

**YÜKSEK MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI**

ALAN KILIÇ

**HAZİRAN 2025
DİYARBAKIR**

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YÜKSEK MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI**



ALAN KILIÇ

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİ'NİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALI'NDA
DOKTORA TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

HAZİRAN 2025
DİYARBAKIR

YÜKSEK MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Alan KILIÇ tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı'nda Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Prof. Dr. Necat POLAT
Danışman, **Matematik Bölümü,**
Dicle Üniversitesi

Sınav Jürisi:

Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV (*)
Matematik Bölümü, Bahçeşehir Üniversitesi

Prof. Dr. Necat POLAT (**)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Bilal ŞEKER
Matematik Bölümü, Batman Üniversitesi

Doç. Dr. Asıf YOKUŞ
Matematik Bölümü, Fırat Üniversitesi

Doç. Dr. Hatice TAŞKESEN
Matematik Bölümü, Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi



Savunma Tarihi: 19/06/2025

(*) Jüri Başkanı.
(**) Tez Danışmanı.

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımınla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Alan KILIÇ

İmza:

TEŞEKKÜR

Tecrübe ve rehberliğiyle bu tez çalışmasının her anında yanımda olan değerli danışmanım Prof. Dr. Necat POLAT' a çalışmanın daha fikir aşamasından tez taslağıındaki düzeltmelere kadar gösterdiği destek ve sabırdan dolayı teşekkür ederim. Jüri üyelerime de bu tezin daha nitelikli bir hale gelmesi için yaptıkları eleştiri ve önerileri için teşekkür ederim.

Bana olan desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	4
3. MATERYAL VE METOT	6
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	7
4.1 Yüksek Mertebeden Damping Terimli Hemen Hemen Doğrusal Hiperbolik Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı.....	7
4.2 Yüksek Mertebeden Hemen Hemen Doğrusal Pseudo-Parabolik Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı.....	29
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	53
5.1 Sonuçlar.....	53
5.2 Öneriler.....	53
KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	55

ÖZET

YÜKSEK MERTEBEDEN KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

KILIÇ, Alan

Doktora, Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Necat POLAT

Haziran 2025, 63 sayfa

Bu tezde, yüksek mertebeden hemen hemen doğrusal hiperbolik ile parabolic kısmi diferansiyel denklemlerin bir sınıfı için başlangıç ve sınır değer probleminin varlığı ve tekliği incelendi. Çözümün ön kestirimlerine dayanılarak, uygun koşullar altında Fourier serisi formunda zayıf çözümün varlığı kanıtlandı. Bu amaçla Picard ardışık yaklaşım yöntemi kullanıldı. Ayrıca zayıf çözümün tekliği de ispatlandı.

Tezin ilk bölümünde kısmi diferansiyel denklemlere sıklıkla ihtiyaç duyulduğu, fizik, mühendislik ve diğer bilimlerin birçok alanında büyük öneme sahip olduğu dile getirilmiştir. Sonrasında, konumuza ilişkin günümüze kadar yapılan çalışmalar tarihi gelişimiyle birlikte kısaca ele alınmıştır. İkinci bölümde ise üzerinde çalıştığımız denkleme benzer, daha önce yapılan çalışmalara değindiğimiz ‘Önceki Çalışmalar’ adını alan, ele alınan konu ve denklemler ile ilgili var olan literatürün özeti verilmiştir. Üçüncü bölümde ise sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, tanımlar, eşitsizlikler, uzaylar, lemmalar ve teoremlere yönelik kaynak ve referanslar verilmiştir. ‘Araştırma Bulguları’ olarak adlandırılan dördüncü bölüm ise tezin orijinal kısmıdır. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda sınırlı bölgede yüksek mertebeden damping terimli hemen hemen doğrusal hiperbolik tipten denklem için başlangıç ve sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu kısımda ele alınan başlangıç ve sınır değer problemi için çözümün varlığı ve tekliği incelendi. İkinci kısımda ise sınırlı bölgede yüksek mertebeden hemen hemen doğrusal pseudo-parabolik tipten denklem için başlangıç ve sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu kısım için de ele alınan başlangıç ve sınır değer problemin çözümü varlığı ve tekliği incelendi. Ve her iki problemde de uygun koşullar altında Fourier serisi formunda zayıf çözümün varlığı Picard ardışık yaklaşım yöntemi yardımıyla kanıtlandı. Beşinci bölümde ise, tezden elde edilen sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yüksek Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklem, Hemen Hemen Doğrusal Kısmi Diferansiyel Denklem, Başlangıç Değer Problemi, Sınır Değer problemi, Varlık, Teklik, Picard Yöntemi, Fourier Serisi Yöntemi, Özfonksiyon Açılım Yöntemi

ABSTRACT

EXISTENCE OF SOLUTIONS TO HIGHER ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

KILIÇ, Alan

Doctorate, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Necat POLAT

June 2025, 63 pages

In this thesis, we study the existence and uniqueness of the initial and boundary value problem for a class of higher order semi-linear hyperbolic and parabolic partial differential equations. Based on the priori estimates of the solution, the existence of the weak solution in the form of Fourier series under suitable conditions is proved. For this purpose Picard's successive approximation method is used. Also, the uniqueness of the weak solution is proved. In the introductory chapter of the thesis, it is underscored that partial differential equations are frequently encountered and play a fundamental role in various fields of science, particularly in physics, engineering, and related disciplines. Thereafter, a concise overview of the historical development and existing literature pertaining to the subject matter is presented. In the second chapter, titled *Previous Studies*, a summary of the existing literature concerning the subject and equations under consideration is provided, with a particular focus on earlier works related to the equation studied in this thesis. In the third chapter, references and sources are provided for several fundamental concepts, definitions, inequalities, function spaces, lemmas, and theorems that will be utilized in the subsequent chapters. The fourth chapter, entitled *Research Findings*, constitutes the original contribution of this thesis. It is structured in two parts. The first part addresses the initial-boundary value problem for a higher-order, semi-linear hyperbolic type equation with a damping term, considered within a bounded domain. In this context, the existence and uniqueness of solutions to the proposed problem are rigorously analyzed. The second part is devoted to the initial-boundary value problem for a higher-order, semi-linear pseudo-parabolic type equation, also defined on a bounded domain. A similar analysis is carried out to establish the existence and uniqueness of solutions for this class of problems. For both cases, the existence of a weak solution expressed in the form of a Fourier series is demonstrated under suitable conditions, employing the method of Picard successive approximations. In the fifth chapter, the conclusions drawn from the thesis and the recommendations are presented.

Keywords: Higher Order Partial Differential Equation, Semi-linear Partial Differential Equation, Initial Value Problem, Boundary Value Problem, Existence, Uniqueness, Picard's Method, Fourier Series Method, The Method of Eigenfunction Expansion

GİRİŞ

Fizik, mühendislik ve diğer bilimlerin birçok alanında kısmi diferansiyel denklemlere sıklıkla ihtiyaç duyulmasından dolayı kısmi diferansiyel denklemler teorisi matematik çalışma alanının en önemlilerindendir. Fizik ve diğer uygulamalı bilimlerin birçok dalında karşımıza çıkan dinamik sistemlerin ve problemlerin kısmi diferansiyel denklemler ile ifade edilebilmesinden dolayı kısmi diferansiyel denklemler teorisi matematiğin çalışma alanları içinde ağırlığını hissettirmekte ve önemli bir yer tutmaktadır. Kısmi diferansiyel denklemler günümüzde doğanın temel kanunlarının matematiksel modelle formüllendirilmesinde, uygulamalı matematiğin geniş bir alanında, matematiksel fizikte birden çok değişkene bağlı kapsamlı değişik problemlerin matematiksel olarak analizinde ve mühendislikte karşımıza çıkmasından dolayı matematiksel birçok bilimde, özellikle fizik, geometri ve analizde merkezi bir rol oynar. Bugün matematiksel fizikte birçok problem, kısmi diferansiyel denklemlere uygun başlangıç ve/veya sınır koşulları verilerek tanımlanabilmektedir. Bu problemler, verilen ek koşullara bağlı olarak başlangıç, sınır veya başlangıç ve sınır değer problemleri olarak adlandırılmaktadır. Bütün fiziksel teoremlerin temeli kısmi diferansiyel denklemlere dayanmaktadır. Diferansiyel denklemler teorisi, matematiksel disiplinler içerisinde en önemlisidir [1].

Genel olarak ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler hiperbolik, parabolik ve eliptik olmak üzere üç sınıfta toplanırlar. Daha yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemler için de, her ne kadar ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerde olduğu kadar kolay belirlenemese de benzer sınıflandırma bulunmaktadır.

Bugün elimizde bulunan birçok teorik ve uygulamalı çalışma iki veya daha yüksek mertebeli kısmi diferansiyel denklemler içermektedir. Bu denklemleri barındıran bazı klasik ve klasik olmayan problemlerin çözümleri için daha geniş bilgi almak isteyenler [2], [3], [4], [5], [1], [8], [9], [10], [11], [12], [13] kaynaklarına ve bunların içindeki referanslara başvurabilir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan ‘Giriş’ bölümünden sonra,

üzerinde çalıştığımız denkleme benzer daha önce yapılan çalışmalara değindiğimiz ‘Önceki Çalışmalar’ adını alan ikinci bölümde, ele alınan konu ve denklemler ile ilgili var olan literatürün özeti verilmiştir.

Sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, tanımlar, eşitsizlikler, uzaylar ve teoremler ile ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemi içeren başlangıç ve/veya sınır değer problemi için bazı teoremler ve buna dair örnekler ile problemin değişkenlerine ayrılması (Fourier serisi) yöntemiyle çözümüne ilişkin kaynaklara ‘Materyal ve Metod’ adını verdiğimiz üçüncü bölümde yer verilmiştir. ‘Araştırma Bulguları’ olarak adlandırılan dördüncü bölüm ise tezin orijinal kısmıdır. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısımda sınırlı bölgede yüksek mertebeden damping terimli hemen hemen doğrusal hiperbolik tipten aşağıdaki denklem için başlangıç ve sınır değer problemi ele alınmıştır:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (-1)^k a^2 \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + (-1)^m 2\varepsilon \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m} \partial t} = f(x, t, u).$$

Burada $k \geq 1$ ve $m \leq k$ doğal sayılar, $\varepsilon \geq 0$ olacak şekilde sonradan sınırlandırılacak bir parametre, $f(x, t, u)$, $\bar{\Omega} \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde verilmiş fonksiyon ve $u = u(x, t)$ problemin çözümüdür.

İkinci kısımda sınırlı bölgede yüksek mertebeden hemen hemen doğrusal pseudo-parabolik tipten aşağıdaki denklem için başlangıç ve sınır değer problemi ele alınmıştır:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^k a^2 \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + (-1)^m \varepsilon \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m} \partial t} = f(x, t, u).$$

Burada $k \geq 1$ ve $m \leq k$ doğal sayılar, $\varepsilon \geq 0$ olacak şekilde bir parametre, $f(x, t, u)$, $\bar{\Omega} \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde verilmiş fonksiyon ve $u = u(x, t)$ problemin çözümüdür.

$m = 0$ ve $f(x, t, u) = F(x, t)$ durumunda homojen olmayan denklemin homojen başlangıç veya sınır koşullarıyla birlikte problem, homojen denklemlili homojen olmayan başlangıç veya sınır koşullu probleme dönüşeceği ve ayrıca eğer homojen olmayan denklem homojen olmayan başlangıç veya sınır koşullarıyla verilse bu durumda problemin bu iki durumdakilere dönüşeceği bilinmektedir. Bu problemin çözümü için değişkenlerin ayrılması yöntemi lineer birleşim ilkesiyle birlikte yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yöntem Fourier seri yöntemi veya özfonksiyon açılımı yöntemi olarak da bilinmektedir.

Yukarıda verilen kısımlardaki problemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenmektedir. Bu amaçla problemlere ilişkin özdeğer probleminden elde edilen özfonksiyonları içeren Fourier serisi şeklindeki zayıf çözümü verildikten sonra Picard ardışık yaklaşımlarıyla oluşturulan çözüme ilişkin dizinin düzgün yakınsaklığı gösterilmektedir. Çözümün ön kestirimlerine dayanılarak uygun koşullar altında Fourier serisi formunda zayıf çözümün varlığı ve tekliği ispatlanmaktadır.

Beşinci bölümde ise, tezde elde edilen sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

1. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Kısmi diferansiyel denklemlerin birçoğunun hiperbolik, parabolik ve eliptik tiplerinden biri olduğu bilinmektedir. Konik denklem sınıflandırılması yardımıyla ikinci mertebeden iki bağımsız değişkenli kısmi diferansiyel denklemler sınıflandırılmaktadır. Elimizdeki en yalın haldeki kısmi diferansiyel denklemler dalga(hiperbolik), ısı(parabolik) ve Laplace(eliptik) denklemleri olarak sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \\u_t - k u_{xx} &= 0, \\u_{xx} + u_{yy} &= 0.\end{aligned}$$

Matematiksel fizikte ve yine birçok uygulamalı bilimde karşımıza çıkan birçok problem, kısmi diferansiyel denklemlere özellikle yukarıda verilen tipten veya bunları içeren problemlere indirgenirler. İkinci mertebeden olan kısmi diferansiyel denklemleri içeren problemler çeşitli yönlerden çalışılmıştır. Ancak karşılaşılan çeşitli zorluklardan dolayı yüksek mertebeli denklemler için bu yönlü çalışmalar azdır.

Baouendi ve Grisvard 1968’de $x \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} = f(x, t)$ denklemi için sınır değer probleminin çözülebilirliğini gösterdi.

Amanov and Yuldasheva 2009’da $\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t)$ denklemi için sınır değer problemlerinin çözülebilirliğini gerçekleştirdiler. Bu çalışmada k ’nın tek değer aldığı durumlarda hiperbolik tipe dönüşen denklem için sınır değer problemi çalışmanın zorluğu ortadadır.

Amanov and Ashyralyev 2014’te $\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t)$ denklemi için başlangıç ve sınır değer ile sınır değer problemlerinin çözülebilirliğinin k ’nın tekliği ve çiftliğine bağlı olduğunu gösterdiler. Bu çalışmada k ’nın tekliği ve çiftliğine bağlı olarak ortaya çıkan eliptik tip için başlangıç koşullarından ve hiperbolik tip için sınır koşullarından dolayı çalışmanın zorluğu ortadadır.

Amanov 2015'te $t^m \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + (-1)^k \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t)$ denklemi için başlangıç ve sınır değer probleminin çözülebilirliğini gösterdi.

Sabitov 2015'te $\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} - \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x, t)$ denklem için sınır değer probleminin çözülebilirliğini gösterdi.

Kozhanov and Pinigina 2017'de $(-1)^k \frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} + \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x) u_{x_j}) - a(x)u = f(x, t)$ denklemi için sınır değer probleminin çözülebilirliğini gösterdi.

Çiftçi ve Halilov 2008'de $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t, u)$ denklemi için başlangıç ve devirli sınır değer probleminin çözülebilirliğini gösterdi [6].

Halilov ve Çiftçi 2009'da $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = f(x, t, u)$ denklemi için başlangıç ve devirli sınır değer probleminin çözülebilirliğini gösterdi [7].

Yuldasheva 2019'da $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x, t, u)$ diferansiyel denklemi için t 'ye göre sınır ve x 'e göre devirli sınır değer probleminin çözülebilirliğini gösterdi [13].

2. MATERYAL VE METOT

Sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, tanımlar, eşitsizlikler, uzaylar ve teoremler ile ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemi içeren başlangıç ve/veya sınır değer problemi için bazı teoremler ve buna dair örnekler ile problemin değişkenlerine ayrılması (Fourier serisi) yöntemiyle çözümüne ilişkin [14], [3], [4], [5], [1] kaynaklara ve bunların içindeki referanslara başvurulabilir.

Ele alınan problemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenmektedir. Bu amaçla problemlere ilişkin özdeğer probleminden elde edilen özfonksiyonları içeren Fourier serisi şeklindeki zayıf çözümü verildikten sonra Picard ardışık yaklaşımlarıyla oluşturulan çözüme ilişkin dizinin düzgün yakınsaklığı gösterilmektedir. Daha sonra düzgün yakınsadığı fonksiyonun sürekli olduğu dikkate alınarak ilişkin integral denkleminin sağlandığı gösterilmektedir. Nihayet çözümün ön kestirimlerine dayanarak uygun koşullar altında Fourier serisi formunda zayıf çözümün varlığı ve tekliği ispatlanmaktadır.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümün her bir kısmı diğerinden bağımsızdır.

3.1 Yüksek Mertebeden Damping Terimli Hemen Hemen Doğrusal Hiperbolik Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı

Bu kısımda aşağıdaki başlangıç ve sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği incelendi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (-1)^k a^2 \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + (-1)^m 2\varepsilon \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m} \partial t} = f(x, t, u), \quad (4.1.1)$$

$$(x, t) \in \Omega = \{0 < x < \pi, 0 < t < T\},$$

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq \pi, \quad (4.1.2)$$

$$\frac{\partial^{2l} u(0, t)}{\partial x^{2l}} = \frac{\partial^{2l} u(\pi, t)}{\partial x^{2l}} = 0, l = 0, 1, 2, \dots, k-1, 0 \leq t \leq T. \quad (4.1.3)$$

Burada $k \geq 1$ ve $m \geq 0$, ($k \geq m$) doğal sayılar, $T > 0$ gerçel sayılar, $\varepsilon \geq 0$ olacak şekilde sonradan sınırlandırılacak bir parametre, $f(x, t, u)$, $\bar{\Omega} \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde verilmiş fonksiyon ve $u = u(x, t)$ problemin çözümüdür.

Mevcut probleme ilişkin özdeğer probleminden elde edilen özfonksiyonları içeren Fourier serisi şeklindeki zayıf çözümü verildikten sonra Picard ardışık yaklaşımlarıyla oluşturulan çözüme ilişkin dizinin düzgün yakınsaklığı gösterilmektedir. Ayrıca zayıf çözümün tekliği de ispatlanmaktadır.

Tanım 4.1.1. Bir $v(x, t) \in C^{2k}(\bar{\Omega})$ fonksiyonu (4.1.1) deki kısmi türevlere göre sürekli ve eğer (4.1.3) deki sınır koşulları ve $v(x, T) = 0$ koşulunu sağlarsa *test fonksiyonu* olarak adlandırılır:

Tanım 4.1.2. Keyfi $v(x, t)$ test fonksiyonu için aşağıdaki integral eşitliğini sağlayan $u(x, t) \in C(\bar{\Omega})$ fonksiyonuna (4.1.1)-(4.1.3) probleminin *zayıf çözümü* denir:

$$\int_0^t \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (-1)^k a^2 \frac{\partial^{2k} v}{\partial x^{2k}} - (-1)^m 2\varepsilon \frac{\partial^{2m+1} v}{\partial x^{2m} \partial t} \right) u - f(x, t, u) v \right] dx dt. \quad (4.1.4)$$

Fourier serisi formunda zayıf çözüm kullanılarak (4.1.1)-(4.1.3) probleminden Fourier serisi katsayıları için doğrusal olmayan sonsuz sayıda integral denklem elde edilir. Fourier serisi katsayılarının çözüm olduğu uzay tanımlanıp uygun norm verilir.

Tanım 4.1.3. B_T ile $[0, T]$ aralığındaki Fourier katsayıları olan sürekli fonksiyonlar kümesi

$$\{\bar{u}(t)\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$$

nin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)| < \infty$$

koşulunu sağlayanları gösterilsin. B_T de norm aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\|\bar{u}(t)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)|.$$

Açıkça B_T Banach uzayıdır.

Problemın Çözümü

(4.1.1)-(4.1.3) probleminin zayıf çözümünü

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \quad (4.1.5)$$

şeklinde arayalım. Burada $u_n(t)$ ($n = \overline{1, \infty}$) bilinmeyen fonksiyondur. Bunları bulmak için $\Delta = 4(\varepsilon^2 n^{4m} - a^2 n^{2k}) < 0$ durumunda (4.1.4) eşitliği kullanılarak aşağıdaki integral denklemi elde edilir:

$$u_n(t) = \frac{2}{\beta\pi} \int_0^t \int_0^\pi e^{\alpha(t-\tau)} f\left(\xi, \tau, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau) \sin n\xi\right) \sin\beta(t-\tau) \sin n\xi d\xi d\tau. \quad (4.1.6)$$

Burada $\alpha = -\varepsilon n^{2m}$ ve $\beta = \sqrt{a^2 n^{2k} - \varepsilon^2 n^{4m}}$.

Teorem 4.1.1. Aşağıdaki koşullar altında (4.1.6) denkleminin B_T de tek çözümü vardır:

- 1) $\varepsilon \leq \frac{a}{\sqrt{2}} n^{k-2m}$,
- 2) $f(x, t, u)$ bütün değişkenlerine göre $\overline{\Omega} \times R$ bölgesinde sürekli,
- 3) $|f(x, t, u) - f(x, t, v)| \leq b(x, t)|u - v|$, $b(x, t) > 0$ ve $b(x, t) \in L_2(\Omega)$,
- 4) $f(x, t, 0) \in L_2(\Omega)$.

Lemma 4.1.1. Teorem 4.1.1 in koşulları altında (4.1.6) denkleminin B_T de en az bir çözümü vardır.

İspat. Ardışık yaklaşımlar yöntemini uygularsak $N = \overline{1, \infty}$ olmak üzere (4.1.6) denklemi için

$$u_n^{(N+1)}(t) = \frac{2}{\beta\pi} \int_0^t \int_0^\pi e^{\alpha(t-\tau)} f\left(\xi, \tau, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(N)}(\tau) \sin n\xi\right) \sin\beta(t-\tau) \sin n\xi d\xi d\tau \quad (4.1.7)$$

elde ederiz.

$$Au^{(N)}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(N)}(\tau) \sin n\xi \text{ ve } \{\bar{u}^{(N)}(t)\} = \{u_1^{(N)}(t), u_2^{(N)}(t), \dots, u_n^{(N)}(t), \dots\}$$

alalım. Açıkça

$$\max_{0 \leq \tau \leq T} |Au^{(N)}(\xi, \tau)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(N)}(\tau)| = \|\bar{u}^{(N)}(\tau)\|_{B_T} \quad (4.1.8)$$

dir. Şimdi her N için $\bar{u}^{(N)}(t) \in B_T$ yani $\sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq \tau \leq T} |u_n^{(N)}(t)| < \infty$ olduğunu göstermek istiyoruz.

Teorem 4.1.1 deki koşullara göre

$$\|\bar{u}^{(0)}(t)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(0)}(t)| = 0 < \infty$$

olduğu açıktır.

$N = 0$ için

$$u_n^{(1)}(t) = \frac{2}{\beta\pi} \int_0^t \int_0^\pi e^{\alpha(t-\tau)} f(\xi, \tau, Au^{(0)}(\xi, \tau)) \sin\beta(t-\tau) \sin n\xi d\xi d\tau$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} |u_n^{(1)}(t)| &\leq \frac{2}{\beta\pi} \left(\int_0^t e^{2\alpha(t-\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{-2\alpha\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{\varepsilon a^2 n^{2k+2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. n 'ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(1)}(t)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon a^2 n^{2k+2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \sin n \xi d \xi \right]^2 d \tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği uygulanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(1)}(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d \xi d \tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} &= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(1)}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)} \\ &= \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_1 < \infty \text{ dır.} \end{aligned}$$

$N = 1$ için

$$u_n^{(2)}(t) = \frac{2}{\beta\pi} \int_0^t \int_0^{\pi} e^{\alpha(t-\tau)} f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) \sin \beta(t-\tau) \sin n \xi d \xi d \tau$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\beta\pi} \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) + f(\xi, \tau, 0) \right) \\ &\quad \times \sin \beta(t-\tau) \sin n \xi d \xi d \tau \end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} &|u_n^{(2)}(t)| \\ &\leq \frac{2}{\beta\pi} \left(\int_0^t e^{2\alpha(t-\tau)} d \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n \xi d \xi \right]^2 d \tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{2}{\beta\pi} \left(\int_0^t e^{2\alpha(t-\tau)} d \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \sin n \xi d \xi \right]^2 d \tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{\varepsilon a^2 n^{2k+2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\frac{1}{\varepsilon a^2 n^{2k+2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. n 'ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(2)}(t)| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(2)}(t)| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |Au^{(1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(1)}(t) \right\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \left\| \bar{u}^{(2)}(t) \right\|_{B_T} &= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(2)}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(1)}(t) \right\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\ &+ \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(1)}(t) \right\|_{B_T} M_2 + \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_1 < \infty \text{ dır.} \end{aligned}$$

$N = 2$ için

$$\begin{aligned} &u_n^{(3)}(t) \\ &= \frac{2}{\beta\pi} \int_0^t \int_0^\pi e^{\alpha(t-\tau)} f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) \sin\beta(t-\tau) \sin n\xi d\xi d\tau \\ &= \frac{2}{\beta\pi} \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) + f(\xi, \tau, 0) \right) \\ &\quad \times \sin\beta(t-\tau) \sin n\xi d\xi d\tau \end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} &|u_n^{(3)}(t)| \\ &\leq \left(\frac{1}{\varepsilon a^2 n^{2k+2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left(\frac{1}{\varepsilon a^2 n^{2k+2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. n 'ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t)| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |Au^{(2)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(2)}(t) \right\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\left\| \bar{u}^{(3)}(t) \right\|_{B_T} &= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(3)}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(2)}(t) \right\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\
&+ \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(2)}(t) \right\|_{B_T} M_2 + \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_1 < \infty \text{ dır.}
\end{aligned}$$

Tümevarım yöntemiyle her N için doğruluğunu gösterelim:

$N = k - 1$ için

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{B_T} &= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(k)}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(k-1)}(t)\|_{B_T} M_2(\tau) \\ &+ \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2}\right)^{\frac{1}{2}} M_1(\tau) < \infty \text{ olsun.} \end{aligned}$$

$N = k$ için

$$\begin{aligned} &u_n^{(k+1)}(t) \\ &= \frac{2}{\beta\pi} \int_0^t \int_0^\pi e^{\alpha(t-\tau)} f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) \sin\beta(t-\tau) \sin n\xi d\xi d\tau \\ &= \frac{2}{\beta\pi} \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) + f(\xi, \tau, 0) \right) \\ &\quad \times \sin\beta(t-\tau) \sin n\xi d\xi d\tau \end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} &|u_n^{(k+1)}(t)| \\ &\leq \left(\frac{1}{\varepsilon a^2 n^{2k+2m}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left(\frac{1}{\varepsilon a^2 n^{2k+2m}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. n 'ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k+1)}(t)| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k+1)}(t)| \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon a}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon a}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |Au^{(k)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(k)}(t) \right\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \left\| \bar{u}^{(k+1)}(t) \right\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(k+1)}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(k)}(t) \right\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\
& \quad + \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(k)}(t) \right\|_{B_T} M_2 + \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_1 < \infty \text{ olur.}
\end{aligned}$$

O halde $\bar{u}^{(N)}(t) \in B_T$ dir.

Şimdi $\{\bar{u}^{(N)}(t)\}$ dizisinin $N \rightarrow \infty$ iken B_T 'de düzgün yakınsak olduğunu gösterelim.

Bunun için;

$$\bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{N=1}^{\infty} \left(\bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t) \right)$$

serisinin düzgün yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir.

Öncelikle $\left| \bar{u}_n^{(N+1)}(t) - \bar{u}_n^{(N)}(t) \right|$ farkları için kestirim elde etmek istiyoruz.

$$\left\| \bar{u}^{(1)}(t) - \bar{u}^{(0)}(t) \right\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} \left| u_n^{(1)}(t) - u_n^{(0)}(t) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} \left| u_n^{(1)} \right|$$

$$\leq \left(\frac{\pi}{3\epsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_1 = A_T < \infty$$

bulunur.

$$\begin{aligned} & \left| u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t) \right| \\ & \leq \frac{2}{\beta\pi} \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^\pi \left| f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right| |\sin n\xi| d\xi d\tau \end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ 'yagöre uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t) \right| \\ & \leq \left(\frac{1}{\epsilon a^2 n^{2k+2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. n 'ye göre toplam alınır ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t) \right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)| \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |Au^{(1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \|\bar{u}^{(2)}(t) - \bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)| \\ & \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} A_T M_2 < \infty \text{ dır.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \\ & \leq \frac{2}{\beta\pi} \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^{\pi} \left| f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) \right| |\sin n\xi| d\xi d\tau \end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} & |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \\ & \leq \left(\frac{1}{\varepsilon a^2 n^{2k+2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\times \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) \right) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. n 'ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) \right) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |Au^{(2)}(\xi, \tau) - Au^{(1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(2)}(t) - \bar{u}^{(1)}(t)| d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) \left\{ \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 A_T \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 \right) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 A_T \frac{1}{\sqrt{2!}} \left[\left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq \left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 A_T \frac{1}{\sqrt{2}!} \left[\left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \left\| \bar{u}^{(3)}(t) - \bar{u}^{(2)}(t) \right\|_{B_T} &= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \\ &\leq \left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 A_T \frac{1}{\sqrt{2}!} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 A_T \frac{1}{\sqrt{2}!} M_2^2 < \infty \text{ dir.} \end{aligned}$$

Tümevarım yöntemiyle her N için doğruluğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} N = k - 1 \text{ için } |u_n^{(k)}(t) - u_n^{(k-1)}(t)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k)}(t) - u_n^{(k-1)}(t)| \\ &\leq \left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{k-1} A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{k-1}{2}} \end{aligned}$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \left\| \bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}^{(k-1)}(t) \right\|_{B_T} &= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(k)}(t) - u_n^{(k-1)}(t)| \\ &\leq \left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{k-1} A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^{(k-1)} \\ &\leq \left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{k-1} A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} M_2^{(k-1)} < \infty \text{ dir.} \end{aligned}$$

$N = k$ için

$$\begin{aligned} &|u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t)| \\ &\leq \frac{2}{\beta\pi} \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau \end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t) \right| \\
& \leq \left(\frac{1}{\varepsilon a^2 n^{2k+2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau)) \right) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. n 'ye göre toplam alınır ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t) \right| \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau)) \right) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t) \right| \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau)) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |Au^{(k)}(\xi, \tau) - Au^{(k-1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}^{(k-1)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) \left\{ \left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{k-1} A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{k-1}{2}} \right\} d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 \right)^{k-1} d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \frac{1}{\sqrt{k!}} \left[\left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^k \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \left\| \bar{u}^{(k+1)}(t) - \bar{u}^{(k)}(t) \right\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} \left| u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t) \right| \\
& \leq \left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^k \leq \left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} M_2^k < \infty \text{ dır. Buradan} \\
& \bar{u}^{(N+1)}(t) = \bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{k=0}^N \left(\bar{u}^{(k+1)}(t) - \bar{u}^{(k)}(t) \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} M_2^k
\end{aligned}$$

olur. $\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} M_2^k$ serisinin yakınsaklığından $\{\bar{u}^{(N)}(t)\}$ dizisinin

B_T 'de düzgün yakınsaklığı elde edilir. Sonuç olarak

$\bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{N=0}^{\infty} \left(\bar{u}^{(k+1)}(t) - \bar{u}^{(k)}(t) \right)$ serisi düzgün yakınsaktır.

$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{u}^{(N+1)}(t) = \bar{u}(t)$ olsun. $\{\bar{u}^{(N)}(t)\}$ dizisi düzgün yakınsak olduğundan $\bar{u}(t)$ fonksiyonu B_T 'de süreklidir. $\bar{u}(t)$ fonksiyonunun (4.1.6) integral denklemini sağladığını gösterelim:

$$\begin{aligned}
& \left| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right| \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n(t) - u_n^{(N+1)}(t) \right|
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\beta\pi} \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^{\pi} \left| f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)) \right| |\sin n\xi| d\xi d\tau$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right| \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon a^2 n^{2k+2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right| \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right| \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |Au(\xi, \tau) - Au^{(N)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) \left| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t) \right|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t) \right\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

olur. Eğer $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t) \right\|_{B_T} = 0$ olduğunu gösterirsek $\bar{u}(t)$ fonksiyonunun (4.1.6) integral denklemini sağladığı sonucu çıkar. Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre, Hölder eşitsizliği, Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n(t) - u_n^{(N+1)}(t) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\beta\pi} \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^\pi \left| f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)) \right| |\sin n\xi| d\xi d\tau \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon a^2 n^{2k+2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon a^2 n^{2k+2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) \left| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) \left| \bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t) \right|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t) \right\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\left\| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right\|_{B_T} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\
&+ \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^N A_T \frac{1}{\sqrt{N!}} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^N \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right\|_{B_T} M_2 + \left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{N+1} A_T \frac{1}{\sqrt{N!}} M_2^{N+1} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_2 \left\| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right\|_{B_T} + \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_2 A_T \frac{\left[\left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_2 \right]^N}{\sqrt{N!}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t) \right\|_{B_T} = 0 \text{ olur.}$$

$\bar{u}(t)$ fonksiyonunun (4.1.6) integral denklemini sağladığı gösterildi.

Lemma 4.1.2. Teorem 4.1.1 in koşulları altında (4.1.6) denkleminin B_T 'de en fazla bir çözümü vardır.

İspat. Çözümün tekliğini göstermek için $\bar{v}(t)$ 'nin diğer bir çözüm olduğunu Kabul edelim. $|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|$ için kestirim elde edelim:

Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre , Hölder eşitsizliği, Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t) - v_n(t)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\beta\pi} \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon a^2 n^{2k+2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon a}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon a}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau)))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} &\leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} M_2 \\ &\leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2}\right)^{\frac{1}{2}} M_2 \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} = 0 \text{ olur. Yani } \bar{u}(t) = \bar{v}(t) \text{ olup } u_n(t) = v_n(t), \quad (n = \overline{1, \infty}) \text{ dır.}$$

Bu sonuç

$$|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{3\varepsilon a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğine Gronwall eşitsizliği uygulanarak da elde edilebilir.

(4.1.6) integral denkleminin çözümünün tek olduğu gösterildi.

Teorem 4.1.1'in İspatı. Lemma 4.1.1 ve Lemma 4.1.2'den (4.1.6) denkleminin tek çözümü vardır. Böylece teorem ispat edildi.

Teorem 4.1.2. Teorem 4.1.1 koşulları altında (4.1.1)-(4.1.3) probleminin (4.1.5) şeklindeki düzgün yakınsak seri ile temsil edilen tek zayıf çözümü vardır.

İspat. (4.1.6) denkleminin çözümü kullanılarak oluşturulan (4.1.5) serisi düzgün yakınsak olduğundan süreklidir. (4.1.5) serisinin kısmi toplamlar dizisi

$$u_{(l)}(x, t) = \sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.1 ve $\lim_{l \rightarrow \infty} u_{(l)}(x, t) = u(x, t)$ den $\lim_{l \rightarrow \infty} f(x, t, u_{(l)}(x, t)) u(x, t, u(x, t))$ dır.

$$S_l =$$

$$\int_0^T \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (-1)^k a^2 \frac{\partial^{2k} v}{\partial x^{2k}} - (-1)^m 2\varepsilon \frac{\partial^{2m+1} v}{\partial x^{2m} \partial t} \right) u_{(l)} - f(x, t, u_{(l)})v \right] dx dt$$

tanımlansın. $\lim_{l \rightarrow \infty} S_l = 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. Kısmi integral ard arda

kullanılırsa

$$\begin{aligned} S_l &= \int_0^T \int_0^\pi \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx \right) + (-1)^k a^2 \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) (-1)^k n^{2k} \sin nx \right) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^m 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) (-1)^m n^{2m} \sin nx \right) - f(x, t, u_{(l)}) \right] v dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^\pi \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx \right) + (-1)^k a^2 \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx \right) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^m 2\varepsilon \frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m} \partial t} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx \right) - f(x, t, u_{(l)}) \right] v dx dt \end{aligned}$$

$$\int_0^T \int_0^\pi \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{(l)} + (-1)^k a^2 \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} u_{(l)} + (-1)^m 2\varepsilon \frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m} \partial t} u_{(l)} - f(x, t, u) \right) v dx dt$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{l \rightarrow \infty} S_l =$$

$$\int_0^T \int_0^\pi \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u + (-1)^k a^2 \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} u + (-1)^m 2\varepsilon \frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m} \partial t} u - f(x, t, u_{(l)}) \right) v dx dt$$

olur. (4.1.1) denkleminde

$$\lim_{l \rightarrow \infty} S_l = 0$$

dır. Böylece $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$ fonksiyonu (4.1.1)-(4.1.3) probleminin zayıf çözümüdür.

Teorem ispat edildi.

3.2 Yüksek Mertebeden Hemen Hemen Doğrusal Pseudo-Parabolik Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı

Bu çalışmada aşağıdaki başlangıç ve sınır değer probleminin çözümünün varlığını inceleriz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^k a^2 \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + (-1)^m \varepsilon \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m} \partial t} = f(x, t, u), \quad (4.2.1)$$

$$(x, t) \in \Omega = \{0 < x < \pi, 0 < t < T\},$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial^{2l} u(0, t)}{\partial x^{2l}} = \frac{\partial^{2l} u(\pi, t)}{\partial x^{2l}} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, k-1, 0 \leq t \leq T. \quad (4.2.3)$$

Burada $k \geq 1$ ve $m \geq 0$, ($k \geq m$) doğal sayılar, $T > 0$ gerçel sayılar, $\varepsilon \geq 0$ parametre, $f(x, t, u)$, $\bar{\Omega} \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde verilmiş fonksiyon ve $u = u(x, t)$ problemin çözümüdür.

Mevcut probleme ilişkin özdeğer probleminden elde edilen özfonksiyonları içeren Fourier serisi şeklindeki zayıf çözümü verildikten sonra Picard ardışık yaklaşımlarıyla oluşturulan çözüme ilişkin dizinin düzgün yakınsaklığı gösterilmektedir. Ayrıca zayıf çözümün tekliği de ispatlanmaktadır.

Tanım 4.2.1. Bir $v(x, t) \in C(\bar{\Omega})$ fonksiyonu (4.2.1)'deki kısmi türevlere göre sürekli ve eğer (4.2.3)'teki sınır koşulları ve $v(x, T) = \frac{\partial^{2m} v(x, T)}{\partial x^{2m}} = 0$ koşulunu sağlarsa *test fonksiyonu* olarak adlandırılır:

Tanım 4.2.2. Keyfi $v(x, t)$ test fonksiyonu için aşağıdaki integral eşitliğini sağlayan $u(x, t) \in C(\bar{\Omega})$ fonksiyonuna (4.2.1)-(4.2.3) probleminin *zayıf çözümü* denir:

$$\int_0^t \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} - (-1)^k a^2 \frac{\partial^{2k} v}{\partial x^{2k}} + (-1)^m \varepsilon \frac{\partial^{2m+1} v}{\partial x^{2m} \partial t} \right) u + f(x, t, u) v \right] dx dt. \quad (4.2.4)$$

Fourier serisi formunda zayıf çözüm kullanılarak (4.2.1)-(4.2.3) probleminden Fourier serisi katsayıları için doğrusal olmayan sonsuz sayıda integral denklem elde edilir. Fourier serisi katsayılarının çözüm olduğu uzay tanımlanıp uygun norm verilir.

Tanım 4.2.3. B_T ile $[0, T]$ aralığındaki Fourier katsayıları olan sürekli fonksiyonlar kümesi

nin $\{\bar{u}(t)\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)| < \infty$$

koşulunu sağlayanları gösterilsin. B_T 'de norm aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\|\bar{u}(t)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)|.$$

Açıkça B_T Banach uzayıdır.

Problemin Çözümü

(4.2.1)-(4.2.3) probleminin zayıf çözümünü

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \quad (4.2.5)$$

şeklinde arayalım. Burada $u_n(t)$ ($n = \overline{1, \infty}$) bilinmeyen fonksiyondur. Bunu bulmak için (4.2.4) eşitliği kullanılarak aşağıdaki integral denklemi elde edilir:

$$u_n(t) = \frac{\frac{2}{\pi}}{1 + \varepsilon n^{2m}} \int_0^t \int_0^\pi e^{-\frac{a^2 n^{2k}}{1 + \varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} f\left(\xi, \tau, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau) \sin n\xi\right) \sin n\xi d\xi d\tau. \quad (4.2.6)$$

Teorem 4.2.1. Aşağıdaki koşullar altında (4.2.6) denkleminin B_T 'de tek çözümü vardır:

- 1) $f(x, t, u)$ bütün değişkenlerine göre $\overline{\Omega} \times R$ bölgesinde sürekli,
- 2) $|f(x, t, u) - f(x, t, v)| \leq b(x, t)|u - v|$, $b(x, t) > 0$ ve $b(x, t) \in L_2(\Omega)$,
- 3) $f(x, t, 0) \in L_2(\Omega)$.

Lemma 4.2.1. Teorem 4.2.1'in koşulları altında (4.2.6) denkleminin B_T 'de en az bir çözümü vardır.

İspat. Ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulanırsa $N = \overline{1, \infty}$ olmak üzere (4.2.6) denklemi için

$$u_n^{(N+1)}(t) = \frac{\frac{2}{\pi}}{1 + \varepsilon n^{2m}} \int_0^t \int_0^\pi e^{-\frac{a^2 n^{2k}}{1 + \varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} f\left(\xi, \tau, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(N)}(\tau) \sin n\xi\right) \sin n\xi d\xi d\tau \quad (4.2.7)$$

elde edilir.

$$Au^{(N)}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(N)}(\tau) \sin n\xi \text{ ve } \{\bar{u}^{(N)}(t)\} = \{u_1^{(N)}(t), u_2^{(N)}(t), \dots, u_n^{(N)}(t), \dots\}$$

alalım.

Açıkça

$$\max_{0 \leq \tau \leq T} |Au^{(N)}(\xi, \tau)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(N)}(\tau)| = \|\bar{u}^{(N)}(\tau)\|_{B_T} \quad (4.2.8)$$

dir. Şimdi her N için $\bar{u}^{(N)}(t) \in B_T$ yani $\sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(N)}(t)| < \infty$ olduğunu göstermek istiyoruz.

Teorem 4.2.1 deki koşullara göre

$$\|\bar{u}^{(0)}(t)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(0)}(t)| = 0 < \infty$$

olduğu açıktır.

$N = 0$ için

$$u_n^{(1)}(t) = \frac{\frac{2}{\pi}}{1 + \varepsilon n^{2m}} \int_0^t \int_0^\pi e^{-\frac{a^2 n^{2k}}{1 + \varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} f(\xi, \tau, Au^{(0)}(\xi, \tau)) \sin n\xi d\xi d\tau$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} & |u_n^{(1)}(t)| \\ & \leq \frac{\frac{2}{\pi}}{1 + \varepsilon n^{2m}} \left(\int_0^t e^{-\frac{2a^2 n^{2k}}{1 + \varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{1}{2a^2 n^{2k} (1 + \varepsilon n^{2m})} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{1}{2a^2 (1 + \varepsilon) n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. n 'ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(1)}(t)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2a^2(1+\varepsilon)n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)}a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği uygulanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(1)}(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)}a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\| \bar{u}^{(1)}(t) \|_{B_T} &= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(1)}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)} \\
&= \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_1 < \infty \text{ dır.}
\end{aligned}$$

$N = 1$ için

$$\begin{aligned}
&u_n^{(2)}(t) \\
&= \frac{\frac{2}{\pi}}{1 + \varepsilon n^{2m}} \int_0^t \int_0^{\pi} e^{-\frac{a^2 n^{2k}}{1 + \varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) \sin n\xi d\xi d\tau \\
&= \frac{\frac{2}{\pi}}{1 + \varepsilon n^{2m}} \\
&\quad \times \int_0^t e^{-\frac{a^2 n^{2k}}{1 + \varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) + f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n\xi d\xi d\tau
\end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre uygulanırsa

$$|u_n^{(2)}(t)| \leq \frac{\frac{2}{\pi}}{1 + \varepsilon n^{2m}} \left(\int_0^t e^{-\frac{2a^2 n^{2k}}{1 + \varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \frac{\frac{2}{\pi}}{1 + \varepsilon n^{2m}} \left(\int_0^t e^{-\frac{2a^2 n^{2k}}{1 + \varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2a^2(1 + \varepsilon)n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2a^2(1 + \varepsilon)n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. n 'ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^\infty |u_n^{(2)}(t)| \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{2(1 + \varepsilon)}a} \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left(\int_0^t \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \frac{1}{\sqrt{2(1 + \varepsilon)}a} \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, 0)) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^\infty |u_n^{(2)}(t)| \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{2(1 + \varepsilon)}a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)}a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |Au^{(1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(1)}(t) \right\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\left\| \bar{u}^{(2)}(t) \right\|_{B_T} &= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(2)}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(1)}(t) \right\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\
&+ \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(1)}(t) \right\|_{B_T} M_2 + \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_1 < \infty
\end{aligned}$$

dır.

$N = 2$ için

$$\begin{aligned}
& u_n^{(3)}(t) \\
&= \frac{\frac{2}{\pi}}{1 + \varepsilon n^{2m}} \int_0^t \int_0^\pi e^{-\frac{a^2 n^{2k}}{1 + \varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) \sin n\xi d\xi d\tau \\
&= \frac{\frac{2}{\pi}}{1 + \varepsilon n^{2m}} \\
&\times \int_0^t e^{-\frac{a^2 n^{2k}}{1 + \varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) + f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n\xi d\xi d\tau
\end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre uygulanırsa

$$|u_n^{(3)}(t)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{2a^2(1+\varepsilon)n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\frac{1}{2a^2(1+\varepsilon)n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. n 'ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)}a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)}a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)}a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)}a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |Au^{(2)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^{(3)}(t)\|_{B_T} &= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(3)}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\ &+ \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} M_2 + \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_1 < \infty \end{aligned}$$

dır.

Tümevarım yöntemiyle her N için doğruluğunu gösterelim:

$N = k - 1$ için

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{B_T} &= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(k)}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(k-1)}(t)\|_{B_T} M_2(\tau) \\ &+ \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_1(\tau) < \infty \text{ olsun.} \end{aligned}$$

$N = k$ için

$$\begin{aligned} &u_n^{(k+1)}(t) \\ &= \frac{2}{1+\varepsilon n^{2m}} \int_0^t \int_0^\pi e^{-\frac{a^2 n^{2k}}{1+\varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) \sin n\xi d\xi d\tau \\ &= \frac{2}{1+\varepsilon n^{2m}} \\ &\times \int_0^t e^{-\frac{a^2 n^{2k}}{1+\varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) + f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n\xi d\xi d\tau \end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre uygulanırsa

$$|u_n^{(k+1)}(t)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{2a^2(1+\varepsilon)n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\frac{1}{2a^2(1+\varepsilon)n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. n 'ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k+1)}(t)| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)}a} \\
&\times \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)}a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k+1)}(t)| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)}a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)}a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |Au^{(k)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(k)}(t) \right\|_{B_T} \\ \times \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$\left\| \bar{u}^{(k+1)}(t) \right\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(k+1)}(t)| \\ \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(k)}(t) \right\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)} \\ \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(k)}(t) \right\|_{B_T} M_2 + \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_1 < \infty \text{ olur.}$$

O halde $\bar{u}^{(N)}(t) \in B_T$ dir.

Şimdi $\{\bar{u}^{(N)}(t)\}$ dizisinin $N \rightarrow \infty$ iken B_T ’de düzgün yakınsak olduğunu gösterelim.

Bunun için

$$\bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{N=0}^{\infty} \left(\bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t) \right)$$

serisinin düzgün yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir.

Öncelikle $\left| \bar{u}_n^{(N+1)}(t) - \bar{u}_n^{(N)}(t) \right|$ farkları için kestirim elde etmek istiyoruz.

$$\left\| \bar{u}^{(1)}(t) - \bar{u}^{(0)}(t) \right\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(1)}(t) - u_n^{(0)}(t)| = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(1)}(t)| \\ \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_1 = A_T < \infty$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
& \left| u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t) \right| \\
& \leq \frac{\frac{2}{\pi}}{1 + \varepsilon n^{2m}} \int_0^t e^{-\frac{a^2 n^{2k}}{1 + \varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} \int_0^\pi \left| f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right| |\sin n\xi| d\xi d\tau
\end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t) \right| \\
& \leq \left(\frac{1}{2a^2(1 + \varepsilon)n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. n 'ye göre toplam alınır ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t) \right| \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{2(1 + \varepsilon)}a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t) \right| \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{2(1 + \varepsilon)}a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{6(1 + \varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |Au^{(1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(1)}(t) \right\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \left\| \bar{u}^{(2)}(t) - \bar{u}^{(1)}(t) \right\|_{B_T} &= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)| \\ &\leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(1)}(t) \right\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} A_T M_2 < \infty \text{ dır.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &|u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \\ &\leq \frac{\frac{2}{\pi}}{1 + \varepsilon n^{2m}} \\ &\times \int_0^t e^{-\frac{a^2 n^{2k}}{1 + \varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} \int_0^\pi \left| f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) \right| |\sin n\xi| d\xi d\tau \end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} &|u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \\ &\leq \left(\frac{1}{2a^2(1+\varepsilon)n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. n 'ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)}a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) \right) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)a}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |Au^{(2)}(\xi, \tau) - Au^{(1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(2)}(t) - \bar{u}^{(1)}(t)| d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) \left\{ \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 A_T \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 \right) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 A_T \frac{1}{\sqrt{2!}} \left[\left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 A_T \frac{1}{\sqrt{2!}} \left[\left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \left\| \bar{u}^{(3)}(t) - \bar{u}^{(2)}(t) \right\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} \left| u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t) \right| \\ & \leq \left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 A_T \frac{1}{\sqrt{2}!} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 A_T \frac{1}{\sqrt{2}!} M_2^2 < \infty \text{ dir.} \end{aligned}$$

Tümevarım yöntemiyle her N için doğruluğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} N = k - 1 \text{ için, } & \left| \bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}^{(k-1)}(t) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n^{(k)}(t) - u_n^{(k-1)}(t) \right| \\ & \leq \left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{k-1} A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \times \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{k-1}{2}} \text{ olsun.} \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} & \left\| \bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}^{(k-1)}(t) \right\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} \left| u_n^{(k)}(t) - u_n^{(k-1)}(t) \right| \\ & \leq \left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{k-1} A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^{(k-1)} \\ & \leq \left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{k-1} A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} M_2^{(k-1)} < \infty \text{ dir.} \end{aligned}$$

$N = k$ için

$$\begin{aligned} & \left| u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t) \right| \\ & \leq \frac{\frac{2}{\pi}}{1 + \varepsilon n^{2m}} \\ & \times \int_0^t e^{-\frac{a^2 n^{2k}}{1 + \varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} \int_0^\pi \left| f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau)) \right| |\sin n\xi| d\xi d\tau \end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t) \right| \\ & \leq \left(\frac{1}{2a^2(1 + \varepsilon)n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\times \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau)) \right) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. n 'ye göre toplam alınır ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t)| \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)a}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau)) \right) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t)| \leq \\ & \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)a}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau)) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |Au^{(k)}(\xi, \tau) - Au^{(k-1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}^{(k-1)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) \left\{ \left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{k-1} A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{k-1}{2}} \right\}^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 \right)^{k-1} d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq \left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \frac{1}{\sqrt{k!}} \left[\left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^k \right]^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \left\| \bar{u}^{(k+1)}(t) - \bar{u}^{(k)}(t) \right\|_{B_T} &= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} \left| u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t) \right| \\ &\leq \left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^k \leq \left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} M_2^k < \infty \text{ dır.} \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(N+1)}(t) &= \bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{k=0}^N \left(\bar{u}^{(k+1)}(t) - \bar{u}^{(k)}(t) \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} M_2^k \end{aligned}$$

olur. $\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} M_2^k$ serisinin yakınsaklığından $\{\bar{u}^{(N)}(t)\}$ dizisinin

B_T 'de düzgün yakınsaklığı elde edilir. Sonuç olarak

$\bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{N=0}^{\infty} \left(\bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t) \right)$ serisi düzgün yakınsaktır.

$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{u}^{(N+1)}(t) = \bar{u}(t)$ olsun. $\{\bar{u}^{(N)}(t)\}$ dizisi düzgün yakınsak olduğundan $\bar{u}(t)$

fonksiyonu B_T 'de süreklidir. $\bar{u}(t)$ fonksiyonunun (4.2.6) integral denklemini sağladığını gösterelim:

$$\begin{aligned} \left| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n(t) - u_n^{(N+1)}(t) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{\pi}}{1 + \varepsilon n^{2m}} \end{aligned}$$

$$\times \int_0^t e^{-\frac{a^2 n^{2k}}{1+\varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} \int_0^\pi \left| f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)) \right| |\sin n\xi| d\xi d\tau$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} |\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2a^2(1+\varepsilon)n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} |\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)a}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} &|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)a}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |Au(\xi, \tau) - Au^{(N)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

olur. Eğer $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t) \right\|_{B_T} = 0$ olduğu gösterilirse $\bar{u}(t)$ fonksiyonunun

(4.2.6) integral denklemini sağladığı sonucu çıkar. Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre, Hölder eşitsizliği, Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n(t) - u_n^{(N+1)}(t) \right| \\
& \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{\pi}}{1 + \varepsilon n^{2m}} \\
& \times \int_0^t e^{-\frac{a^2 n^{2k}}{1 + \varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} \int_0^\pi \left| f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)) \right| |\sin n\xi| d\xi d\tau \\
& \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2a^2(1 + \varepsilon)n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2a^2(1 + \varepsilon)n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{2(1 + \varepsilon)}a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \frac{1}{\sqrt{2(1 + \varepsilon)}a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)) \right) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{2(1 + \varepsilon)}a} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)a}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) \left| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) \left| \bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t) \right|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t) \right\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
& \left\| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right\|_{B_T} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\
& + \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^N A_T \frac{1}{\sqrt{N!}} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^N \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right\|_{B_T} M_2 + \left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{N+1} A_T \frac{1}{\sqrt{N!}} M_2^{N+1} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_2 \\
& \times \left\| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t) \right\|_{B_T} + \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_2 A_T \frac{\left[\left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_2 \right]^N}{\sqrt{N!}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t) \right\|_{B_T} = 0$ olur. Böylece $\bar{u}(t)$ fonksiyonunun (4.2.6)

integral denklemini sağladığı gösterildi.

Lemma 4.2.2. Teorem 4.2.1'in koşulları altında (4.2.6) denkleminin B_T 'de en fazla bir çözümü vardır.

İspat. Çözümün tekliğini göstermek için $\bar{v}(t)$ 'nin diğer bir çözüm olduğunu kabul edelim. $|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|$ için kestirim elde edelim:

Cauchy eşitsizliği τ 'ya göre , Hölder eşitsizliği, Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t) - v_n(t)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{\pi}}{1 + \varepsilon n^{2m}} \\
&\times \int_0^t e^{-\frac{a^2 n^{2k}}{1 + \varepsilon n^{2m}}(t-\tau)} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2a^2(1 + \varepsilon)n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2(1 + \varepsilon)a}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2(1 + \varepsilon)a}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau)))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} &\leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} M_2 \\
&\leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} M_2 \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$\|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} = 0$ olur. Yani $\bar{u}(t) = \bar{v}(t)$ olup $u_n(t) = v_n(t)$,
 $(n = \overline{1, \infty})$ dır. Bu sonuç

$$|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{6(1+\varepsilon)a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğine Gronwall eşitsizliği uygulanarak da elde edilebilir.

Yani (4.2.6) integral denkleminin çözümünün tek olduğu gösterildi.

Teorem 4.2.1'in İspatı. Lemma 4.2.1 ve Lemma 4.2.2'den (4.2.6) denkleminin tek çözümü vardır. Böylece teorem ispat edildi.

Teorem 4.2.2. Teorem 4.2.1 koşulları altında (4.2.1)-(4.2.3) probleminin (4.2.5) şeklindeki düzgün yakınsak seri ile temsil edilen tek zayıf çözümü vardır.

İspat. (4.2.6) denkleminin çözümü kullanılarak oluşturulan (4.2.5) serisi düzgün yakınsak olduğundan süreklidir. (4.2.5) serisinin kısmi toplamlar dizisi

$$u_{(l)}(x, t) = \sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx$$

şeklindedir. Teorem 4.2.1 ve $\lim_{l \rightarrow \infty} u_{(l)}(x, t) = u(x, t)$ den $\lim_{l \rightarrow \infty} f(x, t, u_{(l)}(x, t)) = f(x, t, u(x, t))$ dır.

$$S_l = \int_0^T \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} - (-1)^k a^2 \frac{\partial^{2k} v}{\partial x^{2k}} + (-1)^m \varepsilon \frac{\partial^{2m+1} v}{\partial x^{2m} \partial t} \right) u_{(l)} + f(x, t, u_{(l)}) v \right] dx dt$$

tanımlansın. $\lim_{l \rightarrow \infty} S_l = 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. Kısmi integral alma ard arda kullanılarak

$$\begin{aligned} S_l &= \int_0^T \int_0^\pi \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx \right) - (-1)^k a^2 \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) (-1)^k n^{2k} \sin nx \right) \right. \\ &\quad \left. - (-1)^m 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) (-1)^m n^{2m} \sin nx \right) + f(x, t, u_{(l)}) \right] v dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^\pi \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx \right) - (-1)^k a^2 \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx \right) \right. \\ &\quad \left. - (-1)^m \varepsilon \frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m} \partial t} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx \right) - f(x, t, u_{(l)}) \right] v dx dt = \\ &\int_0^T \int_0^\pi \left(-\frac{\partial}{\partial t} u_{(l)} - (-1)^k a^2 \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} u_{(l)} - (-1)^m \varepsilon \frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m} \partial t} u_{(l)} + f(x, t, u) \right) v dx dt \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} S_l &= \\ &\int_0^T \int_0^\pi \left(-\frac{\partial}{\partial t} u - (-1)^k a^2 \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} u - (-1)^m 2\varepsilon \frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m} \partial t} u + f(x, t, u) \right) v dx dt \end{aligned}$$

olur. (4.2.1) denkleminde

$$\lim_{l \rightarrow \infty} s_l = 0$$

dır. Böylece $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$ fonksiyonu (4.2.1)-(4.2.3) probleminin zayıf çözümüdür. Teorem ispat edildi.



4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasının esas kısmını oluşturan araştırma bulguları bölümünde, ele alınan problemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği incelendi.

$\varepsilon \geq 0$ olmak üzere $(-1)^m \varepsilon \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m} \partial t}$ teriminin hiperbolik denklem içeren problem ile parabolik denklem içeren problem üzerindeki etkisi araştırıldı. Sonuç olarak birinci kısımda $\varepsilon \leq \frac{a}{\sqrt{2}} n^{k-2m}$ için teoremdaki koşullar altında varlık ve tekliği her sınırlı T için geçerli olduğu yani global varlık ve teklik ispatlandı. İkinci kısımda ε için üstten sınırlama olmaksızın teoremdaki koşullar altında varlık ve tekliği her sınırlı T için geçerli olduğu yani global varlık ve tekliği ispatlandı.

4.2 Öneriler

Ele alınan denklemler için sınır değer problemi için benzer çalışmalar yapılabilir. Eliptik diferansiyel denklemler için benzer çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] T. Myint-U and L. Debnath, Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, (2007), Birkhauser Boston.
- [2] M. S. Baouendi and P. Grisvard, Sur une equation d'evolution changeant de type, J. Func. Anal., 2 (1968), 352-367.
- [3] L. C. Evans, Partial Differential Equations, (1998), Graduate Studies in Mathematics, vol. 19.
- [4] N. Polat, Doğrusal Olmayan Parabolik veya Hiperbolik Diferansiyel Denklemlerde Global Çözümlerin Yokluğu (Blow Up), (2005), Doktora Tezi.
- [5] I. Çiftçi, Değişken Katsayılı Fourier Serileriyle Parabolik Denklemler için Devirli Sınır Koşullu Karışık Problemin Analizi, (2007), Doktora Tezi.
- [6] I. Ciftci and H. Halilov, Fourier method functions for a quasi-linear parabolic equation with periodic boundary condition, Hacettepe J. Math. Stat., 37(2) (2008), 69-79.
- [7] H. Halilov and I. Ciftci, Fourier method for a quasilinear pseudo-parabolic equation with periodic boundary condition, Int. J. Pure and Applied Math., 52(5) 2009, 717-727.
- [8] D. Amanov and A. V. Yuldasheva, Solvability and Spectral Properties of Boundary Value Problems for Equations of Even Order, Malaysian Journal of Mathematical Sciences 3(2) (2009), 227-248.
- [9] D. Amanov and A. Ashyralyev, Well-Posedness of Boundary-Value Problems for Partial Differential Equations of Even Order, E. J. Diff. Equ., 2014(108) (2014), 1-18.
- [10] K.B. Sabitov, The Dirichlet Problem for Higher-Order Partial Differential Equations, Mathematical Notes, 97 (2) (2015), 255-2675.
- [11] D. Amanov, Solvability and spectral properties of the boundary value problem for degenerating higher order parabolic equation, Appl. Math. And Comp., 268 (2015), 1282-1291.
- [12] A.I. Kozhanov and N. R. Pinigina, Boundary-Value Problems for Some Higher-Order Nonclassical Differential Equations, Mathematical Notes, 101(3) 2017, 467-474.
- [13] A. V. Yuldasheva, On a problem for a quasi-linear equation of even order, J. Math. Sci., 241(4) (2019), 423-429.
- [14] Tyn Myint-U, Partial Differential Equations of Mathematical Physics, (1981), Elsevier North Holland.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad

KILIÇ, Alan

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	2017
Lisans	Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	2011
Lise	Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi ElYermuk Lisesi	2006

İş Denevimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2014-	Milli Eğitim Bakanlığı, Hayat Boyu Öğrenme Genel Müdürlüğü'nde	Öğretmen

Yabancı Dil

Arapça (YDS 88.75)

Yayınlar

1. A. Kılıç and N. Polat, Existence of Solutions to Higher Order Semilinear Hyperbolic Equations with Damping Term , Int. J. Open Problems Compt. Math., 18(3), September 2025.
2. A. Kılıç and N. Polat, Existence of Solutions to Higher Order Pseudo-Parabolic Equations. (incelemede)

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Alan KILIÇ
Öğrenci No	18804601
Ana Bilim Dalı	Matematik
Program Türü	Proje ☐ Yüksek Lisans ☐ Doktora ☒
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Prof. Dr. Necat POLAT
(Varsa) II. Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	
Tez Başlığı	Yüksek Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı
RAPOR BİLGİLERİ	
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası
Sayfa Sayısı	63
Raporlama Tarihi	25/06/2025
Benzerlik Oranı (%)	18

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 63 sayfalık kısmına ilişkin, 25/06/2025 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 18 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐ Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç
☐ Kaynaklar hariç
☐ Alıntılar hariç/dâhil
☒ Diğer (Herşey dahil)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Tez benzerlik oranı üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir, gereğini arz ederim.

Öğrencinin Adı, Soyadı: Alan KILIÇ
Tarih: 25/06/2025

Danışman Adı, Soyadı: Prof. Dr. Necat POLAT

İmza:

Tarih: 25/06/2025

Ana Bilim Dalı Başkanı Adı, Soyadı: Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY

İmza:

Tarih: 25/06/2025