



T.C

BATMAN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**YÜKSEK MERTEBEDEN KESİRLİ İNTEGRO-DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN HOMOTOPİ-PADÉ YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN

Sevgi SÖYÜNCÜ

HAZİRAN, 2023

BATMAN



T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

TEZ KABUL VE ONAYI

Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT danışmanlığında Sevgi SÖYÜNCÜ tarafından hazırlanan “Yüksek Mertebeden Kesirli İntegro-Diferensiyel Denklemlerin Homotopi-Padé Yöntemiyle Çözümü” adlı tez çalışması 14/06/2023 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan(Üye)

Doc. Dr. Müge SAKAR

Danışman(Üye)

Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT

Üye

Doc. Dr. Hasan DALMAN

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum.

Prof. Dr. Osman PAKMA

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Sevgi SÖYÜNCÜ

14706/2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÜKSEK MERTEBEDEN KESİRLİ İNTEGRO-DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HOMOTOPİ-PADÉ YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

Sevgi SÖYÜNCÜ

Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT

2023, 50 Sayfa

Jüri

Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT

Doc. Dr. Müge SAKAR

Doc. Dr. Hasan DALMAN

Bu tezde, yüksek mertebeden kesirli integro-diferensiyel denklemlerin nümerik çözümleri ele alınmıştır. Homotopi Analiz metoduyla elde edilen seri çözümlerinin farklı h değerleri için Padé yaklaşımıyla elde edilen sonuçların ne kadar etkili olduğu incelenmiştir. Farklı h değerleri için bulunan Padé yaklaşımları kesin çözümlerle karşılaştırılmıştır. Ve daha etkili olan parametreler belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Homotopi Analiz Metodu, Kesirli Türev, Kesirli İntegro-Diferensiyel Denklem, Padé Yaklaşım

ABSTRACT

MS THESIS

Homotopy-Padé Method Solutions of Higher Order Fractional of Integro-Differential Equations

Sevgi SÖYÜNCÜ

Batman University Graduate Education Institute

Department of Mathematics

Advisor: Asst. Prof. Dr. Veyis TURUT.

2023, 50 Pages

Jury

Asst. Prof. Dr. Veyis TURUT

Assoc. Prof. Dr. Müge SAKAR

Assoc. Prof. Dr. Hasan DALMAN

In this thesis, numerical solutions of higher order fractional integro-differential equations are discussed. The effectiveness of the results obtained with the Padé approach different h values of the series solutions obtained by the Homotopy Analysis method has been examined. Padé approximations for different h values are compared with exact solutions. And more effective parameters are determined.

Keywords: Fractional Derivative, Fractional integro-differential equation, Homotopy analysis method, Padé approach.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında ve yürütülmesinde değerli görüşlerinden faydalandığım, tecrübeleriyle çalışmalarımnda etkin katkıları bulunan ve beni yönlendiren danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, yaşamımın her aşamasında ve öğretim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

Sevgi SÖYÜNCÜ

BATMAN-2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
KISALTMA LİSTESİ.....	ix
SİMGELER LİSTESİ.....	x
ŞEKİLLER TABLOSU.....	xi
ÇİZELGELER TABLOSU.....	xiii
1.GİRİŞ.....	1
2.TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Gama Fonksiyonu.....	3
2.2 Hata Fonksiyonu.....	4
2.3 Anger Fonksiyonu.....	5
2.4 Beta Fonksiyonu.....	5
2.5 Mittag-Leffler Fonksiyonu.....	5
3. KESİRLİ TÜREV VE KESİRLİ İNTEGRAL.....	6
3.1 Kesirli Türev.....	6
3.2 Rieman-Liouville Kesirli Türev.....	6
3.3 Caputo Kesirli Türev.....	6
3.4 Grünwald Letnikov Kesirli Türev.....	7
3.5 Rieman-Liouville Kesirli İntegral.....	7
3.6 Kesirli Diferensiyel Denklemler.....	7
3.7 İntegro Diferensiyel Denklemler.....	8
3.8 Kesirli İntegro-Diferensiyel Denklemler.....	8
4. HOMOTOPİ ANALİZ METODU.....	9

5. PADÉ YAKLAŞIMI.....	11
6. UYGULAMALAR.....	15
7.SONUÇ.....	48
8. KAYNAKLAR.....	50
9. ÖZGEÇMİŞ.....	51



KISALTMA LİSTESİ

HAM : Homotopi Analiz Metodu



SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Gerçek Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif Tam Sayılar Kümesi
$r_{m,n}^h$	: h değerleri için (m,n) dereceli Padé Yaklaşımı
$[m,n]$	: (m,n) dereceli Padé Yaklaşımı
D^α	: α – mertebeden Caputo Kesirli Türev
H_α^h	: h değerleri için Homotopi Analiz Metoduna ait seri çözümler

ŞEKİLLER TABLOSU

Şekil 5.1	$f(x) = \sqrt{x+1}$, kuvvet serisi ve $r_{3,2}(x)$ Padé yaklaşımı.....	14
Şekil 6.1.	$y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,3}^{-0.5}(x)$ Padé yaklaşımı.....	17
Şekil 6.2.	$y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,5}^{-0.5}(x)$ Padé yaklaşımı.....,,,	18
Şekil 6.3.	$y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,3}^{-0.8}(x)$ Padé yaklaşımı.....	19
Şekil 6.4.	$y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,5}^{-0.8}(x)$ Padé yaklaşımı.....	20
Şekil 6.5.	$y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,3}^{-0.9}(x)$ Padé yaklaşımı.....	21
Şekil 6.6.	$y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,5}^{-0.9}(x)$ Padé yaklaşımı.....	21
Şekil 6.7.	$y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,3}^{-1.0}(x)$ Padé yaklaşımı.....	22
Şekil 6.8.	$y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,5}^{-1.0}(x)$ Padé yaklaşımı.....	23
Şekil 6.9.	$y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,3}^{-1.2}(x)$ Padé yaklaşımı.....	24
Şekil 6.10.	$y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,5}^{-1.2}(x)$ Padé yaklaşımı.....	25
Şekil 6.11.	$y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,3}^{-1.5}(x)$ Padé yaklaşımı.....	26
Şekil 6.12.	$y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,5}^{-1.5}(x)$ Padé yaklaşımı.....	27
Şekil 6.13.	$y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{16,17}^{-0.3}(x)$ Padé yaklaşımı.....	33
Şekil 6.14.	$y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{20,23}^{-0.3}(x)$ Padé yaklaşımı.....	34
Şekil 6.15.	$y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{16,17}^{-0.5}(x)$ Padé yaklaşımı.....	35
Şekil 6.16.	$y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{20,23}^{-0.5}(x)$ Padé yaklaşımı.....	36
Şekil 6.17.	$y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{16,17}^{-0.8}(x)$ Padé yaklaşımı.....	37

Şekil 6.18.	$y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{20,23}^{-0.8}(x)$ Padé yaklaşımı.....	38
Şekil 6.19.	$y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{16,17}^{-1.0}(x)$ Padé yaklaşımı.....	39
Şekil 6.20.	$y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{20,23}^{-1.0}(x)$ Padé yaklaşımı.....	40
Şekil 6.21.	$y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{16,17}^{-1.2}(x)$ Padé yaklaşımı.....	41
Şekil 6.22.	$y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{20,23}^{-1.2}(x)$ Padé yaklaşımı.....	42
Şekil 6.23.	$y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{16,17}^{-1.5}(x)$ Padé yaklaşımı.....	44
Şekil 6.24.	$y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{20,23}^{-1.5}(x)$ Padé yaklaşımı.....	45

ÇİZELGELER

Çizelge 2.1. Gamma Fonksiyonun bazı rakamsal değerleri.....	4
Çizelge 5.1. Padé Tablosu	13
Çizelge 6.1. $\alpha = 4$ için farklı h değerleri için A ve B dğerleri.....	16
Çizelge 6.2. $\alpha = 4$ için farklı h değerleri için A ve B dğerleri.....	17
Çizelge 6.3. $\alpha = 4$ için farklı h değerleri için A, B ve C değerleri.....	33
Çizelge 6.4. $\alpha = 4$ için farklı h değerleri için A, B ve C değerleri.....	34
Çizelge 6.5. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm ve HAM'a ait seri çözümlerin [5,3] Padé nümerik değerleriyle karşılaştırılması.....	29
Çizelge 6.6. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm ve HAM'a ait seri çözümlerin [5,3] Padé nümerik değerleriyle karşılaştırılması.....	29
Çizelge 6.7. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm ve HAM'a ait seri çözümlerin [5,5] Padé nümerik değerleriyle karşılaştırılması.....	30
Çizelge 6.8. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm ve HAM'a ait seri çözümlerin [5,5] Padé nümerik değerleriyle karşılaştırılması.....	30
Çizelge 6.9. $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm ve HAM'a ait seri çözümlerin [16,17] Padé nümerik değerleriyle karşılaştırılması.....	47
Çizelge6.10 $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm ve HAM'a ait seri çözümlerin [16,17] Padé nümerik değerleriyle karşılaştırılması.....	47
Çizelge6.11 $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm ve HAM'a ait seri çözümlerin [20,23] Padé nümerik değerleriyle karşılaştırılması.....	48
Çizelge6.12 $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm ve HAM'a ait seri çözümlerin [20,23] Padé nümerik değerleriyle karşılaştırılması.....	48

1.GİRİŞ

Türev yaklaşık 300 yıldır kullanılmaktadır. Yaygın olarak tam sayı dereceli türev uygulamaları bilinmektedir. Son zamanlarda tam sayı olmayan kesirli veya kompleks değerli türevlerde de araştırmayapılmaktadır. Tam sayılı türevler için uygulanan yöntemler kesirli türevler için doğru sonuçlar doğurmaması da bu süreci tetiklemiştir. Temelde tam sayılı türev ve kesirli türev arasındaki farkları şöyle ifade edebiliriz. Tam sayılı türevde sabitin türevi sıfırken kesirli türevde sıfırdan farklı sınıfa yakın bir değer almaktadır. Bir diğer farkta kesirli türevde bazı özel fonksiyonlardan yararlanılmaktadır. Bir diğer fark ise kesirli türevin birden fazla tanımının olmasıdır.

Birden fazla kesirli türev tanımı en iyi sonuçlar için farklı yolların araştırılmasına yol açmıştır. Bazı kesirli türev tanımları şu şekildedir: Laplace, Euler, Liouville, Riemann, Fouier, Abel, Grünwald, Letnikov, Weyl.. En sık kullanılanlar ise Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo kesirli türevlerdir.

Kesirli mertebeli diferansiyel denklemleri ve sistemleri analitik olarak çözmek zordur. Bu zorlukları giderebilmek için nümerik ve yarı nümerik yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları Varyasyonel Iterasyon, Homotopi Perturbasyon, Adomian Ayrıştırma Metodu ve Diferansiyel Dönüşüm metodudur. Ayrıca Laplace transform, Fractional Green's function ve Mellin transform yöntemi de bu yöntemlerden bazılarıdır (Podlubny, 1999).

Homotopi Analiz Metodu, 1992 yılında Liao tarafından (Liao,2008) geliştirilmiştir. Homotopi Analiz Metodu(HAM), topoloji ve diferansiyel geometride temel bir kavram olan homotopi temeline dayanır. HAM yardımıyla, ele alınan denklemlerin tam çözümü için tahmini bir başlangıç yaklaşımın sürekli bir dönüşüm oluşturur. Sürekli dönüşüm oluşturmak için yardımcı bir lineer operatör ve yardımcı parametre oluşturulur ve çözüm serisinin yakınsaklığını sağlamak için kullanılır. Metodun uygulamasında başlangıç tahmini değerleri seçimi ve yardımcı lineer operatörlerin oluşturulması probleme bağlıdır. Bu durum lineer olmayan bir problemi daha basit, teorik olarak sonsuz sayıdaki lineer birbiriyle ardışık alt problemlere dönüştürebilir (Liao ve Tan, 2007).

“Öklid algoritması ve sürekli kesirlere bağlı olarak ortaya çıkan ve geliştirilen Padé yaklaşımının geçmişi çok eskidir. Henri Euqéne Padé tarafından kullanılan şekliyle günümüze ulaşana kadar bir çok ünlü matematikçi farklı problemlere çözüm bulabilmek amacıyla Padé yaklaşımı kullandı. Euler, C. G. J Jacobi, Michell Rolle, Georg Ferdinand Frobinus, Jean Darboux ve Daniel Bernoulli gibi matematikçiler tarafından matematiğin farklı alanlarında farklı problemlere çözüm bulabilmek için kullanıldı” (Turut, 2007).

Günümüzde yaygın bir şekilde Padé yaklaşımları diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde, kuvvet serilerinin analitik devam problemlerde, ortogonal polinomlar üzerinde çalışmalarda, kuvvet serilerine ait singüleritenin, sıfır noktalarının bulunmasında kullanılır. Padé yaklaşımlarının diğer nümerik yaklaşımlara göre daha iyi sonuçlar vermesi, bu yaklaşıma olan ilgiyi arttırdı ve sadece matematikte değil, fizikte, kimyada, astronomide ve daha farklı bilimsel alanda kullanılmasına yol açtı (Turut, 2007).

Bu çalışma homotopi analiz metodundan elde edilen seri çözümlerinin padé yaklaşımları hesaplanmıştır HAM’a ait seri çözümlerde bulunan h yardımcı parametresinin farklı değerleri için farklı seri çözümler elde edilmiştir. Elde edilen her seri çözüme iki farklı padé yaklaşımı uygulanmıştır. Yapılan hesaplamalarda homotopi analiz metoduna ait seri çözümlerin padé yaklaşımları kesin çözümlerle karşılaştırılmıştır. Ve en etkili h değerleri uygulamalar bölümü Değerlendirildiğinde rahatlıkla fark edilebilir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

2.1 GAMMA FONKSİYONU

$\Gamma(x)$ ile göstereceğimiz gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanmıştır.

Şimdi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğunu gösterelim.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \quad (2.2)$$

yazılabilir. Bu denklemde, $x = y^2$ ve $dx = 2y dy$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \quad (2.3)$$

olur. Benzer olarak,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (2.4)$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(y^2+z^2)} dz dy \\ \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \end{aligned} \quad (2.5)$$

olduğu görülmektedir.

Çizelge 2.1' de Gamma fonksiyonunun bazı rakamsal değerleri verilmiştir (Podlubny,1999).

Çizelge 2.1. Gamma Fonksiyonun Bazı Rakamsal Değerleri

$\Gamma(0)$	Tanımsız
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1)$	1
$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(2)$	1
$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$	$\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(3)$	2
$\Gamma(\infty)$	∞

2.2 HATA FONKSİYONU

$erf(x)$ ile gösterilen hata fonksiyonu

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır.

Hata fonksiyonuna ilişkin b-aşağıdaki eşitlik ve değerler mevcuttur.

- 1) $erf(x) = 1 - erfc(x)$
- 2) $erf(-x) = -erf(x)$
- 3) $erf(0) = 0$
- 4) $erf(\infty) = 1$

2.3 ANGER FONKSİYONU

$AngelJ(v, u)$ fonksiyonu homojen olmayan bessel denkleminin çözümüdür.

$$x'' + xy' + (x - v)y = \frac{(x - v)\sin(v\pi)}{\pi} \quad (2.7)$$

Burada x ve y ye verilen değerlere göre $AngelJ(v, u)$ fonksiyonu hesaplanabilir.

2.4 BETA FONKSİYONU

$k > 0$, $n > 0$ olmak üzere, beta fonksiyonu

$$\beta(k, n) = \int_0^1 x^{k-1} (1-x)^{n-1} dx \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasındaki ilişki

$$\beta(k, n) = \frac{\Gamma(k)\Gamma(n)}{\Gamma(k+n)} \quad (2.9)$$

şeklindedir (Podlubny,1999).

2.5 MİTTAG – LEFFLER FONKSİYONU

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (2.10)$$

$$E_{\alpha, \beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (2.11)$$

şeklindedir (Erdelyi,1953).

3.KESİRLİ TÜREV VE KESİRLİ İNTEGRAL

3.1.KESİRLİ TÜREV

$f(x)$ sürekli fonksiyon olmak üzere n diferansiyel adımını göstermek üzere kesirli türev tanımı

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-n+q}} \quad (3.1)$$

şeklindedir. Burada q ($q > 0$ ve $q \in \mathbb{R}$ operatörü $n-1 \leq q \leq n$ 'ye karşılık gelen tam sayıdır (Ray ve Bera,2004).

3.2 RIEMANN – LIOUVILLE KESİRLİ TÜREV

Her sonlu (a,x) aralığında f fonksiyonu sürekli ve integrallenebilir olsun. $n \in \mathbb{N}^+$, $n-1 < q < n$ ve $q > 0$ olmak üzere $x > a$ reel bir f fonksiyonunun q . mertebeden Riemann – Liouville kesirli türevi tanımı:

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-n+q}}, \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Bu yöntemde integralin n . kez türevi alınacağından uygulamada zorluk çıkabilir (Podlubny,1999).

3.3 CAPUTO KESİRLİ TÜREV

M. Caputo, Riemann – Liouville tanımının Laplace dönüşüm ifadesinin uygulamalarında ortaya çıkan başlangıç değerlerinin hesaplanması veya deneysel yolla ölçülmesi problemini ortadan kaldırmak amacıyla 1967'de tanımlanmıştır. Kesirli türev tekniğinde, başlangıç koşullarını fiziksel durumlara en uygun şekilde veren Caputo olmuştur. Caputo Kesirli Türevinin tanımı:

$$D_t^a = \frac{1}{\Gamma(a-n)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{a+1-n}} \quad n-1 < a < n \quad (3.3)$$

ile verilir (Podlubny,1999).

3.4 GRÜNWARD – LETNİKOV KESİRLİ TÜREV

$[a, t]$ kapalı aralığında sürekli $f^{(k)}(t)$, $(k= 1, 2, \dots m+1)$ türevleri var ve m ,

$m < p < m+1$ olacak şekilde bir tam sayı olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun p . mertebeden Grünwald – Letnikov kesirli türevi $p > 0$ olmak üzere

$${}_a D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny,1999).

3.5 RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALI

Her sonlu (a, x) aralığında f fonksiyonu sürekli ve integrallenebilir olsun. $x > a$ olmak üzere f fonksiyonunun q katlı Riemann-Liouville kesirli integrali;

$$\frac{d^{-q} f(x)}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-q}} dt \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır (Burada $q \in \mathbb{R}$ ve $q > 0$ 'dır) (Podlubny,1999).

3.6 KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Bir bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre kesirli türevlerini içeren denklemlere kesirli adi diferensiyel denklemler denir. Örneğin;

$$x D^{\frac{3}{2}} y(x) + D^{\frac{5}{2}} y(x) - y(x) = \cos x \quad (3.6)$$

$$D^{\frac{1}{3}} y(x) + D^{\frac{1}{3}} y(t) = x \quad (3.7)$$

$$D^{\frac{1}{4}} y(x) + 4y^2(x) = 2 \quad (3.8)$$

kesirli adi diferensiyel denklemlerdir (Değerli, 2018).

Bağımlı değişkenin birden fazla bağımsız değişkene göre kesirli türevlerini içeren denklemlere kesirli kısmi diferensiyel denklemler denir. Örneğin;

$$D_t^{\frac{3}{2}} u(x, t) = k^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad D_t^{\frac{3}{2}} u(x, t) = k^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.9)$$

kesirli kısmi diferansiyel denklemdir (Adomian ,1994).

Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri için birçok yöntem vardır. Rezidual Kuvvet Serisi Metodu, Laplace Dönüşümü Metodu, Adomian Ayrıştırma Metodu yöntemlerden bazılarıdır.

3.7 İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Aranan fonksiyonun türevlerini ve integralini aynı anda içeren denklemine integro-diferansiyel denklemler denir (Volterra, 1930). Bir lineer integro-diferansiyel denklem,

$$a_0(x)\varphi^n(x) + a_1(x)\varphi^{n-1}(x) + \dots + a_n(x)\varphi^n(x) + \sum_{m=0}^s \int_0^x K_m(x,t)\varphi^{(m)}(t)dt = f(x) \quad (3.10)$$

Formunda bir denklemdir. $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x), K(x,t)(m = 0, 1, \dots, 5)$ bilinen fonksiyonlardır; $\varphi(x)$ ise bilinmeyen fonksiyondur.

(3.10) formunda bir integro diferansiyel denklemi çözerken bilinmeyen fonksiyon üzerine, integral denklemlerden farklı olarak,

$$\varphi(0) = \varphi_0, \varphi'(0) = \varphi'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(0) = \varphi_0^{(n-1)} \quad (3.11)$$

Gibi başlangıç koşulları yüklenebilir.

3.8 KESİRLİ İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bir bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre kesirli türevlerini ve integralini aynı anda içeren denklemlere kesirli integro-diferansiyel denklem denir. Bilinen kesirli Fredholm integro-diferansiyel denklemi tanımlayalım.

$$\sum_{i=0}^m p_i(x) D^{\alpha_i} y(x) + \sum_{i=0}^{\ell} q_i(x) y^{(i)}(x) = g(x) + \lambda \int_a^b F(x,t) y(t) dt, \quad (3.12)$$

$$\sum_{k=0}^{v-1} B_{jk} y^{(k)}(\beta_{jk}) = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, v-1, \quad v_i - 1 < \alpha_i < v_i, \quad (3.13)$$

Burada $v_i \in \mathbb{Z}^+$, $m, \ell \in \mathbb{N}$; $\lambda, B_{jk}, \beta_{jk}, \mu_j \in \mathbb{R}$, $\max((\max v_i), \ell) = v$ ($0 \leq i \leq m$) ve

$F(x,t), p_i(x), q_i(x), g(x)$ bilinen fonksiyonlardır. Ayrıca $D^{\alpha_i} y(x), y(x)$ Caputo Kesirli türevlerini ifade eder (Bayram, 2019).

4.HOMOTOPİ ANALİZ METODU

Lineer olmayan problemlerin analitik çözümlerini elde etmek genellikle zordur. Yarı analitik yöntemlerde, çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesi çoğu zaman fiziksel parametrelere bağlıdır. Bu yarı analitik yaklaşımlar, non-lineerlik kuvvetli olduğunda, çoğu zaman başarısız sonuçlar verir. Bu başarısız sonuçları ortadan kaldırmak için homotopi analiz metodu çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini kontrol etme imkanı sağlar (Alkan, 2019).

Homotopi analiz metodu, topolojinin temel kavramlarından biri olan homotopiyi kullanır. Bu metotta ele alınan denklemleri çözmek için önce başlangıç yaklaşımını tam çözüme götüren sürekli bir dönüşüm oluşturulur. Bu tip bir sürekli dönüşümü oluşturmak için bir yardımcı lineer operatör seçilir. Bulunan çözüm serisinin yakınsaklığını garantilemek için ise bir yardımcı parametre kullanılır. Bu metod başlangıç yaklaşımı ve yardımcı lineer operatörlerin seçiminde serbestlik sağlar. Homotopi analiz metodu yardımıyla lineer olmayan zor bir problem böylece daha basit sonsuz sayıda lineer alt probleme dönüştürülür (Alkan, 2019).

HAM sınır koşullarıyla kesirli integro-diferensiyel denkleme uyguluyoruz. Aşağıdaki denklemleri göz önünde bulunduralım,

$$T[u(x)] = 0, \quad (4.1)$$

burada T bir operatördür, x bağımsız değişken belirtir, u(x) bilinmeyen bir fonksiyondur. Basit olması için benzer şekilde ele alınabilecek tüm sınır koşulları göz ardı ediyoruz. HAM aracılığıyla, sıfır mertebeli deformasyon denklemleri oluşturulur.

$$(1-p)L[\phi(x; p)] = p h T[\phi(x; p)] , \quad (4.2)$$

burada L bir yardımcı lineer operatördür. ($L[u(x)]=0$ ancak ve ancak $u(x)=1$ ise, burada 1 gerçek bir sabittir.), $h \neq 0$ bir yardımcı parametredir ve $p \in [0,1]$ gömme parametresidir. Açık olarak, $p=0$ ve $p=1$ olduğunda,

$$\phi(x; 0) = 1 , \phi(x; 1) = u(x) \quad (4.3)$$

$\phi(x; p)$ çözümü 1'den u(x)'e değişir. Liao, Taylor serisini $\phi(x; p)$ gömme parametreleri ile genişletti.

$$\phi(x; p) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x) p^m, \quad (4.4)$$

$$u_m(x) = \frac{1}{m!} \frac{\partial \phi(x; p)}{\partial p^m} \Big|_{p=0}, \quad (m \geq 1) \quad (4.5)$$

yardımcı lineer operatör, h parametresi uygun şekilde seçilirse seri $p=1$ 'de yakınsar, birinin sahip olduğu;

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x). \quad (4.6)$$

$\vec{u}_n = \{u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)\}$ vektörlerini tanımlayalım. Sıfır dereceli deformasyon denklemini (4.2) p'ye göre m kez türevini alıp ve sonra m!'ye bölerek ve son olarak $p=0$ değerini yerine yazarak aşağıdaki m.mertebeden deformasyon denklemini elde ederiz.

$$L[u_m(x)] = h\kappa(\vec{u}_{m-1}) \quad (4.7)$$

$$\kappa_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial T[\phi(x; p)]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0} \quad (4.8)$$

$m \geq 2$ için $u_m(x)$ 'den gelen sınır değerleri ile (4.7) denklemini tarafından yönetildiği vurgulanmaktadır. Orijinal problem maple ve mathematica gibi sembolik hesaplama yazılımları ile kolayca çözülebilir (Zhang, X.- Tang, B.- He, Y., 2011)

5. PADÉ YAKLAŞIMI

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad (5.1)$$

kuvvet serisini alalım.

Padé yaklaşımı

$$[L/M] = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_L x^L}{b_0 + b_1 x + \dots + b_M x^M} \quad (5.2)$$

şeklinde bir rasyonel fonksiyondur (polinomların oranı). Payın derecesi L, paydanın derecesi M'dir. (5.2) de L+1 tane payın katsayısı ve M+1 tane de paydanın katsayısı vardır. Burada (5.2)'nin paydasının tanımsız olmaması için $b_0 = 1$ alınmalıdır. Bu seçimle (5.2)'nin payının L+1 tane bağımsız katsayısı ve paydasının M tane bağımsız katsayısı olur. Tüm yaklaşımda L+M+1 tane bilinmeyen katsayı vardır. $[L/M]$, (5.1)'deki kuvvet serisinin ilk L+M+1 terimine karşılık gelir (Çelik, 2002).

(5.1)'deki $1, x, x^2, \dots, x^{L+M}$ yinci dereceden kuvvet serisine karşılık gelen Padé yaklaşımını

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_L x^L}{b_0 + b_1 x + \dots + b_M x^M} + O(x^{L+M+1}) \quad (5.3)$$

şeklinde yazılabilir. (5.3) denkleminde içler dışlar çarpımı yapılırsa

$$(b_0 + b_1 x + \dots + b_M x^M)(c_0 + c_1 x + \dots) = a_0 + a_1 x + \dots + a_L x^L + O(x^{L+M+1}) \quad (5.4)$$

elde edilir. (5.4) denklemindeki $x^{L+1}, x^{L+2}, x, \dots, x^{L+M}$ katsayılarının eşitliğinden

$$\begin{aligned} b_M c_{L-M+1} + b_{M-1} c_{L-M+2} + \dots + b_0 c_{L+1} &= 0 \\ b_M c_{L-M+2} + b_{M-1} c_{L-M+3} + \dots + b_0 c_{L+2} &= 0 \\ \vdots & \\ b_M c_L + b_{M-1} c_{L+1} + \dots + b_0 c_{L+M} &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

sistemi elde edilir. $b_0 = 1$ olduğu için, (5.5) denklemi M tane lineer denklemlerden oluşur.

Yani

$$\begin{bmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_L \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & c_{L-M+4} & \cdots & c_{L+1} \\ c_{L-M+3} & c_{L-M+4} & c_{L-M+5} & \cdots & c_{L+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_L & c_{L-M+1} & c_{L+2} & \cdots & c_{L+M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ b_{M-2} \\ \vdots \\ b_L \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{L+1} \\ c_{L+2} \\ c_{L+3} \\ \vdots \\ c_{L+M} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Olur. Buradan b_i katsayıları bulunur. Diğer yandan (5.3) denkleminde payın katsayıları olan $a_0, a_1, \dots, a_L$ katsayıları $1, x, x^2, \dots, x^L$ terimlerin katsayılarının eşitliğinden

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_1 &= c_1 + b_1 c_0 \\ a_2 &= c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\ &\vdots \\ a_L &= c_L + \sum_{i=1}^{\min(L,M)} b_i c_{L-i} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Olarak bulunur. Böylece (5.6) ve (5.7) denklemleri Padé yaklaşımının pay ve paydası olarak tanımlanır. Dolayısıyla bu denklemlere Padé denklemleri denir (Çelik, 2002).

PADÉ YAKLAŞIMININ HESAPLANMASI

Padé yaklaşımının hesaplanmasında literatürde farklı algoritmalar kullanılmıştır. En yaygın ve kullanışlı olan determinant formülleri kullanılır. Bu yöntem şu şekilde ifade edilmiştir:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad (5.8)$$

serisiyle temsil edilen fonksiyonun (m, n) dereceli Padé yaklaşımı

$$r_{m,n}(x) = \frac{p_0(x)}{q_0(x)} \quad (5.9)$$

olarak tanımlanırsa,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{p_0(x)}{q_0(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i} \quad (5.10)$$

ifadesinin içler dışlar çarpımıyla oluşan denklem sistemi ve katsayılar determinant yöntemiyle bulunabilir.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \text{ için;} \quad (5.11)$$

$$F_k(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^i, \quad k \geq 0 \quad (5.12)$$

$$F_k(x) = 0, \quad k < 0 \quad (5.13)$$

yazılabilir (Turut, 2010).

Çizelge 5.1. Padé Tablosu

M \ N	0	1	2	...
0	$[0/0]$	$[1/0]$	$[2/0]$	...
1	$[0/1]$	$[1/1]$	$[2/1]$	...
2	$[0/2]$	$[1/2]$	$[2/2]$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
...	...	...	...	...

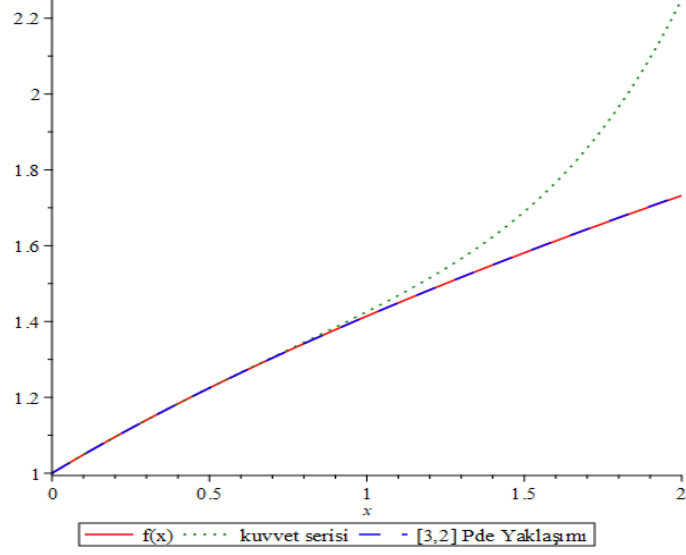
Örnek 5.1: $f(x) = \sqrt{x+1}$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyonun beş terimli seri açılımı,

$$P_5(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{128}x^5 \quad (5.5)$$

şeklindedir. (5.5) kuvvet serisinin $[3,2]$ dereceli Padé yaklaşımı determinant denklemleri yardımıyla,

$$r_{3,2}(x) = \frac{\frac{1}{32}x^3 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{2}x + 1}{\frac{3}{16}x^2 + x + 1} \quad (5.6)$$

olarak hesaplanır. $f(x)=\sqrt{x+1}$ fonksiyonu, $P_5(x)$ kuvvet serisi $[3,2]$ dereceli Padé yaklaşımına ait grafik Şekil 5.1’de gösterilmiştir.



Şekil 5.1 $f(x)=\sqrt{x+1}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{3,2}(x)$ padé yaklaşımı

6.Uygulamalar

Bu bölümde yüksek mertebeden kesirli integro-diferensiyel denklemler HAM yardımıyla elde edilen seri çözümlerin farklı h değerleri için Pade yaklaşımları hesaplanmıştır. Bulunan Padê nümerik çözümler kesin çözümle karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma özellikle farklı h değerleri için yapıp bu farklı h değerlerinin Padê yaklaşımını etkileyip etkilemediği de gözlemlenmeye çalışılmıştır.

6.1 Homotopi-Padê Yaklaşımı

Uygulama 6.1

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha u(x) = x(1 + xe^x) + 3e^x + u(x) - \int_0^x u(t)dt, \quad 0 < x < 1, \quad 3 < \alpha \leq 4 \\ u(0) = 1 \quad u''(0) = 2 \\ u(1) = 1 + e \quad u''(1) = 3e \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Yukarıdaki dördüncü mertebeden kesirli integro-diferensiyel denklemini göz önünde bulundurursak;

$\alpha = 4$ için, (6.1) denkleminin kesin çözümü $u(x) = 1 + xe^x$.

Sınır değerlerine göre, ilk yaklaşık değer aşağıdaki şekilde seçilir:

$$u(x) = u(0) + u'(0)x + u''(0)\frac{x^2}{2} + u'''(0)\frac{x^3}{6}. \text{ Zor kesirli integralden kaçınmak için, (6.1)}$$

deki üstel terim için kesilmiş Taylor açılımını alabiliriz. Örneğin $e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

$$\begin{aligned} G(u(x)) &= x(1 + xe^x) + 3e^x + u(x) - \int_0^x u(t)dt \\ &= 3 + 5x + \frac{5}{2}x^2 + x^3 + \frac{1}{6}x^4 + u(x) - \int_0^x u(t)dt \end{aligned} \quad (6.2)$$

HAM kullanılarak m.mertebeden deformasyon denklemleri(deformation equation) oluşturulur,

$$u_0(x) = 1, \quad (6.3)$$

$$u_1(x) = Ax + x^2 + \frac{B}{6}x^3 - \left(\frac{4h}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{4h}{\Gamma(\alpha+2)}x + \frac{5h}{\Gamma(\alpha+3)}x^2 + \frac{6h}{\Gamma(\alpha+4)}x^3 + \frac{4h}{\Gamma(\alpha+5)}x^4 \right) x^\alpha \quad (6.4)$$

$$u_2(x) = - \left(\frac{(4h+3)h}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(4h+5+A)h}{\Gamma(\alpha+2)}x + \frac{(5h+7-A)h}{\Gamma(\alpha+3)}x^2 + \frac{(6h+4+B)h}{\Gamma(\alpha+4)}x^3 + \frac{(4h+4-B)h}{\Gamma(\alpha+5)}x^4 \right) x^\alpha$$

$$+ \left(\frac{4h^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{h^2}{\Gamma(2\alpha+3)}x^2 + \frac{h^2}{\Gamma(2\alpha+4)}x^3 - \frac{2h^2}{\Gamma(2\alpha+5)}x^4 - \frac{4h^2}{\Gamma(2\alpha+6)}x^5 \right) x^{2\alpha}$$

(6.5)

∴ ...

Şimdi, Denklem (6.1) için yaklaşık çözümünü oluşturabiliriz;

$$u(x) \approx \phi_2(x) = u_0 + u_1 + u_2 = 1 + Ax + x^2 + \frac{B}{6}x^3 - \frac{(4h+7)h}{\Gamma(\alpha+1)}x^\alpha - \frac{(4h+9+A)h}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1}$$

$$- \frac{(5h+12-A)h}{\Gamma(\alpha+3)}x^{\alpha+2} - \frac{(6h+10-B)h}{\Gamma(\alpha+4)}x^{\alpha+3} - \frac{(4h+8-B)h}{\Gamma(\alpha+5)}x^{\alpha+3} + \frac{4h^2x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}$$

$$+ \frac{h^2x^{2\alpha+2}}{\Gamma(2\alpha+3)} + \frac{h^2x^{2\alpha+3}}{\Gamma(2\alpha+4)} - \frac{2h^2x^{2\alpha+4}}{\Gamma(2\alpha+5)} - \frac{4h^2x^{2\alpha+5}}{\Gamma(2\alpha+6)}. \quad (6.6)$$

burada A ve B, $\phi_2(x)$ 'e (6.1) denklemin sınır değerleri empoze edilerek belirlenebilir(Zhang, X.- Tang, B.- He, Y., 2011).

Bulunan değerler Çizelge 6.1 ve Çizelge 6.2 'de gösterilmiştir.

Çizelge 6.1. $\alpha = 4$ için farklı h değerleri için A ve B değerleri

	$h = -0.5$	$h = -0.8$	$h = -0.9$
A	0.8994954067	0.9579478198	0.9661834553
B	4.052346979	3.482564538	3.410217450

Çizelge 6.2. $\alpha = 4$ için farklı h değerleri için A ve B değerleri

	$h = -1.0$	$h = -1.2$	$h = -1.5$
A	0.9687126551	0.9564509563	0.8939914783
B	3.397314496	3.551439225	4.238557162

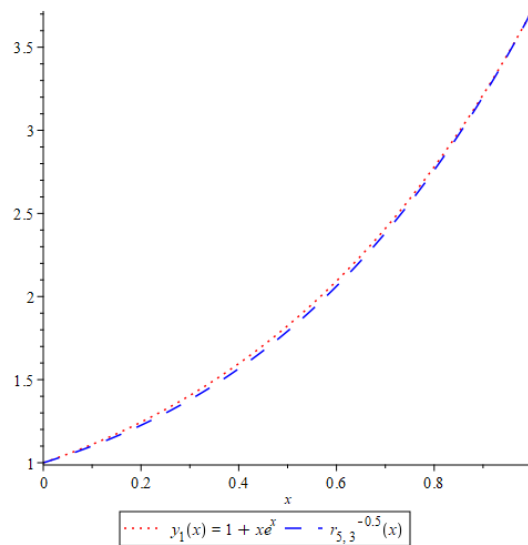
Şimdi 6 farklı h değeri için iki farklı Padé yaklaşımları hesaplanacaktır.

(6,6) denkleminde $\alpha = 4$ ve $h = -0.5$ alınıp tabloda belirtilen A ve B değerleri yerine yazılırsa seri çözümü aşağıdaki gibi bulunur;

$$\begin{aligned}
 H_4^{-0.5} = & 1 + 0.8994954067x + x^2 + 0.6753911632x^3 + 0.1041666667x^4 \\
 & + 0.03291456420x^5 + 0.005972572634x^6 + \times 0.0002924258950x^7 \\
 & + 0.00004895403052x^8 + 6.889329806 \times 10^{-8}x^{10} + 6.263027096 \times 10^{-9}x^{11} \\
 & - 1.043837849 \times 10^{-9}x^{12} - 1.605904384 \times 10^{-10}x^{13}
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

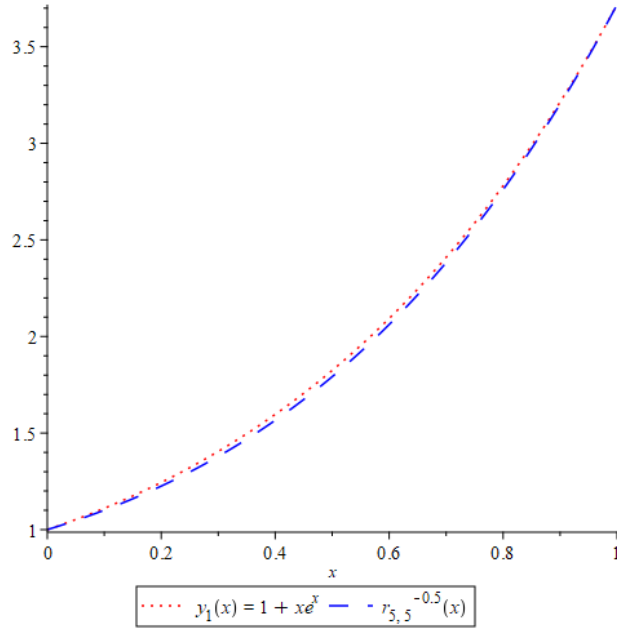
Şimdi (6.7) denklemi için $[5,3]$ ve $[5,5]$ dereceli Padé yaklaşımları hesaplanır ve bulunan nümerik çözümler kesin çözümle grafikte karşılaştırılır (Şekil 6.1 ve Şekil 6.2).

$$\begin{aligned}
 r_{5,3}^{-0.5}(x) = & (1.000000000 + 0.7459787165x + 0.9073935554x^2 + 0.5544082625x^3 \\
 & + 0.038422955440x^4 + 0.3926452197x^5) / (1.000000000 - 0.1535166906x \\
 & + 0.04548111358x^2 - 0.008376262488x^3)
 \end{aligned} \tag{6.8}$$



Şekil 6.1. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,3}^{-0.5}(x)$ Padé yaklaşımı

$$r_{5,5}^{-0.5}(x) = (1.000000000 + 0.6593685728x + 0.8047988196x^2 + 0.4519192860x^3 + 0.03767471576x^4 + 0.02087842828x^5) / (1.000000000 - 0.2401268339x + 0.02079180382x^2 - 0.002047175403x^3 + 0.001387780238x^4 + 0.0002666511675x^5) \quad (6.9)$$



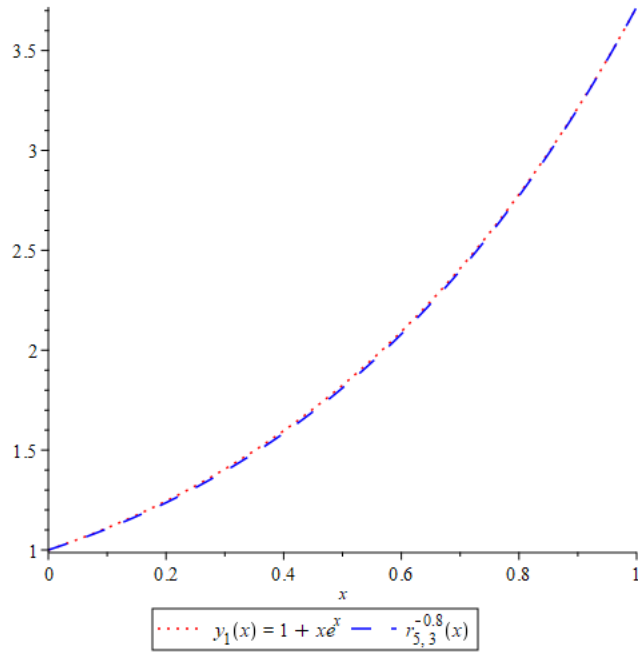
Şekil 6.2. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,5}^{-0.5}(x)$ Padé yaklaşımı

(6,6) denkleminde $\alpha = 4$ ve $h = -0.8$ alınıp tabloda belirtilen A ve B değerleri yerine yazılırsa seri çözümü aşağıdaki gibi bulunur;

$$H_4^{-0.8} = 1 + 0.9579478198x + x^2 + 0.5804274230x^3 + 0.1266666667x^4 + 0.04505298547x^5 + 0.07824502421x^6 + 0.0002726088034x^7 + 0.00008963165599x^8 + 1.763668430 \times 10^{-7}x^{10} + 1.603334937 \times 10^{-8}x^{11} - 2.672224894 \times 10^{-9}x^{12} - 4.111115222 \times 10^{-10}x^{13} \quad (6.10)$$

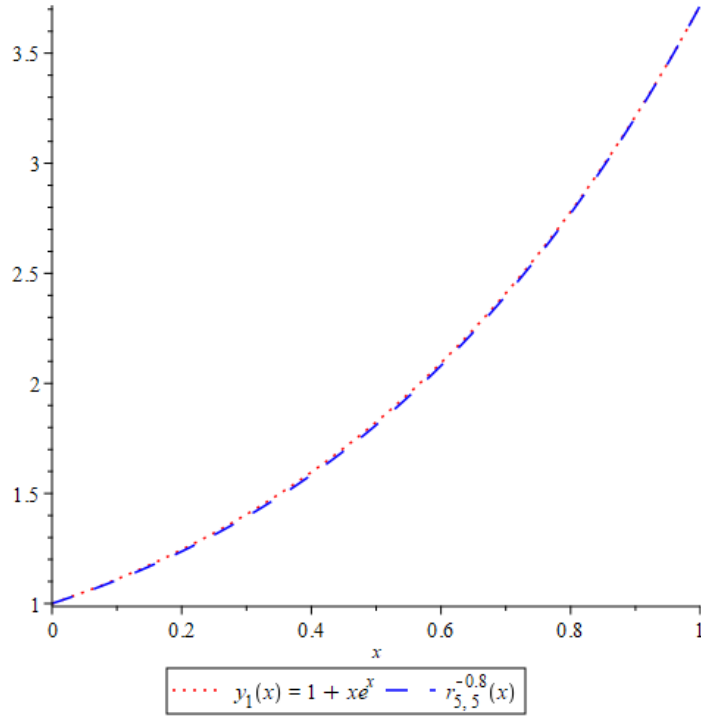
Şimdi (6.10) denklemini için [5,3] ve [5,5] dereceli Padé yaklaşımları hesaplanır ve bulunan nümerik çözümler kesin çözümle grafikte karşılaştırılır (Şekil 6.3 ve Şekil 6.4).

$$r_{5,3}^{-0.8}(x) = (0.9999999999 + 0.7602683789x + 0.8702587700x^2 + 0.4287172863x^3 + 0.06087360515x^4 + 0.04347310451x^5) / (0.9999999999 - 0.1976794410x + 0.5962535968x^2 - 0.01114867896x^3) \quad (6.11)$$



Şekil 6.3. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,3}^{-0.8}(x)$ Padé yaklaşımı

$$\begin{aligned}
 r_{5,5}^{-0.8}(x) = & (1.000000000 + 0.7477845413x + 8223353531x^2 + 0.3867134600x^3 \\
 & + 0.02510847027x^4 + 0.02806951628x^5) / (1.000000000 - 0.2101632786x \\
 & + 0.02366080757x^2 - 0.006216503358x^3 + 0.002720612056x^4 \\
 & + 0.0004858698267x^5)
 \end{aligned} \tag{6.12}$$



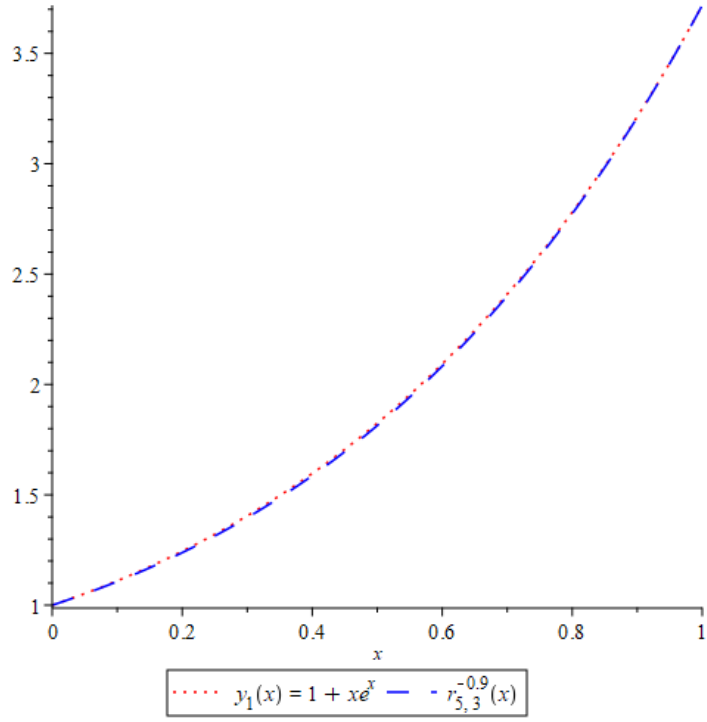
Şekil 6.4. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,5}^{-0.8}(x)$ Padé yaklaşımı

(6,6) denkleminde $\alpha = 4$ ve $h = -0.9$ alınıp tabloda belirtilen A ve B değerleri yerine yazılırsa seri çözümü aşağıdaki gibi bulunur;

$$\begin{aligned}
 H_4^{-0.9} = & 1 + 0.9661834553x + x^2 + 0.5683695750x^3 + 0.1275000000x^4 \\
 & + 0.04774637591x^5 + 0.008167270681x^6 + 0.0002124611697x^7 \\
 & + 0.0001024505034x^8 + 2.232142857 \times 10^{-7} x^{10} + 2.029220779 \times 10^{-8} x^{11} \\
 & - 3.382034632 \times 10^{-9} x^{12} - 5.203130203 \times 10^{-10} x^{13}
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

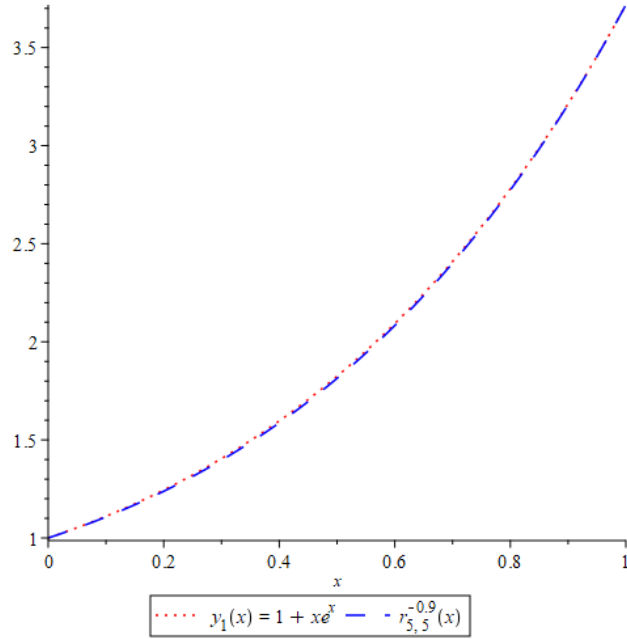
Şimdi (6.13) denklemini için [5,3] ve [5,5] dereceli Padé yaklaşımları hesaplanır ve bulunan nümerik çözümler kesin çözümle grafikte karşılaştırılır (Şekil 6.5 ve Şekil 6.6).

$$\begin{aligned}
 r_{5,3}^{-0.9}(x) = & (1.000000000 + 0.7730630391x + 0.8723541946x^2 + 0.4208307709x^3 \\
 & + 0.06569558589x^4 + 0.04525641531x^5) / (1.000000000 - 0.1931204165x \\
 & + 0.05894394571x^2 - 0.01136905289x^3)
 \end{aligned} \tag{6.14}$$



Şekil 6.5. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,3}^{-0.9}(x)$ Padé yaklaşımı

$$r_{5,5}^{-0.9}(x) = (0.9999999998 + 0.7604794078x + 0.8267765040x^2 + 0.03801582167x^3 + 0.032217848144x^4 + 0.03121263955x^5) / (0.9999999998 - 2057040472x + 0.02552435145x^2 - 0.007168517008x^3 + 0.002996154436x^4 - 0.0005400529192x^5) \quad (6.15)$$



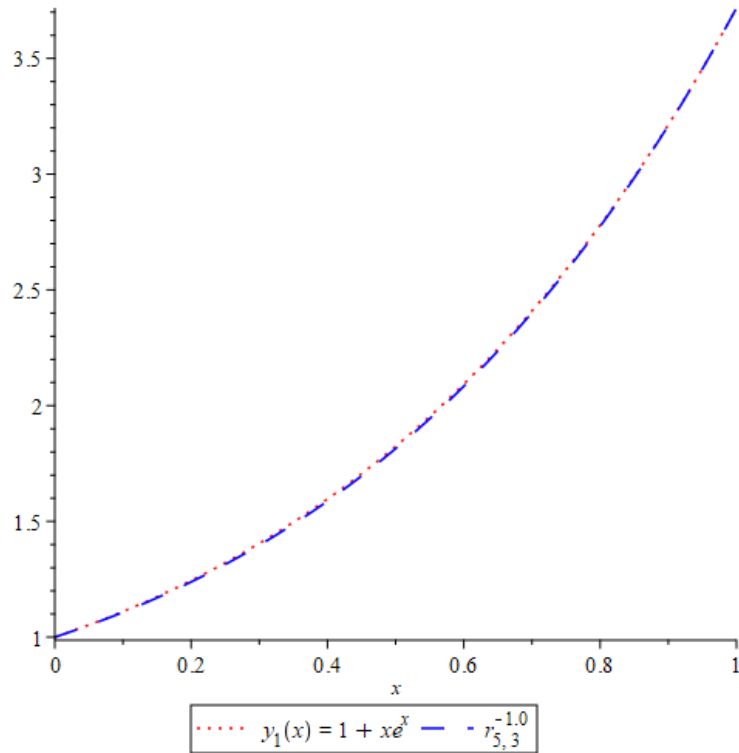
Şekil 6.5. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,5}^{-0.9}(x)$ Padé yaklaşımı

(6,6) denkleminde $\alpha = 4$ ve $h = -1.0$ alınıp tabloda belirtilen A ve B değerleri yerine yazılırsa seri çözümü aşağıdaki gibi bulunur;

$$\begin{aligned} H_4^{-1.0} = & 1 + 0.9687126551x + x^2 + 0.5662190827x^3 + 0.1250000000x^4 \\ & + 0.04973927212x^5 + 0.008376787980x^6 + 0.0001195804571x^7 \\ & + 0.0001141539064x^8 + 2.755731922 \times 10^{-7} x^{10} + 2.505210839 \times 10^{-8} x^{11} \\ & - 4.175351398 \times 10^{-9} x^{12} - 6.423617535 \times 10^{-10} x^{13} \end{aligned} \quad (6.16)$$

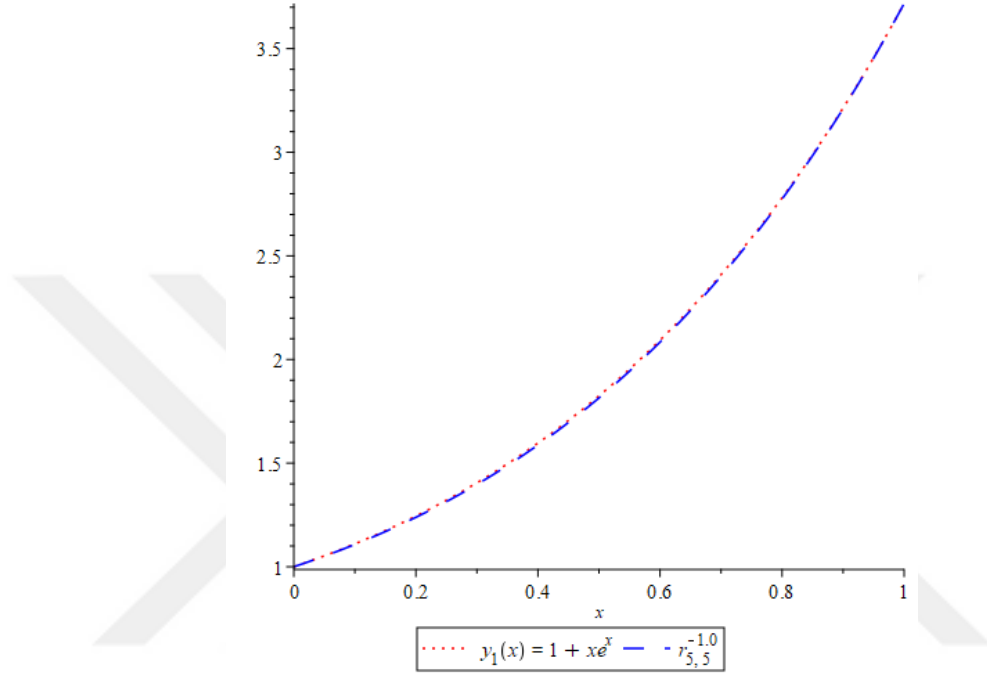
Şimdi (6.16) denklemi için [5,3] ve [5,5] dereceli Padé yaklaşımları hesaplanır ve bulunan nümerik çözümler kesin çözümle grafikte karşılaştırılır (Şekil 6.7 ve Şekil 6.8).

$$\begin{aligned} r_{5,3}^{-1.0}(x) = & (0.9999999999 + 0.7876099666x + 0.8813803676x^2 \\ & + 0.4287271834x^3 + 0.06820220316x^4 + 0.04784381488x^5) \\ & / (0.9999999999 - 0.1811026883x + 0.05681683377x^2 - 0.01142839671x^3) \end{aligned} \quad (6.17)$$



Şekil 6.7. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,3}^{-1.0}(x)$ Padé yaklaşımı

$$r_{5,5}^{-1.0}(x) = (1.0000000000 + 0.7687413972x + 0.8327137249x^2 + 0.3842802821x^3 + 0.03397349120x^4 + 0.03457489337x^5) / (1.00000000000 - 0.1999712579x + 0.02642841317x^2 - 0.007569081009x^3 + 0.003104884796x^4 - 0.0005709035554x^5) \quad (6.18)$$



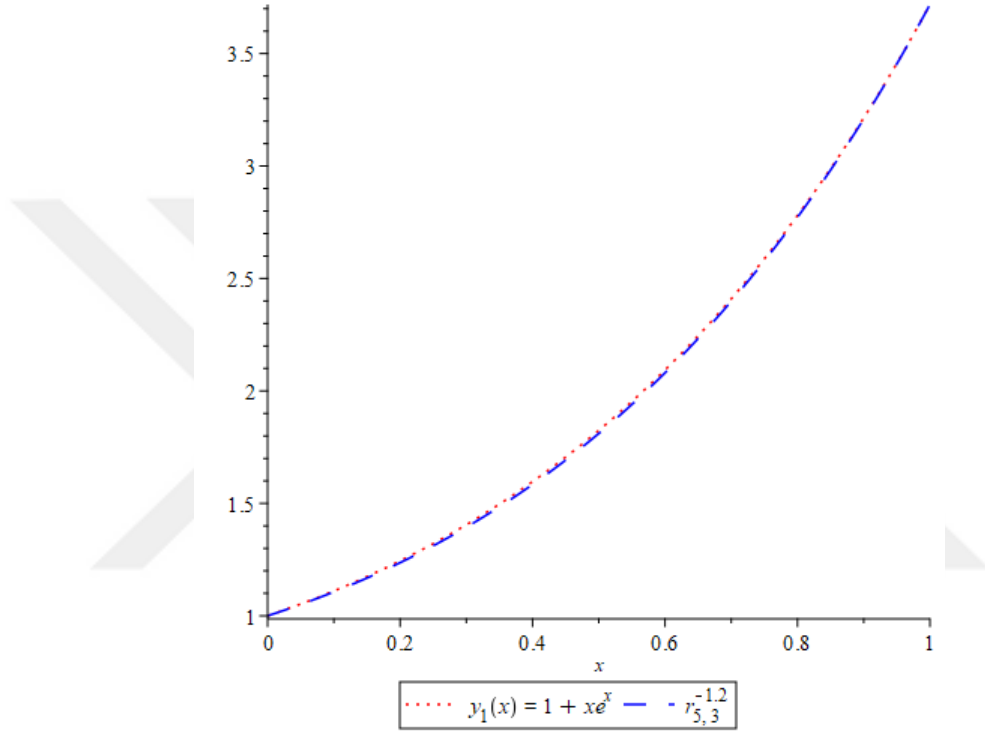
Şekil 6.8. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,5}^{-1.0}(x)$ Padé yaklaşımı

(6,6) denkleminde $\alpha = 4$ ve $h = -1.2$ alınıp tabloda belirtilen A ve B değerleri yerine yazılırsa seri çözümü aşağıdaki gibi bulunur;

$$H_4^{-1.2} = 1 + 0.9564509563x + x^2 + 0.5919065375x^3 + 0.1100000000x^4 + 0.051566450956x^5 + 0.008405915075x^6 + 0.0001789141012x^7 + 0.0001323976422x^8 + 3.968253968 \times 10^{-7}x^{10} + 3.607503608 \times 10^{-8}x^{11} - 6.012506012 \times 10^{-9}x^{12} - 9.250009250 \times 10^{-10}x^{13} \quad (6.19)$$

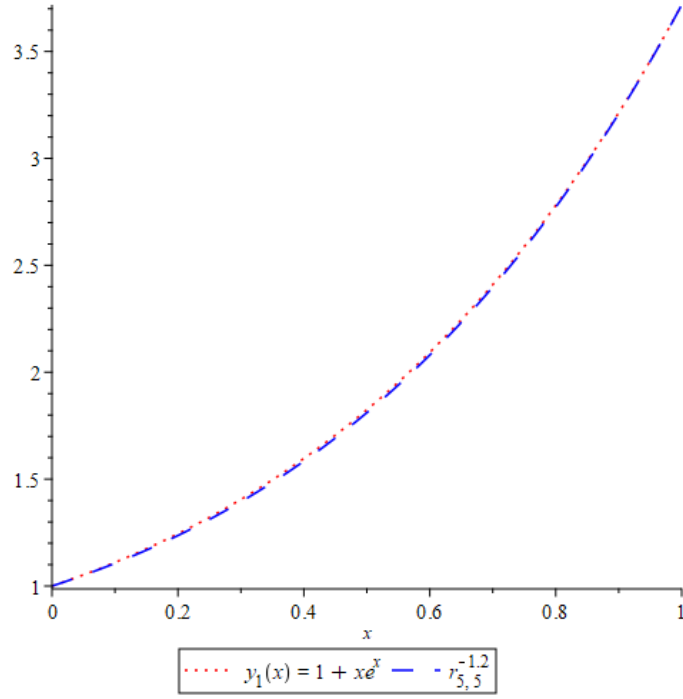
Şimdi (6.19) denklemini için $[5,3]$ ve $[5,5]$ dereceli Padé yaklaşımları hesaplanır ve bulunan nümerik çözümler kesin çözümle grafikte karşılaştırılır (Şekil 6.9 ve Şekil 6.10).

$$\begin{aligned}
r_{5,3}^{-1.2}(x) = & (1.0000000000 + 0.8152724805x + 0.9155744698x^2 \\
& + 0.4878221112x^3 + 0.06622578115x^4 + 0.05468124477x^5) \\
& / (1.0000000000 - 0.1411784759x + 0.05060475799x^2 \\
& - 0.01130691953x^3)
\end{aligned} \tag{6.20}$$



Şekil 6.9. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,3}^{-1.2}(x)$ Padé yaklaşımı

$$\begin{aligned}
r_{5,5}^{-1.2}(x) = & (1.0000000000 + 0.7729108171x + 0.8503037553x^2 + 0.4260323489x^3 \\
& + 0.02340727361x^4 + 0.04185671433x^5) / (1.0000000000 - 0.1835401388x \\
& + 0.02585089683x^2 - 0.007059165049x^3 + 0.002946729997x^4 \\
& - 0.0005789324935x^5)
\end{aligned} \tag{6.21}$$



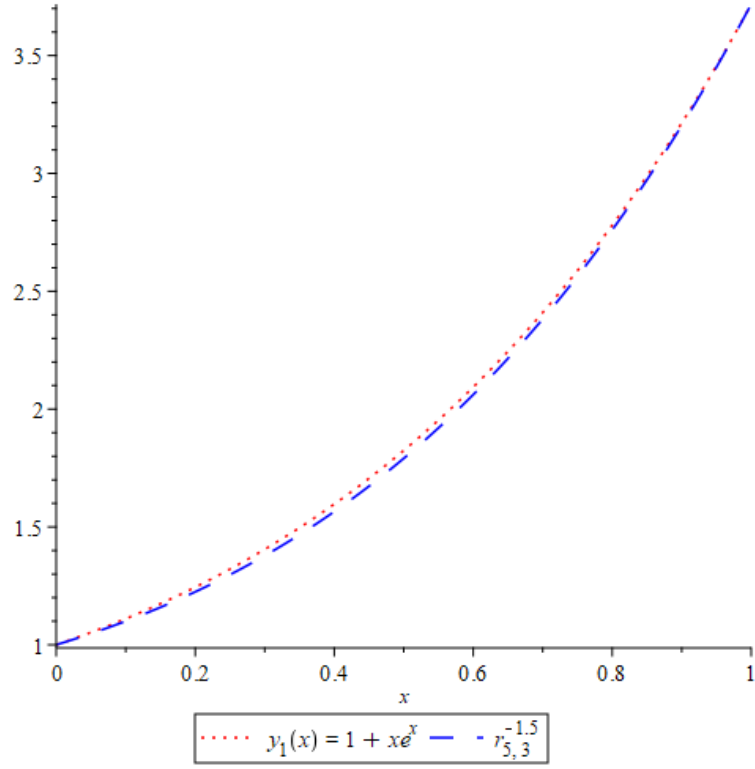
Şekil 6.10. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,5}^{-1,2}(x)$ Padé yaklaşımı

(6,6) denkleminde $\alpha = 4$ ve $h = -1.5$ alınıp tabloda belirtilen A ve B değerleri yerine yazılırsa seri çözümü aşağıdaki gibi bulunur;

$$\begin{aligned}
 H_4^{-1.5} = & 1 + 0.8939914783x + x^2 + 0.7064261937x^3 + 0.06250000000x^4 \\
 & + 0.04867489348x^5 + 0.007512517753x^6 + 0.0009638562982x^7 \\
 & + 0.0001399346294x^8 + 6.200396825 \times 10^{-7} x^{10} + 5.636724387 \times 10^{-8} x^{11} \\
 & - 9.394540645 \times 10^{-9} x^{12} - 1.445313945 \times 10^{-10} x^{13}
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

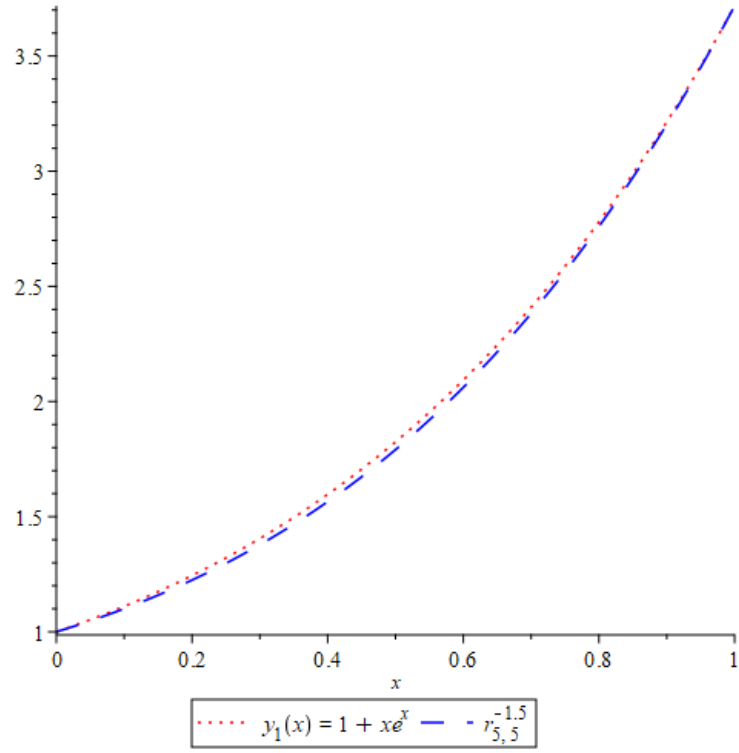
Şimdi (6.22) denklemini için $[5,3]$ ve $[5,5]$ dereceli Padé yaklaşımları hesaplanır ve bulunan nümerik çözümler kesin çözümle grafikte karşılaştırılır (Şekil 6.11 ve Şekil 6.12).

$$\begin{aligned}
 r_{5,3}^{-1.5}(x) = & (1.0000000000 + 0.8376502749x + 0.9915629979x^2 \\
 & + 0.6771091487x^3 + 0.05527745075x^4 + 0.06431282306x^5) \\
 & / (1.0000000000 - 0.05634129361x + 0.04193155346x^2 \\
 & - 0.01046229291x^3)
 \end{aligned} \tag{6.23}$$



Şekil 6.11. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,3}^{-1.5}(x)$ Padé yaklaşımı

$$\begin{aligned}
 r_{5,5}^{-1.5}(x) = & (1.00000000000 + 0.7378190542x + 0.8865841952x^2 + 0.5687198547x^3 \\
 & + 0.02359567626x^4 + 0.05409872393x^5) / (1.00000000000 - 0.1561724243x \\
 & + 0.02620101161x^2 - 0.004957395914x^3 + 0.002459473108x^4 \\
 & - 0.000568260189x^5)
 \end{aligned} \tag{6.24}$$



Şekil 6.12. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm, $r_{5,5}^{-1.5}(x)$ Padé yaklaşımı

Aşağıda Örnek 1 için Çizelge 6.5 ve Çizelge 6.6’da kesin çözümle $[5, 3]$ Padé yaklaşımları karşılaştırılmıştır. Çizelge 6.7 ve Çizelge 6.8’de kesin çözüm ile $[5, 5]$ Padé yaklaşımları karşılaştırılmıştır. Daha etkili olan h değerleri incelenebilmektedir.

Çizelge 6.5. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm ve HAM'a ait seri çözümlerin $[5, 3]$ Padé nümerik değerleriyle karşılaştırılması

$\alpha = 4$	Kesin Çözüm	$h = -0.5$ için pade çözümü	$h = -0.8$ için pade çözümü	$h = -0.9$ için pade çözümü	Mutlak Hata $E_f(x)$	Mutlak Hata $E_f(x)$	Mutlak Hata $E_f(x)$
x	$y_1(x)$	$r_{5,3}^{-0.5}(x)$	$r_{5,3}^{-0.8}(x)$	$r_{5,3}^{-0.9}(x)$	$ y_1(x) - r_{5,3}^{-0.5}(x) $	$ y_1(x) - r_{5,3}^{-0.8}(x) $	$ y_1(x) - r_{5,3}^{-0.9}(x) $
0.1	1.110517092	1.100635685	1.106388335	1.107199952	0.009881407	0.004128757	0.003317140
0.2	1.244280552	1.225479796	1.236450572	1.238003453	0.018800756	0.007829980	0.006277099
0.3	1.404957642	1.379012338	1.394197137	1.396355799	0.025945304	0.010760505	0.008601843
0.4	1.596729879	1.566051898	1.584063072	1.586635854	0.030677981	0.012666807	0.010094025
0.5	1.824360636	1.791806486	1.810976836	1.813728633	0.032554150	0.013383800	0.010632003
0.6	2.093271280	2.061929323	2.080435513	2.083104479	0.031341957	0.012835767	0.010166801
0.7	2.409626895	2.382579867	2.398586949	2.400905391	0.027047028	0.011039946	0.008721504
0.8	2.780432742	2.760490573	2.772319512	2.774039251	0.019942169	0.008113230	0.006393491
0.9	3.213642800	3.203039940	3.209360484	3.210282952	0.010602860	0.004282316	0.003359848
1.0	3.718281828	3.718332541	3.718384355	3.718395882	0.00005071	0.00010252	0.00011405

Çizelge 6.6. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm ve HAM'a ait seri çözümlerin $[5, 3]$ Padé nümerik değerleriyle karşılaştırılması

$\alpha = 4$	Kesin Çözüm	$h = -1.0$ için pade çözümü	$h = -1.2$ için pade çözümü	$h = -1.5$ için pade çözümü	Mutlak Hata $E_f(x)$	Mutlak Hata $E_f(x)$	Mutlak Hata $E_f(x)$
x	$y_1(x)$	$r_{5,3}^{-1.0}(x)$	$r_{5,3}^{-1.2}(x)$	$r_{5,3}^{-1.5}(x)$	$ y_1(x) - r_{5,3}^{-1.0}(x) $	$ y_1(x) - r_{5,3}^{-1.2}(x) $	$ y_1(x) - r_{5,3}^{-1.5}(x) $
0.1	1.110517092	1.107450490	1.106248527	1.100112318	0.003066602	0.004268565	0.010404774
0.2	1.244280552	1.238488738	1.236218480	1.224565750	0.005791814	0.008062072	0.019714802
0.3	1.404957642	1.397041221	1.393939164	1.377900757	0.007916421	0.011018478	0.027056885
0.4	1.596729879	1.587467025	1.583840678	1.564935615	0.009262854	0.012889201	0.031794264
0.5	1.824360636	1.814633060	1.810830894	1.790836991	0.009727576	0.013529742	0.033523645
0.6	2.093271280	2.083995919	2.080378722	2.061194991	0.009275361	0.012892558	0.032076289
0.7	2.409626895	2.401690930	2.398604043	2.382102595	0.007935965	0.011022852	0.027524300
0.8	2.780432742	2.774629130	2.772374976	2.760239706	0.005803612	0.008057766	0.020193036
0.9	3.213642800	3.210603223	3.209413405	3.202962161	0.003039577	0.004229395	0.010680639
1.0	3.718281828	3.718403942	3.718410076	3.718396440	0.000122114	0.000128248	0.000114612

Çizelge 6.7. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm ve HAM'a ait seri çözümlerin $[5, 5]$ Padé nümerik değerleriyle karşılaştırılması

$\alpha = 4$	Kesin Çözüm	$h = -0.5$ için pade çözümü	$h = -0.8$ için pade çözümü	$h = -0.9$ için pade çözümü	Mutlak Hata $E_I(x)$	Mutlak Hata $E_I(x)$	Mutlak Hata $E_I(x)$
x	$y_1(x)$	$r_{5,5}^{-0.5}(x)$	$r_{5,5}^{-0.8}(x)$	$r_{5,5}^{-0.9}(x)$	$ y_1(x) - r_{5,5}^{-0.5}(x) $	$ y_1(x) - r_{5,5}^{-0.8}(x) $	$ y_1(x) - r_{5,5}^{-0.9}(x) $
0.1	1.110517092	1.100635684	1.106388335	1.107199951	0.009881408	0.004128757	0.003317141
0.2	1.244280552	1.225479796	1.236450572	1.238003452	0.018800756	0.007829980	0.006277100
0.3	1.404957642	1.379012338	1.394197135	1.396355796	0.025945304	0.010760507	0.008601846
0.4	1.596729879	1.566051883	1.584063046	1.586635826	0.030677996	0.012666833	0.010094053
0.5	1.824360636	1.791806393	1.810976650	1.813728425	0.032554243	0.013383986	0.010632211
0.6	2.093271280	2.061928844	2.080434549	2.083103399	0.031342436	0.012836731	0.010167881
0.7	2.409626895	2.382577926	2.398583053	2.400901047	0.027048969	0.011043842	0.008725848
0.8	2.780432742	2.760484068	2.772306463	2.774024738	0.019948674	0.008126279	0.006408004
0.9	3.213642800	3.203021048	3.209322621	3.210240927	0.010621752	0.004320179	0.003401873
1.0	3.718281828	3.718283522	3.718286239	3.718287226	0.000001694	0.000004411	0.000005398

Çizelge 6.8. $y_1(x) = 1 + xe^x$ kesin çözüm ve HAM'a ait seri çözümlerin $[5, 5]$ Padé nümerik değerleriyle karşılaştırılması

$\alpha = 4$	Kesin Çözüm	$h = -1.0$ için pade çözümü	$h = -1.2$ için pade çözümü	$h = -1.5$ için pade çözümü	Mutlak Hata $E_I(x)$	Mutlak Hata $E_I(x)$	Mutlak Hata $E_I(x)$
x	$y_1(x)$	$r_{5,5}^{-1.0}(x)$	$r_{5,5}^{-1.2}(x)$	$r_{5,5}^{-1.5}(x)$	$ y_1(x) - r_{5,5}^{-1.0}(x) $	$ y_1(x) - r_{5,5}^{-1.2}(x) $	$ y_1(x) - r_{5,5}^{-1.5}(x) $
0.1	1.110517092	1.107450490	1.106248527	1.100112318	0.003066602	0.004268565	0.010404774
0.2	1.244280552	1.238488738	1.236218480	1.224565751	0.005791814	0.008062072	0.019714801
0.3	1.404957642	1.397041218	1.393939162	1.377900756	0.007916424	0.011018480	0.027056886
0.4	1.596729879	1.587466996	1.583840646	1.564935584	0.009262883	0.012889233	0.031794295
0.5	1.824360636	1.814632835	1.810830653	1.790836758	0.009727801	0.013529983	0.033523878
0.6	2.093271280	2.083994755	2.080377470	2.061193808	0.009276525	0.012893810	0.032077472
0.7	2.409626895	2.401686257	2.398599052	2.382097956	0.007940638	0.011027843	0.027528939
0.8	2.780432742	2.774613560	2.772358464	2.760224604	0.005819182	0.008074278	0.020208138
0.9	3.213642800	3.210558262	3.209366070	3.202919598	0.003084538	0.004276730	0.010723202
1.0	3.718281828	3.718288020	3.718288932	3.718289380	0.000006192	0.000007104	0.000007552

Uygulama 6.2

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha u(x) = 1 + (5+x)e^x + u(x) - \int_0^x u(t)dt \quad 0 < x < 1, \quad 5 < x \leq 6, \\ u(0) = 0, \quad u''(0) = 2, \quad u^{(4)}(0) = 4, \\ u(1) = e, \quad u''(1) = 3e, \quad u^{(4)}(1) = 5e \end{array} \right. \quad (6.25)$$

Yukarıdaki altınca mertebeden kesirli integro-diferensiyel denklemini göz önünde bulundurursak;

$\alpha = 6$ için, (6.25) denkleminin kesin çözümü $u(x) = xe^x$.

Sınır değerlerine göre, ilk yaklaşık değer aşağıdaki şekilde seçilir:

$$u(x) = u(0) + u'(0)x + u''(0)\frac{x^2}{2} + u'''(0)\frac{x^3}{6} + u^{(4)}(0)\frac{x^4}{24} + u^{(5)}(0)\frac{x^5}{120}. \quad \text{Zor kesirli}$$

integralden kaçınmak için, (6.25) deki üstel terim için kesilmiş Taylor açılımını alabiliriz.

$$\text{Örneğin } e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

$$\begin{aligned} F(u(x)) &= 1 + (5+x)e^x + u(x) - \int_0^x u(t)dt \\ &= 6 + 6x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{8}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + u(x) - \int_0^x u(t)dt. \end{aligned} \quad (6.26)$$

HAM kullanılarak m.mertebeden deformasyon denklemleri(deformation equation) oluşturulur,

$$u_0(x) = 0,$$

$$u_1(x) = Ax + x^2 + \frac{B}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{120}x^5 - \frac{6hx^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{6hx^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} - \frac{7hx^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} - \frac{8hx^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+4)} - \frac{4hx^{\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+5)}$$

,

$$u_2(x) = -\frac{(6h+6)h}{\Gamma(\alpha+1)}x^\alpha - \frac{(6h+6+A)h}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1} - \frac{(7h+9-A)h}{\Gamma(\alpha+3)}x^{\alpha+2} - \frac{(8h+6+B)h}{\Gamma(\alpha+4)}x^{\alpha+3}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(4h+8-B)h}{\Gamma(\alpha+5)}x^{\alpha+4} - \frac{(C-4)h}{\Gamma(\alpha+6)}x^{\alpha+5} + \frac{Ch}{\Gamma(\alpha+7)}x^{\alpha+6} + \frac{6h^2x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
& + \frac{h^2x^{2\alpha+2}}{\Gamma(2\alpha+3)} + \frac{h^2x^{2\alpha+3}}{\Gamma(2\alpha+4)} - \frac{4h^2x^{2\alpha+4}}{\Gamma(2\alpha+5)} - \frac{4h^2x^{2\alpha+5}}{\Gamma(2\alpha+6)}, \\
& \vdots \dots
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Şimdi, Denklem (6.25) için yaklaşık çözümünü oluşturabiliriz;

$$\begin{aligned}
u(x) \approx \psi_2(x) &= u_0 + u_1 + u_2 = \\
& Ax + x^2 + \frac{B}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{120}x^5 - \frac{(6h+12)h}{\Gamma(\alpha+1)}x^\alpha - \frac{(6h+12+A)h}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1} \\
& - \frac{(7h+16-A)h}{\Gamma(\alpha+3)}x^{\alpha+2} - \frac{(8h+14+B)h}{\Gamma(\alpha+4)}x^{\alpha+3} - \frac{(4h+12-B)h}{\Gamma(\alpha+5)}x^{\alpha+4} - \frac{(C-4)h}{\Gamma(\alpha+6)}x^{\alpha+5} \\
& + \frac{Ch}{\Gamma(\alpha+7)}x^{\alpha+6} + \frac{6h^2x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{h^2x^{2\alpha+2}}{\Gamma(2\alpha+3)} + \frac{h^2x^{2\alpha+3}}{\Gamma(2\alpha+4)} - \frac{4h^2x^{2\alpha+4}}{\Gamma(2\alpha+5)} - \frac{4h^2x^{2\alpha+5}}{\Gamma(2\alpha+6)}
\end{aligned} \tag{6.28}$$

burada A ,B ve C , $\psi_2(x)$ 'e (6.25) denklemin sınır değerleri empoze edilerek belirlenebilir (Zhang, X.- Tang, B.- He, Y., 2011).

A,B ve C için bulunan değerler Çizelge 6.3 ve Çizelge 6.4'de gösterilmiştir.

Çizelge 6.3. $\alpha = 6$ için farklı h değerleri için A, B ve C değerleri

	$h = -0.3$	$h = -0.5$	$h = -0.8$
A	1.023029584	1.012226344	1.002424016
B	2.776362159	2.881459331	2.976701933
C	7.29985594	6.208932726	5.227331871

Çizelge 6.4. $\alpha = 6$ için farklı h değerleri için A, B ve C değerleri

	$h = -1.0$	$h = -1.2$	$h = -1.5$
A	1.000155505	1.001298187	1.009405557
B	2.998615794	2.987281413	2.907970738
C	5.009229771	5.139987246	5.989899363

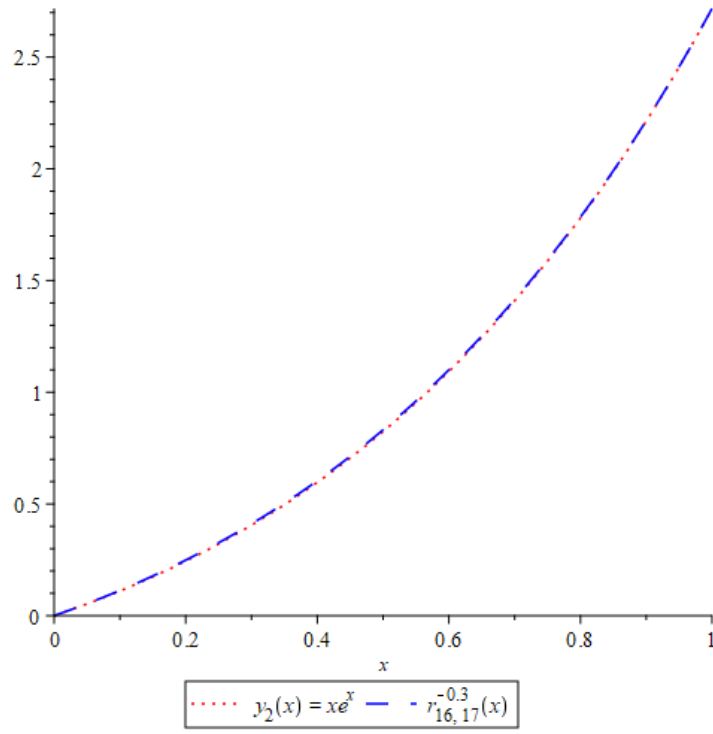
Şimdi 6 farklı h değeri için iki farklı Padé yaklaşımları hesaplanacaktır.

(6,28) denkleminde $\alpha = 6$ ve $h = -0.3$ alınıp tabloda belirtilen A, B ve C değerleri yerine yazılırsa seri çözümü aşağıdaki gibi bulunur;

$$\begin{aligned}
 H_6^{-0.3} = & 1.0230299584x + x^2 + 0.4627270265x^3 + 0.1666666667x^4 \\
 & + 0.06083213283x^5 + 0.004250000000x^6 + 0.0006680374750x^7 \\
 & + 0.000009581079181x^8 + 0.00001188522004x^9 + 6.633298479 \times 10^{-7} x^{10} \\
 & + 2.480050460 \times 10^{-8} x^{11} - 3.444574679 \times 10^{-9} x^{12} + 1.032367104 \times 10^{-12} x^{14} \\
 & + 6.882447359 \times 10^{-14} x^{15} - 1.720611840 \times 10^{-14} x^{16} - 1.012124611 \times 10^{-15} x^{17}
 \end{aligned} \quad (6.29)$$

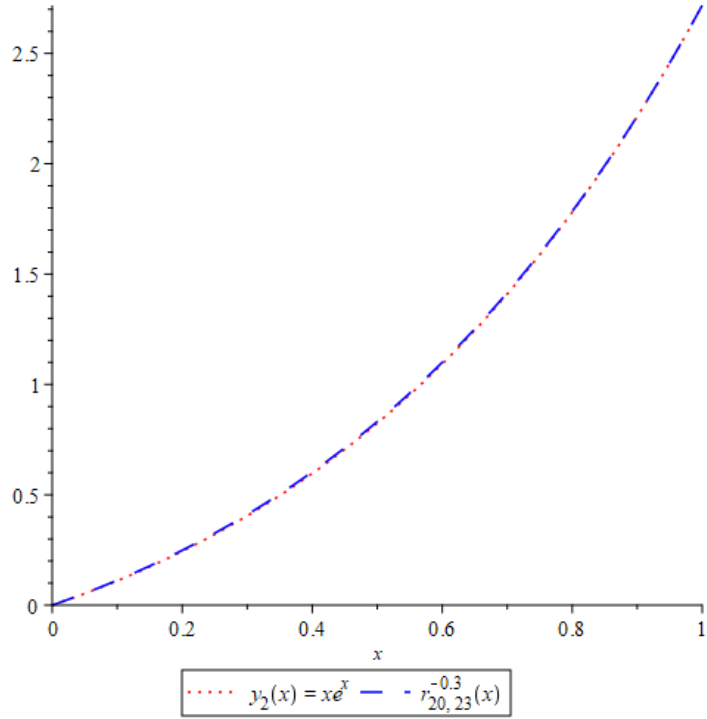
Şimdi (6.29) denklemi için [16,17] ve [20,23] dereceli Padé yaklaşımları hesaplanır ve bulunan nümerik çözümler kesin çözümle grafikte karşılaştırılır(Şekil 6.13 ve Şekil 6.14).

$$\begin{aligned}
 r_{16,17}^{-0.3}(x) = & (1.023029584x + 0.9613601705x^2 + 0.4263988031x^3 + 0.1505417500x^4 \\
 & + 0.05513576072x^5 + 0.002163574442x^6 + 0.0005848937135x^7 + 0.00007350861169x^8 \\
 & + 9.092443342 \times 10^{-6} x^9 + 3.170221172 \times 10^{-7} x^{10} + 1.244747836 \times 10^{-8} x^{11} \\
 & - 3.945971871 \times 10^{-9} x^{12} + 1.481650674 \times 10^{-10} x^{13} - 4.491115040 \times 10^{-12} x^{14} \\
 & + 2.507384192 \times 10^{-13} x^{15} - 2.691295257 \times 10^{-14} x^{16}) / (1.0000000000 \\
 & - 0.03777000233x + 0.001409322686x^2 - 0.00005575467131x^3 \\
 & + 2.200555406 \times 10^{-6} x^4 + 8.234112996 \times 10^{-8} x^5 - 3.101778974 \times 10^{-9} x^6 \\
 & - 1.061055949 \times 10^{-10} x^7 + 3.893462858 \times 10^{-12} x^8 - 1.833748132 \times 10^{-13} x^9 \\
 & + 6.984464175 \times 10^{-15} x^{10} - 3.012828812 \times 10^{-16} x^{11} + 9.425300622 \times 10^{-18} x^{12} \\
 & + 1.684060891 \times 10^{-19} x^{13} + 9.521290130 \times 10^{-21} x^{14} - 5.083727415 \times 10^{-22} x^{15} \\
 & + 2.892531531 \times 10^{-23} x^{16} - 1.878793845 \times 10^{-24} x^{17})
 \end{aligned} \quad (6.30)$$



Şekil 6.13. $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{16,17}^{-0.3}(x)$ Padé yaklaşımı

$$\begin{aligned}
 r_{20,23}^{-0.3}(x) = & 1.023029584x + 1.0000000000x^2 + 0.4627270265x^3 + 0.1666666667x^4 \\
 & + 0.06083213283x^5 + 0.004250000001x^6 + 0.0006680374751x^7 \\
 & + 0.00009581079182x^8 + 0.00001188522004x^9 + 6.633298480 \times 10^{-7} x^{10} \\
 & + 2.480050460 \times 10^{-8} x^{11} - 3.444574679 \times 10^{-9} x^{12} + 1.032367104 \times 10^{-12} x^{14} \\
 & + 6.882447359 \times 10^{-14} x^{15} - 1.720611840 \times 10^{-14} x^{16} - 1.012124611 \times 10^{-15} x^{17}
 \end{aligned} \tag{6.31}$$



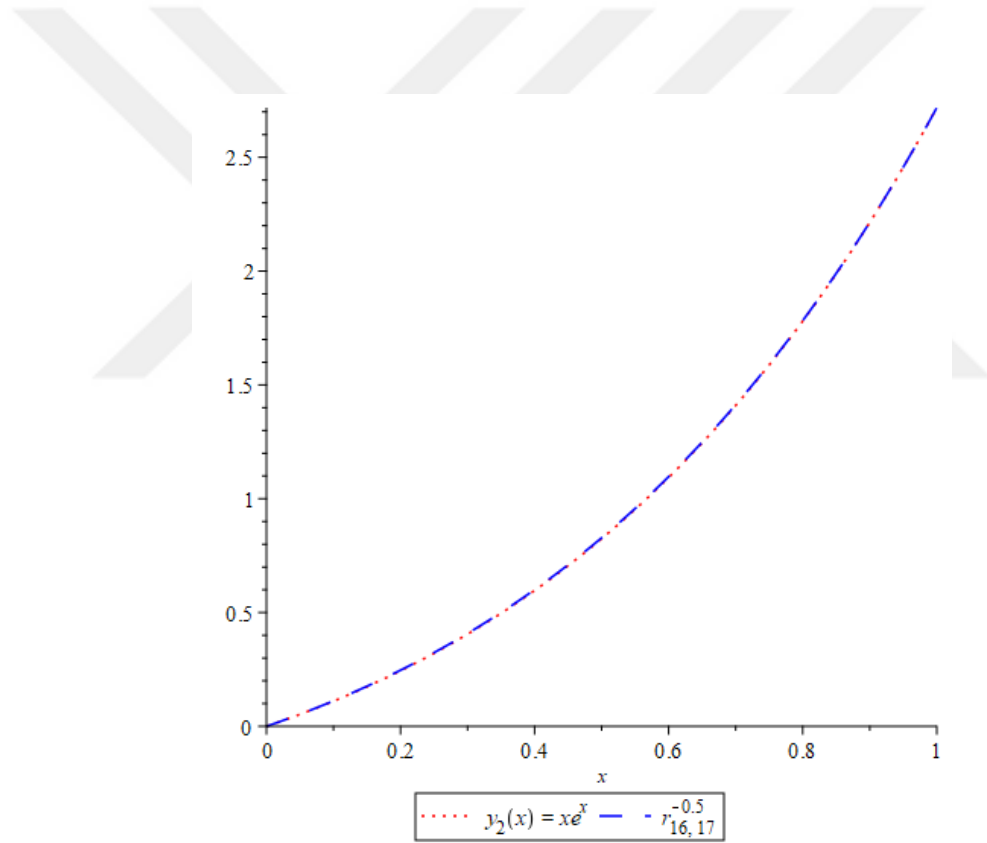
Şekil 6.14. $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{20,23}^{-0.3}(x)$ Padé yaklaşımı

(6.28) denkleminde $\alpha = 6$ ve $h = -0.5$ alınıp tabloda belirtilen A, B ve C değerleri yerine yazılırsa seri çözümü aşağıdaki gibi bulunur;

$$\begin{aligned}
 H_6^{-0.5} = & 1.012226344x + x^2 + 0.4802432218x^3 + 0.1666666667x^4 \\
 & + 0.05174110605x^5 + 0.006250000000x^6 + 0.0009932764226x^7 \\
 & + 0.0001424575107x^8 + 0.00001774892434x^9 + 9.808394880 \times 10^{-7}x^{10} \\
 & + 2.766921105 \times 10^{-8}x^{11} - 3.349605440 \times 10^{-9}x^{12} + 2.867686400 \times 10^{-12}x^{14} \\
 & + 1.911790933 \times 10^{-13}x^{15} - 4.779477332 \times 10^{-14}x^{16} - 2.811457254 \times 10^{-15}x^{17}
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

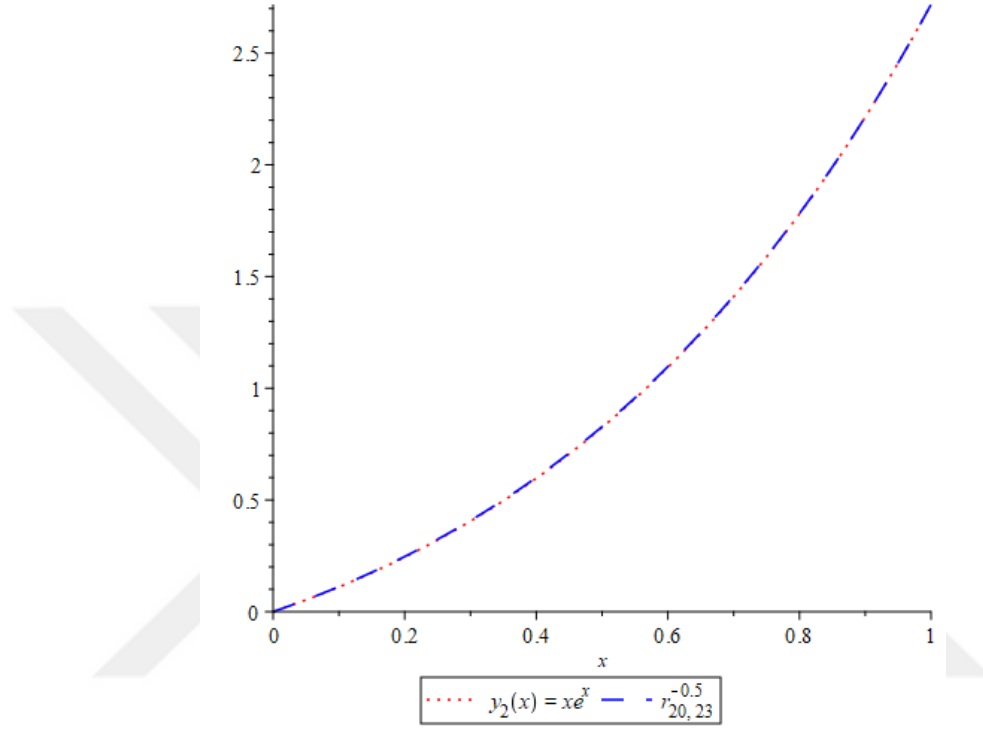
Şimdi (6.32) denklemini için [16,17] ve [20,23] dereceli Padé yaklaşımları hesaplanır ve bulunan nümerik çözümler kesin çözümle grafikte karşılaştırılır(Şekil 6.15 ve Şekil 6.16).

$$\begin{aligned}
r_{16,17}^{-0.5}(x) = & (1.012226344x + 0.9555545515x^2 + 0.4382556194x^3 + 0.1473924439x^4 \\
& + 0.04525392753x^5 + 0.004257487157x^6 + 0.0008046157956x^7 + 0.0001068895816x^8 \\
& + 0.00001301854354x^9 + 4.039379939 \times 10^{-7}x^{10} + 9.250974477 \times 10^{-9}x^{11} \\
& - 3.803712917 \times 10^{-9}x^{12} + 1.649818552 \times 10^{-10}x^{13} - 4.294309361 \times 10^{-12}x^{14} \\
& + 3.841760607 \times 10^{-13}x^{15} - 6.451015020 \times 10^{-14}x^{16}) / (1.0000000000 \\
& - 0.04390860678x + 0.0018978011x^2 - 0.00008418392157x^3 \\
& + 3.655689860 \times 10^{-6}x^4 - 1.581592918 \times 10^{-7}x^5 + 6.941396013 \times 10^{-9}x^6 \\
& - 2.978752937 \times 10^{-10}x^7 + 1.297291781 \times 10^{-11}x^8 - 6.188960315 \times 10^{-13}x^9 \\
& + 2.508761331 \times 10^{-14}x^{10} - 1.164494312 \times 10^{-15}x^{11} + 4.416295119 \times 10^{-17}x^{12} \\
& - 1.626908271 \times 10^{-18}x^{13} + 9.008106869 \times 10^{-20}x^{14} - 4.985969373 \times 10^{-23}x^{15} \\
& + 2.395689827 \times 10^{-22}x^{16} - 1.241373598 \times 10^{-23}x^{17})
\end{aligned} \tag{6.33}$$



Şekil 6.15. $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{16,17}^{-0.5}(x)$ Padé yaklaşımı

$$\begin{aligned}
r_{20,23}^{-0.5}(x) = & 1.012226344x + 1.0000000000x^2 + 0.4802432219x^3 + 0.1666666667x^4 \\
& + 0.05174110604x^5 + 0.006250000000x^6 + 0.0009932764227x^7 \\
& + 0.0001424575107x^8 + 0.00001774892434x^9 + 9.808394882 \times 10^{-7}x^{10} \\
& + 2.766921105 \times 10^{-8}x^{11} - 3.349605439 \times 10^{-9}x^{12} + 2.867686400 \times 10^{-12}x^{14} \\
& + 1.911790933 \times 10^{-14}x^{15} - 4.779477333 \times 10^{-14}x^{16} - 2.811457254 \times 10^{-15}x^{17}
\end{aligned} \tag{6.34}$$



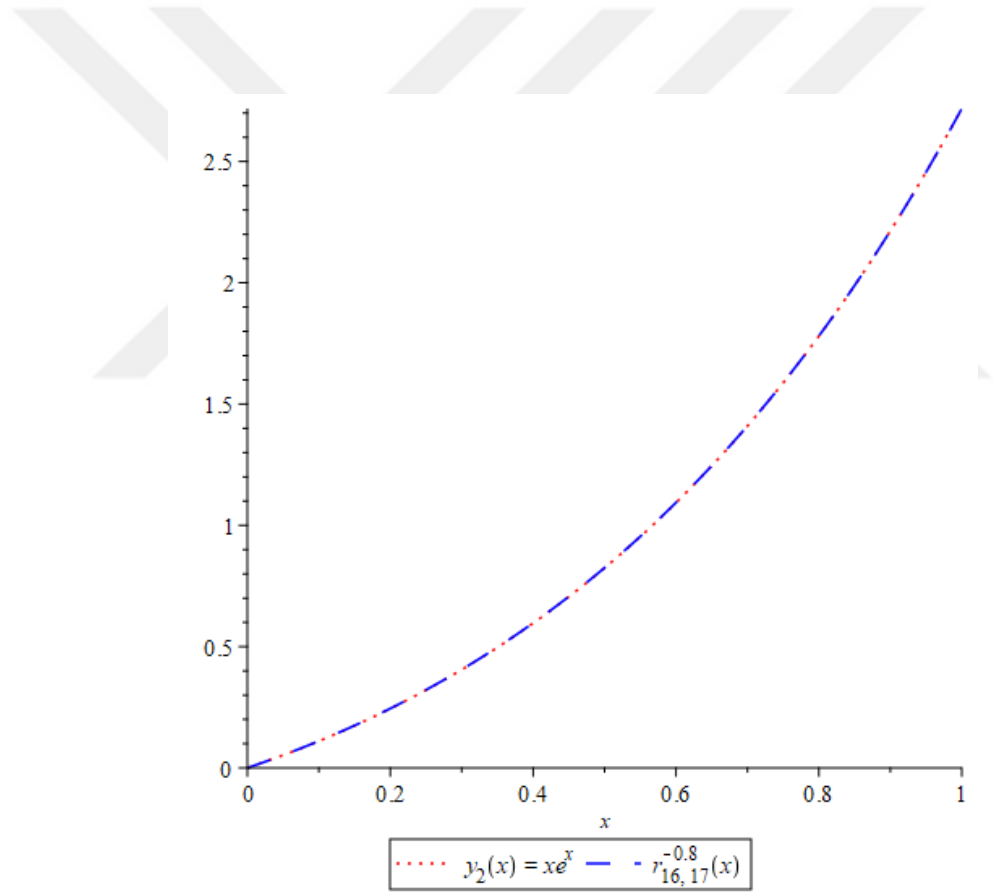
Şekil 6.16. $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{20,23}^{-0.5}(x)$ Padé yaklaşımı

(6.28) denkleminde $\alpha = 6$ ve $h = -0.8$ alınıp tabloda belirtilen A, B ve C değerleri yerine yazılırsa seri çözümü aşağıdaki gibi bulunur;

$$\begin{aligned}
H_6^{-0.8} = & 1.002424016x + x^2 + 0.496119888x^3 + 0.1666666667x^4 \\
& + 0.04356109892x^5 + 0.008000000001x^6 + 0.001301972066x^7 \\
& + 0.0001864598409x^8 + 0.00002331724411x^9 + 1.283795870 \times 10^{-6}x^{10} \\
& + 2.459780085 \times 10^{-8}x^{11} - 7.137042890 \times 10^{-10}x^{12} + 7.341277184 \times 10^{-12}x^{14} \\
& + 4.894184788 \times 10^{-13}x^{15} - 1.223546197 \times 10^{-13}x^{16} - 7.197330570 \times 10^{-15}x^{17}
\end{aligned} \tag{6.35}$$

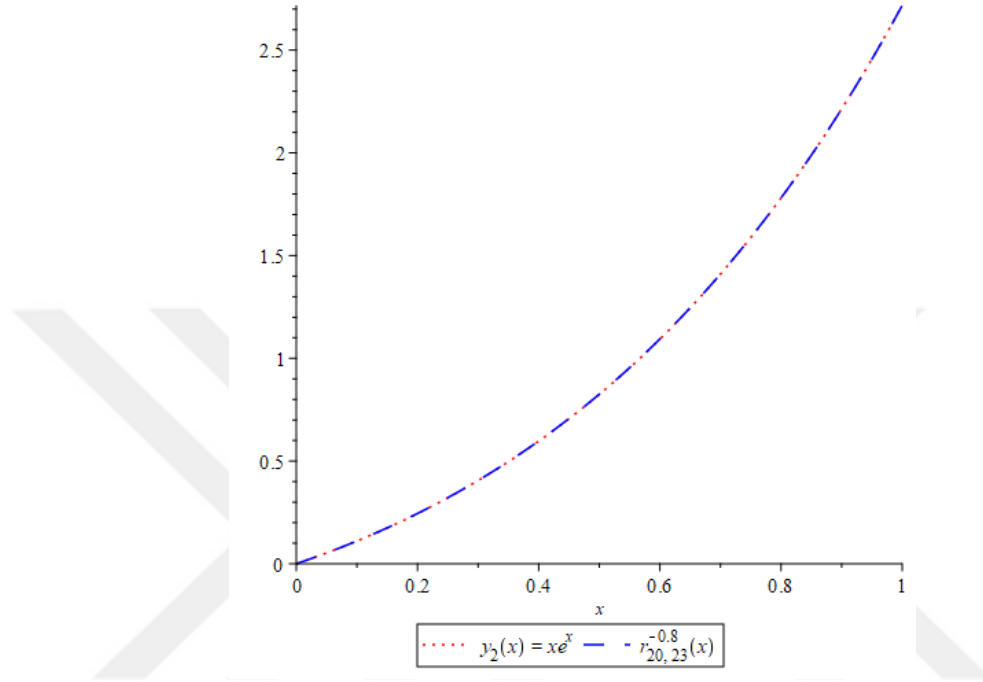
Şimdi (6.35) denklemi için [16,17] ve [20,23] dereceli Padé yaklaşımları hesaplanır ve bulunan nümerik çözümler kesin çözümle grafikte karşılaştırılır (Şekil 6.17 ve Şekil 6.18).

$$\begin{aligned}
r_{16,17}^{-0.8}(x) = & (1.002424016x + 0.9444705488x^2 + 0.4435675072x^3 + 0.1418626242x^4 \\
& + 0.03558516149x^5 + 0.005988407865x^6 + 0.0009594338979x^7 + 0.0001312382965x^8 \\
& + 0.00001569559404x^9 + 3.622189944 \times 10^{-7}x^{10} - 2.285895672 \times 10^{-9}x^{11} \\
& - 1.084523526 \times 10^{-9}x^{12} + 3.304210126 \times 10^{-11}x^{13} - 4.451470736 \times 10^{-12}x^{14} \\
& + 3.304210126 \times 10^{-13}x^{15} - 1.372313460 \times 10^{-13}x^{16}) / (1.0000000000 \\
& - 0.05539517235x + 0.002838809453x^2 - 0.0001599781451x^3 \\
& + 8.168045750 \times 10^{-6}x^4 - 4.515410191 \times 10^{-7}x^5 + 2.375272045 \times 10^{-8}x^6 \\
& - 1.302574428 \times 10^{-9}x^7 + 6.557527837 \times 10^{-11}x^8 - 3.869060108 \times 10^{-12}x^9 \\
& + 1.809329160 \times 10^{-13}x^{10} - 1.172832817 \times 10^{-14}x^{11} + 5.835929647 \times 10^{-16}x^{12} \\
& - 3.170331361 \times 10^{-17}x^{13} + 1.746510767 \times 10^{-18}x^{14} - 1.010406130 \times 10^{-19}x^{15} \\
& + 4.712373953 \times 10^{-21}x^{16} - 2.600269207 \times 10^{-22}x^{17})
\end{aligned} \tag{6.36}$$



Şekil 6.17. $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{16,17}^{-0.8}(x)$ Padé yaklaşımı

$$\begin{aligned}
r_{20,23}^{-0.8}(x) = & 1.002424016x + 1.0000000000x^2 + 0.4961169890x^3 + 0.1666666668x^4 \\
& + 0.04356109893x^5 + 0.008000000004x^6 + 0.001301972066x^7 \\
& + 0.0001864598410x^8 + 0.00002331724412x^9 + 1.283795871 \times 10^{-6}x^{10} \\
& + 2.459780086 \times 10^{-8}x^{11} - 7.137042892 \times 10^{-10}x^{12} + 7.341277187 \times 10^{-12}x^{14} \\
& + 4.894184789 \times 10^{-13}x^{15} - 1.223546197 \times 10^{-13}x^{16} - 7.197330573 \times 10^{-15}x^{17}
\end{aligned} \tag{6.37}$$



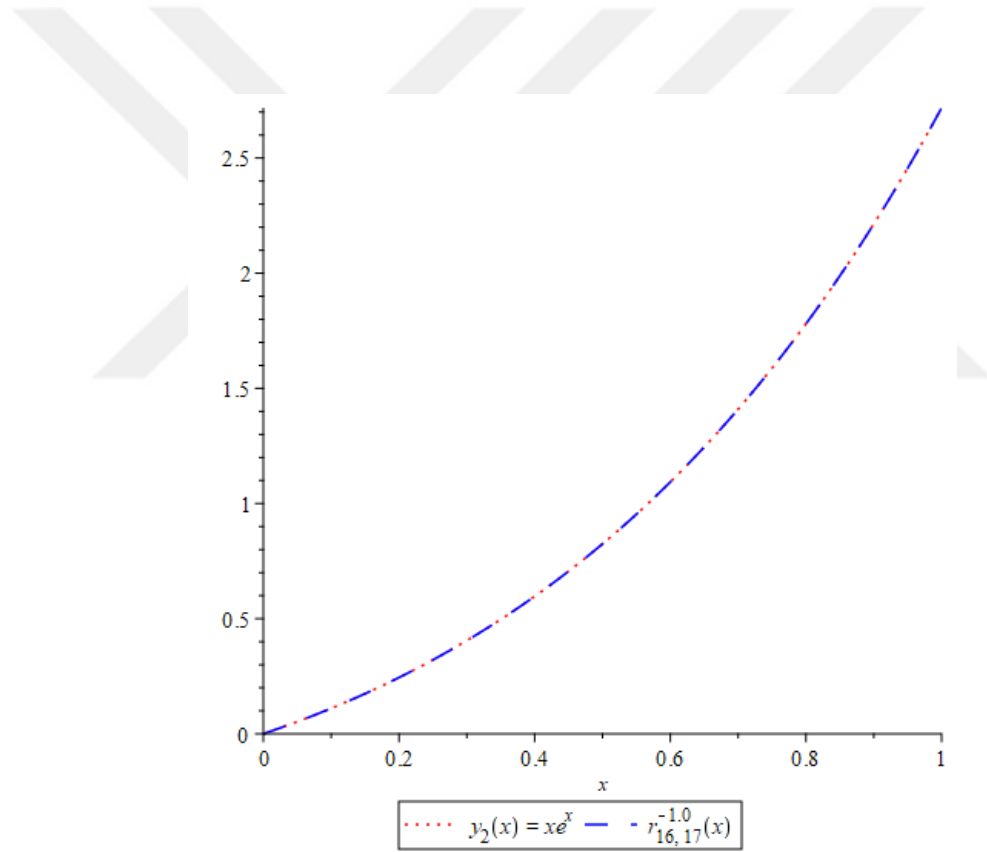
Şekil 6.18. $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{20,23}^{-0.8}(x)$ Padé yaklaşımı

(6.28) denkleminde $\alpha = 6$ ve $h = -1.0$ alınıp tabloda belirtilen A, B ve C değerleri yerine yazılırsa seri çözümü aşağıdaki gibi bulunur;

$$\begin{aligned}
H_6^{-1.0} = & 1.000155505x + x^2 + 0.4997692991x^3 + 0.1666666667x^4 \\
& + 0.04174358142x^5 + 0.008333333334x^6 + 0.00138819743x^7 \\
& + 0.0001984088416x^8 + 0.00002479777280x^9 + 1.378247411 \times 10^{-6}x^{10} \\
& + 2.528333361 \times 10^{-8}x^{11} + 2.06840693 \times 10^{-9}x^{12} + 1.147074560 \times 10^{-11}x^{14} \\
& + 7.647163732 \times 10^{-13}x^{15} - 1.911790933 \times 10^{-13}x^{16} - 1.124582902 \times 10^{-14}x^{17}
\end{aligned} \tag{6.38}$$

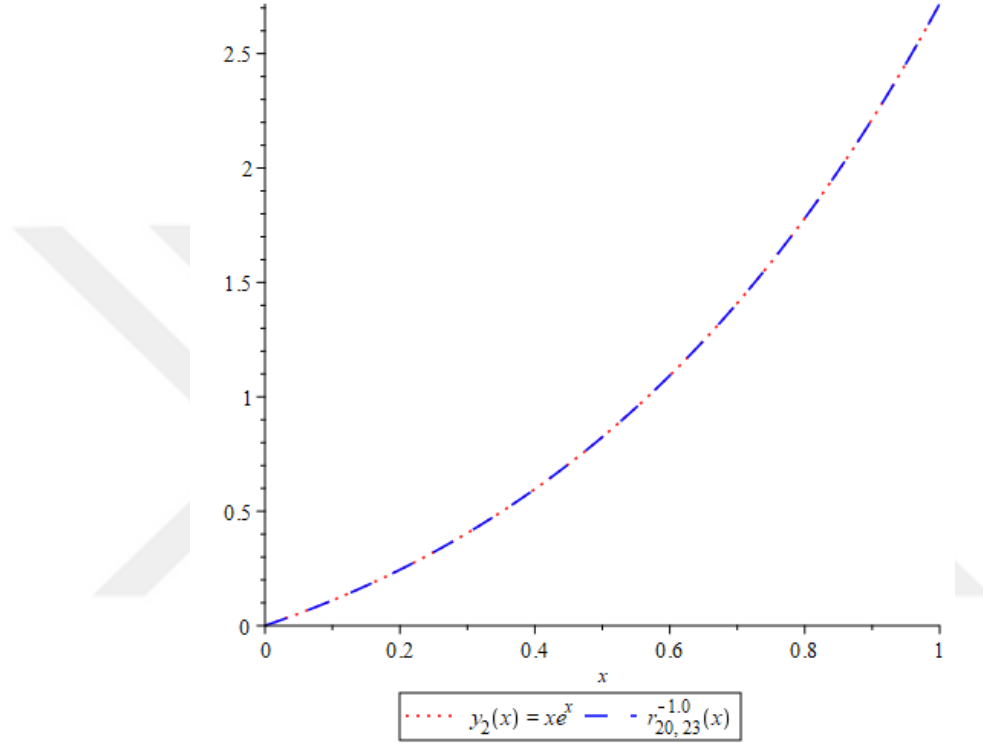
Şimdi (6.38) denklemi için [16,17] ve [20,23] dereceli Padé yaklaşımları hesaplanır ve bulunan nümerik çözümler kesin çözümle grafikte karşılaştırılır (Şekil 6.19 ve Şekil 6.20).

$$\begin{aligned}
r_{16,17}^{-1.0}(x) = & (1.000155505x + 0.9688225727x^2 + 0.4709296791x^3 + 0.1534378673x^4 \\
& + 0.03773006651x^5 + 0.007428865844x^6 + 0.001229359533x^7 + 0.000173403831x^8 \\
& + 0.00002203233374x^9 + 1.102782256 \times 10^{-6}x^{10} + 4.593841712 \times 10^{-8}x^{11} \\
& + 5.342246721 \times 10^{-9}x^{12} + 8.075326341 \times 10^{-11}x^{13} + 2.707067181 \times 10^{-11}x^{14} \\
& + 8.088483340 \times 10^{-13}x^{15} - 1.489192706 \times 10^{-13}x^{16}) / (1.0000000000 \\
& - 0.03117257953x + 0.002332596751x^2 + 0.00001769931054x^3 \\
& - 1.544295913 \times 10^{-6}x^4 + 7.201079841 \times 10^{-7}x^5 - 5.784882153 \times 10^{-8}x^6 \\
& + 5.956442561 \times 10^{-9}x^7 - 4.064711691 \times 10^{-10}x^8 + 3.498380771 \times 10^{-11}x^9 \\
& - 2.055324144 \times 10^{-12}x^{10} + 1.642980365 \times 10^{-13}x^{11} - 9.531511570 \times 10^{-15}x^{12} \\
& + 5.986584006 \times 10^{-16}x^{13} - 3.304918907 \times 10^{-17}x^{14} + 1.890267346 \times 10^{-18}x^{15} \\
& - 8.985843604 \times 10^{-20}x^{16} + 5.176858553 \times 10^{-21}x^{17})
\end{aligned} \tag{6.39}$$



Şekil 6.19. $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{16,17}^{-1.0}(x)$ Padé yaklaşımı

$$\begin{aligned}
r_{20,23}^{-1.0}(x) = & 1.000155505x + 1.0000000000x^2 + 0.4997692991x^3 + 0.1666666667x^4 \\
& + 0.04174358142x^5 + 0.008333333335x^6 + 0.0013889743x^7 + 0.0001984088416x^8 \\
& + 0.00002479777280x^9 + 1.378247211 \times 10^{-6}x^{10} + 2.528333361 \times 10^{-8}x^{11} \\
& + 2.068406930 \times 10^{-9}x^{12} + 1.147074560 \times 10^{-11}x^{14} + 7.647163732 \times 10^{-13}x^{15} \\
& - 1.911790933 \times 10^{-13}x^{16} - 1.124582902 \times 10^{-14}x^{17}
\end{aligned} \tag{6.40}$$



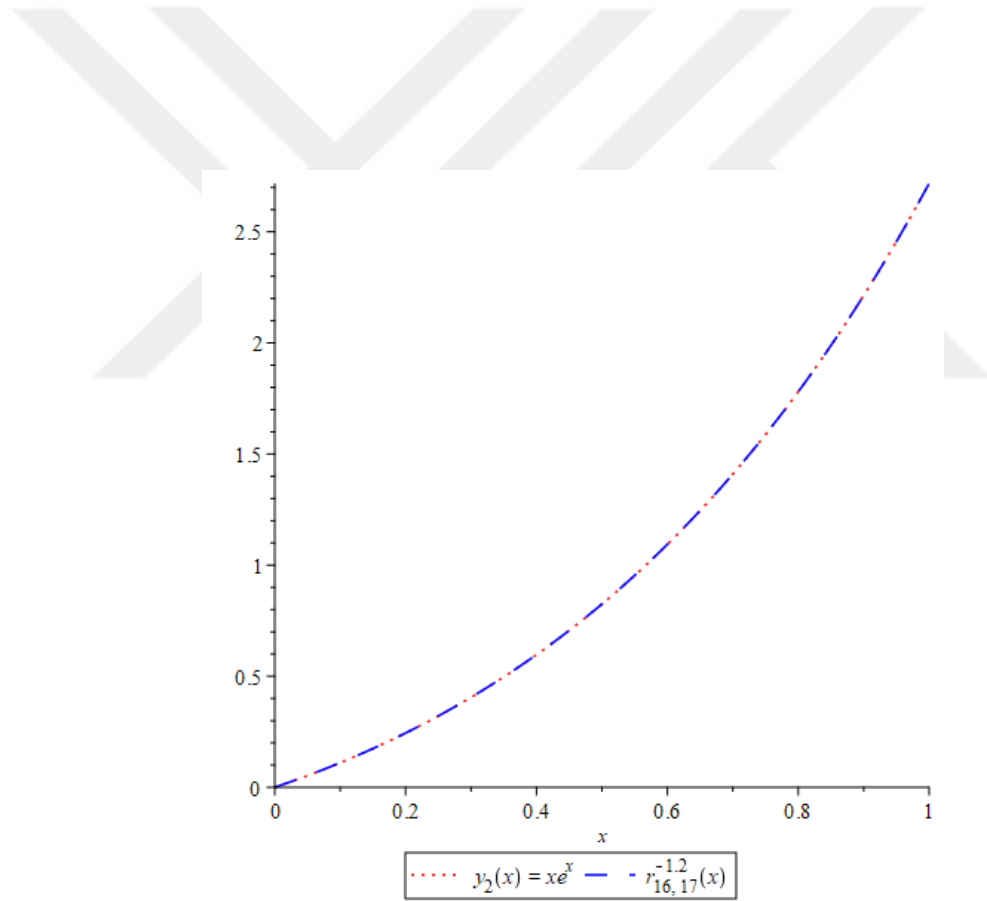
Şekil 6.20. $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{20,23}^{-1.0}(x)$ Padé yaklaşımı

(6.28) denkleminde $\alpha = 6$ ve $h = -1.2$ alınıp tabloda belirtilen A, B ve C değerleri yerine yazılırsa seri çözümü aşağıdaki gibi bulunur;

$$\begin{aligned}
H_6^{-1.2} = & 1.001298187x + x^2 + 0.4978802355x^3 + 0.1666666667x^4 \\
& + 0.04283322705x^5 + 0.008000000001x^6 + 0.001381261473x^7 \\
& + 0.0001963899349x^8 + 0.00002442884064x^9 + 1.393094770 \times 10^{-6}x^{10} \\
& + 3.427090086 \times 10^{-8}x^{11} + 5.160766280 \times 10^{-9}x^{12} + 1.651787366 \times 10^{-11}x^{14} \\
& + 1.101191577 \times 10^{-12}x^{15} - 2.752978943 \times 10^{-13}x^{16} - 1.619399378 \times 10^{-14}x^{17}
\end{aligned} \tag{6.41}$$

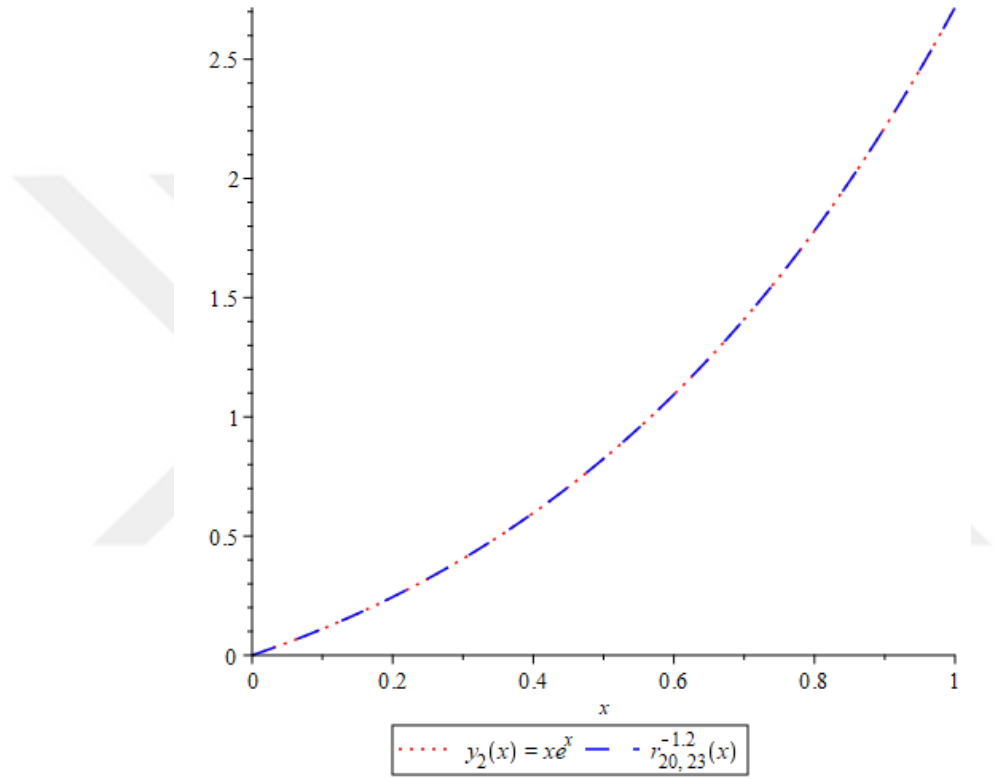
Şimdi (6.41) denklemi için [16,17] ve [20,23] dereceli Padé yaklaşımları hesaplanır ve bulunan nümerik çözümler kesin çözümle grafikte karşılaştırılır(Şekil 6.21 ve Şekil 6.22).

$$\begin{aligned}
r_{16,17}^{-1.2}(x) = & (1.001298187x + 0.9354916745x^2 + 0.4379424624x^3 + 0.1388292775x^4 \\
& + 0.03409889730x^5 + 0.005880462605x^6 + 0.001023996055x^7 + 0.0001349915564x^8 \\
& + 0.00001655471169x^9 + 4.577106177 \times 10^{-7}x^{10} + 2.246632155 \times 10^{-8}x^{11} \\
& + 5.453490864 \times 10^{-9}x^{12} - 2.508565475 \times 10^{-10}x^{13} + 4.120565206 \times 10^{-11}x^{14} \\
& - 9.670957445 \times 10^{-13}x^{15} - 1.875877237 \times 10^{-13}x^{16}) / (1.0000000000 \\
& - 0.06442469014x + 0.004481099633x^2 + 0.0002423942706x^3 \\
& + 0.00001444318108x^4 - 6.290038406 \times 10^{-7}x^5 + 2.918181167 \times 10^{-8}x^6 \\
& - 5.137067497 \times 10^{-10}x^7 - 1.377914232 \times 10^{-11}x^8 + 6.054500162 \times 10^{-12}x^9 \\
& - 4.599728445 \times 10^{-13}x^{10} + 4.592672072 \times 10^{-14}x^{11} - 2.903315642 \times 10^{-15}x^{12} \\
& + 2.028849480 \times 10^{-16}x^{13} - 1.121028036 \times 10^{-17}x^{14} + 6.497875497 \times 10^{-19}x^{15} \\
& - 3.153091235 \times 10^{-20}x^{16} + 1.992507165 \times 10^{-21}x^{17})
\end{aligned} \tag{6.42}$$



Şekil 6.21. $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{16,17}^{-1.2}(x)$ Padé yaklaşımı

$$\begin{aligned}
r_{20,23}^{-1.2}(x) = & 1.001298187x + 1.0000000000x^2 + 0.4978802356x^3 \\
& + 0.1666666667x^4 + 0.04283322705x^5 + 0.008000000002x^6 \\
& + 0.001381261473x^7 + 0.0001963899349x^8 + 0.00002442884064x^9 \\
& + 1.393094770 \times 10^{-6}x^{10} + 3.427090086 \times 10^{-8}x^{11} + 5.160766281 \times 10^{-9}x^{12} \\
& + 1.651787366 \times 10^{-11}x^{14} + 1.101191577 \times 10^{-12}x^{15} \\
& - 2.752978943 \times 10^{-13}x^{16} - 1.619399378 \times 10^{-14}x^{17}
\end{aligned} \tag{6.43}$$



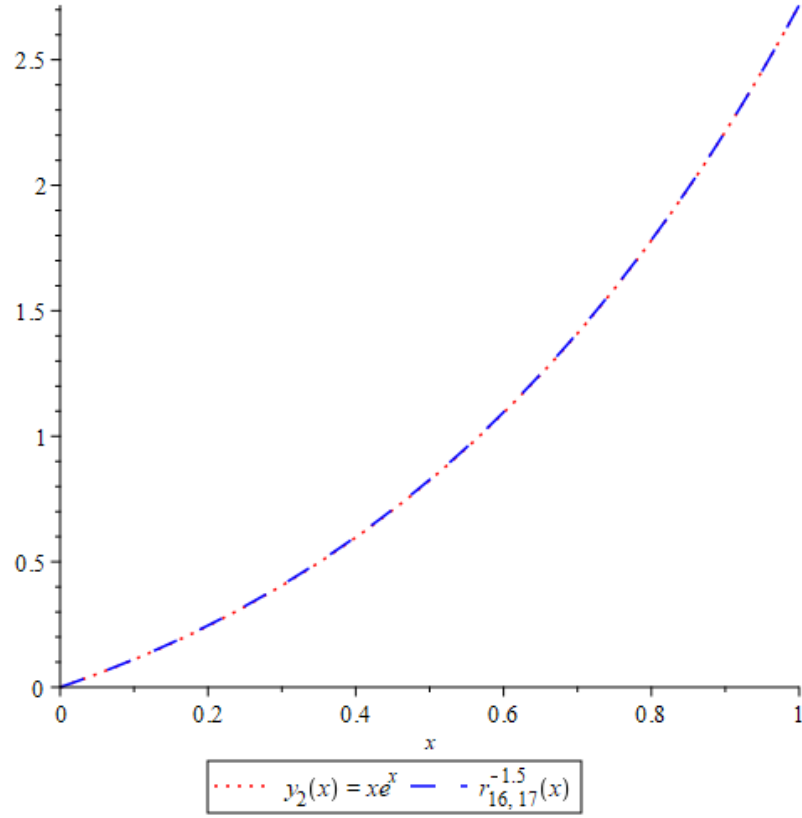
Şekil 6.22. $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{20,23}^{-1.2}(x)$ Padé yaklaşımı

(6.28) denkleminde $\alpha = 6$ ve $h = -1.5$ alınıp tabloda belirtilen A, B ve C değerleri yerine yazılırsa seri çözümü aşağıdaki gibi bulunur;

$$\begin{aligned}
H_6^{-1.5} = & 1.009405557x + x^2 + 0.4846617897x^3 + 0.1666666667x^4 \\
& + 0.04991582802x^5 + 0.006250000000x^6 + 0.001193275463x^7 \\
& + 0.0001670608052x^8 + 0.00002028757745x^9 + 1.278120561 \times 10^{-6} x^{10} \\
& + 7.477676178 \times 10^{-8} x^{11} + 9.426170930 \times 10^{-9} x^{12} + 2.5800917760 \times 10^{-11} x^{14} \\
& + 1.720611840 \times 10^{-12} x^{15} - 4\zeta 301529599 \times 10^{-13} x^{16} - 2.530311529 \times 10^{-14} x^{17}
\end{aligned} \tag{6.44}$$

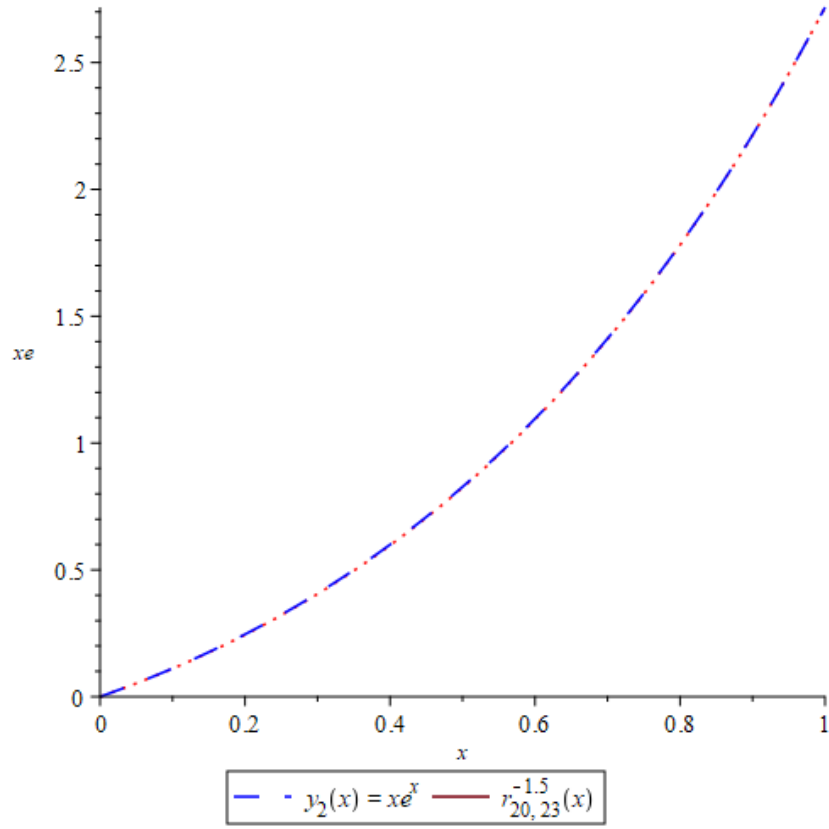
Şimdi (6.44) denklemi için [16,17] ve [20,23] dereceli Padé yaklaşımları hesaplanır ve bulunan nümerik çözümler kesin çözümle grafikte karşılaştırılır (Şekil 6.23 ve Şekil 6.24).

$$\begin{aligned}
r_{16,17}^{-1.5}(x) = & (1.009405557x + 0.9348771905x^2 + 0.4244225226x^3 + 0.1394013853x^4 \\
& + 0.04099817955x^5 + 0.003635994140x^6 + 0.0009687195474x^7 + 0.0001069209139x^8 \\
& + 0.00001368622076x^9 + 4.583715013 \times 10^{-7} x^{10} + 5.275754942 \times 10^{-8} x^{11} \\
& + 6.969858806 \times 10^{-9} x^{12} - 3.902290722 \times 10^{-10} x^{13} + 5.7615118110 \times 10^{-11} x^{14} \\
& - 1.447993626 \times 10^{-12} x^{15} - 3.232937142 \times 10^{-13} x^{16}) / (1.0000000000 \\
& - 0.06451600076x + 0.004236883316x^2 + 0.0002315465485x^3 \\
& + 0.00001298728590x^4 - 5.438857656 \times 10^{-7} x^5 + 2.188051145 \times 10^{-8} x^6 \\
& - 4.082389981 \times 10^{-11} x^7 - 5.147172444 \times 10^{-11} x^8 + 8.377336278 \times 10^{-12} x^9 \\
& - 6.590556893 \times 10^{-13} x^{10} + 5.697732494 \times 10^{-14} x^{11} - 3.627600661 \times 10^{-15} x^{12} \\
& + 2.536709041 \times 10^{-16} x^{13} - 1.399550995 \times 10^{-17} x^{14} + 8.016997141 \times 10^{-19} x^{15} \\
& - 3.802484009 \times 10^{-20} x^{16} + 2.184206682 \times 10^{-21} x^{17})
\end{aligned} \tag{6.45}$$



Şekil 6.23. $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{16,17}^{-1.5}(x)$ Padé yaklaşımı

$$\begin{aligned}
 r_{20,23}^{-1.5}(x) = & 1.009405557x + 1.0000000000x^2 + 0.4846617897x^3 \\
 & + 0.1666666667x^4 + 0.04991582801x^5 + 0.006249999998x^6 \\
 & + 0.001193275463x^7 + 0.0001670608052x^8 + 0.00002028757745x^9 \\
 & + 1.278120561 \times 10^{-6}x^{10} + 7.477676180 \times 10^{-8}x^{11} + 9.426170931 \times 10^{-9}x^{12} \\
 & + 2.580917760 \times 10^{-11}x^{14} + 1.720611840 \times 10^{-12}x^{15} \\
 & - 4.301529598 \times 10^{-13}x^{16} - 2.530311529 \times 10^{-14}x^{17}
 \end{aligned} \tag{6.46}$$



Şekil 6.24. $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm, $r_{20,23}^{-1.5}(x)$ Padé yaklaşımı

Aşağıda Örnek 2 için Çizelge 6.9 ve Çizelge 6.10’da kesin çözümle [16,17] Padé yaklaşımları karşılaştırılmıştır. Çizelge 6.11 ve Çizelge 6.12’de kesin çözüm ile [20,23] Padé yaklaşımları karşılaştırılmıştır. Daha etkili olan h değerleri incelenebilmektedir.

Çizelge 6.9. $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm ve HAM'a ait seri çözümlerin $[16,17]$ Padé nümerik değerleriyle karşılaştırılması

$\alpha = 6$	Kesin Çözüm	$h = -0.3$ için pade çözümü	$h = -0.5$ için pade çözümü	$h = -0.8$ için pade çözümü	Mutlak Hata $E_f(x)$	Mutlak Hata $E_f(x)$	Mutlak Hata $E_f(x)$
x	$y_2(x)$	$r_{16,17}^{-0.3}(x)$	$r_{16,17}^{-0.5}(x)$	$r_{16,17}^{-0.8}(x)$	$ y_2(x) - r_{16,17}^{-0.3}(x) $	$ y_2(x) - r_{16,17}^{-0.5}(x) $	$ y_2(x) - r_{16,17}^{-0.8}(x) $
0.1	0.1105170918	0.1127829649	0.1117200680	0.1107556291	0.0022658731	0.0012029762	0.0002385373
0.2	0.2442805516	0.2485941467	0.2465708517	0.2447348746	0.0043135951	0.0022903001	0.0004543230
0.3	0.4049576424	0.4109035779	0.4081149842	0.4055843463	0.0059459355	0.0031573418	0.0006267039
0.4	0.5967298792	0.6037345196	0.6004499249	0.5974688555	0.0070046404	0.0037200457	0.0007389763
0.5	0.8243606355	0.8317453648	0.8282831591	0.8251405295	0.0073847293	0.0039225236	0.0007798940
0.6	1.093271280	1.100315818	1.097013712	1.094016059	0.007044538	0.003742432	0.000744779
0.7	1.409626895	1.415637848	1.412820724	1.410263061	0.007044538	0.003193829	0.000636166
0.8	1.780432742	1.784811997	1.782759892	1.780896628	0.006010953	0.002327150	0.000463886
0.9	2.213642800	2.215949627	2.214868759	2.213887303	0.002306827	0.001225959	0.000244503
1.0	2.718281828	2.718281827	2.718281828	2.718281827	0.000000001	0	0.000000001

Çizelge 6.10. $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm ve HAM'a ait seri çözümlerin $[16,17]$ Padé nümerik değerleriyle karşılaştırılması

$\alpha = 6$	Kesin Çözüm	$h = -1.0$ için pade çözümü	$h = -1.2$ için pade çözümü	$h = -1.5$ için pade çözümü	Mutlak Hata $E_f(x)$	Mutlak Hata $E_f(x)$	Mutlak Hata $E_f(x)$
x	$y_2(x)$	$r_{16,17}^{-1.0}(x)$	$r_{16,17}^{-1.2}(x)$	$r_{16,17}^{-1.5}(x)$	$ y_2(x) - r_{16,17}^{-1.0}(x) $	$ y_2(x) - r_{16,17}^{-1.2}(x) $	$ y_2(x) - r_{16,17}^{-1.5}(x) $
0.1	0.1105170918	0.1105324123	0.1106448021	0.1114423896	0.0000153205	0.0001277103	0.0009252978
0.2	0.2442805516	0.2443098314	0.2445235826	0.2460414612	0.0000292798	0.0002430310	0.0017609096
0.3	0.4049576424	0.4049982516	0.4052924545	0.4073836595	0.0000406092	0.0003348121	0.0024260171
0.4	0.5967298792	0.5967781036	0.5971240551	0.5995860523	0.0000482244	0.0003941759	0.0028561731
0.5	0.8243606355	0.8244119526	0.8247759351	0.8273697107	0.0000513171	0.0004152996	0.0030090752
0.6	1.093271280	1.093320724	1.093667222	1.096139759	0.000049444	0.000395942	0.002868479
0.7	1.409626895	1.409669503	1.409964591	1.412072968	0.000042608	0.000337696	0.002446073
0.8	1.780432742	1.780464064	1.780678693	1.782213910	0.000031322	0.000245951	0.001781168
0.9	2.213642800	2.213659437	2.213772336	2.214580737	0.000016637	0.000129536	0.000937937
1.0	2.718281828	2.718281917	2.718281830	2.718281830	0.000000089	0.000000002	0.000000002

Çizelge 6.11. $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm ve HAM'a ait seri çözümlerin $[20, 23]$ Padé nümerik değerleriyle karşılaştırılması

$\alpha = 6$	Kesin Çözüm	$h = -0.3$ için pade çözümü	$h = -0.5$ için pade çözümü	$h = -0.8$ için pade çözümü	Mutlak Hata $E_f(x)$	Mutlak Hata $E_f(x)$	Mutlak Hata $E_f(x)$
x	$y_2(x)$	$r_{20,23}^{-0.3}(x)$	$r_{20,23}^{-0.5}(x)$	$r_{20,23}^{-0.8}(x)$	$ y_2(x) - r_{20,23}^{-0.3}(x) $	$ y_2(x) - r_{20,23}^{-0.5}(x) $	$ y_2(x) - r_{20,23}^{-0.8}(x) $
0.1	0.1105170918	0.1127829648	0.1117200681	0.1107556290	0.0022658730	0.0012029763	0.0002385372
0.2	0.2442805516	0.2485941468	0.2465708516	0.2447348746	0.0043135952	0.0022903000	0.0004543230
0.3	0.4049576424	0.4109035779	0.4081149842	0.4055843464	0.0059459355	0.0031573418	0.0006267040
0.4	0.5967298792	0.6037345195	0.6004499250	0.5974688557	0.5967298792	0.0037200458	0.0007389765
0.5	0.8243606355	0.8317453646	0.8282831594	0.8251405295	0.0073847291	0.0039225239	0.0007798940
0.6	1.093271280	1.100315817	1.097013713	1.094016060	0.007044537	0.003742433	0.000744780
0.7	1.409626895	1.415637849	1.412820725	1.410263060	0.006010954	0.003193830	0.000636165
0.8	1.780432742	1.784811997	1.782759892	1.780896627	0.004379255	0.002327150	0.000463885
0.9	2.213642800	2.215949624	2.214868761	2.213887304	0.002306824	0.001225961	0.000244504
1.0	2.718281828	2.718281828	2.718281828	2.718281828	0	0	0

Çizelge 6.12. $y_2(x) = xe^x$ kesin çözüm ve HAM'a ait seri çözümlerin $[20, 23]$ Padé nümerik değerleriyle karşılaştırılması

$\alpha = 6$	Kesin Çözüm	$h = -1.0$ için pade çözümü	$h = -1.2$ için pade çözümü	$h = -1.5$ için pade çözümü	Mutlak Hata $E_f(x)$	Mutlak Hata $E_f(x)$	Mutlak Hata $E_f(x)$
x	$y_2(x)$	$r_{20,23}^{-1.0}(x)$	$r_{20,23}^{-1.2}(x)$	$r_{20,23}^{-1.5}(x)$	$ y_2(x) - r_{20,23}^{-1.0}(x) $	$ y_2(x) - r_{20,23}^{-1.2}(x) $	$ y_2(x) - r_{20,23}^{-1.5}(x) $
0.1	0.1105170918	0.1105324123	0.1106448020	0.1114423897	0.0000153205	0.0001277102	0.0009252979
0.2	0.2442805516	0.2443098316	0.2445235828	0.2460414612	0.0000292800	0.0002430312	0.0017609096
0.3	0.4049576424	0.4049982518	0.4052924547	0.4073836595	0.0000406094	0.0003348123	0.0024260171
0.4	0.5967298792	0.5967781036	0.5971240551	0.5995860521	0.0000482244	0.0003941759	0.0028561729
0.5	0.8243606355	0.8244119524	0.8247759353	0.8273697106	0.0000513169	0.0004152998	0.0030090751
0.6	1.093271280	1.093320725	1.093667222	1.096139758	0.000049445	0.000395942	0.002868478
0.7	1.409626895	1.409669505	1.409964591	1.412072968	0.000042610	0.000337696	0.002446073
0.8	1.780432742	1.780464065	1.780678695	1.782213911	0.000031323	0.000245953	0.001781169
0.9	2.213642800	2.213659437	2.213772334	2.214580735	0.000016637	0.000129534	0.000937935
1.0	2.718281828	2.718281917	2.718281829	2.718281828	0.000000089	0.000000001	0

7.SONUÇLAR

Bu çalışmada bazı yüksek mertebeden kesirli integro-diferensiyel denklemlerin çözümleri verilmiştir. Yüksek kesirli integro-diferensiyel denklemlerin nümerik çözümünde etkili metotlardan olan Homotopi Analiz Metoduna ait seri çözümlere Padé Yaklaşımı uygulanmıştır. HAM'dan elde edilen seri çözümlerde h yardımcı parametreleri bulunmaktadır. HAM'da bulunan A, B veya C değerleri, farklı h değerleri için tekrar hesaplanıp elde edilen her yeni seri çözüme Padé yaklaşımı uygulanmıştır.

Çalışmamızın uygulamalar kısmındaki sonuçlardan da görüleceği gibi diferensiyel denklemlerin kesin çözümleri ve bu denklemlerin HAM'a ait seri çözümlerinin farklı h değerleri için Padé yaklaşımları şekil ve çizelgeler üzerinden karşılaştırılmıştır. Padé nümerik yaklaşımları kesin çözümle uyumlu olduğu görülmüştür. Aynı zamanda Padé yaklaşımında daha etkili olan h değerleri görülmektedir.

8.KAYNAKLAR

Adomian, G. (1994), “Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method”, *Kluwer Academic Publishers*, Boston.

Alkan, A., (2019), “Kesir mertebeli kısmı diferansiyel denklemlerin Homotopi Analiz Metodu ile Nümerik Çözümleri”, *Yüksek Lisans Tezi, Van Yüüncü Yıl Üniversitesi*, Van.

Bayram, D., (2019), “Lineer Kesirli İntegro-Diferansiyel denklemlerin Laquerre Polinomları ile Sayısal Çözümleri” *Doktora Tezi, Pamukkale Üniversitesi*, Denizli.

Çelik, E., (2002), “Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Nümerik Çözümü”, *Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi*, Erzurum.

Değerli, K., (2018), “Kesirli Mertebeden Türeve Uygulamalarla Genel Bakış”, *Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi*, İstanbul.

Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., and Tricomi, F. G., “Higher Transcendental Functions”, 2, New York: McGraw-Hill, (1953)

Kallrath, (2002), “On Rational Function Techniques and Padé Appoximants”, Germany.

Liao, S.J., (2008), “Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems”, *Commun.Nonlinear Sci. Numer.Simulat*, 14:983-997 pp.

Liao, S.J. and Tan, Y., 2007, “A general approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations”, *Stud.Appl.Math.*,119:297-355 pp.

Podlubny, L., (1999), “Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering”, vol. 198, Academic Press, NewYork, London, Tokya and Toronto

Ray S.S., and Bera R.K. (2004), “An approximate solution of a nonlinear fractional equation by adomin decomposition method, Applied mathhematics and Computation”, Volume 165, Issue 2, 15 June 2005, Pages 473-483pp.

Turut, V. (2007), “ Çok değişkenli padé yaklaşımları ve uygulamaları”, *Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.*

Turut, V., (2010), “Kesirli Diferensiyel Denklemlerin Nümerik .Çözümleri” , *Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.*

Volterra, V., (1930), “The Theory Of Functional and of Integral Equations and Integro Differential equations”, London.

Zhang, X. - Tang, B. - He, Y., (2011), “Homotopy analysis method for higher-order fractional integro-differential aquations”, Çin.