak kozmolojik sabite denktir.

2.2.2.3. *Karanlık Bileşenler*

Tip Ia Süpernova'lara (SNeIa) ilişkin gözlemler, evrenin günümüzde hızlanarak genişlediğini göstermekte ve bu durumda evrende negatif basınçlı bir akışkanın baskın olduğu sonucu çıkmaktadır. Bu negatif basınçlı akışkan, karanlık enerji olarak adlandırılmakta ve evrenin enerji yoğunluğunun yüzde yetmişinin bu formda olduğu düşünülmektedir.

Gravitasyonla ilgili çeşitli gözlemlerde, hesaplanan madde içeriğiyle açıklanması mümkün olmayan bir gravitasyon etkisi tespit edilmiş ve bu etkinin açıklanabilmesi için evrende baryonik olmayan bir maddenin de bulunması gerektiği sonucu çıkarılmıştır. Bu maddeye karanlık madde ismi verilmiştir.

Karanlık enerji ve karanlık maddenin farklı fiziksel fenomenler olmadığı ve aslında aynı akışkanın farklı davranışlarını temsil ettikleri yolunda hipotezler de ortaya atılmış ve bu akışkana karanlık akışkan denmiştir. Bu hipoteze göre karanlık akışkan, baryon yoğunluğunun fazla olduğu bölgelerde maddeyle etkileşime girerek gravitasyonun etkisini arttırmakta ve karanlık madde davranışı sergilemekte, baryon yoğunluğunun çok düşük olduğu bölgelerde ise negatif basınca sahip olarak karanlık enerji davranışı göstermektedir.

2.2.2.4. *Chaplygin Gazı*

Chaplygin gazı, hal denklemi A 'nın bir sabit olduğu

$$p = -\frac{A}{\mu} \quad (2.52)$$

şeklinde olan ve karanlık akışkan adayı olarak değerlendirilen bir mükemmel akışkan modelidir. Bu model sonra α 'nın pozitif bir parametre olduğu

$$p = -\frac{A}{\mu^\alpha} \quad (2.53)$$

şekline genelleştirilmiş ve bu hal denkleminde Genelleştirilmiş Chaplygin Gazı hal denklemi adı verilmiştir. Daha sonra bu model de B'nin bir sabit olduğu

$$p = B\mu - \frac{A}{\mu^\alpha} \quad (2.54)$$

şekline dönüştürülmüş ve Modifiye Chaplygin Gazı hal denklemi olarak adlandırılmıştır.

2.2.2.5. *Kozmolojik Denklemler*

(2.45)'de verilen RW metriğinin Einstein alan denklemlerinde kullanılması durumunda zaman-zaman bileşeni aracılığıyla

$$H^2 = \frac{1}{3}\mu - \frac{1}{6}{}^3R + \frac{1}{3}\Lambda \quad (2.55)$$

denklemi elde edilir ve bu, Friedmann denklemi olarak adlandırılır. Burada, k parametresine bağlı olan

$${}^3R = \frac{6k}{l^2} \quad (2.56)$$

değişkeni, simetri yüzeylerinin eğriliğini temsil ederken evrenin genişlemesinin bir ölçüsü olan

$$H = \frac{\dot{l}}{l} \quad (2.57)$$

terimine Hubble parametresi denir ve bu eşitlikte nokta zamana göre türevi gösterir.

Einstein alan denklemlerinin uzaysal bileşenleri ve (2.55)'de verilen Friedmann denklemi aracılığıyla ise

$$\frac{\ddot{l}}{l} = -qH^2 = -\frac{3p + \mu}{6} + \frac{1}{3}\Lambda \quad (2.58)$$

denklemini elde edilir ve buna Raychaudhuri denklemi denir. Burada

$$q = -\frac{\ddot{l}}{(\dot{l})^2} \quad (2.59)$$

yavaşlama parametresi olarak adlandırılır.

Enerji-momentum tansörünün korunumundan ya da eşit bir biçimde (2.55) ve (2.58) denklemlerinden elde edilen

$$\dot{\mu} = -3H(\mu + p) \quad (2.60)$$

eşitliğine ise enerji korunum denklemi denir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. FLRW MODELLERİ İÇİN DİNAMİK SİSTEM

3.1.1. Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için Dinamik Sistem

Dinamik sistem analizinde kullanacağımız değişkenleri boyutsuz hale getirebilmek için uygun bir değişkenle normlamamız gerekmektedir. Bu değişken (2.55)'de verilmiş olan Friedmann denklemi aracılığıyla belirlenir.

Madde-enerji yoğunluğu olan μ , (2.51)'da verilen zayıf enerji koşulundan dolayı negatif olamaz ve $k = 0$ veya $k = -1$ ise (2.56)'daki tanımından görüleceği üzere ${}^3R \leq 0$ 'dır. Eğer Λ da negatif değilse ($\Lambda \geq 0$) -ki biz, tezimizde bu koşulun geçerli olduğunu kabul edeceğiz- H^2 terimi Friedmann denklemindeki diğer bütün terimlerden büyük ve baskındır. Bu durumda $H \neq 0$ ise, değişkenleri H^2 'ye bölerek boyutsuz hale getirdiğimizde Friedmann denklemi

$$\frac{\mu}{3H^2} + \frac{\Lambda}{3H^2} - \frac{{}^3R}{6H^2} = 1 \quad (3.1)$$

şekline dönüşür. Buna göre $k = -1, 0$ ve $\Lambda \geq 0$ durumu için

$$\Omega = \frac{\mu}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad K = -\frac{{}^3R}{6H^2} \quad (3.2)$$

değişkenlerini tanımlarız. Bu boyutsuz değişkenleri göz önüne alır ve (2.47)'de verilen Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan hal denklemini kullanır, ayrıca $d\tau = H(t)dt$ şeklinde logaritmik bir zaman değişkeni tanımlarsak,

$$H' = -(1+q)H \quad (3.3)$$

$$\Omega' = [2q - (3\gamma - 2)]\Omega \quad (3.4)$$

$$\Omega'_\Lambda = 2(1+q)\Omega_\Lambda \quad (3.5)$$

$$K + \Omega + \Omega_\Lambda = 1 \quad (3.6)$$

$$q = \frac{3\gamma - 2}{2}\Omega - \Omega_\Lambda \quad (3.7)$$

şeklindeki evrim ve bağ denklemleri ile q 'nın tanım denklemini elde ederiz. $'''$ burada τ 'ya göre türevi temsil etmektedir.

$k = +1$ olduğunda ise (2.56)'da görüleceği üzere 3R pozitif olmakta ve dolayısıyla (2.55)'de verilen Friedmann denklemindeki baskın terim $H^2 + {}^3R/6$ olmaktadır. Bu yüzden, bu durumda H yerine

$$D = \sqrt{H^2 + {}^3R/6} \quad (3.8)$$

şeklinde tanımladığımız D 'yi kullanıyor ve

$$\frac{H^2}{D^2} + \frac{{}^3R}{6D^2} = \frac{\mu}{3D^2} + \frac{\Lambda}{3D^2} = 1 \quad (3.9)$$

şekline dönüştürdüğümüz Friedmann denklemi için

$$Q = \frac{H}{D}, \quad \Omega = \frac{\mu}{3D^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3D^2}, \quad K = -\frac{{}^3R}{6D^2} \quad (3.10)$$

boyutsuz değişkenlerini tanımlıyoruz.

$$D' = -\frac{3\gamma}{2}\Omega QD \quad (3.11)$$

$$Q' = [1 - \frac{3\gamma}{2}\Omega](1 - Q^2) \quad (3.12)$$

$$\Omega' = -3\gamma\Omega Q(1 - \Omega) \quad (3.13)$$

$$H' = Q'D + D'Q \quad (3.14)$$

$$\Omega + \Omega_\Lambda = 1 \quad (3.15)$$

$$Q^2 - K = 1 \quad (3.16)$$

Yine $d\tau = D(t)dt$ şeklindeki logaritmik zaman değişkenini ve (2.47)'de verilen Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan hal denklemini kullanarak $'''$ 'nın τ 'ya göre türevi temsil ettiği yukarıdaki evrim ve bağ denklemlerini elde ediyoruz.

3.1.2. Modifiye Chaplygin Gazı için Dinamik Sistem

Bu durum için Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan ile Genelleştirilmiş Chaplygin Gazının karışımını temsil eden ve

$$p = (\gamma - 1)\mu - \frac{A}{\mu^\alpha} \quad (3.17)$$

şeklinde tanımlanan Modifiye Chaplygin Gazı hal denklemini kullanıyoruz.

Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan halinde olduğu gibi bu durumda da değişkenleri boyutsuz kılmak için Friedman denklemini kullanabiliriz. Zayıf enerji koşulundan dolayı μ negatif olamaz ve $k = 0$ veya $k = -1$ durumunda ${}^3R \leq 0$ 'dır. Λ 'nın da negatif olmaması durumunda Friedmann denklemindeki baskın terim H^2 olur ve Friedmann denklemi (3.1)'e dönüşür. Bu durumda $k = -1, 0$ durumu için değişkenleri H^2 'ye bölerek Ω , Ω_Λ , K , Ω_A ve P 'nin sırasıyla madde-enerji yoğunluğu, Λ yoğunluğu, eğrilik, Chaplygin gazı yoğunluğu ve basınç parametrelerini temsil eden boyutsuz değişkenler olduğu

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\mu}{3H^2}, & \Omega_\Lambda &= \frac{\Lambda}{3H^2}, & K &= -\frac{{}^3R}{6H^2}, \\ \Omega_A &= \frac{\mu^{\alpha+1} A}{3H^2}, & P &= \frac{p}{3H^2} \equiv (\gamma - 1)\Omega - \frac{\Omega_A^{\alpha+1}}{\Omega^\alpha} \end{aligned} \quad (3.18)$$

terimlerini tanımlıyoruz.

$$H' = -(1 + q)H \quad (3.19)$$

$$\Omega' = (2q - 1)\Omega - 3P \quad (3.20)$$

$$\Omega'_\Lambda = 2(1 + q)\Omega_\Lambda \quad (3.21)$$

$$\Omega'_A = 2(1 + q)\Omega_A \quad (3.22)$$

$$q = \frac{1}{2}(\Omega + 3P - 2\Omega_\Lambda) \quad (3.23)$$

$$K + \Omega + \Omega_\Lambda = 1 \quad (3.24)$$

Bu boyutsuz değişkenleri kullanır ve $d\tau = H(t)dt$ logaritmik zaman değişkenini göz önüne alırsak yukarıdaki evrim ve bağ denklemlerini elde ederiz. Burada $'''$, τ 'ya göre türevi temsil etmektedir.

$k = 0, +1$ olduğunda Friedmann denklemindeki baskın terim D olduğundan bu durum için yine H yerine (3.8)'de tanımlamış olduğumuz D 'yi kullanıyor ve daha önce tanımlanmış diğer parametrelere ek olarak Q 'nun boyutsuz genişleme parametresini temsil ettiği

$$\begin{aligned} Q &= \frac{H}{D}, & \Omega &= \frac{\mu}{3D^2}, & \Omega_\Lambda &= \frac{\Lambda}{3D^2}, \\ K &= -\frac{{}^3R}{6D^2}, & \Omega_A &= \frac{\alpha+1\sqrt{A}}{3D^2}, & P &= \frac{p}{3D^2} \equiv (\gamma-1)\Omega - \frac{\Omega_A^{\alpha+1}}{\Omega^\alpha} \end{aligned} \quad (3.25)$$

boyutsuz değişkenlerini elde ediyoruz.

$$D' = -\frac{3}{2}(P + \Omega)QD \quad (3.26)$$

$$Q' = (Q^2 - 1)\left[\frac{3}{2}(P + \Omega) - 1\right] \quad (3.27)$$

$$\Omega' = 3Q(\Omega - 1)(P + \Omega) \quad (3.28)$$

$$\Omega'_A = 3Q\Omega_A(P + \Omega) \quad (3.29)$$

$$\Omega + \Omega_\Lambda = 1 \quad (3.30)$$

$$Q^2 - K = 1 \quad (3.31)$$

$d\tau = D(t)dt$ logaritmik zaman değişkenini tanımlayarak, $''$ 'nin τ 'ya göre türevi temsil ettiği yukarıdaki evrim ve bağ denklemlerine ulaşıyoruz.

4. BULGULAR

Bu bölümde, elde ettiğimiz boyutsuz evrim ve bağ denklemlerini dinamik sistem analizi kullanarak detaylı bir biçimde inceliyoruz. Karşımıza çıkan denge noktaları ve kozmolojik anlamları şu şekildedir:

- **Düz Friedmann Denge Noktaları:** Bu model baryonik maddenin tamamen baskın olduğu düz evrenleri ($k = 0, \Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0$) temsil etmektedir ve kısaca F olarak anılacaktır.
- **de Sitter Denge Noktaları:** Kozmolojik sabitin tamamen baskın olduğu düz evrenleri ($k = 0, \Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, \Omega_A = 0$) tasvir eden bu model kısaca dS olarak anılacaktır.
- **Düz Denge Noktaları:** Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için oluşturduğumuz durum uzayında $\gamma = 0$ durumunda karşımıza çıkan ve F ile dS de dahil tüm düz ve sabit Hubble parametresine sahip evrenleri ($k = 0, H = \text{Sabit}$) tasvir eden bu modeller K0 olarak anılacaktır.
- **Milne Denge Noktası:** Madde ve karanlık enerjinin bulunmadığı boş hiperbolik evrenleri ($k = -1, \Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0$) temsil eden bu model kısaca M olarak anılacaktır.
- **Einstein Statik Denge Noktaları:** $\gamma \geq \frac{2}{3}$ durumunda karşımıza çıkan statik eliptik evrenlere ($k = +1, H = \text{Sabit}, H' = 0$) karşılık gelen bu modeller kısaca E olarak anılacaktır.
- **Kozmolojik Sabitsiz Denge Noktaları:** Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $\gamma = 2/3$ durumunda karşımıza çıkan kozmolojik sabitin bulunmadığı; F, E ve M modellerini de içeren ve Hubble parametresinin sıfır olduğu bu modeller ($\Omega_\Lambda = 0, H = 0$) kısaca $\Lambda 0$ olarak anılacaktır.
- **Chaplygin Denge Noktası:** Modifiye Chaplygin Gazı kullanılarak oluşturulan durum uzayında karşımıza çıkan ve madde ile Chaplygin Gazının birlikte baskın olduğu ve kozmolojik sabitin bulunmadığı düz evreni ($k = 0, \Omega = 1, \Omega_A = \alpha \sqrt{\gamma} \Omega, \Omega_\Lambda = 0$) temsil eden bu model CH olarak anılacaktır.

- Chaplygin-de Sitter Denge Noktaları: Modifiye Chaplygin Gazı kullanılarak oluşturulan durum uzayında karşımıza çıkan ve CH ile dS'yi de içeren düz evrenleri ($k = 0, \Omega_A = \alpha_{+1}\sqrt{\gamma}\Omega$) temsil eden bu modeller CD olarak anılacaktır.
- Kozmolojik sabit ve Chaplygin Gazsız Denge Noktaları: Modifiye Chaplygin Gazı için $\gamma = 2/3$ durumunda karşımıza çıkan kozmoloji sabit ve Chaplygin Gazının ikisinin birden sıfır olduğu bu modeller ($\Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0$) kısaca $\Lambda A0$ olarak anılacaktır.

4.1. LİNEER BAROTROPİK MÜKEMMEL AKIŞKAN İÇİN DİNAMİK SİSTEM ANALİZİ

$k = 0, -1$ durumu için (3.3) - (3.5) evrim denklemleri ile (3.6) bağ denklemini ve (3.7)'deki q 'nun tanım denklemini kullanırsak $H > 0$ için

$$J_- = \begin{bmatrix} (3\gamma-2)\Omega - 2\Omega_\Lambda & -2\Omega & 0 \\ (3\gamma-2)\Omega_\Lambda & 2(\frac{3\gamma}{2}-1)\Omega - 4\Omega_\Lambda + 2 & 0 \\ -2(\frac{3\gamma}{2}-1)H & H & \Omega_\Lambda - (\frac{3\gamma}{2}-1)\Omega - 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Jakobiyeen matrisini elde ederiz. $H < 0$ durumunda Jakobiyeen matrisi (4.1) matrisinin negatifi olur.

$k = +1$ durumu için (3.11) - (3.14) evrim denklemleri ile (3.15) - (3.16) bağ denklemlerini kullandığımızda

$$J_+ = \begin{bmatrix} 3\gamma Q(2\Omega-1) & 3\gamma\Omega(\Omega-1) & 0 \\ \frac{3\gamma}{2}(Q^2-1) & Q(3\gamma\Omega-2) & 0 \\ -\frac{3\gamma H}{2Q} & -H + \frac{3\gamma\Omega-2}{2Q^2} & -Q + \frac{2-3\gamma\Omega}{2Q} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Jakobiyeen matrisini elde ederiz. (4.2) matrisi $H < 0$ ve $H > 0$ durumlarının ikisini de içermektedir.

Durum uzayı $\gamma = 0, 0 < \gamma < \frac{2}{3}, \gamma = \frac{2}{3}, \frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ değerleri için farklı yapılar göstermektedir. Biz, bu durumların tümü için durum uzaylarını çizdirecek ve detaylı bir şekilde inceleyeceğiz.

Bu durum için diğer evrim denklemleri H 'ye bağlı olmadığından H 'yi dışarda bırakarak iki

boyutlu kompakt bir durum uzayı oluşturabilirdik fakat biz, durum uzayında üçüncü boyutu kullanarak H 'deki değişimi de göstermek istediğimizden dinamik sistemi bu şekilde kurduk.

4.1.1. $\gamma = 0$ durumu

Efektik olarak kozmolojik sabite denk olan bu durumda, Şekil 4.1.a ve Şekil 4.1.b ile Tablo 4.1 ve Tablo 4.2'de görüldüğü gibi F ile dS modellerini de içeren $K0$ modelleri ve Milne modeli olmak üzere iki tip çözüm vardır. Milne çözümü $H < 0$ ve $H > 0$ durumlarının ikisi için de semer özelliği gösterir ve kararsızdır. $K0$ çözümü ise hem $H < 0$ hem de $H > 0$ halinde sıfırı özdeğer olarak içerdği için bu durumdaki kararlılığı hakkında lineer kararlılık analizi ile bilgi edinilemez. Genişleyen ve büzüşen evren modellerinin ikisini birlikte değerlendirdiğimizde çözümlerin hiçbirinin kararlı olmadığı görülmektedir.

Geçmiş çekicisi Milne modeli olan evrenler bir $K0$ modeline genişler. Geçmişinde bir $K0$ modeline asimptot olan hiperbolik modeller $H < 0$ durumunda Milne modeline büzüşürken eliptik modeller büzüşüp genişleyerek ilk halleri olan $K0$ modeline evrilirler. $K0$ modelleri yani düz evren modelleri $H > 0$ durumunda global çekici olurken $H < 0$ durumunda global itici olmaktadır fakat durum uzayı bir bütün olarak değerlendirildiğinde $K0$ 'ın global bir çekici olmadığı görülmektedir.

Genişleyen ve büzüşen evren modellerinin ikisini birlikte değerlendirdiğimizde çözümlerin hiçbirinin kararlı olmadığı ve durum uzayında global bir çekicinin var olmadığı görülmektedir.

Modellerin evrimi Şekil 4.2'de özetlenmektedir.

- $\Omega_\Lambda = 0$ Alt manifoldu:

Şekil 4.1.c'de görüldüğü gibi, kozmolojik sabitin bulunmadığı modelleri temsil eden bu manifoldda, geçmiş çekicisi bir büzüşen düz F modeli olan eliptik modeller bir genişleyen düz F modeline evrilirler. Hiperbolik modeller ise Milne modeline doğru büzüşürler. Bu durumda çöküş sonsuza kadar devam edebileceği gibi bir noktadan sonra geri sıçrama gerçekleştirerek genişleyen bir F modeline de evrilebilirler.

Bu alt manifold özelinde kararlı bir denge noktası bulunmamaktadır.

- $\Omega = 0$ Alt Manifoldu:

Şekil 4.1.c’de görüldüğü gibi madde-enerji yoğunluğunun sıfır olduğu modelleri temsil eden bu alt manifoldda çözüm noktaları olarak Milne ve de Sitter modelleri bulunmaktadır. $H < 0$ durumunda denge $k = -1$ haline doğru bozulursa evren Milne modeline asimptot olacak şekilde büzülür. Bu büzülme Hubble parametresi sürekli küçülecek şekilde sonsuza kadar devam edebilir. Eğer büzülme bir noktada sonlanır ve model geri sıçrarsa evren Hubble parametresinin sabit olduğu bir de Sitter modeline evrilir.

Denge $k = +1$ yönüne bozulursa Hubble parametresi sürekli artış gösterir. Bu artış neticesinde evrenin büzülmesi yavaşlar ve evren herhangi bir tekilliğe maruz kalmadan genişlemeye başlar. Bir büzülme de Sitter modelinden başlayan evren, bir genişleyen de Sitter modeline evrilir.

Bu alt manifold özelinde de kararlı bir denge noktası bulunmamaktadır.

- $k = 0$ Alt Manifoldu:

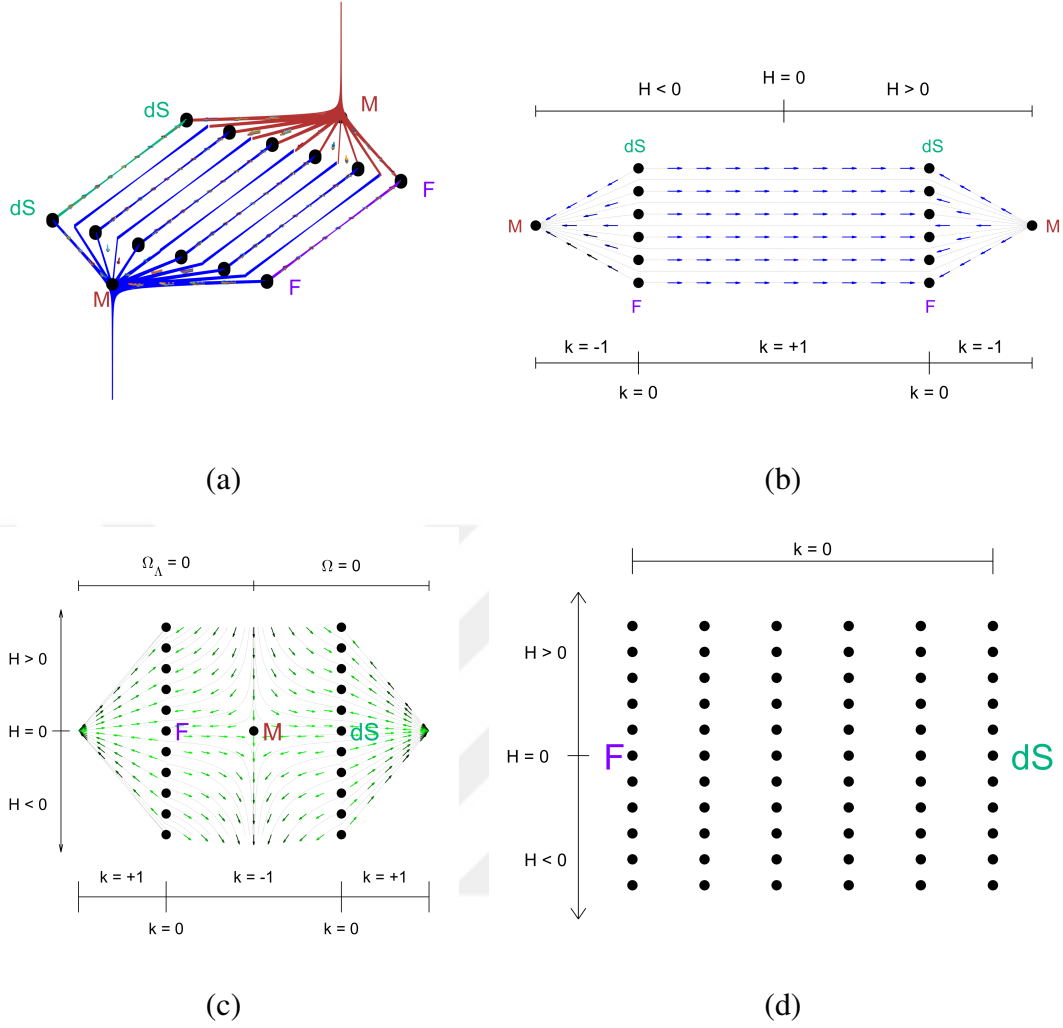
Şekil 4.1.d’de görüldüğü gibi düz modelleri temsil eden bu manifoldda tüm $K0$ modelleri yani de Sitter ve düz Friedmann modellerini de içeren sabit H değerine sahip düz evrenler birer çözüm noktasıdır. Bu alt manifolddaki çözüm noktalarının etrafındaki tüm noktalar da birer denge noktasıdır. Bu nedenle denge ne yöne doğru bozulursa bozulsun evren yine bir denge noktasına denk gelecektir. Dolayısıyla bu alt manifolddaki denge noktalarından hiçbirisi kararlı değildir.

Tablo 4.1: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $k = 0, -1$ ve $\gamma = 0$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri

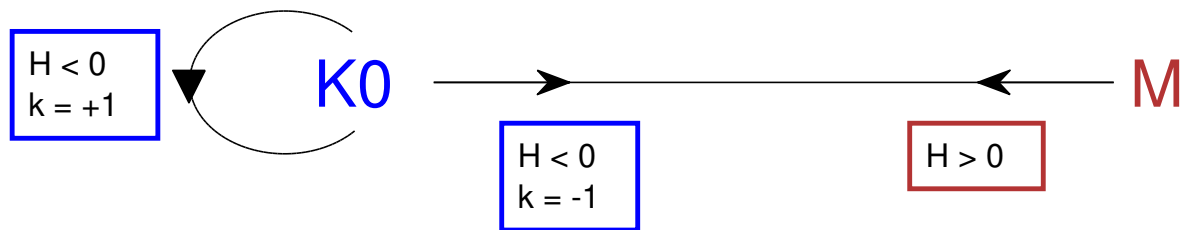
$(\Omega, \Omega_\Lambda, H)$			Özdeğerler			Kararlılık	Etki
			λ_1	λ_2	λ_3		
M	$(0, 0, 0)$	$H > 0$	-1	2	2	Kararsız	-
	$(0, 0, 0)$	$H < 0$	1	-2	-2	Kararsız	-
K0	$(\Omega, 1 - \Omega, H)$	$H > 0$	-2	0	0	-	Çekici
	$(\Omega, 1 - \Omega, H)$	$H < 0$	2	0	0	-	İtici

Tablo 4.2: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $k = +1$ ve $\gamma = 0$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri

(Ω, Q, H)		Özdeğerler			Kararlılık	Etki
		λ_1	λ_2	λ_3		
K0	$(\Omega, 1, H) \quad H > 0$	-2	0	0	-	Çekici
	$(\Omega, -1, H) \quad H < 0$	2	0	0	-	İtici



Şekil 4.1: Linear Barotropik Mükemmel Akışkan için $\gamma = 0$ durumunda durum uzayları (a) 3 boyutlu durum uzayı, z eksen H 'ye denk gelmektedir ve yörüngeler geçmiş çekicilerine göre renklendirilmiştir. (b) Durum uzayının projeksiyonu, grafik altta ve üstte sırasıyla $\Omega_\Lambda = 0$ ve $\Omega = 0$ alt manifoldları ile sınırlanmıştır (c) $\Omega = 0$ ve $\Omega_\Lambda = 0$ alt manifoldları (d) $k = 0$ alt manifoldu. Grafiklerdeki siyah noktalar çözüm noktalarını göstermekte ve F, M ve dS sırasıyla düz Friedmann çözümlerini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, k = 0, H = \text{Sabit}$), Milne çözümünü ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, k = -1, H = 0$) ve de Sitter çözümlerini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, k = 0, H = \text{Sabit}$) temsil etmektedir. (c)'de, okların rengi ivmenin büyüklüğüne göre koyulaşmaktadır.



Şekil 4.2: Linear Barotropik Mükemmel Akışkan için $\gamma = 0$ durumunda modellerin evrim grafiği. $K0$ düz modelleri ($k = 0$), M ise Milne modelini temsil etmektedir.

4.1.2. $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumu

Şekil 4.3.a ve Şekil 4.3.b ile Tablo 4.3 ve Tablo 4.4'te görüldüğü gibi bu durumda 3 çeşit denge noktası vardır. Bunlar de Sitter çözümleri, düz Friedmann çözümü ve Milne çözümüdür. Bu çözümlerin hiçbiri kararlı değildir.

Geçmişinde Milne modeline asimptot olan evrenler $\Lambda = 0$ durumunda düz Friedmann modeline genişler. Eğer $\Lambda = 0$ değil ise bir de Sitter modeline evrilirler.

Geçmişinde bir de Sitter modeline asimptot olan eliptik modeller ise büzüşüp genişleyerek tekrar bir de Sitter modeline evrilirken düz modeller düz Friedmann modeline; hiperbolik modeller ise Milne modeline büzüşürler

Geçmiş çekicisi düz Friedmann modeli olan hiperbolik modeller ise Milne modeline büzüşürler, düz modeller de Sitter modeline genişlerler. Eliptik modeller ise önce büzüşüp sonra genişleyerek tekrar düz Friedmann modeline evrilirler.

de Sitter modelleri $H > 0$ durumunda çekici özelliği gösterirken $H < 0$ durumunda itici olmaktadır ve bu özellikleri iki durum için de global bir nitelik taşımaz.

Görüleceği üzere bu durum için de kararlı bir denge noktası ya da global çekici bulunmamaktadır.

Modellerin evrimi Şekil 4.4'te özetlenmektedir.

- $\Omega_\Lambda = 0$ Alt manifoldu:

Şekil 4.3.c'de görüldüğü gibi bu alt manifoldda düz Friedmann modeli ile Milne modeli denge noktaları olmaktadır. Düz Friedmann çözümünün etrafındaki yörüngeleri incelediğimizde hiperbolik modellerin $H < 0$ olduğunda Milne modeline asimptot olacak şekilde büzüştüğünü görüyoruz. Bu büzüşme sonsuza kadar devam edip büyük çöküşe neden olabilir ve Hubble parametresi de sonsuz küçüklükte bir değer alabilir. Bunun yanında büzüşme bir noktada durup model geri sekerse tekrar düz Friedmann modeline evrilir. Negatif Hubble parametresi ile başlayan eliptik modeller ise önce büzüşüp sonra genişleyerek tekrar düz Friedmann modeline evrilirler. Bu süreçte Hubble parametresi bir noktaya kadar azalır, sonra artmaya başlar ve pozitif

değerinin bir noktasında tekrar azalmaya başlar ve düz Friedmann modelinde sıfır olur. $k = 0$ ile başlayan model ya sonsuza kadar artan bir ivmeyle büzüşür ve büyük çöküşe uğrar ya da geri sekerek tekrar düz statik Friedmann modeline evrilir.

Milne modelinin etrafındaki yörüngeler $H > 0$ durumunda düz Friedmann modeline evrilirken, $H < 0$ halinde Milne modeline asimptot olacak şekilde büzüşürler, Buradan geri sekmeleri halinde de düz Friedmann çözümüne evrilirler.

Dolayısıyla bu alt manifold özelinde kararlı bir denge noktası bulunmamaktadır.

- $\Omega = 0$ Alt Manifoldu:

Şekil 4.3.c'de görüldüğü gibi bu alt manifold için denge noktaları Milne modeli ile de Sitter modelleri olmaktadır. Milne modeli $\Omega_\Lambda = 0$ ile $\Omega = 0$ alt manifoldlarının kesişiminde bulunmaktadır.

Milne modelinin etrafındaki yörüngeler pozitif Hubble parametresi durumunda bir de Sitter modeline genişler iken negatif Hubble parametresi ile başladıklarında Milne modeline asimptot olacak şekilde büzüşürler. Bu büzüşmenin kaderi modelin bir noktada sekip sekmeyeceğine bağlıdır. Model geri sekmezse Milne modeline doğru büyük bir çöküş meydana gelir, geri sekmesi durumunda ise de Sitter modeline evrilir.

Bu alt manifoldda Hubble parametresinin her değerine denk gelen bir de Sitter çözümü mevcuttur. de Sitter çözümlerinin etrafındaki yörüngeleri incelediğimizde Hubble parametresinin pozitif olması durumunda bu yörüngelerin çözüm noktasından uzaklaşmadığını aksine tekrar bu çözüm noktasına yöneldiğini görüyoruz. de Sitter modelinin etrafındaki yörüngeler $H < 0$ halinde başladıkları k değerine bağlı olacak şekilde iki farklı sona sahiptir. Hiperbolik modeller Milne modeline doğru büzüşürler ve ya büyük bir çöküşe uğrayıp sonsuza kadar büzüşmeye devam ederler ya da bir noktada geri sekip bir genişleyen de Sitter modeline evrilirler. Eliptik modeller ise önce büzüşüp sonra genişleyerek ve bu süreçte hiçbir tekilliğe maruz kalmadan genişleyen bir de Sitter modeline evrilir.

Bu alt manifold özelinde de kararlı bir model bulunmamaktadır.

- $k = 0$ Alt Manifoldu:

Şekil 4.3.d'de, görüldüğü gibi bu alt manifoldda düz Friedmann çözümü ile de Sitter çözümleri bulunmaktadır. Geçmişinde bir düz Friedmann modeline asimptot olan yörüngeler bir de Sitter modeline genişlemektedir. Bir büzüşen de Sitter

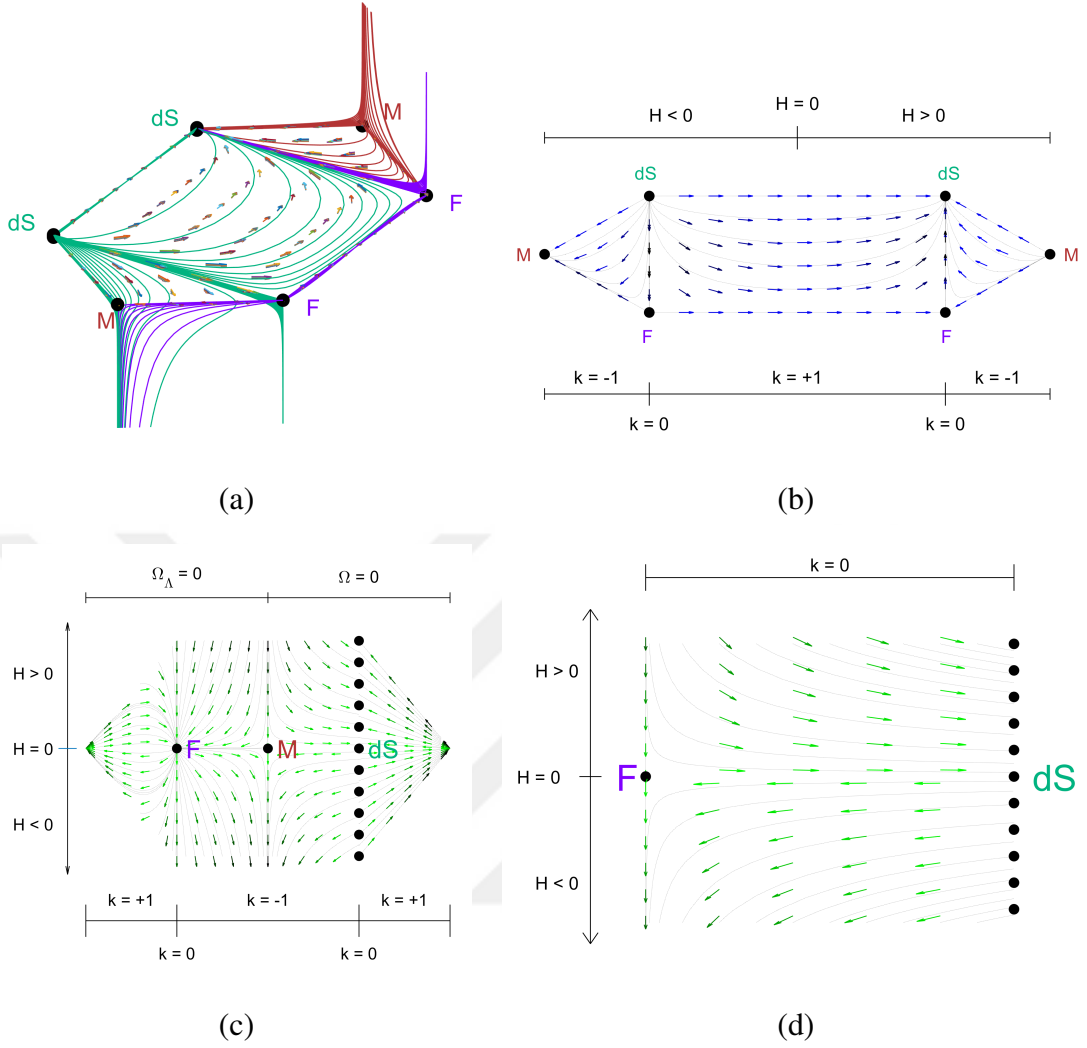
modelinden başlayan yörüngeler ise düz Friedmann çözümüne doğru büzülerek ya büyük bir çöküşe uğramakta ya da geri sekerek bir genişleyen de Sitter modelinde sonlanmaktadır. Dolayısıyla bu alt manifold özelinde de kararlı bir model mevcut değildir.

Tablo 4.3: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $k = 0, -1$ ve $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri

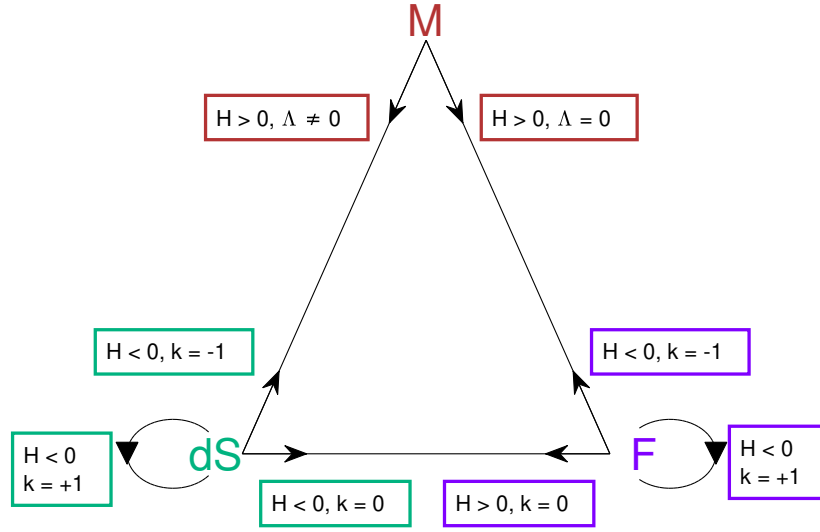
$(\Omega, \Omega_\Lambda, H)$			Özdeğerler			Kararlılık	Etki
			λ_1	λ_2	λ_3		
M	$(0, 0, 0)$	$H > 0$	-1	2	$2 - 3\gamma$	Kararsız	-
	$(0, 0, 0)$	$H < 0$	1	-2	$3\gamma - 2$	Kararsız	-
dS	$(0, 1, H)$	$H > 0$	-2	0	-3γ	-	Çekici
	$(0, 1, H)$	$H < 0$	2	0	3γ	-	İtici
F	$(1, 0, 0)$	$H > 0$	$3\gamma - 2$	3γ	$-3\gamma/2$	Kararsız	-
	$(1, 0, 0)$	$H < 0$	$2 - 3\gamma$	-3γ	$3\gamma/2$	Kararsız	-

Tablo 4.4: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $k = 0, +1$ ve $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri

(Ω, Q, H)			Özdeğerler			Kararlılık	Etki
			λ_1	λ_2	λ_3		
dS	$(0, 1, H)$	$H > 0$	-2	0	-3γ	-	Çekici
	$(0, -1, H)$	$H < 0$	2	0	3γ	-	İtici
F	$(1, 1, 0)$	$H > 0$	$3\gamma - 2$	3γ	$-3\gamma/2$	Kararsız	-
	$(1, -1, 0)$	$H < 0$	$2 - 3\gamma$	-3γ	$3\gamma/2$	Kararsız	-



Şekil 4.3: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $0 < \gamma < 2/3$ durumunda durum uzayları (a) 3 boyutlu durum uzayı, z eksen H 'ye denk gelmektedir ve yörüngeler geçmiş çekicilerine göre renklendirilmiştir. (b) Durum uzayının projeksiyonu, grafik altta ve üstte sırasıyla $\Omega_\Lambda = 0$ ve $\Omega = 0$ alt manifoldları ile sınırlanmıştır (c) $\Omega = 0$ ve $\Omega_\Lambda = 0$ alt manifoldları (d) $k = 0$ alt manifoldu. Grafiklerdeki siyah noktalar çözüm noktalarını göstermekte ve F, M ve dS sırasıyla düz Friedmann çözümünü ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, k = 0, H = 0$) Sabit), Milne çözümünü ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, k = -1, H = 0$) ve de Sitter çözümlerini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, k = 0, H = \text{Sabit}$) temsil etmektedir. (c) ve (d)'de, okların rengi ivmenin büyüklüğüne göre koyulaşmaktadır.



Şekil 4.4: Linear Barotropik Mükemmel Akışkan için $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumunda modellerin evrim grafiği. F, M ve dS sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, k = 0$), Milne modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, k = -1$) ve de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, k = 0, H = \text{Sabit}$) temsil etmektedir.

4.1.3. $\gamma = \frac{2}{3}$ durumu

Şekil 4.5.a ve Şekil 4.5.b ile Tablo 4.5 ve Tablo 4.6’da görüldüğü gibi durum uzayının çatallanma noktası olan bu durumda de Sitter çözümleri ve Milne modeli, düz Friedmann modeli ve Einstein statik çözümlerini de içeren $\Lambda_0 (\Lambda = 0, H = 0)$ modelleri olmak üzere iki farklı çözüm tipi vardır. Bu çözümlerden hiçbiri kararlı değildir.

$H > 0$ halinde tüm yörüngelerin geçmişinde kozmolojik sabiti olmayan bir model bulunurken hepsi geleceklerinde bir de Sitter modeline evrilirler.

$H < 0$ durumunda ise tüm yörüngeler bir de Sitter modelinden başlar ve başlangıç durumundaki özelliklerine bağlı olarak Λ_0 modellerinden birine asimptot olacak şekilde büzüşebilecekleri gibi genişleyen bir de Sitter modeline de evrilebilirler. Hiperbolik ve düz modeller bir Λ_0 evrenine büzüşürler. Eliptik modeller ise $\Lambda < \Lambda_c$ ise bir Λ_0 modeline; $\Lambda = \Lambda_c$ ise Einstein statik modeline ve $\Lambda > \Lambda_c$ ise de bir genişleyen de Sitter modeline evrilirler. Burada Λ_c modelin Einstein statik evrenine evrilmesi için gereken kritik Λ değerini temsil etmektedir.

de Sitter modelleri $H > 0$ durumunda global çekici olurken $H < 0$ durumunda global itici olmaktadır.

Durum uzayının tamamı değerlendirildiğinde kararlı bir denge noktasının ya da global bir çekicinin var olmadığı görülmektedir.

Modellerin evrimi Şekil 4.6'da özetlenmektedir.

- $\Omega_\Lambda = 0$ Alt Manifoldu:

Şekil 4.5.c'de görüldüğü gibi bu alt manifolddaki bütün yörüngeler $H < 0$ durumunda bir Λ_0 modelinden başlamaktadır. Bu yörüngeler sonsuza kadar büzüşerek büyük çöküşe uğrayabilecekleri gibi geri sekerek başladıkları modele de genişleyebilirler.

Bu alt manifold özelinde kararlı bir denge noktası ya da global bir çekici bulunmamaktadır.

- $\Omega = 0$ Alt Manifoldu:

Şekil 4.5.c'de görüldüğü gibi bu alt manifoldda Milne modeli ile de Sitter modelleri olmak üzere iki tip çözüm vardır. Milne modelinden başlayan ve Milne modelinde sonlanan yörüngeler $\Omega_\Lambda = 0$ alt manifoldu ile $\Omega = 0$ alt manifoldunun kesişiminde bulunur ve $\Omega_\Lambda = 0$ alt manifoldu için gösterdiğimiz özellikleri taşırlar. de Sitter modellerinin etrafındaki yörüngeler ise pozitif Hubble parametresi halinde bir de Sitter modeline doğru geri çekilirken, Hubble parametresi negatif olduğunda eğer $k = -1$ ile başlamışlarsa Milne modeline asimptot olacak şekilde büzüşür ve bir noktada geri sekerlerse bir genişleyen de Sitter modeline evrilirler; geri sekmezlerse sonsuza kadar büzüşmeye devam ederler. Eliptik modeller ise genişleyen bir de Sitter modelinde sonlanmaktadır. Bu süreçte Hubble parametresi sürekli artarak sabit bir değere yakınsar.

Bu alt manifold özelinde kararlı bir denge noktası ya da global bir çekici bulunmamaktadır.

- $k = 0$ Alt Manifoldu:

Şekil 4.5.d'de görüldüğü gibi bu durumda düz Friedmann çözümü ile de Sitter çözümleri bulunmaktadır. de Sitter modelinden büzüşmeye başlayan yörüngeler ya sonsuza kadar düz Friedmann modeline asimptot olacak şekilde büzüşürler ya da geri sekerek bir genişleyen de Sitter modelinde sonlanırlar.

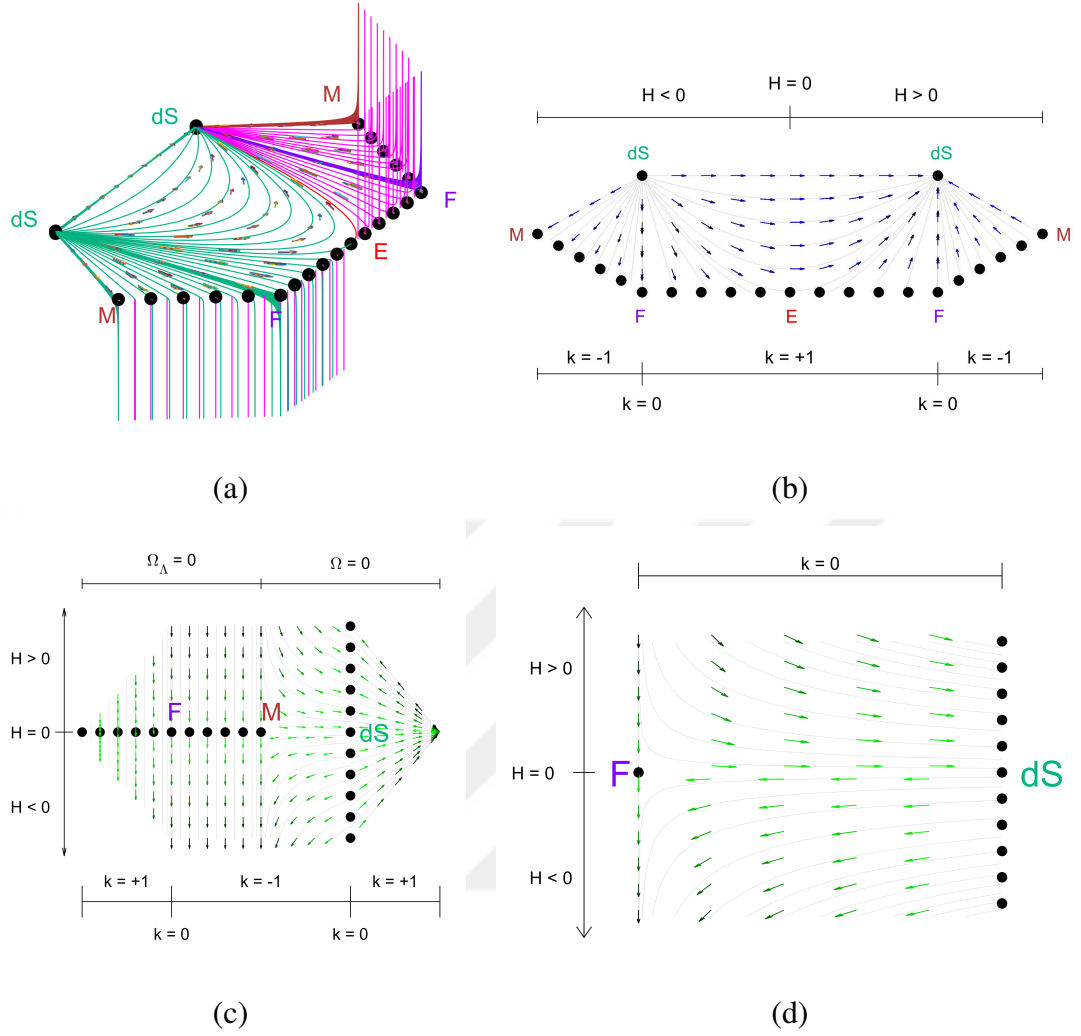
Bu alt manifold özelinde kararlı bir denge noktası ya da global bir çekici bulunmamaktadır.

Tablo 4.5: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $k = 0, -1$ ve $\gamma = \frac{2}{3}$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri

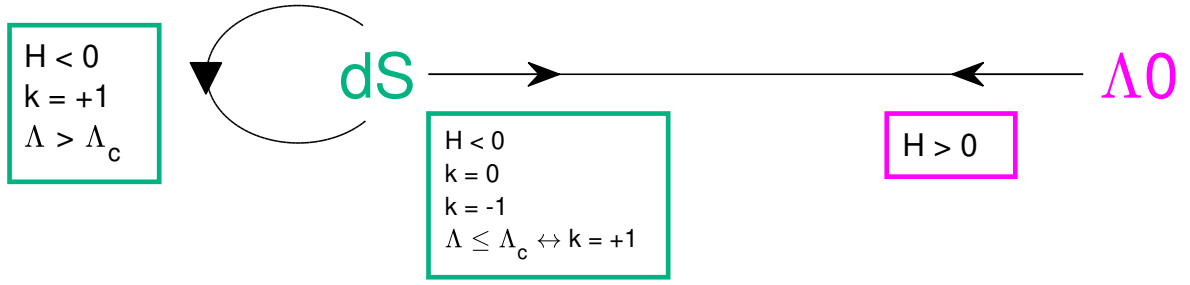
$(\Omega, \Omega_\Lambda, H)$			Özdeğerler			Kararlılık	Etki
			λ_1	λ_2	λ_3		
dS	$(0, 1, H)$	$H > 0$	-2	-2	0	-	Çekici
	$(0, 1, H)$	$H < 0$	2	2	0	-	İtici
$\Lambda 0$	$(\Omega, 0, 0)$	$H > 0$	-1	0	2	-	-
	$(\Omega, 0, 0)$	$H < 0$	1	0	-2	-	-

Tablo 4.6: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $k = 0, +1$ ve $\gamma = \frac{2}{3}$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri

(Ω, Q, H)			Özdeğerler			Kararlılık	Etki
			λ_1	λ_2	λ_3		
dS	$(0, 1, H)$	$H > 0$	-2	-2	0	-	Çekici
	$(0, -1, H)$	$H < 0$	2	2	0	-	İtici
$\Lambda 0$	$(1, Q, 0)$	$H > 0$	0	$-Q$	$2Q$	-	-
	$(1, Q, 0)$	$H < 0$	0	Q	$-2Q$	-	-



Şekil 4.5: Linear Barotropik Mükemmel Akışkan için $\gamma = 2/3$ durumunda durum uzayları (a) 3 boyutlu durum uzayı, z eksenini H 'ye denk gelmektedir ve yörüngeler geçmiş çekicilerine göre renklendirilmiştir. (b) Durum uzayının projeksiyonu, grafik altta ve üstte sırasıyla $\Omega_\Lambda = 0$ ve $\Omega = 0$ alt manifoldları ile sınırlanmıştır (c) $\Omega = 0$ ve $\Omega_\Lambda = 0$ alt manifoldları (d) $k = 0$ alt manifoldu. Grafiklerdeki siyah noktalar çözüm noktalarını göstermekte ve F, M, dS ve E sırasıyla düz Friedmann çözümünü ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, k = 0, H = 0$), Milne çözümünü ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, k = -1, H = 0$), de Sitter çözümlerini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, k = 0, H = \text{Sabit}$) ve Einstein statik çözümünü ($H = 0, H' = 0$) temsil etmektedir. (c) ve (d)'de, okların rengi ivmenin büyüklüğüne göre koyulaşmaktadır.



Şekil 4.6: Linear Barotropik Mükemmel Akışkan için $\gamma = \frac{2}{3}$ durumunda modellerin evrim grafiği. dS, de Sitter modelini; Λ_0 ise kozmolojik sabiti olmayan modelleri ($\Omega_\Lambda = 0$) temsil etmektedir.

4.1.4. $\frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ durumu

Şekil 4.7.a ve Şekil 4.7.b ile Tablo 4.7 ve Tablo 4.8’de görüleceği gibi bu durumda de Sitter çözümleri, düz Friedmann çözümü, Milne çözümü ve Einstein statik çözümü olmak üzere 4 farklı çözüm bulunmaktadır ve bu çözümlerden hiçbiri tüm Hubble parametreleri için kararlı değildir.

de Sitter çözümlerinin etrafındaki yörüngeler $H > 0$ durumunda bir de Sitter modelinde sonlanmakta $H < 0$ durumunda ise de Sitter modellerinden uzaklaşmaktadır.

Milne modelinin etrafındaki yörüngeler ise $H > 0$ durumunda $\Omega_\Lambda = 0$ ise Milne modeline doğru genişlemekte, $\Omega_\Lambda = 0$ değil ise de bir de Sitter modeline evrilmektedir. Bu modeller $H < 0$ durumunda ise $\Omega = 0$ durumunda Milne modeline büzüşmekte aksi takdirde düz Friedmann modeline evrilmektedir.

Düz Friedmann modelinin etrafındaki modeller $H < 0$ durumunda düz Friedmann modeline büzüşmektedir. $H > 0$ durumunda ise düz ve hiperbolik modeller bir de Sitter modeline evrilirler. Eliptik modeller ise $\Lambda = \Lambda_c$ halinde Einstein statik evrenine evrilirken $\Lambda < \Lambda_c$ halinde düz Friedmann modeline, $\Lambda > \Lambda_c$ durumunda ise de Sitter modeline evrilirler.

de Sitter modelleri $H > 0$ için çekici özelliği gösterirken $H < 0$ için itici olmaktadır ve bu özellikleri global bir özellik taşımaz.

Görüleceği üzere bu durum için de durum uzayının tamamı değerlendirildiğinde kararlı bir çözüm noktası ya da global bir çekici bulunmamaktadır.

Modellerin evrimleri Şekil 4.8’de özetlenmiştir.

- $\Omega_\Lambda = 0$ Alt Manifoldu:

Şekil 4.7.c’de görüldüğü gibi bu alt manifoldda denge noktaları olarak düz Friedmann modeli ile Milne modeli bulunmaktadır ve iki çözüm de kararsızdır.

Milne modelinin etrafındaki yörüngeler Hubble parametresi pozitif ise Milne modeline genişlerken negatif Hubble parametresi durumunda düz Friedmann modeline asimptot olacak şekilde büzüşürler. Büzüşme artan bir ivmeyle sonsuza kadar devam edebileceği gibi model geri sekerek tekrar Milne çözümüne de evrilebilir.

Düz Friedmann modelinin etrafındaki hiperbolik modeller ise $H > 0$ durumunda Milne modeline genişlerken $H < 0$ durumunda ise Friedmann modeline asimptot olacak şekilde büzüşürler. Eliptik modeller ise Hubble parametresi sürekli küçülecek şekilde düz Friedmann modeline asimptot olacak şekilde büzüşürler. Bu durumdaki büzüşme bir noktada sonlanır ve model geri sekerse de yine Hubble parametresi sürekli küçülecek şekilde önce genişleyip sonra büzüşürler. Yani bu durumda model hiçbir çözüm noktasına ulaşmaksızın bir döngüye girebilir ya da sonsuza kadar çöküşüne devam edebilir.

Bu alt manifold özelinde kararlı bir denge noktası ya da global bir çekici bulunmamaktadır.

- $\Omega = 0$ Alt Manifoldu:

Şekil 4.7.c’de görüldüğü gibi bu alt manifold için denge noktaları Milne modeli ile de Sitter modelleridir. de Sitter modellerinin etrafındaki yörüngeler $H > 0$ durumunda bir de Sitter modelinde sonlanırken $H < 0$ durumunda ise eliptik modeller büzüşüp genişleyerek ve herhangi bir tekiliğe maruz kalmadan bir genişleyen de Sitter modeline evrilirler, hiperbolik modeller ise Milne modeline doğru büzüşürler.

Bu alt manifold özelinde kararlı bir denge noktası ya da global bir çekici bulunmamaktadır.

- $k = 0$ Alt Manifoldu:

Şekil 4.7.d’de görüldüğü gibi bu durumdaki denge noktaları düz Friedmann modeli ile de Sitter modelleridir. $H > 0$ durumunda yörüngeler düz Friedmann modeline asimptot olan bir noktadan başlayıp bir de Sitter modelinde sonlanırlar. $H < 0$ durumunda ise yörüngeler bir de Sitter modelinden başlayıp düz Friedmann modeline asimptot olacak şekilde büzüşürler. Bu büzüşmenin sonsuza kadar sürüp sürmeyeceği modelin bir

noktada geri sekip sekmemesine bağlıdır. Model geri sekerse yörünge bir genişleyen de Sitter modelinde sonlanır.

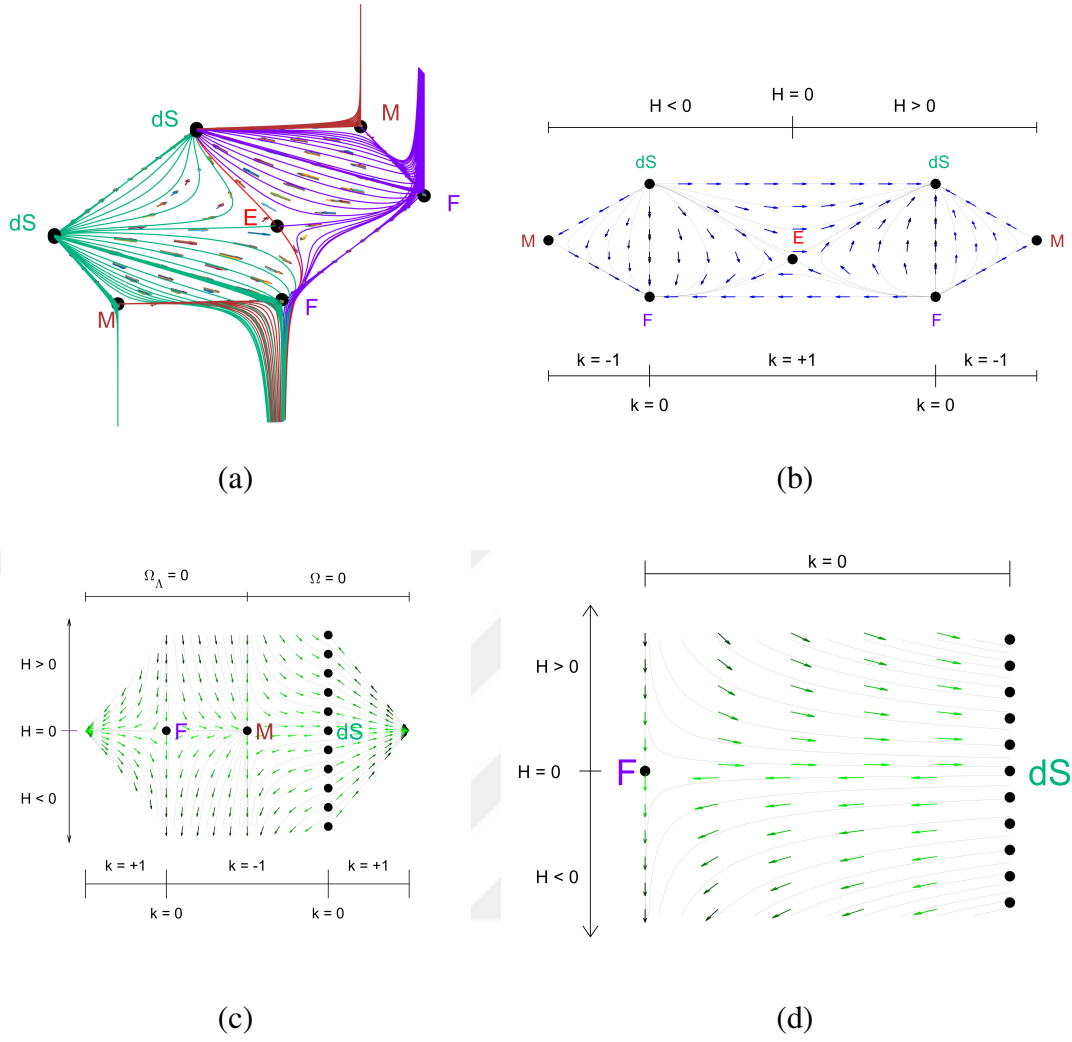
Dolayısıyla bu alt manifold özelinde kararlı bir denge noktası ya da global bir çekici bulunmamaktadır.

Tablo 4.7: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $k = 0, -1$ ve $\frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri

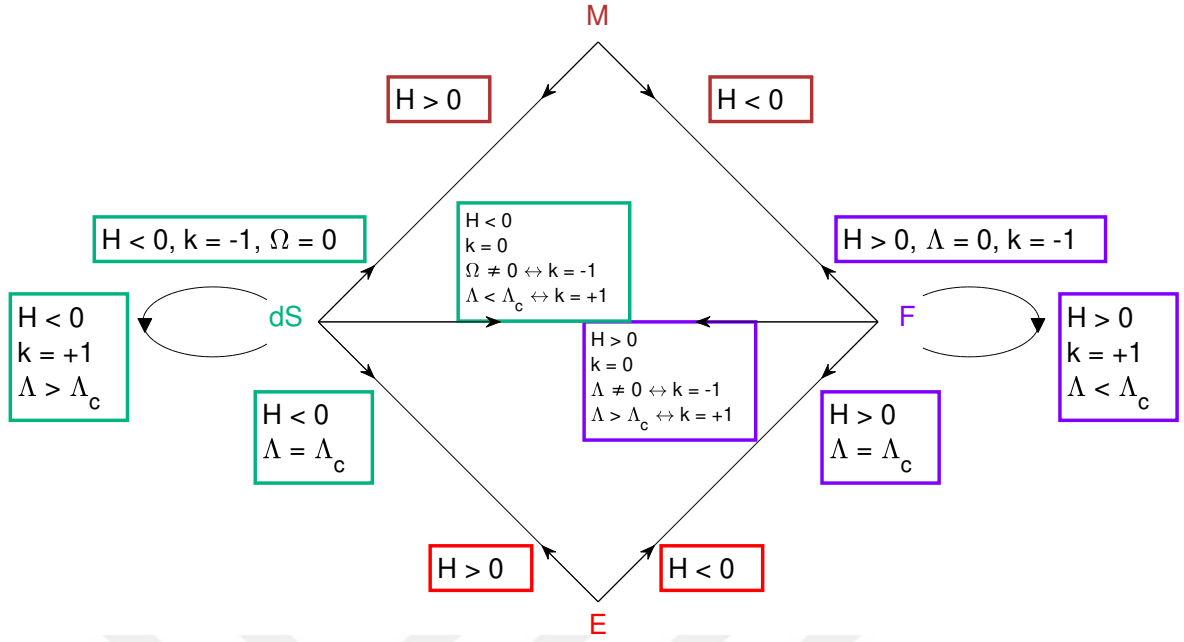
$(\Omega, \Omega_\Lambda, H)$			Özdeğerler			Kararlılık	Etki
			λ_1	λ_2	λ_3		
M	$(0, 0, 0)$	$H > 0$	-1	2	$2 - 3\gamma$	Kararsız	-
	$(0, 0, 0)$	$H < 0$	1	-2	$3\gamma - 2$	Kararsız	-
dS	$(0, 1, H)$	$H > 0$	-2	0	-3γ	-	Çekici
	$(0, 1, H)$	$H < 0$	2	0	3γ	-	İtici
F	$(1, 0, 0)$	$H > 0$	$3\gamma - 2$	3γ	$-3\gamma/2$	Kararsız	-
	$(1, 0, 0)$	$H < 0$	$2 - 3\gamma$	-3γ	$3\gamma/2$	Kararsız	-

Tablo 4.8: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $k = 0, +1$ ve $\frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri

(Ω, Q, H)			Özdeğerler			Kararlılık	Etki
			λ_1	λ_2	λ_3		
dS	$(0, 1, H)$	$H > 0$	-2	0	-3γ	-	Çekici
	$(0, -1, H)$	$H < 0$	2	0	3γ	-	İtici
F	$(1, 1, 0)$	$H > 0$	$3\gamma - 2$	3γ	$-3\gamma/2$	Kararsız	-
	$(1, -1, 0)$	$H < 0$	$2 - 3\gamma$	-3γ	$3\gamma/2$	Kararsız	-
E	$(\frac{2}{3\gamma}, 0, 0)$	$\frac{H > 0}{H < 0}$	0	$-\frac{\sqrt{12\gamma - 8}}{2}$	$\frac{\sqrt{12\gamma - 8}}{2}$	-	-



Şekil 4.7: Linear Barotropik Mükemmel Akışkan için $2/3 < \gamma \leq 2$ durumunda durum uzayları (a) 3 boyutlu durum uzayı, z eksenini H 'ye denk gelmektedir ve yörüngeler geçmiş çekicilerine göre renklendirilmiştir. (b) Durum uzayının projeksiyonu, grafik altta ve üstte sırasıyla $\Omega_\Lambda = 0$ ve $\Omega = 0$ alt manifoldları ile sınırlanmıştır (c) $\Omega = 0$ ve $\Omega_\Lambda = 0$ alt manifoldları (d) $k = 0$ alt manifoldu. Grafiklerdeki siyah noktalar çözüm noktalarını göstermekte ve F , M ve dS sırasıyla düz Friedmann çözümü ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, k = 0, H = 0$) Sabit), Milne çözümünü ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, k = -1, H = 0$) ve de Sitter çözümlerini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, k = 0, H = \text{Sabit}$) temsil etmektedir. (c) ve (d)'de, okların rengi ivmenin büyüklüğüne göre koyulaşmaktadır.



Şekil 4.8: Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için $\frac{2}{3} < \gamma < 2$ durumunda modellerin evrim grafiği. F, M, dS ve E sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, k = 0$), Milne modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, k = -1$), de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, k = 0, H = \text{Sabit}$) ve Einstein statik modelini ($H = 0, H' = 0$) temsil etmektedir.

4.2. MODİFİYE CHAPLYGİN GAZI İÇİN DİNAMİK SİSTEM ANALİZİ

$k = 0, -1$ durumunda (3.20)-(3.22) denklemleri ile oluşan ve Ω , Ω_Λ ve Ω_A için belirlenen üç boyutlu indirgenmiş dinamik sistemi elde ediyoruz. (2.51)'te verilmiş olan zayıf enerji koşulunu, $\Lambda \geq 0$ eşitsizliğini ve (3.24)'da verilen bağ denklemini kullandığımızda

$$0 \leq \Omega, \quad 0 \leq \Omega_\Lambda, \quad 0 \leq \Omega + \Omega_\Lambda \leq 1, \quad \Omega_A \leq \alpha_{+1} \sqrt{\gamma} \Omega \quad (4.3)$$

şeklindeki sınır koşullarını elde ediyoruz. Görüldüğü gibi bu halde durum uzayı üç boyutlu ve kompakt olmaktadır.

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
& (6\gamma - 4)\Omega - 2\Omega_\Lambda - 3\gamma - \frac{3\Omega_A^{\alpha+1}(\Omega + \alpha - \Omega\alpha)}{\Omega^{\alpha+1}} + 2 \\
& -2\Omega \\
& -\frac{3\Omega_A^\alpha(\Omega - 1)(\alpha + 1)}{\Omega^\alpha}
\end{aligned} \right] \\
& \left[\begin{aligned}
& (3\gamma - 2)\Omega_\Lambda + \frac{3\Omega_\Lambda\Omega_A^{\alpha+1}\alpha}{\Omega^{\alpha+1}} \\
& (3\gamma - 2)\Omega - 4\Omega_\Lambda - \frac{3\Omega_A^{\alpha+1}}{\Omega^\alpha} + 2 \\
& -\frac{3\Omega_\Lambda\Omega_A^\alpha(\alpha + 1)}{\Omega^\alpha}
\end{aligned} \right] \\
& \left[\begin{aligned}
& (3\gamma - 2)\Omega_A + \frac{3\Omega_A^{\alpha+2}\alpha}{\Omega^{\alpha+1}} \\
& -2\Omega_A \\
& (3\gamma - 2)\Omega - 2\Omega_\Lambda - \frac{3\Omega_A^{\alpha+1}(2 + \alpha)}{\Omega^\alpha} + 2
\end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

(4.4)

Jakobiyen matrisi bu durum için (4.4)'teki gibidir. $k = 0, +1$ durumu için ise (3.27)-(3.29)'te verilen ve Q , Ω ve Ω_A için oluşan üç boyutlu dinamik sistemi elde ediyoruz.

Zayıf enerji koşulu ve $\Lambda \geq 0$ eşitsizliği ile (3.31)'de verilen bağ denklemini göz önüne aldığımızda

$$0 \leq \Omega \leq 1, \quad -1 \leq Q \leq 1, \quad \Omega_A \leq \sqrt[\alpha+1]{\gamma} \Omega \quad (4.5)$$

şeklindeki sınır koşullarına ulaşıyoruz. Jakobiyen matrisi ise

$$\begin{bmatrix} -Q\left(\frac{3\Omega_A^{\alpha+1}}{\Omega^\alpha} - 3\Omega\gamma + 2\right) & (Q^2 - 1)\left(\frac{3\gamma}{2} + \frac{3\Omega_A^{\alpha+1}\alpha}{2\Omega^{\alpha+1}}\right) & -\frac{3\Omega_A^\alpha(Q^2 - 1)(\alpha + 1)}{2\Omega^\alpha} \\ 3\Omega\gamma(\Omega - 1) - \frac{3\Omega_A^{\alpha+1}(\Omega - 1)}{\Omega^\alpha} & 3Q\gamma(2\Omega - 1) - \frac{3Q\Omega_A^{\alpha+1}(\Omega + \alpha - \Omega\alpha)}{\Omega^{\alpha+1}} & -\frac{3Q\Omega_A^\alpha(\Omega - 1)(\alpha + 1)}{\Omega^\alpha} \\ 3\Omega\Omega_A\gamma - \frac{3\Omega_A^{\alpha+2}}{\Omega^\alpha} & 3Q\Omega_A\left(\gamma + \frac{\Omega_A^{\alpha+1}\alpha}{\Omega^{\alpha+1}}\right) & 3Q\left(\gamma\Omega - \frac{(2 + \alpha)\Omega_A^{\alpha+1}}{\Omega^\alpha}\right) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

şeklinde. Durum uzayı bu hal için de üç boyutlu ve kompaktır.

Bu denklem sistemleri ilk bakışta vakum çözümleri için tekil gibi görünmektedir fakat (4.5)'te de görüleceği gibi Ω ancak A sıfıra eşit olduğunda sıfır olmaktadır. $A = 0$ hali ise Chaplygin gazının mevcut olmadığı ve Bölüm 4.1.'de incelediğimiz hal denklemi (2.47) ile verilen Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan durumunu temsil etmektedir. Dolayısıyla, denklem sistemi $A = 0$ alt manifoldunda $k = 0, -1$ için

$$\Omega' = (2q - (3\gamma - 2))\Omega \quad (4.7)$$

$$\Omega'_\Lambda = 2(1 + q)\Omega_\Lambda \quad (4.8)$$

$$\Omega'_A = 0 \quad (4.9)$$

$$q = \frac{1}{2}((3\gamma - 2)\Omega - 2\Omega_\Lambda) \quad (4.10)$$

$$K + \Omega + \Omega_\Lambda = 1 \quad (4.11)$$

ve $k = 0, +1$ için de

$$Q' = (Q^2 - 1) \left[\frac{3}{2} \gamma \Omega - 1 \right] \quad (4.12)$$

$$\Omega' = 3Q(\Omega - 1)\gamma\Omega \quad (4.13)$$

$$\Omega'_A = 0 \quad (4.14)$$

$$\Omega + \Omega_\Lambda = 1 \quad (4.15)$$

$$Q^2 - K = 1 \quad (4.16)$$

şekline dönüşmektedir ve bunlar Bölüm 4.1.'de Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için oluşturduğumuz durum uzaylarının aynılarını verir.

$k = 0, +1$ için oluşturduğumuz durum uzayı büzüşen ve genişleyen evren modellerinin ikisini de içermekte iken $k = 0, -1$ halindeki durum uzayı Hubble parametresinin pozitif ya da negatif olmasına bağlıdır. Dolayısıyla $k = 0, +1$ durumu için bir ve $k = 0, -1$ durumu içinse pozitif ve negatif Hubble parametresi için ayrı ayrı oluşturduğumuz iki adet olmak üzere toplam üç durum uzayı elde ediyoruz. Bu durum uzayları $k = 0$ alt manifoldunda kesişmekte ve bu manifold üzerinde birleştirildiklerinde tüm durumları veren ve Şekil 4.9, Şekil 4.12 ve Şekil 4.14'te görülen tam durum uzaylarını oluşturmaktadır. Burada z eksenini tüm durum uzaylarında Ω_A 'ya karşılık gelmekte ve ortada bulunan $k = 0, +1$ bölgesinde dik ve yatay eksenler sırasıyla Ω ve Q 'yu temsil etmektedir. Şekillerin yan taraflarında kalan piramit şeklindeki $k = 0, -1$ bölgelerinde M-F ve M-dS çizgileri sırasıyla Ω ve Ω_Λ eksenlerine denk gelmektedir. Durum uzaylarının limitleri $k = 0, -1$ ve $k = 0, +1$ için sırasıyla (4.3) ve (4.5) ile belirlenir.

Şekil 4.9, Şekil 4.12 ve Şekil 4.14'te görüldüğü gibi dinamik sistem $\Omega_A = 0$ (alt), $\Omega_\Lambda = 0$ (arka) and $\Omega_A = \alpha^{+1} \sqrt{\gamma} \Omega$ (ön) invaryant alt manifoldlar tarafından sınırlandırılmıştır. $k = 0$ invaryant alt manifoldu $k = 0, +1$ ve $k = 0, -1$ durum uzaylarının kesişiminde kalmaktadır. Durum uzayları γ 'nın değerine bağlı olarak farklı şekiller almaktadır. α 'nın değeri yalnızca Einstein statik çözümlerinin konumlarını değiştirdiği ve sistemin genel davranışına bir etkiye bulunmadığı için sadece $\alpha = 1$ durumunu veriyoruz. Durum uzayı $\gamma = 0$, $0 < \gamma < \frac{2}{3}$, $\gamma = \frac{2}{3}$ ve $\frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ durumları için farklı davranışlar sergilemektedir.

Dinamik sistemler, özdeğerlerin (4.4) ve (4.6)'da verilen Jakobiye matrisleri aracılığıyla elde edildiği Tablo 4.9, Tablo 4.10, Tablo 4.11, Tablo 4.12, Tablo 4.13 ve Tablo

4.14'te verilen çözümlere sahiptir. Bu çözümlerden $\gamma > \frac{2}{3}$ durumlarında varolan Einstein statik çözüm eğrisi ile Milne çözümü dışında kalanlarının tümü $k = 0$ alt manifoldunda bulunmaktadır. CD (Chaplygin-de Sitter) çözüm çizgisi olarak isimlendirdiğimiz çözümler $k = 0$ alt manifoldu ile $\Omega_A = \alpha^{+1}\sqrt{\gamma}\Omega$ alt manifoldunun kesişiminde kalmaktadır. Ω ve Ω_A 'nın maksimum değerlerini aldığı CH (Chaplygin gazı) çözümü ile Ω_A 'nın maksimum değerine ulaştığı dS (de Sitter) çözümü CD çözüm çizgisinin sınırlarında yer almaktadır.

4.2.1. $\gamma = 0$ durumu

Bu durumda $\Omega_A \leq \alpha^{+1}\sqrt{\gamma}\Omega$ kısıtından dolayı Ω_A her zaman sıfırdır ve dolayısıyla durum uzayı Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan için oluşturduğumuz $\gamma = 0$ durumundakiyle aynıdır. Bu durumu daha önce incelemiş olduğumuz için tekrar vermiyoruz.

4.2.2. $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumu

Bu durum için tam durum uzayı Şekil 4.9'da verilmiştir. İnvaryant alt manifoldlar ise Şekil 4.10 ve Şekil 4.11'deki gibidir. Denge noktaları ve özellikleri Tablo 4.9 ile Tablo 4.10'da verilmiştir.

Pozitif Hubble parametresine sahip hiperbolik evrenler için kaynak noktası Milne modeli olmakta ve Chaplygin gazı ile kozmolojik sabit parametrelerinin ikisinin birden sıfır olması durumunda düz Friedmann modeline genişlemektedirler. Bu parametrelerden herhangi biri sıfır olmadığında ise bir CD modeline evrilirler. Negatif Hubble parametresi ile başlayan hiperbolik modeller ise Milne modeline büzüşürler. Chaplygin gazı ile kozmolojik sabitin sıfır olduğu modellerin kaynak noktası düz Friedmann modeli iken diğer modeller bir CD modelinden başlarlar.

Eliptik modeller ise Chaplygin gazı ve kozmolojik sabitin bulunmaması durumunda düz Friedmann modelinden başlar ve büzüşüp genişleyerek madde-enerji baskın formlarını korur ve tekrar düz Friedmann modeline evrilirler. Bunun dışındaki eliptik modellerin tümü bir CD modelinden başlayıp yine bir CD modeline evrilirler.

Düz modeller ise negatif Hubble parametresine sahip olduklarında bir CD modelinden düz Friedmann modeline büzüşürken, Hubble parametresinin pozitif olması halinde düz Friedmann modelinden bir CD modeline genişlerler.

Bu durumda, $H > 0$ için CD modelleri çekici, Milne modeli itici özelliği göstermekteyken $H < 0$ için CD modelleri itici Milne modeli ise çekici olmaktadır.

Dinamik sistemi Hubble parametresine herhangi bir kısıtlama getirmeden değerlendirdiğimizde bu durum için de kararlı bir denge noktasının ya da global bir çekicinin bulunmadığı görülmektedir. Evren bu halde de dinamik bir yapıya sahiptir ve bir modelden diğerine sürekli evrilir.

- $\Omega_\Lambda = 0$ Alt Manifoldu:

Şekil 4.10'da görüldüğü gibi bu alt manifoldda denge noktaları olarak F, M ve CH bulunmaktadır. Bu alt manifold kozmolojik sabitin bulunmadığı evrenleri temsil etmektedir. Hubble parametresinin pozitif olduğu durumdaki modeller eğer eliptikse ve Chaplygin gazına da sahip değillerse düz Friedmann modeline genişlerler. Bu durumdaki hiperbolik modeller ise Milne modelinden düz Friedmann modeline evrilirler. $H > 0$ bölgesindeki diğer modellerin hepsi Chaplygin gazının baskın olduğu CH modeline genişlerler.

Hubble parametresi negatif olduğundaysa CH itici olmaktadır. Bu durumdaki düz modeller düz Friedmann modeline, hiperbolik modeller ise Milne modeline büzüşmektedirler. Eliptik modeller ise büzüşüp genişleyerek tekrar CH modeline evrilmektedirler.

Bu alt manifold özelinde kararlı bir denge noktası ya da global bir çekici bulunmamaktadır.

- $\Omega_A = \alpha_{+1}\sqrt{\gamma}\Omega$ Alt Manifoldu:

Şekil 4.10'da görüldüğü gibi bu alt manifoldda denge noktaları CH ve dS modelleri ile sınırlanmış CD çözüm çizgisindeki her nokta ve M'dir. Pozitif Hubble parametresine sahip olan hiperbolik evrenler Milne modelinden başlayıp bir CD modeline evrilmekte iken, eliptik evrenlerin kaynak noktası bir CD modelidir ve bu modeller büzüşüp genişleyerek tekrar bir CD modeline evrilirler. Negatif Hubble parametresine sahip modellerin iticisi bir CD modeli iken bu durumdaki hiperbolik modeller Milne modeline büzüşürler, eliptik modeller ise tekrar bir CD modeline evrilirler.

CD modelleri bu manifold özelinde $H > 0$ durumunda global çekici iken $H < 0$ halinde global itici olmaktadır.

$H < 0$ ve $H > 0$ durumları birlikte değerlendirildiğinde bu alt manifold özelinde kararlı bir denge noktası ya da global bir çekici bulunmamaktadır.

• $\Omega_A = 0$ Alt Manifoldu:

Bu alt manifold Chaplygin gazının bulunmadığı ve yalnızca Lineer Barotropik Mükemmel Akışkanın bulunduğu modelleri temsil etmektedir. Bu alt manifoldun özellikleri Bölüm 4.1.'de incelendiği için tekrar vermiyoruz.

Bu alt manifold özelinde de kararlı bir denge noktası bulunmamaktadır.

• $k = 0$ Alt Manifoldu:

Şekil 4.11'de görüldüğü gibi bu alt manifoldda CD çözüm çizgisindeki tüm noktalar ile F denge noktaları olarak bulunmaktadır. Pozitif Hubble parametresine sahip modeller düz Friedmann modelinden bir CD modeline genişlerken negatif Hubble parametresine sahip olan modeller bir CD modelinden düz Friedmann modeline büzüşürler.

Bu manifoldda $H > 0$ için CD çözümleri global çekici, F ise global iticiyken; $H < 0$ durumunda F global çekici, CD çözümleri de global itici olmaktadır.

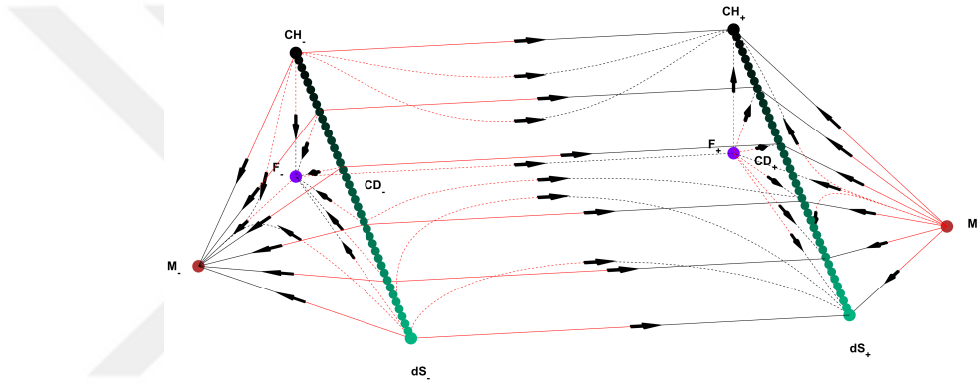
Görüleceği gibi bu manifoldda da $H < 0$ ve $H > 0$ durumları birlikte değerlendirildiğinde kararlı bir denge noktası ya da global bir çekici bulunmamaktadır.

Tablo 4.9: Modifiye Chaplygin Gazı için $k = 0, -1$ ve $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri

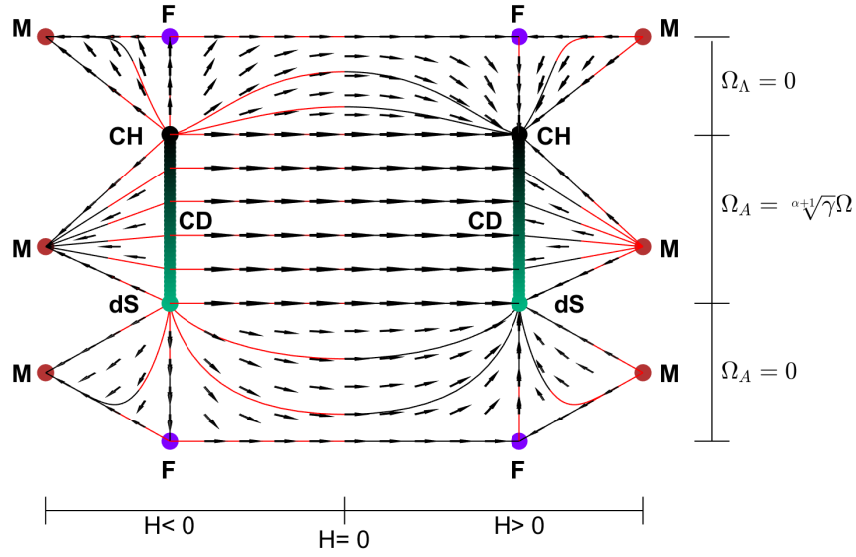
$(\Omega, \Omega_\Lambda, \Omega_A)$		Özdeğerler				Kararlılık	Etki
		λ_1	λ_2	λ_3			
M	$(0, 0, 0)$	$H > 0$	$2 - 3\gamma$	2	2	Kararsız	İtici
		$H < 0$	$3\gamma - 2$	-2	-2	Kararlı	Çekici
F	$(1, 0, 0)$	$H > 0$	$3\gamma - 2$	3γ	3γ	Kararsız	-
		$H < 0$	$2 - 3\gamma$	-3γ	-3γ	Kararsız	-
CD	$(\Omega, 1 - \Omega, \frac{\alpha+1}{\sqrt{\gamma}}\Omega)$	$H > 0$	-2	0	$-3\gamma(\alpha + 1)$	-	Çekici
		$H < 0$	2	0	$3\gamma(\alpha + 1)$	-	İtici

Tablo 4.10: Modifiye Chaplygin Gazı için $k = 0, +1$ ve $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri.

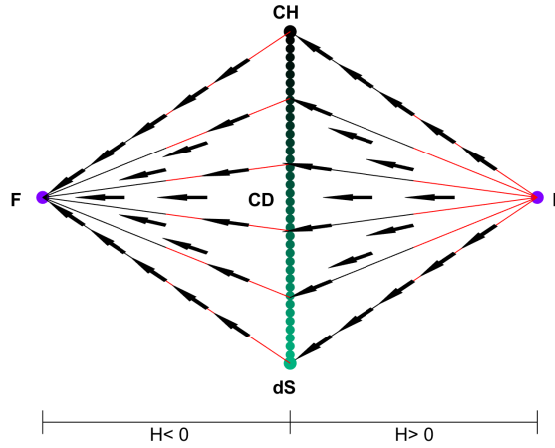
	(Q, Ω, Ω_A)	H	Özdeğerler			Kararlılık	Etki
			λ_1	λ_2	λ_3		
F	$(1, 1, 0)$	$H > 0$	$3\gamma - 2$	3γ	3γ	Kararsız	-
	$(-1, 1, 0)$	$H < 0$	$2 - 3\gamma$	-3γ	-3γ	Kararsız	-
CD	$(1, \Omega, \alpha^{+1}\sqrt{\gamma}\Omega)$	$H > 0$	-2	0	$-3\gamma(\alpha + 1)$	-	Çekici
	$(-1, \Omega, \alpha^{+1}\sqrt{\gamma}\Omega)$	$H < 0$	2	0	$3\gamma(\alpha + 1)$	-	İtici



Şekil 4.9: Modifiye Chaplygin Gazı için $\alpha = 1$ ve $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumunda durum uzayı. Burada noktalar çözümleri temsil ederken F, M, dS, CH ve CD sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = 0$), Milne modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = -1$), de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, \Omega_A = 0, k = 0$), Chaplygin Gaz modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = \alpha^{+1}\sqrt{\gamma}, k = 0$) ve Chaplygin-de Sitter çözüm çizgisini ($\Omega = \Omega, \Omega_\Lambda = 1 - \Omega, \Omega_A = \alpha^{+1}\sqrt{\gamma}\Omega, k = 0$) gösterir. z eksen durum uzayının tümü için Ω_A 'ya denk gelmekte ve ortadaki $k = +1$ bölgesinde dikey ve yatay eksenler sırasıyla Ω ve Q 'yu gösterirken yan bölgelerdeki piramit şeklindeki $k = -1$ bölgelerinde M-F ve M-dS çizgileri Ω ve Ω_Λ eksenlerine denk gelmektedir. Durum uzayının sağ bölgesi genişleyen sol bölgesi ise büzüşen evrenleri temsil eder. Çözüm noktalarını gösteren harflerin altlarındaki indisler Hubble parametresinin o noktadaki işaretine referans verirken yörüngeler kırmızıdan başlayıp siyaha doğru gitmektedir. (MATLAB ver. R2019b)



Şekil 4.10: Modifiye Chaplygin Gazı için $\alpha = 1$ ve $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumunda durum uzayını sınırlandıran alt manifoldlar. Burada noktalar çözümleri temsil ederken F, M, dS, CH ve CD sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = 0$), Milne modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = -1$), de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, \Omega_A = 0, k = 0$), Chaplygin Gaz modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = \alpha+1/\sqrt{\gamma}, k = 0$) ve Chaplygin-de Sitter çözüm çizgisini ($\Omega = \Omega, \Omega_\Lambda = 1 - \Omega, \Omega_A = \alpha+1/\sqrt{\gamma}\Omega, k = 0$) gösterir. Yörüngeler kırmızıdan başlayıp siyaha doğru gitmektedir. (MATLAB ver. R2019b)



Şekil 4.11: Modifiye Chaplygin Gazı için Düz ($k = 0$) Alt Manifold. Bu manifold γ ve α 'nın değerlerinden bağımsızdır. Burada noktalar çözümleri temsil ederken F, dS, CH ve CD sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = 0$), de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, \Omega_A = 0, k = 0$), Chaplygin Gaz modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = \alpha+1/\sqrt{\gamma}, k = 0$) ve Chaplygin-de Sitter çözüm çizgisini ($\Omega = \Omega, \Omega_\Lambda = 1 - \Omega, \Omega_A = \alpha+1/\sqrt{\gamma}\Omega, k = 0$) gösterir. Yörüngeler kırmızıdan başlayıp siyaha doğru gitmektedir. (MATLAB ver. R2019b)

4.2.3. $\gamma = \frac{2}{3}$ durumu

Durum uzayının çatallanma noktası olan bu durum için tam durum uzayı Şekil 4.12’de verilmiştir. İnvaryant alt manifoldlar ise Şekil 4.11 ve Şekil 4.13’teki gibidir. Denge noktaları ve özellikleri Tablo 4.11 ile Tablo 4.12’de verilmiştir.

Şekil 4.12’de görüldüğü gibi bu durumda denge noktaları $\Lambda A0$ ile CD modelleri olmaktadır. $\Lambda A0$ modelleri F, M ve ilk olarak γ ’nın bu değeri için karşımıza çıkan E modellerini de içermektedir. $H < 0$ bölgesindeki yeterince büyük bir $(\Omega_\Lambda + \Omega_A)$ değeri ile başlayan eliptik modeller büzülüp genişleyerek tekrar bir CD modeline evrilir, diğer modellerin tümü bir $\Lambda A0$ modeline büzülür. Geçmiş çekicisi bir $\Lambda A0$ modeli olan yörüngeler ise bir CD modeline genişler. Dolayısıyla CD modelleri $H > 0$ bölgesinde global çekici olurken $H < 0$ bölgesinde global itici olmaktadır. $\Lambda A0$ modelleri ise $H > 0$ bölgesinde itici, $H < 0$ bölgesinde çekici özelliği gösterirler.

Görüleceği üzere durum uzayının tümü birlikte değerlendirildiğinde bu durum için de kararlı bir nokta ya da global bir çekici bulunmamaktadır.

- $\Omega_\Lambda = 0$ Alt Manifoldu:

Şekil 4.13’te görüldüğü gibi bu manifoldda $\Lambda A0$ modelleri ile CH modeli denge noktası olmaktadır. CH modeli $H > 0$ için global çekici özelliği gösterirken $H < 0$ için global itici davranışı sergiler. $\Lambda A0$ modelleri ise $H < 0$ durumunda çekici, $H > 0$ durumunda ise iticidir.

Bu alt manifoldda kararlı bir denge noktası ya da global bir çekici bulunmamaktadır.

- $\Omega_A = \alpha_{+1}\sqrt{\gamma}\Omega$ Alt Manifoldu:

Şekil 4.13’te görüldüğü gibi bu alt manifoldda denge noktaları CH ve dS modelleri ile sınırlanmış CD çözüm çizgisindeki her nokta ve M’dir ve yapısı $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumundaki ile aynıdır.

Bu alt manifoldda kararlı bir denge noktası ya da global bir çekici bulunmamaktadır.

- $\Omega_A = 0$ Alt Manifoldu:

Bu alt manifold Chaplygin gazının bulunmadığı ve yalnızca Lineer Barotropik Mükemmel Akışkanın bulunduğu modelleri temsil etmektedir. Bu alt manifoldun özellikleri Bölüm 4.1’de incelendiği için tekrar vermiyoruz.

Bu alt manifold özelinde de kararlı bir denge noktası ya da global bir çekici bulunmamaktadır.

• $k = 0$ Alt Manifoldu:

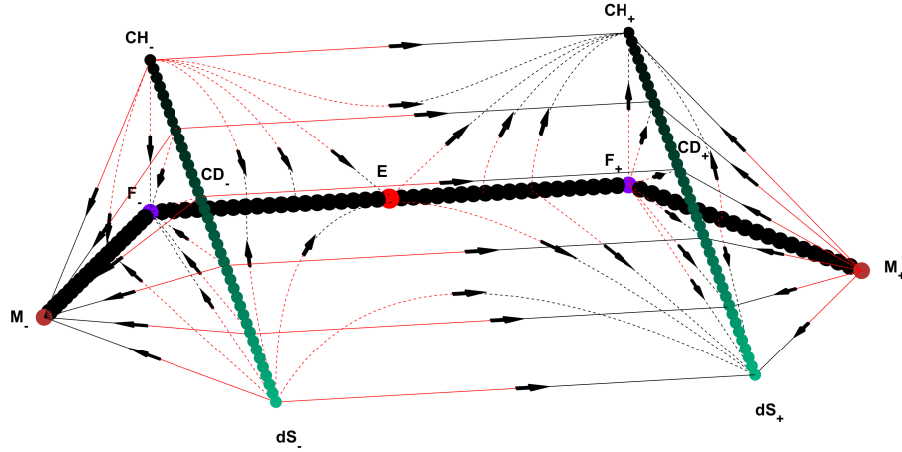
Şekil 4.11’de görüldüğü gibi düz evrenleri temsil eden bu manifoldda CD çözüm çizgisindeki tüm noktalar ile F çözüm noktası denge noktaları olarak bulunmaktadır ve yapısı $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumundaki ile aynıdır.

Tablo 4.11: Modifiye Chaplygin Gazı için $k = 0, -1$ ve $\gamma = \frac{2}{3}$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri

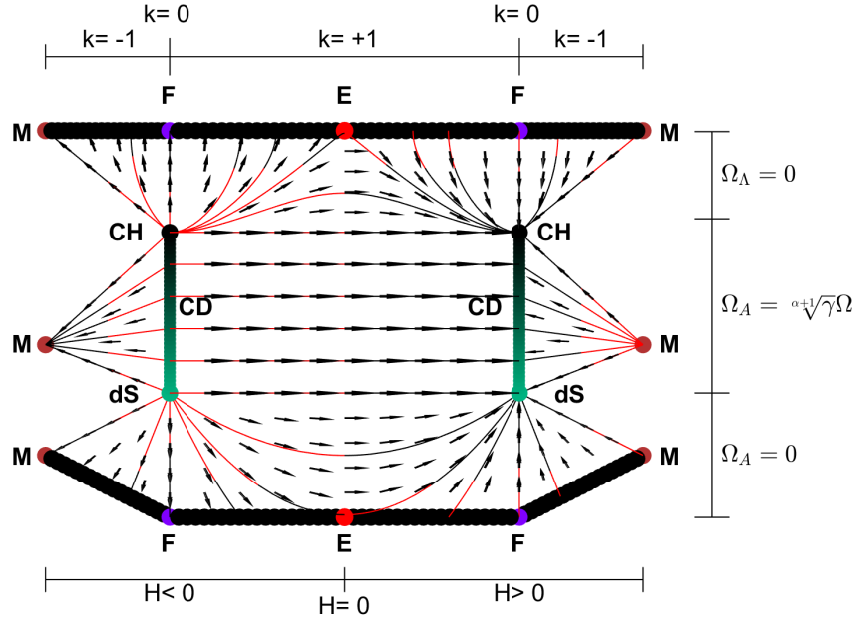
$(\Omega, \Omega_\Lambda, \Omega_A)$			Özdeğerler			Kararlılık	Etki
			λ_1	λ_2	λ_3		
$\Lambda A0$	$(\Omega, 0, 0)$	$H > 0$	0	2	2	-	İtici
		$H < 0$	0	-2	-2	-	Çekici
CD	$(\Omega, 1 - \Omega, \alpha+1\sqrt{\gamma}\Omega)$	$H > 0$	-2	0	$-2(\alpha+1)$	-	Çekici
		$H < 0$	2	0	$2(\alpha+1)$	-	İtici

Tablo 4.12: Modifiye Chaplygin Gazı için $k = 0, +1$ ve $\gamma = \frac{2}{3}$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri.

(Q, Ω, Ω_A)			Özdeğerler			Kararlılık	Etki
			λ_1	λ_2	λ_3		
$\Lambda A0$	$(Q, 1, 0)$	$H > 0$	0	$2Q$	$2Q$	-	İtici
	$(Q, 1, 0)$	$H < 0$	0	$2Q$	$2Q$	-	Çekici
CD	$(1, \Omega, \alpha+1\sqrt{\gamma}\Omega)$	$H > 0$	-2	0	$-2(\alpha+1)$	-	Çekici
	$(-1, \Omega, \alpha+1\sqrt{\gamma}\Omega)$	$H < 0$	2	0	$2(\alpha+1)$	-	İtici



Şekil 4.12: Modifiye Chaplygin Gazı için $\alpha = 1$ ve $\gamma = \frac{2}{3}$ durumunda durum uzayı. Burada noktalar çözümleri temsil ederken F, M, dS, E, CH ve CD sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = 0$), Milne modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = -1$), de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, \Omega_A = 0, k = 0$), Einstein statik çözüm eğrisini ($H = 0, H' = 0$), Chaplygin Gaz modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = \alpha + \sqrt{\gamma}, k = 0$) ve Chaplygin-de Sitter çözüm çizgisini ($\Omega = \Omega, \Omega_\Lambda = 1 - \Omega, \Omega_A = \alpha + \sqrt{\gamma}\Omega, k = 0$) gösterirken M, F, E çözümlerini de içeren denge noktaları $\Lambda A0$ ($\Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0$) çözüm çizgisini oluşturmaktadır. z eksen durum uzayının tümü için Ω_A 'ya denk gelmekte ve ortadaki $k = +1$ bölgesinde dikey ve yatay eksenler sırasıyla Ω ve Q 'yu gösterirken yan bölgelerdeki piramit şeklindeki $k = -1$ bölgelerinde M-F ve M-dS çizgileri Ω ve Ω_Λ eksenlerine denk gelmektedir. Durum uzayının sağ bölgesi genişleyen sol bölgesi ise büzüşen evrenleri temsil eder. Çözüm noktalarını gösteren harflerin altlarındaki indisler Hubble parametresinin o noktadaki işaretine referans verirken yörüngeler kırmızıdan başlayıp siyaha doğru gitmektedir. (MATLAB ver. R2019b)



Şekil 4.13: Modifiye Chaplygin Gazı için $\alpha = 1$ ve $\gamma = \frac{2}{3}$ durumunda durum uzayını sınırlandıran alt manifoldlar. Burada noktalar çözümleri temsil ederken F, M, dS, E, CH ve CD sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = 0$), Milne modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = -1$), de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, \Omega_A = 0, k = 0$), Einstein statik çözüm eğrisini ($H = 0, H' = 0$), Chaplygin Gaz modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = \alpha+1/\sqrt{\gamma}, k = 0$) ve Chaplygin-de Sitter çözüm çizgisini ($\Omega = \Omega, \Omega_\Lambda = 1 - \Omega, \Omega_A = \alpha+1/\sqrt{\gamma}\Omega, k = 0$) gösterirken M, F, E çözümlerini de içeren denge noktaları $\Lambda A 0$ ($\Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0$) çözüm çizgilerini oluşturmaktadır. Yörüngeler kırmızıdan başlayıp siyaha doğru gitmektedir. (MATLAB ver. R2019b)

4.2.4. $\frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ durumu

Bu durum için tam durum uzayı Şekil 4.14'te verilmiştir. İnvaryant alt manifoldlar ise Şekil 4.11 ve Şekil 4.15'teki gibidir. Denge noktaları ve özellikleri Tablo 4.13 ile Tablo 4.14'te verilmiştir.

Şekil 4.14'te görüldüğü gibi $k = 0, -1$ ve $H > 0$ durumunda tüm modellerin geçmiş çekicisi düz Friedmann modeli olmaktadır ve bu evrenler bir CD modeline genişlemektedir. Ω_Λ ve Ω_A 'nın birlikte sıfır olduğu modeller önce Milne modeline genişlemekte ve daha sonra bir CD modeline evrilmektedir. Bu bölgedeki diğer evrenler ise düz Friedmann modelinden direkt olarak bir CD evrenine genişlemektedir. $k = 0, -1$ ve $H < 0$ durumunda ise geçmiş çekici bir CD modeli olmakta ve bu evrenler düz Friedmann modeline büzüşmektedir. Bu büzüşme doğrudan doğruya olabileceği gibi model önce Milne evrenine büzüşüp daha sonra

düz Friedmann modeline de evrilebilir. Görüleceği üzere $k = 0, -1$ ve $H > 0$ ile $k = 0, -1$ ve $H < 0$ durumları zamanın birbirine göre tersine aktığı halleri temsil etmektedir.

$k = 0, +1$ ve $H > 0$ durumunda düz Friedmann modeli yine tüm modellerin geçmiş çekicisidir. Yeterince küçük bir $(\Omega_\Lambda + \Omega_A)$ değeri ile başlayan modellerin genişlemesi yavaşlamakta, bu modeller bir noktadan sonra büzüşmeye başlamakta ve tekrar düz Friedmann evrenine evrilmektedir. Başlangıçlarında yeterince büyük $(\Omega_\Lambda + \Omega_A)$ değerine sahip olan evrenler ise bir CD modelinde sonlanmaktadır. Bu iki durumun ortasında kalan kritik $(\Omega_\Lambda + \Omega_A)_c$ değerine sahip olan evrenler ise önce bir Einstein statik evrenine genişleyip Hubble parametreleri sıfır olmakta fakat bu model kararlı olmadığı için evren buradan düz Friedmann modeline büzüşebileceği gibi bir CD modeline de genişleyebilmektedir. $k = 0, +1$ ve $H < 0$ durumunda ise yeterince büyük bir $(\Omega_\Lambda + \Omega_A)$ değeri ile başlayan modellerin geçmiş çekicileri bir CD evrenidir. Bu modellerin büzüşmesi bir noktada sonlanmakta ve model herhangi bir tekilliğe maruz kalmadan tekrar bir CD evrenine genişlemektedir. Yeterince küçük $(\Omega_\Lambda + \Omega_A)$ değeriyle başlayan modeller ise düz Friedmann modeline büzüşmektedir. Bu modellerin geçmiş çekicileri yine düz Friedmann modeli olabileceği gibi, bir CD modeli de olabilir. CD modelinden başlayan evrenler kritik $(\Omega_\Lambda + \Omega_A)_c$ değerine sahipler ise önce bir Einstein statik evrenine büzüşüp Hubble parametreleri sıfır değerini alır ve buradan ya düz Friedmann modeline büzüşür ya da bir CD modeline genişlerler.

CD modelleri $H > 0$ için çekici, $H < 0$ için ise itici olmaktadır. F modeli ise $H > 0$ için global itici iken $H < 0$ durumunda global çekici olmaktadır.

Dinamik sistemi Hubble parametresine bir kısıtlama getirmeden bir bütün olarak değerlendirdiğimizde kararlı bir denge noktasının ya da global bir çekicinin bulunmadığı görülmektedir. Bu halde evren bir modelden diğerine evrilebilmekte ve dolayısıyla dinamik bir yapıya sahip olmaktadır.

- $\Omega_\Lambda = 0$ Alt Manifoldu:

Şekil 4.15'te görüldüğü gibi kozmolojik sabitin bulunmadığı evrenleri temsil eden bu alt manifoldda denge noktaları olarak E, F, M ve CH bulunmaktadır. Yeterince büyük Ω_A ile başlayan pozitif Hubble parametresine sahip evrenlerde Chaplygin gazı dominant hale gelmekte ve evren CH modeline genişlemektedir. Bu genişleme doğrudan doğruya olabileceği gibi modelin hiperbolik olması durumunda $\Omega_A = 0$ ise

evren önce Milne modeline evrilip daha sonra CH modeline de genişleyebilir. Küçük Ω_A ile başlayan eliptik modellerde ise Ω dominant parametre olur ve evren genişleyip büzüşerek düz Friedmann modeline evrilir. Kritik $(\Omega_A)_c$ değerine sahip olan evrenler ise Einstein statik modeline evrilir ve buradan Hubble parametresinin alacağı değere göre ya CH ya da düz Friedmann modeline evrilir.

$H < 0$ bölgesindeki modeller için geçmiş çekici CH, E ya da F noktalarıdır. Bu modellerden iticisi CH olan eliptik modeller yeterince büyük Ω_A ile başlamışlarsa büzüşüp genişleyerek tekrar bir CH modeline evrilirler, yeterince küçük Ω_A ile başlayanlar düz Friedmann modeline büzüşürler. Kritik $(\Omega_A)_c$ değerine sahip olanlarsa Einstein statik evrenine büzüşür ve bu noktadan sonra alacakları H değerine bağlı olarak ya CH modeline genişler ya da düz Friedmann modeline büzüşürler. $\Omega_A = \alpha+1\sqrt{\gamma}\Omega$ ile başlayan hiperbolik modeller düz Friedmann modeline büzüşmeden önce Milne modeline evrilirken bunların dışında kalan CH kaynaklı modeller doğrudan doğruya düz Friedmann evrenine büzüşürler. $H < 0$ bölgesindeki geçmiş çekicisi Einstein statik evreni olan evrenler doğrudan doğruya düz Friedmann modeline büzüşürken, düz Friedmann modelinden başlayanlar genişleyip büzüşerek tekrar düz Friedmann modeline evrilirler.

Bu manifoldda $H > 0$ durumunda F itici, CH ise çekici olmaktadır; $H < 0$ durumunda CH itici, F ise çekici olmaktadır.

Bu alt manifold özelinde kararlı bir denge noktası ya da global bir çekici bulunmamaktadır.

- $\Omega_A = \alpha+1\sqrt{\gamma}\Omega$ Alt Manifoldu:

Şekil 4.15'te görüldüğü gibi bu alt manifoldda denge noktaları CH ve dS modelleri ile sınırlanmış CD çözüm çizgisindeki her nokta ve M'dir ve yapısı $0 < \gamma < \frac{2}{3}$ durumundaki ile aynıdır. Yani bu alt manifoldun yapısı γ 'dan bağımsızdır.

- $\Omega_A = 0$ Alt Manifoldu:

Bu alt manifold Chaplygin gazının bulunmadığı ve yalnızca mükemmel akışkanın bulunduğu modelleri temsil etmektedir. Bu alt manifoldun özellikleri Bölüm 4.1'de incelendiği için tekrar vermiyoruz.

Bu alt manifold özelinde de kararlı bir denge noktası ya da global bir çekici bulunmamaktadır.

• $k = 0$ Alt Manifoldu:

Şekil 4.11’de görüldüğü gibi düz evrenleri temsil eden bu manifoldda CD çözüm çizgisindeki tüm noktalar ile F çözüm noktası denge noktaları olarak bulunmaktadır.

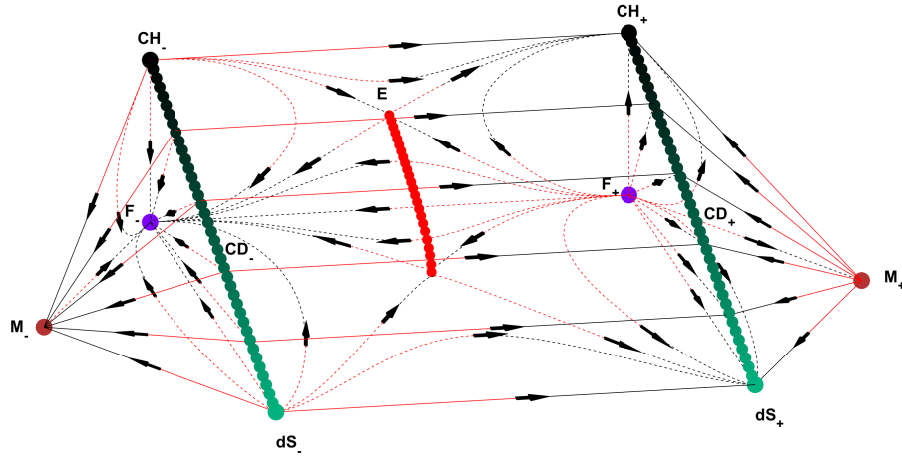
Görüleceği üzere kararlı bir denge noktasının bulunmadığı bu manifold $\Omega_A = {}^{\alpha+1}\sqrt{\gamma}\Omega$ alt manifoldu gibi γ ’nın değerinden bağımsız bir yapıya sahiptir.

Tablo 4.13: Modifiye Chaplygin Gazı için $k = 0, -1$ ve $\frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri

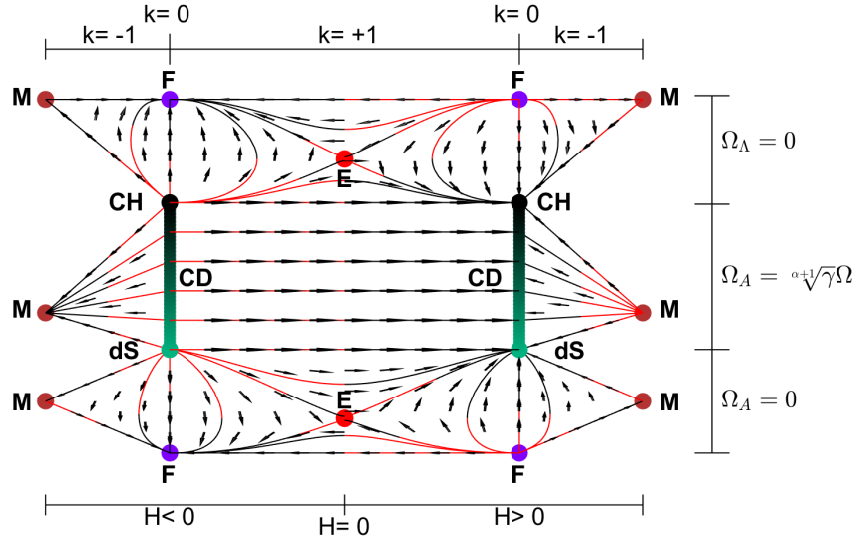
	$(\Omega, \Omega_\Lambda, \Omega_A)$	H	Özdeğerler			Kararlılık	Etki
			λ_1	λ_2	λ_3		
M	(0,0,0)	$H > 0$	$2 - 3\gamma$	2	2	Kararsız	-
		$H < 0$	$3\gamma - 2$	-2	-2	Kararsız	-
F	(1,0,0)	$H > 0$	$3\gamma - 2$	3γ	3γ	Kararsız	İtici
		$H < 0$	$2 - 3\gamma$	-3γ	-3γ	Kararlı	Çekici
CD	$(\Omega, 1 - \Omega, {}^{\alpha+1}\sqrt{\gamma}\Omega)$	$H > 0$	-2	0	$-3\gamma(\alpha + 1)$	-	Çekici
		$H < 0$	2	0	$3\gamma(\alpha + 1)$	-	İtici

Tablo 4.14: Modifiye Chaplygin Gazı için $k = 0, +1$ ve $\frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ durumunda Denge Noktalarının Özellikleri. Burada, $\xi = (\gamma\Omega^{\alpha+1} - \frac{2}{3}\Omega^\alpha)^{\frac{1}{\alpha+1}}$ ve $\Sigma = \sqrt{(3\gamma + 3\alpha\gamma - 2\alpha/\Omega + 1)}$ ’dir.

	(Q, Ω, Ω_A)	H	Özdeğerler			Kararlılık	Etki
			λ_1	λ_2	λ_3		
E	$(0, \Omega, \xi)$	$H > 0$	0	$-\Sigma$	Σ	-	-
	$(0, \Omega, \xi)$	$H < 0$	0	Σ	$-\Sigma$	-	-
F	$(1, 1, 0)$	$H > 0$	$3\gamma - 2$	3γ	3γ	Kararsız	İtici
	$(-1, 1, 0)$	$H < 0$	$2 - 3\gamma$	-3γ	-3γ	Kararlı	Çekici
CD	$(1, \Omega, {}^{\alpha+1}\sqrt{\gamma}\Omega)$	$H > 0$	-2	0	$-3\gamma(\alpha + 1)$	-	Çekici
	$(-1, \Omega, {}^{\alpha+1}\sqrt{\gamma}\Omega)$	$H < 0$	2	0	$3\gamma(\alpha + 1)$	-	İtici



Şekil 4.14: Modifiye Chaplygin Gazı için $\alpha = 1$ ve $\frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ durumunda durum uzayı. Burada noktalar çözümleri temsil ederken F, M, dS, E, CH ve CD sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = 0$), Milne modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = -1$), de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, \Omega_A = 0, k = 0$), Einstein statik çözüm eğrisini ($H = 0, H' = 0$), Chaplygin Gaz modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = \alpha+1\sqrt{\gamma}, k = 0$) ve Chaplygin-de Sitter çözüm çizgisini ($\Omega = \Omega, \Omega_\Lambda = 1 - \Omega, \Omega_A = \alpha+1\sqrt{\gamma}\Omega, k = 0$) gösterir. z eksenini durum uzayının tümü için Ω_A 'ya denk gelmekte ve ortadaki $k = +1$ bölgesinde dikey ve yatay eksenler sırasıyla Ω ve Q' 'yu gösterirken yan bölgelerdeki piramit şeklindeki $k = -1$ bölgelerinde M-F ve M-dS çizgileri Ω ve Ω_Λ eksenlerine denk gelmektedir. Durum uzayının sağ bölgesi genişleyen sol bölgesi ise büzüşen evrenleri temsil eder. Çözüm noktalarını gösteren harflerin altlarındaki indisler Hubble parametresinin o noktadaki işaretine referans verirken yörüngeler kırmızıdan başlayıp siyaha doğru gitmektedir. (MATLAB ver. R2019b)



Şekil 4.15: Modifiye Chaplygin Gazı için $\alpha = 1$ ve $\frac{2}{3} < \gamma \leq 2$ durumunda durum uzayını sınırlandıran alt manifoldlar. Burada noktalar çözümleri temsil ederken F, M, dS, E, CH ve CD sırasıyla düz Friedmann modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = 0$), Milne modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = 0, k = -1$), de Sitter modelini ($\Omega = 0, \Omega_\Lambda = 1, \Omega_A = 0, k = 0$), Einstein statik çözüm eğrisini ($H = 0, H' = 0$), Chaplygin Gaz modelini ($\Omega = 1, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_A = \alpha+1/\sqrt{\gamma}, k = 0$) ve Chaplygin-de Sitter çözüm çizgisini ($\Omega = \Omega, \Omega_\Lambda = 1 - \Omega, \Omega_A = \alpha+1/\sqrt{\gamma}\Omega, k = 0$) gösterir. Yörüngeler kırmızıdan başlayıp siyaha doğru gitmektedir. (MATLAB ver. R2019b)

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Hem Lineer Barotropik Mükemmel Akışkan hem de bir karanlık akışkan alternatifi olan modifiye Chaplygin gazı için ayrı ayrı dinamik sistemleri oluşturduk, durum uzaylarını inşa ettik ve sistemleri detaylı bir biçimde inceledik. Modifiye Chaplygin gazının hal denkleminde bulunan α parametresinin durum uzayının yapısını değiştirmediğini, yapının yalnızca γ parametresinin değerine bağlı olduğunu gördük. Hubble parametresine bir sınırlama getirmediğimizde iki durum için de hem durum uzayının tamamında hem de alt manifoldlar özelinde kararlı bir denge noktası ya da global bir çekicinin bulunmadığını tespit ettik ve kullandığımız hal denklemlerinin ve kısıtlamaların geçerli olması halinde evrenin bir başlangıç ve sona ihtiyaç duymadan bir modelden diğerine sürekli evrilebildiğini ve dinamik bir yapıya sahip olduğunu gördük. Bu yaklaşımı gelecekteki çalışmalarımızda diğer Bianchi modellerine de uygulamayı planlamaktayız.

KAYNAKLAR

- [1]. Weinberg, S., 1972, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley, New York.
- [2]. Rindler, W., 1969, *Essential Relativity*, Springer-Verlag, New York.
- [3]. Bennett, C.L., Smoot, G.F., 1989, The COBE cosmic 3K anisotropy experiment: a gravity wave and cosmic string probe, *NASA Conference Publication*, **3046**, 114-117.
- [4]. Smoot, G.F., 1994, COBE observations of the early universe, *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, 88, 114.
- [5]. Copi, C., Schramm, D. ve Turner, M., 1995, Big-bang nucleosynthesis and the baryon density of the universe, *Science*, 267, 192-199.
- [6]. Wald, R.M., 1984, *General Relativity*, Chicago Univ. Press, Chicago.
- [7]. MacCallum M.A.H., 1993, *Inhomogeneous and anisotropic cosmologies*, In: The Origin of Structure in the Universe. NATO ASI Series (Series C: Mathematical and Physical Sciences) vol 393., Gunzig E., Nardone P. (eds), Springer, Dordrecht.
- [8]. Hirsch, M.W., 1984, The dynamical systems approach to differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 11, 1-63.
- [9]. Collins, C., 1971, More qualitative cosmology, *Commun. Math. Phys.*, 23, 137–158
- [10]. Bogoyavlensky, O.I. ve Novikov, S.P., 1973, Singularities of the cosmological model of the Bianchi IX type according to the qualitative theory of differential equations, *Sov. Phys. JETP*, 37, 747-755.
- [11]. Bogoyavlensky, O.I., 1985, *Methods in the Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin.
- [12]. Peresetsky, A.A., 1985, *Qualitative Theory of open homogeneous cosmological models with motion of matter*, In Topics of Modern Mathematics, Petrowskii Seminar No.5, Oleinik O.A. (ed.), Chapter 8, Consultants Bureau.
- [13]. Wainwright, J. ve Ellis, G. F. R., 1997, *Dynamical Systems in Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [14]. Hirsch, M.W. ve Smale, S., 1974, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York.
- [15]. Perko, L., 1991, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York.

- [16]. Wainwright, J., 1988, *On the asymptotic states of orthogonal spatially homogeneous cosmologies*, In *Relativity Today*, Proceedings of the Second Hungarian Relativity Workshop, Perjés Z. (ed.), World Scientific.
- [17]. Wainwright, J. ve Hsu, L., 1989, A dynamical systems approach to Bianchi cosmologies: Orthogonal models of class A, *Class. Quantum Grav.*, 6, 1409-1431.
- [18]. Hewitt, C.G. ve Wainwright, J., 1993, A dynamical systems approach to Bianchi cosmologies: Orthogonal models of class B, *Class. Quantum Grav.*, 10, 99-124.
- [19]. Hale, J.K., 1988, *Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs No. 25., Chapter 4, American Mathematical Society.
- [20]. Temam, R., 1988, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York.
- [21]. Temam, R., 1988, *Dynamical systems in infinite dimensions*, In *The Connection between Infinite-Dimensional and Finite-Dimensional Dynamical Systems*, B. Nicolaenko, C. Foias and R. Temam eds., American Mathematical Society.
- [22]. Hewitt, C.G. ve Wainwright, J., 1990, Orthogonally Transitive G_2 Cosmologies, *Class. Quantum Grav.*, 7(12), 2295-2316.
- [23]. Ellis, G.F.R., 1967, Dynamics of pressure-free matter in general relativity, *Journal of Mathematical Physics*, 8(5), 1171-1194
- [24]. Ellis, G.F.R., 1971, *Relativistic Cosmology*, In *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*, Course 47: General relativity and cosmology, Sachs R.K. (ed), Academic Press, New York, 104-182.
- [25]. Ellis, G.F.R., 1971, *Relativistic Cosmology*, In *Cargèse Lectures in Physics 6*, Schatzman E. (ed), Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1-60.
- [26]. Maccallum, M.A.H. ve Ellis, G.F.R., 1969, A class of homogeneous cosmological models, *Commun. Math. Phys.*, 12(2), 108-141.
- [27]. Wainwright, J. ve Lim, W.C., 2005, Cosmological Models from a Dynamical Systems Perspective, *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 2(2), 437-469.
- [28]. Goliath, M. ve Ellis, G.F.R., 1999, Homogeneous cosmologies with a cosmological constant, *Physical Review D*, 60(2), 437-469.
- [29]. Kamenshchik, A., Moschella, U. ve Pasquier, V., 2001, An alternative to quintessence, *Phys. Lett. B*, 511, 265-268.
- [30]. Gorini, V., Kamenshchik, A., Moschella, U., Piattella, O.F. ve Starobinsky, A.A., 2009, More about the Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations for the generalized Chaplygin gas, *Physical Review D*, 80.
- [31]. Alam, U., Sahni, V., Saini, T.D. ve Starobinsky, A. A., 2003, Exploring the expanding Universe and dark energy using the statefinder diagnostic, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 344, 1057-1074.

- [32]. Bento, M. C., Bertolami, O. ve Sen, A. A., 2002, Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification, *Physical Review D*, 66.
- [33]. Debnath, U., Banerjee, A. ve Chakraborty, S., 2004, Role of modified Chaplygin gas in accelerated universe, *Classical and Quantum Gravity*, 21, 5609–5617.
- [34]. Sahni, V., Saini, T. D., Starobinsky, A. A. ve Alam, U., 2003, Statefinder—A new geometrical diagnostic of dark energy, *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 77, 201-206.
- [35]. Copeland, E. J., Sami, M. ve Tsujikawa, S., 2006, Dynamics of Dark Energy, *International Journal of Modern Physics D*, 15, 1753–1935.
- [36]. Yılmaz, A.O. ve Güdekli, E., 2021, Dynamical system analysis of FLRW models with Modified Chaplygin gas, *Scientific Reports*, 11, 2750.
- [37]. Bahamonde, S., Böhmer, C.G., Carloni, S., Copeland, E.J., Fang, W. ve Tamanini, N., 2018, Dynamical systems applied to cosmology: Dark energy and modified gravity, *Physics Reports*, 775, 1-122.
- [38]. HE, J., WU, Y.B. ve FU M.H., 2008, Dynamical Attractor of Modified Chaplygin Gas, *Chinese Physics Letters*, 25, 347-350.
- [39]. Li, S., Ma, Y. ve Chen, Y., 2009, Dynamical Evolution of Interacting Modified Chaplygin Gas, *International Journal of Modern Physics D*, 18, 1785-1800.
- [40]. Bhadra, J. ve Debnath U., 2011, Dynamical System Analysis of Interacting Variable Modified Chaplygin Gas Model in FRW Universe, *Eur.Phys.J.Plus*, 127, 30.
- [41]. Fang, W., Li, Y., Zhang, K. ve Lu, H.Q., 2009, Exact analysis of scaling and dominant attractors beyond the exponential potential, *Classical and Quantum Gravity*, 26, 155005.
- [42]. Benaoum, H.B., 2012, Modified Chaplygin Gas Cosmology, *Advances in High Energy Physics*, 2012, 1-12.
- [43]. Mazumder, N., Biswas, R. ve Chakraborty, S., 2012, FRW Cosmological Model with Modified Chaplygin Gas and Dynamical System, *International Journal of Theoretical Physics*, 51, 2754-2758.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Ali Osman YILMAZ
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Marmara Üniversitesi
Fakülte	Mühendislik Fakültesi
Bölümü	Makine Mühendisliği
Mezuniyet Yılı	2010

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Fizik Anabilim Dalı
Programı	Matematiksel Fizik Programı
Mezuniyet Tarihi	2021

Makale ve Bildiriler	
Makaleler	
Yılmaz, A.O. ve Güdekli, E., 2021, Dynamical System Analysis of FLRW Models with Modified Chaplygin Gas, <i>Scientific Reports</i> , 11, 2750.	
Bildiriler	
Yılmaz, A.O., 2019, Dynamical System Analysis of Robertson-Walker (RW) Models in General Relativity, <i>Türk Fizik Derneği 35. Uluslararası Fizik Konferansı</i> , 4-8 Eylül 2019, Muğla, Bodrum	

