

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**YÜKSEK MERTEBEDEN HARDY-BERNDT TOPLAMLARININ KARAKTER
BENZERLERİ**

Fatih ERDOĞAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KASIM 2024

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**YÜKSEK MERTEBEDEN HARDY-BERNDT TOPLAMLARININ KARAKTER
BENZERLERİ**

Fatih ERDOĞAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KASIM 2024

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK MERTEBEDEN HARDY-BERNDT TOPLAMLARININ KARAKTER
BENZERLERİ

Fatih ERDOĞAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez/...../2024 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mümün CAN

Doç. Dr. Ayhan DİL

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ÖZET

YÜKSEK MERTEBEDEN HARDY-BERNDT TOPLAMLARININ KARAKTER BENZERLERİ

Fatih ERDOĞAN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mümün CAN

Kasım 2024, 43 Sayfa

Bu tez çalışmasında, yüksek mertebeden altı Hardy-Berndt toplamının iki farklı karakter benzerleri tanımlanmış ve karşılık gelen resiprosite bağıntıları (çok terimli bağıntıları) elde edilmiştir. Ayrıca özel durumlarda daha önce tanımlanan toplamların karakter benzerlerinin elde edilip edilmediği araştırılmış ve Apostol (1950), Mikolás (1957), Rademacher (1956, 1964) ve Carlitz (1964) anlamında karakter Hardy-Berndt toplamlarının da resiprosite bağıntılarını sağladıkları gözlemlenmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER : Bernoulli polinomları, Dedekind toplamı, Euler polinomları, Hardy-Berndt toplamı.

JÜRİ: Prof. Dr. Mümün CAN

Doç. Dr. Ayhan DİL

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ABSTRACT

CHARACTER ANALOGUES OF THE HIGHER ORDER HARDY-BERNDT SUMS

Fatih ERDOĞAN

M. Sc. Thesis in Mathematics

Adviser: Prof. Dr. Mümün CAN

November 2024, 43 Pages

In this thesis, the character analogs of six higher-order Hardy-Berndt sums are defined and the corresponding reciprocity relations (linear relations) are obtained. It is also investigated whether the character analogs of the previously defined sums are obtained in special cases and it is observed that it provided reciprocity relations for the character Hardy-Berndt sum in the sense of Apostol (1950), Mikolás (1957), Rademacher (1956, 1964) and Carlitz (1964).

KEY WORDS: Bernoulli polynomials, Dedekind sum, Euler polynomials, Hardy-Berndt sums.

COMMITTEE: Prof. Dr. Mümün CAN

Assoc. Prof. Dr. Ayhan DİL

Asst. Prof. Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının iki başlıca bölümünden birincisi olan Önbilgiler bölümünde, Bernoulli polinomları ve fonksiyonları, Euler polinomları ve fonksiyonları, ilkel Dirichlet karakteri, Dedekind toplamı, Hardy–Berndt toplamı tanıtılmış ve bazı özellikleri verilmiştir. Bu tezin esas bölümlerinden ikincisi olan Bulgular ve Tartışma bölümünde ise yüksek mertebeden altı Hardy–Berndt toplamının iki ilkel Dirichlet karakter ve üç ilkel Dirichlet karakter ile genelleştirilmiş karakter benzerleri tanımlanmış ve bu toplamı karşılık gelen resiprosite bağıntıları (çok terimli bağıntıları) elde edilmiştir. Ayrıca Mikolás, Carlitz, Apostol ve Rademacher anlamında karakter Hardy–Berndt toplamı için resiprosite bağıntıları da elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasının, bu alandaki çalışmalara önemli katkılar sağlayacağı inancındayız.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mümün CAN’a teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
1.1. Kaynak Taraması	2
2. MATERYAL VE METOT	4
2.1. Bernoulli ve Euler Fonksiyonları	4
2.2. Dedekind Toplamı	6
2.3. Hardy–Berndt Toplamları	10
3. BULGULAR VE TARTIŞMA	15
3.1 İki İlkel Karakter İçeren Hardy-Berndt Toplamları	15
3.2 Üç İlkel Karakter İçeren Hardy-Berndt Toplamları	31
4. SONUÇLAR	39
5. KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum “Yüksek Mertebeden Hardy–Berndt Toplamlarının Karakter Benzerleri” adlı bu çalışmanın, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak hazırlandığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

.../.../2024

Fatih ERDOĞAN

İmza

XXXXXX

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$B_n(x)$	: n. Bernoulli polinomu
$\mathfrak{B}_n(x)$	: n. Bernoulli fonksiyonu
B_n	: n. Bernoulli sayısı
$E_n(x)$	: n. Euler polinomu
$\mathcal{E}_n(x)$	: n. Euler fonksiyonu
E_n	: n. Euler sayısı
χ	: İlkel (primitive) karakter
$\mathfrak{B}_{n,\chi}(x)$	: n. karakter Bernoulli fonksiyonu
$\mathcal{E}_{n,\chi}(x)$	: n. karakter Euler fonksiyonu
$\text{Im } z$	: $z = x + iy$ nin sanal kısmı ($\text{Im } z = y$)
$\text{Re } z$	: $z = x + iy$ nin reel kısmı ($\text{Re } z = x$)

1. GİRİŞ

$s(h, k)$ ile gösterilen ve

$$s(h, k) = \sum_{\mu=0}^{k-1} \left(\left(\frac{\mu}{k} \right) \right) \left(\left(\frac{h\mu}{k} \right) \right), \quad h \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanan Dedekind toplamı $\eta(z)$ 'nin dönüşüm formülünde ortaya çıkmaktadır. Bundan başka, Dedekind toplamı ve bazı genellemeleri çeşitli alanlarda ortaya çıkmaktadır, örneğin topoloji (Hirzebruch ve Zagier 1974; Zagier 1973), cebirsel geometri (Pommersheim 1993; Urzúa 2010), kombinatorik geometri (Beck ve Robins 2007; Mordell 1951) ve algoritmik güçlük (algorithmic complexity) (Knuth 1981).

Dedekind toplamının en önemli özelliklerinden biri resiprosite formülüdür: $c, d > 1$ ve $(c, d) = 1$ olmak üzere,

$$s(c, d) + s(d, c) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c} + \frac{1}{cd} \right)$$

şeklindeir. Bu toplamın birçok genellemesinden biri olan

$$s_{p,q} \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{smallmatrix} \right) = \sum_{v=0}^{c-1} \overline{B}_p \left(a \frac{v+z}{c} - x \right) \overline{B}_q \left(b \frac{v+z}{c} - y \right)$$

Dedekind toplamı Hall vd. (1995)'e aittir. Bu toplam, daha önce Apostol (1950), Rademacher (1956), Mikolás (1957), Carlitz (1964) tarafından tanımlanmış toplamı da kapsamaktadır. Burada $\overline{B}_p(x)$ p . Bernoulli fonksiyonudur (bkz. Bölüm 2.1.).

Dedekind toplamının bir diğer genellemesi ise karakter Dedekind toplamıdır. İlk karakter genelleme Berndt (1973a) tarafından

$$s(d, c; \chi) = \sum_{n \bmod ck} \chi(n) \overline{B}_{1,\chi} \left(\frac{nd}{c} \right) \overline{B}_1 \left(\frac{n}{ck} \right)$$

şeklinde tanımlanmış ve karşılık gelen resiprosite bağıntısı verilmiştir. Burada χ , k modülüne göre primitif (ilkel) karakter ve $\overline{B}_{p,\chi}(x)$ p . karakter Bernoulli fonksiyonudur (bkz. Bölüm 2.1.). Apostol ve Carlitz anlamındaki Dedekind toplamlarının karakter genellemeleri ve karşılık gelen resiprosite bağıntıları Cenkeci vd. (2007) tarafından verilmiştir. $s_{p,q} \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{smallmatrix} \right)$ Dedekind toplamının karakter genellemesi ise Can (2020) tarafından

$$s_{p,q} (a, b, c; \chi_1, \chi_2; x, y, z) = \sum_{v=0}^{ck-1} \chi_1(v) \mathfrak{B}_{p,\chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathfrak{B}_q \left(b \frac{v+z}{ck} + y \right)$$

şeklinde tanımlanmış ve karşılık gelen resiprosite formülü verilmiştir.

1.1. Kaynak Taraması

Hardy-Berndt toplamaları, klasik sayı teorisinin temel unsurlarından biri olan Dedekind toplamalarının genelleştirilmiş bir versiyonudur. Berndt (1978) ve Goldberg (1981), $\frac{az+b}{cz+d}$ kesirsel dönüşümün a, b, c, d katsayılarına bağlı olarak $\log \theta_i(z)$, $i = 2, 3, 4$ için dönüşüm formülleri elde etmişlerdir. Bu dönüşüm formüllerinde, Dedekind toplamına benzer olan ve Hardy toplamaları ya da Berndt'in aritmetik toplamaları olarak adlandırılan ve

$$\begin{aligned} S(d, c) &= \sum_{\mu=1}^{c-1} (-1)^{\mu+1+\left[\frac{d\mu}{c}\right]}, & s_1(d, c) &= \sum_{\mu=1}^{c-1} (-1)^{\left[\frac{d\mu}{c}\right]} \left(\left(\frac{\mu}{c}\right)\right), \\ s_2(d, c) &= \sum_{\mu=1}^{c-1} (-1)^\mu \left(\left(\frac{\mu}{c}\right)\right) \left(\left(\frac{d\mu}{c}\right)\right), & s_3(d, c) &= \sum_{\mu=1}^{c-1} (-1)^\mu \left(\left(\frac{d\mu}{c}\right)\right), \\ s_4(d, c) &= \sum_{\mu=1}^{c-1} (-1)^{\left[\frac{d\mu}{c}\right]}, & s_5(d, c) &= \sum_{\mu=1}^{c-1} (-1)^{\mu+\left[\frac{d\mu}{c}\right]} \left(\left(\frac{\mu}{c}\right)\right) \end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilen altı farklı toplam görülmektedir. Bu toplamaların temel özelliği olan resiprosite bağıntılarının farklı ispatları birçok matematikçi tarafından verilmiştir. Bu toplamaların Apostol anlamındaki genellemeleri Can vd. (2006) tarafından, Hall-Wilson-Zagier, Carlitz ve Mikolás anlamındaki genellemeleri ise Can (2021) tarafından verilmiştir. Örneğin $S(a, c)$ nin Hall-Wilson-Zagier anlamındaki genellemesi

$$S_{p,q}(a, b, c : x, y, z) = \sum_{\mu=0}^{c-1} (-1)^\mu \mathcal{E}_{p-1} \left(a \frac{\mu+z}{c} + x \right) \mathcal{E}_{q-1} \left(b \frac{\mu+z}{c} + y \right)$$

olarak tanımlanmıştır.

Bu çalışmanın amacı, Hall-Wilson-Zagier anlamındaki Hardy-Berndt toplamalarının karakter benzerlerinin tanımlanması ve karşılık gelen resiprosite formüllerinin elde edilmesidir. Örneğin $S_{p,q}(a, b, c : x, y, z)$ Hardy-Berndt toplamının

$$\begin{aligned} &S_{p,q}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) \\ &= \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathcal{E}_{q-1} \left(b \frac{v+z}{kc} + y \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &S_{p,q}(a, b, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, y, z) \\ &= \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathcal{E}_{q-1, \chi_3} \left(b \frac{v+z}{kc} + y \right) \end{aligned}$$

şeklinde iki farklı karakter genellemesi tanımlanmış ve karşılık gelen resiprosite formülleri (belli koşullar altında)

$$\begin{aligned}
& a^{1-p}b^{1-q}S_{p,q}(a,b,c:\chi_1,\chi_2:x,y,z) \\
&= k^{1-q}\sum_{j=1}^p\binom{p-1}{j-1}(ak)^{1-j}c^{1+j-p-q}S_{p+q-j,j}^*(ck,-ak,b:\bar{\chi}_1,\chi_2:z,x,y) \\
&+ \sum_{h=1}^q\binom{q-1}{h-1}(-1)^hb^{1-h}c^{1+h-p-q}k^{h-q}S_{p+q-h,h}(c,b,a:\bar{\chi}_2,\bar{\chi}_1:z,-y,x)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& a^{1-p}b^{1-q}S_{p,q}(a,b,c:\chi_1,\chi_2,\chi_3:x,y,z) \\
&= \sum_{j=1}^p\binom{p-1}{j-1}a^{1-j}c^{1+j-p-q}S_{p+q-j,j}(c,-a,b:\bar{\chi}_3,\bar{\chi}_1,\chi_2:z,x,y) \\
&+ \sum_{h=1}^q\binom{q-1}{h-1}(-1)^hb^{1-h}c^{1+h-p-q}S_{p+q-h,h}(c,b,a:\bar{\chi}_2,\bar{\chi}_1,\chi_3:z,-y,x)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\mathcal{E}_p(x)$ ve $\mathcal{E}_{p,\chi}(x)$ p -inci Euler fonksiyonu ve karakter Euler fonksiyonudur (bkz. Bölüm 2.1.). Bu bağıntıların özel durumları Mikolás, Carlitz, Apostol ve Rademacher anlamındaki karakter Hardy-Berndt toplamlarının da resiprosite formüllerini vermektedir. Benzer genellemeler ve sonuçlar diğer Hardy-Berndt toplamları için de verilmiştir.

2. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, Bernoulli polinomları ve fonksiyonları, Euler polinomları ve fonksiyonları, Drichlet karakteri, Dedekind toplamları, Hardy–Berndt toplamları tanıtılacak ve bazı özellikleri verilecektir.

2.1. Bernoulli ve Euler Fonksiyonları

$B_p(x)$ Bernoulli polinomları,

$$\sum_{p=0}^{\infty} B_p(x) \frac{k^p}{p!} = \frac{ke^{xk}}{e^k - 1}$$

üreteç fonksiyonuyla tanımlanır. $B_p(x)$ 'in tanımında $x = 0$ alınırsa $B_p(0) = B_p$, p -inci Bernoulli sayısı elde edilir; $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}, \dots$ ve her $p \geq 1$ için $B_{2p+1} = B_{2p-1}(1/2) = 0$ dır (Jordan 1965). $B_p(x)$, p -inci Bernoulli polinomunun Bernoulli sayıları cinsinden ifadesi

$$B_p(x) = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} B_j x^{p-j}$$

şeklindedir.

p -inci Bernoulli fonksiyonları $\mathfrak{B}_p(x)$ ve $\overline{B}_p(x)$

$$\mathfrak{B}_n(x) = B_n(x - [x]) \text{ ve } \overline{B}_p(x) = \begin{cases} \mathfrak{B}_p(x), & p \neq 1 \\ ((x)), & p = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2}, & x \notin \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ve $[x]$, x 'in tam değeridir. Bernoulli fonksiyonları periyodu 1 olan fonksiyonlardır. Bernoulli polinomunda olduğu gibi $\mathfrak{B}_p(x)$ Bernoulli fonksiyonu da, herhangi bir x için,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mathfrak{B}_p\left(x + \frac{j}{n}\right) = n^{1-p} \mathfrak{B}_p(nx)$$

Raabe bağıntısını sağlar.

$E_p(x)$ Euler polinomu,

$$\sum_{p=0}^{\infty} E_p(x) \frac{t^p}{p!} = \frac{2e^{xt}}{e^t + 1}$$

öreteç fonksiyonuyla tanımlanır.

Euler sayıları $E_p = 2^p E_p(1/2)$ ile tanımlanır, $E_0 = 1$, $E_1 = 0$, $E_2 = -1$, $E_3 = 0$, $E_4 = 5, \dots$ ve her $p \geq 0$ için $E_{2p+1} = 0$ dır (Jordan 1965). p -inci Euler fonksiyonu, $0 \leq x < 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{E}_p(x) = E_p(x) \text{ ve } \mathcal{E}_p(x+n) = (-1)^n \mathcal{E}_p(x)$$

eşitliği ile tanımlanır (Carlitz 1959). Euler fonksiyonlarının Raabe bağıntısı

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \mathcal{E}_p\left(x + \frac{k}{n}\right) = n^{-p} \mathcal{E}_p(nx)$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\mathcal{E}_p(1-x) = (-1)^p \mathcal{E}_p(x) \text{ ve } \mathcal{E}_p(-x) = (-1)^{p-1} \mathcal{E}_p(x)$$

ve n çift olmak üzere

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \mathfrak{B}_p\left(x + \frac{j}{n}\right) = -\frac{p}{2} n^{p-1} \mathcal{E}_{p-1}(nx)$$

dir.

Öteorem 2.1. (Can 2021) a ve c aralarında asal pozitif tamsayılar, a tek tamsayı olsun.

$x, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{\mu=0}^{a-1} \mathcal{E}_p\left(c \frac{\mu+x}{a} + z\right) = a^{-p} \mathcal{E}_p(az + cx), \quad c \text{ çift tamsayı} \quad (2.1)$$

$$\sum_{\mu=0}^{a-1} (-1)^\mu \mathcal{E}_p\left(c \frac{\mu+x}{a} + z\right) = a^{-p} \mathcal{E}_p(az + cx), \quad c \text{ tek tamsayı} \quad (2.2)$$

dır.

Tanım 2.2. (bkz. Apostol 1976) $a) n \in \mathbb{N}$ için $\chi(m+n) = \chi(m)$, $m \in \mathbb{Z}$ ve $\chi(m) = 0 \iff (m, n) \neq 1$ koşullarını sağlayan $\mathbb{Z}$ 'den $\mathbb{C}$ 'ye tanımlı χ çarpımsal fonksiyona bir n modül Dirichlet karakteri denir.

b) χ bir k modül Dirichlet karakteri ve d, k nin pozitif böleni olsun. $(m, k) = 1$ ve $m \equiv 1 \pmod{d}$ olduğunda $\chi(m) = 1$ oluyorsa d sayısına χ için indirgenmiş modül denir.

c) χ, k modül Dirichlet karakteri $d < k$ olacak şekilde indirgenmiş modüle sahip değilse χ ye ilkel (primitif) karakter denir.

Bu çalışma boyunca χ 'nin bir k modül ilkel karakter olduğu varsayılacaktır.

χ ile genelleştirilmiş $B_{n,\chi}$ Bernoulli sayıları ve $B_{n,\chi}(x)$ polinomları, sırasıyla

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\bar{\chi}(j) t e^{jt}}{e^{kt} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi} \frac{t^n}{n!} \text{ ve}$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\bar{\chi}(j) t e^{(j+x)t}}{e^{kt} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi}(x) \frac{t^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonlarıyla tanımlanır. $k = 1$ ise

$$B_{n,1} = B_n \text{ ve } B_{n,1}(x) = B_n(x)$$

olur.

χ ile genelleştirilmiş $\mathfrak{B}_{p,\chi}(x)$ Bernoulli fonksiyonu, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathfrak{B}_{p,\chi}(x) = k^{p-1} \sum_{j=0}^{k-1} \bar{\chi}(j) \mathfrak{B}_p\left(\frac{j+x}{k}\right)$$

(Berndt 1973a) ve $\mathcal{E}_{p,\chi}(x)$ Euler fonksiyonu

$$\mathcal{E}_{p,\chi}(x) = k^p \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \bar{\chi}(j) \mathcal{E}_p\left(\frac{j+x}{k}\right), p \geq 0, k \text{ tek} \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır.

$$\mathfrak{B}_{p,\chi}(x + mk) = \mathfrak{B}_{p,\chi}(x) \text{ ve } \mathfrak{B}_{p,\chi}(-x) = (-1)^p \chi(-1) \mathfrak{B}_{p,\chi}(x), \quad (2.4)$$

$$\mathcal{E}_{p,\chi}(x + mk) = (-1)^m \mathcal{E}_{p,\chi}(x) \text{ ve } \mathcal{E}_{p,\chi}(-x) = (-1)^{p-1} \chi(-1) \mathcal{E}_{p,\chi}(x) \quad (2.5)$$

özellikleri sağlar.

2.2. Dedekind Toplamı

Eliptik modüler fonksiyonların sayılar teorisine uygulamalarında 1877 yılında Dedekind tarafından

$$\eta(z) = e^{\frac{\pi iz}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi in z}), \quad z \in H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

tanımlanan ve Dedekind eta fonksiyonu olarak adlandırılan fonksiyon önemli bir rol oynamaktadır. $s(h, k)$ ile gösterilen ve

$$s(h, k) = \sum_{\mu=0}^{k-1} \left(\left(\frac{\mu}{k} \right) \right) \left(\left(\frac{h\mu}{k} \right) \right), \quad h \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanan Dedekind toplamı $\eta(z)$ 'nin dönüşüm formülünde ortaya çıkar:

$$\eta \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = e^{\frac{\pi i(a+d)}{12c} + \pi i s(-d, c)} (-i(cz + d))^{1/2} \eta(z), \quad c > 0, \quad z \in H \text{ ve } ad - bc = 1$$

dir. Bundan başka, Dedekind toplamı ve genellemeleri çeşitli alanlarda ortaya çıkmaktadır, örneğin topoloji (Hirzebruch ve Zagier 1974, Zagier 1973), cebirsel geometri (Pommersheim 1993, Urzúa 2010), kombinatorik geometri (Mordell 1951; Beck ve Robins 2007) ve algoritmik güçlük (algorithmic complexity) (Knuth 1981).

Dedekind toplamının en önemli özelliklerinden biri resiprosite formülüdür: $h, k > 1$ ve $(h, k) = 1$ olmak üzere

$$s(h, k) + s(k, h) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{k} + \frac{k}{h} + \frac{1}{hk} \right)$$

Resiprosite formülü yanlılık olgusu (bias phenomena) (Alkan vd. 2008), dağılım özelliği (distribution property) (Hickerson 1977; Meyer 1997) ve sınırsızlık (unboundedness) (Rademacher 1956) gibi özelliklerin kanıtlanmasında kilit bir rol oynar.

Resiprosite formülü Dedekind toplamının tanımından elde edilebileceği gibi (Rademacher ve Grosswald 1972) $\eta(z)$ fonksiyonunun dönüşüm formülü yardımı ile de ispatlanabilir (Rademacher ve Über 1967).

Dedekind toplamı

$$s(h, k) = \sum_{\mu=0}^{k-1} \overline{B}_1 \left(\frac{\mu}{k} \right) \overline{B}_1 \left(\frac{h\mu}{k} \right)$$

biçiminde de ifade edilebilir. Bu toplamın birçok genellemesinden biri olan

$$s_{p,q} \left(\begin{matrix} a & b & c \\ x & y & z \end{matrix} \right) = \sum_{v=0}^{c-1} \overline{B}_p \left(a \frac{v+z}{c} - x \right) \overline{B}_q \left(b \frac{v+z}{c} - y \right) \quad (2.6)$$

Dedekind toplamı Hall, Wilson ve Zagier'e (Hall vd. 1995) aittir. Bu toplam, daha önce tanımlanmış aşağıdaki toplamı da kapsamaktadır:

(Carlitz 1964)

$$s_p(a, c : x, y) = \sum_{v=0}^{c-1} \mathfrak{B}_p \left(a \frac{v+y}{c} + x \right) \left(\left(\frac{v+y}{c} \right) \right), \quad (2.7)$$

(Rademacher 1964)

$$s(a, c : x, y) = \sum_{v=0}^{c-1} \left(\left(a \frac{v+y}{c} + x \right) \right) \left(\left(\frac{v+y}{c} \right) \right), \quad (2.8)$$

(Mikolás 1957)

$$s_{p,q}(a, b, c) = \sum_{v=0}^{c-1} \mathfrak{B}_p \left(\frac{av}{c} \right) \mathfrak{B}_q \left(\frac{bv}{c} \right), \quad (2.9)$$

ve (Apostol 1950)

$$s_p(a, c) = \sum_{v=0}^{c-1} \overline{B}_p \left(\frac{av}{c} \right) \left(\left(\frac{v}{c} \right) \right). \quad (2.10)$$

Bu şekilde tanımlanan genelleştirilmiş Dedekind toplamlarına karşılık gelen resiprosite bağıntıları da verilmiştir. Bununla birlikte (2.6) ifadesindeki toplamın resiprosite formülü

$$\mathcal{G} \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} = \sum_{p,q \geq 0} \frac{1}{p!q!} s_{p,q} \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} (X/a)^{p-1} (Y/b)^{q-1}$$

üreteç fonksiyonları cinsindendir (Hall vd. 1995): a, b, c ikişerli aralarında asal pozitif tamsayılar, $x, y, z \in \mathbb{R}$ ve X, Y, Z sıfır olmayan ve $X + Y + Z = 0$ koşulunu sağlayan değişkenler olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \mathcal{G} \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} + \mathcal{G} \begin{pmatrix} b & c & a \\ y & z & x \\ Y & Z & X \end{pmatrix} + \mathcal{G} \begin{pmatrix} c & a & b \\ z & x & y \\ Z & X & Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} -1/4, & (x, y, z) \in (a, b, c)\mathbb{R} + \mathbb{Z}^3, \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \end{aligned}$$

dır.

Berndt (Berndt 1973a, 1973b; Lewittes 1972)'deki yöntemleri kullanarak,

$$G(z, s : \chi : r_1, r_2) = \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n) \neq (-r_1, -r_2)}}^{\infty} \frac{\chi(m)\overline{\chi}(n)}{((m+r_1)z + n+r_2)^s}$$

fonksiyonu için dönüşüm formülleri elde etmiştir. Burada χ , k modülüne göre primitif (ilkel) karakter, r_1, r_2 keyfi reel sayılar, $z \in \mathbb{H}$ ve $\text{Re}(s) > 2$ dir. $r_1 = r_2 = 0$ ve $s = 0$ durumunda bu dönüşüm formüllerinden biri aşağıdaki gibidir:

a, b, c, d birer tamsayı ve $c > 0$ olmak üzere $ad - bc = 1$ koşulunu sağlayan kesirsel dönüşüm $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ olsun. Eğer $a \equiv d \equiv 0 \pmod{k}$ ise, $z \in \{x + iy : x > -d/c \text{ ve } y > 0\}$ için

$$G(\bar{\chi}) A(Tz, 0 : \chi) = \bar{\chi}(b)\chi(c) \{G(\chi)A(z, 0 : \bar{\chi}) + \pi i \chi(-1)s(d, c; \bar{\chi})\}$$

dır. Burada,

$$s(d, c : \chi) = \sum_{n \bmod ck} \chi(n) \bar{B}_{1,\chi}(nd/c) \bar{B}_1(n/ck)$$

ile verilen Dedekind karakter toplamıdır.

$S(c, d, \chi)$ toplamının resiprosite bağıntısı, $(c, d) = 1$, $c, d > 0$ ve c veya $d \equiv 0 \pmod{k}$ olmak üzere

$$s(c, d : \chi) + s(d, c : \chi) = \bar{B}_{1,\chi} \bar{B}_{1,\bar{\chi}}$$

şeklindedir (Berndt 1973a).

Meyer (2000), $e(z) = e^{2\pi iz}$, $r = (r_1, r_2)$, $h = (h_1, h_2)$, $\text{Re}(s) > 2$ ve $\text{Im}(z) > 0$ olmak üzere

$$G(z, s : \chi : r, h) = \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ (m, n) \neq (-r_1, -r_2)}}^{\infty} \frac{\chi(m) \bar{\chi}(n) e((mh_1 + nh_2)/k)}{((m + r_1)z + n + r_2)^s}$$

fonksiyonunu göz önüne almıştır ve

$$A(z, s : \chi : r, h) = \sum_{m > -r_1} e\left(\frac{mh_1}{k}\right) \chi(m) \sum_{n > h_2} \chi(n) e((m+r_1)z+r_2)(n-h_2)/k (n-h_2)^{s-1}$$

fonksiyonu cinsinden yazılabileceğini göstermiştir. $s = r_1 = r_2 = 0$ için $A(z, 0 : \chi : (0, 0), (\frac{k}{2}, \frac{k}{2}))$ ifadesinin dönüşüm formülünde

$$s^*(d, c : \chi) = \sum_{n \bmod ck} (-1)^n \chi(n) \bar{B}_1^*(nd/c, \chi) B_1(n/ck)$$

şeklinde alternatif Dedekind karakter toplamı ortaya çıkmıştır. Burada $\bar{B}_n^*(x, \chi)$, $n \geq 1$ ve $-\infty < x < \infty$ için

$$\bar{B}_n^*(x, \chi) = k^{n-1} \sum_{h=1}^{k-1} (-1)^h \bar{\chi}(h) \bar{B}_n\left(\frac{x+h}{k}\right)$$

ile tanımlanan alternatif genelleştirilmiş Bernoulli fonksiyonudur. Ayrıca, $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ kesirsel dönüşümünde a ve c sayılarının tek veya çift olma durumlarına bağlı

olarak

$$\begin{aligned} s_1^*(d, c : \chi) &= \sum_{j=1}^c (-1)^j \overline{B}_1(jd/c, \overline{\chi}) \sum_{\mu=0}^{k-1} (-1)^\mu \overline{\chi}(c\mu + j), \\ s_2^*(d, c : \chi) &= \sum_{n \pmod{ck}} \chi(n) \overline{B}_1^*(nd/c, \chi), \\ s_3^*(d, c : \chi) &= \sum_{j=1}^c (-1)^j \chi(j) \sum_{\mu=0}^{k-1} \overline{B}_1^*\left(\frac{d(c\mu + j)}{c}, \chi\right) \end{aligned}$$

toplamları görünmektedir.

(2.7) ifadesindeki toplamın karakter genellemesi Cenkci vd. (2007) tarafından

$$s_p(b, c; \chi; x, y) = \sum_{a=0}^{ck-1} \chi(a) \overline{B}_{p,\chi}\left(b\frac{a+y}{c} + x\right) \overline{B}_1\left(\frac{a+y}{ck}\right) \quad (2.11)$$

olarak ve (2.6) ifadesindeki toplamın bir karakter genellemesi ise Can (2020) tarafından

$$s_{p,q}(a, b, c; \chi_1, \chi_2; x, y, z) = \sum_{v=0}^{ck-1} \chi_1(v) \mathfrak{B}_{p,\chi_2}\left(a\frac{v+z}{c} + x\right) \mathfrak{B}_q\left(b\frac{v+z}{ck} + y\right). \quad (2.12)$$

olarak tanımlanmış ve karşılık gelen resiprosite bağıntıları verilmiştir.

2.3. Hardy–Berndt Toplamları

$\text{Im}(z) > 0$ olmak üzere, $\theta_2(z)$, $\theta_3(z)$ ve $\theta_4(z)$ teta fonksiyonları

$$\begin{aligned} \theta_2(z) &= 2e^{\pi iz/4} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{\pi iz2n}) (1 + e^{\pi iz2n})^2, \\ \theta_3(z) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{\pi iz2n}) (1 + e^{\pi iz(2n-1)})^2, \\ \theta_4(z) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{\pi iz2n}) (1 - e^{\pi iz(2n-1)})^2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonlar ile Dedekind eta fonksiyonu arasındaki bağıntılar

$$\theta_4(z) = \frac{2\eta^2(2z)}{\eta(z)}, \quad \theta_3(z) = \frac{\eta^5(z)}{\eta^2(2z)\eta^2(z/2)} \quad \text{ve} \quad \theta_4(z) = \frac{\eta^2(z/2)}{\eta(z)}$$

şeklinde Rademacher ve Über (1967) tarafından verilmiştir.

Berndt (1978) ve Goldberg (1981), $\frac{az+b}{cz+d}$ kesirsel dönüşümünün a, b, c, d katsayılarına bağlı olarak $\log \theta_i(z)$, $i = 2, 3, 4$ için aşağıdaki dönüşüm formüllerini elde etmişlerdir:

Eğer b çift ise

$$\log \theta_4(Tz) = \log \theta_4(z) + \frac{1}{2} \log(cz + d) - \frac{\pi i}{4} - \frac{\pi i}{4} s_4(d, c), \quad (2.13)$$

eğer a çift ise

$$\log \theta_4(Tz) = \log \theta_2(z) + \frac{1}{2} \log(cz + d) - \frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i d}{4c} + \frac{\pi i}{2} s_3(d, c), \quad (2.14)$$

eğer $c + d$ tek ise

$$\log \theta_3(Tz) = \log \theta_3(z) + \frac{1}{2} \log(cz + d) - \frac{\pi i}{2} + \frac{\pi i}{4} S(d, c), \quad (2.15)$$

eğer d çift ise

$$\log \theta_2(Tz) = \log \theta_4(z) + \frac{1}{2} \log(cz + d) + \frac{\pi i a}{4c} - \frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i}{2} s_1(d, c), \quad (2.16)$$

eğer c çift ise

$$\log \theta_2(Tz) = \log \theta_2(z) + \frac{1}{2} \log(cz + d) - \frac{\pi i}{4} + \pi i \frac{a + d}{4c} - \pi i s_2(d, c), \quad (2.17)$$

eğer c ve d tek ise

$$\log \theta_2(Tz) = \log \theta_3(z) + \frac{1}{2} \log(cz + d) - \frac{\pi i a}{4c} - \frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i}{2} s_5(d, c). \quad (2.18)$$

Bu dönüşüm formüllerinde ortaya çıkan $S(d, c)$ ve $s_j(d, c)$ ($j = 1, \dots, 5$) toplamaları, Hardy toplamaları ya da Berndt'in aritmetik toplamaları olarak adlandırılır ve

$$\begin{aligned} S(d, c) &= \sum_{\mu=1}^{c-1} (-1)^{\mu+1+\left[\frac{d\mu}{c}\right]}, & s_1(d, c) &= \sum_{\mu=1}^{c-1} (-1)^{\left[\frac{d\mu}{c}\right]} \left(\left(\frac{\mu}{c}\right)\right), \\ s_2(d, c) &= \sum_{\mu=1}^{c-1} (-1)^{\mu} \left(\left(\frac{\mu}{c}\right)\right) \left(\left(\frac{d\mu}{c}\right)\right), & s_3(d, c) &= \sum_{\mu=1}^{c-1} (-1)^{\mu} \left(\left(\frac{d\mu}{c}\right)\right), \\ s_4(d, c) &= \sum_{\mu=1}^{c-1} (-1)^{\left[\frac{d\mu}{c}\right]}, & s_5(d, c) &= \sum_{\mu=1}^{c-1} (-1)^{\mu+\left[\frac{d\mu}{c}\right]} \left(\left(\frac{\mu}{c}\right)\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Goldberg (1981), Hardy-Berndt toplamalarının teta fonksiyonlarının Fourier katsayıları üzerine çalışmalarında ve $r_m(n)$ teorisinde de ortaya çıktığını göstermiştir. Burada $r_m(n)$, n nin m tane tamsayının karelerinin toplamı olarak temsil edilme sayısıdır. Dedekind toplamına benzer bu toplamalar da resiprosite bağıntısını sağlamaktadır.

Teorem 2.3. (Berndt 1978) $c, d > 1$ ve $(c, d) = 1$ olmak üzere, eğer $(c + d)$ tek ise

$$S(d, c) + S(c, d) = 1$$

d çift ise

$$s_1(d, c) - s_2(c, d) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{dc} + \frac{c}{d} \right),$$

c tek ise

$$2s_3(d, c) - s_4(c, d) = 1 - \frac{d}{c},$$

$(d + c)$ çift ise

$$s_5(d, c) + s_5(c, d) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2dc}$$

dır.

Can ve Kurt (2014) (ayrıca bkz. (Can 2006)), $\log \theta_4(z)$ nin karakter genellemesi olan

$$B(z, s; \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \chi(m) \chi(2n+1) (2n+1)^{s-1} e^{\pi i m(2n+1) \frac{z}{k}} \quad (2.19)$$

fonksiyonu için dönüşüm formülleri vermiştir. Bu dönüşüm formüllerinde

$$\begin{aligned} S_p(d, c; \chi) &= \sum_{n=1}^{ck-1} \chi(n) \overline{B}_{p,\chi} \left(\frac{(d+kc)n}{2c} \right), \\ s_{3,p}(d, c; \chi) &= \sum_{n=1}^{ck-1} (-1)^n \chi(n) \overline{B}_{p,\chi} \left(\frac{dn}{c} \right), \\ s_{4,p}(d, c; \chi) &= \sum_{n=1}^{ck-1} \chi(n) \overline{B}_{p,\chi} \left(\frac{dn}{2c} \right) \end{aligned}$$

toplamları ortaya çıkmaktadır. Daha sonra, Boztaş ve Can (2019) $\log \theta_2(z)$ nin karakter genellemesi olan

$$A_1(z, s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \chi(m) \chi(n) (-1)^m n^{s-1} e^{\frac{2\pi i z m n}{k}} \quad (2.20)$$

fonksiyonunu tanımlayıp dönüşüm formüllerini elde etmişlerdir. Bu dönüşüm formüllerinde de $s_1(d, c)$, $s_2(d, c)$ ve $s_5(d, c)$ Hardy–Berndt toplamlarının karakter genellemeleri olan

$$\begin{aligned} s_{1,p}(d, c, \chi) &= \sum_{n=1}^{ck} \chi(n) \mathcal{E}_{p-1,\chi} \left(\frac{dn}{c} \right) \overline{B}_1 \left(\frac{n}{ck} \right), \\ s_{2,p}(d, c, \chi) &= \sum_{n=1}^{ck} (-1)^n \chi(n) \overline{B}_{p,\chi} \left(\frac{dn}{c} \right) \overline{B}_1 \left(\frac{n}{ck} \right), \\ s_{5,p}(d, c, \chi) &= \sum_{n=1}^{ck} (-1)^n \chi(n) \mathcal{E}_{p-1,\chi} \left(\frac{dn}{c} \right) \overline{B}_1 \left(\frac{n}{ck} \right) \end{aligned}$$

toplamları ortaya çıkmaktadır.

Hardy–Berndt toplamlarının (2.10) anlamındaki genellemeleri Can vd. (2006), (2.6)–(2.9) anlamındaki genellemeleri ise Can (2021) tarafından verilmiştir. (2.6) anlamındaki yüksek mertebeden Hardy-Berndt toplamları

$$S_{p,q}(a, b, c : x, y, z) = \sum_{\mu=0}^{c-1} (-1)^\mu \mathcal{E}_{p-1} \left(a \frac{\mu+z}{c} + x \right) \mathcal{E}_{q-1} \left(b \frac{\mu+z}{c} + y \right), \quad (2.21)$$

$$S_{p,q}^{(1)}(a, b, c : x, y, z) = \sum_{v=0}^{c-1} \mathcal{E}_{p-1} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathfrak{B}_q \left(b \frac{v+z}{c} + y \right),$$

$$S_{p,q}^{(2)}(a, b, c : x, y, z) = \sum_{v=0}^{c-1} (-1)^v \mathfrak{B}_p \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathfrak{B}_q \left(b \frac{v+z}{c} + y \right),$$

$$S_{p,q}^{(3,5)}(a, b, c : x, y, z) = \sum_{\mu=0}^{c-1} (-1)^\mu \mathcal{E}_{p-1} \left(a \frac{\mu+z}{c} + x \right) \mathfrak{B}_q \left(b \frac{\mu+z}{c} + y \right), \quad (2.22)$$

$$S_{p,q}^{(4)}(a, b, c : x, y, z) = \sum_{\mu=0}^{c-1} \mathcal{E}_{p-1} \left(a \frac{\mu+z}{c} + x \right) \mathcal{E}_{q-1} \left(b \frac{\mu+z}{c} + y \right)$$

şeklinde tanımlanmıştır ve aşağıdaki resiprosite formülleri kanıtlanmıştır.

Teorem 2.4. (Can 2021) a, b ve c ikiyeşerli aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere $a + b + c$ çift tamsayı olsun. $p, q \geq 1$ ve $x, y, z \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda:

$$\begin{aligned} & a^{1-p} b^{1-q} S_{p,q}(a, b, c : x, y, z) \\ &= \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} c^{1+j-p-q} S_{p+q-j,j}(c, -a, b : z, x, y) \\ &+ \sum_{h=1}^q \binom{q-1}{h-1} (-1)^h b^{1-h} c^{1+h-p-q} S_{p+q-h,h}(c, b, a : z, -y, x) \end{aligned} \quad (2.23)$$

eşitliği vardır.

Teorem 2.5. (Can 2021) a, b, c pozitif tamsayılar ve c çift tamsayı olsun. $x, y, z \in \mathbb{R}$ ve $p, q \geq 1$ olsun.

$$\begin{aligned} & a^{1-p} b^{1-q} S_{p,q}^{(2)}(a, b, c : x, y, z) \\ &= -\frac{q}{2} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} a^{1-j} c^{1+j-p-q} S_{p+q-j,j}^{(1)}(c, -a, b : z, x, y) \\ &- \frac{p}{2} \sum_{h=0}^q \binom{q}{h} (-1)^h b^{1-h} c^{1+h-p-q} S_{p+q-h,h}^{(1)}(c, b, a : z, -y, x) \end{aligned} \quad (2.24)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.6. (Can 2021) a, b ve c ikişerli aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere $a + c$ çift tamsayı olsun. $p, q \geq 1$ ve $x, y, z \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda:

$$\begin{aligned}
 & a^{1-p}b^{1-q}S_{p,q}^{(3,5)}(a, b, c : x, y, z) \\
 &= -\frac{q}{2} \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j}c^{1+j-p-q}S_{p+q-j,j}^{(4)}(c, -a, b : z, x, y) \\
 &+ \sum_{h=0}^q \binom{q}{h} (-1)^h b^{1-h}c^{1+h-p-q}S_{p+q-h,h}^{(3,5)}(c, b, a : z, -y, x) \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

Bahsi geçen genellemelerden başka Hardy–Berndt toplamlarının farklı genellemeleri de çalışılmıştır. (Boztaş ve Can 2019; Can vd. 2006; Can ve Kurt 2014; Dağlı ve Can 2013; Liu ve Zhang 2007; Liu ve Gao 2012; Meyer 2020; Simsek 2006, 2009), bunlardan bazıları resiprosite bağıntılarını sağlar (Boztaş ve Can 2019; Can 2006, 2021; Can vd. 2006; Can ve Kurt 2014; Dağlı ve Can 2013) ve bu toplamların sonlu trigonometrik seri temsilleri ve sonsuz seri temsilleri (Berndt ve Goldberg 1984; Can ve Cenkci 2006; Goldberg 1981; Simsek 2003), üç terim bağıntıları (Can 2021; Goldberg 1981; Pettet ve Sitaramachandrarao 1987; Simsek 1998), dağılım özellikleri (Meyer 1997), sınırsızlık (Can 2000, 2004; Meyer 1997), Petersson–Knopp özdeşliği (Liu ve Gao 2012; Sitaramachandrarao 1987), ortalama değer özellikleri (Dağlı 2020, 2021; Dağlı ve Sever 2022; Liu ve Zhang 2005, 2007; Peng ve Zhang 2016) gibi özellikleri çalışılmıştır.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde yüksek mertebeden Hardy-Berndt toplamalarının karakter benzerleri tanımlanacak ve bu toplamaların sağladığı resiprosite bağıntıları verilecektir.

Bu çalışmanın bundan sonraki kısmında, k bir tek tamsayı, χ bir k modül ilkel karakter olarak varsayılacaktır.

3.1. İki İlkel Karakter İçeren Hardy-Berndt Toplamaları

Bu bölümde iki ilkel karakter içeren Hardy-Berndt toplamaları ve karşılık gelen resiprosite bağıntıları verilecektir.

3.1.1. $S_{p,q}(a, b, c : x, y, z)$ toplamının karakter benzeri

(2.21) ifadesinde $z \rightarrow (m+z)/k$ ve $x \rightarrow (n+x)/k$ yazalım ve $(-1)^{m+n} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n)$ ile çarpalım. Sonra $m \pmod k$ ve $n \pmod k$ üzerinden (2.3) ifadesini kullanarak toplayalım. Sol taraf

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{m+n} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) S_{p,q} \left(a, b, c : \frac{n+x}{k}, y, \frac{m+z}{k} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{m+n} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \\
&\quad \times \sum_{\mu=0}^{c-1} (-1)^\mu \mathcal{E}_{p-1} \left(a \frac{\mu + \frac{m+z}{k}}{c} + \frac{n+x}{k} \right) \mathcal{E}_{q-1} \left(b \frac{\mu + \frac{m+z}{k}}{c} + y \right) \\
&= \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \chi_1(m) \sum_{\mu=0}^{c-1} \mathcal{E}_{q-1} \left(b \frac{\mu + \frac{m+z}{k}}{c} + y \right) \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \bar{\chi}_2(n) \mathcal{E}_{p-1} \left(\frac{n+x + ak \frac{\mu + \frac{m+z}{k}}{c}}{k} \right) \\
&= k^{1-p} \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{\mu=0}^{c-1} (-1)^{m+\mu} \chi_1(m) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(x + a \frac{k\mu + m + z}{c} \right) \mathcal{E}_{q-1} \left(b \frac{k\mu + m + z}{kc} + y \right)
\end{aligned}$$

şeklini alır. Burada $v = k\mu + m$ dönüşümü yapılır ve $\chi_1(k\mu + m) = \chi_1(m)$ olduğu özelliği kullanılırsa da sağ taraf

$$k^{1-p} \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(x + a \frac{v+z}{c} \right) \mathcal{E}_{q-1} \left(b \frac{v+z}{kc} + y \right)$$

şekline dönüşür. Bu toplam,

$$\begin{aligned} & S_{p,q}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) \\ &= \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathcal{E}_{q-1} \left(b \frac{v+z}{kc} + y \right) \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{m+n} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) S_{p,q} \left(a, b, c : \frac{n+x}{k}, y, \frac{m+z}{k} \right) \\ &= k^{1-p} S_{p,q}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) \end{aligned} \quad (3.1)$$

elde edilir.

Teorem 3.1. a, b ve c ikişerli aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere $a + b + c$ çift tamsayı olsun. $p, q \geq 1$ ve $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & a^{1-p} b^{1-q} S_{p,q}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) \\ &= k^{1-q} \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} (ak)^{1-j} (ck)^{1+j-p-q} S_{p+q-j,j}^*(ck, -ak, b : \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) \\ &+ \sum_{h=1}^q \binom{q-1}{h-1} (-1)^h b^{1-h} c^{1+h-p-q} k^{h-q} S_{p+q-h,h}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, -y, x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$S_{p,q}^*(c, a, b : \chi_1, \chi_2 : z, x, y) = \sum_{\mu=0}^{b-1} (-1)^\mu \mathcal{E}_{p-1, \chi_1} \left(c \frac{\mu+y}{b} + z \right) \mathcal{E}_{q-1, \chi_2} \left(a \frac{\mu+y}{b} + x \right)$$

dır.

İspat (2.23) ifadesinde $x \rightarrow (n+x)/k$ ve $z \rightarrow (m+z)/k$ yazıp eşitliğin her iki tarafını $(-1)^{m+n} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n)$ ile çarpalım. Sonra $m \pmod k$ ve $n \pmod k$ üzerinden (2.3) ifadesini kullanarak toplayalım. İşlemler sırasında $v = k\mu + n$ dönüşümünü yapıp $\chi_1(k\mu + n) = \chi_1(n)$ özelliğini kullanarak açalım. $\square$

(2.23) ifadesinin sağ tarafı için (3.1) ifadesini kullanıp her tarafı $a^{1-p} b^{1-q}$ ile çarpalım.

Öyle ki

$$a^{1-p} b^{1-q} \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{m+n} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) S_{p,q} \left(a, b, c : \frac{n+x}{k}, y, \frac{m+z}{k} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= a^{1-p} b^{1-q} k^{1-p} S_{p,q}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) \\
&= (ak)^{1-p} b^{1-q} S_{p,q}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir. Aynı işlemleri (2.23) ifadesinin sağ tarafı için yaparsak

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} c^{1+j-p-q} \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{m+n} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) S_{p+q-j,j}(c, -a, b : z, x, y) \\
&+ \sum_{h=1}^q \binom{q-1}{h-1} (-1)^h b^{1-h} c^{1+h-p-q} \\
&\quad \times \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{m+n} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) S_{p+q-h,h}(c, b, a : z, -y, x) \\
&= \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} c^{1+j-p-q} \sum_{\mu=0}^{b-1} (-1)^\mu \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \chi_1(m) \mathcal{E}_{p+q-j-1} \left(c \frac{\mu+y}{b} + \frac{m+z}{k} \right) \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \bar{\chi}_2(n) \mathcal{E}_{j-1} \left(-a \frac{\mu+y}{b} + \frac{n+x}{k} \right) \\
&+ \sum_{h=1}^q \binom{q-1}{h-1} (-1)^h b^{1-h} c^{1+h-p-q} \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{\mu=0}^{a-1} (-1)^\mu (-1)^n \bar{\chi}_2(n) \mathcal{E}_{h-1} \left(b \frac{\mu+\frac{n+x}{k}}{a} - y \right) \\
&\quad \times \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \chi_1(m) \mathcal{E}_{p+q-h-1} \left(c \frac{\mu+\frac{n+x}{k}}{a} + \frac{m+z}{k} \right)
\end{aligned}$$

ifadesine dönüşür. Burada

$$\sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \bar{\chi}_2(n) \mathcal{E}_p \left(\frac{n+x-ak\frac{\mu+y}{b}}{k} \right) = k^{-p} \mathcal{E}_{j-1, \chi_2} \left(x - ak \frac{\mu+y}{b} \right)$$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} (ak)^{1-j} (ck)^{1+j-p-q} \\
&\quad \times \sum_{\mu=0}^{b-1} (-1)^\mu \mathcal{E}_{p+q-j-1, \bar{\chi}_1} \left(ck \frac{\mu+y}{b} + z \right) \mathcal{E}_{j-1, \chi_2} \left(-ak \frac{\mu+y}{b} + x \right) \\
&+ \sum_{h=1}^q \binom{q-1}{h-1} (-1)^h b^{1-h} (ck)^{1+h-p-q} \\
&\quad \times \sum_{v=0}^{ak-1} (-1)^v \bar{\chi}_2(v) \mathcal{E}_{h-1} \left(b \frac{v+x}{ka} - y \right) \mathcal{E}_{p+q-h-1, \bar{\chi}_1} \left(c \frac{v+x}{a} + z \right) \\
&= \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} (ak)^{1-j} (ck)^{1+j-p-q} S_{p+q-j,j}^*(ck, -ak, b : \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y)
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{h=1}^q \binom{q-1}{h-1} (-1)^h b^{1-h} (ck)^{1+h-p-q} S_{p+q-h,h} (c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, -y, x) \quad (3.4)$$

elde edilir. (3.4) ve (3.3) ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned} & (ak)^{1-p} b^{1-q} S_{p,q} (a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) \\ &= \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} (ak)^{1-j} (ck)^{1+j-p-q} S_{p+q-j,j}^* (ck, -ak, b : \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) \\ &+ \sum_{h=1}^q \binom{q-1}{h-1} (-1)^h b^{1-h} (ck)^{1+h-p-q} S_{p+q-h,h} (c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, -y, x) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Eşitliğin her iki tarafını k^{p-1} ile çarparsak,

$$\begin{aligned} & a^{1-p} b^{1-q} S_{p,q} (a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) \\ &= k^{1-q} \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} (ak)^{1-j} c^{1+j-p-q} S_{p+q-j,j}^* (ck, -ak, b : \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) \\ &+ \sum_{h=1}^q \binom{q-1}{h-1} (-1)^h b^{1-h} c^{1+h-p-q} k^{h-q} S_{p+q-h,h} (c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, -y, x) \end{aligned}$$

elde edilir ve (3.2) kanıtlanmış olur.

Teorem 3.1 ifadesinde $p = q = 1$ alınırsa aşağıdaki üç-terim bağıntısı elde edilir.

Sonuç 3.2. a, b ve c ikişerli aralarında asal pozitif tamsayılar ve $a + b + c$ çift tamsayı olsun. $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & S_{1,1} (a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) + S_{1,1} (c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, -y, x) \\ & - S_{1,1}^* (ck, -ak, b : \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) = 0 \end{aligned}$$

üç-terim bağıntısı sağlanır.

Teorem 3.1 ifadesinde $q = 1 = b$ ve $y = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} S_p (a, c : \chi_1, \chi_2 : x, z) &= S_{p,1} (a, 1, c : \chi_1, \chi_2 : x, 0, z) \\ &= \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathcal{E}_0 \left(\frac{v+z}{kc} \right) \end{aligned}$$

Carlitz anlamında karakter Hardy-Berndt toplamı için resiprosite bağıntısı elde edilir.

Sonuç 3.3. a ve c aralarında asal pozitif tamsayılar ve $a + c$ tek tamsayı olsun. $x, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & a^{1-p} S_p(a, c : \chi_1, \chi_2 : x, z) + c^{1-p} S_p(c, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, x) \\ &= \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} c^{j-p} S_{p+1-j,j}^*(ck, -ak, 1 : \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, 0) \\ &= \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} c^{j-p} \mathcal{E}_{p-j, \chi_1}(z) \mathcal{E}_{j-1, \chi_2}(x) \end{aligned}$$

resiprosite bağıntısı sağlanır.

$x = z = 0$ durumu

$$S_p(a, c : \chi_1, \chi_2) = S_{p,1}(a, c : \chi_1, \chi_2 : 0, 0) = \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2}\left(\frac{av}{c}\right) \mathcal{E}_0\left(\frac{v}{kc}\right),$$

Apostol anlamında karakter Hardy-Berndt toplamı için resiprosite bağıntısını verir.

Sonuç 3.4. a ve c aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere $a + c$ tek tamsayı ise

$$\begin{aligned} & a^{1-p} S_p(a, c : \chi_1, \chi_2) + c^{1-p} S_p(c, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1) \\ &= \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} c^{j-p} \mathcal{E}_{p-j, \chi_1}(0) \mathcal{E}_{j-1, \chi_2}(0) \end{aligned}$$

şeklinde resiprosite bağıntısı sağlanır.

3.1.2. $S_{p,q}^{(j)}(a, b, c : x, y, z), (j = 1, 2)$ toplamlarının karakter benzerleri

$S_{p,q}^{(j)}(a, b, c : x, y, z), (j = 1, 2)$ Hardy-Berndt toplamlarının iki ilkel karakter içeren genellemelerini

$$\begin{aligned} S_{p,q}^{(1)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) &= \sum_{v=0}^{ck-1} \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2}\left(a \frac{v+z}{c} + x\right) \mathfrak{B}_q\left(b \frac{v+z}{kc} + y\right), \\ S_{p,q}^{(2)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) &= \sum_{v=0}^{kc-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathfrak{B}_{p, \chi_2}\left(a \frac{v+z}{c} + x\right) \mathfrak{B}_q\left(b \frac{v+z}{kc} + y\right) \end{aligned}$$

ve

$$S_{p,q}^{(1)*}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) = \sum_{\mu=0}^{c-1} \mathcal{E}_{p-1, \chi_1}\left(ak \frac{\mu+z}{c} + x\right) \mathfrak{B}_{q, \chi_2}\left(bk \frac{\mu+z}{c} + y\right)$$

şeklinde toplamlar olarak tanımlayalım.

Not 3.5. $S_{p,q}^{(j)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z)$, $(j = 1, 2)$ toplamlarında $b = 1$, $x = y = z = 0$, $\chi_1 = \chi_2 = \chi$, $p \rightarrow (p + 1 - m)$ ve $q \rightarrow m$ alınırsa

$$\begin{aligned} S_{p+1-m,m}^{(1)}(a, 1, c : \chi, \chi : 0, 0, 0) &= \sum_{v=0}^{ck-1} \chi(v) \mathcal{E}_{p-m,\chi} \left(\frac{av}{c} \right) \mathfrak{B}_m \left(\frac{v}{kc} \right) \\ &= s_{1,p+1-m,m}(a, c : \chi) \end{aligned} \quad (3.5)$$

ve

$$\begin{aligned} S_{p+1-m,m}^{(2)}(a, 1, c : \chi, \chi : 0, 0, 0) &= \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi(v) \mathfrak{B}_{p+1-m,\chi} \left(\frac{av}{c} \right) \mathfrak{B}_m \left(\frac{v}{kc} \right) \\ &= s_{2,p+1-m,m}(a, c : \chi) \end{aligned} \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.5) ve (3.6) toplamaları ise

$$A_1(z, s : \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \chi(m) \chi(n) (-1)^m n^{s-1} e^{\frac{2\pi i z m n}{k}}$$

fonksiyonunun dönüşüm formüllerindeki katsayılarıdır (Boztaş ve Can 2019).

Ayrıca $S_{p,q}^{(j)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z)$, $(j = 1, 2)$ toplamaları aşağıdaki bağıntıyı da sağlar.

Teorem 3.6. a, b, c pozitif tamsayılar ve c çift tamsayı olsun. $x, y, z \in \mathbb{R}$ ve $p, q \geq 1$ için

$$\begin{aligned} &a^{1-p} b^{1-q} k^{1-p} S_{p,q}^{(2)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) \\ &= -\frac{q}{2} k^{1-p} k^{1-q} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} a^{1-j} c^{1+j-p-q} S_{p+q-j,j}^{(1)*}(c, -a, b : \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) \\ &\quad - \frac{p}{2} \sum_{h=0}^q \binom{q}{h} (-1)^h b^{1-h} c^{1+h-p-q} k^{1+h-p-q} S_{p+q-h,h}^{(1)}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, -y, x) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat a, b, c pozitif tamsayılar ve c çift tamsayı olsun. (2.24) ifadesinde $x \rightarrow (n+x)/k$ ve $z \rightarrow (m+z)/k$ yazıp her iki tarafı $(-1)^m \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n)$ ile çarpalım. Sonra $m(\bmod k)$ ve $n(\bmod k)$ üzerinden (2.3) ifadesini kullanarak toplayalım. İşlemler sırasında $v = k\mu + m$ dönüşümü yapalım ve $\chi_1(k\mu + m) = \chi_1(m)$ özelliğini kullanarak açalım:

$$\sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^m \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) S_{p,q}^{(2)}\left(a, b, c : \frac{n+x}{k}, y, \frac{m+z}{k}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \chi_1(m) \sum_{\mu=0}^{c-1} (-1)^\mu \mathfrak{B}_q \left(b^{\mu + \frac{m+z}{k}} + y \right) \sum_{n=0}^{k-1} \bar{\chi}_2(n) \mathfrak{B}_p \left(\frac{n+x + ak^{\frac{\mu + \frac{m+z}{k}}}{c}}{k} \right) \\
&= k^{1-p} \sum_{v=0}^{kc-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathfrak{B}_{p, \chi_2} \left(a^{\frac{v+z}{c}} + x \right) \mathfrak{B}_q \left(b^{\frac{v+z}{kc}} + y \right)
\end{aligned}$$

buradan ise

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^m \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) S_{p,q}^{(2)} \left(a, b, c : \frac{n+x}{k}, y, \frac{m+z}{k} \right) \\
&= k^{1-p} S_{p,q}^{(2)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Şimdi benzer işlemleri $S_{p,q}^{(1)}(c, b, a : z, -y, x)$ toplamı için tekrarlayalım öyle ki $x \rightarrow (n+x)/k$ ve $z \rightarrow (m+z)/k$ yazıp $(-1)^m \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n)$ ile çarpalım. Sonra $m(\bmod k)$ ve $n(\bmod k)$ üzerinden toplayalım:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^m \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) S_{p,q}^{(1)}(c, b, a : \frac{m+z}{k}, -y, \frac{n+x}{k}) \\
&= \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^m \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \sum_{\mu=0}^{a-1} \mathcal{E}_{p-1} \left(c^{\mu + \frac{n+x}{k}} + \frac{m+z}{k} \right) \mathfrak{B}_q \left(b^{\mu + \frac{n+x}{k}} - y \right) \\
&= \sum_{\mu=0}^{a-1} \sum_{n=0}^{k-1} \bar{\chi}_2(n) \mathfrak{B}_q \left(b^{\mu + \frac{n+x}{k}} - y \right) \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \chi_1(m) \mathcal{E}_{p-1} \left(c^{\mu + \frac{n+x}{k}} + \frac{m+z}{k} \right) \\
&= k^{1-p} \sum_{\mu=0}^{a-1} \sum_{m=0}^{k-1} \bar{\chi}_2(n) \mathfrak{B}_q \left(b^{\frac{k\mu + n+x}{ka}} - y \right) \mathcal{E}_{p-1, \bar{\chi}_1} \left(z + ck^{\frac{k\mu + n+x}{ka}} \right) \\
&= k^{1-p} \sum_{v=0}^{ak-1} \bar{\chi}_2(v) \mathcal{E}_{p-1, \bar{\chi}_1} \left(z + c^{\frac{v+x}{a}} \right) \mathfrak{B}_q \left(b^{\frac{v+x}{ka}} - y \right) \\
&= k^{1-p} S_{p,q}^{(1)}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, -y, x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $v = k\mu + m$ dönüşümü yapılmış ve $\chi_2(k\mu + n) = \chi_2(n)$ özelliği kullanılmıştır.

Son olarak aynı işlemleri $S_{p,q}^{(1)}(c, -a, b : z, x, y)$ toplamı için tekrarlayalım. Elde edilen sonuç

$$\sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^m \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) S_{p,q}^{(1)} \left(c, -a, b : \frac{m+z}{k}, \frac{n+x}{k}, y \right)$$

$$= k^{1-p} k^{1-q} S_{p,q}^{(1)*}(c, -a, b : \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y)$$

şeklinde olur. Bulunan eşitlikler birleştirilirse istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.7. a, b, c pozitif tamsayılar ve c çift tamsayı olsun. $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki üç-terim bağıntısı sağlanır.

$$\begin{aligned} & S_{1,1}^{(2)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) - \frac{1}{2} S_{1,1}^{(1)}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, -y, x) \\ & + \frac{1}{2} S_{1,1}^{(1)*}(c, -a, b : \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) = -\frac{b}{2ck} \sum_{v=0}^{ak-1} (-1)^v \bar{\chi}_2(v) \mathfrak{B}_{2, \bar{\chi}_1} \left(c \frac{v+x}{a} + z \right) \end{aligned}$$

İspat Teorem 3.6 ifadesinde $p = q = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & S_{1,1}^{(2)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) - \frac{1}{2} S_{1,1}^{(1)}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, -y, x) \\ & + \frac{1}{2} S_{1,1}^{(1)*}(c, -a, b : \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) \\ & = -\frac{1}{2} ac^{-1} S_{2,0}^{(1)*}(c, -a, b : \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) - \frac{1}{2} bc^{-1} k^{-1} S_{2,0}^{(1)}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, -y, x) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada χ ilkel karakter iken

$$\mathfrak{B}_{0,\chi}(x) = k^{p-1} \sum_{j=0}^{k-1} \bar{\chi}(j) \mathfrak{B}_0 \left(\frac{j+x}{k} \right) = k^{p-1} \sum_{j=0}^{k-1} \bar{\chi}(j) = 0$$

olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & S_{2,0}^{(1)*}(c, -a, b : \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) \\ & = \sum_{\mu=0}^{b-1} \mathcal{E}_{1, \bar{\chi}_1} \left(kc \frac{\mu+y}{b} + z \right) \mathfrak{B}_{0, \chi_2} \left(-ak \frac{\mu+y}{b} + x \right) = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$S_{2,0}^{(2)}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, -y, x) = \sum_{v=0}^{ak-1} (-1)^v \bar{\chi}_2(v) \mathfrak{B}_{2, \bar{\chi}_1} \left(c \frac{v+x}{a} + z \right)$$

şeklindedir. □

Teorem 3.6 ifadesinde $q = b = 1, y = 0$ alınırsa ve

$$\begin{aligned} S_p^{(1)}(a, c : \chi_1, \chi_2 : x, z) &= S_{p,1}^{(1)}(a, 1, c : \chi_1, \chi_2 : x, 0, z) \\ &= \sum_{v=0}^{ck-1} \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathfrak{B}_1 \left(\frac{v+z}{kc} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_p^{(2)}(a, c : \chi_1, \chi_2 : x, z) &= S_{p,1}^{(2)}(a, 1, c : \chi_1, \chi_2 : x, 0, z) \\
&= \sum_{v=0}^{kc-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathfrak{B}_{p,\chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathfrak{B}_1 \left(\frac{v+z}{kc} \right)
\end{aligned}$$

Carlitz anlamında karakter Hardy-Berndt toplamları kullanılırsa aşağıdaki resiprosite bağıntısı elde edilir.

Sonuç 3.8. *a ve c aralarında asal pozitif tamsayılar ve c çift olsun. $x, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}
&a^{1-p} S_p^{(2)}(a, c : \chi_1, \chi_2 : x, z) - \frac{p}{2} c^{1-p} S_p^{(1)}(c, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, x) \\
&= -\frac{1}{2} k^{1-p} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} a^{1-j} c^{j-p} \mathcal{E}_{p-j, \bar{\chi}_1}(z) \mathfrak{B}_{j, \chi_2}(x) - \frac{p}{2k} c^{-p} S_{p+1,0}^{(1)}(c, 1, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, 0, x)
\end{aligned}$$

resiprosite bağıntısı sağlanır.

$x = z = 0$ durumu

$$\begin{aligned}
S_p^{(1)}(a, c : \chi_1, \chi_2) &= S_p^{(1)}(a, c : \chi_1, \chi_2 : 0, 0) = \sum_{v=0}^{ck-1} \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(\frac{av}{c} \right) \mathfrak{B}_1 \left(\frac{v}{kc} \right), \\
S_p^{(2)}(a, c : \chi_1, \chi_2) &= S_{p,1}^{(2)}(a, 1, c : \chi_1, \chi_2 : 0, 0) = \sum_{v=0}^{kc-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathfrak{B}_{p, \chi_2} \left(\frac{av}{c} \right) \mathfrak{B}_1 \left(\frac{v}{kc} \right)
\end{aligned}$$

Apostol anlamında karakter Hardy-Berndt toplamı için aşağıdaki resiprosite bağıntısını verir.

Sonuç 3.9. *a ve c aralarında asal pozitif tamsayılar ve c çift ise*

$$\begin{aligned}
&a^{1-p} S_p^{(2)}(a, c : \chi_1, \chi_2) - \frac{p}{2} c^{1-p} S_p^{(1)}(c, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1) \\
&= -\frac{1}{2} k^{1-p} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} a^{1-j} c^{j-p} \mathcal{E}_{p-j, \bar{\chi}_1}(0) \mathfrak{B}_{j, \chi_2}(0) - \frac{p}{2k} c^{-p} S_{p+1,0}^{(1)}(c, 1, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1) \quad (3.7)
\end{aligned}$$

resiprosite bağıntısı sağlanır.

Not 3.10. (3.7) eşitliğindeki son terim

$$\begin{aligned}
S_{p+1,0}^{(1)}(c, 1, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1) &= \sum_{v=0}^{ak-1} \bar{\chi}_2(v) \mathcal{E}_{p, \bar{\chi}_1} \left(c \frac{v}{a} \right) \mathfrak{B}_0 \left(\frac{v}{ka} \right) \\
&= \sum_{v=0}^{ak-1} \bar{\chi}_2(v) \mathcal{E}_{p, \bar{\chi}_1} \left(c \frac{v}{a} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{p+1} (kc)^p \sum_{j=0}^{kc-1} (-1)^j \chi_1(j) \sum_{v=0}^{ak-1} \bar{\chi}_2(v) \mathfrak{B}_{p+1} \left(\frac{v + a \frac{j}{c}}{ak} \right) \\
&\quad v \rightarrow u + \mu k \\
&= -\frac{2}{p+1} (kc)^p \sum_{j=0}^{kc-1} (-1)^j \chi_1(j) \sum_{\mu=0}^{a-1} \sum_{u=0}^{k-1} \bar{\chi}_2(u) \mathfrak{B}_{p+1} \left(\frac{u + a \frac{j}{c}}{ak} + \frac{\mu}{a} \right) \\
&= -\frac{2}{p+1} \left(\frac{kc}{a} \right)^p \sum_{j=0}^{kc-1} (-1)^j \chi_1(j) \sum_{u=0}^{k-1} \bar{\chi}_2(u) \mathfrak{B}_{p+1} \left(\frac{u}{k} + \frac{aj}{kc} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $Obeb(a, ck) = 1$ olduğundan $j \bmod ck$ yı tararken $\alpha = aj \bmod ck$ yı tarar. Buradan

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{kc-1} (-1)^j \chi_1(j) \sum_{u=0}^{k-1} \bar{\chi}_2(u) \mathfrak{B}_{p+1} \left(\frac{u}{k} + \frac{aj}{kc} \right) \\
&= \bar{\chi}_1(a) \sum_{u=0}^{k-1} \bar{\chi}_2(u) \sum_{j=0}^{kc-1} (-1)^\alpha \chi_1(\alpha) \mathfrak{B}_{p+1} \left(\frac{u}{k} + \frac{\alpha}{kc} \right) \\
&\quad \alpha \rightarrow v + \mu k \\
&= \bar{\chi}_1(a) \sum_{u=0}^{k-1} \bar{\chi}_2(u) \sum_{v=0}^{k-1} (-1)^v \chi_1(j) \sum_{\mu=0}^{c-1} (-1)^\mu \mathfrak{B}_{p+1} \left(\frac{u}{k} + \frac{v}{kc} + \frac{\mu}{c} \right) \\
&= -\bar{\chi}_1(a) \frac{p+1}{2} c^{-p} \sum_{u=0}^{k-1} \bar{\chi}_2(u) \sum_{v=0}^{k-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1} \left(\frac{cu}{k} + \frac{v}{k} \right) \\
&= -\bar{\chi}_1(a) \frac{p+1}{2} \frac{1}{(ck)^p} \sum_{u=0}^{k-1} \bar{\chi}_2(u) \mathcal{E}_{p-1, \bar{\chi}_1}(cu)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
&\sum_{u=0}^{k-1} \bar{\chi}_2(u) \mathcal{E}_{p-1, \bar{\chi}_1}(cu) \stackrel{u \rightarrow kc-u}{=} \chi_2(-1) \sum_{u=0}^{k-1} \bar{\chi}_2(u) \mathcal{E}_{p-1, \bar{\chi}_1}(kc - ku) \\
&\stackrel{(2.5)}{=} (-1)^{c+p-2} \chi_2(-1) \chi_1(-1) \sum_{u=0}^{k-1} \bar{\chi}_2(u) \mathcal{E}_{p-1, \bar{\chi}_1}(cu)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&S_{p+1,0}^{(1)}(c, 1, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1) \\
&= \begin{cases} 0, & (-1)^p \chi_2(-1) \chi_1(-1) = -1 \\ \frac{(-1)^{c+p}}{a^p} \bar{\chi}_1(-a) \chi_2(-1) \sum_{u=0}^{k-1} \bar{\chi}_2(u) \mathcal{E}_{p-1, \bar{\chi}_1}(cu), & (-1)^p \chi_2(-1) \chi_1(-1) = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.3. $S_{p,q}^{(3,5)}(a, b, c : x, y, z)$ ve $S_{p,q}^{(4)}(a, b, c : x, y, z)$ toplamlarının karakter benzerleri

a, b, c pozitif tamsayılar ve $a + c$ çift tamsayı olsun. (2.22) ifadesinde $x \rightarrow (n + x)/k$ ve $z \rightarrow (m + z)/k$ dönüşümü yapalım ve her iki tarafı $(-1)^{m+n} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n)$ ile çarpalım. Sonra $m \pmod k$ ve $n \pmod k$ üzerinden toplayalım. Öyle ki

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{m+n} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) S_{p,q}^{(3,5)} \left(a, b, c : \frac{n+x}{k}, y, \frac{m+z}{k} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{m+n} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \\
&\quad \times \sum_{\mu=0}^{c-1} (-1)^\mu \mathcal{E}_{p-1} \left(a \frac{\mu + \frac{m+z}{k}}{c} + \frac{n+x}{k} \right) \mathfrak{B}_q \left(b \frac{\mu + \frac{m+z}{k}}{c} + y \right) \\
&= \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{\mu+m} \chi_1(m) \sum_{\mu=0}^{c-1} \mathfrak{B}_q \left(b \frac{\mu + \frac{m+z}{k}}{c} + y \right) \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \bar{\chi}_2(n) \mathcal{E}_{p-1} \left(\frac{n+x + ak \frac{\mu + \frac{m+z}{k}}{c}}{k} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{\mu=0}^{c-1} (-1)^{\mu+m} \chi_1(m) \mathfrak{B}_q \left(b \frac{k\mu + m + z}{kc} + y \right) k^{1-p} \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(x + ak \frac{k\mu + m + z}{kc} \right)
\end{aligned}$$

olur. Burada $v = k\mu + m$ dönüşümü yapılır ve $\chi_1(k\mu + m) = \chi_1(m)$ özelliği kullanılırsa sağ taraf

$$k^{1-p} \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathfrak{B}_q \left(b \frac{v+z}{kc} + y \right)$$

şekline dönüşür. Bu toplam

$$\begin{aligned}
& S_{p,q}^{(3,5)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) \\
&= \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathfrak{B}_q \left(b \frac{v+z}{kc} + y \right) \quad (3.8)
\end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{m+n} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) S_{p,q}^{(3,5)} \left(a, b, c : \frac{n+x}{k}, y, \frac{m+z}{k} \right) \\
&= k^{1-p} S_{p,q}^{(3,5)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu işlem (2.25) ifadesi için tekrarlanırsa

$$S_{p,q}^{(4)*}(c, a, b : \chi_1, \chi_2 : z, x, y) = \sum_{\mu=0}^{b-1} \mathcal{E}_{p-1, \chi_1} \left(kc \frac{\mu + y}{b} + z \right) \mathcal{E}_{q-1, \chi_2} \left(ak \frac{\mu + y}{b} + x \right)$$

gösterimi altında aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.11. a, b ve c ikişerli aralarında asal pozitif tamsayılar ve $a + c$ çift tamsayı olsun. $p, q \geq 1$ ve $x, y, z \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda:

$$\begin{aligned} & a^{1-p} b^{1-q} S_{p,q}^{(3,5)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) \\ &= -\frac{q}{2} k^{1-p} k^{1-q} \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} c^{1+j-p-q} S_{p+q-j,j}^{(4)*}(c, -a, b : \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) \\ &+ \sum_{h=0}^q \binom{q}{h} (-1)^h b^{1-h} c^{1+h-p-q} k^{1+h-p-q} S_{p+q-h,h}^{(3,5)}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, -y, x) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

Not 3.12. (3.8) ifadesinde $b = 1$, $x = y = z = 0$, $\chi_1 = \chi_2 = \chi$, $(p-1) \rightarrow (p-m)$ ve $q \rightarrow m$ alınır

$$\begin{aligned} S_{p+1-m,m}^{(3,5)}(a, 1, c : \chi, \chi : 0, 0, 0) &= \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi(v) \mathcal{E}_{p-m, \chi} \left(a \frac{v}{c} \right) \mathfrak{B}_m \left(\frac{v}{kc} \right) \\ &= s_{5,p+1-m,m}(a, c : \chi) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu toplamlar

$$A_1(z, s : \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \chi(m) \chi(n) (-1)^m n^{s-1} e^{\frac{2\pi i z m n}{k}}$$

fonksiyonunun dönüşüm formüllerindeki katsayılardır (Boztaş ve Can 2019).

Sonuç 3.13. a, b, c ikişerli aralarında asal pozitif tamsayılar ve $a + c$ çift tamsayı olsun. $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki üç-terim bağıntısı sağlanır.

$$\begin{aligned} & S_{1,1}^{(3,5)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) + S_{1,1}^{(3,5)}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, -y, x) \\ &+ \frac{1}{2} S_{1,1}^{(4)*}(c, -a, b : \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) = bc^{-1} k^{-1} \sum_{v=0}^{ak-1} (-1)^v \bar{\chi}_2(v) \mathcal{E}_{1, \bar{\chi}_1} \left(c \frac{v+x}{a} + z \right) \end{aligned}$$

İspat Teorem 3.11 ifadesinde $p = q = 1$ alınır

$$\begin{aligned} & S_{1,1}^{(3,5)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) + S_{1,1}^{(3,5)}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, -y, x) \\ & + \frac{1}{2} S_{1,1}^{(4)*}(c, -a, b : \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) = bc^{-1}k^{-1}S_{2,0}^{(3,5)}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, -y, x) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} S_{2,0}^{(3,5)}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, -y, x) &= \sum_{v=0}^{ak-1} (-1)^v \bar{\chi}_2(v) \mathcal{E}_{1, \bar{\chi}_1} \left(c \frac{v+x}{a} + z \right) \mathfrak{B}_0 \left(b \frac{v+x}{ka} - y \right) \\ &= \sum_{v=0}^{ak-1} (-1)^v \bar{\chi}_2(v) \mathcal{E}_{1, \bar{\chi}_1} \left(c \frac{v+x}{a} + z \right) \end{aligned}$$

dır. □

Teorem 3.11 ifadesinde $q = b = 1$ ve $y = 0$ alınır

$$\begin{aligned} S_p^{(3,5)}(a, c : \chi_1, \chi_2 : x, z) &= S_{p,1}^{(3,5)}(a, 1, c : \chi_1, \chi_2 : x, 0, z) \\ &= \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathfrak{B}_1 \left(\frac{v+z}{kc} \right) \end{aligned}$$

gösterimi altında aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 3.14. a, c aralarında asal ve $a + c$ pozitif çift tamsayı ise

$$\begin{aligned} & a^{1-p} S_p^{(3,5)}(a, c : \chi_1, \chi_2 : x, z) + c^{1-p} k^{1-p} S_p^{(3,5)}(c, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, x) \\ &= -\frac{k^{1-p}}{2} \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} c^{j-p} \mathcal{E}_{p-j, \bar{\chi}_1}(z) \mathcal{E}_{j-1, \chi_2}(x) \\ &+ c^{-p} k^{-p} S_{p+1,0}^{(3,5)}(c, 1, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, 0, x) \end{aligned}$$

bağıntısı sağlanır.

İspat Teorem 3.11 ifadesinde $q = b = 1$ ve $y = 0$ alınır

$$\begin{aligned} & a^{1-p} S_{p,1}^{(3,5)}(a, 1, c : \chi_1, \chi_2 : x, 0, z) + c^{1-p} k^{1-p} S_{p,1}^{(3,5)}(c, 1, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, 0, x) \\ &= -\frac{q}{2} k^{1-p} \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} c^{j-p} S_{p+1-j,j}^{(4)*}(c, -a, 1 : \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, 0) \\ &+ c^{-p} k^{-p} S_{p+1,0}^{(3,5)}(c, 1, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, 0, x) \end{aligned}$$

elde edilir ve burada

$$\begin{aligned} S_{p+1,0}^{(3,5)}(c, 1, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, 0, x) &= \sum_{v=0}^{ak-1} (-1)^v \bar{\chi}_2(v) \mathcal{E}_{p-1, \bar{\chi}_1} \left(c \frac{v+x}{a} + z \right) \mathfrak{B}_0 \left(\frac{v+x}{ka} \right) \\ &= \sum_{v=0}^{ak-1} (-1)^v \bar{\chi}_2(v) \mathcal{E}_{p-1, \bar{\chi}_1} \left(c \frac{v+x}{a} + z \right) \end{aligned}$$

şeklindedir. □

$x = z = 0$ durumu için

$$\begin{aligned} S_p^{(5)}(a, c : \chi_1, \chi_2) &= S_p^{(3,5)}(a, c : \chi_1, \chi_2 : 0, 0) \\ &= \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(a \frac{v}{c} \right) \mathfrak{B}_1 \left(\frac{v}{kc} \right) \end{aligned}$$

eşitliği Apostol anlamında karakter Hardy-Berndt toplamı için aşağıdaki resiprosite bağıntısını verir.

Sonuç 3.15. a, c aralarında asal ve $a + c$ pozitif çift tamsayı olsun.

$$\begin{aligned} a^{1-p} S_p^{(5)}(a, c : \chi_1, \chi_2) + c^{1-p} k^{1-p} S_p^{(5)}(c, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1) \\ = -\frac{k^{1-p}}{2} \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} c^{j-p} \mathcal{E}_{p-j, \bar{\chi}_1}(0) \mathcal{E}_{j-1, \chi_2}(0) + c^{-p} k^{-p} S_{p+1,0}^{(3,5)}(c, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1) \end{aligned}$$

Teorem 3.11 ifadesinde $p = a = 1$ ve $x = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} b^{1-q} S_q^{(3,5)}(b, c : \chi_1, \chi_2 : y, z) - \frac{q}{2} (-kc)^{1-q} \chi_2(-1) S_q^{(4)*}(c, b : \chi_1, \chi_2 : z, y) \\ + \sum_{h=0}^q \binom{q}{h} (-1)^h b^{1-h} c^{h-q} k^{h-q} S_{q+1-h,h}^{(3,5)}(c, b, 1 : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, -y, 0) \end{aligned}$$

şeklinde bir başka bağıntı elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} S_q^{(3,5)}(b, c : \chi_1, \chi_2 : y, z) &= S_{1,q}^{(3,5)}(1, b, c : \chi_1, \chi_2 : 0, y, z) \\ &= \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{0, \chi_2} \left(\frac{v+z}{c} \right) \mathfrak{B}_q \left(b \frac{v+z}{kc} + y \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_q^{(4)*}(c, b : \chi_1, \chi_2 : z, y) &= S_{1,q}^{(4)*}(c, 1, b : \chi_1, \chi_2 : z, 0, y) \\ &= \sum_{\mu=0}^{b-1} \mathcal{E}_{0, \chi_1} \left(kc \frac{\mu+y}{b} + z \right) \mathcal{E}_{q-1, \chi_2} \left(k \frac{\mu+y}{b} \right) \end{aligned}$$

ve

$$S_{1,q}^{(4)*}(c, -1, b : \chi_1, \chi_2 : z, 0, y) = (-1)^q \chi_2(-1) S_q^{(4)*}(c, b : \chi_1, \chi_2 : z, y)$$

dır.

a, b, c pozitif tamsayılar ve $a + c$ çift tamsayı olsun. (2.25) bağıntısında yine $y \rightarrow (n + y)/k$ ve $z \rightarrow (m + z)/k$ dönüşümü yapalım. Her iki tarafı $(-1)^m \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n)$ ile çarpalım. Sonra $m(\bmod k)$ ve $n(\bmod k)$ üzerinden toplayalım. Böylece,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^m \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) S_{p,q}^{(3,5)} \left(a, b, c : x, \frac{n+y}{k}, \frac{m+z}{k} \right) \\ &= k^{1-q} \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1} \left(a \frac{v+z}{ck} + x \right) \mathfrak{B}_{q,\chi_2} \left(b \frac{v+z}{kc} + y \right), \\ & \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^m \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) S_{p,q}^{(4)} \left(c, -a, b : \frac{m+z}{k}, x, \frac{n+y}{k} \right) \\ &= k^{1-p} \sum_{v=0}^{bk-1} \bar{\chi}_2(v) \mathcal{E}_{p-1,\bar{\chi}_1} \left(c \frac{v+y}{b} + z \right) \mathcal{E}_{q-1} \left(-a \frac{v+y}{kb} + x \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^m \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) S_{p,q}^{(3,5)}(c, b, a : \frac{m+z}{k}, -\frac{n+y}{k}, x) \\ &= \bar{\chi}_2(-1) k^{1-q} k^{1-p} \sum_{\mu=0}^{a-1} (-1)^\mu \mathcal{E}_{p-1,\bar{\chi}_1} \left(kc \frac{\mu+x}{a} + z \right) \mathfrak{B}_{q,\chi_2} \left(kb \frac{\mu+x}{a} - y \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} s_{p,q}^{(3,5)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) &= \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1} \left(a \frac{v+z}{ck} + x \right) \mathfrak{B}_{q,\chi_2} \left(b \frac{v+z}{c} + y \right), \\ S_{p,q}^{(4)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) &= \sum_{\mu=0}^{ck-1} \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1,\chi_2} \left(a \frac{\mu+z}{c} + x \right) \mathcal{E}_{q-1} \left(b \frac{\mu+z}{ck} + y \right) \end{aligned}$$

ve

$$s_{p,q}^{(3,5)*}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : z, y, x) = \sum_{\mu=0}^{c-1} (-1)^\mu \mathcal{E}_{p-1,\chi_1} \left(ka \frac{\mu+z}{c} + x \right) \mathfrak{B}_{q,\chi_2} \left(kb \frac{\mu+z}{c} + y \right)$$

olarak tanımlanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.16. a, b ve c ikişerli aralarında asal pozitif tamsayılar ve $a + c$ çift tamsayı olsun. $p, q \geq 1$ ve $x, y, z \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$a^{1-p} (bk)^{1-q} s_{p,q}^{(3,5)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{q}{2} \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} (ck)^{1+j-p-q} S_{p+q-j,j}^{(4)}(c, -a, b : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, x, y) \\
&+ \bar{\chi}_2 (-1) \sum_{h=1}^q \binom{q}{h} (-1)^h (bk)^{1-h} (ck)^{1+h-p-q} S_{p+q-h,h}^{(3,5)*}(c, b, a : \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, -y, x)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

bağıntısı sağlanır.

Ayrıca (3.9) ifadesinde $p = a = 1$ ve $x = 0$ olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned}
S_{p+q-h,h}^{(3,5)*}(c, b, 1 : \chi_1, \chi_2 : z, -y, 0) &= \mathcal{E}_{q+1-h,\chi_1}(z) \mathfrak{B}_{h,\chi_2}(-y) \\
&= (-1)^h \chi_2 (-1) \mathcal{E}_{q+1-h,\chi_1}(z) \mathfrak{B}_{h,\chi_2}(y)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
S_{q,1}^{(4)}(c, -1, b : \chi_1, \chi_2 : z, 0, y) &= \sum_{\mu=0}^{bk-1} \chi_1(v) \mathcal{E}_{q-1,\chi_2}\left(c \frac{\mu+y}{b} + z\right) \mathcal{E}_0\left(-\frac{\mu+y}{bk}\right) \\
&= -\sum_{\mu=0}^{bk-1} \chi_1(v) \mathcal{E}_{q-1,\chi_2}\left(c \frac{\mu+y}{b} + z\right) \mathcal{E}_0\left(\frac{\mu+y}{bk}\right) = -S_{q,1}^{(4)}(c, 1, b : \chi_1, \chi_2 : z, 0, y)
\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(bk)^{1-q} s_q^{(3)}(b, c : \chi_1, \chi_2 : y, z) &+ \frac{q}{2} (ck)^{1-q} S_q^{(4)}(c, b : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1 : z, 0, y) \\
&= \sum_{h=1}^q \binom{q}{h} (bk)^{1-h} (ck)^{h-q} \mathcal{E}_{q+1-h,\chi_1}(z) \mathfrak{B}_{h,\chi_2}(y)
\end{aligned}$$

resiprosite bağıntısı elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
s_q^{(3)}(b, c : \chi_1, \chi_2 : y, z) &= s_{1,q}^{(3,5)}(1, b, c : \chi_1, \chi_2 : 0, y, z) \\
&= \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathfrak{B}_{q,\chi_2}\left(b \frac{v+z}{c} + y\right) \mathcal{E}_0\left(\frac{v+z}{ck}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
S_q^{(4)}(c, b : \chi_1, \chi_2 : z, y) &= S_{q,1}^{(4)}(c, 1, b : \chi_1, \chi_2 : z, 0, y) \\
&= \sum_{\mu=0}^{bk-1} \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1,\chi_2}\left(c \frac{\mu+y}{b} + z\right) \mathcal{E}_0\left(\frac{\mu+y}{bk}\right)
\end{aligned}$$

dır.

Not 3.17.

$$s_{p,q}^{(3,5)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z) = \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathfrak{B}_{q,\chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + y \right) \mathcal{E}_{p-1} \left(b \frac{v+z}{ck} + x \right)$$

toplamında $b = 1, x = y = z = 0, \chi_1 = \chi_2 = \chi, p \rightarrow m$ ve $q \rightarrow q + 1 - m$ alınırsa

$$s_{m,q+1-m}^{(3,5)}(a, 1, c : \chi_1, \chi_2 : 0, 0, 0) = \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathfrak{B}_{q+1-m,\chi_2} \left(\frac{av}{c} \right) \mathcal{E}_{m-1} \left(\frac{v}{ck} \right)$$

toplama

$$B(z, s : \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \chi(m) \chi(2n+1) (2n+1)^{s-1} e^{\pi i m(2n+1) \frac{z}{k}}$$

fonksiyonunun dönüşüm formüllerindeki katsayılarıdır (Can ve Kurt 2014).

3.2. Üç İkel Karakter İçeren Hardy-Berndt Toplamları

Bu bölümde üç ikel karakter içeren Hardy-Berndt toplamları ve karşılık gelen resiprosite formülleri verilecektir.

3.2.1. $S_{p,q}(a, b, c : x, y, z)$ toplamının karakter benzeri

(2.21) ifadesinde $x \rightarrow (n+x)/k, y \rightarrow (l+y)/k$ ve $z \rightarrow (m+z)/k$ yazalım ve her iki tarafı $(-1)^{m+n+l} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \bar{\chi}_3(l)$ ile çarpalım. Sonra da $n(\bmod k), m(\bmod k)$ ve $l(\bmod k)$ üzerinden (2.3) ifadesini kullanarak toplayalım. Sol taraf,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{m+n+l} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \bar{\chi}_3(l) S_{p,q} \left(a, b, c : \frac{n+x}{k}, \frac{l+y}{k}, \frac{m+z}{k} \right) \\ &= k^{2-p-q} \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{\mu=0}^{c-1} (-1)^{m+\mu} \chi_1(m) \\ & \quad \times \mathcal{E}_{q-1,\chi_3} \left(b \frac{k\mu+m+z}{c} + y \right) \mathcal{E}_{p-1,\chi_2} \left(x + a \frac{k\mu+m+z}{c} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

şeklinde olur. Burada $v = k\mu + m$ dönüşümü yapılır ve $\chi(k\mu + m) = \chi(m)$ olduğu özelliği kullanılırsa sağ taraf,

$$k^{1-q} k^{1-p} \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1,\chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathcal{E}_{q-1,\chi_3} \left(b \frac{v+z}{c} + y \right) \quad (3.11)$$

şekline dönüşür. Sağdaki toplam:

$$S_{p,q}(a, b, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, y, z)$$

$$= \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathcal{E}_{q-1, \chi_3} \left(b \frac{v+z}{c} + y \right) \quad (3.12)$$

olarak tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{m+n+l} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \bar{\chi}_3(l) S_{p,q} \left(a, b, c : \frac{n+x}{k}, \frac{l+y}{k}, \frac{m+z}{k} \right) \\ &= k^{2-p-q} S_{p,q} (a, b, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, y, z) \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde edilir.

Teorem 3.18. a, b ve c ikişerli aralarında asal pozitif tamsayılar ve $a + b + c$ çift tamsayı olsun. $p, q \geq 1$ ve $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & a^{1-p} b^{1-q} S_{p,q} (a, b, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, y, z) \\ &= \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} c^{1+j-p-q} S_{p+q-j,j} (c, -a, b : \bar{\chi}_3, \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) \\ &+ \sum_{h=1}^q \binom{q-1}{h-1} (-1)^h b^{1-h} c^{1+h-p-q} S_{p+q-h,h} (c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1, \chi_3 : z, -y, x) \end{aligned} \quad (3.14)$$

eşitliği sağlanır.

İspat (2.23) ifadesinde $x \rightarrow (n+x)/k$, $y \rightarrow (l+y)/k$ ve $z \rightarrow (m+z)/k$ yazalım ve her iki tarafı da $(-1)^{m+n+l} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \bar{\chi}_3(l)$ ile çarpalım. Sonra $n \pmod k$, $m \pmod k$ ve $l \pmod k$ üzerinden toplayalım. İşlemler sırasında $v = k\mu + l$ ve $u = k\mu + n$ dönüşümlerini yapalım. Sol taraf (3.13) ile verilmişti. Sağ taraf ise

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} c^{1+j-p-q} \\ & \times \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{m+n+l} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \bar{\chi}_3(l) S_{p+q-j,j} \left(c, -a, b : \frac{m+z}{k}, \frac{n+x}{k}, \frac{l+y}{k} \right) \\ & + \sum_{h=1}^q \binom{q-1}{h-1} (-1)^h b^{1-h} c^{1+h-p-q} \\ & \times \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{m+n+l} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \bar{\chi}_3(l) S_{p+q-h,h} \left(c, b, a : \frac{m+z}{k}, -\frac{l+y}{k}, \frac{n+x}{k} \right) \\ & \times \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \bar{\chi}_3(l) \mathcal{E}_{h-1} \left(b \frac{\mu + \frac{n+x}{k}}{a} - \frac{l+y}{k} \right) \\ &= \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} (ak)^{1-j} (ck)^{1+j-p-q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{v=0}^{bk-1} (-1)^v \bar{\chi}_3(v) \mathcal{E}_{p+q-j-1, \bar{\chi}_1} \left(c \frac{v+y}{b} + z \right) \mathcal{E}_{j-1, \chi_2} \left(-a \frac{v+y}{b} + x \right) \\
& + \sum_{h=1}^q \binom{q-1}{h-1} (-1)^h (bk)^{1-h} (ck)^{1+h-p-q} \\
& \times \sum_{u=0}^{ak-1} (-1)^u \bar{\chi}_2(u) \mathcal{E}_{p+q-h-1, \bar{\chi}_1} \left(c \frac{u+x}{a} + z \right) \mathcal{E}_{h-1, \chi_3} \left(b \frac{u+x}{a} - y \right) \\
& = k^{1-p} k^{1-q} \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} c^{1+j-p-q} S_{p+q-j, j}(c, -a, b : \bar{\chi}_3, \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) \\
& + k^{1-p} k^{1-q} \sum_{h=1}^q \binom{q-1}{h-1} (-1)^h b^{1-h} c^{1+h-p-q} S_{p+q-h, h}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1, \chi_3 : z, -y, x)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Tüm bu ifadeler toparlanırsa (3.14) kanıtlanmış olur. $\square$

Teorem 3.18 ifadesinde $p = q = 1$ alınırse aşağıdaki üç-terim bağıntısı elde edilir.

Sonuç 3.19. a, b, c ikişerli aralarında asal pozitif tamsayılar ve $a + b + c$ çift tamsayı olsun. $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& S_{1,1}(a, b, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, y, z) + S_{1,1}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1, \chi_3 : z, -y, x) \\
& - S_{1,1}(c, -a, b : \bar{\chi}_3, \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) = 0 \quad (3.15)
\end{aligned}$$

üç-terim bağıntısı sağlanır.

3.2.2. $S_{p,q}^{(j)}(a, b, c : x, y, z)$, $(j = 1, 2)$ toplamlarının karakter benzerleri

$S_{p,q}^{(1)}(a, b, c : x, y, z)$ ve $S_{p,q}^{(2)}(a, b, c : x, y, z)$ Hardy-Berndt toplamlarının üç karakter içeren genellemelerini

$$\begin{aligned}
& S_{p,q}^{(1)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, y, z) \\
& = \sum_{v=0}^{ck-1} \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathfrak{B}_{q, \chi_3} \left(b \frac{v+z}{c} + y \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& S_{p,q}^{(2)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, y, z) \\
& = \sum_{v=0}^{kc-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathfrak{B}_{p, \chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathfrak{B}_{q, \chi_3} \left(b \frac{v+z}{c} + y \right)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu toplamlar aşağıdaki resiprosite bağıntısını sağlar.

Teorem 3.20. a, b, c pozitif tamsayılar ve c çift tamsayı olsun. $x, y, z \in \mathbb{R}$ ve $p, q \geq 1$ olsun.

$$\begin{aligned} & a^{1-p} b^{1-q} S_{p,q}^{(2)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, y, z) \\ &= -\frac{q}{2} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} a^{1-j} c^{1+j-p-q} S_{p+q-j,j}^{(1)}(c, -a, b : \chi_3, \bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2 : z, x, y) \\ &\quad - \bar{\chi}_3 (-1) \frac{p}{2} \sum_{h=0}^q \binom{q}{h} (-1)^h b^{1-h} c^{1+h-p-q} S_{p+q-h,h}^{(1)}(c, b, a : \chi_2, \bar{\chi}_1, \bar{\chi}_3 : z, -y, x) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat a, b, c pozitif tamsayılar ve c çift tamsayı olsun. (2.24) eşitliğinde $x \rightarrow (n+x)/k$, $y \rightarrow (l+y)/k$ ve $z \rightarrow (m+z)/k$ yazalım ve her iki tarafı $(-1)^m \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \bar{\chi}_3(l)$ ile çarpalım. Sonra $n(\bmod k)$, $m(\bmod k)$ ve $l(\bmod k)$ üzerinden toplayalım. Bu durumda sol taraf

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^m \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \bar{\chi}_3(l) S_{p,q}^{(2)}\left(a, b, c : \frac{n+x}{k}, \frac{l+y}{k}, \frac{m+z}{k}\right) \\ &= k^{1-p} k^{1-q} S_{p,q}^{(2)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, y, z) \end{aligned} \quad (3.16)$$

şeklinde elde edilir. $\square$

Benzer işlemler $S_{p,q}^{(1)}(c, -a, b : z, x, y)$ ve $S_{p,q}^{(1)}(c, b, a : z, -y, x)$ toplamaları için tekrarlanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^m \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \bar{\chi}_3(l) S_{p,q}^{(1)}\left(c, -a, b : \frac{m+z}{k}, \frac{n+x}{k}, \frac{l+y}{k}\right) \\ &= k^{1-q} k^{1-p} S_{p,q}^{(1)}(c, -a, b : \bar{\chi}_3, \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) \end{aligned} \quad (3.17)$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^m \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \bar{\chi}_3(l) S_{p,q}^{(1)}\left(c, b, a : \frac{m+z}{k}, -\frac{l+y}{k}, \frac{n+x}{k}\right) \\ &= \bar{\chi}_3 (-1) k^{1-p} k^{1-q} S_{p,q}^{(1)}(c, b, a : \chi_2, \bar{\chi}_1, \bar{\chi}_3 : z, -y, x) \end{aligned} \quad (3.18)$$

elde edilir. Böylece, Teorem 2.5, (3.16), (3.18) ve (3.17) ifadelerinden istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.21. a, b, c pozitif tamsayılar ve c çift tamsayı olsun. χ_1, χ_2 ve χ_3 ilkel karakterler ise

$$2S_{1,1}^{(2)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, y, z) - S_{1,1}^{(1)}(c, b, a : \chi_2, \bar{\chi}_1, \bar{\chi}_3 : z, -y, x) \\ + S_{1,1}^{(1)}(c, -a, b : \bar{\chi}_3, \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) = 0$$

üç-terim bağıntısı sağlanır.

İspat Teorem 3.20 ifadesinde $p = q = 1$ alınırsa

$$S_{1,1}^{(2)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, y, z) - \frac{1}{2}S_{1,1}^{(1)}(c, b, a : \chi_2, \bar{\chi}_1, \bar{\chi}_3 : z, -y, x) \\ + \frac{1}{2} \left(S_{1,1}^{(1)}(c, -a, b : \bar{\chi}_3, \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) \right) \\ = -\frac{1}{2} \frac{a}{c} S_{2,0}^{(1)}(c, -a, b : \bar{\chi}_3, \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) - \frac{1}{2} \frac{b}{c} S_{2,0}^{(1)}(c, b, a : \chi_2, \bar{\chi}_1, \bar{\chi}_3 : z, -y, x)$$

elde edilir. Burada χ ilkel karakter olmak üzere

$$\mathfrak{B}_{0,\bar{\chi}}(x) = k^{p-1} \sum_{j=0}^{k-1} \chi(j) \mathfrak{B}_0\left(\frac{j+x}{k}\right) = k^{p-1} \sum_{j=0}^{k-1} \chi(j) = 0 \quad (3.19)$$

olduğu kullanılırsa

$$S_{2,0}^{(1)}(c, b, a : \chi_2, \bar{\chi}_1, \bar{\chi}_3 : z, -y, x) \\ = \sum_{v=0}^{ak-1} \chi_2(v) \mathcal{E}_{1,\bar{\chi}_1}\left(c \frac{v+x}{a} + z\right) \mathfrak{B}_{0,\bar{\chi}_3}\left(b \frac{v+x}{a} - y\right) = 0$$

ve

$$S_{2,0}^{(1)}(c, -a, b : \bar{\chi}_3, \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) \\ = \sum_{v=0}^{bk-1} \bar{\chi}_3(v) \mathcal{E}_{1,\bar{\chi}_1}\left(c \frac{v+y}{c} + z\right) \mathfrak{B}_{0,\chi_2}\left(-a \frac{v+y}{b} + x\right) = 0$$

olduğu görülür. □

3.2.3. $S_{p,q}^{(3,5)}(a, b, c : x, y, z)$ ve $S_{p,q}^{(4)}(a, b, c : x, y, z)$ toplamlarının karakter benzerleri

a, b, c pozitif tamsayılar ve $a+c$ çift tamsayı olsun. (2.22)'de $x \rightarrow (n+x)/k, y \rightarrow (l+y)/k$ ve $z \rightarrow (m+z)/k$ dönüşümlerini yapalım ve her iki tarafı $(-1)^{m+n} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \bar{\chi}_3(l)$ ile çarpalım. Sonra $n(\bmod k), m(\bmod k)$ ve $l(\bmod k)$ üzerinden toplarsak

$$\sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{m+n} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \bar{\chi}_3(l) S_{p,q}^{(3,5)}\left(a, b, c : \frac{n+x}{k}, \frac{l+y}{k}, \frac{m+z}{k}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= k^{1-q} k^{1-p} \sum_{\mu=0}^{c-1} \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{k\mu+m} \chi_1(k\mu+m) \\
&\quad \times \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(a \frac{k\mu+m+z}{c} + x \right) \mathfrak{B}_{q, \chi_3} \left(b \frac{k\mu+m+z}{c} + y \right) \\
&= k^{2-p-q} \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathfrak{B}_{q, \chi_3} \left(b \frac{v+z}{c} + y \right)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
&S_{p,q}^{(3,5)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, y, z) \\
&= \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathfrak{B}_{q, \chi_3} \left(b \frac{v+z}{c} + y \right) \quad (3.20)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{m+n} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \bar{\chi}_3(l) S_{p,q}^{(3,5)} \left(a, b, c : \frac{n+x}{k}, \frac{l+y}{k}, \frac{m+z}{k} \right) \\
&= k^{2-p-q} S_{p,q}^{(3,5)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, y, z) \quad (3.21)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi benzer işlemler $S_{p,q}^{(3,5)}(c, b, a : z, -y, x)$ ve $S_{p,q}^{(4)}(c, -a, b : z, x, y)$ toplamaları için tekrarlanırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{m+n} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \bar{\chi}_3(l) S_{p,q}^{(3,5)} \left(c, b, a : \frac{m+z}{k}, -\frac{l+y}{k}, \frac{n+x}{k} \right) \\
&= \bar{\chi}_3(-1) k^{2-p-q} S_{p,q}^{(3,5)}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1, \chi_3 : z, -y, x) \quad (3.22)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{m+n} \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \bar{\chi}_3(l) S_{p,q}^{(4)} \left(c, -a, b : \frac{m+z}{k}, \frac{n+x}{k}, \frac{l+y}{k} \right) \\
&= k^{2-p-q} S_{p,q}^{(4)}(c, -a, b : \bar{\chi}_3, \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) \quad (3.23)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
&S_{p,q}^{(4)}(c, -a, b : \bar{\chi}_3, \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) \\
&= \sum_{v=0}^{bk-1} \bar{\chi}_3(v) \mathcal{E}_{p-1, \bar{\chi}_1} \left(c \frac{v+y}{b} + z \right) \mathcal{E}_{q-1, \chi_2} \left(-a \frac{v+y}{b} + x \right) \quad (3.24)
\end{aligned}$$

şeklindedir. (3.22), (3.24) ve (3.23) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki teorem kanıtlanır.

Teorem 3.22. a, b ve c ikişerli aralarında asal pozitif tamsayılar ve $a + c$ çift tamsayı olsun. $p, q \geq 1$ ve $x, y, z \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda:

$$\begin{aligned} & a^{1-p} b^{1-q} S_{p,q}^{(3,5)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, y, z) \\ &= -\frac{q}{2} \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} c^{1+j-p-q} S_{p+q-j,j}^{(4)}(c, -a, b : \bar{\chi}_3, \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) \\ &+ \bar{\chi}_3 (-1) \sum_{h=0}^q \binom{q}{h} (-1)^h b^{1-h} c^{1+h-p-q} S_{p+q-h,h}^{(3,5)}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1, \chi_3 : z, -y, x) \quad (3.25) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

$p = q = 1$ için aşağıdaki üç-terim bağıntısı elde edilir.

Sonuç 3.23. a, b, c ikişerli aralarında asal pozitif tamsayılar ve $a + c$ çift tamsayı olsun. $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & S_{1,1}^{(3,5)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, y, z) + \bar{\chi}_3 (-1) S_{1,1}^{(3,5)}(c, b, a : \bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \chi_3 : z, -y, x) \\ &+ \frac{1}{2} S_{1,1}^{(4)}(c, -a, b : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : z, x, y) = 0 \end{aligned}$$

üç-terim bağıntısı sağlanır.

İspat Teorem 3.22 ifadesinde $p = q = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & S_{1,1}^{(3,5)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, y, z) + \bar{\chi}_3 (-1) S_{1,1}^{(3,5)}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1, \chi_3 : z, -y, x) \\ &+ \frac{1}{2} S_{1,1}^{(4)}(c, -a, b : \bar{\chi}_3, \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, y) \\ &= \bar{\chi}_3 (-1) b^1 c^{-1} S_{2,0}^{(3,5)}(c, b, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1, \chi_3 : z, -y, x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} & S_{2,0}^{(3,5)}(c, b, a : \bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \chi_3 : z, -y, x) \\ &= \sum_{v=0}^{ak-1} (-1)^v \bar{\chi}_1(v) \mathcal{E}_{1,\bar{\chi}_2} \left(c \frac{v+x}{a} + z \right) \mathfrak{B}_{0,\chi_3} \left(b \frac{v+x}{a} - y \right) \stackrel{(3.19)}{=} 0 \end{aligned}$$

dır. □

Ayrıca

$$S_p^{(3,5)}(a, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, z) = S_{p,1}^{(3,5)}(a, 1, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, 0, z)$$

$$= \sum_{v=0}^{ck-1} (-1)^v \chi_1(v) \mathcal{E}_{p-1, \chi_2} \left(a \frac{v+z}{c} + x \right) \mathfrak{B}_{1, \chi_3} \left(\frac{v+z}{c} \right)$$

ve

$$\begin{aligned} S_{p,q}^{(4)}(c, a : \bar{\chi}_3, \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x) &= S_{p,q}^{(4)}(c, a, 1 : \bar{\chi}_3, \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, 0) \\ &= \sum_{v=0}^{k-1} \bar{\chi}_3(v) \mathcal{E}_{p-1, \bar{\chi}_1}(cv + z) \mathcal{E}_{q-1, \chi_2}(av + x) \end{aligned}$$

gösterimlerini kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.24. a, c aralarında asal ve $a + c$ pozitif çift tamsayı olsun. $x, z \in \mathbb{R}$ ise

$$\begin{aligned} &a^{1-p} S_p^{(3,5)}(a, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, z) + \bar{\chi}_3(-1) c^{1-p} S_p^{(3,5)}(c, a : \bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \chi_3 : z, x) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} c^{j-p} S_{p+1-j,j}^{(4)}(c, -a : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : z, x) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat Teorem 3.22 ifadesinde $q = b = 1$ ve $y = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} &a^{1-p} S_{p,1}^{(3,5)}(a, 1, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, 0, z) + \bar{\chi}_3(-1) c^{1-p} S_{p,1}^{(3,5)}(c, 1, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1, \chi_3 : z, 0, x) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} c^{j-p} S_{p+1-j,j}^{(4)}(c, -a, 1 : \bar{\chi}_3, \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, 0) \\ &\quad + \bar{\chi}_3(-1) c^{-p} S_{p+1,0}^{(3,5)}(c, 1, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1, \chi_3 : z, 0, x) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \binom{p-1}{j-1} a^{1-j} c^{j-p} S_{p+1-j,j}^{(4)}(c, -a, 1 : \bar{\chi}_3, \bar{\chi}_1, \chi_2 : z, x, 0) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} &S_{p+1,0}^{(3,5)}(c, 1, a : \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_1, \chi_3 : z, 0, x) \\ &= \sum_{v=0}^{ak-1} (-1)^v \bar{\chi}_2(v) \mathcal{E}_{p, \bar{\chi}_1} \left(c \frac{v+x}{a} + z \right) \mathfrak{B}_{0, \chi_3} \left(\frac{v+x}{a} \right) \stackrel{(3.19)}{=} 0 \end{aligned}$$

dır. □

4. SONUÇLAR

Bu tez çalışması kapsamında yüksek mertebeden $S_{p,q}(a, b, c : x, y, z)$, $S_{p,q}^{(j)}(a, b, c : x, y, z)$, ($j = 1, 2, 4$) ve $S_{p,q}^{(3,5)}(a, b, c : x, y, z)$ Hardy–Berndt toplamlarının karakter benzerleri tanımlanmıştır. Bu toplamların karakter genellemeleri iki ilkel Dirichlet karakteri içeren, örneğin $S_{p,q}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z)$ ve üç ilkel Dirichlet karakteri içeren, örneğin $S_{p,q}(a, b, c : \chi_1, \chi_2, \chi_3 : x, y, z)$ toplamlar olarak iki farklı genelleme şeklinde tanımlanmıştır. Bu toplamların sağladıkları resiprosite bağıntıları analitik yollarla kanıtlanmıştır. Özel durumlarda bu toplamların Apostol (1950), Mikolás (1957), Rademacher (1956, 1964) ve Carlitz (1964) anlamında karakter Hardy–Berndt toplamları için de resiprosite bağıntılarını sağladığı görülmüştür. Ayrıca belirli şartlar altında, $S_{p,q}^{(j)}(a, 1, c : \chi_1, \chi_2 : x, 0, z)$, ($j = 1, 2$) ve $S_{p,q}^{(3,5)}(a, b, c : \chi_1, \chi_2 : x, y, z)$ toplamlarının, $A_1(z, s : \chi)$ ve $B(z, s : \chi)$ fonksiyonlarının dönüşüm formüllerindeki katsayıları olduğu gözlemlenmiştir.

5. KAYNAKLAR

- Alkan E., Xiong M. and Zaharescu A. 2008. A bias phenomenon on the behavior of Dedekind sums, *Math. Res. Letters*, 15: 1039–1052.
- Apostol T. M. 1950. Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series, *Duke Math. J.*, 17: 147–157.
- Apostol T. M. 1976. *Introduction to Analytic Number Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York.
- Beck M. and Robins S. 2007. *Computing the Continuous Discretely: Integer-Point Enumeration in Polyhedra*, Undergrad. Texts Math., Springer, (New York).
- Berndt B. C. 1973a. Character transformation formula similar to those for the Dedekind eta-function, *Proc. Sympos. Pure Math.* XXIV 9-30.
- Berndt B. C. 1973b. Generalized Dedekind eta-functions and generalized Dedekind sums, *Trans. Amer. Math. Soc.* 178: 495-508.
- Berndt B. C. 1978. Analytic Eisenstein series, theta functions and series relations in the spirit of Ramanujan, *J. Reine Angew. Math.*, 303/304: 332–365.
- Berndt B. C. and Goldberg L. A. 1984. Analytic properties of arithmetic sums arising in the theory of the classical theta functions, *Siam J. Math. Anal.*, 15: 143–150.
- Boztaş M. Ç. and Can M. 2019. Transformation formulas of a character analogue of $\log \theta_2(z)$, *Ramanujan J.*, 48: 323–349.
- Can M. 2000. *Hardy Toplamları Üzerine, Yüksek Lisans Tezi*, Akdeniz Üniversitesi, 35 s.
- Can M. 2004. Some arithmetic on the Hardy sums $s_2(h, k)$ and $s_3(h, k)$. *Acta Math. Sin. Engl. Ser.*, 20 (2): 193-200.
- Can M. 2006. *Genelleştirilmiş Hardy Toplamları, Doktora tezi*, Akdeniz Üniversitesi, Antalya.
- Can M. 2020. Higher-order character Dedekind sum, *Turk. J. Math.*, 44: 998–1015.
- Can M. 2021. Reciprocity formulas for Hall-Wilson-Zagier type Hardy-Berndt sums, *Acta Math. Hungar.*, 163, 163 (1): 118–139.
- Can M., Cenkci M. and Kurt V. 2006. Generalized Hardy-Berndt sums, *Proc. Jangjeon Math. Soc.*, 9: 19–38.

- Can M. ve Kurt V. 2014. Character analogues of certain Hardy-Berndt sums, *Int. J. Number Theory*, 10 (3): 737–762.
- Carlitz L. 1959. Eulerian numbers and polynomials, *Math. Magazine* 33: 247-260.
- Carlitz L. 1964. Generalized Dedekind sums, *Math. Z.*, 85: 83–90.
- Cenkci M., Can M. and Kurt V. 2007. Degenerate and character Dedekind sums, *J. Number Theory*, 124: 346–363.
- Dağlı M. C. 2020. On the hybrid mean value of generalized Dedekind sums, generalized Hardy sums and Ramanujan sum, *Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie*, 63 (4): 325–333.
- Dağlı M. C. 2021. On some identities involving certain Hardy sums and a Kloosterman sum, *Ukrainian Mathematical Journal*, 72: 1724–1732.
- Dağlı M. C. and Can M. 2013. A new generalization of Hardy-Berndt sums, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, 123: 177–192.
- Dağlı M. C. and Sever H. 2022. On the mean value of generalized Dedekind sum, certain generalized Hardy sums weighted by the Kloosterman sum, *Ukrainian Mathematical Journal*, 75: 889–896.
- Goldberg L. A. 1981. Transformations of theta-functions and analogues of Dedekind sums, Thesis. University of Illinois, (Urbana).
- Hall R. R. and Wilson J. C. and Zagier D. 1995. Reciprocity formulae for general Dedekind–Rademacher sums, *Acta Arith.*, LXXIII, 389–396.
- Hickerson D. 1977. Continued fractions and density results for Dedekind sums, *J. Reine Angew. Math.*, 290: 113–116.
- Hirzebruch F. and Zagier D. 1974. *The Atiyah–Singer Theorem and Elementary Number Theory*, Publish or Perish, (Boston, MA).
- Jordan C. 1965. *Calculus of Finite Differences*. Chelsea, New York.
- Knuth D. E. 1981. *The Art of Computer Programming*, 2nd ed., Addison-Wesley, (Reading, MA).
- Lewittes J. 1972. Analytic continuation of Eisenstein series, *Trans. Amer. Math. Soc.* 177: 469-490.
- Liu H. and Gao J. 2012. Generalized Knopp identities for homogeneous Hardy sums and Cochrane-Hardy sums, *Czech. Math. J.*, 62: 1147–1159.

- Liu H. and Zhang W. 2005. On the even power mean of a sum analogous to Dedekind sums, *Acta Math. Hung.*, 106: 67–81.
- Liu H. and Zhang W. 2007. Generalized Cochrane sums and Cochrane–Hardy sums, *J. Number Theory*, 122: 415–428.
- Meyer J. L. 1997. Properties of certain integer-valued analogues of Dedekind sums, *Acta Arith.*, LXXXII, 229–242.
- Meyer J. L. 2000. Character Analogues of Dedekind sums and transformations of analytic Eisenstein series, *Pacific J. Math.* 194 (1): 137–164.
- Mikolás M. 1957. On certain sums generating the Dedekind sums and their reciprocity laws, *Pacific J. Math.*, 7: 1167–1178.
- Mordell L. J. 1951. Lattice points in a tetrahedron and generalized Dedekind sums, *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 15: 41–46.
- Peng W. and Zhang T. 2016. Some identities involving certain Hardy sum and Kloosterman sum, *J. Number Theory*, 165: 355–362.
- Pettet M. R. and Sitaramachandrarao R. 1987. Three-term relations for Hardy sums, *J. Number Theory*, 25: 328–339.
- Pommersheim J. E. 1993. Toric varieties, lattice points and Dedekind sums, *Math. Ann.*, 295: 1–24.
- Rademacher H. 1956. Zur theorie der Dedekindschen summen, *Math. Z.*, 63: 445–463.
- Rademacher H. 1964. Some remarks on certain generalized Dedekind sums, *Acta Arith.*, 9: 97–105.
- Rademacher H. 1967. Über die transformation der logarithmen der theta funktionen, *Math. Ann.* 168: 142–148.
- Rademacher H. and Grosswald E. 1972. Dedekind Sums, in: *Carus Mathematical Monography 16* Mathematical Association of America, Washington, DC.
- Simsek Y. 1998. Theorems on three term relations for Hardy sums, *Turk. J. Math.*, 22: 153–162.
- Simsek Y. 2003. Relations between theta functions, Hardy sums, Eisenstein and Lambert series in the transformation formula of $\log \eta_{g,h}(z)$, *J. Number Theory*, 99: 338–360.
- Simsek Y. 2006. p-adic q-higher-order Hardy–type sums, *J. Korean Math. Soc.*, 43: 111–131.

- Simsek Y. 2009. q -Hardy-Berndt type sums associated with q -Genocchi type zeta and q - l -functions, *Nonlinear Anal.*, 71: 377–395.
- Sitaramachandrarao R. 1987. Dedekind and Hardy sums, *Acta Arith.*, XLIII, 325–340.
- Urzúa G. 2010. Arrangements of curves and algebraic surfaces, *J. Algebraic Geom.*, 19: 335–365.
- Zagier D. 1973. Higher dimensional Dedekind sums, *Math. Ann.*, 202: 149–172.



ÖZGEÇMİŞ

Fatih ERDOĞAN

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2022- 2024	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans	Hacettepe Üniversitesi
2005-2011	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Ankara