

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**YÜKSEK MERTEBEDEN JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS SAYILARI,
KUATERNİYONLARI VE GENELLEŞTİRİLMELERİ**

Mine UYSAL

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

TEZ JÜRİ ÜYELERİ

Prof. Dr. Engin ÖZKAN

Prof. Dr. Gül KARADENİZ GÖZERİ

Doç. Dr. Tülay ERİŞİR

Doç. Dr. Ali AYDOĞDU

Dr. Öğr. Üyesi Rabia Nagehan ÜREGEN

DOKTORA TEZİ

ERZİNCAN, 2026

© 2026 [Mine UYSAL]. Tüm hakları saklıdır.

Kabul ve Onay Sayfası

Prof. Dr. Engin ÖZKAN danışmanlığında, Mine UYSAL tarafından hazırlanan bu çalışma 06/04/2026 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Gül KARADENİZ GÖZERİ İmza:

Üye : Prof. Dr. Engin ÖZKAN İmza:

Üye : Doç. Dr. Tülay ERİŞİR İmza:

Üye : Doç. Dr. Ali AYDOĞDU İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Rabia Nagehan ÜREGEN İmza:

Yukarıdaki Doktora Tezi Enstitü Yönetim Kurulunun / / 20.... tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Kemal Volkan ÖZDOKUR

Enstitü Müdür V.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etięe Uygunluk Sayfası

“Yüksek Mertebeden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas Sayıları, Kuaterniyonları ve Genelleştirilmeleri” isimli “Doktora” tezimin tarafımda intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiğı gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 06/04/2026.

(İmza)

Mine UYSAL

ÖZET

YÜKSEK MERTEBEDEN JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS SAYILARI, KUATERNİYONLARI VE GENELLEŞTİRİLMELERİ Mine UYSAL

Doktora Tezi, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

2026, 108 sayfa

Bu tezde, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının yeni bir genelleştirilmesi olarak yüksek mertebeden formları tanımlanmış ve bu sayıların kuaterniyonları incelenmiştir. Bu tezin bulguları sekiz ana başlıktan oluşmaktadır. Birinci bölümde, yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları tanımlanmış ve temel özellikleri olan Binet benzeri formülü, yineleme (rekürans) bağıntısı, üreteç fonksiyonları, üreteç fonksiyonlarının türevleri ve bazı önemli özdeşlikleri hesaplanmıştır. İkinci bölümde, reel bileşenleri yüksek mertebeden Jacobsthal sayılarından oluşan kuaterniyonlar tanımlanmış, özellikleri incelenmiş ve bazı önermeler ispatlanmıştır. Ayrıca, bu kuaterniyonların yineleme (rekürans) bağıntısı, Binet benzeri formülü, üreteç fonksiyonları elde edilmiştir ve Cassini, Catalan, Vajda, d'Ocagne özdeşlikleri hesaplanmıştır. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde, Jacobsthal-Lucas sayılarının yeni bir genelleştirilmesi olarak yüksek mertebeden formları ve bu sayıların kuaterniyonları incelenmiştir. Bu sayıların temel tanımları ve özellikleri verilmiştir. Reel bileşenleri yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıları alınarak kuaterniyonlar tanımlanmıştır ve kuaterniyon özellikleri incelenmiştir. Aynı zamanda, Binet benzeri formülü, üreteç fonksiyonları ve özdeşlikleri elde edilmiştir. Ayrıca, yüksek mertebeden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları arasındaki bazı ilişkiler de verilmiştir. Beşinci ve altıncı bölümlerde ise Jacobsthal sayılarını genelleştirmeye yönelik yeni bir yaklaşım olan yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayıları tanımlanmış, bu sayıların sayı dizisi özellikleri ve kuaterniyonları incelenmiştir. Yedinci ve sekizinci bölümlerde ise yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayıları tanımlanıp, kuaterniyon temsilleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuaterniyonlar, Jacobsthal sayıları, Jacobsthal-Lucas sayıları, Binet Formülü.

ABSTRACT

HIGHER ORDER JACOBSTHAL AND JACOBSTHAL-LUCAS NUMBERS, QUATERNIONS AND THEIR GENERALIZATIONS

Mine UYSAL

**Doctoral Thesis, Erzincan Binali Yıldırım University, Institute of Science and
Technology, Department of Mathematics**

Advisor: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

2026, 108 pages

In this thesis, higher order forms are introduced as a new generalization of the Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers, and the quaternions of these numbers are investigated. The results of this thesis are organized into eight main sections. In the first section, higher order Jacobsthal numbers are defined, and their fundamental properties, including a Binet-like formula, recurrence relations, generating functions, derivatives of generating functions, and several important identities, are obtained. In the second section, quaternions whose real components consist of higher order Jacobsthal numbers are defined, their properties are examined, and several propositions are proved. In addition, the recurrence relations, Binet-like formula, and generating functions of these quaternions are derived, and identities such as Cassini, Catalan, Vajda, and d'Ocagne are established. In the third and fourth sections, higher order forms of Jacobsthal-Lucas numbers are introduced as a new generalization, and the quaternions of these numbers are studied. The basic definitions and properties of these numbers are presented. Quaternions are defined by taking higher order Jacobsthal-Lucas numbers as their real components, and their properties are investigated. Furthermore, Binet-like formulas, generating functions, and related identities are obtained. Some relationships between higher order Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas quaternions are also provided. In the fifth and sixth sections, higher order k –Jacobsthal numbers are introduced as a new approach to generalizing Jacobsthal numbers, and both their sequence properties and quaternion representations are examined. Finally, in the seventh and eighth sections, higher order k –Jacobsthal-Lucas numbers are defined, and their quaternion representations are investigated.

Keywords: Quaternions, Jacobsthal Numbers, Jacobsthal-Lucas Numbers, Binet Formula.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam süresince bilgi, tecrübe ve yol göstericiliği ile her zaman yanımda olan, araştırma konusunun belirlenmesinden tezimin tamamlanmasına kadar geçen süreçte sabır ve özveriyle bana rehberlik eden değerli danışmanım sayın Prof. Dr. Engin ÖZKAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Tezimin şekillenmesinde katkılarını esirgemeyen, yapıcı eleştirileri ve önerileri ile çalışmamın gelişimine önemli katkılar sağlayan jüri üyeleri sayın hocalarım Doç. Dr. Tülay ERİŞİR ve Dr. Öğr. Üyesi Rabia Nagehan ÜREGEN'e şükranlarımı sunarım. Ayrıca, tez savunmam sırasında jüri üyeliği yapan değerli hocalarım sayın Prof. Dr. Gül KARADENİZ GÖZERİ ve Doç. Dr. Ali AYDOĞDU'ya da katkılarından dolayı teşekkür ederim. Dostlarıma ve yakın çevreme destekleri için minnettarlığımı ifade etmek isterim. Çalışmalarım sırasında manevi desteğini her zaman hissettiğim, sabırları, anlayışları ve sevgileriyle bana güç veren aileme sonsuz teşekkür ederim.

Mine UYSAL

Nisan, 2026

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Araştırmanın Amacı	1
1.2. Araştırmanın Önemi	2
1.3. Varsayımlar	2
1.4. Sınırlılıklar.....	3
2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ÇALIŞMALAR.....	4
3. YÖNTEM	8
3.1. Fibonacci ve Lucas Sayı Dizisi	8
3.2. Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisi.....	9
3.3. k –Jacobsthal ve k –Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisi	11
3.4. Kuaterniyonlar	13
3.5. Fibonacci Kuaterniyonlar	14
3.6. Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonlar	14
3.7. k –Jacobsthal ve k –Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonlar.....	14

3.8. Yüksek Mertebeden Fibonacci Sayıları ve Kuaterniyonları.....	15
4. BULGULAR	16
4.1. Yüksek Mertebeden Jacobsthal Sayıları.....	16
4.2. Yüksek Mertebeden Jacobsthal Sayılarının Kuaterniyonları	26
4.3. Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Sayıları.....	37
4.4. Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Sayılarının Kuaterniyonları	48
4.5. Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Sayıları.....	60
4.6. Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Sayılarının Kuaterniyonları	70
4.7. Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Sayıları.....	82
4.8. Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Sayılarının Kuaterniyonları	92
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	105
5.1. Sonuç	105
5.2. Öneriler.....	106
KAYNAKÇA	107

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

F_n	n . Fibonacci Sayısı
L_n	n . Lucas Sayısı
J_n	n . Jacobsthal Sayısı
j_n	n . Jacobsthal-Lucas Sayısı
$J_{k,n}$	n . k –Jacobsthal Sayısı
$j_{k,n}$	n . k –Jacobsthal-Lucas Sayısı
$s_{k,n}$	n . Yeni k –Jacobsthal-Lucas Sayısı
$F_n^{(s)}$	n . Yüksek Mertebeden Fibonacci Sayısı
$J_n^{(s)}$	n . Yüksek Mertebeden Jacobsthal Sayısı
$j_n^{(s)}$	n . Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Sayısı
$J_{k,n}^{(s)}$	n . Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Sayısı
$s_{k,n}^{(t)}$	n . Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Sayısı
q	Kuaterniyon
q^*	Bir Kuaterniyonun Eşleniği
$\ q\ $	Bir Kuaterniyonun Normu
Q_n	n . Fibonacci Kuaterniyonu
JQ_n	n . Jacobsthal Kuaterniyonu
jQ_n	n . Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonu
$JQ_{k,n}$	n . k –Jacobsthal Kuaterniyonu
$jQ_{k,n}$	n . k –Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonu
$Q_n^{(s)}$	n . Yüksek Mertebeden Fibonacci Kuaterniyonu
$OJ_n^{(s)}$	n . Yüksek Mertebeden Jacobsthal Kuaterniyonu
$Oj_n^{(s)}$	n . Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonu
$OJ_{k,n}^{(s)}$	n . Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Kuaterniyonu
$Os_{k,n}^{(t)}$	n . Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonu
$Re(OJ_n^{(s)})$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal Kuaterniyonun Gerçel Kısmı
$Vec(OJ_n^{(s)})$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal Kuaterniyonun Vektörel Kısmı
$Re(Oj_n^{(s)})$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonun Gerçel Kısmı

$Vec\left(OJ_n^{(s)}\right)$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonun Vektörel Kısım
$Re\left(OJ_{k,n}^{(s)}\right)$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Kuaterniyonunun Gerçel Kısım
$Vec\left(OJ_{k,n}^{(s)}\right)$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Kuaterniyonun Vektörel Kısım
$Re\left(OS_{k,n}^{(t)}\right)$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun Gerçel Kısım
$Vec\left(OS_{k,n}^{(t)}\right)$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun Vektörel Kısım
$OJ_n^{(s)*}$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal Kuaterniyonunun Eşleniği
$OJ_n^{(s)*, \mathbb{I}}$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal Kuaterniyonunun $\mathbb{I}$ ye Göre Eşleniği
$OJ_n^{(s)*, \mathbb{J}}$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal Kuaterniyonunun $\mathbb{J}$ ye Göre Eşleniği
$OJ_n^{(s)*, \mathbb{K}}$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal Kuaterniyonunun $\mathbb{K}$ ya Göre Eşleniği
$OJ_n^{(s)*}$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun Eşleniği
$OJ_n^{(s)*, \mathbb{I}}$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun $\mathbb{I}$ ye Göre Eşleniği
$OJ_n^{(s)*, \mathbb{J}}$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun $\mathbb{J}$ ye Göre Eşleniği
$OJ_n^{(s)*, \mathbb{K}}$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun $\mathbb{K}$ ya Göre Eşleniği
$OJ_{k,n}^{(s)*}$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Kuaterniyonunun Eşleniği
$OJ_{k,n}^{(s)*, \mathbb{I}}$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Kuaterniyonunun $\mathbb{I}$ ye Göre Eşleniği
$OJ_{k,n}^{(s)*, \mathbb{J}}$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Kuaterniyonunun $\mathbb{J}$ ye Göre Eşleniği
$OJ_{k,n}^{(s)*, \mathbb{K}}$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Kuaterniyonunun $\mathbb{K}$ ya Göre Eşleniği
$OS_{k,n}^{(t)*}$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun Eşleniği
$OS_{k,n}^{(t)*, \mathbb{I}}$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun $\mathbb{I}$ ye Göre Eşleniği
$OS_{k,n}^{(t)*, \mathbb{J}}$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun $\mathbb{J}$ ye Göre Eşleniği
$OS_{k,n}^{(t)*, \mathbb{K}}$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun $\mathbb{K}$ ya Göre Eşleniği
$N\left(OJ_n^{(s)}\right)$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal Kuaterniyonunun Normu
$N^{\mathbb{I}}\left(OJ_n^{(s)}\right)$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal Kuaterniyonunun $\mathbb{I}$ ye Göre Norm-Benzeri

$N^j(OJ_n^{(s)})$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal Kuaterniyonunun j ye Göre Norm-Benzeri
$N^k(OJ_n^{(s)})$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal Kuaterniyonunun k ya Göre Norm-Benzeri
$N(OJ_n^{(s)})$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun Normu
$N^i(OJ_n^{(s)})$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun i ye Göre Norm-Benzeri
$N^j(OJ_n^{(s)})$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun j ye Göre Norm-Benzeri
$N^k(OJ_n^{(s)})$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun k ya Göre Norm-Benzeri
$N(OJ_{k,n}^{(s)})$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Kuaterniyonunun Normu
$N^i(OJ_{k,n}^{(s)})$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Kuaterniyonunun i ye Göre Norm-Benzeri
$N^j(OJ_{k,n}^{(s)})$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Kuaterniyonunun j ye Göre Norm-Benzeri
$N^k(OJ_{k,n}^{(s)})$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Kuaterniyonunun k ya Göre Norm-Benzeri
$N(OS_{k,n}^{(t)})$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun Normu
$N^i(OS_{k,n}^{(t)})$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun i ye Göre Norm-Benzeri
$N^j(OS_{k,n}^{(t)})$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun j ye Göre Norm-Benzeri
$N^k(OS_{k,n}^{(t)})$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun k ya Göre Norm-Benzeri
$G_j(x, s)$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal Sayıların Üreteç Fonksiyonu
$H_j(x, s)$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal Sayıların Üstel Üreteç Fonksiyonu
$G_j'(x, s)$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal Sayıların Üreteç Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$H_j'(x, s)$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal Sayıların Üstel Üreteç Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$G_{jq}(x, s)$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal Kuaterniyonunun Üreteç Fonksiyonu
$H_{jq}(x, s)$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal Kuaterniyonunun Üstel Üreteç Fonksiyonu
$G_j(x, s)$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Sayıların Üreteç Fonksiyonu

$H_j(x, s)$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Sayılarının Üstel Üreteç Fonksiyonu
$G_j'(x, s)$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Sayılarının Üreteç Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$H_j'(x, s)$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Sayılarının Üstel Üreteç Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$G_{jq}(x, s)$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun Üreteç Fonksiyonu
$H_{jq}(x, s)$	Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun Üstel Üreteç Fonksiyonu
$G_{kj}(x, s)$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Sayılarının Üreteç Fonksiyonu
$H_{kj}(x, s)$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Sayılarının Üstel Üreteç Fonksiyonu
$G_{kj}'(x, s)$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Sayılarının Üreteç Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$H_{kj}'(x, s)$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Sayılarının Üstel Üreteç Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$G_{kjq}(x, s)$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Kuaterniyonunun Üreteç Fonksiyonu
$H_{kjq}(x, s)$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Kuaterniyonunun Üstel Üreteç Fonksiyonu
$G_{kj}(x, s)$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Sayılarının Üreteç Fonksiyonu
$H_{kj}(x, s)$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Sayılarının Üstel Üreteç Fonksiyonu
$G_{kj}'(x, s)$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Sayılarının Üreteç Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$H_{kj}'(x, s)$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Sayılarının Üstel Üreteç Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$G_{kjq}(x, s)$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun Üreteç Fonksiyonu
$H_{kjq}(x, s)$	Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonunun Üstel Üreteç Fonksiyonu

1. GİRİŞ

1.1. Araştırmanın Amacı

Bu tez çalışmasının temel amacı, klasik sayı dizilerinden biri olan Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarını daha kapsamlı bir bakış açısıyla ele alarak yüksek mertebeden genelleştirmelerini ortaya koymak ve bu genelleştirilmiş dizileri hem sayı teorisi bağlamında hem de kuaterniyon cebiri içerisinde incelemektir. Bu kapsamda öncelikle, yüksek mertebeden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizileri tanımlanmakta ve bu dizilerin temel matematiksel özellikleri ayrıntılı bir biçimde araştırılmaktadır. Bu özellikler arasında rekürans bağıntıları, Binet tipli kapalı formülleri, üreteç fonksiyonları, üreteç fonksiyonlarının türevleri ve toplam formülleri yer almakta olup, ayrıca Cassini, Catalan, Vajda ve d'Ocagne gibi sayı dizileri teorisinin klasik özdeşlikleri de yüksek mertebeden genelleştirmeler için yeniden elde edilmektedir.

Tezde ikinci olarak, reel bileşenleri yüksek mertebeden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarından oluşan kuaterniyon yapıları tanımlanmaktadır. Bu kuaterniyonların temel cebirsel özellikleri, norm ve eşlenik kavramları incelenmiş, Binet tipli formülleri, üreteç fonksiyonları ve yineleme bağıntıları elde edilmiştir. Ayrıca, bu kuaterniyonlara ilişkin önemli özdeşlikler türetilmiş ve klasik sonuçların kuaterniyon cebiri bağlamında nasıl genelleştirilebileceği ortaya konulmuştur.

Çalışmanın bir diğer amacı, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarını daha genel bir yaklaşımla genişleterek yüksek mertebeden k -Jacobsthal ve k -Jacobsthal-Lucas sayı dizilerini literatüre kazandırmaktır. Bu yeni diziler için de temel özellikler, yineleme bağıntıları, kapalı formülleri, toplam bağıntıları ve üreteç fonksiyonları elde edilmiştir. Bununla birlikte, bu sayı dizilerine bağlı kuaterniyon temsilleri tanımlanmış hem sayı dizileri bağlamında hem de kuaterniyon cebiri çerçevesinde analizi yapılmıştır.

Sonuç olarak, bu tez ile sayı dizileri teorisi ve kuaterniyon cebiri arasında yeni bağlantılar kurulmakta, klasik Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizilerinin daha ileri düzeyde genelleştirilmiş formları ortaya çıkarılmakta ve bu genelleştirmeler aracılığıyla literatüre hem teorik hem de uygulamaya yönelik yeni matematiksel sonuçlar kazandırılması hedeflenmektedir.

1.2. Araştırmanın Önemi

Sayı teorisi, matematiğin en eski ve en temel alanlarından biri olmakla birlikte, sürekli olarak yeni yaklaşımlar ve genelleştirmeler ile gelişimini sürdürmektedir. Fibonacci, Lucas, Pell ve Jacobsthal gibi özel sayı dizileri, yalnızca teorik matematikte değil aynı zamanda bilgisayar bilimleri, kriptografi, kombinatorik, sayısal analiz ve modern fiziğin çeşitli alanlarında da önemli uygulamalara sahiptir. Bu nedenle, bu sayı dizilerinin yeni genelleştirilmiş formlarının incelenmesi hem matematiksel bilgi birikimini genişletmekte hem de olası uygulamalara yönelik yeni ufuklar açmaktadır.

Bu araştırma, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarını yüksek mertebeden genelleştirmelerle ele alarak literatürde önemli bir boşluğu doldurmaktadır. Çalışma, yalnızca bu sayıların klasik özelliklerini daha ileri bir düzeye taşımakla kalmayıp, aynı zamanda bu sayıların kuaterniyon temsillerini inceleyerek kuaterniyon cebiri ile sayı dizileri arasında yeni bağlantılar kurmaktadır. Böylece, sayı dizileri kuramının soyut cebirsel yapılara entegrasyonu sağlanmakta ve iki farklı matematik alanı arasında zengin bir etkileşim ortaya çıkarılmaktadır.

Ayrıca, yüksek mertebeden k -Jacobsthal ve k -Jacobsthal-Lucas sayı dizilerinin tanımlanması, literatüre yeni bir genelleştirme yaklaşımı kazandırmakta ve bu diziler aracılığıyla elde edilen özdeşlikler, rekürans bağıntıları ve kapalı formüller gelecekte yapılacak çalışmalara temel teşkil etmektedir. Bu bağlamda tez, yalnızca teorik matematiğe katkı sağlamasının yanında, kuaterniyonlar üzerinden yapılabilecek uygulamalara da altyapı oluşturmaktadır.

Sonuç olarak, bu araştırma hem sayı dizileri teorisinin hem de kuaterniyon cebirinin gelişimine katkıda bulunmakta, matematiğin farklı alanları arasında köprüler kurarak yeni araştırma imkânları ve olası uygulama alanları oluşturmaktadır.

1.3. Varsayımlar

Çalışmada tanımlanan yüksek mertebeden Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, k -Jacobsthal ve k -Jacobsthal-Lucas sayı dizileri ile ilgili kullanılan tanım ve formüllerin matematiksel açıdan tutarlı ve geçerli olduğu bilinmektedir. Kuaterniyonların tanımları, cebirsel işlemleri ve özellikleri literatürdeki kurallar çerçevesinde uygulanmıştır. Elde edilen özdeşliklerin (Cassini, Catalan, Vajda, d'Ocagne vb.) doğrulukları, verilen ispatların matematiksel kuralları çerçevesinde doğru olduğu bilinmektedir. Tezde kullanılan yöntemlerin (yineleme (rekürans)

bağıntısı, Binet tipi formül, üreteç fonksiyonu yaklaşımı vb.) araştırma amaçlarına uygun olduğu bilinmektedir.

1.4. Sınırlılıklar

Bu tez sadece Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları ile sınırlandırılmıştır. Farklı sayı dizileri bu kapsamda incelenmemiştir.

2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ÇALIŞMALAR

Sayı dizileri, matematiğin temel çalışma alanlarından biri olup, ardışık terimler arasında belirli kurallara dayalı olarak tanımlanan yapılardır. Bu diziler, yalnızca aritmetik veya geometrik özellikleriyle değil, aynı zamanda kombinatorik yapıları, yineleme (rekürans) bağıntıları ve üreteç fonksiyonları aracılığıyla da derinlemesine incelenmektedir. Özellikle Fibonacci, Lucas, Jacobsthal ve diğer benzeri özel sayı dizileri, matematiksel modelleme, sayılar teorisi, cebirsel yapılar ve uygulamalı bilimlerde önemli sonuçlar vermektedir.

Fibonacci dizisi, matematik tarihinde önemli bir yere sahip özel bir sayı dizisidir. Bu dizi, ilk olarak 1202 yılında İtalyan matematikçi Leonardo Pisano Fibonacci tarafından Liber Abaci adlı eserinde ortaya konulmuştur. Fibonacci, diziyi aslında tavşanların üreme modeli üzerine kurduğu bir problem bağlamında tanıtmıştır.

Bununla birlikte, Fibonacci dizisinin kökeni yalnızca Avrupa ile sınırlı değildir. Yapılan araştırmalar, benzer sayı dizilerinin Hint matematikçileri tarafından 6. yüzyılda da kullanıldığını göstermektedir.

Son yıllarda, diziler sadece sayılar teorisinde değil, geometri, olasılık teorisi, cebirsel yapılar gibi matematiğin farklı alanlarında ve ayrıca biyoloji, bilgisayar bilimleri, ekonomi, sanat ve mimari gibi disiplinlerde de derin bağlantılar kurmasıyla ün kazanmıştır. Özellikle altın oran ile ilişkisi, dizinin doğadaki birçok yapıda (bitki yapraklarının dizilişi, çam kozalağı spiralleri, deniz kabukları vb.) gözlemlenmesine imkân vermiştir.

Farklı parametreler altında genelleştirilen sayı dizileri, hem teorik açıdan yeni özellikler ortaya koymakta hem de kriptografi, bilgisayar bilimi, fizik ve biyoloji gibi disiplinlerde çeşitli uygulamalara zemin hazırlamaktadır. Bu bağlamda, sayı dizilerinin farklı bakış açılarıyla ele alınması, hem klasik dizilerin daha iyi anlaşılmasına katkı sağlamakta hem de yeni matematiksel yaklaşımların geliştirilmesine olanak tanımaktadır.

Bu bağlamda yapılan genelleştirmelerden biri de Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizileridir. Bu diziler Fibonacci dizisine benzer bir yineleme (rekürans) bağıntısına sahiptir. Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları, özellikle ikili sayı sistemleri (binary expansions), kodlama teorisi, sayma problemleri, graf teorisi ve kriptografi gibi alanlarda uygulama alanı

bulmaktadır. Bu sayı dizileri özellikle özel sayı dizilerinin cebirsel genelleştirmeleri ve kuaterniyonlar üzerinde yapılan modern çalışmalarda sıkça kullanılmaktadır.

(Sigler, 2002) çalışmasında, Fibonacci dizisi ilk kez tavşan problemi üzerinden Leonardo Pisano tarafından tanıtılmıştır.

(Hoggatt Jr, 1969) çalışmasında Fibonacci sayılarının özelliklerini, özdeşliklerini ve çeşitli uygulamalarını sistematik biçimde incelemiştir.

(Horadam, 1961) çalışmasında Fibonacci dizisinin genelleştirilmiş biçimleri olan Horadam dizileri üzerine incelemeler yapmıştır.

(Koshy, 2019) çalışmasında Fibonacci ve diğer ilgili tam sayı dizilerinin özelliklerini incelemiş, birçok eşitlik ve özdeşlik vermiştir.

(Özvatan, 2018) çalışmasında Fibonacci sayılarının bir genelleştirilmesi olarak yüksek mertebeden Fibonacci sayılarını Binet benzeri formülle tanımlamış ve bazı özelliklerini incelemiştir.

(Kizilateş vd., 2021) çalışmalarında yüksek mertebeden Fibonacci sayıları kullanarak bu sayıların kuaterniyonlarını tanımlamış, hem kuaterniyon hem de dizisel özelliklerini incelemişlerdir.

(Falcon, 2014) çalışmasında Jacobsthal dizilerinin bir genelleştirilmesi olarak yineleme bağıntısını farklı bir şekilde ele alarak k –Jacobsthal sayılarını tanımlamıştır.

(Jhala vd., 2013) çalışmalarında Jacobsthal sayılarının bir genelleştirilmesi olan k –Jacobsthal sayılarını tanımlamış ve bu sayıları içeren özdeşlikleri hesaplamışlardır.

(Uygun vd., 2016) çalışmalarında Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının farklı formülasyonları olarak k –Jacobsthal ve k –Jacobsthal-Lucas sayı dizilerini tanımlamış ve detaylı olarak incelemişlerdir.

(Akkuş vd., 2021) çalışmalarında Jacobsthal-Lucas sayıları için diğer genelleştirmelerden farklı olarak yeni bir formülasyon ile k –Jacobsthal-Lucas sayı dizilerini tanımlamış ve özelliklerini incelemişlerdir.

(Kızılateş vd., 2025) çalışmalarında Gauss Fibonacci sayılarının bir genelleştirilmesi olarak yüksek mertebeden Gauss Fibonacci sayılarının kuaterniyonlarını tanımlamış ve özelliklerini incelemişlerdir.

(Kızılateş, 2025) çalışmasında Gauss Fibonacci polinomlarının bir genelleştirilmesi olarak yüksek mertebeden Gauss Fibonacci polinomlarını tanımlamış ve sayı dizisi olarak özelliklerini incelemişlerdir.

(Hamilton, 1866) eserinde kuaterniyonlara dair en kapsamlı ve derinlemesine ilk incelemelerden birini sunarak matematik tarihinde önemli bir dönüm noktası oluşturmuştur.

(Horadam, 1963) çalışmasında Fibonacci dizilerinin kompleks ve kuaterniyon hallerini ilk kez tanımlamıştır.

(Halici, 2012) çalışmasında Fibonacci kuaterniyonlarının hem sayı dizisi hem de kuaterniyon olarak özelliklerini incelemiştir.

(Szynal-Liana vd., 2016) çalışmalarında Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarını tanımlamış, aralarındaki ilişkileri ve matris temsillerini vermişlerdir.

(Taşçı, 2017) çalışmasında k –Jacobsthal ve k –Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının sayı dizisi olarak özelliklerini incelemiştir.

(Torunbalcı Aydın vd., 2017) çalışmalarında Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının terimleri arasındaki bağıntıları ve toplam formüllerini incelemişlerdir.

(Mamagani vd., 2013) çalışmalarında kuaterniyonların bir genelleştirilmesini tanımlamış ve bu yapıların cebirsel ile geometrik özelliklerini incelemişlerdir.

(Szynal-Liana vd., 2022) çalışmalarında genelleştirilmiş değişmeli kuaterniyon kavramını tanımlamış ve Fibonacci sayıları ile ilişkilendirerek incelemişlerdir.

(Bród vd., 2026) çalışmalarında genelleştirilmiş değişmeli kuaterniyonları Jacobsthal sayı dizileri üzerine uygulamış ve dizisel özelliklerini incelemişlerdir.

(Özkan vd, 2023) çalışmalarında Jacobsthal sayılarının yeni bir Binet benzeri formülünden yararlanarak yüksek mertebeden Jacobsthal sayılarını tanımlamış ve bu sayıların kuaterniyonlarını incelemişlerdir.

(Uysal vd., 2022) çalışmalarında benzer şekilde Jacobsthal-Lucas sayılarının yeni bir Binet benzeri formülü ile yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayılarını tanımlamış ve bu sayıların kuaterniyon formlarını incelemişlerdir.

(Özimamoğlu, 2024) çalışmasında kompleks sayıların bir genelleştirilmesi olarak bileşenleri yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları olan hiper Jacobsthal sayıları tanımlamıştır.

(Kuloğlu vd., 2025) çalışmalarında sayı dizilerinin en genel hâli olan Horadam dizilerinden hareketle Binet benzeri formül yardımıyla yüksek mertebeden Horadam dizilerini tanımlamış ve diğer yüksek mertebeden sayı dizilerini kapsayacak şekilde genelleştirmişlerdir.

3. YÖNTEM

3.1. Fibonacci ve Lucas Sayı Dizisi

Tanım 3.1.1. Fibonacci sayıları başlangıç koşulları $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olacak şekilde

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2$$

verilen yineleme (rekürans) bağıntısıyla tanımlanır (Koshy, 2019).

Fibonacci sayılarının bazı terimleri $\{0,1,1,2,3,5,8,13, \dots\}$ dir.

Fibonacci sayılarının verilen yineleme (rekürans) bağıntısına göre ikinci dereceden karakteristik denklemi;

$$r^2 - r - 1 = 0$$

dir.

Bu karakteristik denkleme göre φ ve δ kökleri

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \delta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

şeklindedir. Bu kökler aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$$\varphi + \delta = 1, \quad \varphi\delta = -1, \quad \varphi - \delta = \sqrt{5}.$$

Tanım 3.1.2. Fibonacci sayılarının Binet formülü

$$F_n = \frac{\varphi^n - \delta^n}{\varphi - \delta}$$

dir (Koshy, 2019).

Teorem 3.1.3. Fibonacci sayılarının Cassini özdeşliği her $n \geq 1$ için

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

dir (Koshy, 2019).

Bir sayı dizisi için Cassini özdeşliğinin incelenmesinin başlıca amacı, dizinin içsel yapısını ve terimleri arasındaki determinant tipli bağıntıları ortaya çıkarmaktır. Bu tür özdeşlikler, dizinin belirli bir düzenlilik gösterdiğini ve güçlü bir cebirsel altyapıya sahip olduğunu ortaya koyar. Ayrıca Cassini tipi ilişkiler, dizinin klasik özel sayı dizileriyle benzer özellikler taşıyıp taşımadığını belirlemede önemli bir rol oynar.

Fibonacci sayılarının yineleme (rekürans) bağıntısında başlangıç koşullarının değiştirilmesiyle Lucas sayı dizisi tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.4. Lucas sayı dizisi başlangıç koşulları $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olacak şekilde

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n \geq 2$$

ile tanımlanır (Koshy, 2019).

Lucas sayı dizisinin bazı terimleri $\{2, 1, 3, 4, 7, 11, \dots\}$ dir.

Lucas sayı dizisi ile Fibonacci sayı dizisinin yineleme (rekürans) bağıntıları aynı olduğundan bu dizilere karşılık gelen ikinci dereceden karakteristik denklemler de aynıdır. Karakteristik denklemi;

$$r^2 - r - 1 = 0$$

dir.

Tanım 3.1.5. Lucas sayılarının Binet formülü

$$L_n = \varphi^n + \delta^n$$

dir (Koshy, 2019).

3.2. Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisi

Tanım 3.2.1. Jacobsthal sayıları başlangıç koşulları $J_0 = 0$ ve $J_1 = 1$ olacak şekilde

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, \quad n \geq 2$$

ile verilen yineleme bağıntısı ile tanımlanır (Horadam, 1996).

Jacobsthal sayıların bazı terimleri $\{0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, \dots\}$ dir.

Jacobsthal sayıları yineleme (rekürans) bağıntısına göre ikinci dereceden karakteristik denkleme sahiptir. Karakteristik denklemi;

$$r^2 - r - 2 = 0$$

şeklindedir.

Bu denklemin kökleri $a = 1$ ve $b = -2$ dir. Bu kökler

$$a + b = 1, ab = -2, a - b = 3$$

bağıntılarını sağlar (Horadam, 1996).

Tanım 3.2.2. Jacobsthal sayılarının Binet formülü

$$J_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

ile verilir (Horadam, 1996).

Tanım 3.2.3. Jacobsthal-Lucas sayılar başlangıç koşulları $j_0 = 2$ ve $j_1 = 1$ olacak şekilde

$$j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}, \quad n \geq 2$$

ile verilen yineleme bağıntısı ile tanımlanır (Horadam, 1996).

Jacobsthal-Lucas sayılarının bazı terimleri $\{2, 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, \dots\}$ dir.

Jacobsthal-Lucas sayı dizisi ile Jacobsthal sayı dizisinin yineleme (rekürans) bağıntıları aynı olduğundan bu dizilere karşılık gelen ikinci dereceden karakteristik denklemler de aynıdır. Karakteristik denklemi;

$$r^2 - r - 2 = 0$$

şeklindedir.

Binet formülü, genellikle bir sayı dizisinin (örneğin Fibonacci, Lucas, Jacobsthal, Pell dizisi gibi) her terimini yineleme (rekürans) bağıntısı tanımına gerek kalmadan doğrudan hesaplamamızı sağlayan kapalı bir formüldür.

Tanım 3.2.4. Jacobsthal-Lucas sayılarının Binet formülü

$$j_n = a^n + b^n$$

ile verilir (Horadam, 1996).

Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının bir genellemesi olarak k –Jacobsthal ve k –Jacobsthal-Lucas sayıları tanımlanır.

3.3. k –Jacobsthal ve k –Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisi

Tanım 3.3.1. k herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere, k –Jacobsthal sayıları $J_{k,n}$ aşağıdaki yineleme bağıntısıyla tanımlanır. Başlangıç koşulları $J_{k,0} = 0$ ve $J_{k,1} = 1$ ile

$$J_{k,n} = kJ_{k,n-1} + 2J_{k,n-2}, \quad n \geq 2$$

dır (Jhala vd., 2013; Uygun vd., 2016).

k –Jacobsthal sayılarının bazı terimleri $\{0, 1, k, k^2 + 2, k^3 + 4k, k^4 + 6k^2 + 4, k^5 + 8k^3 + 12k, \dots\}$ dir.

k –Jacobsthal sayılarının yineleme (rekürans) bağıntısına göre ikinci dereceden karakteristik denklemi;

$$r^2 - kr - 2 = 0$$

dır. Bu denklemin

$$\alpha = \frac{k + \sqrt{k^2 + 8}}{2}, \quad \beta = \frac{k - \sqrt{k^2 + 8}}{2}$$

şeklinde kökleri vardır. Bu kökler,

$$\alpha + \beta = k, \quad \alpha\beta = -2, \quad \alpha - \beta = \sqrt{k^2 + 8}$$

bağıntılarını sağlar.

Tanım 3.3.2. k –Jacobsthal sayılarının Binet formülü

$$J_{k,n} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dır (Jhala vd., 2013; Uygun vd., 2016).

Tanım 3.3.3. k herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere, k –Jacobsthal-Lucas sayıları aşağıdaki yineleme (rekürans) bağıntısıyla tanımlanır. Başlangıç koşulları $j_{k,0} = 2$ ve $j_{k,1} = k$ olmak üzere,

$$j_{k,n} = kj_{k,n-1} + 2j_{k,n-2}, \quad n \geq 2$$

dır (Uygun vd., 2016).

k –Jacobsthal-Lucas sayılarının bazı terimleri $\{2, k, k^2 + 4, k^3 + 6k, k^4 + 8k^2 + 8, k^5 + 10k^3 + 20k, \dots\}$ dir.

Tanım 3.3.4. k –Jacobsthal-Lucas sayılarının Binet formülü

$$j_{k,n} = \alpha^n + \beta^n$$

dır (Uygun vd., 2016).

Jacobsthal-Lucas sayılarının bir genelleştirilmesi olarak yineleme bağıntısının farklı bir şekilde tanımlanmasıyla yeni bir k –Jacobsthal-Lucas sayıları tanımlanmıştır. Buna göre aşağıdaki tanım verilir.

Tanım 3.3.5. k pozitif bir reel sayı olmak üzere, k –Jacobsthal-Lucas sayıları farklı bir yineleme bağıntısıyla aşağıdaki gibi tanımlanır. Başlangıç koşulları $s_{k,0} = 2$ ve $s_{k,1} = 1$ ile

$$s_{k,n+1} = s_{k,n} + 2ks_{k,n-1}, \quad n \geq 1$$

dır (Akkuş vd., 2021).

k –Jacobsthal-Lucas sayılarının bazı terimleri $\{2, 1, 4k + 1, 6k + 1, 8k^2 + 8k + 1, \dots\}$ dir.

k –Jacobsthal-Lucas sayılarının yineleme (rekürans) bağıntısına göre ikinci dereceden karakteristik denklemi;

$$r^2 - r - 2k = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin

$$\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 8k}}{2}, \alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 8k}}{2}$$

şeklinde kökleri vardır. Bu kökler

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1 \alpha_2 = -2k, \alpha_1 - \alpha_2 = \sqrt{1 + 8k}$$

bağıntılarını sağlar.

Tanım 3.3.6. k –Jacobsthal-Lucas sayıları $s_{k,n}$ nin Binet formülü

$$s_{k,n} = \alpha_1^n + \alpha_2^n$$

dır (Akkuş vd., 2021).

3.4. Kuaterniyonlar

Matematiksel yapılar tarih boyunca yalnızca teorik düzeyde kalmayıp, bilim ve teknolojinin farklı alanlarında önemli uygulama alanları bulmuştur. Bu yapılardan biri de ilk kez 1843 yılında William Rowan Hamilton tarafından tanıtılan kuaterniyonlardır. Kuaterniyonlar, karmaşık sayıların daha yüksek boyuta genelleştirilmiş hâli olarak düşünülebilir ve dört bileşenli yapıları sayesinde üç boyutlu uzayda dönüşüm ve yönelimlerin incelenmesinde güçlü bir araç sunar (Hamilton, 1866).

Tanım 3.4.1. q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayılar ve $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ kuaterniyon birimler ve

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k}, \mathbf{j}\mathbf{k} = -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}, \mathbf{k}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}$$

olmak üzere

$$q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$$

formunda yazılan sayılara kuaterniyon denir (Hamilton, 1866).

Tanım 3.4.2. Bir $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ kuaterniyonun eşleniği q^* ile gösterilir ve

$$q^* = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}$$

ile tanımlanır (Hamilton, 1866).

Tanım 3.4.3. Kuaterniyonlar kümesinde herhangi bir q kuaterniyonun boyu (normu) $\|q\|$ ile gösterilir ve

$$\|q\| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

şeklinde tanımlanır (Hamilton, 1866).

Tanım 3.4.4. Bir $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ kuaterniyonun gerçel (reel) $Re(q)$ ile gösterilir ve

$$Re(q) = q_0$$

dir. Vektörel kısmı $Vec(q)$ ile gösterilir ve

$$Vec(q) = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$$

şeklindedir (Hamilton, 1866).

Tanım 3.4.5. $p = p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$ ve $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ iki kuaterniyon olmak üzere bu kuaterniyonların toplamı

$$p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)\mathbf{i} + (p_2 + q_2)\mathbf{j} + (p_3 + q_3)\mathbf{k}$$

ile tanımlanır (Hamilton, 1866).

Tanım 3.4.6. $p = p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$ ve $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ iki kuaterniyon olmak üzere çarpımları

$$pq = (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + p_4q_4) + (p_1q_2 + p_2q_1 + p_4q_3 + p_3q_4)\mathbf{i} \\ + (p_1q_3 + p_3q_1 + p_2q_4 + p_4q_2)\mathbf{j} + (p_1q_4 + p_4q_1 + p_3q_2 + p_2q_3)\mathbf{k}$$

ile tanımlanır (Hamilton, 1866).

Cebir ve sayılar teorisi alanında, kuaterniyonların reel katsayıları yerine çeşitli sayı dizileri kullanılarak birçok yeni dizi elde edilmiş ve bu diziler genelleştirilmiş yapılar olarak ele alınmıştır.

3.5. Fibonacci Kuaterniyonlar

Tanım 3.5.1. Kuaterniyonlar kümesinde reel katsayılar Fibonacci sayısı F_n alınarak Fibonacci kuaterniyonlar tanımlanır. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ lar kuaterniyon birimler olmak üzere Fibonacci sayılarının kuaterniyonu

$$Q_n = F_n + F_{n+1}\mathbf{i} + F_{n+2}\mathbf{j} + F_{n+3}\mathbf{k}$$

ile tanımlanır (Horadam, 1963).

3.6. Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonlar

Tanım 3.6.1. J_n n . Jacobsthal sayısı ve $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ lar kuaterniyon birimler olmak üzere Jacobsthal kuaterniyonlar

$$JQ_n = J_n + J_{n+1}\mathbf{i} + J_{n+2}\mathbf{j} + J_{n+3}\mathbf{k}$$

ile tanımlanır (Szynal-Liana vd., 2016).

Tanım 3.6.2. Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlar

$$jQ_n = j_n + j_{n+1}\mathbf{i} + j_{n+2}\mathbf{j} + j_{n+3}\mathbf{k}$$

ile tanımlanır (Szynal-Liana vd., 2016).

3.7. k –Jacobsthal ve k –Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonlar

Tanım 3.7.1. k –Jacobsthal kuaterniyonları

$$JQ_{k,n} = J_{k,n} + J_{k,n+1}\mathbf{i} + J_{k,n+2}\mathbf{j} + J_{k,n+3}\mathbf{k}$$

ile tanımlanır (Taşçı, 2017).

Tanım 3.7.2. k –Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları

$$jQ_{k,n} = j_{k,n} + j_{k,n+1}\mathbf{i} + j_{k,n+2}\mathbf{j} + j_{k,n+3}\mathbf{k}$$

ile tanımlanır (Taşçı, 2017).

3.8. Yüksek Mertebeden Fibonacci Sayıları ve Kuaterniyonları

Bu bölümde yüksek mertebeden Fibonacci sayılarının tanımı, Binet formülü ve kuaterniyon tanımı verilecektir.

Tanım 3.8.1. Yüksek mertebeden Fibonacci sayıları

$$F_n^{(s)} = \frac{F_{ns}}{F_s}$$

eşitliği ile tanımlanır (Özvatan, 2018)

Tanım 3.8.2. Yüksek mertebeden Fibonacci sayılarının Binet benzeri formülü

$$F_n^{(s)} = \frac{(\varphi^s)^n - (\delta^s)^n}{\varphi^s - \delta^s}$$

eşitliği ile tanımlanır Buradaki φ ve δ Fibonacci sayısının Binet formülündeki köklerdir. (Özvatan, 2018).

Tanım 3.8.3. Yüksek mertebeden Fibonacci sayılarının terimlerinin sağladığı yineleme (rekürans) bağıntısı

$$F_{n+1}^{(s)} = L_k F_{n+1}^{(s)} + (-1)^{s-1} F_{n-1}^{(s)}$$

dir (Özvatan, 2018).

Tanım 3.8.4. Yüksek mertebeden Fibonacci kuaterniyonları

$$Q_n^{(s)} = F_n^{(s)} + F_{n+1}^{(s)} \mathbf{i} + F_{n+2}^{(s)} \mathbf{j} + F_{n+3}^{(s)} \mathbf{k}$$

ile tanımlanır. Burada $F_n^{(s)}$ ler yüksek mertebeden Fibonacci sayıları ve $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ lar ise kuaterniyon birimleridir (Kizilateş vd., 2021).

Teorem 3.8.5. Yüksek mertebeden Fibonacci kuaterniyonları $QF_n^{(s)}$ nin Binet formülü

$$Q_n^{(s)} = \frac{\hat{\varphi}(\varphi^s)^n - \hat{\delta}(\delta^s)^n}{\varphi^s - \delta^s}$$

dir. Burada

$$\hat{\varphi} = 1 + \varphi^s \mathbf{i} + \varphi^{2s} \mathbf{j} + \varphi^{3s} \mathbf{k}$$

ve

$$\hat{\delta} = 1 + \delta^s \mathbf{i} + \delta^{2s} \mathbf{j} + \delta^{3s} \mathbf{k}$$

dir (Kizilateş vd., 2021).

4. BULGULAR

4.1. Yüksek Mertebeden Jacobsthal Sayıları

Bu bölümde, yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları tanımlanmıştır. Yüksek mertebeden Jacobsthal sayılar, klasik Jacobsthal sayı dizisinin bir genellemesi olarak ortaya çıkar. Tanımlanan bu sayıların, sayı dizisi olarak temel özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiş; terimlerin sağladığı yineleme (rekürans) bağıntısı, üreteç ve üstel üreteç fonksiyonları hesaplanmıştır. Ayrıca, bu sayı dizisinin bazı temel özdeşlikleri ve sayıların yapısal özellikleri üzerine analizler yapılmıştır. Bu çalışmalar, hem dizinin matematiksel yapısını derinlemesine anlamaya hem de ilerleyen bölümlerde kuaterniyonlar gibi daha karmaşık yapıların oluşturulmasında bir temel sağlamaya yöneliktir. Yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları üzerindeki bu inceleme, sayı dizilerinin genel teorisine katkıda bulunurken, aynı zamanda uygulamalı matematik ve algoritmik hesaplamalar için de bir referans noktası sunmaktadır.

Tanım 4.1.1. Yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları

$$J_n^{(s)} = \frac{J_{ns}}{J_s}$$

eşitliği ile tanımlanır (Özkan vd., 2023).

Tanım 4.1.2. Yüksek mertebeden Jacobsthal sayıların Binet tipli formülü

$$J_n^{(s)} = \frac{(a^s)^n - (b^s)^n}{a^s - b^s} \quad (4.1)$$

eşitliği ile tanımlanır (Özkan vd., 2023).

Burada verilen a ve b Jacobsthal sayıların yineleme (rekürans) bağıntısından elde edilen ikinci dereceden karakteristik denklemin kökleridir.

Yüksek mertebeden Jacobsthal sayıların s ve n değişkenlerine bağlı bazı terimleri aşağıda verilmiştir.

i) $s = 1$ için klasik Jacobsthal sayıları elde edilir.

$$J_n^{(1)} = \frac{a^n - b^n}{a - b} = J_n.$$

ii) $s = 2$ için $J_n^{(2)}$ yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları

$$J_n^{(2)} = \frac{J_{2n}}{J_2}$$

dır. Buradan,

Durum 1: $n = 1$ için

$$J_1^{(2)} = \frac{J_2}{J_2} = 1.$$

Durum 2: $n = 2$ için

$$J_2^{(2)} = \frac{J_4}{J_2} = 5.$$

Durum 3: $n = 3$ için

$$J_3^{(2)} = \frac{J_6}{J_2} = 21.$$

Durum 4: $n = 4$ için

$$J_4^{(2)} = \frac{J_8}{J_2} = 85.$$

Burada $s = 2$ için elde edilen dizi A002450 kodu ile OEIS' te tanımlıdır.

Dikkat edilirse,

$$J_n^{(2)} = J_{2n}$$

olduğu görülür.

iii) $s = 3$ için, $J_n^{(3)}$ yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları

$$J_n^{(3)} = \frac{J_{3n}}{J_3}$$

dır. Buradan

Durum 1: $n = 1$ için

$$J_1^{(3)} = \frac{J_3}{J_3} = 1.$$

Durum 2: $n = 2$ için

$$J_2^{(3)} = \frac{J_6}{J_3} = 7.$$

Durum 3: $n = 3$ için

$$J_3^{(3)} = \frac{J_9}{J_3} = 57.$$

Durum 4: $n = 4$ için

$$J_4^{(3)} = \frac{J_{12}}{J_3} = 455.$$

Burada $s = 3$ için elde edilen dizi A015565 kodu ile OEIS' te tanımlıdır.

iv) $s = 4$ için, $J_n^{(4)}$ yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları

$$J_n^{(4)} = \frac{J_{4n}}{J_4}$$

dır. Buradan

Durum 1: $n = 1$ için

$$J_1^{(4)} = \frac{J_4}{J_4} = 1.$$

Durum 2: $n = 2$ için

$$J_2^{(4)} = \frac{J_8}{J_4} = 17.$$

Durum 3: $n = 3$ için

$$J_3^{(4)} = \frac{J_9}{J_4} = 273$$

bulunur.

Teorem 4.1.3. Yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları için yineleme (rekürans) benzeri bağıntısı her $n \geq 1$ için

$$J_{n+1}^{(s)} = j_s J_n^{(s)} - (-2)^s J_{n-1}^{(s)}$$

eşitliği ile verilir (Özkan vd., 2023).

İspat. İspat için eşitliğin sağ tarafı göz önüne alınırsa

$$j_s J_n^{(s)} - (-2)^s J_{n-1}^{(s)} = (a^s + b^s) \left(\frac{a^{sn} - b^{sn}}{a^s - b^s} \right) - (-2)^s \left(\frac{a^{sn-s} - b^{sn-s}}{a^s - b^s} \right)$$

olduğu görülür. Buradan $ab = -2$ olduğundan

$$\begin{aligned} j_s J_n^{(s)} - (-2)^s J_{n-1}^{(s)} &= (a^s + b^s) \left(\frac{a^{sn} - b^{sn}}{a^s - b^s} \right) - (ab)^s \left(\frac{a^{sn-s} - b^{sn-s}}{a^s - b^s} \right) \\ &= \left(\frac{a^{sn+s} - a^s b^{sn} + b^s a^{sn} - b^{sn+s} - a^{sn} b^s + a^s b^{sn}}{a^s - b^s} \right) \\ &= \left(\frac{a^{sn+s} - b^{sn+s}}{a^s - b^s} \right) = \left(\frac{a^{s(n+1)} - b^{s(n+1)}}{a^s - b^s} \right) = J_{n+1}^{(s)} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$j_s J_n^{(s)} - (-2)^s J_{n-1}^{(s)} = J_{n+1}^{(s)}$$

dir. ■

Görüldüğü gibi yüksek mertebeden Jacobsthal sayılarının yineleme (rekürans) bağıntısı Jacobsthal-Lucas sayısına da bağlıdır.

Teorem 4.1.4. Jacobsthal sayıları aşağıdaki gibi genelleştirilmiş yineleme (rekürans) benzeri bağıntıyı sağlar. $\tau = 0, 1, \dots, s-1$ için

$$J_{s(n+1)+\tau} = j_s J_{sn+\tau} - (-2)^s J_{s(n-1)+\tau}$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} J_{s(n+1)+\tau} &= \frac{a^{sn+s+\tau} - b^{sn+s+\tau}}{a-b} \\ &= \frac{1}{a-b} [a^{sn+\tau} a^s - b^{sn+\tau} b^s - b^{sn+\tau} a^s + b^{sn+\tau} a^s] \\ &= \frac{1}{a-b} [a^s (a^{sn+\tau} - b^{sn+\tau}) - b^{sn+\tau} b^s + b^{sn+\tau} a^s] \\ &= J_{sn+\tau} a^s + \frac{1}{a-b} [b^{sn+\tau} a^s - b^{sn+\tau} b^s] \\ &= J_{sn+\tau} [a^s + b^s - b^s] + \frac{1}{a-b} [b^{sn+\tau} a^s - b^{sn+\tau} b^s] \\ &= J_{sn+\tau} [a^s + b^s - b^s] + \frac{1}{a-b} [b^{sn+\tau} a^s - b^{sn+\tau} b^s] \\ &= J_{sn+\tau} j_s - b^s \left[\frac{a^{sn+\tau} - b^{sn+\tau}}{a-b} \right] + \frac{1}{a-b} [b^{sn+\tau} a^s - b^{sn+\tau} b^s] \\ &= J_{sn+\tau} j_s + \frac{1}{a-b} [b^{sn+\tau} a^s - b^{sn+\tau} b^s - b^s a^{sn+\tau} + b^s b^{sn+\tau}] \\ &= J_{sn+\tau} j_s + \frac{1}{a-b} [b^{sn+\tau} a^s - b^s a^{sn+\tau}] \\ &= J_{sn+\tau} j_s - (ab)^s \left[\frac{a^{sn+\tau-s} - b^{sn+\tau-s}}{a-b} \right] \end{aligned}$$

bulunur.

$ab = -2$ olduğundan

$$J_{s(n+1)+\tau} = J_{sn+\tau} j_s - (-2)^s J_{s(n-1)+\tau}$$

elde edilir. ■

Önerme 4.1.5. Yüksek mertebeden Jacobsthal sayılarının, n ve s ifadelerinin negatif değerleri için aşağıdaki eşitlikleri sağlar;

$$\text{i) } J_{-n}^{(s)} = -(-2)^{sn} J_n^{(s)},$$

$$\text{ii)} \quad J_n^{(-s)} = (-2)^{s(1-n)} J_n^{(s)},$$

$$\text{iii)} \quad J_{-n}^{(-s)} = -(-2)^s J_n^{(s)}.$$

İspat. (4.1) ifadesi kullanıldığında;

i)

$$\begin{aligned} J_{-n}^{(s)} &= \frac{(a^s)^{-n} - (b^s)^{-n}}{a^s - b^s} = \left(\frac{1}{a^{sn}} - \frac{1}{b^{sn}} \right) \left(\frac{1}{a^s - b^s} \right) \\ &= \frac{b^{sn} - a^{sn}}{(ab)^{sn}} \left(\frac{1}{a^s - b^s} \right) = -(ab)^{-sn} \frac{a^{sn} - b^{sn}}{a^s - b^s} \end{aligned}$$

$$ab = -2 \text{ ve } J_n^{(s)} = \frac{(a^s)^n - (b^s)^n}{a^s - b^s} \text{ olduğundan}$$

$$J_{-n}^{(s)} = -(-2)^{sn} J_n^{(s)}$$

elde edilir.

ii)

$$\begin{aligned} J_n^{(-s)} &= \frac{(a^{-s})^n - (b^{-s})^n}{a^{-s} - b^{-s}} = \frac{\left(\frac{1}{a^{sn}} - \frac{1}{b^{sn}} \right)}{\left(\frac{1}{a^s} - \frac{1}{b^s} \right)} = \frac{b^{sn} - a^{sn}}{(ab)^{sn}} \left(\frac{(ab)^s}{b^s - a^s} \right) \\ &= (ab)^{s-sn} \frac{a^{sn} - b^{sn}}{a^s - b^s} \end{aligned}$$

$$ab = -2 \text{ ve } J_n^{(s)} = \frac{(a^s)^n - (b^s)^n}{a^s - b^s} \text{ olduğundan}$$

$$J_n^{(-s)} = (-2)^{(1-n)s} J_n^{(s)}$$

elde edilir.

iii)

$$\begin{aligned} J_{-n}^{(-s)} &= \frac{(a^{-s})^{-n} - (b^{-s})^{-n}}{a^{-s} - b^{-s}} = \frac{(a^s)^n - (b^s)^n}{\left(\frac{1}{a^s} - \frac{1}{b^s} \right)} = (a^s)^n - (b^s)^n \frac{(ab)^s}{b^s - a^s} \\ &= -(ab)^s \frac{(a^s)^n - (b^s)^n}{a^s - b^s} \end{aligned}$$

$$ab = -2 \text{ ve } J_n^{(s)} = \frac{(a^s)^n - (b^s)^n}{a^s - b^s} \text{ olduğundan}$$

$$J_{-n}^{(-s)} = -(-2)^s J_n^{(s)}$$

elde edilir. ■

Üreteç fonksiyonları, sayı dizilerinin incelenmesinde önemli bir araç olup, dizinin tüm terimlerini tek bir analitik ifade altında toplama imkânı sunar. Bu fonksiyonlar sayesinde dizilerin yineleme (rekürans) bağıntıları, kapalı form ifadeleri ve çeşitli özdeşlikleri sistematik bir biçimde elde edilebilmektedir. Özellikle rasyonel veya üstel üreteç fonksiyonları, dizinin

yapısal özelliklerinin anlaşılmasında ve farklı temsil biçimlerinin ortaya konulmasında önemli rol oynar.

Teorem 4.1.6. Yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(s)} x^n = \frac{x}{1 - j_s x + (-2)^s x^2}$$

dır.

İspat.

$$G_J(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(s)} x^n$$

olsun.

$$G_J = J_0^{(s)} + J_1^{(s)} x + J_2^{(s)} x^2 + \dots + J_n^{(s)} x^n + \dots \quad (4.2)$$

dir. Buradan (4.2) eşitliğinin her iki tarafını $-j_s x$ ve $(-2)^s x^2$ ile çarpılırsa

$$-j_s x G_J = -j_s x J_0^{(s)} - j_s x^2 J_1^{(s)} - j_s x^3 J_2^{(s)} - \dots - j_s x^{n+1} J_n^{(s)} + \dots \quad (4.3)$$

ve

$$(-2)^s x^2 G_J = (-2)^s x^2 J_0^{(s)} + (-2)^s x^3 J_1^{(s)} + (-2)^s x^4 J_2^{(s)} + \dots + (-2)^s J_n^{(s)} x^n + \dots \quad (4.4)$$

elde edilir. Buradan (4.2), (4.3) ve (4.4) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa yüksek mertebeden Jacobsthal sayıların yineleme (rekürans) bağıntısına göre

$$G_J - j_s x G_J + (-2)^s x^2 G_J = J_0^{(s)} + J_1^{(s)} x - x J_0^{(s)} j_s$$

olmak üzere

$$G_J(1 - j_s x + (-2)^s x^2) = J_0^{(s)} + J_1^{(s)} x - x J_0^{(s)} j_s$$

elde edilir. Burada $J_1^{(s)} = 1$ ve $J_0^{(s)} = 0$ olduğu için, sonuç olarak

$$G_J(x, s) = \frac{x}{1 - j_s x + (-2)^s x^2}$$

dır. ■

Teorem 4.1.7. Yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları için üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \frac{e^{a^s x} - e^{b^s x}}{a^s - b^s}$$

dir.

İspat. Üstel üreteç fonksiyonu tanımını gereğince

$$H_J(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(s)} \frac{x^n}{n!}$$

dir. Buradan $J_n^{(s)}$ nin Binet formülüne göre,

$$H_J(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^{ns} - b^{ns}}{a^s - b^s} \right) \frac{x^n}{n!}$$

elde edilir. Böylece,

$$H_J(x, s) = \frac{1}{a^s - b^s} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{ns} x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{ns} x^n}{n!} \right] = \frac{1}{a^s - b^s} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^s x)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b^s x)^n}{n!} \right]$$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ olduğundan

$$H_J(x, s) = \frac{e^{a^s x} - e^{b^s x}}{a^s - b^s}$$

denklemini bulunur. ■

Üreteç fonksiyonların türevleri ise dizinin katsayılarını ağırlıklı biçimde ortaya çıkararak daha derin analizlere imkân sağlar. Üreteç fonksiyonlarının türevleri, sayı dizilerinin analitik ve cebirsel özelliklerinin incelenmesinde önemli bir yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır.

Teorem 4.1.8. Yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları için üreteç ve üstel üreteç fonksiyonlarının x göre türevleri

$$\text{i)} \quad G_J'(x, s) = \frac{1 - (-2)^{s+1}x}{(1 - j_s x + (-2)^s x^2)^2},$$

$$\text{ii)} \quad H_J'(x, s) = \frac{e^{a^s x} a^s - e^{b^s x} b^s}{a^s - b^s}$$

dır.

İspat.

i)

$$G_J(x, s) = \frac{x}{1 - j_s x + (-2)^s x^2}$$

dir. Buradan x göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} G_J'(x, s) &= \frac{1 - j_s x + (-2)^s x^2 - x(-j_s + 2(-2)^s x)}{(1 - j_s x + (-2)^s x^2)^2} \\ &= \frac{1 - (-2)^s x^2}{(1 - j_s x + (-2)^s x^2)^2} \end{aligned}$$

elde edilir.

ii)

$$H_J(x, s) = \frac{e^{a^s x} - e^{b^s x}}{a^s - b^s}$$

dir. Buradan x göre türev alınırsa

$$H_J'(x, s) = \frac{e^{a^s x} a^s - e^{b^s x} b^s}{a^s - b^s}$$

elde edilir. ■

Bir sonraki teoremdede sayı dizileri için önemli olan bazı özdeşlikler hesaplanacaktır. Burada verilen özdeşliklerin tümünün ispatında yüksek mertebeden Jacobsthal sayılarının Binet formülü kullanılmıştır.

Teorem 4.1.9. (Cassini Özdeşliği) Her $n \geq 1$ için yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları

$$J_{n-1}^{(s)} J_{n+1}^{(s)} - \left(J_n^{(s)}\right)^2 = -(-2)^{s(n-1)}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned} J_{n-1}^{(s)} J_{n+1}^{(s)} - \left(J_n^{(s)}\right)^2 &= \left(\frac{(a^s)^{n-1} - (b^s)^{n-1}}{a^s - b^s}\right) \left(\frac{(a^s)^{n+1} - (b^s)^{n+1}}{a^s - b^s}\right) - \left(\frac{(a^s)^n - (b^s)^n}{a^s - b^s}\right) \left(\frac{(a^s)^n - (b^s)^n}{a^s - b^s}\right) \\ &= \frac{-a^{sn-s} b^{sn+s} - b^{sn-s} a^{sn+s} + 2a^{sn} b^{sn}}{(a^s - b^s)^2} \\ &= \frac{a^{sn} b^{sn} \left(2 - \left(\frac{a}{b}\right)^s - \left(\frac{b}{a}\right)^s\right)}{(a^s - b^s)^2} = \frac{(ab)^{sn} \frac{-(a^s - b^s)^2}{(ab)^s}}{(a^s - b^s)^2} \end{aligned}$$

$ab = -2$ olduğundan

$$J_{n-1}^{(s)} J_{n+1}^{(s)} - \left(J_n^{(s)}\right)^2 = -(-2)^{s(n-1)}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.1.10. (Catalan Özdeşliği) Her $n \geq t$ için yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları

$$J_{n-t}^{(s)} J_{n+t}^{(s)} - \left(J_n^{(s)}\right)^2 = -(-2)^{s(n-t)} \left(J_t^{(s)}\right)^2$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned}
& J_{n-1}^{(s)} J_{n+1}^{(s)} - \left(J_n^{(s)} \right)^2 \\
&= \left(\frac{(a^s)^{n-t} - (b^s)^{n-t}}{a^s - b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^{n+t} - (b^s)^{n+t}}{a^s - b^s} \right) - \left(\frac{(a^s)^n - (b^s)^n}{a^s - b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^n - (b^s)^n}{a^s - b^s} \right) \\
&= \frac{-a^{sn-st} b^{sn+st} - b^{sn-st} a^{sn+st} + 2a^{sn} b^{sn}}{(a^s - b^s)^2} \\
&= \frac{a^{sn} b^{sn} \left(2 - \left(\frac{a}{b} \right)^{st} - \left(\frac{b}{a} \right)^{st} \right)}{(a^s - b^s)^2} = \frac{(ab)^{sn} \frac{-(a^{st} - b^{st})^2}{(ab)^{st}}}{(a^s - b^s)^2} \\
&= -(ab)^{sn-st} \left(\frac{(a^s)^t - (b^s)^t}{a^s - b^s} \right)^2
\end{aligned}$$

$ab = -2$ olduğundan

$$J_{n-1}^{(s)} J_{n+1}^{(s)} - \left(J_n^{(s)} \right)^2 = -(-2)^{s(n-t)} \left(J_t^{(s)} \right)^2$$

elde edilir. ■

Dikkat edilirse Catalan özdeşliğinde $t = 1$ alındığında Cassini özdeşliği elde edilir.

Teorem 4.1.11. (d'Ocagne Özdeşliği) Her n, k tam sayıları için yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları

$$J_k^{(s)} J_{n+1}^{(s)} - J_n^{(s)} J_{k+1}^{(s)} = (-2)^{sn} J_{k-n}^{(s)}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned}
& J_k^{(s)} J_{n+1}^{(s)} - J_n^{(s)} J_{k+1}^{(s)} \\
&= \left(\frac{(a^s)^k - (b^s)^k}{a^s - b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^{n+1} - (b^s)^{n+1}}{a^s - b^s} \right) - \left(\frac{(a^s)^n - (b^s)^n}{a^s - b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^{k+1} - (b^s)^{k+1}}{a^s - b^s} \right) \\
&= \frac{-a^{sk} b^{sn+s} - b^{sk} a^{sn+s} + a^{sn} b^{sk+s} + b^{sn} a^{sk+s}}{(a^s - b^s)^2} \\
&= \frac{a^{sk} b^{sn} (a^s - b^s) + a^{sn} b^{sk} (b^s - a^s)}{(a^s - b^s)^2} = \frac{(a^s - b^s)(a^{sk} b^{sn} - a^{sn} b^{sk})}{(a^s - b^s)^2} \\
&= \frac{(a^{sk} b^{sn} - a^{sn} b^{sk})}{(a^s - b^s)} = \frac{a^{sn} b^{sn} (a^{sk-sn} - b^{sk-sn})}{(a^s - b^s)} \\
&= (-2)^{sn} \frac{(a^s)^{k-n} - (b^s)^{k-n}}{(a^s - b^s)} = (-2)^{sn} J_{k-n}^{(s)}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.1.12. (Vajda Özdeşliği) Her n, m, k tam sayıları için yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları

$$J_{n+k}^{(s)} J_{m-k}^{(s)} - J_n^{(s)} J_m^{(s)} = (-2)^{sn} J_k^{(s)} J_{m-k-n}^{(s)}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned} & J_{n+k}^{(s)} J_{m-k}^{(s)} - J_n^{(s)} J_m^{(s)} \\ &= \left(\frac{(a^s)^{n+k} - (b^s)^{n+k}}{a^s - b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^{m-k} - (b^s)^{m-k}}{a^s - b^s} \right) \\ &\quad - \left(\frac{(a^s)^n - (b^s)^n}{a^s - b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^m - (b^s)^m}{a^s - b^s} \right) \\ &= \frac{-a^{sn+sk} b^{sm-sk} - b^{sn+sk} a^{sm-sk} + a^{sn} b^{sm} + b^{sn} a^{sm}}{(a^s - b^s)^2} \\ &= \frac{a^{sn} b^{sm} (1 - a^{sk} b^{-sk}) + a^{sm} b^{sn} (1 - b^{sk} a^{-sk})}{(a^s - b^s)^2} \\ &= \frac{a^{sn} b^{sm} \left(1 - \frac{a^{sk}}{b^{sk}} \right) + a^{sm} b^{sn} \left(1 - \frac{b^{sk}}{a^{sk}} \right)}{(a^s - b^s)^2} \\ &= \frac{a^{sn} b^{sm} \left(\frac{b^{sk} - a^{sk}}{b^{sk}} \right) + a^{sm} b^{sn} \left(\frac{a^{sk} - b^{sk}}{a^{sk}} \right)}{(a^s - b^s)^2} \\ &= \frac{a^{sn} b^{sm-sk} (b^{sk} - a^{sk}) + a^{sm-sk} b^{sn} (a^{sk} - b^{sk})}{(a^s - b^s)^2} \\ &= \frac{a^{sn} b^{sm-sk} (b^{sk} - a^{sk}) + a^{sm-sk} b^{sn} (a^{sk} - b^{sk})}{(a^s - b^s)^2} \\ &= \frac{a^{sn} b^{sn} (a^{sk} - b^{sk}) (a^{sm-sk-sn} - b^{sm-sk-sn})}{(a^s - b^s)^2} \\ &= (-2)^{sn} \left(\frac{(a^s)^k - (b^s)^k}{(a^s - b^s)} \right) \left(\frac{(a^s)^{m-k-n} - (b^s)^{m-k-n}}{(a^s - b^s)} \right) = (-2)^{sn} J_k^{(s)} J_{m-k-n}^{(s)} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.1.13. (Honsberger Özdeşliği) Her n, m tam sayıları için yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları

$$\begin{aligned} & J_m^{(s)} J_n^{(s)} + J_{m+1}^{(s)} J_{n+1}^{(s)} \\ &= \frac{a^{sm+sn} (1 + a^{2s}) + b^{sm+sn} (1 + b^{2s}) - (1 + (-2)^s) (a^{sm} b^{sn} + a^{sn} b^{sm})}{(a^s - b^s)^2} \end{aligned}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned}
& J_m^{(s)} J_n^{(s)} + J_{m+1}^{(s)} J_{n+1}^{(s)} \\
&= \left(\frac{(a^s)^m - (b^s)^m}{a^s - b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^n - (b^s)^n}{a^s - b^s} \right) \\
&\quad + \left(\frac{(a^s)^{m+1} - (b^s)^{m+1}}{a^s - b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^{n+1} - (b^s)^{n+1}}{a^s - b^s} \right) \\
&= \frac{a^{sm+sn} - a^{sm} b^{sn} - a^{sn} b^{sm} + b^{sm+sn}}{(a^s - b^s)^2} \\
&\quad + \frac{a^{sm+sn+2s} - a^{sm+s} b^{sn+s} - a^{sn+s} b^{sm+s} + b^{sm+sn+2s}}{(a^s - b^s)^2} \\
&= \frac{a^{sm+sn}(1 + a^{2s}) + b^{sm+sn}(1 + b^{2s}) - a^{sm} b^{sn}(1 + a^s b^s) - a^{sn} b^{sm}(1 + a^s b^s)}{(a^s - b^s)^2} \\
&= \frac{a^{sm+sn}(1 + a^{2s}) + b^{sm+sn}(1 + b^{2s}) - (1 + (-2)^s)(a^{sm} b^{sn} + a^{sn} b^{sm})}{(a^s - b^s)^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

4.2. Yüksek Mertebeden Jacobsthal Sayılarının Kuaterniyonları

Bu bölümde, yüksek mertebeden Jacobsthal sayılarının kuaterniyonları tanımlanmıştır. Tanımlanan kuaterniyonlar üzerinden, hem bu sayıların kuaterniyon yapısına özgü özellikleri hem de sayı dizisi olarak temel özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu sayıların terimleri arasındaki ilişkiler, üreteç ve üstel üreteç fonksiyonu hesaplanmıştır ve diğer özdeşlikler analiz edilerek kuaterniyon dizisinin matematiksel yapısı ortaya konmuştur. Bu inceleme, yüksek mertebeden Jacobsthal sayılarının kuaterniyonlar üzerindeki davranışlarını anlamaya ve sayı dizilerinin kuaterniyon formundaki uygulamalarını araştırmaya olanak sağlamaktadır.

Tanım 4.2.1. Yüksek mertebeden Jacobsthal kuaterniyonlar $OJ_n^{(s)}$ ile gösterilir ve aşağıda verilen eşitlik ile tanımlanır (Özkan vd., 2023).

$$OJ_n^{(s)} = J_n^{(s)} + J_{n+1}^{(s)} \mathbb{i} + J_{n+2}^{(s)} \mathbb{j} + J_{n+3}^{(s)} \mathbb{k} \quad (4.5)$$

Burada, $\mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k}$ kuaterniyon birimleridir ve $J_n^{(s)}$ yüksek mertebeden Jacobsthal sayıdır. Eğer $s = 1$ alınırsa, Jacobsthal kuaterniyonları elde edilir. (4.5) de verilen yüksek mertebeden Jacobsthal kuaterniyonların gerçel kısmı $Re(OJ_n^{(s)})$ ile gösterilir ve

$$Re(OJ_n^{(s)}) = J_n^{(s)}$$

dir. Vektörel kısmı ise $Vec(OJ_n^{(s)}) = v$ ile gösterilir ve

$$Vec(OJ_n^{(s)}) = v = J_{n+1}^{(s)}\mathbb{I} + J_{n+2}^{(s)}\mathbb{J} + J_{n+3}^{(s)}\mathbb{K}$$

dir. Buradan

$$OJ_n^{(s)} = J_n^{(s)} + v$$

olarak yazılabilir.

Tanım 4.2.2. $OJ_n^{(s)}$ nin eşleniği $OJ_n^{(s)*}$ ile gösterilir ve

$$OJ_n^{(s)*} = J_n^{(s)} - J_{n+1}^{(s)}\mathbb{I} - J_{n+2}^{(s)}\mathbb{J} - J_{n+3}^{(s)}\mathbb{K} = J_n^{(s)} - v \quad (4.6)$$

formundadır (Özkan vd., 2023).

Teorem 4.2.3. $OJ_n^{(s)}$ nin normu $N(OJ_n^{(s)})$ ile gösterilir ve

$$N(OJ_n^{(s)}) = \sqrt{\left(J_n^{(s)}\right)^2 + \left(J_{n+1}^{(s)}\right)^2 + \left(J_{n+2}^{(s)}\right)^2 + \left(J_{n+3}^{(s)}\right)^2}$$

dir (Özkan vd., 2023).

İspat.

$N(OJ_n^{(s)}) = \sqrt{OJ_n^{(s)} OJ_n^{(s)*}}$ ile verilen norm tanımı ve (4.6) eşitliği gereğince,

$$\begin{aligned} \left(N(OJ_n^{(s)})\right)^2 &= \left(J_n^{(s)} + J_{n+1}^{(s)}\mathbb{I} + J_{n+2}^{(s)}\mathbb{J} + J_{n+3}^{(s)}\mathbb{K}\right)\left(J_n^{(s)} - J_{n+1}^{(s)}\mathbb{I} - J_{n+2}^{(s)}\mathbb{J} - J_{n+3}^{(s)}\mathbb{K}\right) \\ &= J_n^{(s)2} + J_n^{(s)}J_{n+1}^{(s)}\mathbb{I} + J_n^{(s)}J_{n+2}^{(s)}\mathbb{J} + J_n^{(s)}J_{n+3}^{(s)}\mathbb{K} \\ &\quad - J_{n+1}^{(s)}J_n^{(s)}\mathbb{I} + J_{n+1}^{(s)2} - J_{n+1}^{(s)}J_{n+2}^{(s)}\mathbb{K} + J_{n+1}^{(s)}J_{n+3}^{(s)}\mathbb{J} \\ &\quad - J_{n+2}^{(s)}J_n^{(s)}\mathbb{J} + J_{n+2}^{(s)}J_{n+1}^{(s)}\mathbb{K} + J_{n+2}^{(s)2} - J_{n+2}^{(s)}J_{n+3}^{(s)}\mathbb{I} \\ &\quad - J_{n+3}^{(s)}J_n^{(s)}\mathbb{K} - J_{n+3}^{(s)}J_{n+1}^{(s)}\mathbb{J} + J_{n+3}^{(s)}J_{n+2}^{(s)}\mathbb{I} + J_{n+3}^{(s)2} \\ &= J_n^{(s)2} + J_{n+1}^{(s)2} + J_{n+2}^{(s)2} + J_{n+3}^{(s)2} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$N(OJ_n^{(s)}) = \sqrt{\left(J_n^{(s)}\right)^2 + \left(J_{n+1}^{(s)}\right)^2 + \left(J_{n+2}^{(s)}\right)^2 + \left(J_{n+3}^{(s)}\right)^2}$$

dir. ■

Önerme 4.2.4. Aşağıda verilen eşitlik sağlanır (Özkan vd., 2023).

$$OJ_n^{(s)} + OJ_n^{(s)*} = 2J_n^{(s)}.$$

İspat. (4.5) ve (4.6) eşitliklerinden,

$$OJ_n^{(s)} + OJ_n^{(s)*} = \left(J_n^{(s)} + J_{n+1}^{(s)}\mathbb{i} + J_{n+2}^{(s)}\mathbb{j} + J_{n+3}^{(s)}\mathbb{k}\right) + \left(J_n^{(s)} - J_{n+1}^{(s)}\mathbb{i} - J_{n+2}^{(s)}\mathbb{j} - J_{n+3}^{(s)}\mathbb{k}\right) = 2J_n^{(s)}$$

elde edilir. ■

Önerme 4.2.5. Aşağıda verilen eşitlik sağlanır (Özkan vd., 2023).

$$\left(OJ_n^{(s)}\right)^2 = -OJ_n^{(s)}OJ_n^{(s)*} + 2J_n^{(s)}OJ_n^{(s)}.$$

İspat. (4.5) ve (4.6) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} \left(OJ_n^{(s)}\right)^2 &= \left(J_n^{(s)} + J_{n+1}^{(s)}\mathbb{i} + J_{n+2}^{(s)}\mathbb{j} + J_{n+3}^{(s)}\mathbb{k}\right)\left(J_n^{(s)} + J_{n+1}^{(s)}\mathbb{i} + J_{n+2}^{(s)}\mathbb{j} + J_{n+3}^{(s)}\mathbb{k}\right) \\ &= -\left(\left(J_n^{(s)}\right)^2 + \left(J_{n+1}^{(s)}\right)^2 + \left(J_{n+2}^{(s)}\right)^2 + \left(J_{n+3}^{(s)}\right)^2\right) \\ &\quad + 2J_n^{(s)}\left(J_n^{(s)} + J_{n+1}^{(s)}\mathbb{i} + J_{n+2}^{(s)}\mathbb{j} + J_{n+3}^{(s)}\mathbb{k}\right) \\ &= -OJ_n^{(s)}OJ_n^{(s)*} + 2J_n^{(s)}OJ_n^{(s)} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Kuaterniyon yapısında yer alan $\mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k}$ birimleri dikkate alınarak, her bir birime göre ayrı ayrı üç farklı eşlenik tanımlanabilmektedir. Buna bağlı olarak aşağıdaki tanım yapılır.

Tanım 4.2.6. $OJ_n^{(s)}$ nin $\mathbb{i}$ ye göre eşleniği $OJ_n^{(s)*, \mathbb{i}}$ ile gösterilir ve

$$OJ_n^{(s)*, \mathbb{i}} = J_n^{(s)} - J_{n+1}^{(s)}\mathbb{i} + J_{n+2}^{(s)}\mathbb{j} + J_{n+3}^{(s)}\mathbb{k} \quad (4.7)$$

formundadır.

$OJ_n^{(s)}$ nin $\mathbb{j}$ ye göre eşleniği $OJ_n^{(s)*, \mathbb{j}}$ ile gösterilir ve

$$OJ_n^{(s)*, \mathbb{j}} = J_n^{(s)} + J_{n+1}^{(s)}\mathbb{i} - J_{n+2}^{(s)}\mathbb{j} + J_{n+3}^{(s)}\mathbb{k} \quad (4.8)$$

formundadır.

$OJ_n^{(s)}$ nin $\mathbb{k}$ ye göre eşleniği $OJ_n^{(s)*, \mathbb{k}}$ ile gösterilir ve

$$OJ_n^{(s)*, \mathbb{k}} = J_n^{(s)} + J_{n+1}^{(s)}\mathbb{i} + J_{n+2}^{(s)}\mathbb{j} - J_{n+3}^{(s)}\mathbb{k} \quad (4.9)$$

formundadır.

Aşağıda verilen teorem ile bu verilen üç eşleniğe göre norm-benzerleri hesaplanmıştır. $OJ_n^{(s)*, \mathbb{i}}$ nin norm-benzeri $N^{\mathbb{i}}\left(OJ_n^{(s)}\right)$, $OJ_n^{(s)*, \mathbb{j}}$ nin norm-benzeri $N^{\mathbb{j}}\left(OJ_n^{(s)}\right)$ ve $OJ_n^{(s)*, \mathbb{k}}$ nin norm-benzeri $N^{\mathbb{k}}\left(OJ_n^{(s)}\right)$ ile gösterilsin. Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.7. Yüksek mertebeden Jacobsthal kuaterniyonlarının norm-benzerleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad \left(N^{\mathfrak{i}} \left(OJ_n^{(s)} \right) \right)^2 &= J_n^{(s)2} + J_{n+1}^{(s)2} - J_{n+2}^{(s)2} - J_{n+3}^{(s)2} + 2\mathfrak{j} \left(J_n^{(s)} J_{n+2}^{(s)} + J_{n+2}^{(s)} J_{n+3}^{(s)} \right) \\
&\quad + 2\mathfrak{k} \left(J_n^{(s)} J_{n+3}^{(s)} + J_{n+1}^{(s)} J_{n+2}^{(s)} \right), \\
\text{ii)} \quad \left(N^{\mathfrak{j}} \left(OJ_n^{(s)} \right) \right)^2 &= J_n^{(s)2} - J_{n+1}^{(s)2} + J_{n+2}^{(s)2} - J_{n+3}^{(s)2} + 2\mathfrak{i} \left(J_n^{(s)} J_{n+1}^{(s)} - J_{n+1}^{(s)} J_{n+3}^{(s)} \right) \\
&\quad + 2\mathfrak{k} \left(J_n^{(s)} J_{n+3}^{(s)} + J_{n+1}^{(s)} J_{n+2}^{(s)} \right), \\
\text{iii)} \quad \left(N^{\mathfrak{k}} \left(OJ_n^{(s)} \right) \right)^2 &= J_n^{(s)2} - J_{n+1}^{(s)2} - J_{n+2}^{(s)2} + J_{n+3}^{(s)2} + 2\mathfrak{i} \left(J_n^{(s)} J_{n+1}^{(s)} - J_{n+2}^{(s)} J_{n+3}^{(s)} \right) \\
&\quad + 2\mathfrak{j} \left(J_n^{(s)} J_{n+2}^{(s)} + J_{n+1}^{(s)} J_{n+3}^{(s)} \right).
\end{aligned}$$

İspat. i) $N^{\mathfrak{i}} \left(OJ_n^{(s)} \right) = \sqrt{OJ_n^{(s)} OJ_n^{(s)*, \mathfrak{i}}}$ olduğundan

$$N^{\mathfrak{i}} \left(OJ_n^{(s)} \right) = \sqrt{\left(J_n^{(s)} + J_{n+1}^{(s)} \mathfrak{i} + J_{n+2}^{(s)} \mathfrak{j} + J_{n+3}^{(s)} \mathfrak{k} \right) \left(J_n^{(s)} - J_{n+1}^{(s)} \mathfrak{i} + J_{n+2}^{(s)} \mathfrak{j} + J_{n+3}^{(s)} \mathfrak{k} \right)}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(N^{\mathfrak{i}} \left(OJ_n^{(s)} \right) \right)^2 &= \left(J_n^{(s)} + J_{n+1}^{(s)} \mathfrak{i} + J_{n+2}^{(s)} \mathfrak{j} + J_{n+3}^{(s)} \mathfrak{k} \right) \left(J_n^{(s)} - J_{n+1}^{(s)} \mathfrak{i} + J_{n+2}^{(s)} \mathfrak{j} + J_{n+3}^{(s)} \mathfrak{k} \right) \\
&= J_n^{(s)2} + J_n^{(s)} J_{n+1}^{(s)} \mathfrak{i} - J_n^{(s)} J_{n+2}^{(s)} \mathfrak{j} + J_n^{(s)} J_{n+3}^{(s)} \mathfrak{k} \\
&\quad + J_{n+1}^{(s)} J_n^{(s)} \mathfrak{i} + J_{n+1}^{(s)2} - J_{n+1}^{(s)} J_{n+2}^{(s)} \mathfrak{k} - J_{n+1}^{(s)} J_{n+3}^{(s)} \mathfrak{j} \\
&\quad + J_{n+2}^{(s)} J_n^{(s)} \mathfrak{j} - J_{n+2}^{(s)} J_{n+1}^{(s)} \mathfrak{k} - J_{n+2}^{(s)2} + J_{n+2}^{(s)} J_{n+3}^{(s)} \mathfrak{i} \\
&\quad + J_{n+3}^{(s)} J_n^{(s)} \mathfrak{k} - J_{n+3}^{(s)} J_{n+1}^{(s)} \mathfrak{j} - J_{n+3}^{(s)} J_{n+2}^{(s)} \mathfrak{i} - J_{n+3}^{(s)2} \\
&= J_n^{(s)2} + J_{n+1}^{(s)2} - J_{n+2}^{(s)2} - J_{n+3}^{(s)2} + 2\mathfrak{j} \left(J_n^{(s)} J_{n+2}^{(s)} + J_{n+2}^{(s)} J_{n+3}^{(s)} \right) \\
&\quad + 2\mathfrak{k} \left(J_n^{(s)} J_{n+3}^{(s)} + J_{n+1}^{(s)} J_{n+2}^{(s)} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer kısımların ispatı **i)** ye benzer şekilde yapılır. ■

Bu teoremin sonucu olarak aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.2.8. Yüksek mertebeden Jacobsthal kuaterniyonları için aşağıda verilen eşitlikler sağlanır.

$$\text{i)} \quad OJ_n^{(s)} + OJ_n^{(s)*, \mathfrak{i}} = 2 \left(J_n^{(s)} + J_{n+2}^{(s)} \mathfrak{j} + J_{n+3}^{(s)} \mathfrak{k} \right),$$

- ii) $OJ_n^{(s)} + OJ_n^{(s)*, \mathfrak{j}} = 2 \left(J_n^{(s)} + J_{n+1}^{(s)} \mathfrak{i} + J_{n+3}^{(s)} \mathbb{K} \right),$
- iii) $OJ_n^{(s)} + OJ_n^{(s)*, \mathbb{K}} = 2 \left(J_n^{(s)} + J_{n+1}^{(s)} \mathfrak{i} + J_{n+2}^{(s)} \mathfrak{j} \right),$
- iv) $OJ_n^{(s)*, \mathfrak{i}} + OJ_n^{(s)*, \mathfrak{j}} = 2 \left(J_n^{(s)} + J_{n+3}^{(s)} \mathbb{K} \right),$
- v) $OJ_n^{(s)*, \mathfrak{i}} + OJ_n^{(s)*, \mathbb{K}} = 2 \left(J_n^{(s)} + J_{n+3}^{(s)} \mathfrak{j} \right),$
- vi) $OJ_n^{(s)*, \mathfrak{j}} + OJ_n^{(s)*, \mathbb{K}} = 2 \left(J_n^{(s)} + J_{n+3}^{(s)} \mathfrak{i} \right).$

İspat. Sonuç (4.7), (4.8) ve (4.9) eşitlikleri kullanılarak gösterilir. ■

Teorem 4.2.9. Yüksek mertebeden Jacobsthal kuaterniyonlarının Binet formülü aşağıdaki gibidir.

$$OJ_n^{(s)} = \frac{(a^s)^n \hat{a} - (b^s)^n \hat{b}}{a^s - b^s} \quad (4.10)$$

Burada

$$\begin{aligned} \hat{a} &= (1 + a^s \mathfrak{i} + a^{2s} \mathfrak{j} + a^{3s} \mathbb{K}), \\ \hat{b} &= (1 + b^s \mathfrak{i} + b^{2s} \mathfrak{j} + b^{3s} \mathbb{K}) \end{aligned}$$

dir (Özkan vd., 2023).

İspat. (4.1) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} OJ_n^{(s)} &= J_n^{(s)} + J_{n+1}^{(s)} \mathfrak{i} + J_{n+2}^{(s)} \mathfrak{j} + J_{n+3}^{(s)} \mathbb{K} \\ &= \frac{(a^s)^n}{a^s - b^s} [1 + a^s \mathfrak{i} + a^{2s} \mathfrak{j} + a^{3s} \mathbb{K}] - \frac{(b^s)^n}{a^s - b^s} [1 + b^s \mathfrak{i} + b^{2s} \mathfrak{j} + b^{3s} \mathbb{K}] \\ &= \frac{(a^s)^n \hat{a}}{a^s - b^s} - \frac{(b^s)^n \hat{b}}{a^s - b^s} = \frac{(a^s)^n \hat{a} - (b^s)^n \hat{b}}{a^s - b^s} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.2.10. Yüksek mertebeden Jacobsthal kuaterniyonları için yineleme (rekürans) bağıntısı aşağıdaki şekilde verilmiştir (Özkan vd., 2023).

$$OJ_{n+1}^{(s)} = j_s OJ_n^{(s)} - (-2)^s OJ_{n-1}^{(s)}.$$

İspat. (4.10) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} OJ_{n+1}^{(s)} &= \frac{(a^s)^{n+1} \hat{a} - (b^s)^{n+1} \hat{b}}{a^s - b^s} \\ &= \frac{1}{a^s - b^s} (a^s (a^s)^n \hat{a} - b^s (b^s)^n \hat{b}) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada pay kısmına $a^s (b^s)^n \hat{b}$ ifadesi eklenip çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}
OJ_{n+1}^{(s)} &= \frac{1}{a^s - b^s} (a^s(a^s)^n \hat{a} - a^s(b^s)^n \hat{b} + a^s(b^s)^n \hat{b} - b^s(b^s)^n \hat{b}) \\
&= \frac{1}{a^s - b^s} a^s ((a^s)^n \hat{a} - (b^s)^n \hat{b}) + \frac{1}{a^s - b^s} a^s ((b^s)^n \hat{b} - b^s(b^s)^n \hat{b}) \\
&= (a^s + b^s) OJ_n^{(s)} - b^s OJ_n^{(s)} + \frac{1}{a^s - b^s} (a^s(b^s)^n \hat{b} - b^s(b^s)^n \hat{b}) \\
&= j_s OJ_n^{(s)} - \frac{a^s b^s}{a^s - b^s} ((a^s)^{n-1} \hat{a} - (b^s)^{n-1} \hat{b}) \\
&= j_s OJ_n^{(s)} - (-2)^s OJ_{n-1}^{(s)}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.2.11. Yüksek mertebeden Jacobsthal kuaterniyonları, n ve s nin negatif tamsayıları için aşağıda verilen eşitlikler sağlanır (Özkan vd., 2023).

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad OJ_{-n}^{(s)} &= (-2)^{-sn} \frac{(b^s)^n \hat{a} - (a^s)^n \hat{b}}{a^s - b^s}, \\
\text{ii)} \quad OJ_{-n}^{(-s)} &= -(-2)^s OJ_n^{(s)}, \\
\text{iii)} \quad OJ_n^{(-s)} &= -(-2)^s OJ_{-n}^{(s)}.
\end{aligned}$$

İspat. (4.10) eşitliği kullanıldığında;

i)

$$OJ_{-n}^{(s)} = \frac{(a^s)^{-n} \hat{a} - (b^s)^{-n} \hat{b}}{a^s - b^s} = \frac{\frac{\hat{a}}{(a^s)^n} - \frac{\hat{b}}{(b^s)^n}}{a^s - b^s} = \frac{(b^s)^n \hat{a} - (a^s)^n \hat{b}}{(a^s)^n (b^s)^n} \frac{1}{a^s - b^s}$$

$ab = -2$ olduğundan

$$OJ_{-n}^{(s)} = (-2)^{-sn} \frac{(b^s)^n \hat{a} - (a^s)^n \hat{b}}{a^s - b^s}$$

elde edilir.

ii)

$$OJ_{-n}^{(-s)} = \frac{(a^{-s})^{-n} \hat{a} - (b^{-s})^{-n} \hat{b}}{a^{-s} - b^{-s}} = \frac{(a^s)^n \hat{a} - (b^s)^n \hat{b}}{\frac{b^s - a^s}{a^s b^s}} = (ab)^s \frac{(a^s)^n \hat{a} - (b^s)^n \hat{b}}{b^s - a^s}$$

$ab = -2$ ve $OJ_n^{(s)} = \frac{(a^s)^n \hat{a} - (b^s)^n \hat{b}}{a^s - b^s}$ olduğundan

$$OJ_{-n}^{(-s)} = -(-2)^s OJ_n^{(s)}$$

elde edilir.

iii)

$$OJ_n^{(-s)} = \frac{(a^{-s})^n \hat{a} - (b^{-s})^n \hat{b}}{a^{-s} - b^{-s}} = \frac{(a^s)^{-n} \hat{a} - (b^s)^{-n} \hat{b}}{\frac{b^s - a^s}{a^s b^s}} = -(ab)^s \frac{(a^s)^{-n} \hat{a} - (b^s)^{-n} \hat{b}}{a^s - b^s}$$

$ab = -2$ ve $OJ_n^{(s)} = \frac{(a^s)^n \hat{a} - (b^s)^n \hat{b}}{a^s - b^s}$ olduğundan

$$OJ_n^{(-s)} = -(-2)^s OJ_{-n}^{(s)}$$

elde edilir. ■

Şimdi, yüksek mertebeden Jacobsthal kuaterniyonların üreteç fonksiyonunu ve toplam formülünü bulmada yardımcı olacak aşağıdaki teorem verilmiştir.

Yardımcı Teorem 4.2.12. $\hat{a} = (1 + a^s \mathfrak{i} + a^{2s} \mathfrak{j} + a^{3s} \mathfrak{k})$, $\hat{b} = (1 + b^s \mathfrak{i} + b^{2s} \mathfrak{j} + b^{3s} \mathfrak{k})$ olmak üzere aşağıda verilen eşitlikler vardır (Özkan vd., 2023).

- i) $\hat{a} - \hat{b} = (a^s - b^s)(\mathfrak{i} + j_s \mathfrak{j} + (j_{2s} + (-2)^s) \mathfrak{k}),$
- ii) $\hat{a} b^s - \hat{b} a^s = (a^s - b^s)(-1 + (-2)^s \mathfrak{j} + (-2)^s j_s \mathfrak{k}),$
- iii) $\hat{a} a^s - \hat{b} b^s = (a^s - b^s)(1 + j_s \mathfrak{i} + (j_s + (-2)^s) \mathfrak{j} + (j_s^3 + (-2)^{s+1} j_s) \mathfrak{k}).$

İspat.

i)

$$\begin{aligned} \hat{a} - \hat{b} &= (1 + a^s \mathfrak{i} + a^{2s} \mathfrak{j} + a^{3s} \mathfrak{k}) - (1 + b^s \mathfrak{i} + b^{2s} \mathfrak{j} + b^{3s} \mathfrak{k}) \\ &= (a^s - b^s) \mathfrak{i} + (a^{2s} - b^{2s}) \mathfrak{j} + (a^{3s} - b^{3s}) \mathfrak{k} \\ &= (a^s - b^s)(\mathfrak{i} + j_s \mathfrak{j} + (j_{2s} + (-2)^s) \mathfrak{k}). \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \hat{a} b^s - \hat{b} a^s &= (1 + a^s \mathfrak{i} + a^{2s} \mathfrak{j} + a^{3s} \mathfrak{k}) b^s - (1 + b^s \mathfrak{i} + b^{2s} \mathfrak{j} + b^{3s} \mathfrak{k}) a^s \\ &= -(a^s - b^s) + (a^{2s} b^s - b^{2s} a^s) \mathfrak{j} + (a^{3s} b^s - b^{3s} a^s) \mathfrak{k} \\ &= (a^s - b^s)(-1 + (-2)^s \mathfrak{j} + (-2)^s (a^s + b^s) \mathfrak{k}) \\ &= (a^s - b^s)(-1 + (-2)^s \mathfrak{j} + (-2)^s j_s \mathfrak{k}). \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \hat{a} a^s - \hat{b} b^s &= (1 + a^s \mathfrak{i} + a^{2s} \mathfrak{j} + a^{3s} \mathfrak{k}) a^s - (1 + b^s \mathfrak{i} + b^{2s} \mathfrak{j} + b^{3s} \mathfrak{k}) b^s \\ &= (a^s - b^s) + (a^{2s} - b^{2s}) \mathfrak{i} + (a^{3s} - b^{3s}) \mathfrak{j} + (a^{4s} - b^{4s}) \mathfrak{k} \\ &= (a^s - b^s)(1 + j_s \mathfrak{i} + (j_s + (-2)^s) \mathfrak{j} + (j_s^3 + (-2)^{s+1} j_s) \mathfrak{k}) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.2.13. Yüksek mertebeden Jacobsthal kuaterniyonlar için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} OJ_n^{(s)} x^n = \frac{(\mathbb{i} + j_s \mathbb{j} + (j_{2s} + (-2)^s) \mathbb{k}) - (1 + (-2)^s \mathbb{j} + (-2)^s j_s \mathbb{k})x}{(1 - j_s x + (-2)^s x^2)}$$

dır (Özkan vd., 2023).

İspat. $G_{Jq}(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} OJ_n^{(s)} x^n$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} G_{Jq}(x, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} OJ_n^{(s)} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (J_n^{(s)} + J_{n+1}^{(s)} \mathbb{i} + J_{n+2}^{(s)} \mathbb{j} + J_{n+3}^{(s)} \mathbb{k}) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(a^n)^s - (b^n)^s}{a^s - b^s} + \frac{(a^{n+1})^s - (b^{n+1})^s}{a^s - b^s} \mathbb{i} + \frac{(a^{n+2})^s - (b^{n+2})^s}{a^s - b^s} \mathbb{j} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(a^{n+3})^s - (b^{n+3})^s}{a^s - b^s} \mathbb{k} \right] x^n \\ &= \frac{1}{a^s - b^s} \sum_{n=0}^{\infty} (a^n)^s x^n (1 + a^s \mathbb{i} + a^{2s} \mathbb{j} + a^{3s} \mathbb{k}) \\ &\quad - \frac{1}{a^s - b^s} \sum_{n=0}^{\infty} (b^n)^s x^n (1 + b^s \mathbb{i} + b^{2s} \mathbb{j} + b^{3s} \mathbb{k}) \\ &= \frac{1}{a^s - b^s} \sum_{n=0}^{\infty} (a^n)^s x^n \hat{a} - \frac{1}{a^s - b^s} \sum_{n=0}^{\infty} (b^n)^s x^n \hat{b} \\ &= \left(\frac{\hat{a}}{a^s - b^s} \right) \left(\frac{1}{1 - a^s x} \right) - \left(\frac{\hat{b}}{a^s - b^s} \right) \left(\frac{1}{1 - b^s x} \right) \\ &= \frac{\hat{a} - \hat{a} b^s x - \hat{b} + \hat{b} a^s x}{(a^s - b^s)(1 - a^s x)(1 - b^s x)} \\ &= \frac{\hat{a} - \hat{b} - (\hat{a} b^s - \hat{b} a^s) x}{(a^s - b^s)(1 - (a^s + b^s)x + (-2)^s x^2)} \end{aligned}$$

Yardımcı Teorem 4.2.12. den,

$$G_{Jq}(x, s) = \frac{(a^s - b^s)(\mathbb{i} + j_s \mathbb{j} + j_{2s} + (-2)^s) \mathbb{k} - ((a^s - b^s)(-1 + (-2)^s \mathbb{j} + (-2)^s j_s \mathbb{k}))x}{(a^s - b^s)(1 - (a^s + b^s)x + (-2)^s x^2)}$$

dir. Buradan

$$G_{Jq}(x, s) = \frac{(\mathbb{i} + j_s \mathbb{j} + (j_{2s} + (-2)^s) \mathbb{k}) - (1 + (-2)^s \mathbb{j} + (-2)^s j_s \mathbb{k})x}{(1 - j_s x + (-2)^s x^2)}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.2.14. Yüksek mertebeden Jacobsthal kuaterniyonlarının terimleri toplamı

$$\sum_{n=0}^{\infty} OJ_n^{(s)} = \frac{(\mathbb{I} + j_s \mathbb{J} + (j_{2s} + (-2)^s) \mathbb{K}) - (1 + (-2)^s \mathbb{J} + (-2)^s j_s \mathbb{K})}{(1 - j_s + (-2)^s)}$$

dır (Özkan vd., 2023).

İspat. Teorem 4.2.13. de x yerine 1 alındığında ispat yapılmış olur.

Teorem 4.2.15. Her $n, m \in \mathbb{Z}$ için yüksek mertebeden Jacobsthal kuaterniyonları için genelleştirilmiş üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} OJ_{n+m}^{(s)} x^n = \frac{OJ_n^{(s)} - (-2)^s OJ_{m-1}^{(s)} x}{1 + j_s x + (-2)^s x^2}$$

dır (Özkan vd., 2023).

İspat. Yüksek mertebeden Jacobsthal kuaterniyonların Binet formülü kullanıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} OJ_{n+m}^{(s)} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^s)^{n+m} \hat{a} - (b^s)^{n+m} \hat{b}}{a^s - b^s} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^s)^{n+m} \hat{a}}{a^s - b^s} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b^s)^{n+m} \hat{b}}{a^s - b^s} x^n \\ &= \frac{\hat{a} a^{sm}}{a^s - b^s} \sum_{n=0}^{\infty} a^{sn} x^n - \frac{\hat{b} b^{sm}}{a^s - b^s} \sum_{n=0}^{\infty} b^{sn} x^n \\ &= \left(\frac{\hat{a} a^{sm}}{a^s - b^s} \right) \left(\frac{1}{1 - a^s x} \right) - \left(\frac{\hat{b} b^{sm}}{a^s - b^s} \right) \left(\frac{1}{1 - b^s x} \right) \\ &= \left(\frac{1}{a^s - b^s} \right) \left[\frac{\hat{a} a^{sm} - \hat{a} a^{sm} b^s x - \hat{b} b^{sm} + \hat{b} b^{sm} a^s x}{1 - b^s x - a^s x + (ab)^s x^2} \right] \\ &= \left(\frac{1}{a^s - b^s} \right) \left[\frac{\hat{a} (a^s)^m - \hat{b} (b^s)^m}{1 - j_s x + (-2)^s x^2} - \frac{a^s b^s (\hat{a} (a^s)^{m-1} - \hat{b} (b^s)^{m-1}) x}{1 - j_s x + (-2)^s x^2} \right] \\ &= \left[\frac{OJ_m^{(s)}}{1 - j_s x + (-2)^s x^2} - \frac{(-2)^s OJ_{m-1}^{(s)} x}{1 - j_s x + (-2)^s x^2} \right] = \frac{OJ_n^{(s)} - (-2)^s OJ_{m-1}^{(s)} x}{1 + j_s x + (-2)^s x^2} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.2.16. Yüksek mertebeden Jacobsthal kuaterniyonlarının üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} OJ_n^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \frac{\hat{a} e^{a^s x} - \hat{b} e^{b^s x}}{a^s - b^s}$$

dır (Özkan vd., 2023).

İspat. $OJ_n^{(s)}$ nin üstel üreteç fonksiyonu

$$H_{Jq}(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} OJ_n^{(s)} \frac{x^n}{n!}$$

olsun. Buradan $OJ_n^{(s)}$ nin Binet formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} H_{Jq}(x, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(a^s)^n \hat{a} - (b^s)^n \hat{b}}{a^s - b^s} \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{\hat{a}}{a^s - b^s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^s x)^n}{n!} - \frac{\hat{b}}{a^s - b^s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b^s x)^n}{n!} \\ &= \frac{\hat{a} e^{a^s x}}{a^s - b^s} - \frac{\hat{b} e^{b^s x}}{a^s - b^s} = \frac{\hat{a} e^{a^s x} - \hat{b} e^{b^s x}}{a^s - b^s} \end{aligned}$$

bulunur. ■

Şimdi, sayı dizileri için önemli özdeşlikler yüksek mertebeden Jacobsthal sayılarının kuaterniyonları için hesaplanacaktır.

Yardımcı Teorem 4.2.17. $\hat{a} = (1 + a^s \mathfrak{i} + a^{2s} \mathfrak{j} + a^{3s} \mathfrak{k})$, $\hat{b} = (1 + b^s \mathfrak{i} + b^{2s} \mathfrak{j} + b^{3s} \mathfrak{k})$ olmak üzere

$$\hat{a}\hat{b} = \delta - \nabla \varepsilon \quad (4.11)$$

ve

$$\hat{b}\hat{a} = \delta + \nabla \varepsilon \quad (4.12)$$

sağlanır. Burada

$$\begin{aligned} \delta &= (1 - (-2)^s - (-2)^{2s} - (-2)^{3s} + j_s \mathfrak{i} + j_{2s} \mathfrak{j} + j_{3s} \mathfrak{k}), \\ \varepsilon &= (-2)^{2s} j_1^{(s)} \mathfrak{i} - (-2)^s j_2^{(s)} \mathfrak{j} + (-2)^s j_1^{(s)} \mathfrak{k} \text{ ve } \nabla = (a^s - b^s) \end{aligned}$$

dır (Özkan vd., 2023).

İspat. (4.11) eşitliğinin ispatı

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{b} &= (1 + a^s \mathfrak{i} + a^{2s} \mathfrak{j} + a^{3s} \mathfrak{k})(1 + b^s \mathfrak{i} + b^{2s} \mathfrak{j} + b^{3s} \mathfrak{k}) \\ &= 1 + b^s \mathfrak{i} + b^{2s} \mathfrak{j} + b^{3s} \mathfrak{k} + a^s \mathfrak{i} - a^s b^s + a^s b^{2s} \mathfrak{k} - a^s b^{3s} \mathfrak{j} + a^{2s} \mathfrak{j} - a^{2s} b^s \mathfrak{k} \\ &\quad - a^{2s} b^{2s} + a^{2s} b^{3s} \mathfrak{i} + a^{3s} \mathfrak{k} + a^{3s} b^s \mathfrak{j} - a^{3s} b^{2s} \mathfrak{i} - a^{3s} b^{3s} \\ &= 1 + b^s \mathfrak{i} + b^{2s} \mathfrak{j} + b^{3s} \mathfrak{k} + a^s \mathfrak{i} - (-2)^s + a^s b^{2s} \mathfrak{k} - a^s b^{3s} \mathfrak{j} + a^{2s} \mathfrak{j} - a^{2s} b^s \mathfrak{k} \\ &\quad - (-2)^{2s} + a^{2s} b^{3s} \mathfrak{i} + a^{3s} \mathfrak{k} + a^{3s} b^s \mathfrak{j} - a^{3s} b^{2s} \mathfrak{i} - (-2)^{3s} \\ &= (1 - (-2)^s - (-2)^{2s} - (-2)^{3s}) + (a^s + b^s + a^{2s} b^{3s} - a^{3s} b^{2s}) \mathfrak{i} \\ &\quad + (a^{2s} + b^{2s} + a^{3s} b^s - a^s b^{3s}) \mathfrak{j} + (a^{3s} + b^{3s} + a^s b^{2s} - a^{2s} b^s) \mathfrak{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - (-2)^s - (-2)^{2s} - (-2)^{3s} + j_s \mathbb{I} + j_{2s} \mathbb{J} + j_{3s} \mathbb{K}) \\
&\quad - (-2)^{2s} (a^s - b^s) \mathbb{I} + (-2)^s (a^{2s} - b^{2s}) \mathbb{J} - (-2)^s (a^s - b^s) \mathbb{K} \\
&= (1 - (-2)^s - (-2)^{2s} - (-2)^{3s} + j_s \mathbb{I} + j_{2s} \mathbb{J} + j_{3s} \mathbb{K}) \\
&\quad - (-2)^{2s} \nabla J_1^{(s)} \mathbb{I} + (-2)^s \nabla J_2^{(s)} \mathbb{J} - (-2)^s \nabla J_1^{(s)} \mathbb{K} \\
&= (1 - (-2)^s - (-2)^{2s} - (-2)^{3s} + j_s \mathbb{I} + j_{2s} \mathbb{J} + j_{3s} \mathbb{K}) \\
&\quad - \nabla \left((-2)^{2s} J_1^{(s)} \mathbb{I} - (-2)^s J_2^{(s)} \mathbb{J} + (-2)^s J_1^{(s)} \mathbb{K} \right) = \delta - \nabla \varepsilon
\end{aligned}$$

şeklindedir. Benzer şekilde (4.12) nin ispatı yapılır. ■

Teorem 4.2.18. (Vajda Özdeşliği) Her $n, m, r \in \mathbb{Z}$ için

$$OJ_{n+m}^{(s)} OJ_{n+r}^{(s)} - OJ_n^{(s)} OJ_{n+m+r}^{(s)} = (-2)^{sn} J_m^{(s)} \left[\delta J_r^{(s)} + \varepsilon j_{sr} \right]$$

dır (Özkan vd., 2023).

İspat. Kuaterniyon çarpımı değişmeli olmadığından

$$OJ_{n+m}^{(s)} OJ_{n+r}^{(s)} \neq OJ_{n+r}^{(s)} OJ_{n+m}^{(s)}$$

dır. Burada $OJ_{n+m}^{(s)} OJ_{n+r}^{(s)}$ denklemi tercih edilmiştir. İspatı için (4.10) eşitliği kullanılır.

$$\begin{aligned}
&OJ_{n+m}^{(s)} OJ_{n+r}^{(s)} - OJ_n^{(s)} OJ_{n+m+r}^{(s)} \\
&= \left(\frac{(a^s)^{n+m} \hat{a} - (b^s)^{n+m} \hat{b}}{a^s - b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^{n+r} \hat{a} - (b^s)^{n+r} \hat{b}}{a^s - b^s} \right) \\
&\quad - \left(\frac{(a^s)^n \hat{a} - (b^s)^n \hat{b}}{a^s - b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^{n+m+r} \hat{a} - (b^s)^{n+m+r} \hat{b}}{a^s - b^s} \right) \\
&= \left(\frac{1}{(a^s - b^s)^2} \right) \left(-(a^s)^{n+m} \hat{a} (b^s)^{n+r} \hat{b} - (b^s)^{n+m} \hat{b} (a^s)^{n+r} \hat{a} + (a^s)^n \hat{a} (b^s)^{n+m+r} \hat{b} \right. \\
&\quad \left. + (b^s)^n \hat{b} (a^s)^{n+m+r} \hat{a} \right) \\
&= \frac{1}{\nabla^2} \left(-\hat{a} \hat{b} (a^s)^n (b^s)^{n+r} ((a^s)^m - (b^s)^m) + \hat{b} \hat{a} (b^s)^n (a^s)^{n+r} ((a^s)^m - (b^s)^m) \right) \\
&= \frac{1}{\nabla^2} (a^s)^n (b^s)^n ((-\hat{a} \hat{b} (b^s)^r + \hat{b} \hat{a} (a^s)^r)) ((a^s)^m - (b^s)^m) \\
&= \frac{(-2)^{sn}}{\nabla^2} (-\hat{a} \hat{b} (b^s)^r + \hat{b} \hat{a} (a^s)^r) ((a^s)^m - (b^s)^m) \\
&= \frac{(-2)^{sn}}{\nabla} (-(\delta - \nabla \varepsilon) (b^s)^r + (\delta + \nabla \varepsilon) (a^s)^r) J_m^{(s)} \\
&= \frac{(-2)^{sn}}{\nabla} J_m^{(s)} (\delta ((a^s)^r - (b^s)^r) + \nabla \varepsilon ((a^s)^r + (b^s)^r)) \\
&= (-2)^{sn} J_m^{(s)} (\delta J_r^{(s)} + \varepsilon j_{sr})
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.2.19. (Catalan Özdeşliği) Her $n, r \in \mathbb{Z}$ için

$$OJ_{n-r}^{(s)} OJ_{n+r}^{(s)} - \left(OJ_n^{(s)}\right)^2 = (-2)^{sn} J_{-r}^{(s)} [\delta J_r^{(s)} + \varepsilon j_{sr}]$$

dır. (Özkan vd., 2023).

İspat. Teorem 4.2.18. Vajda özdeşliğinde $m = -r$ alınırsa,

$$OJ_{n-r}^{(s)} OJ_{n+r}^{(s)} - \left(OJ_n^{(s)}\right)^2 = (-2)^{sn} J_{-r}^{(s)} [\delta J_r^{(s)} + \varepsilon j_{sr}]$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.2.20. (Cassini Özdeşliği) Her $n \geq 1$ için

$$OJ_{n-1}^{(s)} OJ_{n+1}^{(s)} - \left(OJ_n^{(s)}\right)^2 = -(-2)^{s(n-1)} [\delta + \varepsilon j_s]$$

dır (Özkan vd., 2023).

İspat. Teorem 4.2.18. Vajda özdeşliğinde $m = -1$ ve $r = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} OJ_{n-1}^{(s)} OJ_{n+1}^{(s)} - \left(OJ_n^{(s)}\right)^2 &= (-2)^{sn} J_{-1}^{(s)} [\delta J_1^{(s)} + \varepsilon j_s] = (-2)^{sn} - (-2)^{-s} [\delta + \varepsilon j_s] \\ &= -(-2)^{s(n-1)} [\delta + \varepsilon j_s] \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.2.21. (d'Ocagne Özdeşliği) Her $n, k \in \mathbb{Z}$ için

$$OJ_k^{(s)} OJ_{n+1}^{(s)} - OJ_n^{(s)} OJ_{k+1}^{(s)} = (-2)^{sn} J_{k-n}^{(s)} [\delta + \varepsilon j_s]$$

dır (Özkan vd., 2023)

İspat. Teorem 4.2.18. Vajda özdeşliğinde $m + n = k$ ve $r = 1$ alınırsa,

$$OJ_k^{(s)} OJ_{n+1}^{(s)} - OJ_n^{(s)} OJ_{k+1}^{(s)} = (-2)^{sn} J_{k-n}^{(s)} [\delta + \varepsilon j_s]$$

elde edilir. ■

4.3. Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Sayıları

Bu bölümde, yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıları tanımlanmıştır. Söz konusu sayılar, klasik Jacobsthal-Lucas sayı dizisinin bir genellemesi olarak ele alınmaktadır. Tanımlanan bu sayı dizisinin temel özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiş; dizinin sağladığı yineleme (rekürans) bağıntısı ile birlikte üreteç ve üstel üreteç fonksiyonları elde edilmiştir. Ayrıca, bu sayı dizisine ait bazı temel özdeşlikler verilmiş ve sayıların yapısal özellikleri analiz edilmiştir. Yapılan bu incelemeler, yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayılarının matematiksel yapısının daha iyi anlaşılmasını sağlamanın yanı sıra, ilerleyen bölümlerde ele alınacak olan kuaterniyonlar gibi

daha karmaşık cebirsel yapıların oluşturulması için gerekli altyapıyı sunmaktadır. Bu bağlamda, elde edilen sonuçlar hem sayı dizileri teorisine katkı sağlamakta hem de uygulamalı matematik ve hesaplama yöntemleri açısından bir temel oluşturmaktadır.

Tanım 4.3.1. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıları

$$j_n^{(s)} = \frac{j_{ns}}{j_s}$$

eşitliği ile tanımlanır (Uysal vd., 2022).

Tanım 4.3.2. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıların Binet tipli formülü

$$j_n^{(s)} = \frac{a^{ns} + b^{ns}}{a^s + b^s}$$

eşitliği ile verilir (Uysal vd., 2022).

Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıların s ve n ye bağlı bazı terimlerini verilsin.

i) $s = 1$ için klasik Jacobsthal-Lucas sayılar elde edilir.

$$j_n^{(1)} = \frac{a^n + b^n}{a + b} = j_n.$$

ii) $s = 2$ için $j_n^{(2)}$ yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıları

$$j_n^{(2)} = \frac{j_{2n}}{j_2}$$

dır. Buradan

Durum 1: $n = 1$ için,

$$j_1^{(2)} = \frac{j_2}{j_2} = 1.$$

Durum 2: $n = 2$ için,

$$j_2^{(2)} = \frac{j_4}{j_2} = \frac{17}{5}.$$

Durum 3: $n = 3$ için,

$$j_3^{(2)} = \frac{j_6}{j_2} = 15.$$

Durum 4: $n = 4$ için,

$$j_4^{(2)} = \frac{j_8}{j_2} = \frac{257}{5}.$$

iii) $s = 3$ için, $j_n^{(3)}$ yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıları

$$j_n^{(3)} = \frac{j_{3n}}{j_3}$$

dır. Buradan

Durum 1: $n = 1$ için,

$$j_1^{(3)} = \frac{j_3}{j_3} = 1.$$

Durum 2: $n = 2$ için,

$$j_2^{(3)} = \frac{j_6}{j_3} = \frac{65}{7}.$$

Durum 3: $n = 3$ için,

$$j_3^{(3)} = \frac{j_9}{j_3} = 73.$$

Durum 4: $n = 4$ için,

$$j_4^{(3)} = \frac{j_{12}}{j_3} = \frac{4097}{7}.$$

iv) $s = 4$ için, $j_n^{(4)}$ yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıları

$$j_n^{(4)} = \frac{j_{4n}}{j_4}$$

dır. Buradan

Durum 1: $n = 1$ için,

$$j_1^{(4)} = \frac{j_4}{j_4} = 1.$$

Durum 2: $n = 2$ için,

$$j_2^{(4)} = \frac{j_8}{j_4} = \frac{257}{17}.$$

Durum 3: $n = 3$ için,

$$j_3^{(4)} = \frac{j_{12}}{j_4} = \frac{511}{17}.$$

Teorem 4.3.3. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıları için yineleme (rekürans) benzeri bağıntısı her $n \geq 1$ için

$$j_{n+1}^{(s)} = j_s j_n^{(s)} - (-2)^s j_{n-1}^{(s)}$$

dir (Uysal vd., 2022).

İspat. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayılarının Binet formülünden

$$j_s j_n^{(s)} - (-2)^s j_{n-1}^{(s)} = (a^s + b^s) \left(\frac{a^{ns} + b^{ns}}{a^s + b^s} \right) - (-2)^s \frac{a^{(n-1)s} + b^{(n-1)s}}{a^s + b^s}$$

$ab = -2$ olduğundan,

$$\begin{aligned} j_s j_n^{(s)} - (-2)^s j_{n-1}^{(s)} &= (a^s + b^s) \left(\frac{a^{ns} + b^{ns}}{a^s + b^s} \right) - (ab)^s \frac{a^{(n-1)s} + b^{(n-1)s}}{a^s + b^s} \\ &= \frac{a^{ns+s} + a^s b^{ns} + b^s a^{ns} b^{ns+s} - a^{ns} b^s - b^{ns} a^s}{a^s + b^s} \\ &= \frac{a^{ns+s} + b^{ns+s}}{a^s + b^s} \\ &= \frac{a^{(n+1)s} + b^{(n+1)s}}{a^s + b^s} = j_{n+1}^{(s)} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.3.4. Jacobsthal-Lucas sayıları aşağıda verilen genelleştirilmiş yineleme (rekürans) benzeri bağıntıyı sağlar. $\tau = 0, 1, \dots, s-1$ için

$$j_{s(n+1)+\tau} = j_s j_{sn+\tau} - (-2)^s j_{s(n-1)+\tau}$$

dır.

İspat.

$$\begin{aligned} j_{s(n+1)+\tau} &= a^{sn+s+\tau} + b^{sn+s+\tau} = a^{sn+\tau} a^s + b^{sn+\tau} b^s + b^{sn+\tau} a^s - b^{sn+\tau} a^s \\ &= a^s (a^{sn+\tau} + b^{sn+\tau}) + b^{sn+\tau} b^s - b^{sn+\tau} a^s \\ &= a^s j_{sn+\tau} + b^{sn+\tau} b^s - b^{sn+\tau} a^s = j_{sn+\tau} [a^s + b^s - b^s] + b^{sn+\tau} b^s - b^{sn+\tau} a^s \\ &= j_{sn+\tau} j_s - b^s j_{sn+\tau} + b^{sn+\tau} b^s - b^{sn+\tau} a^s \\ &= j_{sn+\tau} j_s - b^s [a^{sn+\tau} + b^{sn+\tau}] + b^{sn+\tau} b^s - b^{sn+\tau} a^s \\ &= j_{sn+\tau} j_s - b^s a^{sn+\tau} - b^{sn+s+\tau} + b^{sn+s+\tau} - b^{sn+\tau} a^s \\ &= j_{sn+\tau} j_s - b^s a^{sn+\tau} - b^{sn+\tau} a^s \\ &= j_{sn+\tau} j_s - (ab)^s [a^{sn+\tau-s} + b^{sn+\tau-s}] \end{aligned}$$

$ab = -2$ olduğundan

$$j_{s(n+1)+\tau} = j_{sn+\tau} j_s - (-2)^s [a^{sn+\tau-s} + b^{sn+\tau-s}]$$

elde edilir. ■

Önerme 4.3.5. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıları, n ve s nin negatif değerleri için aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

- i) $j_{-n}^{(s)} = (-2)^{-ns} j_n^{(s)},$
- ii) $j_n^{(-s)} = (-2)^{s(1-n)} j_n^{(s)},$
- iii) $j_{-n}^{(-s)} = (-2)^s j_n^{(s)}.$

dır.

İspat. Tanım 4.3.2. kullanıldığında;

i)

$$\begin{aligned} j_{-n}^{(s)} &= \frac{(a^s)^{-n} + (b^s)^{-n}}{a^s + b^s} = \left(\frac{1}{a^{sn} + b^{sn}} \right) = \left(\frac{a^{sn} + b^{sn}}{(ab)^{sn}} \right) \left(\frac{1}{a^s + b^s} \right) \\ &= \left(\frac{a^{sn} + b^{sn}}{a^s + b^s} \right) (ab)^{-sn} \end{aligned}$$

$ab = -2$ ve $j_n^{(s)} = \frac{a^{ns} + b^{ns}}{a^s + b^s}$ olduğundan

$$j_{-n}^{(s)} = (-2)^{-sn} j_n^{(s)}$$

elde edilir.

ii)

$$\begin{aligned} j_n^{(-s)} &= \frac{(a^{-s})^n + (b^{-s})^n}{a^s + b^s} = \left(\frac{1}{a^{sn} + b^{sn}} \right) = \left(\frac{a^{sn} + b^{sn}}{(ab)^{sn}} \right) \left(\frac{1}{a^s + b^s} \right) \\ &= \left(\frac{a^{sn} + b^{sn}}{a^s + b^s} \right) (ab)^{-sn} \end{aligned}$$

$ab = -2$ ve $j_n^{(s)} = \frac{a^{ns} + b^{ns}}{a^s + b^s}$ olduğundan

$$j_n^{(-s)} = (-2)^{-sn} j_n^{(s)}$$

elde edilir.

iii)

$$j_{-n}^{(-s)} = \frac{(a^{-s})^{-n} + (b^{-s})^{-n}}{a^{-s} + b^{-s}} = \frac{a^{sn} + b^{sn}}{\frac{1}{a^s} + \frac{1}{b^s}} = \frac{a^{sn} + b^{sn}}{a^s + b^s} (ab)^s$$

$ab = -2$ ve $j_n^{(s)} = \frac{a^{ns} + b^{ns}}{a^s + b^s}$ olduğundan

$$j_{-n}^{(-s)} = (-2)^s j_n^{(s)}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.3.6. Yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları ve yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıları arasında aşağıdaki ilişkiler vardır. (Uysal vd., 2022).

- i) $J_n^{(s)} j_n^{(s)} = J_n^{(2s)},$
- ii) $J_n^{(s)} + j_n^{(s)} = \frac{J_{n+1}^{(s)}}{j_s},$
- iii) $J_n^{(s)} - j_n^{(s)} = \frac{2(-2)^s J_{n-1}^{(s)}}{j_s}$

İspat. Binet formülü kullanılarak aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i)

$$J_n^{(s)} j_n^{(s)} = \left(\frac{a^{ns} - b^{ns}}{a^s - b^s} \right) \left(\frac{a^{ns} + b^{ns}}{a^s + b^s} \right) = \left(\frac{a^{2ns} - b^{2ns}}{a^{2s} - b^{2s}} \right) = \left(\frac{(a^n)^{2s} - (b^n)^{2s}}{a^{2s} - b^{2s}} \right) = J_n^{(2s)}.$$

ii)

$$\begin{aligned} J_n^{(s)} + j_n^{(s)} &= \left(\frac{a^{ns} - b^{ns}}{a^s - b^s} \right) + \left(\frac{a^{ns} + b^{ns}}{a^s + b^s} \right) \\ &= \left(\frac{(a^{ns} - b^{ns})(a^s + b^s) + (a^{ns} + b^{ns})(a^s - b^s)}{(a^s - b^s)(a^s + b^s)} \right) \\ &= \left(\frac{2a^{ns+s} - 2b^{ns+s}}{(a^s - b^s)(a^s + b^s)} \right) = \left(\frac{2(a^{s(n+1)} - b^{s(n+1)})}{(a^s - b^s)(a^s + b^s)} \right) \\ &= 2 \frac{(a^{s(n+1)} - b^{s(n+1)})}{(a^s - b^s)} \left(\frac{1}{(a^s + b^s)} \right). \end{aligned}$$

$j_n = a^n + b^n$ ve $J_n^{(s)} = \frac{a^{sn} - b^{sn}}{a^s - b^s}$ olduğundan,

$$J_n^{(s)} + j_n^{(s)} = \frac{2J_{n+1}^{(s)}}{j_s}$$

elde edilir.

iii)

$$\begin{aligned} J_n^{(s)} - j_n^{(s)} &= \left(\frac{a^{ns} - b^{ns}}{a^s - b^s} \right) - \left(\frac{a^{ns} + b^{ns}}{a^s + b^s} \right) \\ &= \left(\frac{(a^{ns} - b^{ns})(a^s + b^s) - (a^{ns} + b^{ns})(a^s - b^s)}{(a^s - b^s)(a^s + b^s)} \right) \\ &= \left(\frac{2a^{ns}b^s - 2b^{ns}a^s}{(a^s - b^s)(a^s + b^s)} \right) = \left(\frac{2(a^s b^s (a^{ns-s} - b^{ns-s}))}{(a^s - b^s)(a^s + b^s)} \right). \end{aligned}$$

$j_n = a^n + b^n$, $ab = -2$ ve $J_n^{(s)} = \frac{a^{sn} - b^{sn}}{a^s - b^s}$ olduğundan,

$$J_n^{(s)} - j_n^{(s)} = \frac{2(-2)^s J_{n-1}^{(s)}}{j_s}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.3.7. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_n^{(s)} x^n = \frac{j_0^{(s)} - x}{1 - j_s x + (-2)^s x^2}$$

dır.

İspat.

$$G_j(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} j_n^{(s)} x^n$$

olsun.

$$G_j = j_0^{(s)} + j_1^{(s)} x + j_2^{(s)} x^2 + \dots + j_n^{(s)} x^n + \dots \quad (4.13)$$

dir. Buradan (4.13) eşitliğinin her iki tarafı $-j_s x$ ve $(-2)^s x^2$ ile çarpılırsa

$$-j_s x G_j = -j_s x j_0^{(s)} - j_s x^2 j_1^{(s)} - j_s x^3 j_2^{(s)} - \dots - j_s x^{n+1} j_n^{(s)} - \dots \quad (4.14)$$

ve

$$(-2)^s x^2 G_j = (-2)^s x^2 j_0^{(s)} + (-2)^s x^3 j_1^{(s)} + (-2)^s x^4 j_2^{(s)} + \dots + j_n^{(s)} x^n + \dots \quad (4.15)$$

elde edilir. Buradan (4.13), (4.14) ve (4.15) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıların yineleme (rekürans) bağıntısına göre

$$G_j - j_s x G_j + (-2)^s x^2 G_j = j_0^{(s)} + j_1^{(s)} x - x j_0^{(s)} j_s$$

olmak üzere

$$G_j(1 - j_s x + (-2)^s x^2) = j_0^{(s)} + j_1^{(s)} x - x j_0^{(s)} j_s$$

elde edilir. Burada $j_1^{(s)} = 1$ ve $j_0^{(s)} j_s = 2$ olduğu için, sonuç olarak

$$G_j(x, s) = \frac{j_0^{(s)} - x}{1 - j_s x + (-2)^s x^2}$$

bulunur. ■

Teorem 4.3.8. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıları için üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_n^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \frac{e^{a^s x} + e^{b^s x}}{a^s + b^s}$$

dir.

İspat. Üstel üreteç fonksiyonu tanımı gereğince

$$H_j(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} j_n^{(s)} \frac{x^n}{n!}$$

dir. Buradan $j_n^{(s)}$ nin Binet formülüne göre,

$$H_j(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^{ns} + b^{ns}}{a^s + b^s} \right) \frac{x^n}{n!}$$

eşitliği vardır.

$$H_j(x, s) = \frac{1}{a^s + b^s} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{ns} x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{ns} x^n}{n!} \right] = \frac{1}{a^s + b^s} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^s x)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b^s x)^n}{n!} \right]$$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ olduğundan

$$H_j(x, s) = \frac{e^{a^s x} + e^{b^s x}}{a^s + b^s}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.3.9. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayılarının üreteç ve üstel üreteç fonksiyonlarının x göre türevleri

$$\text{i) } G_j'(x, s) = \frac{2-2x+(1-j_0^{(s)})((-2)^s x^2-1)}{(1-j_s x+(-2)^s x^2)^2},$$

$$\text{ii) } H_j'(x, s) = \frac{e^{a^s x} a^s + e^{b^s x} b^s}{a^s + b^s}$$

dır.

İspat.

i)

$$G_j(x, s) = \frac{j_0^{(s)} - x}{1 - j_s x + (-2)^s x^2}$$

dır. Buradan x göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} G_j'(x, s) &= \frac{(j_0^{(s)} - 1)(1 - j_s x + (-2)^s x^2) - (j_0^{(s)} - x)(-j_s + 2(-2)^s x)}{(1 - j_s x + (-2)^s x^2)^2} \\ &= \frac{2 - 2x + (1 - j_0^{(s)})((-2)^s x^2 - 1)}{(1 - j_s x + (-2)^s x^2)^2} \end{aligned}$$

elde edilir.

ii)

$$H_j(x, s) = \frac{e^{a^s x} + e^{b^s x}}{a^s + b^s}$$

dır. Buradan x göre türev alınırsa

$$H_j'(x, s) = \frac{e^{a^s x} a^s + e^{b^s x} b^s}{a^s + b^s}$$

elde edilir. ■

Bir sonraki teoremdede sayı dizileri için önemli olan bazı özdeşlikler hesaplanacaktır. Burada verilen özdeşliklerin tümünün ispatında yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayılarının Binet formülü kullanılacaktır.

Teorem 4.3.10. (Cassini Özdeşliği) Her $n \geq 1$ için yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıları

$$j_{n-1}^{(s)} j_{n+1}^{(s)} - \left(j_n^{(s)} \right)^2 = (-2)^{s(n-1)} \left(\frac{a^s - b^s}{a^s + b^s} \right)^2$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned} j_{n-1}^{(s)} j_{n+1}^{(s)} - \left(j_n^{(s)} \right)^2 &= \left(\frac{(a^s)^{n-1} + (b^s)^{n-1}}{a^s + b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^{n+1} + (b^s)^{n+1}}{a^s + b^s} \right) - \left(\frac{(a^s)^n + (b^s)^n}{a^s + b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^n + (b^s)^n}{a^s + b^s} \right) \\ &= \frac{a^{sn-s} b^{sn+s} + b^{sn-s} a^{sn+s} - 2a^{sn} b^{sn}}{(a^s + b^s)^2} \\ &= \frac{a^{sn} b^{sn} \left(-2 + \left(\frac{a}{b} \right)^s + \left(\frac{b}{a} \right)^s \right)}{(a^s + b^s)^2} = \frac{(ab)^{sn} \frac{(a^s - b^s)^2}{(ab)^s}}{(a^s + b^s)^2} \end{aligned}$$

$ab = -2$ olduğundan

$$j_{n-1}^{(s)} j_{n+1}^{(s)} - \left(j_n^{(s)} \right)^2 = (-2)^{s(n-1)} \left(\frac{a^s - b^s}{a^s + b^s} \right)^2$$

elde edilir. ■

Teorem 4.3.11. (Catalan Özdeşliği) Her $n \geq t$ için yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıları

$$j_{n-t}^{(s)} j_{n+t}^{(s)} - \left(j_n^{(s)} \right)^2 = (-2)^{s(n-t)} \left(\frac{a^{st} - b^{st}}{a^{st} + b^{st}} \right)^2$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned} j_{n-t}^{(s)} j_{n+t}^{(s)} - \left(j_n^{(s)} \right)^2 &= \left(\frac{(a^s)^{n-t} + (b^s)^{n-t}}{a^s + b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^{n+t} + (b^s)^{n+t}}{a^s + b^s} \right) \\ &\quad - \left(\frac{(a^s)^n + (b^s)^n}{a^s + b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^n + (b^s)^n}{a^s + b^s} \right) \\ &= \frac{a^{sn-st} b^{sn+st} + b^{sn-st} a^{sn+st} - 2a^{sn} b^{sn}}{(a^s + b^s)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{a^{sn} b^{sn} \left(-2 + \left(\frac{a}{b} \right)^{st} + \left(\frac{b}{a} \right)^{st} \right)}{(a^s + b^s)^2} = \frac{(ab)^{sn} \frac{(a^{st} - b^{st})^2}{(ab)^{st}}}{(a^s + b^s)^2}$$

$ab = -2$ olduğundan

$$j_{n-1}^{(s)} j_{n+1}^{(s)} - \left(j_n^{(s)} \right)^2 = (-2)^{s(n-t)} \left(\frac{a^{st} - b^{st}}{a^{st} + b^{st}} \right)^2$$

elde edilir. ■

Dikkat edilirse Catalan özdeşliğinde $t = 1$ alındığında Cassini özdeşliği elde edilir.

Teorem 4.3.12. (d'Ocagne Özdeşliği) Her n, k tam sayıları için yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları

$$j_k^{(s)} j_{n+1}^{(s)} - j_n^{(s)} j_{k+1}^{(s)} = (-2)^{sn} (a^s - b^s)^2 j_s^{-2} j_{k-n}^{(s)}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned} & j_k^{(s)} j_{n+1}^{(s)} - j_n^{(s)} j_{k+1}^{(s)} \\ &= \left(\frac{(a^s)^k + (b^s)^k}{a^s + b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^{n+1} + (b^s)^{n+1}}{a^s + b^s} \right) \\ & \quad - \left(\frac{(a^s)^n + (b^s)^n}{a^s + b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^{k+1} + (b^s)^{k+1}}{a^s + b^s} \right) \\ &= \frac{a^{sk} b^{sn+s} + b^{sk} a^{sn+s} - a^{sn} b^{sk+s} - b^{sn} a^{sk+s}}{(a^s + b^s)^2} \\ &= \frac{a^{sk} b^{sn} (b^s - a^s) + a^{sn} b^{sk} (a^s - b^s)}{(a^s + b^s)^2} \\ &= \frac{(a^s - b^s)(a^{sn} b^{sk} - a^{sk} b^{sn})}{(a^s + b^s)^2} = \frac{(a^{sk} b^{sn} - a^{sn} b^{sk})}{(a^s + b^s)^2} \\ &= \frac{(a^s - b^s)^2 a^{sn} b^{sn} (a^{sk-sn} - b^{sk-sn})}{(a^s + b^s)^2 (a^s - b^s)} \\ &= (-2)^{sn} (a^s - b^s)^2 \frac{(a^s)^{k-n} - (b^s)^{k-n}}{(a^s + b^s)^2 (a^s - b^s)} = (-2)^{sn} (a^s - b^s)^2 j_s^{-2} j_{k-n}^{(s)} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.3.13. (Vajda Özdeşliği) Her n, m, k tam sayıları için yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıları

$$j_{n+k}^{(s)} j_{m-k}^{(s)} - j_n^{(s)} j_m^{(s)} = (-2)^{sn} (a^s - b^s)^2 j_s^{-2} j_k^{(s)} j_{m-k-n}^{(s)}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned} & j_{n+k}^{(s)} j_{m-k}^{(s)} - j_n^{(s)} j_m^{(s)} \\ &= \left(\frac{(a^s)^{n+k} + (b^s)^{n+k}}{a^s + b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^{m-k} + (b^s)^{m-k}}{a^s + b^s} \right) - \left(\frac{(a^s)^n + (b^s)^n}{a^s + b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^m + (b^s)^m}{a^s + b^s} \right) \\ &= \frac{a^{sn+sk} b^{sm-sk} + b^{sn+sk} a^{sm-sk} - a^{sn} b^{sm} - b^{sn} a^{sm}}{(a^s + b^s)^2} \\ &= \frac{a^{sn} b^{sm} (a^{sk} b^{-sk} - 1) + a^{sm} b^{sn} (b^{sk} a^{-sk} - 1)}{(a^s + b^s)^2} \\ &= \frac{a^{sn} b^{sm-sk} (a^{sk} - b^{sk}) + a^{sm-sk} b^{sn} (b^{sk} - a^{sk})}{(a^s + b^s)^2} \\ &= \frac{(a^{sk} - b^{sk}) (a^{sn} b^{sm-sk} - a^{sm-sk} b^{sn})}{(a^s + b^s)^2} \\ &= \frac{(a^{sk} - b^{sk}) a^{sn} b^{sn} (b^{sm-sk-sn} - a^{sm-sk-sn})}{(a^s + b^s)^2} \\ &= (-2)^{sn} (a^s - b^s)^2 j_s^{-2} j_k^{(s)} j_{m-k-n}^{(s)} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.3.14. (Honsberger Özdeşliği) Her n, m tam sayıları için yüksek mertebeden Jacobsthal sayıları

$$\begin{aligned} & j_m^{(s)} j_n^{(s)} + j_{m+1}^{(s)} j_{n+1}^{(s)} \\ &= \frac{a^{sm+sn} (1 + a^{2s}) + b^{sm+sn} (1 + b^{2s}) + (1 + (-2)^s) (a^{sm} b^{sn} + a^{sn} b^{sm})}{(a^s + b^s)^2} \end{aligned}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned} & j_m^{(s)} j_n^{(s)} + j_{m+1}^{(s)} j_{n+1}^{(s)} \\ &= \left(\frac{(a^s)^m + (b^s)^m}{a^s + b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^n + (b^s)^n}{a^s + b^s} \right) + \left(\frac{(a^s)^{m+1} + (b^s)^{m+1}}{a^s + b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^{n+1} + (b^s)^{n+1}}{a^s + b^s} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^{sm+sn} + a^{sm}b^{sn} + a^{sn}b^{sm} + b^{sm+sn}}{(a^s + b^s)^2} \\
&\quad + \frac{a^{sm+sn+2s} + a^{sm+s}b^{sn+s} + a^{sn+s}b^{sm+s} + b^{sm+sn+2s}}{(a^s + b^s)^2} \\
&= \frac{a^{sm+sn}(1 + a^{2s}) + b^{sm+sn}(1 + b^{2s}) + a^{sm}b^{sn}(1 + a^s b^s) + a^{sn}b^{sm}(1 + a^s b^s)}{(a^s + b^s)^2} \\
&= \frac{a^{sm+sn}(1 + a^{2s}) + b^{sm+sn}(1 + b^{2s}) + (1 + (-2)^s)(a^{sm}b^{sn} + a^{sn}b^{sm})}{(a^s + b^s)^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

4.4. Yüksek Mertebeden Jacobsthal-Lucas Sayılarının Kuaterniyonları

Bu bölümde Jacobsthal-Lucas sayılarının bir genelleştirilmesi olan yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayılarının kuaterniyonları tanımlanmıştır. Öncelikle bu sayılar kuaterniyon cebirinin temel tanım ve özellikleri açısından incelenmiştir. Daha sonra, kuaterniyon dizisi olarak ele alınıp sayı dizisi özellikleri olan yineleme (rekürans) bağıntısı, binet formülü, üreteç fonksiyonları, üreteç fonksiyonlarının türevleri, toplam formülü ve bazı önemli özdeşlikleri hesaplanmıştır.

Tanım 4.4.1. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları $Oj_n^{(s)}$ ile gösterilir ve

$$Oj_n^{(s)} = j_n^{(s)} + j_{n+1}^{(s)}\mathbb{i} + j_{n+2}^{(s)}\mathbb{j} + j_{n+3}^{(s)}\mathbb{k}. \quad (4.16)$$

şekilde tanımlanır (Uysal vd, 2022).

Burada, $\mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k}$ kuaterniyon birimleridir ve $j_n^{(s)}$ yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıdır. Eğer $s = 1$ alınırsa, Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları elde edilir.

Tanım 4.4.2. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının gerçel kısmı $Re(Oj_n^{(s)})$ ile gösterilir ve

$$Re(Oj_n^{(s)}) = j_n^{(s)}$$

dir (Uysal vd, 2022).

Vektörel kısmı ise $Vec(Oj_n^{(s)})$ ile gösterilsin ve

$$Vec(Oj_n^{(s)}) = v = j_{n+1}^{(s)}\mathbb{i} + j_{n+2}^{(s)}\mathbb{j} + j_{n+3}^{(s)}\mathbb{k}$$

dir. Buradan

$$Oj_n^{(s)} = j_n^{(s)} + v$$

olarak yazılabilir.

Tanım 4.4.3. $Oj_n^{(s)}$ nin eşleniği $Oj_n^{(s)*}$ ile gösterilir ve

$$Oj_n^{(s)*} = j_n^{(s)} - j_{n+1}^{(s)}\mathbb{I} - j_{n+2}^{(s)}\mathbb{J} - j_{n+3}^{(s)}\mathbb{K} = j_n^{(s)} - v \quad (4.17)$$

formundadır (Uysal vd, 2022).

Teorem 4.4.4. $Oj_n^{(s)}$ nin normu $N(Oj_n^{(s)})$ ile gösterilir ve

$$N(Oj_n^{(s)}) = \sqrt{(j_n^{(s)})^2 + (j_{n+1}^{(s)})^2 + (j_{n+2}^{(s)})^2 + (j_{n+3}^{(s)})^2}$$

dir (Uysal vd., 2022).

İspat. Norm tanımı ve (4.17) gereğince

$$\begin{aligned} N(Oj_n^{(s)}) &= \sqrt{Oj_n^{(s)} Oj_n^{(s)*}} \\ &= \sqrt{(j_n^{(s)} + j_{n+1}^{(s)}\mathbb{I} - j_{n+2}^{(s)}\mathbb{J} - j_{n+3}^{(s)}\mathbb{K})(j_n^{(s)} - j_{n+1}^{(s)}\mathbb{I} - j_{n+2}^{(s)}\mathbb{J} - j_{n+3}^{(s)}\mathbb{K})} \\ &= \sqrt{(j_n^{(s)})^2 + (j_{n+1}^{(s)})^2 + (j_{n+2}^{(s)})^2 + (j_{n+3}^{(s)})^2} \end{aligned}$$

elde edilir ■

Önerme 4.4.5. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları için aşağıda verilen eşitlik sağlanır (Uysal vd., 2022).

$$Oj_n^{(s)} + Oj_n^{(s)*} = 2j_n^{(s)}$$

İspat. Önermenin ispatı, (4.16) ve (4.17) eşitlikleri kullanılarak gösterilir. Buradan

$$Oj_n^{(s)} + Oj_n^{(s)*} = (j_n^{(s)} + j_{n+1}^{(s)}\mathbb{I} + j_{n+2}^{(s)}\mathbb{J} + j_{n+3}^{(s)}\mathbb{K}) + (j_n^{(s)} - j_{n+1}^{(s)}\mathbb{I} - j_{n+2}^{(s)}\mathbb{J} - j_{n+3}^{(s)}\mathbb{K}) = 2j_n^{(s)}$$

dir. ■

Önerme 4.4.6. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları için aşağıda verilen eşitlik sağlanır (Uysal vd., 2022)

$$(Oj_n^{(s)})^2 = Oj_n^{(s)} Oj_n^{(s)*} + 2j_n^{(s)} Oj_n^{(s)}.$$

İspat. Verilen önermenin ispatı için eşitliğin sol tarafı (4.16) kullanılarak yazılırsa

$$(Oj_n^{(s)})^2 = (j_n^{(s)} + j_{n+1}^{(s)}\mathbb{I} + j_{n+2}^{(s)}\mathbb{J} + j_{n+3}^{(s)}\mathbb{K})(j_n^{(s)} + j_{n+1}^{(s)}\mathbb{I} + j_{n+2}^{(s)}\mathbb{J} + j_{n+3}^{(s)}\mathbb{K})$$

$$= - \left(\left(j_n^{(s)} \right)^2 + \left(j_{n+1}^{(s)} \right)^2 + \left(j_{n+2}^{(s)} \right)^2 + \left(j_{n+3}^{(s)} \right)^2 \right) \\ + 2j_n^{(s)} \left(j_n^{(s)} + j_{n+1}^{(s)} \mathbb{I} + j_{n+2}^{(s)} \mathbb{J} + j_{n+3}^{(s)} \mathbb{K} \right)$$

bulunur. Buradan Teorem 4.4.4 gereğince,

$$\left(Oj_n^{(s)} \right)^2 = -Oj_n^{(s)} Oj_n^{(s)*} + 2j_n^{(s)}$$

elde edilir. ■

Kuaterniyonlarda üç farklı birim $\mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{K}$ bulunduğundan, bu birimlerin her birine karşılık gelecek şekilde üç farklı eşlenik tanımlanabilir. Buna göre aşağıdaki tanım verilmektedir.

Tanım 4.4.7. $Oj_n^{(s)}$ nin $\mathbb{I}$ ye göre eşleniği $Oj_n^{(s)*, \mathbb{I}}$ ile gösterilir ve

$$Oj_n^{(s)*, \mathbb{I}} = j_n^{(s)} - j_{n+1}^{(s)} \mathbb{I} + j_{n+2}^{(s)} \mathbb{J} + j_{n+3}^{(s)} \mathbb{K} \quad (4.18)$$

formundadır. $Oj_n^{(s)}$ nin $\mathbb{J}$ ye göre eşleniği $Oj_n^{(s)*, \mathbb{J}}$ ile gösterilir ve

$$Oj_n^{(s)*, \mathbb{J}} = j_n^{(s)} + j_{n+1}^{(s)} \mathbb{I} - j_{n+2}^{(s)} \mathbb{J} + j_{n+3}^{(s)} \mathbb{K} \quad (4.19)$$

formundadır. $Oj_n^{(s)}$ nin $\mathbb{K}$ ye göre eşleniği $Oj_n^{(s)*, \mathbb{K}}$ ile gösterilir ve

$$Oj_n^{(s)*, \mathbb{K}} = j_n^{(s)} + j_{n+1}^{(s)} \mathbb{I} + j_{n+2}^{(s)} \mathbb{J} - j_{n+3}^{(s)} \mathbb{K} \quad (4.20)$$

formundadır.

Aşağıda verilen teorem ile bu verilen üç eşleniğe göre $Oj_n^{(s)}$ nin norm-benzerleri hesaplanmıştır.

$Oj_n^{(s)*, \mathbb{I}}$ nin norm-benzeri $N^{\mathbb{I}}(Oj_n^{(s)})$, $Oj_n^{(s)*, \mathbb{J}}$ nin norm-benzeri $N^{\mathbb{J}}(Oj_n^{(s)})$ ve $Oj_n^{(s)*, \mathbb{K}}$ nin norm-benzeri $N^{\mathbb{K}}(Oj_n^{(s)})$ ile gösterilsin. Buna göre;

Teorem 4.4.8. $Oj_n^{(s)}$ nin üç farklı norm-benzeri aşağıdaki gibi heseplanmıştır.

$$\text{i) } \left(N^{\mathbb{I}}(Oj_n^{(s)}) \right)^2 = j_n^{(s)2} + j_{n+1}^{(s)2} - j_{n+2}^{(s)2} - j_{n+3}^{(s)2} + 2\mathbb{J} \left(j_n^{(s)} j_{n+2}^{(s)} + j_{n+2}^{(s)} j_{n+3}^{(s)} \right) \\ + 2\mathbb{K} \left(j_n^{(s)} j_{n+3}^{(s)} + j_{n+1}^{(s)} j_{n+2}^{(s)} \right), \\ \text{ii) } \left(N^{\mathbb{J}}(Oj_n^{(s)}) \right)^2 = j_n^{(s)2} - j_{n+1}^{(s)2} + j_{n+2}^{(s)2} - j_{n+3}^{(s)2} + 2\mathbb{I} \left(j_n^{(s)} j_{n+1}^{(s)} - j_{n+1}^{(s)} j_{n+3}^{(s)} \right) \\ + 2\mathbb{K} \left(j_n^{(s)} j_{n+3}^{(s)} + j_{n+1}^{(s)} j_{n+2}^{(s)} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad \left(N^{\mathbb{K}}(Oj_n^{(s)}) \right)^2 &= j_n^{(s)2} - j_{n+1}^{(s)2} - j_{n+2}^{(s)2} + j_{n+3}^{(s)2} + 2\mathbb{I} \left(j_n^{(s)} j_{n+1}^{(s)} - j_{n+2}^{(s)} j_{n+3}^{(s)} \right) \\ &\quad + 2\mathbb{J} \left(j_n^{(s)} j_{n+2}^{(s)} + j_{n+1}^{(s)} j_{n+3}^{(s)} \right). \end{aligned}$$

İspat. i) Norm tanımından,

$$\begin{aligned} N^{\mathbb{I}}(Oj_n^{(s)}) &= \sqrt{Oj_n^{(s)} Oj_n^{(s)*, \mathbb{I}}} \\ &= \sqrt{\left(j_n^{(s)} + j_{n+1}^{(s)} \mathbb{I} + j_{n+2}^{(s)} \mathbb{J} + j_{n+3}^{(s)} \mathbb{K} \right) \left(j_n^{(s)} - j_{n+1}^{(s)} \mathbb{I} + j_{n+2}^{(s)} \mathbb{J} + j_{n+3}^{(s)} \mathbb{K} \right)} \end{aligned}$$

dır. Buradan,

$$\begin{aligned} \left(N^{\mathbb{I}}(Oj_n^{(s)}) \right)^2 &= \left(j_n^{(s)} + j_{n+1}^{(s)} \mathbb{I} + j_{n+2}^{(s)} \mathbb{J} + j_{n+3}^{(s)} \mathbb{K} \right) \left(j_n^{(s)} - j_{n+1}^{(s)} \mathbb{I} + j_{n+2}^{(s)} \mathbb{J} + j_{n+3}^{(s)} \mathbb{K} \right) \\ &= j_n^{(s)2} + j_n^{(s)} j_{n+1}^{(s)} \mathbb{I} - j_n^{(s)} j_{n+2}^{(s)} \mathbb{J} + j_n^{(s)} j_{n+3}^{(s)} \mathbb{K} \\ &\quad + j_{n+1}^{(s)} j_n^{(s)} \mathbb{I} + j_{n+1}^{(s)2} - j_{n+1}^{(s)} j_{n+2}^{(s)} \mathbb{K} - j_{n+1}^{(s)} j_{n+3}^{(s)} \mathbb{J} \\ &\quad + j_{n+2}^{(s)} j_n^{(s)} \mathbb{J} - j_{n+2}^{(s)} j_{n+1}^{(s)} \mathbb{K} - j_{n+2}^{(s)2} + j_{n+2}^{(s)} j_{n+3}^{(s)} \mathbb{I} \\ &\quad + j_{n+3}^{(s)} j_n^{(s)} \mathbb{K} - j_{n+3}^{(s)} j_{n+1}^{(s)} \mathbb{J} - j_{n+3}^{(s)} j_{n+2}^{(s)} \mathbb{I} - j_{n+3}^{(s)2} \\ &= j_n^{(s)2} + j_{n+1}^{(s)2} - j_{n+2}^{(s)2} - j_{n+3}^{(s)2} + 2\mathbb{J} \left(j_n^{(s)} j_{n+2}^{(s)} + j_{n+2}^{(s)} j_{n+3}^{(s)} \right) \\ &\quad + 2\mathbb{K} \left(j_n^{(s)} j_{n+3}^{(s)} + j_{n+1}^{(s)} j_{n+2}^{(s)} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. **ii) ve iii)** benzer şekilde gösterilir. ■

Bu teoremin sonucu olarak aşağıdaki verilir.

Sonuç 4.4.9. Yüksek mertebeden Jacobsthal kuaterniyonları için aşağıda verilen eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad Oj_n^{(s)} + Oj_n^{(s)*, \mathbb{I}} &= 2 \left(j_n^{(s)} + j_{n+2}^{(s)} \mathbb{J} + j_{n+3}^{(s)} \mathbb{K} \right), \\ \text{ii)} \quad Oj_n^{(s)} + Oj_n^{(s)*, \mathbb{J}} &= 2 \left(j_n^{(s)} + j_{n+1}^{(s)} \mathbb{I} + j_{n+3}^{(s)} \mathbb{K} \right), \\ \text{iii)} \quad Oj_n^{(s)} + Oj_n^{(s)*, \mathbb{K}} &= 2 \left(j_n^{(s)} + j_{n+1}^{(s)} \mathbb{I} + j_{n+2}^{(s)} \mathbb{J} \right), \\ \text{vii)} \quad Oj_n^{(s)*, \mathbb{I}} + Oj_n^{(s)*, \mathbb{J}} &= 2 \left(j_n^{(s)} + j_{n+3}^{(s)} \mathbb{K} \right), \\ \text{viii)} \quad Oj_n^{(s)*, \mathbb{I}} + Oj_n^{(s)*, \mathbb{K}} &= 2 \left(j_n^{(s)} + j_{n+3}^{(s)} \mathbb{J} \right), \\ \text{ix)} \quad Oj_n^{(s)*, \mathbb{J}} + Oj_n^{(s)*, \mathbb{K}} &= 2 \left(j_n^{(s)} + j_{n+3}^{(s)} \mathbb{I} \right). \end{aligned}$$

İspat. Sonucun ispatı (4.18), (4.19) ve (4.20) eşitlikleri kullanılarak gösterilir. ■

Teorem 4.4.10. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının Binet formülü aşağıdaki gibidir (Uysal vd., 2022).

$$Oj_n^{(s)} = \frac{(a^s)^n \hat{a} + (b^s)^n \hat{b}}{a^s + b^s} \quad (4.21)$$

Burada,

$$\hat{a} = (1 + a^s \mathbf{i} + a^{2s} \mathbf{j} + a^{3s} \mathbf{k}) \text{ ve } \hat{b} = (1 + b^s \mathbf{i} + b^{2s} \mathbf{j} + b^{3s} \mathbf{k})$$

dir.

İspat. (4.16) eşitliğinde $j_n^{(s)}$ sayılarının Binet formülü kullanılacaktır. Buradan

$$\begin{aligned} Oj_n^{(s)} &= j_n^{(s)} + j_{n+1}^{(s)} \mathbf{i} + j_{n+2}^{(s)} \mathbf{j} + j_{n+3}^{(s)} \mathbf{k} \\ &= \frac{(a^s)^n}{a^s + b^s} [1 + a^s \mathbf{i} + a^{2s} \mathbf{j} + a^{3s} \mathbf{k}] + \frac{(b^s)^n}{a^s + b^s} [1 + b^s \mathbf{i} + b^{2s} \mathbf{j} + b^{3s} \mathbf{k}] \\ &= \frac{(a^s)^n \hat{a}}{a^s + b^s} + \frac{(b^s)^n \hat{b}}{a^s + b^s} = \frac{(a^s)^n \hat{a} + (b^s)^n \hat{b}}{a^s + b^s} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.4.11. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları için yineleme (rekürans) bağıntısı

$$Oj_{n+1}^{(s)} = j_s Oj_n^{(s)} - (-2)^s Oj_{n-1}^{(s)}$$

şekilindedir (Uysal vd., 2022).

İspat. Eşitliğin sağ tarafı, Jacobsthal-Lucas sayıları ve yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının Binet formülleri kullanılarak yazılırsa

$$j_s Oj_n^{(s)} - (-2)^s Oj_{n-1}^{(s)} = (a^s + b^s) \left(\frac{a^{sn} \hat{a} + b^{sn} \hat{b}}{a^s + b^s} \right) - (-2)^s \left(\frac{a^{s(n-1)} \hat{a} + b^{s(n-1)} \hat{b}}{a^s + b^s} \right)$$

elde edilir. $ab = -2$ olduğundan

$$\begin{aligned} j_s Oj_n^{(s)} - (-2)^s Oj_{n-1}^{(s)} &= (a^s \hat{a} + b^s \hat{b}) \left(\frac{a^{sn} \hat{a} + b^{sn} \hat{b}}{a^s + b^s} \right) - (ab)^s \left(\frac{a^{s(n-1)} \hat{a} + b^{s(n-1)} \hat{b}}{a^s + b^s} \right) \\ &= \frac{a^{sn+s} \hat{a} + a^s b^{sn} \hat{b} + b^s a^{sn} \hat{a} + b^{sn+s} \hat{b} - a^{sn} b^s \hat{a} - a^s b^{sn} \hat{b}}{a^s + b^s} \\ &= \frac{a^{sn+s} \hat{a} + b^{sn+s} \hat{b}}{a^s + b^s} = Oj_{n+1}^{(s)} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.4.12. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları, n ve s nin negatif değerleri için aşağıda verilen eşitlikleri sağlar (Uysal vd., 2022).

- i) $Oj_{-n}^{(s)} = (-2)^{-sn} \frac{(b^s)^n \hat{a} + (a^s)^n \hat{b}}{a^s + b^s},$
- ii) $Oj_{-n}^{(-s)} = (-2)^s Oj_{-n}^{(s)},$
- iii) $Oj_n^{(-s)} = (-2)^{sn-s} Oj_{-n}^{(s)}.$

İspat. (4.21) ifadesinden yararlanılacaktır. Bunun için,

i)

$$Oj_{-n}^{(s)} = \frac{(a^s)^{-n} \hat{a} + (b^s)^{-n} \hat{b}}{a^s + b^s} = \frac{\frac{\hat{a}}{a^{sn}} + \frac{\hat{b}}{b^{sn}}}{a^s + b^s} = \frac{(b^s)^n \hat{a} + (a^s)^n \hat{b}}{(ab)^{sn}(a^s + b^s)}$$

$ab = -2$ olduğundan

$$Oj_{-n}^{(s)} = (-2)^{-sn} \frac{(b^s)^n \hat{a} + (a^s)^n \hat{b}}{a^s + b^s}$$

elde edilir.

ii)

$$Oj_{-n}^{(-s)} = \frac{(a^{-s})^{-n} \hat{a} + (b^{-s})^{-n} \hat{b}}{a^{-s} + b^s} = \frac{a^{sn} \hat{a} + b^{sn} \hat{b}}{\frac{1}{a^s} + \frac{1}{b^s}} = \frac{a^{sn} \hat{a} + b^{sn} \hat{b}}{a^s + b^s} (ab)^s$$

$ab = -2$ ve $Oj_n^{(s)} = \frac{(a^s)^n \hat{a} + (b^s)^n \hat{b}}{a^s + b^s}$ olduğundan

$$Oj_{-n}^{(-s)} = (-2)^s Oj_n^{(s)}$$

elde edilir.

iii)

$$Oj_n^{(-s)} = \frac{(a^{-s})^n \hat{a} + (b^{-s})^n \hat{b}}{a^{-s} + b^s} = \frac{\frac{\hat{a}}{a^{sn}} + \frac{\hat{b}}{b^{sn}}}{\frac{1}{a^s} + \frac{1}{b^s}} = \frac{\frac{\hat{a}b^{sn} + \hat{b}a^{sn}}{(ab)^{sn}}}{\frac{(ab)^s}{a^s + b^s}} = \frac{\hat{a}b^{sn} + \hat{b}a^{sn}}{a^s + b^s}$$

i) den,

$$Oj_n^{(-s)} = (-2)^{sn-s} Oj_{-n}^{(s)}$$

elde edilir. ■

Şimdi, yüksek mertebeden Jacobsthal kuaterniyonların üreteç fonksiyonunu ve toplam formülünü bulmada yardımcı olacak aşağıdaki teorem verilecektir.

Yardımcı Teorem 4.4.13. $\hat{a} = (1 + a^s\mathbb{i} + a^{2s}\mathbb{j} + a^{3s}\mathbb{k})$, $\hat{b} = (1 + b^s\mathbb{i} + b^{2s}\mathbb{j} + b^{3s}\mathbb{k})$ olmak üzere $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ katsayıları aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar (Uysal vd., 2022).

- i) $\hat{a} + \hat{b} = 2 + j_s\mathbb{i} + j_{2s}\mathbb{j} + j_{3s}\mathbb{k}$,
- ii) $\hat{a}b^s + \hat{b}a^s = j_s + (-2)^s(2\mathbb{i} + j_s\mathbb{j} + j_{2s}\mathbb{k})$.

İspat. i) $\hat{a} + \hat{b} = (1 + a^s\mathbb{i} + a^{2s}\mathbb{j} + a^{3s}\mathbb{k}) + (1 + b^s\mathbb{i} + b^{2s}\mathbb{j} + b^{3s}\mathbb{k})$
 $= 2 + (a^s + b^s)\mathbb{i} + (a^{2s} + b^{2s})\mathbb{j} + (a^{3s} + b^{3s})\mathbb{k}$
 $= 2 + j_s\mathbb{i} + j_{2s}\mathbb{j} + j_{3s}\mathbb{k}$

ii) $\hat{a}b^s + \hat{b}a^s = (1 + a^s\mathbb{i} + a^{2s}\mathbb{j} + a^{3s}\mathbb{k})b^s + (1 + b^s\mathbb{i} + b^{2s}\mathbb{j} + b^{3s}\mathbb{k})a^s$
 $= a^s + b^s + 2a^s b^s\mathbb{i} + (a^{2s}b^s + a^s b^{2s})\mathbb{j} + (a^{3s}b^s + a^s b^{3s})\mathbb{k}$
 $= j_s + 2(-2)^s\mathbb{i} + (-2)^s j_s\mathbb{j} + (-2)^s j_{2s}\mathbb{k}$
 $= j_s + (-2)^s(2\mathbb{i} + j_s\mathbb{j} + j_{2s}\mathbb{k})$

elde edilir. ■

Teorem 4.4.14. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} Oj_n^{(s)} x^n = \frac{2 + j_s\mathbb{i} + j_{2s}\mathbb{j} + j_{3s}\mathbb{k} - (j_s + (-2)^s(2\mathbb{i} + j_s\mathbb{j} + j_{2s}\mathbb{k}))x}{j_s(1 - j_s x + (-2)^s x^2)}$$

dır (Uysal vd., 2022).

İspat.

$$G_{jq}(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} Oj_n^{(s)} x^n$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} G_{jq}(x, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} Oj_n^{(s)} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(a^n)^s + (b^n)^s}{a^s + b^s} + \frac{(a^{n+1})^s + (b^{n+1})^s}{a^s + b^s} \mathbb{i} + \frac{(a^{n+2})^s + (b^{n+2})^s}{a^s + b^s} \mathbb{j} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(a^{n+3})^s + (b^{n+3})^s}{a^s + b^s} \mathbb{k} \right] x^n \\ &= \frac{1}{a^s + b^s} \sum_{n=0}^{\infty} (a^n)^s (1 + a^s\mathbb{i} + a^{2s}\mathbb{j} + a^{3s}\mathbb{k}) x^n \\ &\quad + \frac{1}{a^s + b^s} \sum_{n=0}^{\infty} (b^n)^s (1 + b^s\mathbb{i} + b^{2s}\mathbb{j} + b^{3s}\mathbb{k}) x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^s + b^s} \sum_{n=0}^{\infty} (a^n)^s x^n \hat{a} + \frac{1}{a^s + b^s} \sum_{n=0}^{\infty} (b^n)^s x^n \hat{b} \\
&= \frac{\hat{a}}{a^s + b^s} \sum_{n=0}^{\infty} (a^s x)^n + \frac{\hat{b}}{a^s + b^s} \sum_{n=0}^{\infty} (b^s x)^n \\
&= \left(\frac{\hat{a}}{a^s + b^s} \right) \left(\frac{1}{1 - a^s x} \right) + \left(\frac{\hat{b}}{a^s + b^s} \right) \left(\frac{1}{1 - b^s x} \right) \\
&= \frac{\hat{a} + \hat{b} - (\hat{a}b^s + \hat{b}a^s)x}{(a^s + b^s)(1 - (a^s + b^s)x + (-2)^s x^2)}
\end{aligned}$$

Yardımcı Teorem 4.4.13. gereğince,

$$G_{jq}(x, s) = \frac{2 + j_s \mathbb{I} + j_{2s} \mathbb{J} + j_{3s} \mathbb{K} - (j_s + (-2)^s (2\mathbb{I} + j_s \mathbb{J} + j_{2s} \mathbb{K}))x}{j_s(1 - j_s x + (-2)^s x^2)}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.4.15. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının terimleri toplamı

$$\sum_{n=0}^{\infty} Oj_n^{(s)} = \frac{2 - j_s + (j_s + (-2)^{s+1})\mathbb{I} + (j_{2s} - (-2)^s j_s)\mathbb{J} + (j_{3s} - (-2)^s j_{2s})\mathbb{K}}{j_s(1 - j_s + (-2)^s)}$$

dır.

İspat. Eğer Teorem 4.4.14. de x yerine 1 alınırsa ispat yapılmış olur. ■

Teorem 4.4.16. Her $n, m \in \mathbb{Z}$ için yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları için genelleştirilmiş üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} Oj_{n+m}^{(s)} x^n = \frac{Oj_n^{(s)} + (-2)^s Oj_{m-1}^{(s)} x}{1 + j_s x + (-2)^s x^2}$$

dir (Uysal vd., 2022).

İspat. Yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının Binet formülü yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} Oj_{n+m}^{(s)} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(a^s)^{n+m} \hat{a} + (b^s)^{n+m} \hat{b}}{a^s + b^s} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^s)^{n+m} \hat{a}}{a^s + b^s} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b^s)^{n+m} \hat{b}}{a^s + b^s} x^n \\
&= \frac{\hat{a} a^{sm}}{a^s + b^s} \sum_{n=0}^{\infty} a^{sn} x^n + \frac{\hat{b} b^{sm}}{a^s + b^s} \sum_{n=0}^{\infty} b^{sn} x^n \\
&= \left(\frac{\hat{a} a^{sm}}{a^s + b^s} \right) \left(\frac{1}{1 - a^s x} \right) + \left(\frac{\hat{b} b^{sm}}{a^s + b^s} \right) \left(\frac{1}{1 - b^s x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{a^s + b^s} \right) \left[\frac{\hat{a}a^{sm} - \hat{a}a^{sm}b^sx + \hat{b}b^{sm} - \hat{b}b^{sm}a^sx}{1 - (b^s + a^s)x + (ab)^sx^2} \right] \\
&= \left(\frac{1}{a^s + b^s} \right) \left[\frac{\hat{a}(a^s)^m + \hat{b}(b^s)^m}{1 - j_s x + (-2)^s x^2} - \frac{a^s b^s (\hat{a}(a^s)^{m-1} + \hat{b}(b^s)^{m-1})x}{1 - j_s x + (-2)^s x^2} \right] \\
&= \left[\frac{Oj_m^{(s)}}{1 - j_s x + (-2)^s x^2} + \frac{(-2)^s Oj_{m-1}^{(s)} x}{1 - j_s x + (-2)^s x^2} \right] = \frac{Oj_n^{(s)} + (-2)^s Oj_{m-1}^{(s)} x}{1 + j_s x + (-2)^s x^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.4.17. $Oj_n^{(s)}$ kuaterniyonlarının üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} Oj_n^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \frac{\hat{a}e^{a^s x} + \hat{b}e^{b^s x}}{a^s + b^s}$$

dır (Uysal vd., 2022).

İspat. $Oj_n^{(s)}$ nin üstel üreteç fonksiyonu

$$H_{jq}(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} Oj_n^{(s)} \frac{x^n}{n!}$$

olsun. Buradan $Oj_n^{(s)}$ nin Binet formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
H_{jq}(x, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(a^s)^n \hat{a} + (b^s)^n \hat{b}}{a^s + b^s} \right) \frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{1}{a^s + b^s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^s)^n \hat{a} x^n}{n!} + \frac{1}{a^s + b^s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b^s)^n \hat{b} x^n}{n!} \\
&= \frac{\hat{a}}{a^s + b^s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^s x)^n}{n!} + \frac{\hat{b}}{a^s + b^s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b^s x)^n}{n!} = \frac{\hat{a}e^{a^s x} + \hat{b}e^{b^s x}}{a^s + b^s}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 4.4.18. $\hat{a} = (1 + a^s \mathbb{i} + a^{2s} \mathbb{j} + a^{3s} \mathbb{k}), \hat{b} = (1 + b^s \mathbb{i} + b^{2s} \mathbb{j} + b^{3s} \mathbb{k})$ olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned}
k &= (1 - (-2)^s - (-2)^{2s} - (-2)^{3s} + j_s \mathbb{i} + j_{2s} \mathbb{j} + j_{3s} \mathbb{k}), \\
l &= (-2)^{2s} \mathbb{i} - (-2)^s j_s \mathbb{j} + (-2)^s \mathbb{k} \\
\rho &= (a^s - b^s)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\hat{a}\hat{b} = k - \rho l \quad (4.22)$$

ve

$$\hat{b}\hat{a} = k + \rho l \quad (4.23)$$

dir (Uysal vd., 2022).

İspat. (4.22) eşitliğinin ispatı

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{b} &= (1 + a^s \mathfrak{i} + a^{2s} \mathfrak{j} + a^{3s} \mathfrak{k})(1 + b^s \mathfrak{i} + b^{2s} \mathfrak{j} + b^{3s} \mathfrak{k}) \\ &= 1 + b^s \mathfrak{i} + b^{2s} \mathfrak{j} + b^{3s} \mathfrak{k} + a^s \mathfrak{i} - a^s b^s + a^s b^{2s} \mathfrak{k} - a^s b^{3s} \mathfrak{j} + a^{2s} \mathfrak{j} - a^{2s} b^s \mathfrak{k} \\ &\quad - a^{2s} b^{2s} + a^{2s} b^{3s} \mathfrak{i} + a^{3s} \mathfrak{k} + a^{3s} b^s \mathfrak{j} - a^{3s} b^{2s} \mathfrak{i} - a^{3s} b^{3s} \\ &= 1 + b^s \mathfrak{i} + b^{2s} \mathfrak{j} + b^{3s} \mathfrak{k} + a^s \mathfrak{i} - (-2)^s + a^s b^{2s} \mathfrak{k} - a^s b^{3s} \mathfrak{j} + a^{2s} \mathfrak{j} - a^{2s} b^s \mathfrak{k} \\ &\quad - (-2)^{2s} + a^{2s} b^{3s} \mathfrak{i} + a^{3s} \mathfrak{k} + a^{3s} b^s \mathfrak{j} - a^{3s} b^{2s} \mathfrak{i} - (-2)^{3s} \\ &= (1 - (-2)^s - (-2)^{2s} - (-2)^{3s}) + (a^s + b^s + a^{2s} b^{3s} - a^{3s} b^{2s}) \mathfrak{i} \\ &\quad + (a^{2s} + b^{2s} + a^{3s} b^s - a^s b^{3s}) \mathfrak{j} + (a^{3s} + b^{3s} + a^s b^{2s} - a^{2s} b^s) \mathfrak{k} \\ &= (1 - (-2)^s - (-2)^{2s} - (-2)^{3s} + j_s \mathfrak{i} + j_{2s} \mathfrak{j} + j_{3s} \mathfrak{k}) \\ &\quad - (-2)^{2s} (a^s - b^s) \mathfrak{i} + (-2)^s (a^{2s} - b^{2s}) \mathfrak{j} - (-2)^s (a^s - b^s) \mathfrak{k} \\ &= (1 - (-2)^s - (-2)^{2s} - (-2)^{3s} + j_s \mathfrak{i} + j_{2s} \mathfrak{j} + j_{3s} \mathfrak{k}) \\ &\quad - (-2)^s (a^s - b^s) ((-2)^s \mathfrak{i} - j_s \mathfrak{j} + \mathfrak{k}) = k - \rho l \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde (4.23) ün ispatı yapılır. ■

Teorem 4.4.19. (Vajda Özdeşliği) Her $n, m, r \in \mathbb{Z}$ için

$$Oj_{n+m}^{(s)} Oj_{n+r}^{(s)} - Oj_n^{(s)} Oj_{n+m+r}^{(s)} = -(-2)^{sn} \rho^2 J_m^{(s)} (j_s)^{-2} [kJ_r^{(s)} + lj_{sr}]$$

dır (Uysal vd., 2022).

İspat. $Oj_n^{(s)}$ kuaterniyonlarının Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} &Oj_{n+m}^{(s)} Oj_{n+r}^{(s)} - Oj_n^{(s)} Oj_{n+m+r}^{(s)} \\ &= \left(\frac{(a^s)^{n+m} \hat{a} + (b^s)^{n+m} \hat{b}}{a^s + b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^{n+r} \hat{a} + (b^s)^{n+r} \hat{b}}{a^s + b^s} \right) \\ &\quad - \left(\frac{(a^s)^n \hat{a} + (b^s)^n \hat{b}}{a^s + b^s} \right) \left(\frac{(a^s)^{n+m+r} \hat{a} + (b^s)^{n+m+r} \hat{b}}{a^s + b^s} \right) \\ &= \left(\frac{1}{(a^s + b^s)^2} \right) ((a^s)^{n+m} \hat{a} (b^s)^{n+r} \hat{b} + (b^s)^{n+m} \hat{b} (a^s)^{n+r} \hat{a} - (a^s)^n \hat{a} (b^s)^{n+m+r} \hat{b} \\ &\quad - (b^s)^n \hat{b} (a^s)^{n+m+r} \hat{a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(a^s + b^s)^2} \left(\hat{a} \hat{b} a^{ns} b^{ns+rs} ((a^s)^m - (b^s)^m) + \hat{b} \hat{a} b^{sn} a^{ns+rs} ((b^s)^m - (a^s)^m) \right) \\
&= \frac{1}{(a^s + b^s)^2} \left(\hat{a} \hat{b} (-2)^{ns} b^{rs} ((a^s)^m - (b^s)^m) - \hat{b} \hat{a} (-2)^{ns} a^{rs} ((a^s)^m - (b^s)^m) \right) \\
&= \frac{1}{(a^s + b^s)^2} \left((-2)^{ns} ((a^s)^m - (b^s)^m) (\hat{a} \hat{b} b^{rs} - \hat{b} \hat{a} a^{rs}) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 4.4.18 den,

$$\begin{aligned}
&Oj_{n+m}^{(s)} Oj_{n+r}^{(s)} - Oj_n^{(s)} Oj_{n+m+r}^{(s)} \\
&= \frac{(-2)^{ns} ((a^s)^m - (b^s)^m)}{(a^s + b^s)^2} [kb^{rs} - \rho l b^{rs} - ka^{rs} - \rho l a^{rs}] \\
&= \frac{(-2)^{ns} ((a^s)^m - (b^s)^m)}{(a^s + b^s)^2} [-k(a^{rs} - b^{rs}) - \rho l(a^{rs} + b^{rs})] \\
&= \frac{(-2)^{ns} ((a^s)^m - (b^s)^m)}{(a^s + b^s)^2} [-k\rho J_r^{(s)} - \rho l j_{sr}] \\
&= -(-2)^{sn} \rho^2 J_m^{(s)} (j_s)^{-2} [kJ_r^{(s)} + l j_{sr}]
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.4.20. (Catalan Özdeşliği) Her $n, r \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır (Uysal vd., 2022).

$$Oj_{n-r}^{(s)} Oj_{n+r}^{(s)} - \left(Oj_n^{(s)} \right)^2 = -(-2)^{sn} \rho^2 J_{-r}^{(s)} (j_s)^{-2} [kJ_r^{(s)} + l j_{sr}].$$

İspat. Teorem 4.4.19. Vajda özdeşliğinde $m = -r$ alınırsa,

$$Oj_{n-r}^{(s)} Oj_{n+r}^{(s)} - \left(Oj_n^{(s)} \right)^2 = -(-2)^{sn} \rho^2 J_{-r}^{(s)} (j_s)^{-2} [kJ_r^{(s)} + l j_{sr}]$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.4.21. (Cassini Özdeşliği) Her $n \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır (Uysal vd., 2022)

$$Oj_{n-1}^{(s)} Oj_{n+1}^{(s)} - \left(Oj_n^{(s)} \right)^2 = (-2)^{s(n-1)} \rho^2 (j_s)^{-2} [k + l j_s].$$

İspat. Teorem 4.4.19. Vajda özdeşliğinde $r = 1$ ve $m = -1$ alınırsa,

$$j_{n-1}^{(s)} Oj_{n+1}^{(s)} - \left(Oj_n^{(s)} \right)^2 = -(-2)^{sn} \rho^2 J_{-1}^{(s)} (j_s)^{-2} [kJ_1^{(s)} + l j_s] = (-2)^{s(n-1)} \rho^2 (j_s)^{-2} [k + l j_s]$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.4.22. (d'Ocagne Özdeşliği) Her $n, k \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır (Uysal vd., 2022).

$$Oj_k^{(s)} Oj_{n+1}^{(s)} - Oj_n^{(s)} Oj_{k+1}^{(s)} = -(-2)^{sn} \rho^2 J_{k-n}^{(s)} (j_s)^{-2} [k + l j_s].$$

İspat. Teorem 4.4.19. Vajda özdeşliğinde $m + n = k$ ve $r = 1$ alınırsa,

$$Oj_k^{(s)} Oj_{n+1}^{(s)} - Oj_n^{(s)} Oj_{k+1}^{(s)} = -(-2)^{sn} \rho^2 J_{k-n}^{(s)} (j_s)^{-2} [k + l j_s]$$

dir. ■

Bir sonraki teoremde yüksek mertebeden Jacobsthal kuaterniyonlar ve yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları arasındaki ilişkiler verilecektir.

Teorem 4.4.23. Yüksek mertebeden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları arasında aşağıdaki bağıntılar sağlanır (Uysal vd., 2022).

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad Oj_n^{(s)} + Oj_n^{(s)} &= \frac{Oj_{n+1}^{(s)}}{j_s}, \\ \text{ii)} \quad Oj_n^{(s)} - Oj_n^{(s)} &= \frac{2(-2)^s Oj_{n-1}^{(s)}}{j_s}. \end{aligned}$$

İspat.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad Oj_n^{(s)} + Oj_n^{(s)} &= (J_n^{(s)} + J_{n+1}^{(s)} \mathfrak{i} + J_{n+2}^{(s)} \mathfrak{j} + J_{n+3}^{(s)} \mathfrak{k}) + (j_n^{(s)} + j_{n+1}^{(s)} \mathfrak{i} + j_{n+2}^{(s)} \mathfrak{j} + j_{n+3}^{(s)} \mathfrak{k}) \\ &= (J_n^{(s)} + j_n^{(s)}) + (J_{n+1}^{(s)} + j_{n+1}^{(s)}) \mathfrak{i} + (J_{n+2}^{(s)} + j_{n+2}^{(s)}) \mathfrak{j} + (J_{n+3}^{(s)} + j_{n+3}^{(s)}) \mathfrak{k} \end{aligned}$$

Teorem 4.3.6 gereğince

$$Oj_n^{(s)} + Oj_n^{(s)} = \frac{J_{n+1}^{(s)}}{j_s} + \frac{J_{n+2}^{(s)}}{j_s} \mathfrak{i} + \frac{J_{n+3}^{(s)}}{j_s} \mathfrak{j} + \frac{J_{n+4}^{(s)}}{j_s} \mathfrak{k} = \frac{Oj_{n+1}^{(s)}}{j_s}$$

eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad Oj_n^{(s)} - Oj_n^{(s)} &= J_n^{(s)} + J_{n+1}^{(s)} \mathfrak{i} + J_{n+2}^{(s)} \mathfrak{j} + J_{n+3}^{(s)} \mathfrak{k} - j_n^{(s)} - j_{n+1}^{(s)} \mathfrak{i} - j_{n+2}^{(s)} \mathfrak{j} - j_{n+3}^{(s)} \mathfrak{k} \\ &= (J_n^{(s)} - j_n^{(s)}) + (J_{n+1}^{(s)} - j_{n+1}^{(s)}) \mathfrak{i} + (J_{n+2}^{(s)} - j_{n+2}^{(s)}) \mathfrak{j} + (J_{n+3}^{(s)} - j_{n+3}^{(s)}) \mathfrak{k} \end{aligned}$$

Teorem 4.3.6 gereğince

$$\begin{aligned} Oj_n^{(s)} - Oj_n^{(s)} &= \left(\frac{2(-2)^s J_{n-1}^{(s)}}{j_s} \right) + \left(\frac{2(-2)^s J_n^{(s)}}{j_s} \right) \mathfrak{i} + \left(\frac{2(-2)^s J_{n+1}^{(s)}}{j_s} \right) \mathfrak{j} + \left(\frac{2(-2)^s J_{n+2}^{(s)}}{j_s} \right) \mathfrak{k} \\ &= \frac{2(-2)^s}{j_s} (J_{n-1}^{(s)} + J_n^{(s)} \mathfrak{i} + J_{n+1}^{(s)} \mathfrak{j} + J_{n+2}^{(s)} \mathfrak{k}) = \frac{2(-2)^s Oj_{n-1}^{(s)}}{j_s} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. ■

4.5. Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Sayıları

Bu bölümde yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayıları tanımlanıp özellikleri incelenecektir. Daha sonra, bileşenleri yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayıları olan kuaterniyonların tanımı verilip, bu dizilerin özellikleri araştırılacaktır. Bu dizilerin ve kuaterniyonlarının ayrı ayrı rekürans (yineleme) bağıntısı, Binet formülü, üreteç fonksiyonları, toplam formülleri ve özdeşlikleri hesaplanacaktır.

Tanım 4.5.1. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayıları

$$J_{k,n}^{(s)} = \frac{J_{k,ns}}{J_{k,s}}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Tanım 4.5.2. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayılarının Binet tipli formülü

$$J_{k,n}^{(s)} = \frac{(\alpha^s)^n - (\beta^s)^n}{\alpha^s - \beta^s}$$

eşitliği ile verilir.

Dikkat edilirse,

$$J_{k,0}^{(s)} = 0, J_{k,1}^{(s)} = 1$$

dir.

Yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayıların s ve n ye bağlı bazı terimleri verilsin.

i) $s = 1$ için klasik k –Jacobsthal sayıları

$$J_{k,n}^{(1)} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = J_{k,n}$$

şeklindedir.

ii) $s = 2$ için $J_{k,n}^{(2)}$ yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıları

$$J_{k,n}^{(2)} = \frac{J_{k,2n}}{J_{k,n}}$$

şeklindedir. Buradan

Durum 1: $n = 1$ için,

$$J_{k,1}^{(2)} = \frac{J_{k,2}}{J_{k,1}} = k.$$

Durum 2: $n = 2$ için,

$$J_{k,2}^{(2)} = \frac{J_{k,4}}{J_{k,2}} = k^2 + 4.$$

Durum 3: $n = 3$ için,

$$J_{k,3}^{(2)} = \frac{J_{k,6}}{J_{k,2}} = k^4 + 8k^2 + 12.$$

Durum 4: $n = 4$ için,

$$J_{k,4}^{(2)} = \frac{J_{k,8}}{J_{k,2}} = k^6 + 12k^4 + 40k^2 + 32k.$$

Durum 5: $n = 5$ için,

$$J_{k,5}^{(2)} = \frac{J_{k,10}}{J_{k,2}} = k^8 + 16k^6 + 84k^4 + 160k^2 + 80.$$

Burada $k = 1$ verilirse, $\{1, 5, 21, 85, 341, \dots\}$ dizisi elde ediliyor. Elde edilen dizi A002450 kodu ile OEIS' te tanımlıdır.

iii) $s = 3$ için, $J_{k,n}^{(3)}$ yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıları

$$J_{k,n}^{(3)} = \frac{J_{k,3n}}{J_{k,3}}.$$

şeklindedir. Buradan

Durum 1: $n = 1$ için,

$$J_{k,1}^{(3)} = \frac{J_{k,3}}{J_{k,3}} = 1.$$

Durum 2: $n = 2$ için,

$$J_{k,2}^{(3)} = \frac{J_{k,6}}{J_{k,2}} = k^3 + 6k.$$

Durum 3: $n = 3$ için,

$$J_{k,3}^{(3)} = \frac{J_{k,9}}{J_{k,3}} = k^6 + 12k^4 + 36k^2 + 8.$$

Durum 4: $n = 4$ için,

$$J_{k,4}^{(3)} = \frac{J_{k,12}}{J_{k,3}} = k^{11} + 20k^9 + 144k^7 + 448k^5 + 560k^3 + 192k.$$

Şimdi yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayılarının terimlerinin sağladığı yineleme (rekürans) bağıntısını verelim.

Teorem 4.5.3. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayıları için yineleme (rekürans) benzeri bağıntısı her $n \geq 1$ için

$$J_{k,n+1}^{(s)} = j_{k,s} J_{k,n}^{(s)} - (-2)^s J_{k,n-1}^{(s)}$$

eşitliği ile verilir.

İspat. Eşitliğin sol tarafı için yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayılarının Binet formülü kullanıldığında

$$J_{k,n+1}^{(s)} = \frac{(\alpha^s)^{n+1} - (\beta^s)^{n+1}}{\alpha^s - \beta^s} = \frac{\alpha^{sn+s} - \beta^{sn+s}}{\alpha^s - \beta^s}$$

elde edilir. Burada pay kısmına $\beta^{sn} \alpha^s$ ifadesi eklenip çıkarıldığında

$$\begin{aligned} J_{k,n+1}^{(s)} &= \frac{\alpha^{sn+s} - \beta^{sn+s} - \beta^{sn} \alpha^s + \beta^{sn} \alpha^s}{\alpha^s - \beta^s} = \frac{\alpha^s (\alpha^{sn} - \beta^{sn}) - \beta^{sn} \beta^s + \beta^{sn} \alpha^s}{\alpha^s - \beta^s} \\ &= \alpha^s J_{k,n}^{(s)} + \frac{\beta^{sn} \alpha^s - \beta^{sn} \beta^s}{\alpha^s - \beta^s} = (\alpha^s + \beta^s - \beta^s) J_{k,n}^{(s)} + \frac{\beta^{sn} \alpha^s - \beta^{sn} \beta^s}{\alpha^s - \beta^s} \\ &= (\alpha^s + \beta^s) J_{k,n}^{(s)} - \beta^s J_{k,n}^{(s)} + \frac{\beta^{sn} \alpha^s - \beta^{sn} \beta^s}{\alpha^s - \beta^s} \\ &= j_{k,s} J_{k,n}^{(s)} + \frac{1}{\alpha^s - \beta^s} (\beta^{sn} \alpha^s - \beta^{sn} \beta^s - \alpha^{sn} \beta^s + \beta^{sn} \beta^s) \\ &= j_{k,s} J_{k,n}^{(s)} + \frac{1}{\alpha^s - \beta^s} (\beta^{sn} \alpha^s - \alpha^{sn} \beta^s) \\ &= j_{k,s} J_{k,n}^{(s)} + \frac{(\alpha\beta)^s}{\alpha^s - \beta^s} (\beta^{sn-s} - \alpha^{sn-s}) \\ &= j_{k,s} J_{k,n}^{(s)} - \frac{(\alpha\beta)^s}{\alpha^s - \beta^s} (\alpha^{sn-s} - \beta^{sn-s}) \\ &= j_{k,s} J_{k,n}^{(s)} - (\alpha\beta)^s \left(\frac{\alpha^{s(n-1)} - \beta^{s(n-1)}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \end{aligned}$$

bulunur. $\alpha\beta = -2$ ve $J_{k,n-1}^{(s)} = \frac{(\alpha^s)^{n-1} - (\beta^s)^{n-1}}{\alpha^s - \beta^s}$ olduğundan

$$J_{k,n+1}^{(s)} = j_{k,s} J_{k,n}^{(s)} - (-2)^s J_{k,n-1}^{(s)}$$

elde edilir. Burada yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayılarının yineleme (rekürans) bağıntısı k –Jacobsthal-Lucas sayılarına da bağlıdır. ■

Teorem 4.5.4. k –Jacobsthal sayıları için aşağıda verilen genelleştirilmiş yineleme (rekürans) benzeri bağıntıyı sağlar. $m = 0, 1, \dots, r-1$ için

$$J_{k,(n+1)r+m} = j_s j_{sn+\tau} - (-2)^s j_{s(n-1)+\tau}$$

dir.

İspat. k –Jacobsthal sayılarının Binet formülü ile

$$\begin{aligned}
J_{k,(n+1)r+m} &= \frac{\alpha^{(n+1)r+m} - \beta^{(n+1)r+m}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{nr+r+m} - \beta^{nr+r+m}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{nr+m}\alpha^r - \beta^{nr+m}\beta^r}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^{nr+m}\alpha^r - \beta^{nr+m}\beta^r + \beta^{nr+m}\alpha^r - \beta^{nr+m}\alpha^r}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^r(\alpha^{nr+m} - \beta^{nr+m}) - \beta^{nr+m}\beta^r + \beta^{nr+m}\alpha^r}{\alpha - \beta} \\
&= \alpha^r J_{k,nr+m} + \frac{\beta^{nr+m}\alpha^r - \beta^{nr+m}\beta^r}{\alpha - \beta} \\
&= (\alpha^r + \beta^r - \beta^r)J_{k,nr+m} + \frac{\beta^{nr+m}\alpha^r - \beta^{nr+m}\beta^r}{\alpha - \beta} \\
&= j_{k,r}J_{k,nr+m} + \frac{\beta^{nr+m}\alpha^r - \beta^{nr+m}\beta^r - \alpha^{nr+m}\beta^r + \beta^{nr+m}\beta^r}{\alpha - \beta} \\
&= j_{k,r}J_{k,nr+m} + \frac{\beta^{nr+m}\alpha^r - \alpha^{nr+m}\beta^r}{\alpha - \beta} \\
&= j_{k,r}J_{k,nr+m} + \frac{(\alpha\beta)^r(\beta^{nr+m-r} - \alpha^{nr+m-r})}{\alpha - \beta}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\alpha\beta = -2$ olduğundan

$$J_{k,(n+1)r+m} = j_{k,r}J_{k,nr+m} - (-2)^r J_{k,n(r-1)+m}$$

elde edilir. ■

Önerme 4.5.5. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayıları, n ve s nin negatif durumları için aşağıdaki eşitlikleri sağlar. Her $n, s \geq 0$ için,

- i) $J_{k,-n}^{(s)} = -(-2)^{-ns} J_{k,n}^{(s)}$,
- ii) $J_{k,-n}^{(-s)} = -(-2)^s J_{k,n}^{(s)}$,
- iii) $J_{k,n}^{(-s)} = (-2)^{s(1-n)} J_{k,n}^{(s)}$.

İspat. i)

$$J_{k,-n}^{(s)} = \frac{\alpha^{-sn} - \beta^{-sn}}{\alpha^s - \beta^s} = \left(\frac{1}{\alpha^{sn}} - \frac{1}{\beta^{sn}} \right) = \left(\frac{\beta^{sn} - \alpha^{sn}}{(\alpha\beta)^{sn}} \right) \left(\frac{1}{\alpha^s - \beta^s} \right) = -(a\beta)^{-sn} \left(\frac{\alpha^{sn} - \beta^{sn}}{\alpha^s - \beta^s} \right)$$

bulunur.

$$\alpha\beta = -2 \text{ ve } J_{k,n}^{(s)} = \frac{(\alpha^s)^n - (\beta^s)^n}{\alpha^s - \beta^s} \text{ olduğundan}$$

$$J_{k,-n}^{(s)} = -(-2)^{-sn} J_{k,n}^{(s)}$$

eşitliği elde edilir.

ii)

$$J_{k,-n}^{(-s)} = \frac{\alpha^{sn} - \beta^{sn}}{\alpha^{-s} - \beta^{-s}} = \frac{\alpha^{sn} - \beta^{sn}}{\frac{1}{\alpha^s} - \frac{1}{\beta^s}} = (a\beta)^s \frac{\alpha^{sn} - \beta^{sn}}{\beta^s - \alpha^s}$$

bulunur.

$$a\beta = -2 \text{ ve } J_{k,n}^{(s)} = \frac{(\alpha^s)^n - (\beta^s)^n}{\alpha^s - \beta^s} \text{ olduğundan}$$

$$J_{k,-n}^{(-s)} = -(-2)^{-s} J_{k,n}^{(s)}$$

eşitliği elde edilir.

iii)

$$J_{k,n}^{(-s)} = \frac{\alpha^{-sn} - \beta^{-sn}}{\alpha^{-s} - \beta^{-s}} = \frac{\frac{1}{\alpha^{sn}} - \frac{1}{\beta^{sn}}}{\frac{1}{\alpha^s} - \frac{1}{\beta^s}} = (a\beta)^{s-sn} \frac{\beta^{sn} - \alpha^{sn}}{\beta^s - \alpha^s}$$

bulunur.

$$a\beta = -2 \text{ ve } J_{k,n}^{(s)} = \frac{(\alpha^s)^n - (\beta^s)^n}{\alpha^s - \beta^s} \text{ olduğundan}$$

$$J_{k,n}^{(-s)} = (-2)^{s(1-n)} J_{k,n}^{(s)}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.5.6 Yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayılarının ilk n terim toplamı

$$\sum_{i=0}^n J_{k,i}^{(s)} = \frac{1}{J_{k,s}} \left(\frac{J_{k,s} - J_{k,(s+1)i} + (-2)^s J_{k,ns}}{1 - j_{k,s} + (-2)^s} \right)$$

dir.

İspat.

$$\sum_{i=0}^n J_{k,i}^{(s)} = \sum_{i=0}^n \frac{J_{k,is}}{J_{k,s}} = \frac{1}{J_{k,s}} \sum_{i=0}^n J_{k,is}$$

dır.

$$\sum_{p=0}^n J_{k,pi} = \frac{J_{k,i} - J_{k,(n+1)i} + (-2)^i J_{k,ni}}{1 - j_{k,i} + (-2)^i}$$

eşitliği gereğince (Uygun vd., 2016),

$$\sum_{i=0}^n J_{k,i}^{(s)} = \frac{1}{J_{k,s}} \left(\frac{J_{k,s} - J_{k,(s+1)i} + (-2)^s J_{k,ns}}{1 - j_{k,s} + (-2)^s} \right)$$

elde edilir. ■

Teorem 4.5.7. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayılarının terimleri arasındaki limit değeri

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{k,n+1}^{(s)}}{J_{k,n}^{(s)}} = \alpha^s$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{k,n+1}^{(s)}}{J_{k,n}^{(s)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha^s)^{n+1} - (\beta^s)^{n+1}}{\alpha^s - \beta^s} \frac{\alpha^s - \beta^s}{(\alpha^s)^n - (\beta^s)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha^s)^{n+1} - (\beta^s)^{n+1}}{(\alpha^s)^n - (\beta^s)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha^s)^{n+1} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{sn+s} \right)}{(\alpha^s)^n \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{sn} \right)} \end{aligned}$$

$|\beta| < \alpha$ olduğu için $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^n = 0$ dir. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{k,n+1}^{(s)}}{J_{k,n}^{(s)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha^s)^{n+1}}{(\alpha^s)^n} = \alpha^s$$

bulunur. ■

Teorem 4.5.8. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_{k,n}^{(s)} x^n = \frac{x}{1 - j_{k,s}x + (-2)^s x^2}.$$

dır.

İspat.

$$G_{kJ}(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} J_{k,n}^{(s)} x^n$$

olsun. Buradan

$$G_{kJ} = J_{k,0}^{(s)} + J_{k,1}^{(s)}x + J_{k,2}^{(s)}x^2 + \dots + J_{k,n}^{(s)}x^n + \dots \quad (4.24)$$

dir. Buradan (4.24) eşitliğinin her iki tarafı $-j_{k,s}x$ ve $(-2)^s x^2$ ile çarpılırsa

$$-j_{k,s}x G_{kJ} = -j_{k,s}x J_{k,0}^{(s)} - j_{k,s}x^2 J_{k,1}^{(s)} - j_{k,s}x^3 J_{k,2}^{(s)} - \dots - j_{k,s}x^{n+1} J_{k,n}^{(s)} + \dots \quad (4.25)$$

ve

$$(-2)^s x^2 G_{kJ} = (-2)^s x^2 J_{k,0}^{(s)} + (-2)^s x^3 J_{k,1}^{(s)} + (-2)^s x^4 J_{k,2}^{(s)} + \dots + (-2)^s x^n J_{k,n}^{(s)} + \dots \quad (4.26)$$

elde edilir. Buradan (4.24), (4.25) ve (4.26) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayıların yineleme (rekürans) bağıntısına göre

$$G_{kJ} - j_{k,s} x G_{kJ} + (-2)^s x^2 G_{kJ} = J_{k,0}^{(s)} + J_{k,1}^{(s)} x - x J_{k,0}^{(s)} j_{k,s}$$

olmak üzere

$$G_{kJ} (1 - j_{k,s} x + (-2)^s x^2) = J_{k,0}^{(s)} + J_{k,1}^{(s)} x - x J_{k,0}^{(s)} j_{k,s}$$

elde edilir. Burada $J_{k,1}^{(s)} = 1$ ve $J_{k,0}^{(s)} = 0$ olduğu için, sonuç olarak

$$G_{kJ}(x, s) = \frac{x}{1 - j_{k,s} x + (-2)^s x^2}$$

bulunur. ■

Teorem 4.5.9. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayılarının üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_{k,n}^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \frac{e^{\alpha^s x} - e^{\beta^s x}}{\alpha^s - \beta^s}$$

dır.

İspat.

$$H_{kJ}(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} J_{k,n}^{(s)} \frac{x^n}{n!}$$

olsun. Buradan $J_{k,n}^{(s)}$ nin Binet formülüne göre,

$$H_{kJ}(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\alpha^s)^n - (\beta^s)^n}{\alpha^s - \beta^s} \right) \frac{x^n}{n!}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} H_{kJ}(x, s) &= \frac{1}{\alpha^s - \beta^s} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{ns} x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{ns} x^n}{n!} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha^s - \beta^s} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^s x)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta^s x)^n}{n!} \right] \end{aligned}$$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ olduğundan

$$H_{kJ}(x, s) = \frac{e^{\alpha^s x} - e^{\beta^s x}}{\alpha^s - \beta^s}$$

bulunur. ■

Teorem 4.5.10. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayılarının üreteç ve üstel üreteç fonksiyonlarının x göre türevleri

$$\text{i)} \quad G_{kJ}'(x) = \frac{1-x^2(-2)^s}{(1-j_s x + (-2)^s x^2)^2},$$

$$\text{ii)} \quad H_{kJ}'(x) = \frac{e^{\alpha^s x} \alpha^s - e^{b^s x} b^s}{\alpha^s - b^s}$$

dır.

İspat.

i)

$$G_{kJ}(x, s) = \frac{x}{1 - j_{k,s}x + (-2)^s x^2}$$

dır. Buradan x göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} G_{kJ}'(x) &= \frac{(1 - j_{k,s}x + (-2)^s x^2) - x(-j_{k,s} + 2x(-2)^s)}{(1 - j_s x + (-2)^s x^2)^2} \\ &= \frac{1 - j_{k,s}x + (-2)^s x^2 + x j_{k,s} - 2x^2(-2)^s}{(1 - j_s x + (-2)^s x^2)^2} = \frac{1 - x^2(-2)^s}{(1 - j_s x + (-2)^s x^2)^2} \end{aligned}$$

dır.

ii)

$$H_{kJ}(x, s) = \frac{e^{\alpha^s x} - e^{b^s x}}{\alpha^s - b^s}$$

dır. Buradan x göre türev alınırsa

$$H_{kJ}'(x) = \frac{e^{\alpha^s x} \alpha^s - e^{b^s x} b^s}{\alpha^s - b^s}$$

dir. ■

Şimdi ise, tamsayı dizileri için önemli olan Cassini, Catalan, d'Ocagne, Vajda ve Honsberger özdeşlikleri yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayıları için hesaplanacaktır. Bu özdeşliklerin tümünün ispatında yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayılarının Binet formülü kullanılmıştır.

Teorem 4.5.11. (Cassini Özdeşliği) Her $n \geq 1$ için yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayıları

$$J_{k,n-1}^{(s)} J_{k,n+1}^{(s)} - \left(J_{k,n}^{(s)}\right)^2 = -(-2)^{s(n-1)}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned}
& J_{k,n-1}^{(s)} J_{k,n+1}^{(s)} - \left(J_{k,n}^{(s)} \right)^2 \\
&= \left(\frac{(\alpha^s)^{n-1} - (\beta^s)^{n-1}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \left(\frac{(\alpha^s)^{n+1} - (\beta^s)^{n+1}}{\alpha^s - \beta^s} \right) - \left(\frac{(\alpha^s)^n - (\beta^s)^n}{\alpha^s - \beta^s} \right) \left(\frac{(\alpha^s)^n - (\beta^s)^n}{\alpha^s - \beta^s} \right) \\
&= \frac{-\alpha^{sn-s} \beta^{sn+s} - \beta^{sn-s} \alpha^{sn+s} + 2\alpha^{sn} \beta^{sn}}{(\alpha^s - \beta^s)^2} = \frac{\alpha^{sn} \beta^{sn} \left(2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^s - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^s \right)}{(\alpha^s - \beta^s)^2} \\
&= \frac{(\alpha\beta)^{sn} - (\alpha^s - \beta^s)^2}{(\alpha\beta)^s (\alpha^s - \beta^s)^2}
\end{aligned}$$

bulunur.

$\alpha\beta = -2$ olduğundan

$$J_{k,n-1}^{(s)} J_{k,n+1}^{(s)} - \left(J_{k,n}^{(s)} \right)^2 = -(-2)^{s(n-1)}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.5.12. (Catalan Özdeşliği) Her $n \geq t$ için yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayıları

$$J_{k,n-t}^{(s)} J_{k,n+t}^{(s)} - \left(J_{k,n}^{(s)} \right)^2 = -(-2)^{s(n-t)} J_{k,t}^{(s)}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned}
& J_{k,n-t}^{(s)} J_{k,n+t}^{(s)} - \left(J_{k,n}^{(s)} \right)^2 \\
&= \left(\frac{(\alpha^s)^{n-t} - (\beta^s)^{n-t}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \left(\frac{(\alpha^s)^{n+t} - (\beta^s)^{n+t}}{\alpha^s - \beta^s} \right) - \left(\frac{(\alpha^s)^n - (\beta^s)^n}{\alpha^s - \beta^s} \right) \left(\frac{(\alpha^s)^n - (\beta^s)^n}{\alpha^s - \beta^s} \right) \\
&= \frac{\alpha^{2sn} - \alpha^{sn-st} \beta^{sn+st} - \beta^{sn-st} \alpha^{sn+st} + \beta^{2sn} + 2\alpha^{sn} \beta^{sn}}{(\alpha^s - \beta^s)^2} \\
&= \frac{\alpha^{sn} \beta^{sn} \left(2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{st} - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{st} \right)}{(\alpha^s - \beta^s)^2} = \frac{(\alpha\beta)^{sn} - (\alpha^{st} - \beta^{st})^2}{(\alpha\beta)^{st} (\alpha^s - \beta^s)^2} \\
&= \frac{(\alpha\beta)^{sn-st} - (\alpha^{st} - \beta^{st})^2}{(\alpha^s - \beta^s)^2} = -(\alpha\beta)^{sn-st} \left(\frac{\alpha^{st} - \beta^{st}}{\alpha^s - \beta^s} \right)^2
\end{aligned}$$

bulunur.

$\alpha\beta = -2$ olduğundan

$$J_{k,n-t}^{(s)} J_{k,n+t}^{(s)} - \left(J_{k,n}^{(s)} \right)^2 = -(-2)^{s(n-t)} \left(J_{k,t}^{(s)} \right)^2$$

elde edilir. ■

Burada $t = 1$ alındığında Cassini özdeşliği elde edilir.

Teorem 4.5.13. (d'Ocagne Özdeşliği) Her n, m tamsayıları için yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayıları

$$J_{k,m}^{(s)} J_{k,n+1}^{(s)} - J_{k,m+1}^{(s)} J_{k,n}^{(s)} = (-2)^{sn} J_{k,m-n}^{(s)}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned} & J_{k,m}^{(s)} J_{k,n+1}^{(s)} - J_{k,m+1}^{(s)} J_{k,n}^{(s)} \\ &= \left(\frac{(\alpha^s)^m - (\beta^s)^m}{\alpha^s - \beta^s} \right) \left(\frac{(\alpha^s)^{n+1} - (\beta^s)^{n+1}}{\alpha^s - \beta^s} \right) - \left(\frac{(\alpha^s)^{m+1} - (\beta^s)^{m+1}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \left(\frac{(\alpha^s)^n - (\beta^s)^n}{\alpha^s - \beta^s} \right) \\ &= \frac{-\alpha^{sm} \beta^{sn+s} - \beta^{sm} \alpha^{sn+s} + \alpha^{sm+s} \beta^{sn} + \beta^{sm+s} \alpha^{sn}}{(\alpha^s - \beta^s)^2} \\ &= \frac{\alpha^{sm} \beta^{sn} (\alpha^s - \beta^s) - \alpha^{sn} \beta^{sm} (\alpha^s - \beta^s)}{(\alpha^s - \beta^s)^2} = \frac{(\alpha^s - \beta^s) (\alpha^{sm} \beta^{sn} - \alpha^{sn} \beta^{sm})}{(\alpha^s - \beta^s)^2} \\ &= \frac{(\alpha \beta)^{sn} (\alpha^{sm-sn} - \beta^{sm-sn})}{(\alpha^s - \beta^s)} = (-2)^{sn} J_{k,m-n}^{(s)} \end{aligned}$$

dir. ■

Teorem 4.5.14. (Vajda Özdeşliği) Her n, i, j tamsayıları için yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayıları

$$J_{k,n+i}^{(s)} J_{k,n+j}^{(s)} - J_{k,n}^{(s)} J_{k,n+i+j}^{(s)} = (-2)^{sn} J_{k,j}^{(s)} J_{k,i}^{(s)}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned} & J_{k,n+i}^{(s)} J_{k,n+j}^{(s)} - J_{k,n}^{(s)} J_{k,n+i+j}^{(s)} \\ &= \left(\frac{(\alpha^s)^{n+i} - (\beta^s)^{n+i}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \left(\frac{(\alpha^s)^{n+j} - (\beta^s)^{n+j}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \\ &\quad - \left(\frac{(\alpha^s)^n - (\beta^s)^n}{\alpha^s - \beta^s} \right) \left(\frac{(\alpha^s)^{n+i+j} - (\beta^s)^{n+i+j}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \\ &= \frac{-\alpha^{sn+si} \beta^{sn+sj} - \beta^{sn+si} \alpha^{sn+sj} + \alpha^{sn} \beta^{sn+si+sj} + \beta^{sn} \alpha^{sn+si+sj}}{(\alpha^s - \beta^s)^2} \\ &= \frac{\alpha^{sn+si} \beta^{sn} (\alpha^{sj} - \beta^{sj}) - \alpha^{sn} \beta^{sn+si} (\alpha^{sj} - \beta^{sj})}{(\alpha^s - \beta^s)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\alpha^{sj} - \beta^{sj})(\alpha^{sn+si}\beta^{sn} - \alpha^{sn}\beta^{sn+si})}{(\alpha^s - \beta^s)^2} \\
&= \frac{(\alpha^{sj} - \beta^{sj})\alpha^{sn}\beta^{sn}(\alpha^{si} - \beta^{si})}{(\alpha^s - \beta^s)^2} \\
&= (-2)^{sn}J_{k,j}^{(s)}J_{k,i}^{(s)}
\end{aligned}$$

dir. ■

Teorem 4.5.15. (Honsberger Özdeşliği) Her n, m tamsayıları için yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayıları

$$\begin{aligned}
&J_{k,m-1}^{(s)}J_{k,n}^{(s)} + J_{k,m}^{(s)}J_{k,n+1}^{(s)} \\
&= \frac{\alpha^{sm+sn-s}(1 + \alpha^{2s}) + \beta^{sm+sn-s}(1 + \beta^{2s}) - (1 + (-2)^s)(\alpha^{sm-s}\beta^{sn} + \alpha^{sn}\beta^{sm-s})}{(\alpha^s - \beta^s)^2}
\end{aligned}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned}
&J_{k,m-1}^{(s)}J_{k,n}^{(s)} + J_{k,m}^{(s)}J_{k,n+1}^{(s)} \\
&= \left(\frac{(\alpha^s)^{m-1} - (\beta^s)^{m-1}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \left(\frac{(\alpha^s)^n - (\beta^s)^n}{\alpha^s - \beta^s} \right) + \left(\frac{(\alpha^s)^m - (\beta^s)^m}{\alpha^s - \beta^s} \right) \left(\frac{(\alpha^s)^{n+1} - (\beta^s)^{n+1}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \\
&= \frac{\alpha^{sm+sn-s} - \alpha^{sm-s}\beta^{sn} - \beta^{sm-s}\alpha^{sn} + \beta^{sm-s+sn}}{(\alpha^s - \beta^s)^2} \\
&\quad + \frac{\alpha^{sm+sn+s} - \alpha^{sm}\beta^{sn+s} - \beta^{sm}\alpha^{sn+s} + \beta^{sm+sn+s}}{(\alpha^s - \beta^s)^2} \\
&= \frac{\alpha^{sm+sn-s}(1 + \alpha^{2s}) + \beta^{sm+sn-s}(1 + \beta^{2s})}{(\alpha^s - \beta^s)^2} \\
&\quad - \frac{\alpha^{sm-s}\beta^{sn}(1 + \alpha^s\beta^s) + \alpha^{sn}\beta^{sm-s}(1 + \alpha^s\beta^s)}{(\alpha^s - \beta^s)^2} \\
&= \frac{\alpha^{sm+sn-s}(1 + \alpha^{2s}) + \beta^{sm+sn-s}(1 + \beta^{2s}) - (1 + (-2)^s)(\alpha^{sm-s}\beta^{sn} + \alpha^{sn}\beta^{sm-s})}{(\alpha^s - \beta^s)^2}
\end{aligned}$$

dir. ■

4.6. Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal Sayılarının Kuaterniyonları

Bu bölümde bileşenleri yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayıları olan kuaterniyonlar tanımlanmıştır. İlk olarak bu sayıların kuaterniyon özellikleri verilmiştir. Daha sonra bu kuaterniyonların sayı dizisi olarak yineleme (rekürans) bağıntısı tanımlanacak ve sayı dizisi özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.6.1. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal kuaterniyonları $OJ_{k,n}^{(s)}$ ile gösterilir ve aşağıda verilen eşitlik ile tanımlanır.

$$OJ_{k,n}^{(s)} = J_{k,n}^{(s)} + J_{k,n+1}^{(s)}\mathfrak{i} + J_{k,n+2}^{(s)}\mathfrak{j} + J_{k,n+3}^{(s)}\mathfrak{k}. \quad (4.27)$$

Burada, $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ kuaterniyon birimler ve $J_{k,n}^{(s)}$ yüksek mertebeden k –Jacobsthal sayıdır.

Dikkat edilirse, $k = 1$ alındığında yüksek mertebeden Jacobsthal kuaterniyonları, $s = 1, k = 1$ alındığında ise Jacobsthal kuaterniyonları elde edilir.

Tanım 4.6.2. (4.27) eşitliğinde verilen yüksek mertebeden k –Jacobsthal kuaterniyonlarının gerçel kısmı $Re(OJ_{k,n}^{(s)})$ ile gösterilir ve

$$Re(OJ_{k,n}^{(s)}) = J_{k,n}^{(s)}$$

dir.

Vektörel kısmı ise $Vec(OJ_{k,n}^{(s)}) = v$ ile gösterilsin ve

$$Vec(OJ_{k,n}^{(s)}) = v = J_{k,n+1}^{(s)}\mathfrak{i} + J_{k,n+2}^{(s)}\mathfrak{j} + J_{k,n+3}^{(s)}\mathfrak{k}.$$

Buradan

$$OJ_{k,n}^{(s)} = J_{k,n}^{(s)} + v$$

olarak yazılabilir.

Tanım 4.6.3. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal kuaterniyonlarının eşleniği

$$OJ_{k,n}^{(s)*} = J_{k,n}^{(s)} - J_{k,n+1}^{(s)}\mathfrak{i} - J_{k,n+2}^{(s)}\mathfrak{j} - J_{k,n+3}^{(s)}\mathfrak{k} \quad (4.28)$$

ile tanımlanır.

Teorem 4.6.4. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal kuaterniyonlarının normu

$$N(OJ_{k,n}^{(s)}) = \sqrt{J_{k,n}^{(s)2} + J_{k,n+1}^{(s)2} + J_{k,n+2}^{(s)2} + J_{k,n+3}^{(s)2}}$$

dir.

İspat. Norm tanımından,

$$\begin{aligned} N(OJ_{k,n}^{(s)})^2 &= OJ_{k,n}^{(s)*} OJ_{k,n}^{(s)} \\ &= (J_{k,n}^{(s)} - J_{k,n+1}^{(s)}\mathfrak{i} - J_{k,n+2}^{(s)}\mathfrak{j} - J_{k,n+3}^{(s)}\mathfrak{k})(J_{k,n}^{(s)} + J_{k,n+1}^{(s)}\mathfrak{i} + J_{k,n+2}^{(s)}\mathfrak{j} + J_{k,n+3}^{(s)}\mathfrak{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= J_{k,n}^{(s)2} + J_{k,n}^{(s)} J_{k,n+1}^{(s)} \mathbb{I} + J_{k,n}^{(s)} J_{k,n+2}^{(s)} \mathbb{J} + J_{k,n}^{(s)} J_{k,n+3}^{(s)} \mathbb{K} - J_{k,n+1}^{(s)} J_{k,n}^{(s)} \mathbb{I} + J_{k,n+1}^{(s)2} \\
&\quad - J_{k,n+1}^{(s)} J_{k,n+2}^{(s)} \mathbb{K} + J_{k,n+1}^{(s)} J_{k,n+3}^{(s)} \mathbb{J} - J_{k,n+2}^{(s)} J_{k,n}^{(s)} \mathbb{J} + J_{k,n+2}^{(s)} J_{k,n+1}^{(s)} \mathbb{K} \\
&\quad + J_{k,n+2}^{(s)2} - J_{k,n+2}^{(s)} J_{k,n+3}^{(s)} \mathbb{I} - J_{k,n+3}^{(s)} J_{k,n}^{(s)} \mathbb{K} - J_{k,n+3}^{(s)} J_{k,n+1}^{(s)} \mathbb{J} \\
&\quad + J_{k,n+3}^{(s)} J_{k,n+2}^{(s)} \mathbb{I} + J_{k,n+3}^{(s)2} \\
&= J_{k,n}^{(s)2} + J_{k,n+1}^{(s)2} + J_{k,n+2}^{(s)2} + J_{k,n+3}^{(s)2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$N(OJ_{k,n}^{(s)}) = \sqrt{J_{k,n}^{(s)2} + J_{k,n+1}^{(s)2} + J_{k,n+2}^{(s)2} + J_{k,n+3}^{(s)2}}$$

dir. ■

Kuaterniyonlarda üç farklı birim $\mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{K}$ bulunduğundan, bu birimlerin her birine karşılık gelecek şekilde üç farklı eşlenik tanımlanabilir. Buna göre aşağıdaki tanım verilmektedir.

Tanım 4.6.5. $OJ_{k,n}^{(s)}$ nin $\mathbb{I}$ ye göre eşleniği $OJ_n^{(s)*, \mathbb{I}}$ ile gösterilir ve

$$OJ_{k,n}^{(s)*, \mathbb{I}} = J_{k,n}^{(s)} - J_{k,n+1}^{(s)} \mathbb{I} + J_{k,n+2}^{(s)} \mathbb{J} + J_{k,n+3}^{(s)} \mathbb{K} \quad (4.29)$$

formundadır. $OJ_{k,n}^{(s)}$ nin $\mathbb{J}$ ye göre eşleniği $OJ_n^{(s)*, \mathbb{J}}$ ile gösterilir ve

$$OJ_{k,n}^{(s)*, \mathbb{J}} = J_{k,n}^{(s)} + J_{k,n+1}^{(s)} \mathbb{I} - J_{k,n+2}^{(s)} \mathbb{J} + J_{k,n+3}^{(s)} \mathbb{K} \quad (4.30)$$

formundadır. $OJ_{k,n}^{(s)}$ nin $\mathbb{K}$ ye göre eşleniği $OJ_n^{(s)*, \mathbb{K}}$ ile gösterilir ve

$$OJ_{k,n}^{(s)*, \mathbb{K}} = J_{k,n}^{(s)} + J_{k,n+1}^{(s)} \mathbb{I} + J_{k,n+2}^{(s)} \mathbb{J} - J_{k,n+3}^{(s)} \mathbb{K} \quad (4.31)$$

formundadır.

Aşağıda verilen teorem ile bu verilen üç eşleniğe göre norm-benzerleri hesaplanmıştır.

$OJ_{k,n}^{(s)*, \mathbb{I}}$ nin norm-benzeri $N^{\mathbb{I}}(OJ_{k,n}^{(s)})$, $OJ_{k,n}^{(s)*, \mathbb{J}}$ nin norm-benzeri $N^{\mathbb{J}}(OJ_{k,n}^{(s)})$ ve $OJ_{k,n}^{(s)*, \mathbb{K}}$ nin norm-benzeri $N^{\mathbb{K}}(OJ_{k,n}^{(s)})$ ile gösterilsin. Buna göre,

Teorem 4.6.6. $OJ_{k,n}^{(s)}$ nin norm-benzerleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned}
\text{i) } \quad \left(N^{\mathbb{I}}(OJ_{k,n}^{(s)}) \right)^2 &= J_{k,n}^{(s)2} + J_{k,n+1}^{(s)2} - J_{k,n+2}^{(s)2} - J_{k,n+3}^{(s)2} + 2\mathbb{J} \left(J_{k,n}^{(s)} J_{k,n+2}^{(s)} + J_{k,n+2}^{(s)} J_{k,n+3}^{(s)} \right) \\
&\quad + 2\mathbb{K} \left(J_{k,n}^{(s)} J_{k,n+3}^{(s)} + J_{k,n+1}^{(s)} J_{k,n+2}^{(s)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii)} \quad \left(N^{\mathfrak{I}} \left(OJ_{k,n}^{(s)} \right) \right)^2 &= J_{k,n}^{(s)2} - J_{k,n+1}^{(s)2} + J_{k,n+2}^{(s)2} - J_{k,n+3}^{(s)2} + 2\mathfrak{I} \left(J_{k,n}^{(s)} J_{k,n+1}^{(s)} - J_{k,n+1}^{(s)} J_{k,n+3}^{(s)} \right) \\
&\quad + 2\mathbb{K} \left(J_{k,n}^{(s)} J_{k,n+3}^{(s)} + J_{k,n+1}^{(s)} J_{k,n+2}^{(s)} \right), \\
\text{iii)} \quad \left(N^{\mathbb{K}} \left(OJ_{k,n}^{(s)} \right) \right)^2 &= J_{k,n}^{(s)2} - J_{k,n+1}^{(s)2} - J_{k,n+2}^{(s)2} + J_{k,n+3}^{(s)2} + 2\mathfrak{I} \left(J_{k,n}^{(s)} J_{k,n+1}^{(s)} - J_{k,n+2}^{(s)} J_{k,n+3}^{(s)} \right) \\
&\quad + 2\mathfrak{J} \left(J_{k,n}^{(s)} J_{k,n+2}^{(s)} + J_{k,n+1}^{(s)} J_{k,n+3}^{(s)} \right).
\end{aligned}$$

İspat. i) Norm tanımından

$$N^{\mathfrak{I}} \left(OJ_{k,n}^{(s)} \right) = \sqrt{OJ_{k,n}^{(s)} OJ_{k,n}^{(s)*, \mathfrak{I}}}$$

dır. Buradan

$$N^{\mathfrak{I}} \left(OJ_{k,n}^{(s)} \right) = \sqrt{\left(J_{k,n}^{(s)} + J_{k,n+1}^{(s)\mathfrak{I}} + J_{k,n+2}^{(s)\mathfrak{J}} + J_{k,n+3}^{(s)\mathbb{K}} \right) \left(J_{k,n}^{(s)} - J_{k,n+1}^{(s)\mathfrak{I}} + J_{k,n+2}^{(s)\mathfrak{J}} + J_{k,n+3}^{(s)\mathbb{K}} \right)}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(N^{\mathfrak{I}} \left(OJ_{k,n}^{(s)} \right) \right)^2 &= \left(J_{k,n}^{(s)} + J_{k,n+1}^{(s)\mathfrak{I}} + J_{k,n+2}^{(s)\mathfrak{J}} + J_{k,n+3}^{(s)\mathbb{K}} \right) \left(J_{k,n}^{(s)} - J_{k,n+1}^{(s)\mathfrak{I}} + J_{k,n+2}^{(s)\mathfrak{J}} + J_{k,n+3}^{(s)\mathbb{K}} \right) \\
&= J_{k,n}^{(s)2} + J_{k,n}^{(s)} J_{k,n+1}^{(s)\mathfrak{I}} - J_{k,n}^{(s)} J_{k,n+2}^{(s)\mathfrak{J}} + J_{k,n}^{(s)} J_{k,n+3}^{(s)\mathbb{K}} + J_{k,n+1}^{(s)\mathfrak{I}2} + J_{k,n+1}^{(s)\mathfrak{I}} J_{k,n+2}^{(s)\mathfrak{J}} \\
&\quad - J_{k,n+1}^{(s)\mathfrak{I}} J_{k,n+3}^{(s)\mathbb{K}} + J_{k,n+2}^{(s)\mathfrak{J}2} + J_{k,n+2}^{(s)\mathfrak{J}} J_{k,n+3}^{(s)\mathbb{K}} \\
&\quad - J_{k,n+3}^{(s)\mathbb{K}2} - J_{k,n+3}^{(s)\mathbb{K}} J_{k,n+2}^{(s)\mathfrak{J}} - J_{k,n+3}^{(s)\mathbb{K}} J_{k,n+1}^{(s)\mathfrak{I}} \\
&= J_{k,n}^{(s)2} + J_{k,n+1}^{(s)2} - J_{k,n+2}^{(s)2} - J_{k,n+3}^{(s)2} + 2\mathfrak{I} \left(J_{k,n}^{(s)} J_{k,n+2}^{(s)} + J_{k,n+2}^{(s)} J_{k,n+3}^{(s)} \right) \\
&\quad + 2\mathbb{K} \left(J_{k,n}^{(s)} J_{k,n+3}^{(s)} + J_{k,n+1}^{(s)} J_{k,n+2}^{(s)} \right)
\end{aligned}$$

dir. **ii) ve iii)** benzer şekilde gösterilir. ■

Sonuç 4.6.7. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal kuaterniyonları için aşağıda verilen eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad OJ_{k,n}^{(s)} + OJ_{k,n}^{(s)*, \mathfrak{I}} &= 2 \left(J_{k,n}^{(s)} + J_{k,n+2}^{(s)\mathfrak{J}} + J_{k,n+3}^{(s)\mathbb{K}} \right), \\
\text{ii)} \quad OJ_{k,n}^{(s)} + OJ_{k,n}^{(s)*, \mathfrak{J}} &= 2 \left(J_{k,n}^{(s)} + J_{k,n+1}^{(s)\mathfrak{I}} + J_{k,n+3}^{(s)\mathbb{K}} \right), \\
\text{iii)} \quad OJ_{k,n}^{(s)} + OJ_{k,n}^{(s)*, \mathbb{K}} &= 2 \left(J_{k,n}^{(s)} + J_{k,n+1}^{(s)\mathfrak{I}} + J_{k,n+2}^{(s)\mathfrak{J}} \right), \\
\text{iv)} \quad OJ_{k,n}^{(s)*, \mathfrak{I}} + OJ_{k,n}^{(s)*, \mathfrak{J}} &= 2 \left(J_{k,n}^{(s)} + J_{k,n+3}^{(s)\mathbb{K}} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{v)} \quad OJ_{k,n}^{(s)*, \mathbb{I}} + OJ_{k,n}^{(s)*, \mathbb{K}} &= 2 \left(J_{k,n}^{(s)} + J_{k,n+3}^{(s)} \mathbb{J} \right), \\ \text{vi)} \quad OJ_{k,n}^{(s)*, \mathbb{J}} + OJ_{k,n}^{(s)*, \mathbb{K}} &= 2 \left(J_{k,n}^{(s)} + J_{k,n+3}^{(s)} \mathbb{I} \right). \end{aligned}$$

İspat. (4.29), (4.30) ve (4.31) eşitlikleri kullanarak kolayca görülür. ■

Sonuç 4.6.8. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal kuaterniyonları için

$$OJ_{k,n}^{(s)} + OJ_{k,n}^{(s)*} = 2J_{k,n}^{(s)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Sonuç (4.27) ve (4.28) eşitlikleri kullanılarak gösterilir.

$$\begin{aligned} OJ_{k,n}^{(s)} + OJ_{k,n}^{(s)*} &= J_{k,n}^{(s)} + J_{k,n+1}^{(s)} \mathbb{I} + J_{k,n+2}^{(s)} \mathbb{J} + J_{k,n+3}^{(s)} \mathbb{K} + J_{k,n}^{(s)} - J_{k,n+1}^{(s)} \mathbb{I} - J_{k,n+2}^{(s)} \mathbb{J} - J_{k,n+3}^{(s)} \mathbb{K} \\ &= 2J_{k,n}^{(s)} \end{aligned}$$

dır. ■

Önerme 4.6.9. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal kuaterniyonları için

$$\left(OJ_{k,n}^{(s)} \right)^2 = OJ_{k,n}^{(s)} OJ_{k,n}^{(s)*} + 2J_{k,n}^{(s)} OJ_{k,n}^{(s)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eşitliğin sol tarafı (4.27) kullanılarak yazılırsa

$$\begin{aligned} \left(OJ_{k,n}^{(s)} \right)^2 &= \left(J_{k,n}^{(s)} + J_{k,n+1}^{(s)} \mathbb{I} + J_{k,n+2}^{(s)} \mathbb{J} + J_{k,n+3}^{(s)} \mathbb{K} \right) \left(J_{k,n}^{(s)} + J_{k,n+1}^{(s)} \mathbb{I} + J_{k,n+2}^{(s)} \mathbb{J} + J_{k,n+3}^{(s)} \mathbb{K} \right) \\ &= - \left(\left(J_{k,n}^{(s)} \right)^2 + \left(J_{k,n+1}^{(s)} \right)^2 + \left(J_{k,n+2}^{(s)} \right)^2 + \left(J_{k,n+3}^{(s)} \right)^2 \right) \\ &\quad + 2J_{k,n}^{(s)} \left(J_{k,n}^{(s)} + J_{k,n+1}^{(s)} \mathbb{I} + J_{k,n+2}^{(s)} \mathbb{J} + J_{k,n+3}^{(s)} \mathbb{K} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Teorem 4.6.4 den,

$$\left(OJ_{k,n}^{(s)} \right)^2 = OJ_{k,n}^{(s)} OJ_{k,n}^{(s)*} + 2J_{k,n}^{(s)} OJ_{k,n}^{(s)}$$

elde edilir. ■

Bir sonraki teoremden yüksek mertebeden k –Jacobsthal kuaterniyonlarının terimlerini bulmak için önemli olan Binet formülü verilecektir.

Teorem 4.6.10. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal kuaterniyonlarının Binet formülü

$$OJ_{k,n}^{(s)} = \frac{(\alpha^s)^n \hat{\alpha} - (\beta^s)^n \hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s} \quad (4.32)$$

şeklindedir. Burada,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= (1 + (\alpha^s)^n \mathbb{i} + (\alpha^s)^{n+1} \mathbb{j} + (\alpha^s)^{n+2} \mathbb{k}), \\ \hat{\beta} &= (1 + (\beta^s)^n \mathbb{i} + (\beta^s)^{n+1} \mathbb{j} + (\beta^s)^{n+2} \mathbb{k})\end{aligned}$$

dir.

İspat. (4.27) eşitliğinde $J_{k,n}^{(s)}$ sayılarının Binet formülünü kullanıldığında,

$$\begin{aligned}OJ_{k,n}^{(s)} &= J_{k,n}^{(s)} + J_{k,n+1}^{(s)} \mathbb{i} + J_{k,n+2}^{(s)} \mathbb{j} + J_{k,n+3}^{(s)} \mathbb{k} \\ &= \left(\frac{(\alpha^s)^n - (\beta^s)^n}{\alpha^s - \beta^s} \right) + \left(\frac{(\alpha^s)^{n+1} - (\beta^s)^{n+1}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \mathbb{i} + \left(\frac{(\alpha^s)^{n+2} - (\beta^s)^{n+2}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \mathbb{j} \\ &\quad + \left(\frac{(\alpha^s)^{n+3} - (\beta^s)^{n+3}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \mathbb{k} \\ &= \left(\frac{(\alpha^s)^n}{\alpha^s - \beta^s} \right) (1 + (\alpha^s)^n \mathbb{i} + (\alpha^s)^{n+1} \mathbb{j} + (\alpha^s)^{n+2} \mathbb{k}) \\ &\quad - \left(\frac{(\beta^s)^n}{\alpha^s - \beta^s} \right) (1 + (\beta^s)^n \mathbb{i} + (\beta^s)^{n+1} \mathbb{j} + (\beta^s)^{n+2} \mathbb{k}) \\ &= \frac{(\alpha^s)^n \hat{\alpha}}{\alpha^s - \beta^s} - \frac{(\beta^s)^n \hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s} = \frac{(\alpha^s)^n \hat{\alpha} - (\beta^s)^n \hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s}\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.6.11. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal kuaterniyonları için yineleme (rekürans) bağıntısı

$$OJ_{k,n+1}^{(s)} = j_{k,s} OJ_{k,n}^{(s)} - (-2)^s OJ_{k,n-1}^{(s)}$$

şeklinde verilmiştir.

İspat.

$$OJ_{k,n+1}^{(s)} = \frac{(\alpha^s)^{n+1} \hat{\alpha} - (\beta^s)^{n+1} \hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s} = \frac{\alpha^{sn+s} \hat{\alpha} - \beta^{sn+s} \hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s} = \frac{\alpha^{sn} \alpha^s \hat{\alpha} - \beta^{sn} \beta^s \hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s}$$

dir.

Burada pay kısmına $\beta^{sn} \alpha^s \hat{\beta}$ ifadesi eklenip çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}OJ_{k,n+1}^{(s)} &= \frac{\alpha^{sn} \alpha^s \hat{\alpha} - \beta^{sn} \beta^s \hat{\beta} + \beta^{sn} \alpha^s \hat{\beta} - \beta^{sn} \alpha^s \hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s} \\ &= \frac{\alpha^s (\alpha^{sn} \hat{\alpha} - \beta^{sn} \hat{\beta}) - \beta^{sn} \beta^s + \beta^{sn} \alpha^s}{\alpha^s - \beta^s} \\ &= \alpha^s OJ_{k,n}^{(s)} + \frac{\beta^{sn} \alpha^s - \beta^{sn} \beta^s}{\alpha^s - \beta^s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha^s + \beta^s - \beta^s) OJ_{k,n}^{(s)} + \frac{\beta^{sn} \alpha^s \hat{\beta} - \beta^{sn} \beta^s \hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s} \\
&= (\alpha^s + \beta^s) OJ_{k,n}^{(s)} - \beta^s OJ_{k,n}^{(s)} + \frac{\beta^{sn} \alpha^s \hat{\beta} - \beta^{sn} \beta^s \hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s} \\
&= j_{k,s} OJ_{k,n}^{(s)} + \frac{1}{\alpha^s - \beta^s} (\beta^{sn} \alpha^s \hat{\beta} - \beta^{sn} \beta^s \hat{\beta} - \alpha^{sn} \hat{\alpha} \beta^s + \beta^{sn} \hat{\beta} \beta^s) \\
&= j_{k,s} OJ_{k,n}^{(s)} + \frac{1}{\alpha^s - \beta^s} (\beta^{sn} \alpha^s \hat{\beta} - \alpha^{sn} \hat{\alpha} \beta^s) \\
&= j_{k,s} OJ_{k,n}^{(s)} - \frac{(\alpha\beta)^s}{\alpha^s - \beta^s} (\alpha^{sn-s} \hat{\alpha} - \beta^{sn-s} \hat{\beta}) \\
&= j_{k,s} OJ_{k,n}^{(s)} - (\alpha\beta)^s \left(\frac{\alpha^{s(n-1)} \hat{\alpha} - \beta^{s(n-1)} \hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. $\alpha\beta = -2$ ve $OJ_{k,n-1}^{(s)} = \frac{\alpha^{s(n-1)} \hat{\alpha} - \beta^{s(n-1)} \hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s}$ olduğundan

$$OJ_{k,n+1}^{(s)} = j_{k,s} OJ_{k,n}^{(s)} - (-2)^s OJ_{k,n-1}^{(s)}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.6.12. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal kuaterniyonları, n ve s nin negatif değerleri için aşağıda verilen eşitlikleri sağlar.

- i) $OJ_{k,-n}^{(s)} = -(-2)^{-sn} \frac{(\alpha^s)^n \hat{b} - (\beta^s)^n \hat{a}}{\alpha^s - \beta^s},$
- ii) $OJ_{k,-n}^{(-s)} = (-2)^s OJ_{k,n}^{(s)},$
- iii) $OJ_{k,n}^{(-s)} = (-2)^s OJ_{k,-n}^{(s)}.$

İspat. (4.32) den,

i)

$$OJ_{k,-n}^{(s)} = \frac{(\alpha^s)^{-n} \hat{\alpha} - (\beta^s)^{-n} \hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s} = \frac{\frac{\hat{\alpha}}{\alpha^{sn}} - \frac{\hat{\beta}}{\beta^{sn}}}{\alpha^s - \beta^s} = \frac{(\beta^s)^n \hat{\alpha} - (\alpha^s)^n \hat{\beta}}{(\alpha\beta)^{sn} (\alpha^s - \beta^s)}$$

bulunur.

$\alpha\beta = -2$ olduğundan

$$OJ_{k,-n}^{(s)} = -(-2)^{-sn} \frac{(\alpha^s)^n \hat{b} - (\beta^s)^n \hat{a}}{\alpha^s - \beta^s}$$

elde edilir.

ii)

$$OJ_{k,-n}^{(-s)} = \frac{(\alpha^{-s})^{-n}\hat{\alpha} - (\beta^{-s})^{-n}\hat{\beta}}{\alpha^{-s} - \beta^{-s}} = \frac{(\alpha^s)^n\hat{\alpha} - (\beta^s)^n\hat{\beta}}{\frac{1}{\alpha^s} - \frac{1}{\beta^s}} = (\alpha\beta)^s \frac{(\alpha^s)^n\hat{\alpha} - (\beta^s)^n\hat{\beta}}{\beta^s - \alpha^s}$$

bulunur.

$\alpha\beta = -2$ ve $OJ_{k,n}^{(s)} = \frac{(\alpha^s)^n\hat{\alpha} - (\beta^s)^n\hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s}$ olduğundan

$$OJ_{k,-n}^{(-s)} = (-2)^s OJ_{k,n}^{(s)}$$

elde edilir.

iii)

$$OJ_{k,n}^{(-s)} = \frac{(\alpha^{-s})^n\hat{\alpha} - (\beta^{-s})^n\hat{\beta}}{\alpha^{-s} - \beta^{-s}} = \frac{\frac{\hat{\alpha}}{\alpha^{sn}} - \frac{\hat{\beta}}{\beta^{sn}}}{\frac{1}{\alpha^s} - \frac{1}{\beta^s}} = (\alpha\beta)^{s-sn} \frac{(\beta^s)^n\hat{\alpha} - (\alpha^s)^n\hat{\beta}}{\beta^s - \alpha^s}$$

dir.

$\alpha\beta = -2$ olduğundan

$$OJ_{k,n}^{(-s)} = (-2)^{s-sn} \frac{(\beta^s)^n\hat{\alpha} - (\alpha^s)^n\hat{\beta}}{\beta^s - \alpha^s}$$

elde edilir.

i) den

$$OJ_{k,n}^{(-s)} = (-2)^s OJ_{k,-n}^{(s)}$$

dir. ■

Teorem 4.6.13. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal kuaterniyonları için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} OJ_{k,n}^{(s)} x^n = \frac{OJ_{k,0}^{(s)} + (OJ_{k,1}^{(s)} - j_{k,s} OJ_{k,0}^{(s)})x}{1 - j_{k,s}x + (-2)^s x^2}$$

dır.

İspat.

$$G_{kJq}(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} OJ_{k,n}^{(s)} x^n$$

olsun. Buradan

$$G_{kJq} = OJ_{k,0}^{(s)} + OJ_{k,1}^{(s)}x + OJ_{k,2}^{(s)}x^2 + OJ_{k,3}^{(s)}x^3 + \dots + OJ_{k,n}^{(s)}x^n + \dots \quad (4.33)$$

dir. Burada (4.33) eşitliğin her iki tarafı $-j_{k,s}x$ ve $(-2)^s x^2$ ile çarpılırsa

$$-j_{k,s}x G_{kJq} = -j_{k,s}x OJ_{k,0}^{(s)} - j_{k,s}x^2 OJ_{k,1}^{(s)} - j_{k,s}x^3 OJ_{k,2}^{(s)} - \dots - j_{k,s}x^{n+1} OJ_{k,n}^{(s)} + \dots \quad (4.34)$$

ve

$$\begin{aligned}
(-2)^s x^2 G_{kJq} &= (-2)^s x^2 OJ_{k,0}^{(s)} + (-2)^s x^3 OJ_{k,1}^{(s)} + (-2)^s x^4 OJ_{k,2}^{(s)} + \dots \\
&+ (-2)^s x^n OJ_{k,n}^{(s)} + \dots
\end{aligned} \tag{4.35}$$

elde edilir. Buradan (4.33), (4.34) ve (4.35) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa yüksek mertebeden k –Jacobsthal kuaterniyonlarının yineleme (rekürans) bağıntısına göre

$$G_{kJq} - j_{k,s} x G_{kJq} + (-2)^s x^2 G_{kJq} = OJ_{k,0}^{(s)} + OJ_{k,1}^{(s)} x - j_{k,s} OJ_{k,0}^{(s)} x$$

olmak üzere

$$G_{kJq} (1 - j_{k,s} x + (-2)^s x^2) = OJ_{k,0}^{(s)} + OJ_{k,1}^{(s)} x - j_{k,s} OJ_{k,0}^{(s)} x$$

elde edilir. Böylece

$$G_{kJq}(x, s) = \frac{OJ_{k,0}^{(s)} + (OJ_{k,1}^{(s)} - j_{k,s} OJ_{k,0}^{(s)})x}{1 - j_{k,s} x + (-2)^s x^2}$$

bulunur. ■

Teorem 4.6.14. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal kuaterniyonlarının üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} OJ_{k,n}^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \frac{\hat{\alpha} e^{\alpha^s x} - \hat{\beta} e^{\beta^s x}}{\alpha^s - \beta^s}$$

dir.

İspat. $H_{kJq}(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} OJ_{k,n}^{(s)} \frac{x^n}{n!}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
H_{kJq}(x, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\alpha^s)^n \hat{\alpha} - (\beta^s)^n \hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{\hat{\alpha}}{\alpha^s - \beta^s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^s)^n x^n}{n!} - \frac{\hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta^s)^n x^n}{n!} \\
&= \frac{\hat{\alpha}}{\alpha^s - \beta^s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^s x)^n}{n!} - \frac{\hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta^s x)^n}{n!}
\end{aligned}$$

dir. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ olduğundan

$$H_{kJq}(x, s) = \frac{\hat{\alpha}}{\alpha^s - \beta^s} e^{\alpha^s x} - \frac{\hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s} e^{\beta^s x} = \frac{\hat{\alpha} e^{\alpha^s x} - \hat{\beta} e^{\beta^s x}}{\alpha^s - \beta^s}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.6.15. Her $n, m \in \mathbb{Z}$ için yüksek mertebeden k –Jacobsthal kuaterniyonları için genelleştirilmiş üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} OJ_{k,n+m}^{(s)} x^n = \frac{OJ_{k,m}^{(s)} - (-2)^s OJ_{k,s(m-1)}^{(s)} x}{1 + j_s x + (-2)^s x^2}$$

dir.

İspat. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal kuaterniyonlarının Binet formülü kullanıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} OJ_{k,n+m}^{(s)} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\alpha^s)^{n+m} \hat{a} - (\beta^s)^{n+m} \hat{b}}{\alpha^s - \beta^s} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^s)^{n+m} \hat{a}}{\alpha^s - \beta^s} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta^s)^{n+m} \hat{b}}{\alpha^s - \beta^s} x^n \\ &= \frac{\hat{\alpha} \alpha^{sm}}{\alpha^s - \beta^s} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{sn} x^n - \frac{\hat{\beta} \beta^{sm}}{\alpha^s - \beta^s} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{sn} x^n \\ &= \frac{\hat{\alpha} \alpha^{sm}}{\alpha^s - \beta^s} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^s x)^n - \frac{\hat{\beta} \beta^{sm}}{\alpha^s - \beta^s} \sum_{n=0}^{\infty} (\beta^s x)^n \\ &= \left(\frac{\hat{\alpha} \alpha^{sm}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \left(\frac{1}{1 - \alpha^s x} \right) - \left(\frac{\hat{\beta} \beta^{sm}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \left(\frac{1}{1 - \beta^s x} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\alpha^s - \beta^s} \right) \left[\frac{\hat{\alpha} \alpha^{sm} - \hat{\alpha} \alpha^{sm} \beta^s x - \hat{\beta} \beta^{sm} + \hat{\beta} \beta^{sm} \alpha^s x}{1 - (\alpha^s + \beta^s) x + (\alpha \beta)^s x^2} \right] \\ &= \left(\frac{1}{\alpha^s - \beta^s} \right) \left[\frac{\alpha^{sm} \hat{\alpha} - \hat{\beta} \beta^{sm}}{1 - j_{k,s} x + (-2)^s x^2} - \frac{(\alpha \beta)^s (\hat{\alpha} (\alpha^s)^{m-1} - \hat{\beta} (\beta^s)^{m-1}) x}{1 - j_s x + (-2)^s x^2} \right] \\ &= \left[\frac{OJ_{k,m}^{(s)} - (-2)^s OJ_{k,sm-s}^{(s)} x}{1 - j_s x + (-2)^s x^2} \right] = \frac{OJ_{k,m}^{(s)} - (-2)^s OJ_{k,s(m-1)}^{(s)} x}{1 + j_s x + (-2)^s x^2} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 4.6.16. $\hat{\alpha} = (1 + (\alpha^s)^n \mathbb{i} + (\alpha^s)^{n+1} \mathbb{j} + (\alpha^s)^{n+2} \mathbb{k})$, $\hat{\beta} = (1 + (\beta^s)^n \mathbb{i} + (\beta^s)^{n+1} \mathbb{j} + (\beta^s)^{n+2} \mathbb{k})$ olmak üzere

$$\hat{\alpha} \hat{\beta} = x - yz \quad (4.36)$$

ve

$$\hat{\beta} \hat{\alpha} = x + yz \quad (4.37)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
x &= (1 - (-2)^{sn} - (-2)^{sn+s} - (-2)^{sn+2s} + j_{k,sn}\mathbb{i} + j_{k,sn+s}\mathbb{j} + j_{k,sn+2s}\mathbb{k}), \\
z &= (-2)^{sn+s}\mathbb{i} - (-2)^{sn}j_{k,s}\mathbb{j} + (-2)^{sn}\mathbb{k}, \\
y &= (\alpha^s - \beta^s)
\end{aligned}$$

dir.

İspat. (4.36) eşitliği

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}\hat{\beta} &= (1 + (\alpha^s)^n\mathbb{i} + (\alpha^s)^{n+1}\mathbb{j} + (\alpha^s)^{n+2}\mathbb{k})(1 + (\beta^s)^n\mathbb{i} + (\beta^s)^{n+1}\mathbb{j} + (\beta^s)^{n+2}\mathbb{k}) \\
&= 1 + (\beta^s)^n\mathbb{i} + (\beta^s)^{n+1}\mathbb{j} + (\beta^s)^{n+2}\mathbb{k} + (\alpha^s)^n\mathbb{i} - (\alpha^s)^n(\beta^s)^n + (\alpha^s)^n(\beta^s)^{n+1}\mathbb{k} \\
&\quad - (\alpha^s)^n(\beta^s)^{n+2}\mathbb{j} + (\alpha^s)^{n+1}\mathbb{j} - (\alpha^s)^{n+1}(\beta^s)^n\mathbb{k} - (\alpha^s)^{n+1}(\beta^s)^{n+1} \\
&\quad + (\alpha^s)^{n+1}(\beta^s)^{n+2}\mathbb{i} + (\alpha^s)^{n+2}\mathbb{k} + (\alpha^s)^{n+2}(\beta^s)^n\mathbb{j} \\
&\quad - (\alpha^s)^{n+2}(\beta^s)^{n+1}\mathbb{i} - (\alpha^s)^{n+2}(\beta^s)^{n+2} \\
&= (1 - (-2)^{sn} - (-2)^{sn+s} - (-2)^{sn+2s}) \\
&\quad + (\alpha^{sn} + \beta^{sn} + \alpha^{sn+s}\beta^{sn+2s} - \alpha^{sn+2s}\beta^{sn+s})\mathbb{i} \\
&\quad + (\alpha^{sn+s} + \beta^{sn+s} - \alpha^{sn}\beta^{sn+2s} + \alpha^{sn+2s}\beta^{sn})\mathbb{j} + (\alpha^{sn+2s} + \beta^{sn+2s} \\
&\quad + \alpha^{sn}\beta^{sn+s} - \alpha^{sn+s}\beta^{sn})\mathbb{k} \\
&= (1 - (-2)^{sn} - (-2)^{sn+s} - (-2)^{sn+2s} + j_{k,sn}\mathbb{i} + j_{k,sn+s}\mathbb{j} + j_{k,sn+2s}\mathbb{k}) \\
&\quad - (-2)^{sn+s}(\alpha^s - \beta^s)\mathbb{i} + (-2)^{sn}(\alpha^{2s} - \beta^{2s})\mathbb{j} - (-2)^{sn}(\alpha^s - \beta^s)\mathbb{k} \\
&= (1 - (-2)^{sn} - (-2)^{sn+s} - (-2)^{sn+2s} + j_{k,sn}\mathbb{i} + j_{k,sn+s}\mathbb{j} + j_{k,sn+2s}\mathbb{k}) \\
&\quad - (-2)^{sn}(\alpha^s - \beta^s)((-2)^s\mathbb{i} - (\alpha^s + \beta^s)\mathbb{j} + \mathbb{k}) \\
&= (1 - (-2)^{sn} - (-2)^{sn+s} - (-2)^{sn+2s} + j_{k,sn}\mathbb{i} + j_{k,sn+s}\mathbb{j} + j_{k,sn+2s}\mathbb{k}) \\
&\quad - (\alpha^s - \beta^s)((-2)^{sn+s}\mathbb{i} - (-2)^{sn}j_{k,s}\mathbb{j} + (-2)^{sn}\mathbb{k}) \\
&= x - yz
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde (4.37) nin ispatı yapılır. ■

Teorem 4.6.17. (Vajda Özdeşliği) Her $n, m, r \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$OJ_{k,n+m}^{(s)} OJ_{k,n+r}^{(s)} - OJ_{k,n}^{(s)} OJ_{k,n+m+r}^{(s)} = (-2)^{sn} OJ_{k,m}^{(s)} [OJ_{k,r}^{(s)} x - j_{k,sr}z].$$

İspat. $OJ_{k,n}^{(s)}$ kuaterniyonlarının Binet formülü kullanıldığında,

$$OJ_{k,n+m}^{(s)} OJ_{k,n+r}^{(s)} - OJ_{k,n}^{(s)} OJ_{k,n+m+r}^{(s)}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{(\alpha^s)^{n+m} \hat{\alpha} - (\beta^s)^{n+m} \hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \left(\frac{(\alpha^s)^{n+r} \hat{\alpha} - (\beta^s)^{n+r} \hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \\
&\quad - \left(\frac{(\alpha^s)^n \hat{\alpha} - (\beta^s)^n \hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \left(\frac{(\alpha^s)^{n+m+r} \hat{\alpha} - (\beta^s)^{n+m+r} \hat{\beta}}{\alpha^s - \beta^s} \right) \\
&= \frac{-\alpha^{sn+sm} \hat{\alpha} \beta^{sn+sj} \hat{\beta} - \beta^{sn+si} \hat{\beta} \alpha^{sn+sj} \hat{\alpha} + \alpha^{sn} \hat{\alpha} \beta^{sn+si+sj} \hat{\beta} + \beta^{sn} \hat{\beta} \alpha^{sn+si+sj} \hat{\alpha}}{(\alpha^s - \beta^s)^2} \\
&= \frac{\alpha^{sn} \beta^{sn+sr} \hat{\alpha} \hat{\beta} (\beta^{sm} - \alpha^{sm}) + \alpha^{sn+sr} \beta^{sn} \hat{\beta} \hat{\alpha} (\alpha^{sm} - \beta^{sm})}{(\alpha^s - \beta^s)^2} \\
&= \frac{\alpha^{sn} \beta^{sn} (\alpha^{sm} - \beta^{sm}) (\alpha^{sr} \hat{\beta} \hat{\alpha} - \beta^{sr} \hat{\alpha} \hat{\beta})}{(\alpha^s - \beta^s)^2}
\end{aligned}$$

bulunur. Yardımcı Teorem 4.6.16. den,

$$\begin{aligned}
&OJ_{k,n+m}^{(s)} OJ_{k,n+r}^{(s)} - OJ_{k,n}^{(s)} OJ_{k,n+m+r}^{(s)} \\
&= \frac{(-2)^{ns} (\alpha^{sm} - \beta^{sm}) (\alpha^{sr} (x - yz) - \beta^{sr} (x + yz))}{(\alpha^s - \beta^s)^2} \\
&= \frac{(-2)^{ns} (\alpha^{sm} - \beta^{sm}) (\alpha^{sr} x - \alpha^{sr} yz - \beta^{sr} x - \beta^{sr} yz)}{(\alpha^s - \beta^s)^2} \\
&= \frac{(-2)^{ns} (\alpha^{sm} - \beta^{sm}) ((\alpha^{sr} - \beta^{sr}) x - (\alpha^{sr} + \beta^{sr}) yz)}{(\alpha^s - \beta^s)^2} \\
&= (-2)^{sn} OJ_{k,m}^{(s)} [OJ_{k,r}^{(s)} x - j_{k,sr} z]
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.6.18.(Catalan Özdeşliği) Her $n, r \in \mathbb{Z}$ için.

$$OJ_{k,n-r}^{(s)} OJ_{k,n+r}^{(s)} - \left(OJ_{k,n}^{(s)} \right)^2 = (-2)^{sn} OJ_{k,-r}^{(s)} [OJ_{k,r}^{(s)} x - j_{k,sr} z]$$

dır.

İspat. Teorem 4.6.17. Vajda özdeşliğinde $m = -r$ alınırsa,

$$OJ_{k,n-r}^{(s)} OJ_{k,n+r}^{(s)} - \left(OJ_{k,n}^{(s)} \right)^2 = (-2)^{sn} OJ_{k,-r}^{(s)} [OJ_{k,r}^{(s)} x - j_{k,sr} z]$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.6.19. (Cassini Özdeşliği) Her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$OJ_{k,n-1}^{(s)} OJ_{k,n+1}^{(s)} - \left(OJ_{k,n}^{(s)} \right)^2 = (-2)^{sn} OJ_{k,-1}^{(s)} [OJ_{k,1}^{(s)} x - j_{k,s} z]$$

dır.

İspat. Teorem 4.6.17. Vajda özdeşliğinde $r = 1$ ve $m = -1$ alınırsa,

$$OJ_{k,n-1}^{(s)} OJ_{k,n+1}^{(s)} - \left(OJ_{k,n}^{(s)}\right)^2 = (-2)^{sn} OJ_{k,-1}^{(s)} \left[OJ_{k,1}^{(s)} x - j_{k,s} z \right]$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.6.20. (d'Ocagne Özdeşliği) Her $n, l \in \mathbb{Z}$ için

$$OJ_{k,l}^{(s)} OJ_{k,n+1}^{(s)} - OJ_{k,n}^{(s)} OJ_{k,l+1}^{(s)} = (-2)^{sn} OJ_{k,l-n}^{(s)} \left[OJ_{k,1}^{(s)} x - j_{k,s} z \right]$$

dır.

İspat. Teorem 4.6.17. Vajda özdeşliğinde $m + n = l$ ve $r = 1$ alınırsa ,

$$OJ_{k,l}^{(s)} OJ_{k,n+1}^{(s)} - OJ_{k,n}^{(s)} OJ_{k,l+1}^{(s)} = (-2)^{sn} OJ_{k,l-n}^{(s)} \left[OJ_{k,1}^{(s)} x - j_{k,s} z \right]$$

elde edilir. ■

4.7. Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Sayıları

Bu bölümde yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayıları tanımlanacaktır ve bu sayıların sayı dizisi özellikleri incelenecektir. Bu dizilerin yineleme (rekürans) bağıntısı, Binet formülü, üreteç fonksiyonları, toplam formülleri ve özdeşlikleri hesaplanacaktır.

Tanım 4.7.1. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayılar

$$s_{k,n}^{(t)} = \frac{s_{k,nt}}{s_{k,t}}$$

ile tanımlanır.

Tanım 4.7.2. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayılarının Binet tipli formülü

$$s_{k,n}^{(t)} = \frac{(\alpha_1^t)^n + (\alpha_2^t)^n}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}$$

ile verilir. Dikkat edilirse,

$$s_{k,0}^{(t)} = \frac{2}{s_{k,t}}, \quad s_{k,1}^{(t)} = 1$$

dir.

Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayıların t ve n ye bağlı bazı terimleri aşağıdaki gibidir.

i) $t = 1$ için klasik k –Jacobsthal-Lucas sayıları elde edilir.

$$s_{k,0}^{(1)} = \frac{\alpha_1^n + \alpha_2^n}{\alpha_1 + \alpha_2} = s_{k,n}.$$

ii) $t = 1$ ve $k = 1$ için Jacobsthal sayıları elde edilir.

iii) $t = 2$ için $s_{k,n}^{(2)}$ yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıları

$$s_{k,n}^{(2)} = \frac{s_{k,2n}}{s_{k,2}}$$

dır. Buradan

Durum 1: $n = 1$ için,

$$s_{k,1}^{(2)} = \frac{s_{k,2}}{s_{k,2}} = 1.$$

Durum 2: $n = 2$ için,

$$s_{k,2}^{(2)} = \frac{s_{k,4}}{s_{k,2}} = \frac{8k^2 + 8k + 1}{4k + 1}.$$

Durum 3: $n = 3$ için,

$$s_{k,3}^{(2)} = \frac{s_{k,6}}{s_{k,2}} = \frac{16k^3 + 36k^2 + 12k + 1}{4k + 1}.$$

Durum 4: $n = 4$ için,

$$s_{k,4}^{(2)} = \frac{s_{k,8}}{s_{k,2}} = \frac{88k^4 + 128k^3 + 80k^2 + 16k + 1}{4k + 1}.$$

Burada $k = 0$ verilirse, $\{1,1,1,1, \dots\}$ sabit dizisi elde edilir.

iii) $t = 3$ için, $s_{k,n}^{(3)}$ yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas sayıları

$$s_{k,n}^{(3)} = \frac{s_{k,3n}}{s_{k,3}}.$$

dır.

Bir sonraki teoremdede, yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayılarının terimlerinin sağladığı yineleme (rekürans) benzeri bağıntısı verilecektir.

Teorem 4.7.3. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayıları için yineleme (rekürans) benzeri bağıntısı her $n \geq 1$ için

$$s_{k,n+1}^{(t)} = s_{k,t} s_{k,n}^{(t)} - (-2k)^t s_{k,n-1}^{(t)}$$

eşitliği ile verilir.

İspat. Eşitliğin sol tarafı için yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayılarının Binet formülü kullanıldığında

$$s_{k,n+1}^{(t)} = \frac{(\alpha_1^t)^{n+1} + (\alpha_2^t)^{n+1}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} = \frac{\alpha_1^{tn+t} + \alpha_2^{tn+t}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}$$

elde edilir. Burada pay kısmına $\alpha_2^{tn}\alpha_1^t$ ifadesi eklenip çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}
s_{k,n+1}^{(t)} &= \frac{\alpha_1^{tn+t} + \alpha_2^{tn}\alpha_1^t + \alpha_2^{tn}\alpha_1^t - \alpha_2^{tn}\alpha_1^t}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \\
&= \frac{\alpha_1^t(\alpha_1^{tn} + \alpha_2^{tn}) + \alpha_2^{tn}\alpha_2^t - \alpha_2^{tn}\alpha_1^t}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \\
&= \alpha_1^t s_{k,n}^{(t)} + \frac{\alpha_2^{tn}\alpha_2^t - \alpha_2^{tn}\alpha_1^t}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \\
&= (\alpha_1^t + \alpha_2^t - \alpha_2^t) s_{k,n}^{(t)} + \frac{\alpha_2^{tn}\alpha_2^t - \alpha_2^{tn}\alpha_1^t}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \\
&= (\alpha_1^t + \alpha_2^t) s_{k,n}^{(t)} - \alpha_2^t s_{k,n}^{(t)} + \frac{\alpha_2^{tn}\alpha_2^t - \alpha_2^{tn}\alpha_1^t}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \\
&= s_{k,t} s_{k,n}^{(t)} + \frac{1}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} (\alpha_2^{tn}\alpha_2^t - \alpha_2^{tn}\alpha_1^t - \alpha_2^t\alpha_1^{tn} - \alpha_2^{tn}\alpha_2^t) \\
&= s_{k,t} s_{k,n}^{(t)} + \frac{1}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} (-\alpha_2^{tn}\alpha_1^t - \alpha_2^t\alpha_1^{tn}) \\
&= s_{k,t} s_{k,n}^{(t)} - \frac{(\alpha_1\alpha_2)^t}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} (\alpha_1^{tn-t} + \alpha_2^{tn-t}) \\
&= s_{k,t} s_{k,n}^{(t)} - \frac{(\alpha_1\alpha_2)^t}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} (\alpha_1^{tn-t} + \alpha_2^{tn-t}) \\
&= s_{k,t} s_{k,n}^{(t)} - (\alpha_1\alpha_2)^t \left(\frac{\alpha_1^{s(n-1)} + \alpha_2^{s(n-1)}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. $\alpha\beta = -2k$ ve $s_{k,n-1}^{(t)} = \frac{\alpha_1^{t(n-1)} + \alpha_2^{t(n-1)}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}$ olduğundan

$$s_{k,n+1}^{(t)} = s_{k,t} s_{k,n}^{(t)} - (-2k)^t s_{k,n-1}^{(t)}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.7.4. k –Jacobsthal-Lucas sayıları için aşağıda verilen genelleştirilmiş yineleme (rekürans) benzeri bağıntısı sağlanır. $m = 0, 1, \dots, r-1$ için

$$s_{k,(n+1)r+m} = s_{k,r} s_{k,nr+m} - (-2k)^t s_{k,r(n-1)+m}$$

dir.

İspat. k –Jacobsthal-Lucas sayılarının Binet formülü kullanıldığında

$$\begin{aligned}
s_{k,(n+1)r+m} &= \alpha_1^{(n+1)r+m} + \alpha_2^{(n+1)r+m} \\
&= \alpha_1^{nr+r+m} + \alpha_2^{nr+r+m} \\
&= \alpha_1^{nr+m}\alpha_1^r - \alpha_2^{nr+m}\alpha_2^r \\
&= \alpha_1^{nr+m}\alpha_1^r + \alpha_2^{nr+m}\alpha_2^r + \alpha_2^{nr+m}\alpha_1^r - \alpha_2^{nr+m}\alpha_2^r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_1^r (\alpha_1^{nr+m} + \alpha_2^{nr+m}) + \alpha_2^{nr+m} \alpha_2^r - \alpha_2^{nr+m} \alpha_1^r \\
&= \alpha_1^r j_{k,nr+m} + \alpha_2^{nr+m} \alpha_2^r - \alpha_2^{nr+m} \alpha_1^r \\
&= (\alpha_1^r + \alpha_2^r - \alpha_2^r) j_{k,nr+m} + \alpha_2^{nr+m} \alpha_2^r - \alpha_2^{nr+m} \alpha_1^r \\
&= s_{k,r} s_{k,nr+m} + \alpha_2^{nr+m} \alpha_2^r - \alpha_2^{nr+m} \alpha_1^r - \alpha_1^{nr+m} \alpha_2^r - \alpha_2^{nr+m} \alpha_2^r \\
&= s_{k,r} s_{k,nr+m} - (\alpha_1 \alpha_2)^r (\alpha_2^{nr+m-r} + \alpha_1^{nr+m-r})
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\alpha\beta = -2k$ ve $s_{k,n} = \alpha_1^n + \alpha_2^n$ olduğundan

$$s_{k,(n+1)r+m} = s_{k,r} s_{k,nr+m} - (2k)^r s_{k,r(n-1)+m}$$

bulunur. ■

Önerme 4.7.5. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayıları, n ve t nin negatif durumları için aşağıdaki eşitlikleri sağlar. Her $n, t \geq 0$ için,

- i) $s_{k,-n}^{(t)} = -(-2k)^{-tn} s_{k,n}^{(t)}$,
- ii) $s_{k,-n}^{(-t)} = (-2k)^t s_{k,n}^{(t)}$,
- iii) $s_{k,n}^{(-t)} = (-2)^{t(1-n)} s_{k,n}^{(t)}$.

İspat. i)

$$\begin{aligned}
s_{k,-n}^{(t)} &= \frac{(\alpha_1^t)^{-n} + (\alpha_2^t)^{-n}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} = \left(\frac{\frac{1}{\alpha_1^{tn}} + \frac{1}{\alpha_2^{tn}}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) = \left(\frac{\alpha_2^{tn} + \alpha_1^{tn}}{(\alpha_1 \alpha_2)^{tn}} \right) \left(\frac{1}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \\
&= -(\alpha_1 \alpha_2)^{-tn} \left(\frac{\alpha_1^{tn} + \alpha_2^{tn}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right).
\end{aligned}$$

$\alpha\beta = -2k$ ve $s_{k,n}^{(t)} = \frac{\alpha_1^{tn} + \alpha_2^{tn}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}$ olduğundan

$$s_{k,-n}^{(t)} = -(-2k)^{-tn} s_{k,n}^{(t)}$$

elde edilir.

ii)

$$s_{k,-n}^{(-t)} = \frac{(\alpha_1^{-t})^{-n} + (\alpha_2^{-t})^{-n}}{\alpha_1^{-t} + \alpha_2^{-t}} = \left(\frac{\alpha_1^{tn} + \alpha_2^{tn}}{\frac{1}{\alpha_1^t} + \frac{1}{\alpha_2^t}} \right) = (\alpha_1 \alpha_2)^t \left(\frac{\alpha_1^{tn} + \alpha_2^{tn}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right).$$

$\alpha\beta = -2k$ ve $s_{k,n}^{(t)} = \frac{\alpha_1^{tn} + \alpha_2^{tn}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}$ olduğundan

$$s_{k,-n}^{(-t)} = (-2k)^t s_{k,n}^{(t)}$$

elde edilir.

iii)

$$s_{k,n}^{(-t)} = \frac{(\alpha_1^{-t})^n + (\alpha_2^{-t})^n}{\alpha_1^{-t} + \alpha_2^{-t}} = \left(\frac{\frac{1}{\alpha_1^{tn}} + \frac{1}{\alpha_2^{tn}}}{\frac{1}{\alpha_1^t} + \frac{1}{\alpha_2^t}} \right) = (\alpha_1 \alpha_2)^{t-tn} \left(\frac{\alpha_1^{tn} + \alpha_2^{tn}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right).$$

$a\beta = -2k$ ve $s_{k,n}^{(t)} = \frac{\alpha_1^{tn} + \alpha_2^{tn}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}$ olduğundan

$$s_{k,n}^{(-t)} = (-2)^{t(1-n)} s_{k,n}^{(t)}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.7.6. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayılarının terimleri arasındaki limit değeri

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{k,n+1}^{(t)}}{s_{k,n}^{(t)}} = \alpha_1^t$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{k,n+1}^{(t)}}{s_{k,n}^{(t)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1^{tn+t} + \alpha_2^{tn+t}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \frac{\alpha_1^t + \alpha_2^t}{\alpha_1^{tn} + \alpha_2^{tn}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1^{tn+t} + \alpha_2^{tn+t}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha_1^t)^{n+1} \left(1 - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{tn+t} \right)}{(\alpha_1^t)^n \left(1 - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{tn} \right)} \end{aligned}$$

$|\alpha_2| < \alpha_1$ olduğu için $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^t = 0$ dir. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{k,n+1}^{(t)}}{s_{k,n}^{(t)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha_1^t)^{n+1}}{(\alpha_1^t)^n} = \alpha_1^t$$

bulunur. ■

Teorem 4.7.7. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_{k,n}^{(t)} x^n = \frac{\frac{2}{s_{k,t}} - x}{1 - s_{k,t}x + (-2k)^t x^2}$$

dır.

İspat.

$$G_{kj}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{k,n}^{(t)} x^n$$

olsun.

$$G_{kj} = s_{k,0}^{(t)} + s_{k,1}^{(t)}x + s_{k,2}^{(t)}x^2 + s_{k,3}^{(t)}x^3 + \dots + s_{k,n}^{(t)}x^n + \dots \quad (4.38)$$

dir. Burada (4.38) eşitliğinin her iki tarafı $-s_{k,t}x$ ve $(-2)^t x^2$ ile çarpılırsa

$$-s_{k,t}xG_{kj} = -s_{k,t}xs_{k,0}^{(t)} - s_{k,t}x^2s_{k,1}^{(t)} - s_{k,t}x^3s_{k,2}^{(t)} - \dots - s_{k,t}x^{n+1}s_{k,n}^{(t)} + \dots \quad (4.39)$$

ve

$$(-2k)^t x^2 G_{kj} = (-2k)^t x^2 s_{k,0}^{(t)} + (-2k)^t x^3 s_{k,1}^{(t)} + \dots + (-2k)^t x^{n+2} s_{k,n}^{(t)} + \dots \quad (4.40)$$

elde edilir. (4.38), (4.39) ve (4.40) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayılarının yineleme (rekürans) bağıntısına göre

$$G_{kj} - s_{k,t}xG_{kj} + (-2k)^t x^2 G_{kj} = s_{k,0}^{(t)} + s_{k,1}^{(t)}x - xs_{k,0}^{(t)}s_{k,t}$$

olmak üzere

$$G_{kj}(1 - s_{k,t}x + (-2k)^t x^2) = s_{k,0}^{(t)} + s_{k,1}^{(t)}x - xs_{k,0}^{(t)}s_{k,t}$$

elde edilir. Burada $s_{k,1}^{(t)} = 1$ ve $s_{k,0}^{(t)} = \frac{2}{s_{k,t}}$ olduğu için, sonuç olarak

$$G_{kj}(x, t) = \frac{\frac{2}{s_{k,t}} - x}{1 - s_{k,t}x + (-2k)^t x^2}$$

bulunur. ■

Teorem 4.7.8. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayılarının üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_{k,n}^{(t)} \frac{x^n}{n!} = \frac{e^{\alpha_1^t x} + e^{\alpha_2^t x}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}$$

dır.

İspat.

$$H_{kj}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{k,n}^{(t)} \frac{x^n}{n!}$$

olsun. Buradan $s_{k,n}^{(t)}$ nin Binet formülüne göre,

$$H_{kj}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_1^{tn} + \alpha_2^{tn}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \frac{x^n}{n!}$$

eşitliği yazılır.

$$H_{kj}(x, t) = \frac{1}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^{nt} x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_2^{nt} x^n}{n!} \right] = \frac{1}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1^t x)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_2^t x)^n}{n!} \right]$$

bulunur.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

olduğundan

$$H_{kj}(x, t) = \frac{e^{\alpha_1^t x} + e^{\alpha_2^t x}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.7.9. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayılarının üreteç ve üstel üreteç fonksiyonlarının x göre türevleri

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad G_{kj}'(x) &= \frac{1+(-2k)^t x \left(x - \frac{4}{s_{k,t}} \right)}{(1-s_{k,t}x + (-2k)^t x^2)^2}, \\ \text{ii)} \quad H_{kj}'(x) &= \frac{e^{\alpha_1^t x} \alpha_1^t + e^{\alpha_2^t x} \alpha_2^t}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \end{aligned}$$

dır.

İspat.

i)

$$G_{kj}(x, t) = \frac{\frac{2}{s_{k,t}} - x}{1 - s_{k,t}x + (-2k)^t x^2}$$

dır. Buradan x göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} G_{kj}'(x) &= \frac{-\left(1 - s_{k,t}x + (-2k)^t x^2\right) - \left(\frac{2}{s_{k,t}} - x\right) \left(-s_{k,t} + 2(-2k)^t x\right)}{\left(1 - s_{k,t}x + (-2k)^t x^2\right)^2} \\ &= \frac{1 + (-2k)^t x \left(x - \frac{4}{s_{k,t}}\right)}{\left(1 - s_{k,t}x + (-2k)^t x^2\right)^2} \end{aligned}$$

bulunur.

ii)

$$H_{kj}(x, s) = \frac{e^{\alpha_1^t x} + e^{\alpha_2^t x}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}$$

dır. Buradan x göre türev alınırsa

$$H_{kj}'(x) = \frac{e^{\alpha_1^t x} \alpha_1^t + e^{\alpha_2^t x} \alpha_2^t}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}$$

bulunur. ■

Şimdi ise, tamsayı dizileri için önemli olan Cassini, Catalan, d'Ocagne, Vajda ve Honsberger özdeşlikleri yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayıları için hesaplanacaktır. Bu özdeşliklerin tümünün ispatında yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayılarının Binet formülü kullanılacaktır.

Teorem 4.7.10. (Cassini Özdeşliği) Her $n \geq 1$ için yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayıları

$$s_{k,n-1}^{(t)} s_{k,n+1}^{(t)} - \left(s_{k,n}^{(t)}\right)^2 = (-2k)^{t(n-1)} (\alpha_1^t - \alpha_2^t)^2 s_{k,t}^{-2}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned} s_{k,n-1}^{(t)} s_{k,n+1}^{(t)} - \left(s_{k,n}^{(t)}\right)^2 &= \left(\frac{(\alpha_1^t)^{n-1} + (\alpha_2^t)^{n-1}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}\right) \left(\frac{(\alpha_1^t)^{n+1} + (\alpha_2^t)^{n+1}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}\right) \\ &\quad - \left(\frac{(\alpha_1^t)^n + (\alpha_2^t)^n}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}\right) \left(\frac{(\alpha_1^t)^n + (\alpha_2^t)^n}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}\right) \\ &= \frac{\alpha_1^{tn-t} \alpha_2^{tn+t} + \alpha_2^{tn-t} \alpha_1^{tn+t} - 2\alpha_1^{tn} \alpha_2^{tn}}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\ &= \frac{\alpha_1^{tn} \alpha_2^{tn} \left(-2 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^t + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^t\right)}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} = \frac{(\alpha_1 \alpha_2)^{tn} \frac{(\alpha_1^t - \alpha_2^t)^2}{(\alpha_1 \alpha_2)^t}}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \end{aligned}$$

$\alpha_1 \alpha_2 = -2k$ ve $\alpha_1^t + \alpha_2^t = s_{k,t}$ olduğundan

$$s_{k,n-1}^{(t)} s_{k,n+1}^{(t)} - \left(s_{k,n}^{(t)}\right)^2 = (-2k)^{t(n-1)} (\alpha_1^t - \alpha_2^t)^2 s_{k,t}^{-2}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.7.11. (Catalan Özdeşliği) Her $n \geq r$ için yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayıları

$$s_{k,n-r}^{(t)} j_{k,n+r}^{(t)} - \left(s_{k,n}^{(t)}\right)^2 = (-2k)^{t(n-r)} (\alpha_1^{sr} - \alpha_2^{sr})^2 s_{k,t}^{-2}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned} s_{k,n-r}^{(t)} j_{k,n+r}^{(t)} - \left(s_{k,n}^{(t)}\right)^2 &= \left(\frac{(\alpha_1^t)^{n-r} + (\alpha_2^t)^{n-r}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}\right) \left(\frac{(\alpha_1^t)^{n+r} + (\alpha_2^t)^{n+r}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}\right) \\ &\quad - \left(\frac{(\alpha_1^t)^n + (\alpha_2^t)^n}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}\right) \left(\frac{(\alpha_1^t)^n + (\alpha_2^t)^n}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_1^{tn-tr} \alpha_2^{tn+tr} + \alpha_2^{rn-tr} \alpha_1^{tn+tr} - 2\alpha_1^{tn} \alpha_2^{tn}}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\
&= \frac{\alpha_1^{tn} \alpha_2^{tn} \left(-2 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{tr} + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{tr} \right)}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\
&= \frac{(\alpha_1 \alpha_2)^{tn} \frac{(\alpha_1^{tr} - \alpha_2^{tr})^2}{(\alpha_1 \alpha_2)^{tr}}}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2}
\end{aligned}$$

$\alpha_1 \alpha_2 = -2k$ ve $\alpha_1^t + \alpha_2^t = s_{k,t}$ olduğundan

$$s_{k,n-r}^{(t)} s_{k,n+r}^{(t)} - \left(s_{k,n}^{(t)} \right)^2 = (-2k)^{t(n-r)} (\alpha_1^{tr} - \alpha_2^{tr})^2 s_{k,t}^{-2}$$

elde edilir. ■

Dikkat edilirse $r = 1$ alınırsa Cassini özdeşliği elde edilir.

Teorem 4.7.12. (d'Ocagne Özdeşliği) Her n, m tamsayıları için yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayıları

$$s_{k,m}^{(t)} s_{k,n+1}^{(t)} - s_{k,m+1}^{(t)} s_{k,n}^{(t)} = \frac{-(-2k)^{tn} (\alpha_1^t - \alpha_2^t) (\alpha_1^{t(m-n)} - \alpha_2^{t(m-n)})}{(s_{k,t})^2}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned}
s_{k,m}^{(t)} s_{k,n+1}^{(t)} - s_{k,m+1}^{(t)} s_{k,n}^{(t)} &= \left(\frac{(\alpha_1^t)^m + (\alpha_2^t)^m}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \left(\frac{(\alpha_1^t)^{n+1} + (\alpha_2^t)^{n+1}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \\
&\quad - \left(\frac{(\alpha_1^t)^{m+1} + (\alpha_2^t)^{m+1}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \left(\frac{(\alpha_1^t)^n + (\alpha_2^t)^n}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \\
&= \frac{\alpha_1^{tm} \alpha_2^{tn+t} + \alpha_2^{tm} \alpha_2^{tn+t} - \alpha_1^{tm+t} \alpha_2^{tn} - \alpha_2^{tm+t} \alpha_1^{tn}}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\
&= \frac{\alpha_1^{tm} \alpha_2^{tn} (\alpha_2^t - \alpha_1^t) + \alpha_1^{tn} \alpha_2^{tm} (\alpha_1^t - \alpha_2^t)}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\
&= \frac{(\alpha_1^t - \alpha_2^t) (\alpha_1^{tn} \alpha_2^{tm} - \alpha_1^{tm} \alpha_2^{tn})}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\
&= \frac{(\alpha_1^t - \alpha_2^t) (\alpha_1 \alpha_2)^{tn} (\alpha_2^{tm-tn} - \alpha_1^{tm-tn})}{(\alpha_1^s + \alpha_2^s)^2} \\
&= \frac{-(-2k)^{tn} (\alpha_1^t - \alpha_2^t) (\alpha_1^{t(m-n)} - \alpha_2^{t(m-n)})}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2}
\end{aligned}$$

dir. ■

Teorem 4.7.13. (Vajda Özdeşliği) Her n, i, j tamsayıları için yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayıları

$$s_{k,n+i}^{(t)} s_{k,n+j}^{(t)} - s_{k,n}^{(t)} s_{k,n+i+j}^{(t)} = - \frac{(-2k)^{tn} (\alpha_1^{tj} - \alpha_2^{tj}) (\alpha_1^{ti} - \alpha_2^{ti})}{(s_{k,t})^2}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned} s_{k,n+i}^{(t)} s_{k,n+j}^{(t)} - s_{k,n}^{(t)} s_{k,n+i+j}^{(t)} &= \left(\frac{(\alpha_1^t)^{n+i} + (\alpha_2^t)^{n+i}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \left(\frac{(\alpha_1^t)^{n+j} + (\alpha_2^t)^{n+j}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \\ &\quad - \left(\frac{(\alpha_1^t)^n + (\alpha_2^t)^n}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \left(\frac{(\alpha_1^t)^{n+i+j} + (\alpha_2^t)^{n+i+j}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \\ &= \frac{\alpha_1^{tn+ti} \alpha_2^{tn+tj} + \alpha_2^{tn+ti} \alpha_1^{tn+tj} - \alpha_1^{tn} \alpha_2^{tn+ti+tj} - \alpha_2^{tn} \alpha_1^{tn+ti+tj}}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\ &= \frac{\alpha_1^{tn+ti} \alpha_2^{tn} (\alpha_2^{tj} - \alpha_1^{tj}) + \alpha_1^{tn} \alpha_2^{tn+ti} (\alpha_1^{tj} - \alpha_2^{tj})}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\ &= \frac{(\alpha_1^{tj} - \alpha_2^{tj}) (\alpha_1^{tn} \alpha_2^{tn+ti} - \alpha_1^{tn+ti} \alpha_2^{tn})}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\ &= \frac{-(\alpha_1^{tj} - \alpha_2^{tj}) \alpha_1^{tn} \alpha_2^{tn} (\alpha_1^{ti} - \alpha_2^{ti})}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\ &= - \frac{(-2k)^{tn} (\alpha_1^{tj} - \alpha_2^{tj}) (\alpha_1^{ti} - \alpha_2^{ti})}{(s_{k,t})^2} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.7.14. (Honsberger Özdeşliği) Her n, m tamsayıları için yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayıları

$$\begin{aligned} s_{k,m-1}^{(t)} s_{k,n}^{(t)} + s_{k,m}^{(t)} s_{k,n+1}^{(t)} &= \frac{\alpha_1^{t(m+n-1)} (1 + \alpha_1^{2t}) + \alpha_2^{t(m+n-1)} (1 + \alpha_2^{2t}) + (1 + (-2k)^t) (\alpha_1^{t(m-1)} \alpha_2^{tn} + \alpha_1^{tn} \alpha_2^{t(m-1)})}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \end{aligned}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned}
& s_{k,m-1}^{(t)} s_{k,n}^{(t)} + s_{k,m}^{(t)} s_{k,n+1}^{(t)} \\
&= \left(\frac{(\alpha_1^t)^{m-1} + (\alpha_2^t)^{m-1}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \left(\frac{(\alpha_1^t)^n + (\alpha_2^t)^n}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \\
&\quad + \left(\frac{(\alpha_1^t)^m + (\alpha_2^t)^m}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \left(\frac{(\alpha_1^t)^{n+1} + (\alpha_2^t)^{n+1}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \\
&= \frac{\alpha_1^{tm-t+tn} + \alpha_1^{tm-t} \alpha_2^{tn} + \alpha_2^{tm-t} \alpha_1^{tn} + \alpha_2^{tm-t+tn}}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\
&\quad + \frac{\alpha_1^{tm+tn+t} + \alpha_1^{tm} \alpha_2^{tn+t} + \alpha_2^{tm} \alpha_1^{tn+t} + \alpha_2^{tm+tn+t}}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\
&= \frac{\alpha_1^{tm+tn-t}(1 + \alpha_1^{2t}) + \alpha_2^{tm+tn-t}(1 + \alpha_2^{2t})}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\
&\quad + \frac{\alpha_1^{tm-t} \alpha_2^{tn}(1 + \alpha_1^t \alpha_2^t) + \alpha_1^{tn} \alpha_2^{tm-t}(1 + \alpha_1^t \alpha_2^t)}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\
&= \frac{\alpha_1^{t(m+n-1)}(1 + \alpha_1^{2t}) + \alpha_2^{t(m+n-1)}(1 + \alpha_2^{2t}) + (1 + (-2k)^t)(\alpha_1^{t(m-1)} \alpha_2^{tn} + \alpha_1^{tn} \alpha_2^{t(m-1)})}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2}
\end{aligned}$$

dir. ■

4.8. Yüksek Mertebeden k –Jacobsthal-Lucas Sayılarının Kuaterniyonları

Bu bölümde, bileşenleri yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayılarından oluşan kuaterniyonlar tanımlanacaktır. Öncelikle bu sayıların kuaterniyon yapısı içerisindeki özellikleri verilecektir. Daha sonra söz konusu kuaterniyonlar bir sayı dizisi olarak ele alınarak yineleme (rekürans) bağıntısı tanımlanacak ve temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.8.1. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları $Os_{k,n}^{(t)}$ ile gösterilir ve

$$Os_{k,n}^{(t)} = s_{k,n}^{(t)} + s_{k,n+1}^{(t)} \mathbb{i} + s_{k,n+2}^{(t)} \mathbb{j} + s_{k,n+3}^{(t)} \mathbb{k} \quad (4.41)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Burada, $\mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k}$ kuaterniyon birimler ve $s_{k,n}^{(t)}$ yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas sayılarıdır.

Dikkat edilirse, $k = 1$ alındığında yüksek mertebeden Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları, $s = 1$ ve $k = 1$ alındığında Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının elde edildiği görülür.

Tanım 4.8.2. (4.41) eşitliğinde verilen yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının gerçel kısmı $Re(OS_{k,n}^{(t)})$ ile gösterilir ve

$$Re(OS_{k,n}^{(t)}) = s_{k,n}^{(t)}$$

dir. Vektörel kısmı ise $Vec(OS_{k,n}^{(t)}) = v$ ile gösterilir ve

$$Vec(OS_{k,n}^{(t)}) = v = s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{i} + s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{j} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k}$$

dir. Buradan

$$OS_{k,n}^{(t)} = s_{k,n}^{(t)} + v$$

olarak yazılabilir.

Tanım 4.8.3. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının eşleniği

$$OS_{k,n}^{(t)*} = s_{k,n}^{(t)} - s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{i} - s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{j} - s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k} \quad (4.42)$$

ile tanımlanır.

Teorem 4.8.4. Verilen (4.42) eşleniğine göre yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının normu aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$N(OS_{k,n}^{(t)}) = \sqrt{s_{k,n}^{(t)2} + s_{k,n+1}^{(t)2} + s_{k,n+2}^{(t)2} + s_{k,n+3}^{(t)2}}.$$

İspat. Norm tanımı gereğince,

$$\begin{aligned} \left(N(OS_{k,n}^{(t)})\right)^2 &= OS_{k,n}^{(t)*} OS_{k,n}^{(t)} \\ &= \left(s_{k,n}^{(t)} - s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{i} - s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{j} - s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k}\right) \left(s_{k,n}^{(t)} + s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{i} + s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{j} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k}\right) \\ &= s_{k,n}^{(t)2} + s_{k,n+1}^{(t)2} + s_{k,n+2}^{(t)2} + s_{k,n+3}^{(t)2} - s_{k,n+1}^{(t)}s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{i} + s_{k,n+1}^{(t)}s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{j} - s_{k,n+2}^{(t)}s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k} \\ &\quad - s_{k,n+1}^{(t)}s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{k} + s_{k,n+1}^{(t)}s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{i} - s_{k,n+2}^{(t)}s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{j} + s_{k,n+2}^{(t)}s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{k} + s_{k,n+2}^{(t)2} \\ &\quad - s_{k,n+2}^{(t)}s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{i} - s_{k,n+3}^{(t)}s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{j} + s_{k,n+3}^{(t)}s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{i} + s_{k,n+3}^{(t)2} \\ &= s_{k,n}^{(t)2} + s_{k,n+1}^{(t)2} + s_{k,n+2}^{(t)2} + s_{k,n+3}^{(t)2} \\ \left(N(OS_{k,n}^{(t)})\right)^2 &= s_{k,n}^{(t)2} + s_{k,n+1}^{(t)2} + s_{k,n+2}^{(t)2} + s_{k,n+3}^{(t)2} \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$N(OS_{k,n}^{(t)}) = \sqrt{s_{k,n}^{(t)2} + s_{k,n+1}^{(t)2} + s_{k,n+2}^{(t)2} + s_{k,n+3}^{(t)2}}$$

dir. ■

Sonuç 4.8.5. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları için

$$Os_{k,n}^{(t)} + Os_{k,n}^{(t)*} = 2s_{k,n}^{(t)}$$

dır.

İspat. (4.41) ve (4.42) eşitlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} Os_{k,n}^{(t)} + Os_{k,n}^{(t)*} &= \left(s_{k,n}^{(t)} + s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{i} + s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{j} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k} \right) + \left(s_{k,n}^{(t)} - s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{i} - s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{j} - s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k} \right) \\ &= 2s_{k,n}^{(t)} = 2Re \left(Os_{k,n}^{(t)} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Önerme 4.8.6. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları için

$$\left(Os_{k,n}^{(t)} \right)^2 = -Os_{k,n}^{(t)} Os_{k,n}^{(t)*} + 2s_{k,n}^{(t)} Os_{k,n}^{(t)}$$

dır.

İspat.

$$\begin{aligned} \left(Os_{k,n}^{(t)} \right)^2 &= \left(s_{k,n}^{(t)} + s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{i} + s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{j} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k} \right) \left(s_{k,n}^{(t)} + s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{i} + s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{j} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k} \right) \\ &= - \left(\left(s_{k,n}^{(t)} \right)^2 + \left(s_{k,n+1}^{(t)} \right)^2 + \left(s_{k,n+2}^{(t)} \right)^2 + \left(s_{k,n+3}^{(t)} \right)^2 \right) \\ &\quad + 2s_{k,n}^{(t)} \left(s_{k,n}^{(t)} + s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{i} + s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{j} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k} \right) \end{aligned}$$

dir. Teorem 4.8.4' den,

$$\left(Os_{k,n}^{(t)} \right)^2 = -Os_{k,n}^{(t)} Os_{k,n}^{(t)*} + 2s_{k,n}^{(t)} Os_{k,n}^{(t)}$$

elde edilir. ■

Kuaterniyonların birimlerine göre üç tane eşlenik aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 4.8.7. $Os_{k,n}^{(t)}$ nin $\mathfrak{i}$ ye göre eşleniği $Os_{k,n}^{(t)*,\mathfrak{i}}$ ile gösterilir ve

$$Os_{k,n}^{(t)*,\mathfrak{i}} = s_{k,n}^{(t)} - s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{i} + s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{j} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k} \quad (4.43)$$

formundadır. $Os_{k,n}^{(t)}$ nin $\mathfrak{j}$ ye göre eşleniği $Os_{k,n}^{(t)*,\mathfrak{j}}$ ile gösterilir ve

$$Os_{k,n}^{(t)*,\mathfrak{j}} = s_{k,n}^{(t)} + s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{i} - s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{j} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k} \quad (4.44)$$

formundadır. $Os_{k,n}^{(t)}$ nin $\mathfrak{k}$ ye göre eşleniği $Os_{k,n}^{(t)*,\mathfrak{k}}$ ile gösterilir ve

$$Os_{k,n}^{(t)*,\mathfrak{k}} = s_{k,n}^{(t)} + s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{i} - s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{j} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k}. \quad (4.45)$$

formundadır.

Tanımlanan eşlenikler dikkate alınarak, yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarına ait norm-benzeri ifadeler aşağıdaki teorem aracılığıyla elde edilmektedir

Teorem 4.8.8. $Os_{k,n}^{(t)}$ nin norm-benzerleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad \left(N^{\mathfrak{i}}\left(Os_{k,n}^{(t)}\right)\right)^2 &= s_{k,n}^{(t)2} + s_{k,n+1}^{(t)2} - s_{k,n+2}^{(t)2} - s_{k,n+3}^{(t)2} + 2\mathfrak{j}\left(s_{k,n}^{(t)}s_{k,n+2}^{(t)} + s_{k,n+2}^{(t)}s_{k,n+3}^{(t)}\right) \\
&\quad + 2\mathfrak{k}\left(s_{k,n}^{(t)}s_{k,n+3}^{(t)} + s_{k,n+1}^{(t)}s_{k,n+2}^{(t)}\right), \\
\text{ii)} \quad \left(N^{\mathfrak{j}}\left(Os_{k,n}^{(t)}\right)\right)^2 &= s_{k,n}^{(t)2} - s_{k,n+1}^{(t)2} + s_{k,n+2}^{(t)2} - s_{k,n+3}^{(t)2} + 2\mathfrak{i}\left(s_{k,n}^{(t)}s_{k,n+1}^{(t)} - s_{k,n+1}^{(t)}s_{k,n+3}^{(t)}\right) \\
&\quad + 2\mathfrak{k}\left(s_{k,n}^{(t)}s_{k,n+3}^{(t)} + s_{k,n+1}^{(t)}s_{k,n+2}^{(t)}\right), \\
\text{iii)} \quad \left(N^{\mathfrak{k}}\left(Os_{k,n}^{(t)}\right)\right)^2 &= s_{k,n}^{(t)2} - s_{k,n+1}^{(t)2} - s_{k,n+2}^{(t)2} + s_{k,n+3}^{(t)2} + 2\mathfrak{i}\left(s_{k,n}^{(t)}s_{k,n+1}^{(t)} - s_{k,n+2}^{(t)}s_{k,n+3}^{(t)}\right) \\
&\quad + 2\mathfrak{j}\left(s_{k,n}^{(t)}s_{k,n+2}^{(t)} + s_{k,n+1}^{(t)}s_{k,n+3}^{(t)}\right).
\end{aligned}$$

İspat. i) Norm tanımı gereğince,

$$\begin{aligned}
N^{\mathfrak{i}}\left(Os_{k,n}^{(t)}\right) &= \sqrt{Os_{k,n}^{(t)}Os_{k,n}^{(t)*,\mathfrak{i}}} \\
&= \sqrt{\left(s_{k,n}^{(t)} + s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{i} + s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{j} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k}\right)\left(s_{k,n}^{(t)} - s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{i} + s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{j} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k}\right)}
\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}
\left(N^{\mathfrak{i}}\left(Os_{k,n}^{(t)}\right)\right)^2 &= \left(s_{k,n}^{(t)} + s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{i} + s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{j} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k}\right)\left(s_{k,n}^{(t)} - s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{i} + s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{j} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k}\right) \\
&= s_{k,n}^{(t)2} + s_{k,n}^{(t)}s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{i} - s_{k,n}^{(t)}s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{j} + s_{k,n}^{(t)}s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{k} + s_{k,n+1}^{(t)}s_{k,n}^{(t)}\mathfrak{i} + s_{k,n+1}^{(t)2} \\
&\quad - s_{k,n+1}^{(t)}s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{k} - s_{k,n+1}^{(t)}s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{j} + s_{k,n+2}^{(t)}s_{k,n}^{(t)}\mathfrak{j} \\
&\quad - s_{k,n+2}^{(t)}s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{k} - s_{k,n+2}^{(t)2} + s_{k,n+2}^{(t)}s_{k,n+3}^{(t)}\mathfrak{i} + s_{k,n+3}^{(t)}s_{k,n}^{(t)}\mathfrak{k} \\
&\quad - s_{k,n+3}^{(t)}s_{k,n+1}^{(t)}\mathfrak{j} - s_{k,n+3}^{(t)}s_{k,n+2}^{(t)}\mathfrak{i} - s_{k,n+3}^{(t)2} \\
&= s_{k,n}^{(t)2} + s_{k,n+1}^{(t)2} - s_{k,n+2}^{(t)2} - s_{k,n+3}^{(t)2} + 2\mathfrak{j}\left(s_{k,n}^{(t)}s_{k,n+2}^{(t)} + s_{k,n+2}^{(t)}s_{k,n+3}^{(t)}\right) \\
&\quad + 2\mathfrak{k}\left(s_{k,n}^{(t)}s_{k,n+3}^{(t)} + s_{k,n+1}^{(t)}s_{k,n+2}^{(t)}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

ii) ve iii) benzer şekilde gösterilir. ■

Sonuç 4.8.9. Yüksek mertebeden k – Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları için aşağıda verilen eşitlikler sağlanır.

- i) $Os_{k,n}^{(t)} + Os_{k,n}^{(t)*,\mathbb{I}} = 2 \left(s_{k,n}^{(t)} + s_{k,n+2}^{(t)}\mathbb{J} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathbb{K} \right),$
- ii) $Os_{k,n}^{(t)} + Os_{k,n}^{(t)*,\mathbb{J}} = 2 \left(s_{k,n}^{(t)} + s_{k,n+1}^{(t)}\mathbb{I} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathbb{K} \right),$
- iii) $Os_{k,n}^{(t)} + Os_{k,n}^{(t)*,\mathbb{K}} = 2 \left(s_{k,n}^{(t)} + s_{k,n+1}^{(t)}\mathbb{I} + s_{k,n+2}^{(t)}\mathbb{J} \right),$
- iv) $Os_{k,n}^{(t)*,\mathbb{I}} + Os_{k,n}^{(t)*,\mathbb{J}} = 2 \left(s_{k,n}^{(t)} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathbb{K} \right),$
- v) $Os_{k,n}^{(t)*,\mathbb{I}} + Os_{k,n}^{(t)*,\mathbb{K}} = 2 \left(s_{k,n}^{(t)} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathbb{J} \right),$
- vi) $Os_{k,n}^{(t)*,\mathbb{J}} + Os_{k,n}^{(t)*,\mathbb{K}} = 2 \left(s_{k,n}^{(t)} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathbb{I} \right).$

İspat. Sonuç (4.43), (4.44) ve (4.45) eşitlikleri kullanılarak gösterilir. ■

Bir sonraki teorem ile yüksek mertebeden k – Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının terimlerini bulmak için önemli olan Binet formülü verilecektir.

Teorem 4.8.10. Yüksek mertebeden k – Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının Binet formülü aşağıdaki gibidir.

$$Os_{k,n}^{(t)} = \frac{(\alpha_1^t)^n \widehat{\alpha_1} + (\alpha_2^t)^n \widehat{\alpha_2}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}. \quad (4.46)$$

Burada,

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha_1} &= (1 + (\alpha_1^t)^n \mathbb{I} + (\alpha_1^t)^{n+1} \mathbb{J} + (\alpha_1^t)^{n+2} \mathbb{K}), \\ \widehat{\alpha_2} &= (1 + (\alpha_2^t)^n \mathbb{I} + (\alpha_2^t)^{n+1} \mathbb{J} + (\alpha_2^t)^{n+2} \mathbb{K}) \end{aligned}$$

dir.

İspat. (4.41) eşitliğinde $s_{k,n}^{(t)}$ sayılarının Binet formülü kullanılır. Buradan

$$\begin{aligned} Os_{k,n}^{(t)} &= s_{k,n}^{(t)} + s_{k,n+1}^{(t)}\mathbb{I} + s_{k,n+2}^{(t)}\mathbb{J} + s_{k,n+3}^{(t)}\mathbb{K} \\ &= \left(\frac{(\alpha_1^t)^n + (\alpha_2^t)^n}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) + \left(\frac{(\alpha_1^t)^{n+1} + (\alpha_2^t)^{n+1}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \mathbb{I} + \left(\frac{(\alpha_1^t)^{n+2} + (\alpha_2^t)^{n+2}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \mathbb{J} \\ &\quad + \left(\frac{(\alpha_1^t)^{n+3} + (\alpha_2^t)^{n+3}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \mathbb{K} \\ &= \left(\frac{(\alpha_1^t)^n}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) (1 + (\alpha_1^t)^n \mathbb{I} + (\alpha_1^t)^{n+1} \mathbb{J} + (\alpha_1^t)^{n+2} \mathbb{K}) \\ &\quad + \left(\frac{(\alpha_2^t)^n}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) (1 + (\alpha_2^t)^n \mathbb{I} + (\alpha_2^t)^{n+1} \mathbb{J} + (\alpha_2^t)^{n+2} \mathbb{K}) \end{aligned}$$

$$= \frac{(\alpha_1^t)^n \widehat{\alpha} + (\alpha_2^t)^n \widehat{\beta}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} = \frac{(\alpha_1^t)^n \widehat{\alpha}_1 + (\alpha_2^t)^n \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.8.11. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları için yineleme (rekürans) benzeri bağıntısı

$$Os_{k,n+1}^{(s)} = s_{k,t} Os_{k,n}^{(t)} - (-2k)^t Os_{k,n-1}^{(t)}$$

eşitliği ile verilir.

İspat.

$$Os_{k,n+1}^{(t)} = \frac{(\alpha_1^t)^{n+1} \widehat{\alpha}_1 + (\alpha_2^t)^{n+1} \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} = \frac{\alpha_1^{tn+t} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_2^{tn+t} \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} = \frac{\alpha_1^{tn} \alpha_1^t \widehat{\alpha}_1 + \alpha_2^{tn} \alpha_2^t \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}$$

dır. Burada pay kısmına $\alpha_2^{tn} \alpha_1^t \widehat{\alpha}_2$ ifadesi eklenip çıkarıldığında

$$\begin{aligned} Os_{k,n+1}^{(t)} &= \frac{\alpha_1^{tn} \alpha_1^t \widehat{\alpha}_1 + \alpha_2^{tn} \alpha_2^t \widehat{\alpha}_2 + \alpha_2^{tn} \alpha_1^t \widehat{\alpha}_2 - \alpha_2^{tn} \alpha_1^t \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \\ &= \frac{\alpha_1^t (\alpha_1^{tn} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_2^{tn} \widehat{\alpha}_2) + \alpha_2^{tn} \alpha_2^t \widehat{\alpha}_2 - \alpha_2^{tn} \alpha_1^t \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \\ &= \alpha_1^t Os_{k,n}^{(t)} + \frac{\alpha_2^{tn} \alpha_2^t \widehat{\alpha}_2 - \alpha_2^{tn} \alpha_1^t \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \\ &= (\alpha_1^t + \alpha_2^t - \alpha_2^t) Os_{k,n}^{(t)} + \frac{\alpha_2^{tn} \alpha_2^t \widehat{\alpha}_2 - \alpha_2^{tn} \alpha_1^t \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \\ &= (\alpha_1^t + \alpha_2^t) Os_{k,n}^{(t)} - \alpha_2^t Os_{k,n}^{(t)} + \frac{\alpha_2^{tn} \alpha_2^t \widehat{\alpha}_2 - \alpha_2^{tn} \alpha_1^t \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \\ &= s_{k,t} Os_{k,n}^{(t)} + \frac{1}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} (\alpha_2^{tn} \alpha_2^t \widehat{\alpha}_2 - \alpha_2^{tn} \alpha_1^t \widehat{\alpha}_2 - \alpha_2^t \alpha_1^{tn} \widehat{\alpha}_1 - \alpha_2^t \alpha_2^{tn} \widehat{\alpha}_2) \\ &= s_{k,t} Os_{k,n}^{(t)} + \frac{1}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} (-\alpha_2^{tn} \alpha_1^t \widehat{\alpha}_2 - \alpha_2^t \alpha_1^{tn} \widehat{\alpha}_1) \\ &= s_{k,t} Os_{k,n}^{(t)} - \frac{(\alpha_1 \alpha_2)^t}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} (\alpha_1^{tn-t} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_2^{tn-t} \widehat{\alpha}_2) \\ &= s_{k,t} Os_{k,n}^{(t)} - (\alpha_1 \alpha_2)^t \left(\frac{\alpha_1^{t(n-1)} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_2^{t(n-1)} \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \end{aligned}$$

bulunur. $\alpha_1 \alpha_2 = -2k$ ve $Os_{k,n-1}^{(t)} = \frac{\alpha_1^{t(n-1)} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_2^{t(n-1)} \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}$ eşitliklerinden,

$$Os_{k,n+1}^{(s)} = s_{k,t} Os_{k,n}^{(t)} - (-2k)^t Os_{k,n-1}^{(t)}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.8.12. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları, n ve t nin negatif değerleri için aşağıda verilen eşitlikleri sağlar;

- i) $Os_{k,-n}^{(t)} = -(-2k)^{-tn} \frac{\alpha_2^{tn} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_1^{tn} \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t},$
- ii) $Os_{k,-n}^{(-t)} = (-2k)^t Os_{k,n}^{(t)},$
- iii) $Os_{k,n}^{(-t)} = -Os_{k,-n}^{(t)} (-2k)^{t(2n-1)}.$

İspat. (4.46) ifadesi kullanıldığında;

i)

$$Os_{k,-n}^{(t)} = \frac{\alpha_1^{-tn} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_2^{-tn} \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} = \frac{\frac{\widehat{\alpha}_1}{\alpha_1^{tn}} + \frac{\widehat{\alpha}_2}{\alpha_2^{tn}}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} = \frac{(\alpha_2^t)^n \widehat{\alpha}_1 + (\alpha_1^t)^n \widehat{\alpha}_2}{(\alpha_1 \alpha_2)^{tn} (\alpha_1^t + \alpha_2^t)}$$

$\alpha_1 \alpha_2 = -2k$ olduğundan

$$Os_{k,-n}^{(t)} = -(-2k)^{-tn} \frac{\alpha_2^{tn} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_1^{tn} \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}$$

dir.

ii)

$$\begin{aligned} Os_{k,-n}^{(-t)} &= \frac{\alpha_1^{tn} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_2^{tn} \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^{-t} + \alpha_2^{-t}} = \frac{\alpha_1^{tn} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_2^{tn} \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^{-t} + \alpha_2^{-t}} = \frac{\alpha_1^{tn} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_2^{tn} \widehat{\alpha}_2}{\frac{1}{\alpha_1^t} + \frac{1}{\alpha_2^t}} \\ &= (\alpha_1 \alpha_2)^t \frac{\alpha_1^{tn} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_2^{tn} \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \end{aligned}$$

dir. $\alpha_1 \alpha_2 = -2k$ ve $Os_{k,n}^{(t)} = \frac{\alpha_1^{tn} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_2^{tn} \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}$ olduğundan

$$Os_{k,-n}^{(-t)} = (-2k)^t Os_{k,n}^{(t)}$$

elde edilir.

iii)

$$\begin{aligned} Os_{k,n}^{(-t)} &= \frac{\alpha_1^{-tn} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_2^{-tn} \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^{-t} + \alpha_2^{-t}} = \frac{\frac{\widehat{\alpha}_1}{\alpha_1^{tn}} + \frac{\widehat{\alpha}_2}{\alpha_2^{tn}}}{\frac{1}{\alpha_1^t} + \frac{1}{\alpha_2^t}} = \frac{\alpha_2^{tn} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_1^{tn} \widehat{\alpha}_2}{(\alpha_1 \alpha_2)^{tn}} \frac{(\alpha_1 \alpha_2)^t}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \\ &= (\alpha_1 \alpha_2)^{t(n-1)} \frac{\alpha_2^{tn} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_1^{tn} \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \end{aligned}$$

dir. $\alpha_1 \alpha_2 = -2k$ ve i) den,

$$O_{k,n}^{(-t)} = -O_{k,-n}^{(t)}(-2k)^{t(2n-1)}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.8.13. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} O_{k,n}^{(t)} x^n = \frac{\frac{2}{j_{k,s}} - x}{1 - j_{k,s}x + (-2k)^s x^2}$$

dır.

İspat.

$$G_{kj q}(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} O_{k,n}^{(t)} x^n$$

olsun. Buradan

$$G_{kj q} = O_{k,0}^{(t)} + O_{k,1}^{(t)}x + O_{k,2}^{(t)}x^2 + O_{k,3}^{(t)}x^3 + \dots + O_{k,n}^{(t)}x^n + \dots \quad (4.47)$$

dir. Buradan (4.47) eşitliğin her iki tarafı $-s_{k,t}x$ ve $(-2k)^t x^2$ ile çarpılırsa

$$-s_{k,t}x G_{kj q} = -s_{k,t}x O_{k,0}^{(t)} - s_{k,t}x^2 O_{k,1}^{(t)} - s_{k,t}x^3 O_{k,2}^{(t)} - \dots - s_{k,t}x^{n+1} O_{k,n}^{(t)} + \dots \quad (4.48)$$

ve

$$\begin{aligned} (-2k)^t x^2 G_{kj q} &= (-2)^t x^2 O_{k,0}^{(t)} + (-2)^t x^3 O_{k,1}^{(t)} + (-2)^t x^4 O_{k,2}^{(t)} + \dots \\ &+ (-2)^t x^n O_{k,n}^{(t)} + \dots \end{aligned} \quad (4.49)$$

elde edilir. Buradan (4.47), (4.48) ve (4.49) ile verilen eşitlikler taraf tarafa toplanırsa yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının yineleme (rekürans) bağıntısına göre

$$G_{kj q} - s_{k,t}x G_{kj q} + (-2k)^t x^2 G_{kj q} = O_{k,0}^{(t)} + O_{k,1}^{(t)}x - s_{k,t}x O_{k,0}^{(t)}$$

olmak üzere

$$G_{kj q}(1 - s_{k,t}x + (-2k)^t x^2) = \frac{2}{s_{k,t}} + x - 2x$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$G_{kj q}(x, s) = \frac{\frac{2}{s_{k,t}} - x}{1 - s_{k,t}x + (-2k)^t x^2}$$

dır. ■

Teorem 4.8.14. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} Os_{k,n}^{(t)} \frac{x^n}{n!} = \frac{\widehat{\alpha}_1 e^{\alpha_1^t x} + \widehat{\alpha}_2 e^{\alpha_2^t x}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}$$

dir.

İspat. $H_{kjq}(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} Os_{k,n}^{(t)} \frac{x^n}{n!}$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} H_{kjq}(x, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_1^{tn} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_2^{tn} \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{\widehat{\alpha}_1}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1^t)^n x^n}{n!} + \frac{\widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_2^t)^n x^n}{n!} \\ &= \frac{\widehat{\alpha}_1}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1^t x)^n}{n!} + \frac{\widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_2^t x)^n}{n!} \end{aligned}$$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ olduğundan

$$H_{kjq}(x, s) = \frac{\widehat{\alpha}_1}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} e^{\alpha_1^t x} + \frac{\widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} e^{\alpha_2^t x} = \frac{\widehat{\alpha}_1 e^{\alpha_1^t x} + \widehat{\alpha}_2 e^{\alpha_2^t x}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.8.15. Her $n, m \in \mathbb{Z}$ yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları için genelleştirilmiş üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} Os_{k,n+m}^{(t)} x^n = \frac{Os_{k,m}^{(t)} - (-2)^t Os_{k,t(m-1)}^{(t)} x}{1 - s_{k,t} x + (-2)^t x^2}$$

dır.

İspat. Yüksek mertebeden k –Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının Binet formülünü kullanıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} Os_{k,n+m}^{(t)} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_1^{tn+tm} \widehat{\alpha}_1 + \alpha_2^{tn+tm} \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1^t)^{n+m} \widehat{\alpha}_1}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_2^t)^{n+m} \widehat{\alpha}_2}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} x^n \\ &= \frac{\widehat{\alpha}_1 \alpha_1^{tm}}{\alpha_1^t + \alpha_1^t} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^{tn} x^n + \frac{\widehat{\alpha}_2 \alpha_2^{tm}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_2^{tn} x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\widehat{\alpha}_1 \alpha_1^{tm}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1^t x)^n + \frac{\widehat{\alpha}_2 \alpha_2^{tm}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_2^t x)^n \\
&= \left(\frac{\widehat{\alpha}_1 \alpha_1^{tm}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \left(\frac{1}{1 - \alpha_1^t x} \right) + \left(\frac{\widehat{\alpha}_2 \alpha_2^{tm}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \left(\frac{1}{1 - \alpha_2^t x} \right) \\
&= \left(\frac{1}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \left[\frac{\widehat{\alpha}_1 \alpha_1^{tm} - \widehat{\alpha}_1 \alpha_1^{tm} \alpha_2^t x + \widehat{\alpha}_2 \alpha_2^{tm} - \widehat{\alpha}_2 \alpha_2^{tm} \alpha_1^t x}{1 - (\alpha_1^t + \alpha_2^t)x + (\alpha_1 \alpha_2)^t x^2} \right] \\
&= \left(\frac{1}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \left[\frac{\widehat{\alpha}_1 \alpha_1^{tm} + \widehat{\alpha}_2 \alpha_2^{tm}}{1 - s_{k,t}x + (-2)^t x^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\alpha_1 \alpha_2)^t (\widehat{\alpha}_1 (\alpha_1^t)^{m-1} + \widehat{\alpha}_2 (\alpha_2^t)^{m-1})x}{1 - s_{k,t}x + (-2)^t x^2} \right] \\
&= \left[\frac{Os_{k,m}^{(t)} - (-2)^t Os_{k,t(m-1)}^{(t)} x}{1 - s_{k,t}x + (-2)^t x^2} \right] = \frac{Os_{k,m}^{(t)} - (-2)^t Os_{k,t(m-1)}^{(t)} x}{1 - s_{k,t}x + (-2)^t x^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 4.8.16. $\widehat{\alpha}_1 = (1 + (\alpha_1^t)^{n\mathbb{I}} + (\alpha_1^t)^{n+1\mathbb{J}} + (\alpha_1^t)^{n+2\mathbb{K}})$, $\widehat{\alpha}_2 = (1 + (\alpha_2^t)^{n\mathbb{I}} + (\alpha_2^t)^{n+1\mathbb{J}} + (\alpha_2^t)^{n+2\mathbb{K}})$ olmak üzere

$$\widehat{\alpha}_1 \widehat{\alpha}_2 = \sigma - v\varphi \quad (4.50)$$

ve

$$\widehat{\alpha}_2 \widehat{\alpha}_1 = \sigma + v\varphi \quad (4.51)$$

dir. Burada

$$\sigma = (1 - (-2k)^{tn} - (-2k)^{tn+t} - (-2k)^{tn+2t} + s_{k,tn}\mathbb{I} + s_{k,tn+t}\mathbb{J} + s_{k,tn+2t}\mathbb{K}),$$

$$v = (-2)^{t+tn}\mathbb{I} - (-2)^{tn}s_{k,t}\mathbb{J} + (-2)^{tn}\mathbb{K},$$

$$\varphi = (\alpha_1^t - \alpha_2^t)$$

dir.

İspat. (4.50) eşitliğinin ispatı

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha}_1 \widehat{\alpha}_2 &= (1 + (\alpha_1^t)^{n\mathbb{I}} + (\alpha_1^t)^{n+1\mathbb{J}} + (\alpha_1^t)^{n+2\mathbb{K}})(1 + (\alpha_2^t)^{n\mathbb{I}} + (\alpha_2^t)^{n+1\mathbb{J}} + (\alpha_2^t)^{n+2\mathbb{K}}) \\
&= 1 + (\alpha_2^t)^{n\mathbb{I}} + (\alpha_2^t)^{n+1\mathbb{J}} + (\alpha_2^t)^{n+2\mathbb{K}} + (\alpha_1^t)^{n\mathbb{I}} - (\alpha_1^t)^n (\alpha_2^t)^n \\
&\quad + (\alpha_1^t)^n (\alpha_2^t)^{n+1\mathbb{K}} - (\alpha_1^t)^n (\alpha_2^t)^{n+2\mathbb{J}} + (\alpha_1^t)^{n+1\mathbb{J}} \\
&\quad - (\alpha_1^t)^{n+1} (\alpha_1^t)^n \mathbb{K} - (\alpha_1^t)^{n+1} (\alpha_2^t)^{n+1} + (\alpha_1^t)^{n+1} (\alpha_1^t)^n (\alpha_2^t)^{n+2\mathbb{I}} \\
&\quad + (\alpha_1^t)^{n+2\mathbb{K}} + (\alpha_1^t)^{n+2} (\alpha_1^t)^n \mathbb{J} - (\alpha_1^t)^{n+2} (\alpha_2^t)^{n+1\mathbb{I}} \\
&\quad - (\alpha_1^t)^{n+2} (\alpha_1^t)^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - (-2k)^{tn} - (-2k)^{tn+t} - (-2k)^{tn+2t}) \\
&\quad + (\alpha_1^{tn} + \alpha_2^{tn} + \alpha_1^{tn+t} \alpha_2^{tn+2t} - \alpha_1^{tn+2t} \alpha_2^{tn+t}) \mathbb{I} \\
&\quad + (\alpha_1^{tn+t} + \alpha_2^{tn+t} - \alpha_1^{tn} \alpha_2^{tn+2t} + \alpha_1^{tn+2t} \alpha_2^{tn}) \mathbb{J} \\
&\quad + (\alpha_1^{tn+2t} + \alpha_2^{tn+2t} + \alpha_1^{tn} \alpha_2^{tn+t} - \alpha_1^{tn+t} \alpha_2^{tn}) \mathbb{K} \\
&= (1 - (-2k)^{tn} - (-2k)^{tn+t} - (-2k)^{tn+2t} + s_{k,tn} \mathbb{I} + s_{k,tn+t} \mathbb{J} + s_{k,tn+2t} \mathbb{K}) \\
&\quad - (-2k)^{tn+t} (\alpha_1^t - \alpha_2^t) \mathbb{I} + (-2)^{tn} (\alpha_1^{2t} - \alpha_2^{2t}) \mathbb{J} \\
&\quad - (-2)^{tn} (\alpha_1^t - \alpha_2^t) \mathbb{K} \\
&= (1 - (-2k)^{tn} - (-2k)^{tn+t} - (-2k)^{tn+2t} + s_{k,tn} \mathbb{I} + s_{k,tn+t} \mathbb{J} + s_{k,tn+2t} \mathbb{K}) \\
&\quad - (-2)^{tn} (\alpha_1^t - \alpha_2^t) ((-2)^t \mathbb{I} - (\alpha_1^t + \alpha_2^t) \mathbb{J} + \mathbb{K}) \\
&= (1 - (-2k)^{tn} - (-2k)^{tn+t} - (-2k)^{tn+2t} + s_{k,tn} \mathbb{I} + s_{k,tn+t} \mathbb{J} + s_{k,tn+2t} \mathbb{K}) \\
&\quad - (\alpha_1^t - \alpha_2^t) ((-2)^{t+tn} \mathbb{I} - (-2)^{tn} s_{k,t} \mathbb{J} + (-2)^{tn} \mathbb{K}) \\
&= \sigma - v\varphi
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.51) in ispatı yapılır. ■

Teorem 4.8.17. (Vajda Özdeşliği) Her $n, m, r \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned}
&Os_{k,n+m}^{(t)} Os_{k,n+r}^{(t)} - Os_{k,n}^{(t)} Os_{k,n+m+r}^{(t)} \\
&= \frac{(-2k)^{tn} (\alpha_1^{tm} - \alpha_2^{tm}) ((\alpha_2^{tr} - \alpha_1^{tr}) \sigma - s_{k,t} Os_{k,r}^{(t)} v\varphi)}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2}
\end{aligned}$$

dır.

İspat. $Os_{k,n}^{(t)}$ kuaterniyonlarının Binet formülü kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
&OJ_{k,n+m}^{(s)} OJ_{k,n+r}^{(s)} - OJ_{k,n}^{(s)} OJ_{k,n+m+r}^{(s)} \\
&= \left(\frac{(\alpha_1^t)^{n+m} \widehat{\alpha_1} + (\alpha_2^t)^{n+m} \widehat{\alpha_2}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \left(\frac{(\alpha_1^t)^{n+r} \widehat{\alpha_1} + (\alpha_2^t)^{n+r} \widehat{\alpha_2}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \\
&\quad - \left(\frac{(\alpha_1^t)^n \widehat{\alpha_1} + (\alpha_2^t)^n \widehat{\alpha_2}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \left(\frac{(\alpha_1^t)^{n+m+r} \widehat{\alpha_1} + (\alpha_2^t)^{n+m+r} \widehat{\alpha_2}}{\alpha_1^t + \alpha_2^t} \right) \\
&= \frac{\alpha_1^{tn+tm} \widehat{\alpha_1} \alpha_2^{tn+tr} \widehat{\alpha_2} + \alpha_2^{tn+tm} \widehat{\alpha_2} \alpha_1^{tn+tr} \widehat{\alpha_1} - \alpha_1^{tn} \widehat{\alpha_1} \alpha_2^{tn+tm+tr} \widehat{\alpha_2} - \alpha_2^{tn} \widehat{\alpha_2} \alpha_1^{tn+tm+tr} \widehat{\alpha_1}}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\
&= \frac{\alpha_1^{tn} \alpha_2^{tn+tr} \widehat{\alpha_1} \widehat{\alpha_2} (\alpha_1^{tm} - \alpha_2^{tm}) + \alpha_1^{tn+tr} \alpha_2^{tn} \widehat{\alpha_2} \widehat{\alpha_1} (\alpha_2^{tm} - \alpha_1^{tm})}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\
&= \frac{\alpha_1^{tn} \alpha_2^{tn} (\alpha_1^{tm} - \alpha_2^{tm}) (\alpha_2^{tr} \widehat{\alpha_1} \widehat{\alpha_2} - \alpha_1^{tr} \widehat{\alpha_2} \widehat{\alpha_1})}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2}
\end{aligned}$$

bulunur. Yardımcı Teorem 4.8.16 dan,

$$\begin{aligned}
& OS_{k,n+m}^{(t)} OS_{k,n+r}^{(t)} - OS_{k,n}^{(s)} OS_{k,n+m+r}^{(s)} \\
&= \frac{(-2k)^{tn}(\alpha_1^{tm} - \alpha_2^{tm})(\alpha_2^{tr}(\sigma - v\varphi) - \alpha_1^{tr}(\sigma + v\varphi))}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\
&= \frac{(-2k)^{tn}(\alpha_1^{tm} - \alpha_2^{tm})(\alpha_2^{tr}\sigma - \alpha_2^{tr}v\varphi - \alpha_1^{tr}\sigma - \alpha_1^{tr}v\varphi)}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\
&= \frac{(-2k)^{tn}(\alpha_1^{tm} - \alpha_2^{tm})((\alpha_2^{tr} - \alpha_1^{tr})\sigma - (\alpha_1^{tr} + \alpha_2^{tr})v\varphi)}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2} \\
&= \frac{(-2k)^{tn}(\alpha_1^{tm} - \alpha_2^{tm})((\alpha_2^{tr} - \alpha_1^{tr})\sigma - s_{k,t}OS_{k,r}^{(t)}v\varphi)}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.8.18. (Catalan Özdeşliği) Her $n, l \in \mathbb{Z}$ için

$$OS_{k,n-l}^{(t)} OS_{k,n+l}^{(t)} - \left(OS_{k,n}^{(t)}\right)^2 = \frac{(-2k)^{t(n-l)}(\alpha_2^{tl} - \alpha_1^{tl})((\alpha_2^{tl} - \alpha_1^{tl})\sigma - s_{k,t}OS_{k,l}^{(t)}v\varphi)}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2}$$

dir.

İspat. Teorem 4.8.17. Vajda özdeşliğinde $m = -l$ ve $r = l$ alınırsa,

$$OS_{k,n-l}^{(t)} OS_{k,n+l}^{(t)} - \left(OS_{k,n}^{(t)}\right)^2 = \frac{(-2k)^{t(n-l)}(\alpha_2^{tl} - \alpha_1^{tl})((\alpha_2^{tl} - \alpha_1^{tl})\sigma - s_{k,t}OS_{k,l}^{(t)}v\varphi)}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.8.19. (Cassini Özdeşliği) Her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$OS_{k,n-1}^{(t)} OS_{k,n+1}^{(t)} - \left(OS_{k,n}^{(t)}\right)^2 = \frac{(-2k)^{t(n-1)}(\alpha_2^t - \alpha_1^t)((\alpha_2^t - \alpha_1^t)\sigma - s_{k,t}OS_{k,1}^{(t)}v\varphi)}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2}$$

dır. ■

İspat. Teorem 4.8.17. Vajda özdeşliğinde $r = 1$ ve $m = -1$ alınırsa,

$$OS_{k,n-1}^{(t)} OS_{k,n+1}^{(t)} - \left(OS_{k,n}^{(t)}\right)^2 = \frac{(-2k)^{t(n-1)}(\alpha_2^t - \alpha_1^t)((\alpha_2^t - \alpha_1^t)\sigma - s_{k,t}OS_{k,1}^{(t)}v\varphi)}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.8.20. (d'Ocagne Özdeşliği) Her $n, l \in \mathbb{Z}$ için

$$OS_{k,l}^{(t)} OS_{k,n+1}^{(t)} - OS_{k,n}^{(t)} OS_{k,l+1}^{(t)} = \frac{(-2k)^{tn}(\alpha_1^{t(l-n)} - \alpha_2^{t(l-n)})((\alpha_2^t - \alpha_1^t)\sigma - s_{k,t}OS_{k,r}^{(t)}v\varphi)}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2}$$

dır.

İspat. Teorem 4.8.17. Vajda özdeşliğinde $m + n = l$ ve $r = 1$ alınırsa,

$$Os_{k,l}^{(t)} Os_{k,n+1}^{(t)} - Os_{k,n}^{(t)} Os_{k,l+1}^{(t)} = \frac{(-2k)^{tn} (\alpha_1^{t(l-n)} - \alpha_2^{t(l-n)}) ((\alpha_2^t - \alpha_1^t)\sigma - s_{k,t} Os_{k,r}^{(t)} \nu \varphi)}{(\alpha_1^t + \alpha_2^t)^2}$$

elde edilir. ■

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. Sonuç

Bu tezde sonuç olarak, yüksek mertebeden Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas sayıları ve bu sayıların kuaterniyon formları tanımlanmıştır. Bu sayıların genelleştirilmesi olarak k –Jacobsthal, k –Jacobsthal-Lucas sayılarının yüksek mertebeden formları tanımlanıp kuaterniyonları incelenmiştir. Öncelikle Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıların yeni bir Binet benzeri formülle yüksek mertebeden formları tanımlanarak genellemesi incelenmiştir. Bu sayıların temel özellikleri olan yineleme (rekürans) bağıntısı, üreteç fonksiyonu, üstel üreteç fonksiyonu, negatif indisli terimleri ve bazı önemli Cassini, Catalan, d’Ocagne ve Vajda özdeşlikleri hesaplanmıştır. Ardından, bu sayılar kuaterniyonlarla ilişkilendirilerek yüksek mertebeden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının kuaterniyonları tanımlanmıştır. Bu sayıların hem kuaterniyon özellikleri hem de sayı dizisi özellikleri detaylı olarak incelenmiştir. Daha sonra, yeni bir Binet benzeri formül ile yüksek mertebeden k –Jacobsthal, k –Jacobsthal-Lucas sayıları tanımlanmış, temel özellikleri incelenmiş ve bu sayıların Cassini, Catalan, d’Ocagne ve Vajda gibi önemli özdeşlikleri hesaplanmıştır. Bu sayıların genelleştirilmesi olarak kuaterniyonları tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Ardından sayı dizisi özellikleri incelenmiş ve önemli özdeşlikler hesaplanmıştır. Bu tez çalışmasında teorik olarak geliştirilen yüksek mertebeden Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları, sadece soyut bir cebirsel yapı sunmakla kalmayıp aynı zamanda aşağıda verilen çeşitli uygulamalı alanlarda da potansiyel kullanıma sahiptir.

- Sinyal İşleme: Jacobsthal dizilerinin ikili sayı sistemleri ve kodlama teorisindeki rolü, yüksek mertebeden s parametresiyle birleştiğinde, sinyal çözünürlüğünün farklı ölçeklerde analiz edilmesine imkân tanıyabilir.
- Robotik ve Dönüşümler: Kuaterniyonların 3D rotasyonlardaki kararlılığı, bu tezde sunulan yüksek mertebeden dizisel bileşenler sayesinde hareket yörüngelerinin daha esnek ve parametrik olarak kontrol edilmesine altyapı oluşturabilir.
- Kriptografik Güvenlik: Yeni tanımlanan genelleştirilmiş özdeşlikler (Cassini, Catalan, Vajda), veri şifreleme algoritmalarında anahtar uzayının (key space) genişletilmesi ve karmaşıklığın artırılması için matematiksel bir temel sunmaktadır.

5.2. Öneriler

Bu tezdeki çalışmalar kuaterniyonların bir genellemesi olarak oktoniyonlara uygulanabilir. Yüksek mertebeden bu diziler başka farklı sayı dizilerinde tanımlanarak bu sayıların kuaterniyonları incelenebilir.

KAYNAKÇA

- Akkuş, H., Üregen, R. N., & Özkan, E. (2021). A New Approach to k -Jacobsthal Lucas Sequences. *Sakarya University Journal of Science*, 25(4), 969–973. <https://doi.org/10.16984/saufenbilder.842489>
- Bród, D., & Szynal-Liana, A. (2026). On Generalized Commutative Jacobsthal Quaternions. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 50(5), 787–799.
- Falcon, S. (2014). On the k -Jacobsthal Numbers. *American Review of Mathematics and Statistics*, 2(1), 67–77.
- Halici, S. (2012). On Fibonacci Quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 22(2), 321–327. <https://doi.org/10.1007/s00006-011-0317-1>
- Hamilton, W. R. (1866). *Elements of Quaternions*. London: Longmans, Green, & Company.
- Hoggatt Jr, V. E. (1969). *Fibonacci and Lucas Numbers*. The Fibonacci Association University of Santa Clara, CA 95053.
- Horadam, A. F. (1961). A Generalized Fibonacci Sequence. *The American Mathematical Monthly*, 68(5), 455–459.
- Horadam, A. F. (1963). Complex Fibonacci Numbers and. *The American Mathematical Monthly*, 70(3), 289–291.
- Horadam, A. F. (1996). Jacobsthal representation numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 34(1), 40–54.
- Jhala, D., Sisodiya, K., & Rathore, G. P. S. (2013). On Some Identities for k -Jacobsthal Numbers. *Journal of Math. Analysis*, 7(12), 551–556.
- Kizilateş, C., & Kone, T. (2021). On higher order Fibonacci quaternions. *Journal of Analysis*, 29(4), 1071–1082. <https://doi.org/10.1007/s41478-020-00295-1>
- Kızılateş, C. (2025). A Different Approach To Gauss Fibonacci Polynomials. *Contributions to Discrete Mathematics*, 19(4), 1–10.
- Kızılateş, C., & Yachani, S. T. (2025). On Higher-Order Gaussian Fibonacci Quaternions and Their Properties. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 65(4), 674–688. <https://doi.org/10.1134/S0965542525700137>
- Koshy, T. (2019). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications* (Vol. 2). John Wiley & Sons.
- Kuloğlu, B., Peters, J. F., Uysal, M., & Özkan, E. (2025). Investigation Of Higher Order Horadam Numbers, Their Associated Transforms And Self-Similarity. *Mathematica Montisnigri*, (63), 33–46.

- Mamagani, A. B., & Jafari, M. (2013). On Properties of Generalized Quaternion Algebra. *Journal of Novel Applied Sciences*, 12(2), 683–689.
- Özimamoğlu, H. (2024). On Higher Order Jacobsthal Hyper Complex Numbers. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 16(1), 35–44. <https://doi.org/10.47000/tjmcs.1195463>
- Özkan, E., & Uysal, M. (2023). On Quaternions with Higher Order Jacobsthal Numbers Components. *Gazi University Journal of Science*, 1(36), 336–347. <https://doi.org/10.35378/gujs>
- Özvatan, M. (2018). *Generalized Golden-Fibonacci Calculus and Applications*. (Master's Thesis). İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü. Tez No.512033.
- Sigler, L. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Springer-Verlag New York Inc.
- Szynał-Liana, A., & Włoch, I. (2016). A Note on Jacobsthal Quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(1), 441–447. <https://doi.org/10.1007/s00006-015-0622-1>
- Szynał-Liana, A., & Włoch, I. (2022). Generalized commutative quaternions of the Fibonacci type. *Boletín de La Sociedad Matemática Mexicana*, 28(1), 1–9. <https://doi.org/10.1007/s40590-021-00386-4>
- Taşçı, D. (2017). On k-Jacobsthal and k-Jacobsthal- Lucas Quaternions. *Journal of Science and Arts*, 17(3), 469–476.
- Torunbalcı Aydın, F., & Yüce, S. (2017). A New Approach to Jacobsthal Quaternions. *Filomat*, 31(18), 5567–5579.
- Uygun, Ş., & Eldoğan, H. (2016). Properties of k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas Sequences. *Gen. Math. Notes*, 36(1), 34–47.
- Uysal, M., & Özkan, E. (2022). Higher-Order Jacobsthal–Lucas Quaternions. *Axioms*, 11(12). <https://doi.org/10.3390/axioms11120671>