

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER GENELLEŞTİRİLMİŞ PANTOGRAF
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ İÇİN
HOSOYA POLİNOM TABANLI MATRİS SIRALAMA YÖNTEMİ**

Gözde KARAPELİT

**Danışman
Prof. Dr. Ali KONURALP**



MANİSA-2025

TEZ ONAYI

Gözde KARAPELİT tarafından hazırlanan "**Yüksek Mertebeden Lineer Genelleştirilmiş Pantograf Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri için Hosoya Polinom Tabanlı Matris Sıralama Yöntemi**" adlı tez çalışması 29.11.2025 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	Prof. Dr. Ali KONURALP Manisa Celal Bayar Üniversitesi	
-----------------	--	-------

Jüri Üyesi	Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR Balıkesir Üniversitesi	
-------------------	---	-------

Jüri Üyesi	Prof. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR Manisa Celal Bayar Üniversitesi	
-------------------	--	-------

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

29.12.2025
Gözde KARAPELİT



İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ	III
TEŞEKKÜR	IV
ÖZET	V
ABSTRACT	VI
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	2
2.1. Hosoya Polinomları ve Özellikleri	2
2.2. Genelleştirilmiş Pantograf Diferansiyel Denklemler	3
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER	5
3.1. Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Genelleştirilmiş Pantograf Diferansiyel Denklemler	5
3.2. Yüksek Mertebeden Değişken katsayılı Lineer Genelleştirilmiş Pantograf Diferansiyel Denklemler için Hosoya Matris Sıralama Yöntemi	5
3.3. Çözüm Yöntemi	9
3.4. Rezidüel Fonksiyonuna Dayalı Hata Analizi	11
4. ÖRNEKLER	13
Örnek 1	13
Örnek 2	15
Örnek 3	16
Örnek 4	18
Örnek 5	18
Örnek 6	20
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	24
KAYNAKLAR	25
ÖZGEÇMİŞ	30

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$H(G, x)$	Hosoya Polinomları
A	Bilinmeyen Katsayılar Matrisi
B	Standart Geçiş Matrisi
$ e(t_i) $	Gerçek Mutlak Hata Fonksiyonu
$H_n(t)$	n . dereceden Hosoya Polinomu
$R_N(t)$	Rezidüel Hata Fonksiyonu
Z	Hosoya Polinomlarının Geçiş Matrisi
t_i	Sıralama Noktaları
$[U; \lambda]$	Koşulların Arttırılmış Matrisi
$y_N(t)$	Yaklaşık Çözüm
$y(t)$	Tam Çözüm
$[W; G]$	Temel Denklemin Arttırılmış Matrisi
$[\widetilde{W}; \widetilde{G}]$	Koşulların Kullanımıyla Elde Edilen Yeni Arttırılmış Matrisi
μ_n	n . dereceden Hosoya Polinomu Katsayısı
a_n	Çözüm Serisinin Bilinmeyen Katsayısı
N	Kesme Sınır
W	Temel Denkleme ait Katsayılar Matrisi
$\widetilde{W}$	Koşulları Kullanılmış Yeni Arttırılmış Matris

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1.	Hosoya polinomları grafiği	7
Şekil 4.1.	Örnek 1'in $N = 7, 10, 15$ değerleri için hesap edilen yaklaşık çözümlerinin mutlak hatalarının $e_N(t)$ karşılaştırılması	14
Şekil 4.2.	Örnek 2'nin $N = 11, 15$ için mutlak hata karşılaştırmaları	16
Şekil 4.3.	Örnek 3'ün $N = 7$ için hesap edilen mutlak hata grafiği	17
Şekil 4.4.	Örnek 3'ün $N = 8, 14$ değerlerini için hesap edilen yaklaşık çözümlerinin mutlak hatalarının $e_n(t)$ karşılaştırılması	17
Şekil 4.5.	Örnek 5'in $N = 10$ için hesap edilen mutlak hata grafiği	19
Şekil 4.6.	Örnek 6'nın $N = 10$ için CL sıralama noktaları kullanılarak hesap edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hata logaritmik grafiği	22
Şekil 4.7.	Örnek 6'nın $N = 10$ için hesap edilen eşit aralıklı sıralama noktaları(mavi renkli düz çizgi) ile Chebyshev-Lobatto sıralama noktaları(sarı çizgi çizgi) kullanarak elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hata logaritmik grafiği	22

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında bilgi ve deneyimiyle bana yol gösteren, sabrını ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ali KONURALP'e ve hayatım boyunca yanımda olan, sevgileriyle bana güç veren, her zaman desteklerini hissettiğim canım aileme sonsuz teşekkür ederim.

Gözde KARAPELİT
Manisa, 2025



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Yüksek Mertebeden Lineer Genelleştirilmiş Pantograf Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri için Hosoya Polinom Tabanlı Matris Sıralama Yöntemi

Gözde KARAPELİT

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ali KONURALP

Bu çalışmada, başlangıç ve/veya sınır şartlarını içeren karışık koşullar altındaki yüksek mertebeden lineer genelleştirilmiş pantograf diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek amacıyla, Hosoya polinomlarına dayalı matris sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Bu özel tür denklemlerin yaklaşık çözümleri için önerdiğimiz Hosoya polinomu matris sıralama yöntemi tanıtılmış ve ilgili çözüm yaklaşımı detaylandırılmıştır. Bu metotta eşit aralıklı sıralama noktaları ile Chebyshev-Lobatto sıralama noktalarına göre çözümler elde edilmiştir. Önerilen yöntemin etkinliği ve uygulanabilirliğini değerlendirmek amacıyla çeşitli örnek problemler ele alınmış ve bu problemlere ilişkin sayısal hesaplamalar gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre, önerilen yöntemin hem doğruluk hem de hesaplama açısından hızlı ve verimli olduğu ortaya koyulmuş olup, bu durum sunulan karşılaştırmalı olan tablo ve grafiklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hosoya Polinomları, Lineer Genelleştirilmiş Pantograf Diferansiyel Denklemler, Gecikmeli Diferansiyel Denklemler, Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemler, Matris Sıralama Metodu, Hosoya Polinom Tabanlı Matris Sıralama Yöntemi.

2025, 30 sayfa

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

Hosoya Polynomial Based Matrix Method for Higher Order Linear Generalized Pantograph Differential Equations

Gözde KARAPELİT

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Ali KONURALP

In this study, a matrix collocation method based on Hosoya polynomials is developed to obtain approximate solutions of higher-order linear generalized pantograph differential equations under mixed conditions including initial and/or boundary conditions. The Hosoya polynomial matrix collocation method we proposed for approximate solutions of these special types of equations is introduced and the related solution approach is detailed. In this method, solutions are obtained according to equally spaced collocation points and Chebyshev-Lobatto collocation points. Various example problems are considered to evaluate the effectiveness and applicability of the proposed method, and numerical calculations related to these problems are performed. According to the results obtained, the proposed method is shown to be fast and efficient in terms of both accuracy and computation, and this is supported by the comparative tables and graphs presented.

Keywords: Hosoya Polynomials, Linear Generalized Pantograph Differential Equations, Delayed Differential Equations, Higher Order Differential Equations, Matrix Collocation Method, Hosoya Polynomial based Matrix Collocation Method.

2025, 30 pages

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler matematiğin en köklü ve etkili dallarından biridir. Bu alanın zengin tarihçesi ve geniş uygulama alanları mevcuttur. Diferansiyel denklemlerin kökeni 17. yüzyıla uzanır. İlk örnekler Newton ve Leibniz'in kalkülüs çalışmaları sırasında ortaya çıktı. Newton, hareket yasalarını formüle ederken diferansiyel denklemleri kullandı. Leibniz ise 1691'de "diferansiyel denklem" terimini ilk kullanan kişi oldu [1].

18. yüzyılda Euler, Bernoulli kardeşler ve d'Alembert gibi matematikçiler bu alanı büyük ölçüde geliştirdi. Euler özellikle lineer diferansiyel denklemler için çözüm yöntemleri geliştirdi. Bernoulli ailesi değişkenlerin ayrılması yöntemini ve homojen denklemleri inceledi [2-4].

19. yüzyıl diferansiyel denklemler teorisinin altın çağı oldu. Cauchy varlık ve teklik teoremlerini geliştirdi, Sturm-Liouville teorisi ortaya çıktı. Riemann, kompleks analiz yöntemlerini diferansiyel denklemlere uyguladı. Poincaré ise diferansiyel denklem sistemlerinin nitel teorisini kurdu [2, 5-7].

20. yüzyılda Lyapunov kararlılık teorisi, dinamik sistem teorisi ve kaos teorisi gibi modern yaklaşımlar gelişti. Bilgisayarların yaygınlaşmasıyla sayısal çözüm yöntemleri hızla gelişmiş ve diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri mümkün olmadığında etkili alternatifler sunmuştur. Özellikle Runge-Kutta yöntemleri, sonlu fark ve sonlu eleman yöntemleri bilim ve mühendislikte yaygın olarak kullanılmaktadır [8-11].

Bu çalışmada, gecikmeli diferansiyel denklemleri (GDD) karışık koşullar altında tanımlanan yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer genelleştirilmiş pantoraf türü diferansiyel denklemler ele alınmıştır. Bu denklem tipinin ortaya çıkardığı özel zorluklara karşın bütünlük bir hesaplama yöntemi geliştirilmiştir. Önerilen bu yöntem farklı özellikte sayısal örneklerle doğrulanmış ve mevcut yaklaşımlara kıyasla ölçülebilir doğruluk ve hesaplama verimliliği göstermiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Hosoya Polinomları ve Özellikleri

Kimyasal grafik teorisi, kimya ve matematiğin kesişiminden doğan disiplinlerarası bir çalışma alanıdır. Bu alanın temelleri, 1947 yılında Amerikalı kimyager Harry Wiener tarafından atılmıştır. Wiener, “Structural Determination of Paraffin Boiling Points” başlıklı öncü çalışmasında, organik bileşiklerin (özellikle alkanların) yapısını grafik teorisi kavramlarıyla modellemiş ve bu yapılar üzerinden bazı fiziksel özellikleri (örneğin kaynama noktaları) tahmin edebilecek sayısal bir yöntem geliştirmiştir [12].

1970’li ve 1980’li yıllardan itibaren bu alanda önemli gelişmeler yaşanmıştır. Özellikle Haruo Hosoya [13], 1988 yılında Wiener indeksini genelleyerek Hosoya polinomunu tanıtmış; bu polinom ile graf yapılarının mesafe bazlı dağılımını daha ayrıntılı biçimde analiz etmeye olanak sağlamıştır. Böylece, kimyasal grafiklerin polinom temelli temsil biçimleri ortaya çıkmış, grafiklerin topolojik yapısı daha derinlemesine incelenebilir hale gelmiştir. Bir diğer mesafe tabanlı topolojik indeks olan hiper-Wiener indeksi, 1993 yılında M. Randi tarafından ortaya atılmıştır [14]. Tüm bu kavramlar kimya, biyoloji ve ağlar gibi farklı alanlarda birçok uygulama bulmuştur. Hosoya polinomu, Wiener indeksi ve hiper-Wiener indeksi, bir grafikteki köşe çiftleri arasındaki mesafelere dayanır ve kenar çiftleri arasındaki mesafeler için kenar-Hosoya polinomu [15], kenar-Wiener indeksi [16] ve kenar-hiper-Wiener indeksi [17] adlarıyla benzer kavramlar üzerinde literatürde çalışmalar yapılmıştır.

Graf teorisi, hem saf matematikte hem de uygulamalı bilimlerde geniş bir kullanım alanına sahiptir. Kimyasal bileşiklerin modellenmesinde, ağ yapılarının analizinde ve diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde graf teorisinin sağladığı kavramlardan yararlanılmaktadır [18].

Hosoya polinomu, bir grafın yapısal özelliklerini yansıtan ve moleküler grafik teorisinde önemli yere sahip olan bir kombinatorik polinom türüdür. İlk kez Japon matematikçi Haruo Hosoya tarafından 1988 yılında tanımlanmıştır [13].

Temel bir G grafi için $G = (V, E)$ kenarları şeklinde adlandırılan grafın farklı köşe çiftlerinden oluşan bir $E(G)$ kümesi ve köşeler olarak isimlendirilen öğelerden oluşan bir

$V(G)$ kümesinden elde edilen bir kümedir. E' 'deki her bir $x = (u, v)$ nokta çifti G 'nin bir kenarını oluşturur. Eğer u ve v noktaları bir kenar ile birleştirilirse, u ve v noktaları komşu noktalar. $v_1, v_2, \dots, v_n$ kadar olan noktalar G 'nin köşeleri olmak üzere, $v_1, v_2, \dots, v_n$ 'e kadar olan n köşeli P_n grafi ve $i = 1, 2, \dots, n - 1$ olmak üzere v_i, v_{i+1} 'e komşudur. G grafinin her nokta çifti bir yolla birleştirilirse buna bağlantılı graf denir. G grafindeki v_i ve v_j köşeleri arasındaki uzaklık onlarla birleşen en kısa yolun uzaklığına eşittir ve bu uzaklık $d(u_i, v_j)$ şeklinde gösterilir [19]. Hosoya polinomu $H(G, t)$ şekilde gösterilen bir polinom olup G , n köşeli ve m kenarlı bir graf olmak üzere bağlantılı graf G için

$$H(G, t) = \sum_{k=0}^{\mu} d(G, k) t^k \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. burada k ve t , G grafinin parametreleri olmak üzere $d(G, k)$, k uzaklığında olan köşe çiftlerinin sayısını gösterir [19]. Bu polinomların katsayıları olduğu bir seri çözüm yönteminin oluşturulacaktır. Literatürde Hosoya polinomları kullanılarak oluşturulmuş herhangi bir matris çözüm yöntemi yoktur. Hosoya polinomlarının diferansiyel denklemleri çözmek için kullanımı kullanımı noktasında, teorik olarak oldukça güçlü olan ve literatürdeki benzer metotlara karşılaştırılabilecek bir potansiyele sahiptir. Gecikmeli denklemleri içeren bu tür diferansiyel denklemler, mühendislik ve uygulamalı bilimlerde yaygın olarak karşılaşılan problemlerin modellenmesinde önemli rol oynar [19–21].

2.2. Genelleştirilmiş Pantograf Diferansiyel Denklemler

Genelleştirilmiş pantograf diferansiyel denklemler, oransal olarak ölçeklenmiş argümanların, gecikmeli terimlerin de yer aldığı geniş bir fonksiyonel diferansiyel denklem türleridir. Bu yapıları sayesinde, özellikle zaman gecikmeli sistemlerin modellenmesinde etkin bir şekilde kullanılmaktadır. Söz konusu denklemler, klasik adi diferansiyel denklemlerden farklı olarak, geçmiş zamana ait bilgi ya da problemin farklı ölçeklerdeki durumları ile doğrudan ilişkili olan dinamikleri tanımlayabilirler. Bu özellikleri, onları çok çeşitli disiplinlerde uygulama potansiyeli yüksek modeller haline getirmektedir.

Fizikte, genelleştirilmiş pantograf denklemleri özellikle elektromanyetik dalga yayılımı, kuantum mekaniği ve ısı transferi gibi konularda, sistemin geçmiş durumlarının gelecekteki davranışları üzerindeki etkisinin dikkate alınması gereken durumlarda kul-

lanılmaktadır. Örneğin, bir sinyalin iletim hattı boyunca yayılımı sırasında karşılaştığı gecikmeler bu denklemler aracılığıyla modellenebilmektedir [22, 23].

Kimya alanında ise bu denklemler, reaksiyon kinetikleri ve özellikle otokatalitik tepkimelerin modellenmesinde önemlidir. Tepkime hızlarının geçmiş konsantrasyon değerlerine bağlı olması, sistemin gecikmeli tepkisini dikkate alan modelleri gerekli kılar ve bu tür durumlar pantograf tipi denklemlerle ifade edilebilir [24, 25].

Biyolojide, genelleştirilmiş pantograf diferensiyel denklemler; popülasyon dinamikleri, epidemiyolojik modelleme, nöronal ağlar ve biyolojik ritimlerin matematiksel ifadesinde kullanılmaktadır. Bu bağlamda, bireylerin geçmiş yaş dağılımlarına veya önceki zamanlardaki etkileşimlere dayalı olarak gelişen sistemler için uygun çözümler sunar [26, 27].

Mühendislik uygulamalarında ise bu denklemler, özellikle kontrol teorisi, otomatik kontrol sistemleri, titreşim analizleri, elektrik devreleri, robotik, mekatronik sistemler ve görüntü işleme alanlarında karşımıza çıkmaktadır. Sistem bileşenlerinin zamanla ölçekli etkileşimlerini göz önünde bulundurmak gerektiğinde, pantograf tipi modeller tercih edilmektedir [28–30].

Ekonomi ve finans bilimlerinde, zaman gecikmeli yatırım tepkileri, stokastik süreçler, fiyat tahmin modelleri, talep değişimlerinin geçmiş verilere bağıllığı gibi karmaşık yapıların modellenmesi için bu tür diferensiyel denklemler kullanılmaktadır. Özellikle piyasaların geçmiş durumlarına göre tepki verdiği dinamik sistemlerde, genelleştirilmiş pantograf diferensiyel denklemleri oldukça açıklayıcı ve etkili modelleme araçlarıdır [30, 31].

Bu çok yönlü uygulama alanları, genelleştirilmiş pantograf diferensiyel denklemlerin yalnızca teorik açıdan değil, aynı zamanda uygulamalı bilimlerde de güçlü bir matematiksel araç olduğunu ortaya koymaktadır [32–38].

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1. Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Genelleştirilmiş Pantograf Diferansiyel Denklemler

m_1 ve m_2 pozitif tam sayılar ve $0 \leq j \leq m_1$ ve $0 \leq i \leq m_2$ olacak şekilde $P_{ij}(t)$ katsayı fonksiyonu, $g(t)$ homojen olmayan fonksiyon, a_{ij} ve b_{ij} reel sabitler olmak üzere

$$\sum_{j=0}^{m_1} \sum_{i=0}^{m_2} P_{ij}(t) y^{(i)}(a_{ij}t + b_{ij}) = g(t), \quad a \leq t \leq b$$

şekilde tanımlanan denklem, mertebesi m_2 olan lineer genelleştirilmiş pantograf diferansiyel denklem veya lineer gecikmeye sahip gecikmeli diferansiyel denklem olarak adlandırılır [39–42]. Bu denklem ile birlikte, her i için γ_i reel sabitler olmak üzere bu çalışmada başlangıç ve sınır değerlerinin içerildiği

$$\sum_{k=0}^{m_2-1} (a_{ik}y^{(k)}(a) + b_{ik}y^{(k)}(b)) = \gamma_i, \quad i = 0, 1, \dots, m_2 - 1.$$

genel haldeki karışık koşullar dikkate alınacaktır.

3.2. Yüksek Mertebeden Değişken katsayılı Lineer Genelleştirilmiş Pantograf Diferansiyel Denklemler için Hosoya Matris Sıralama Yöntemi

Bu bölümde, yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer genelleştirilmiş pantograf tipli diferansiyel denklemlerin çözümüne yönelik olarak özgün bir sayısal yöntem geliştirilmiştir. Söz konusu yöntem, Hosoya polinomlarının sahip olduğu yapısal özelliklerden yararlanılarak tasarlanmış olup, matris sıralama tekniği ile inşa edilmiştir. Yöntemin temel amacı, bu tür denklemlerin analitik olarak çözümlenmesinin zor veya imkânsız olduğu durumlarda, yüksek doğrulukta ve hesaplama açısından verimli sayısal sonuçlar elde edilmesini sağlamaktır. Bu kapsamda, Hosoya polinomları ile bu polinomların katsayılarının kullanılmasıyla elde edilen çeşitli matris bağlantıları, metodun geliştirilmesinde temel bileşenler olarak kullanılmıştır. Bu çalışmada ele alınan yüksek mertebeden genelleştirilmiş

$$\sum_{j=0}^{m_1} \sum_{i=0}^{m_2} P_{ij}(t) y^{(i)}(a_{ij}t + b_{ij}) = g(t), \quad a \leq t \leq b \quad (3.1)$$

yapısına sahip m_2 . mertebeden lineer değişken katsayılı pantograf diferansiyel denklemleri için

$$\sum_{k=0}^{m_2-1} (a_{i,j}y^{(k)}(a) + b_{i,j}y^{(k)}(b)) = \gamma_i, \quad i = 0, 1, \dots, m_2 - 1. \quad (3.2)$$

karışık koşullar altındaki (3.1) denkleminin kesilmiş seri formundaki sonlu bir yaklaşık çözümü

$$y(t) \cong y_N(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_{n+1}(t), \quad a \leq t \leq b \quad (3.3)$$

şeklinde olup, burada $n = 0, 1, \dots, N$ için a_n bilinmeyen katsayılar ve $H_n(t)$ n . dereceden Hosoya polinomudur. H. Hosoya tarafından geliştirilen bu polinom G grafına bağlı olarak

$$H(G, t) = \sum_{k=0}^{\mu} d(G, k) t^k$$

olacak şekilde herhangi bir grafının Hosoya polinomu ise

$$H_n(t) = n + (n-1)t + (n-2)t^2 + \dots + [n - (n-1)t^{n-1}]$$

şeklinde ifade edilir. Bu tanıma göre Hosoya polinomlarının birkaçı

$$H_1(t) = 1$$

$$H_2(t) = t + 2$$

$$H_3(t) = t^2 + 2t + 3$$

$$H_4(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4$$

$$H_5(t) = t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 4t + 5$$

olarak elde edilmiş olur. Bu polinomlara ait grafik aşağıdaki Şekil (3.1)'de verilmiştir.

(3.1) denkleminin

$$y(t) \cong y_N(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_{n+1}(t)$$

kesilmiş seri açılımına karşılık gelen matris formu, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ için

$$\mathbf{H}(t) = [H_1(t) \quad H_2(t) \quad H_3(t) \quad \dots \quad H_{N+1}(t)]$$

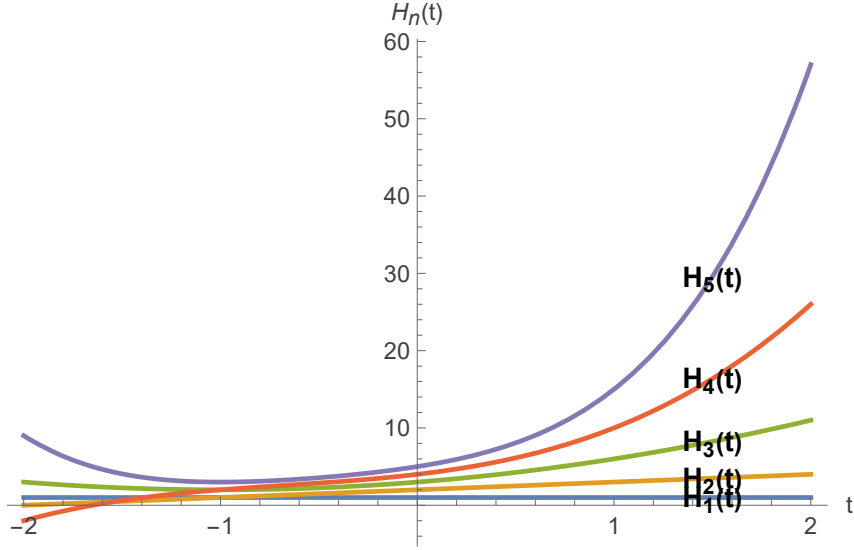
ve

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N]^T$$

olmak üzere

$$y(t) \cong y_N(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{A}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\mathbf{A}$ matrisi Hosoya polinomlarının taban olduğu çözüm fonksiyonundaki bilinmeyen katsayılar matrisidir.



Şekil 3.1. Hosoya polinomları grafiği

$\mathbf{Z}$ matrisi Hosoya polinomları ile Taylor polinomları arasındaki dönüşüm matrisidir. Hosoya polinomlarının matris formu

$$\mathbf{H}^T(t) = \mathbf{Z}^T \mathbf{X}^T(t) \Rightarrow \mathbf{H}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{Z} \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbf{X}(t)$ standart taban matrisi

$$\mathbf{X}(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad \dots \quad t^N]$$

şeklindedir. Yukarıda verilen matris formlarına göre $\mathbf{H}(t)$ matrisi ve $\mathbf{H}'(t)$ birinci mertebeden türevi arasındaki matris bağıntısı

$$y_N(t) = \mathbf{H}(t) \mathbf{A} \quad (3.5)$$

$$y'_N(t) = \mathbf{H}'(t) \mathbf{A} \quad (3.6)$$

olup matris formu şeklinde elde edilir. Buradan işlemi tekrarlayarak k . türevi

$$y''_N(t) = \mathbf{H}''(t) \mathbf{A}$$

$$y'''_N(t) = \mathbf{H}'''(t) \mathbf{A}$$

$\vdots$

$$y_N^{(k)}(t) = \mathbf{H}^{(k)}(t) \mathbf{A}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

olacak şekilde matris formu yazılır.

Buna göre yukarıda verilen (3.4) denklemini (3.5) ve (3.6) da yerine yazarak çözüm matrisi ve onun birinci türevine ait

$$\begin{aligned} y_N(t) &= \mathbf{X}(t)\mathbf{Z}\mathbf{A} \\ y'_N(t) &= \mathbf{X}'(t)\mathbf{Z}\mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.8)$$

matris formları haline gelirken, k . türevini de

$$y_N^{(k)}(t) = \mathbf{X}^{(k)}(t)\mathbf{Z}\mathbf{A} \quad (3.9)$$

olarak yazabiliriz. $\mathbf{X}(t)$ cinsinden yüksek mertebeden türevleri bulmak için ve $\mathbf{X}'(t)$ ve $\mathbf{X}(t)$ arasında bir bağıntı bulmak için

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{B} \quad (3.10)$$

iteratif formülü kullanılır. Bu eşitliğin her iki tarafının türevleri alınarak işlem tekrarlanırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{X}''(t) &= \mathbf{X}'(t)\mathbf{B} = \mathbf{X}(t)\mathbf{B}^2 \\ \mathbf{X}'''(t) &= \mathbf{X}'(t)\mathbf{B}^2 = \mathbf{X}(t)\mathbf{B}^3 \\ &\vdots \\ \mathbf{X}^{(k)}(t) &= \mathbf{X}'(t)\mathbf{B}^{k-1} = \mathbf{X}(t)\mathbf{B}^k, k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde etmiş oluruz. Burada $\mathbf{B}$ matrisi $(N+1) \times (N+1)$ tipinde bir matris olup

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Daha sonra (3.11) eşitliği (3.9) da kullanılırsa $y_N^{(k)}(t)$ 'nin matris hali

$$y(t)^{(k)} \cong y_N^{(k)}(t) = \mathbf{X}^{(k)}(t)\mathbf{Z}\mathbf{A} = \mathbf{X}(t)\mathbf{B}^k\mathbf{Z}\mathbf{A}, k = 0, 1, \dots, m_2 \quad (3.12)$$

olarak elde edilir. Gecikme kısmı ile çalışmak için (3.5) denkleminde t yerine $a_{ij}t + b_{ij}$ dönüşümü uygulandığında

$$y_N(a_{ij}t + b_{ij}) = \mathbf{H}(a_{ij}t + b_{ij})\mathbf{A} \quad (3.13)$$

ifadesi bulunur. Şimdi de yine $\mathbf{X}(t)$ ifadesinde t yerine $a_{ij}t + b_{ij}$ yazılınca $\mathbf{X}(a_{ij}t + b_{ij})$ 'nin matris formu için,

$$\mu(a_{ij}, b_{ij}) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} a_{ij}^0 b_{ij}^0 & \binom{1}{0} a_{ij}^0 b_{ij}^1 & \cdots & \binom{N}{0} a_{ij}^0 b_{ij}^N \\ 0 & \binom{1}{1} a_{ij}^1 b_{ij}^0 & \cdots & \binom{N}{1} a_{ij}^1 b_{ij}^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{N}{N} a_{ij}^N b_{ij}^0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

olmak üzere

$$\mathbf{X}(a_{ij}t + b_{ij}) = \mathbf{X}(t)\mu(a_{ij}, b_{ij}) \quad (3.15)$$

olduğunu kabul edelim. Burada (3.12) nin birinci mertebeden türevi

$$\mathbf{X}'(a_{ij}t + b_{ij}) = \mathbf{X}(t)\mu(a_{ij}, b_{ij})\mathbf{B} \quad (3.16)$$

olurken k . türev

$$y_N^{(k)}(a_{ij}t + b_{ij}) = \mathbf{X}(t)\mu(a_{ij}, b_{ij})\mathbf{B}^k\mathbf{Z}\mathbf{A} \quad (3.17)$$

elde edilir. Ayrıca koşul (3.2)'ye karşılık gelen

$$\begin{aligned} a_{0,0}y(a) + b_{0,0}y(b) + a_{0,1}y'(a) + b_{0,1}y'(b) + \dots + a_{0,m_2-1}y^{(m_2-1)}(a) + b_{0,m_2-1}y^{(m_2-1)}(b) &= \gamma_0 \\ a_{1,0}y(a) + b_{1,0}y(b) + a_{1,1}y'(a) + b_{1,1}y'(b) + \dots + a_{1,m_2-1}y^{(m_2-1)}(a) + b_{1,m_2-1}y^{(m_2-1)}(b) &= \gamma_1 \\ \vdots & \\ a_{m_2-1,0}y(a) + b_{m_2-1,0}y(b) + a_{m_2-1,1}y'(a) + b_{m_2-1,1}y'(b) + \dots & \\ + a_{m_2-1,m_2-1}y^{(m_2-1)}(a) + b_{m_2-1,m_2-1}y^{(m_2-1)}(b) &= \gamma_{m_2-1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

denklemlerini buluruz.

3.3. Çözüm Yöntemi

Bu bölümde (3.1)'in temel matris denklemini elde etmek için (3.1)'de (3.12) matris formunu daha sonra (3.15) matrisini yerine yazarak

$$\sum_{j=0}^{m_1} \sum_{i=0}^{m_2} P_{ij}(t)\mathbf{X}(t)\mu(a_{ij}, b_{ij})\mathbf{B}^i\mathbf{Z}\mathbf{A} = g(t) \quad (3.19)$$

matris denklemi elde edilir. Temel matris denklemleri oluşturulduktan sonra, standart (eşit araklı) sıralama noktaları [43] veya Chebyshev-Lobatto(CL) sıralama noktaları aşağıdaki gibi

$$t_i = a + \left(\frac{b-a}{N}\right)i, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad \text{ya da} \quad t_i = \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} \cos(\pi i/N) \quad (3.20)$$

tanımlanır. Birinci formülü kullanarak eş aralıklı sıralama noktalarını kullanacağız. Sıralama noktaları (3.17) denkleminde yerine yazılır ise;

$$\sum_{j=0}^{m_1} \sum_{i=0}^{m_2} P_{ij}(t_i) \mathbf{X}(t_i) \mu(a_{ij}, b_{ij}) \mathbf{B}^i \mathbf{Z} \mathbf{A} = g(t_i), \quad 0 \leq i \leq N \quad (3.21)$$

ifadesi bulunur. Ya da daha kompakt olarak temel matris denklemi

$$\left[\sum_{j=0}^{m_1} \sum_{i=0}^{m_2} P_{ij}(t_i) \mathbf{X}(t_i) \mu(a_{ij}, b_{ij}) \mathbf{B}^i \mathbf{Z} \right] \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.22)$$

olarak ifade edilebilir. Burada P_{ij} , $X(t)$ ve G matris formları

$$\mathbf{P}_{ij} = \begin{bmatrix} P_{ij}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{ij}(t_1) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & P_{ij}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(t_0) \\ X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & \cdots & t_0^N \\ 1 & t_1 & \cdots & t_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_N & \cdots & t_N^N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(t_0) \\ g(t_1) \\ \vdots \\ g(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Yukarıdaki (3.22) denklemi

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad \text{veya} \quad [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (3.23)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\mathbf{W} = \sum_{j=0}^{m_1} \sum_{i=0}^{m_2} P_{ij}(t_i) \mathbf{X}(t_i) \mu(a_{ij}, b_{ij}) \mathbf{B}^i \mathbf{Z}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Diğer taraftan (3.2) koşulları için matris formu (3.18) kullanılarak

$$\mathbf{U} \mathbf{A} = \gamma \quad \text{ya da} \quad [\mathbf{U}; \gamma] \quad (3.24)$$

koşullarla ilgili temel matris tanımlanabilir. Burada

$$\mathbf{U}_j = \sum_{i=0}^{m_2-1} (a_{ij} \mathbf{X}(a) + b_{ij} \mathbf{X}(b)) \mathbf{Z}^i = [u_{0j} \quad u_{1j} \quad u_{2j} \quad \cdots \quad u_{Nj}] \quad 0 \leq j \leq m_2 - 1$$

olarak ifade edilir. Daha sonra (3.1) denklemi (3.2) koşulları altında (3.23) matrisinin herhangi m . satırının yerine (3.24) satır matrisleri yerleştirilerek

$$\tilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.25)$$

yani

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1N} & ; & g(t_0) \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2N} & ; & g(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1m} & ; & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m+1)1} & u_{(m+1)2} & \cdots & u_{(m+1)m} & ; & \gamma_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N+1)1} & w_{(N+1)2} & \cdots & w_{(N+1)N} & ; & g(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \quad (3.26)$$

arttırılmış matrisi oluşturulur. Burada çözümün olabilmesi için

$$\text{rank}(\tilde{\mathbf{W}}) = \text{rank} [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = N + 1$$

eşitliklerinin olması gerekir. Bu şekilde

$$\mathbf{A} = \left(\tilde{\mathbf{W}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.27)$$

katsayılar matrisi yazılabilir. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi yani bilinmeyen Hosoya katsayılar matrisi bu cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle bulunur. Aynı zamanda (3.1) denklemi (3.2) koşulları altında yazılabiliyorsa tek bir çözüme sahiptir.

3.4. Rezidüel Fonksiyonuna Dayalı Hata Analizi

Burada üzerinde çalıştığımız Lineer değişken katsayılı Pantograf diferansiyel denklemleri;

$$\sum_{j=0}^{m_1} \sum_{i=0}^{m_2} P_{ij}(t) y^{(i)}(a_{ij}t + b_{ij}) = g(t), \quad a \leq t \leq b$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre (3.3) Hosoya serisi formunda elde edilen $y_N(t)$ çözümü verilen fonksiyonun yaklaşık çözümü olmak üzere $t \in [a, b]$ için

$$|R_N(t)| = \sum_{j=0}^{m_1} \sum_{i=0}^{m_2} P_{ij}(t) y_N^{(i)}(a_{ij}t + b_{ij}) - g(t)$$

rezidüel fonksiyonudur. Özellikle

$$t_r \in [a, b], \quad r = 0, 1, 2, \dots, N \text{ için}$$

$$|R_N(t_r)| \leq 10^{-k}, \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

maksimum hata değeri 10^{-k} ($k \in \mathbb{Z}^+$) olarak önceden belirlendiğinde, N kesme sınırının her bir noktasında $R_N(t_r)$ rezidüel fonksiyonunun mutlak değerinin önceden belirlenen 10^{-k} değerinden daha küçük olacak şekilde arttırılır.

N yeterince büyük değerler alındığında $R_N(t) \rightarrow 0$ ise bu durumda hata değerini azaltır. Diğer bir ifade ile, $R_N(t)$ olarak tanımlanan rezidüel (kalan) fonksiyon ile $[a, b]$ aralığında $|R_N(t)|$ fonksiyonun ortalama değeri ile çözümün doğruluğu kontrol edilebilir ve buradan hata tahmini yapılabiliriz.

Eğer problemin analitik çözümü $y(t)$ biliniyorsa, bu çözüm ile sayısal yöntemle elde edilen yaklaşık çözüm $y_N(t)$ arasındaki farkın mutlak değerine **mutlak hata fonksiyonu** denir ve

$$e_N(t) = |y(t) - y_N(t)|$$

olarak gösterilir.



4. ÖRNEKLER

Önerilen yöntemin doğruluk ve etkinliğini değerlendirmek amacıyla çeşitli örnekler üzerinde uygulamalar gerçekleştirilmiştir. Çözüm sonuçlarının hassasiyetini incelemek üzere hata analizi yapılmış ve elde edilen veriler, karşılaştırmalı olarak tablolar ve grafikler aracılığıyla sunulmuştur.

Örnek 1

Tam çözümü $u(t) = e^t$ fonksiyonu ve $g(t) = 0$ olan

$$u'(t) = \frac{u(t)}{2} + \frac{1}{2}e^{(t/2)}u(t/2), \quad 0 \leq t \leq 1$$

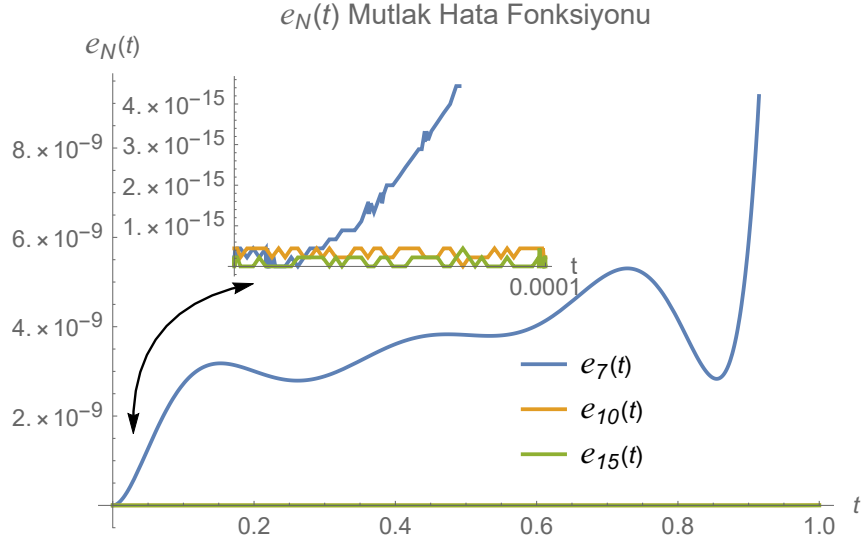
pantograf denkleminin [37, 44, 45] $u(0) = 1$ başlangıç şartı altındaki $N = 8$ için Hosoyma matris sıralama yöntemini eşit aralıklı sıralama noktaları ile çözelim. Tablo 4.1’de görülen $N = 8$ için yaklaşık çözüm ve mutlak hata değerleri eşit aralıklı sıralama noktalarına göre oluşturulmuştur.

t_i	$y(t)$	$y_N(t)$	$e_N(t)$
0.0	1.0	1.0	2.22045×10^{-16}
0.2	1.22140	1.22140	1.43119×10^{-10}
0.4	1.49182	1.49182	1.82826×10^{-10}
0.6	1.82212	1.82212	2.29509×10^{-10}
0.8	2.22554	2.22554	1.19246×10^{-10}
1.0	2.71828	2.71828	2.59912×10^{-10}

Tablo 4.1. Örnek 1’in $N = 8$ için yaklaşık çözüm ve mutlak hata değerleri

t_i	HSY	Taylor Yön. [44]	Galerkin Yön. [37]
0.0	2.22045×10^{-16}	—	0
0.2	5.77482×10^{-9}	1.44×10^{-12}	6.261×10^{-9}
0.4	7.20049×10^{-9}	7.524×10^{-10}	1.089×10^{-8}
0.6	2.37904×10^{-9}	2.953×10^{-8}	1.081×10^{-8}
0.8	1.25124×10^{-9}	4.018×10^{-7}	1.497×10^{-8}
1.0	4.90322×10^{-9}	3.059×10^{-6}	1.788×10^{-8}
CPU zamanı	0.0217231	-	0.1406

Tablo 4.2. Örnek 1’in $N = 7$ için mutlak hata karşılaştırmaları



Şekil 4.1. Örnek 1'in $N = 7, 10, 15$ değerleri için hesap edilen yaklaşık çözümlerinin mutlak hatalarının $e_N(t)$ karşılaştırılması

t_i	HSY	Hermite Yön. [45]
0.0	2.22045×10^{-16}	0
0.2	1.43119×10^{-10}	3.8503×10^{-10}
0.4	1.82826×10^{-10}	4.5797×10^{-10}
0.6	2.29509×10^{-10}	5.3296×10^{-10}
0.8	1.19246×10^{-10}	6.4064×10^{-10}
1.0	2.59912×10^{-10}	1.1526×10^{-09}

Tablo 4.3. Örnek 1'in $N = 8$ için Hosoya Yöntemi ve $N = 7$ için Hermite Yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hata karşılaştırmaları

Örnek 1'in nümerik çözümleri Tablo 4.2'de $N = 7$ için Hosoya matris sıralama yöntemini (HSY) eşit aralıklı sıralama noktaları ile elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının, Taylor [44], Galerkin [37] yöntemleri ile elde edilen çözümlerin mutlak hataları ile karşılaştırılmıştır. Tablo 4.3'te Hermite yönteminde [45] N için $(N + 1)$. dereceden bir polinom çözümü elde edilmiş iken, Galerkin Yönteminde [37] N için N . dereceden bir polinom çözümü elde edildiği ifade edilmiştir. Bu sebeple karşılaştırmaları iki tablo ile gerçekleştirmiş bulunuyoruz. Burada hesap edilen sayısal çözümler Mathematica programı kullanılarak hazırlanan algoritma ile elde edilmiş olup, $N = 7$ için gerçekleştirilen nümerik hesaplamada elde edilen işlem süresi 0.0217231 saniye olarak bulunmuştur. Ayrıca Tablo 4.2'de belirtildiği üzere, hem tam çözüme olan yaklaşma hem de bunu hesap etme süresi olarak karşılaştırmada önemli bir üstünlük elde edilmiştir.

Örnek 2

Tam çözümü

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^k (-1 - 0.8^{i-1}) t^k$$

fonksiyonu ve $g(t) = 0$ olan

$$u'(t) = -u(t) - u(0.8t)$$

pantograf denkleminin [37, 46, 47] $u(0) = 1$ başlangıç şartı altındaki $N = 5$ için eşit aralıklı sıralama noktaları için Hosoya matris sıralama yöntemi ile çözelim.

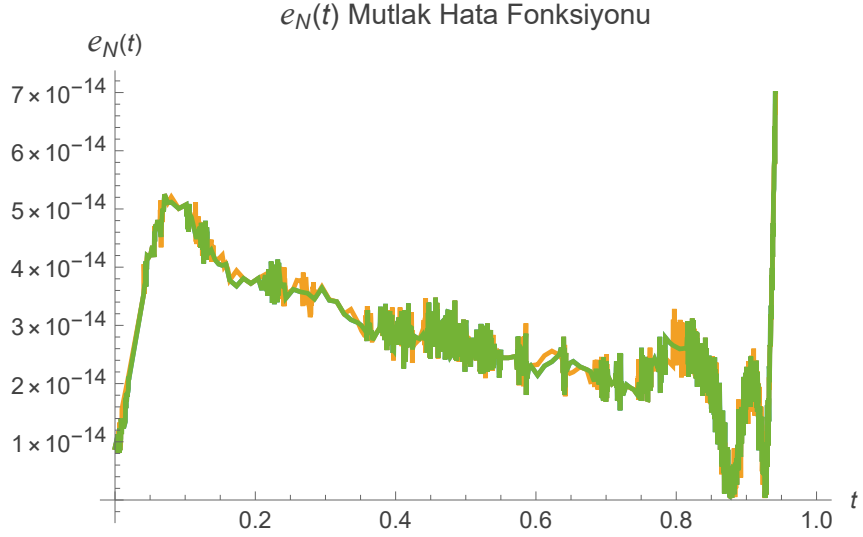
t_i	$y(t)$	$y_N(t)$	$e_N(t)$
0.0	1.0	1.0	0.00000×10^{-6}
0.2	0.664691	0.664681	9.69763×10^{-6}
0.4	0.433561	0.433559	2.13832×10^{-6}
0.6	0.276482	0.276477	5.67587×10^{-6}
0.8	0.171484	0.171491	7.18951×10^{-6}
1.0	0.102670	0.102476	0.000193633

Tablo 4.4. Örnek 2'in $N = 5$ için yaklaşık çözüm ve hata değerleri

Tablo 4.4, eşit aralıklı sıralama noktaları alınarak hesaplanmış $N = 5$ için yaklaşık çözüm ve mutlak hata değerlerini gösterirken, Tablo 4.5 ise $N = 7, 11, 15$ değerleri için gerçekleştirilen nümerik hesaplamada elde edilen mutlak hataları ve çözümlerin elde edilmesi için geçen işlem süresini göstermektedir. Burada yaklaşık çözümü bulma hızı, N in artan değerleri ile doğru orantılı bir biçimde artış gösterse dahi, elde edilen CPU zamanları gerçekten düşük seviyelerdedir. Şekil 4.2'de ise Örnek 2'nin $N = 11, 15$ için mutlak hata karşılaştırmaları görülmektedir.

t_i	$e_7(t)$	$e_{11}(t)$	$e_{15}(t)$
0.0	7.10543×10^{-15}	2.33147×10^{-15}	3.21965×10^{-15}
0.2	3.31765×10^{-8}	5.21805×10^{-14}	6.43929×10^{-15}
0.4	2.46365×10^{-8}	3.66929×10^{-14}	7.54952×10^{-15}
0.6	3.36995×10^{-8}	1.23235×10^{-14}	4.99600×10^{-15}
0.8	3.36995×10^{-8}	7.49401×10^{-16}	4.24660×10^{-15}
1.0	8.00338×10^{-8}	8.47100×10^{-14}	2.80331×10^{-15}
CPU zamanı	0.0391509	0.0440474	0.0580732

Tablo 4.5. Örnek 2'nin $N = 7, 11, 15$ için mutlak hata değerleri



Şekil 4.2. Örnek 2'nin $N = 11, 15$ için mutlak hata karşılaştırmaları

Örnek 3

Tam çözümü $y(t) = e^{-t}$ fonksiyonu olan

$$y'(t) = -y(t) + \frac{q}{2}y(qt) - \frac{q}{2}e^{-qt}$$

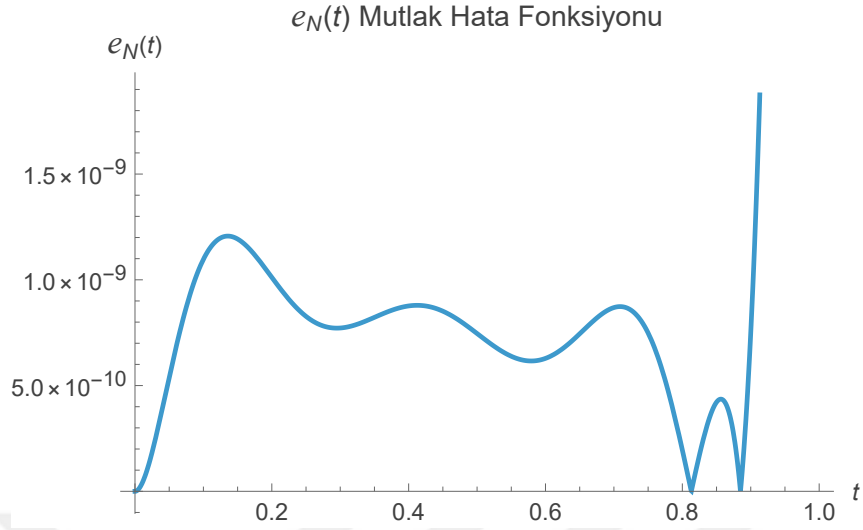
pantograf denkleminin [39, 44] $y(0) = 1$ başlangıç şartı altındaki $N = 7$ için Hosoya matris sıralama yöntemini eşit aralıklı sıralama noktaları ile çözelim.

t_i	$y(t)$	$y_N(t)$	$e_N(t)$
0.0	1.0	1.0	2.22045×10^{-16}
0.2	0.818731	0.818731	1.38738×10^{-9}
0.4	0.670320	0.670320	1.23151×10^{-9}
0.6	0.548812	0.548812	7.82521×10^{-10}
0.8	0.449329	0.449329	5.99291×10^{-9}
1.0	0.367879	0.367879	9.03310×10^{-10}

Tablo 4.6. Örnek 3'in $N = 7$ için yaklaşık çözüm ve mutlak hata değerleri

Tablo 4.6, eşit aralıklı sıralama noktaları alınarak hesaplanmış $N = 7$ için yaklaşık çözüm ve mutlak hata değerlerini gösterirken, Tablo 4.7 ise $N = 8, 14$ değerleri için gerçekleştirilen nümerik hesaplamada elde edilen mutlak hataları ve çözümlerin elde edilmesi için geçen işlem süresini göstermektedir. Burada yaklaşık çözümü bulma hızı, N in 10'dan büyük değerleri için de düşük değerlere sahip olduğu görülmektedir. Örnek 3'ün $N = 7$

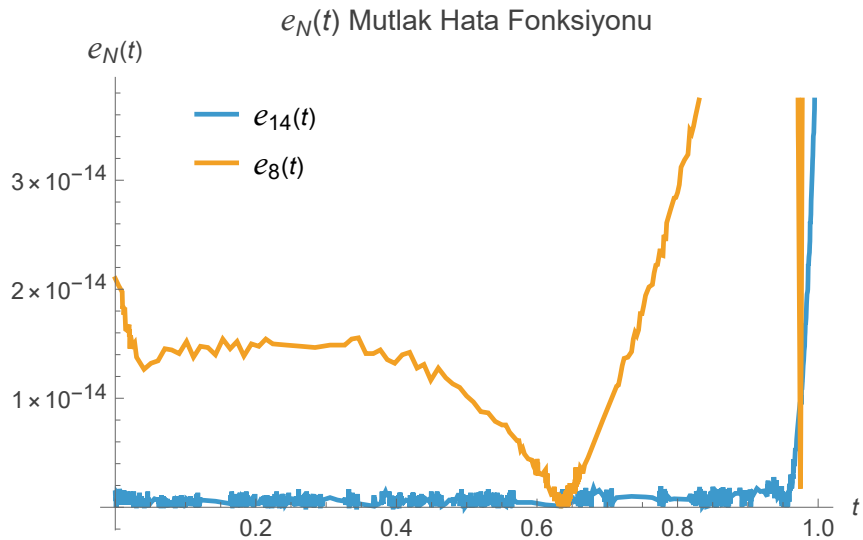
için mutlak hata fonksiyonu Şekil 4.3’de, $N = 8, 14$ değerleri için elde edilen mutlak hata fonksiyonları ve karşılaştırmaları ise Şekil 4.4’te görülmektedir.



Şekil 4.3. Örnek 3’ün $N = 7$ için hesap edilen mutlak hata grafiği

t_i	$e_8(t)$	$e_{14}(t)$
0.0	6.66134×10^{-16}	2.22045×10^{-16}
0.2	6.34088×10^{-11}	1.11022×10^{-16}
0.4	6.19010×10^{-11}	1.11022×10^{-16}
0.6	1.59477×10^{-11}	8.88178×10^{-16}
0.8	4.75575×10^{-12}	1.38778×10^{-15}
1.0	8.00338×10^{-8}	1.11022×10^{-15}
CPU zamanı	0.0234364	0.0277392

Tablo 4.7. Örnek 3’in $N = 8, 14$ değerleri ve eşit aralıklı sıralama noktaları için Hosoya matris yönetimi ile elde edilen mutlak hata değerleri ve hesaplama süreleri



Şekil 4.4. Örnek 3’ün $N = 8, 14$ değerlerini için hesap edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının $e_n(t)$ karşılaştırılması

Örnek 4

Tam çözümü $y(t) = t^2$ fonksiyonu olan

$$y''(t) = \frac{3}{4}y(t) + y\left(\frac{t}{2}\right) - t^2 + 2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

ikinci mertebeden pantograf denkleminin [42, 48] $y(0) = 0, y'(0) = 0$ başlangıç şartları altındaki $N = 3$ için ele alınan problem Hosoya matris sıralama yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Uygulanan bu yöntem sonucunda elde edilen sayısal çözüm değerleri, analitik çözüm ile birebir uyum göstermiştir. Elde edilen sonuçlar, Hosoya matrisine dayalı sıralama tekniğinin düşük boyutlu problemlerde yüksek doğruluksunduğunu ve yöntemin güvenilirliğini teyit ettiğini ortaya koymaktadır. Böylece, $N = 3$ durumu için kullanılan yaklaşımın hem tutarlı hem de geçerli bir çözüm elde ettiğini söylemek mümkündür. $N = 3$ ve daha büyük değerleri için de aynı durum geçerli olup elde edilen sonuçlar analitik çözüm ile birebir aynıdır.

Örnek 5

Tam çözümü $y(t) = e^{-t}$ fonksiyonu olan

$$y'''(t) = -y(t) - y(t - 0.3) + e^{-t+0.3}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

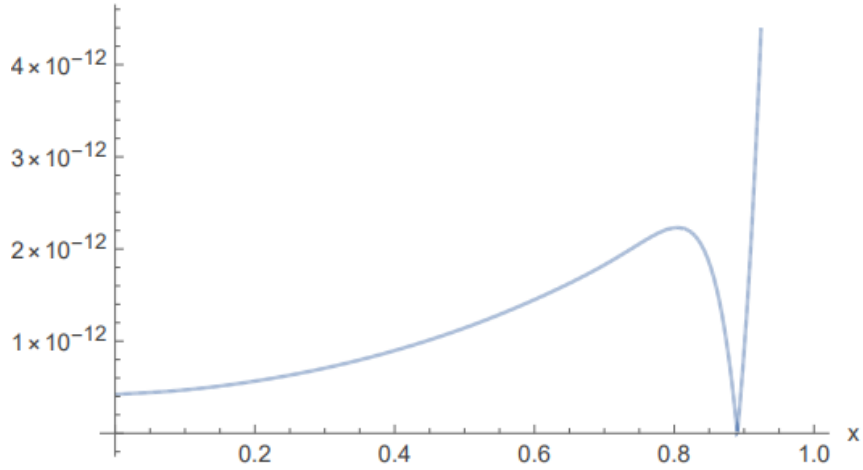
üçüncü mertebeden pantograf denkleminin [42] başlangıç şartları altındaki

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1, \quad y(t) = e^{-t}, \quad t \leq 0$$

$N = 10$ için Hosoya matris sıralama yöntemi ile çözelim.

t_i	$y(t)$	$y_N(t)$	$e_N(t)$
0.0	1.0	1.0	4.22107×10^{-13}
0.2	1.22140	1.22140	5.65548×10^{-13}
0.4	1.49182	1.49182	8.97393×10^{-13}
0.6	1.82212	1.82212	1.44940×10^{-12}
0.8	2.22554	2.22554	2.22999×10^{-12}
1.0	2.71828	2.71828	4.13459×10^{-11}

Tablo 4.8. Örnek 5'in $N = 10$ ve eşit aralıklı sıralama noktaları için Hosoya matris yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözüm ve mutlak hata değerleri



Şekil 4.5. Örnek 5'in $N = 10$ için hesap edilen mutlak hata grafiği

$N = 10$ için gerçekleştirilen nümerik hesaplamada elde edilen işlem süresi 0.270299 saniye olarak bulunmuştur. Tablo 4.8, Örnek 5'in $N = 10$ ve eşit aralıklı sıralama noktaları için Hosoya matris yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözüm ve mutlak hata değerlerini gösterirken, Tablo 4.9 ise $N = 7, 10$ değerleri için gerçekleştirilen nümerik hesaplamada elde edilen mutlak hataları göstermektedir. Ayrıca Örnek 5'in $N = 10$ eşit aralıklı sıralama noktaları için Hosoya matris yöntemi ile elde edilen mutlak hata ve rezidüel hata değerleri Tablo 4.10'da yer almaktadır. Şekil 4.5'de, $N = 10$ değeri için elde edilen mutlak hata fonksiyonu görülmektedir.

t_i	$e_7(t)$	$e_{10}(t)$
0.0	9.99201×10^{-15}	4.22107×10^{-13}
0.2	1.16993×10^{-9}	5.65548×10^{-13}
0.4	5.97328×10^{-9}	8.97393×10^{-13}
0.6	1.43054×10^{-8}	1.44940×10^{-12}
0.8	4.53279×10^{-8}	2.22999×10^{-12}
1.0	6.51927×10^{-7}	4.13459×10^{-11}

Tablo 4.9. Örnek 5'in $N = 7$ ve $N = 10$ eşit aralıklı sıralama noktaları için Hosoya matris yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözüm ve mutlak hata değerleri

t_i	$y(t)$	$e_N(t)$	$ R_N(t) $
0.0	1.0	4.22107×10^{-13}	2.31237×10^{-12}
0.2	1.22140	5.65548×10^{-13}	3.91354×10^{-12}
0.4	1.49182	8.97393×10^{-13}	7.0276×10^{-12}
0.6	1.82212	1.44940×10^{-12}	1.24968×10^{-11}
0.8	2.22554	2.22999×10^{-12}	6.68564×10^{-9}
1.0	2.71828	4.13459×10^{-11}	2.95606×10^{-7}

Tablo 4.10. Örnek 5'in $N = 10$ eşit aralıklı sıralama noktaları için Hosoya matris yöntemi ile elde edilen mutlak hata ve rezidüel hata değerleri

Örnek 6

Tam çözümü $y(t) = \cos(t)$ fonksiyonu olan

$$y^{(3)}(t) = ty''(2t) - y'(t) - y\left(\frac{t}{2}\right) + t \cos(2t) + \cos\left(\frac{t}{2}\right),$$

üçüncü mertebeden pantograf denkleminin [44]

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1$$

şartları altındaki çözümünü bulalım.

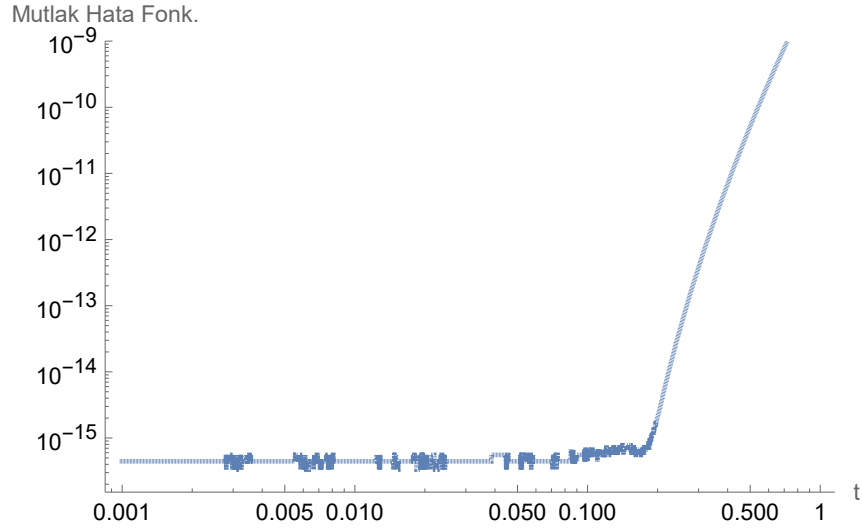
Burada çözüm yaklaşımında iki farklı sıralama noktası kullanılacaktır. Bu örnekte ayrıca amacımız Hosoya polinomlarını eşit aralıklı sıralama noktaları ile Chebyshev-Lobatto sıralama noktaları kullanılması ile elde edilen verileri de karşılaştırmaktır. Öncelikle Tablo 4.11'de $N = 10$ için eşit aralıklı sıralama noktalarını dikkate alıp Hosoya matris yöntemi kullanarak hesaplamış olduğumuz yaklaşık çözüm ve mutlak hata değerleri görülmektedir. Tablo 4.12'de ise $N = 10$ için Chebyshev-Lobatto(CL) sıralama noktaları ile Hosoya matris yöntemimizi kullanarak hesaplamış olduğumuz yaklaşık çözüm ve mutlak hata değerleri görülmektedir.

t_i	$y(t)$	$y_N(t)$	$e_N(t)$
0.0	1.000000	1.000000	1.11022×10^{-16}
0.1	0.995004	0.995004	1.87295×10^{-13}
0.2	0.980067	0.980067	1.19660×10^{-12}
0.3	0.955336	0.955336	2.10265×10^{-12}
0.4	0.921061	0.921061	9.20253×10^{-12}
0.5	0.877583	0.877583	1.01715×10^{-10}
0.6	0.825336	0.825336	4.94839×10^{-10}
0.7	0.764842	0.764842	1.67757×10^{-9}
0.8	0.696707	0.696707	4.51094×10^{-9}
0.9	0.621610	0.621610	1.02716×10^{-8}
1.0	0.540302	0.540302	2.06165×10^{-8}

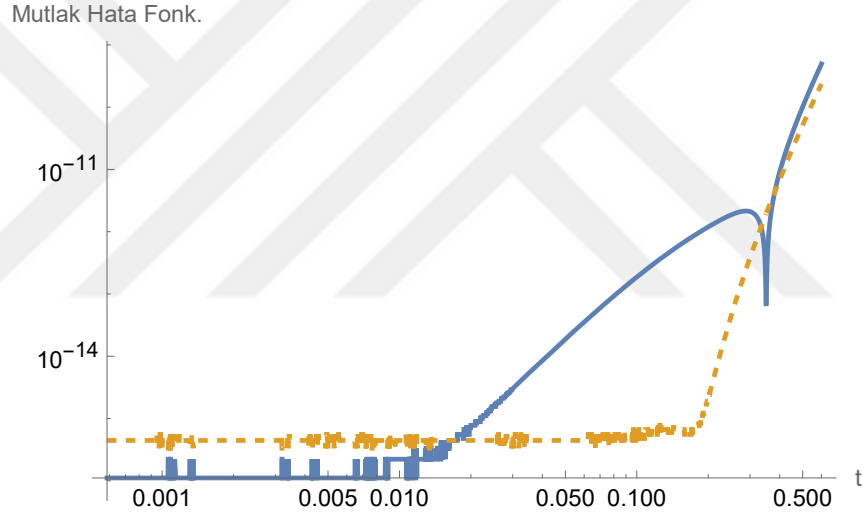
Tablo 4.11. Örnek 6'nın $N = 10$ için eşit aralıklı sıralama noktalarını Hosoya matris yöntemi kullanarak hesaplanmış Yaklaşık Çözüm ve Mutlak Hata Değerleri

t_i	$y(t)$	$y_N(t)$	$e_N(t)$
0.00000	1.000000	1.000000	4.44089×10^{-16}
0.02447	0.999701	0.999701	3.33067×10^{-16}
0.09549	0.995444	0.995444	4.44089×10^{-16}
0.20611	0.978835	0.978835	3.10862×10^{-15}
0.34549	0.940909	0.940909	1.69276×10^{-12}
0.50000	0.877583	0.877583	5.18510×10^{-11}
0.65451	0.793347	0.793347	4.70644×10^{-10}
0.79389	0.701075	0.701075	2.00486×10^{-9}
0.90451	0.618072	0.618072	4.99409×10^{-9}
0.97553	0.560731	0.560731	8.25253×10^{-9}
1.00000	0.540302	0.540302	9.68619×10^{-9}

Tablo 4.12. Örnek 6'nın $N = 10$ için Hosoya matris sıralama yöntemini Chebyshev-Lobatto(CL) sıralama noktaları kullanarak hesaplanmış Yaklaşık Çözüm ve Mutlak Hata Değerleri



Şekil 4.6. Örnek 6'nın $N = 10$ için CL sıralama noktaları kullanılarak hesap edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hata logaritmik grafiği



Şekil 4.7. Örnek 6'nın $N = 10$ için hesap edilen eşit aralıklı sıralama noktaları (mavi renkli düz çizgi) ile Chebyshev-Lobatto sıralama noktaları (sarı çizgi çizgi) kullanarak elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hata logaritmik grafiği

$N = 10$ için gerçekleştirilen Tablo 4.11'deki nümerik hesaplamada elde edilen işlem süresi ortalama 0.0367287 saniye olarak bulunmuştur. Şekil 4.6, Örnek 6'nın $N = 10$ için CL sıralama noktaları kullanılarak hesap edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hata logaritmik grafiğini ve Şekil 4.7 de Örnek 6'nın $N = 10$ için hesap edilen eşit aralıklı sıralama noktaları (mavi renkli düz çizgi) ile Chebyshev-Lobatto sıralama noktaları (sarı çizgi çizgi) kullanarak elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hata logaritmik grafiğini göstermektedir.

t_i	$e_{10}(t)$	$e_{15}(t)$
0.0	1.11022×10^{-16}	2.22045×10^{-16}
0.1	1.87295×10^{-13}	1.11022×10^{-16}
0.2	1.19660×10^{-12}	2.22045×10^{-16}
0.3	2.10265×10^{-12}	2.22045×10^{-16}
0.4	9.20253×10^{-12}	2.22045×10^{-16}
0.5	1.01715×10^{-10}	2.22045×10^{-16}
0.6	4.94839×10^{-10}	3.33067×10^{-16}
0.7	1.67757×10^{-9}	6.66134×10^{-16}
0.8	4.51094×10^{-9}	7.77156×10^{-16}
0.9	1.02716×10^{-8}	1.44329×10^{-15}
1.0	2.06165×10^{-8}	2.33147×10^{-15}
CPU zamanı	0.0367287	0.0495769

Tablo 4.13. Örnek 6'nın $N = 10$ ve $N = 15$ için Hosoya matris yöntemi eşit aralıklı sıralama noktalarının mutlak hata değerleri ve hesaplama süreleri

Tablo 4.13'de Örnek 6'nın $N = 10$ ve $N = 15$ için Hosoya matris yöntemi eşit aralıklı sıralama noktalarının mutlak hata değerleri ve hesaplama sürelerini verilirken, Tablo 4.14'de Örnek 6'nın $N = 10$ için Hosoya matris yöntemi eşit aralıklı sıralama noktaları için rezidüel hata ile Chebyshev-Lobatto sıralama noktaları için rezidüel hata, mutlak hata ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması verilmiştir.

t_i	$y(t)$	$y_N(t)$	$e_N(t)$	Rezidüel Hata $ R_N(t) $	CL Rezidüel Hata $ R_N(t) $
0.0	1.000000	1.000000	1.11022×10^{-16}	2.22045×10^{-16}	6.66134×10^{-16}
0.1	0.995004	0.995004	1.87295×10^{-13}	4.44089×10^{-16}	2.22045×10^{-16}
0.2	0.980067	0.980067	1.19660×10^{-12}	2.22045×10^{-16}	4.44089×10^{-16}
0.3	0.955336	0.955336	2.10265×10^{-12}	4.44089×10^{-16}	4.44089×10^{-16}
0.4	0.921061	0.921061	9.20253×10^{-12}	2.22045×10^{-16}	2.22045×10^{-16}
0.5	0.877583	0.877583	1.01715×10^{-10}	2.22045×10^{-16}	4.44089×10^{-16}
0.6	0.825336	0.825336	4.94839×10^{-10}	1.61787×10^{-16}	6.66134×10^{-16}
0.7	0.764842	0.764842	1.67757×10^{-9}	1.03957×10^{-16}	6.61619×10^{-16}
0.8	0.696707	0.696707	4.51094×10^{-9}	7.77156×10^{-16}	2.19536×10^{-16}
0.9	0.621610	0.621610	1.02716×10^{-8}	2.78157×10^{-15}	1.5572×10^{-15}
1.0	0.540302	0.540302	2.06165×10^{-8}	5.55112×10^{-15}	1.11022×10^{-15}

Tablo 4.14. Örnek 6'nın $N = 10$ için yaklaşık çözüm, mutlak hata değerleri ve hem eşit aralıklı sıralama noktaları hem de Chebyshev-Lobatto sıralama noktaları kullanılarak elde edilen rezidüel hata değerlerinin karşılaştırılması

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, lineer gecikmeli diferansiyel denklemler, genelleştirilmiş pantograf denklemler ve birinci ya da daha yüksek mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için, Hosoya polinomlarına dayanan yeni bir matris sıralama yöntemi önerilmiş ve çeşitli problemlere uygulanmıştır. Yöntemin doğruluğunu ve etkinliğini incelemek amacıyla farklı örnekler ele alınmış, bulunan yaklaşık çözümler literatürdeki analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır. Ayrıca, yöntemin sayısal doğruluğunu değerlendirmek için literatürde yer alan sonuçlarla önerilen yöntemden elde edilen veriler karşılaştırılarak hata analizi yapılmıştır. Analizler, yöntemin yüksek doğruluk sağladığını ve elde edilen çözümlerin incelenen problemlerle oldukça uyumlu olduğunu ortaya koymuştur. Literatürde mevcut yöntemler arasında yaygın biçimde kullanılan polinom ailesine yeni bir polinom sınıfı eklenmiş; yapılan karşılaştırmalar, önerilen yöntemin aynı kesme değerlerinde mevcut yöntemlere kıyasla daha iyi çözümler ürettiğini göstermiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Niccolò Guicciardini. *The development of Newtonian calculus in Britain 1700–1800*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989. p. 56.
- [2] Earl A. Coddington and Norman Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, 1955.
- [3] William E. Boyce, Richard C. DiPrima, and Douglas B. Meade. *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley & Sons, 2017.
- [4] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press, 3rd edition, 2013.
- [5] John Guckenheimer and Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volume 42. Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] John B. Conway. *Functions of one complex variable II*, volume 159. Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] Anton Zettl. *Sturm-Liouville theory*. Number 121. American Mathematical Society, 2005.
- [8] John C. Butcher. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley, 3rd edition, 2016.
- [9] Wassim M. Haddad, VijaySekhar Chellaboina, and Sergey G. Nersesov. *Impulsive and Hybrid Dynamical Systems: Stability, Dissipativity, and Control*. Princeton University Press, 2006.
- [10] Edward Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2002.
- [11] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC Press, 2nd edition, 2018.

- [12] Harry Wiener. Structural determination of paraffin boiling points. *Journal of the American Chemical Society*, 69(1):17–20, 1947.
- [13] Haruo Hosoya. On some counting polynomials in chemistry. *Discrete Applied Mathematics*, 19(1–3):239–257, 1988.
- [14] Milan Randić. Novel molecular descriptor for structure-property studies. *Chemical Physics Letters*, 211(4–5):478–483, 1993.
- [15] Ali Behmaram, H. Yousefi-Azari, and Ali Reza Ashrafi. Some new results on distance-based polynomials. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 65(1):39–50, 2011.
- [16] Ali Iranmanesh, Ivan Gutman, Omid Khormali, and Abdoljalil Mahmiani. The edge versions of the wiener index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 61(3):663, 2009.
- [17] Ali Iranmanesh, Ali Soltani Kafrani, and Omid Khormali. A new version of hyper-wiener index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 65(1):113–122, 2011.
- [18] Mehmet Aziz Yirik, Kerem Emre Colpan, Stefan Schmidt, Maria Sorokina, and Christoph Steinbeck. Review on chemical graph theory and its application in computer-assisted structure elucidation. *Journal of Cheminformatics*, 13(1):1–20, 2021.
- [19] Harish S. Ramane, Sharanagouda C. Shiralashetti, Reshma A. Mundewadi, and Rekha B. Jummannaver. Numerical solution of fredholm integral equations using hosoya polynomial of path graphs. *American Journal of Numerical Analysis*, 5(1):11–15, 2017.
- [20] R. A. Mundewadi and R. B. Jummannaver. Hosoya polynomial method for the numerical solution of Volterra integral equations. *Journal of Umm Al-Qura University for Applied Sciences*, pages 1–17, 2024.
- [21] K. Srinivasa, H. S. Ramane, R. A. Mundewadi, and R. B. Jummannaver. Solutions of differential equations using linearly independent Hosoya polynomials of trees. *International Journal of Mathematics and Computational Engineering*, 2(1):13–22, 2023.

- [22] P. Albayrak. Pell collocation approach for the nonlinear pantograph differential equations. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 9(1):167–183, 2024.
- [23] A. D. Polyanin and V. G. Sorokin. Exact solutions and reductions of nonlinear diffusion pdes of pantograph type. *arXiv preprint arXiv:2103.01666*, 2021.
- [24] M. R. Roussel. The use of delay differential equations in chemical kinetics. *The Journal of Physical Chemistry*, 100(20):8323–8330, 1996.
- [25] I. R. Epstein. Delay effects and differential delay equations in chemical kinetics. *International Reviews in Physical Chemistry*, 11(1):135–160, 1992.
- [26] F. A. Rihan. *Delay Differential Equations and Applications to Biology*. Springer, 2021.
- [27] M. S. Algotam, A. Ali, H. Ibrahim, K. Aldwoah, A. A. Qurtam, N. Haron, and A. Adam. Analysis of impulsive and proportional delay problems: Theory and application to a housefly population model. *Fractal and Fractional*, 9(12):779, 2025.
- [28] O. Arino, M. L. Hbid, and E. Ait Dads, editors. *Delay Differential Equations and Applications: Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held in Marrakech, Morocco, 9–21 September 2002*, volume 205 of *NATO Science Series*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [29] J. R. Ockendon and A. B. Tayler. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 322(1551):447–468, 1971.
- [30] H. Jafari, M. Mahmoudi, and M. H. Noori Skandari. A new numerical method to solve pantograph delay differential equations with convergence analysis. *Advances in Difference Equations*, 2021(1):129, 2021.
- [31] Y. Zhang and L. Li. Stability of numerical method for semi-linear stochastic pantograph differential equations. *Journal of Inequalities and Applications*, 2016(1):30, 2016.
- [32] I. Ali, H. Brunner, and T. Tang. A spectral method for pantograph-type delay differential equations and its convergence analysis. *Journal of Computational Mathematics*, pages 254–265, 2009.

- [33] Ali Konuralp and G. Hayta. On solution of differential equations by matrix method based on freud polynomials. Master's thesis, Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Manisa, 2021.
- [34] Ş. Yüzbaşı, N. Şahin, and M. Sezer. A Bessel collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 28(4):1105–1123, 2012.
- [35] A. Konuralp and S. Öner. Numerical solutions based on a collocation method combined with Euler polynomials for linear fractional differential equations with delay. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 21(6):539–547, 2020.
- [36] M. Z. Liu and D. Li. Properties of analytic solution and numerical solution of multi-pantograph equation. *Applied Mathematics and Computation*, 155(3):853–871, 2004.
- [37] Ş. Yüzbaşı and M. Karaçayır. A galerkin-like approach to solve multi-pantograph type delay differential equations. *Filomat*, 32(2):409–422, 2018.
- [38] E. Yusufoglu. An efficient algorithm for solving generalized pantograph equations with linear functional argument. *Applied Mathematics and Computation*, 217(7):3591–3595, 2010.
- [39] Yoshiaki Muroya, Emiko Ishiwata, and Hermann Brunner. On the attainable order of collocation methods for pantograph integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 152(1–2):347–366, 2003.
- [40] Ming Zhu Liu and Dongning Li. Properties of analytic solution and numerical solution of multi-pantograph equation. *Applied Mathematics and Computation*, 155(3):853–871, 2004.
- [41] Gregory Derfel and Arie Iserles. The pantograph equation in the complex plane. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 213(1):117–132, 1997.
- [42] David J. Evans and Kamal R. Raslan. The adomian decomposition method for solving delay differential equation. *International Journal of Computer Mathematics*, 82(1):49–54, 2005.

- [43] Mustafa Gülsu and Mehmet Sezer. A taylor polynomial approach for solving differential-difference equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 186(2):349–364, 2006.
- [44] Mehmet Sezer and Ayşegül Akyüz-Daşcıoğlu. A taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200(1):217–225, 2007.
- [45] Ş. Yüzbaşı and B. Çetin. A new approximation method for multi-pantograph type delay differential equations using Hermite polynomials. In *The Proceedings Book of MICOPAM 2023*, 2023.
- [46] S. Yalçınbaş, M. Aynigül, and Mehmet Sezer. A collocation method using hermite polynomials for approximate solution of pantograph equations. *Journal of the Franklin Institute*, 348(6):1128–1139, 2011.
- [47] G. Rao and K. Palanisamy. Walsh stretch matrices and functional differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(1):272–276, 2003.
- [48] A. El-Safty. Bulletin of the faculty of science, assuit university. 22(2-c):67–73, 1993.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : GÖZDE KARAPELİT

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lisans : Selçuk Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2012

Yüksek Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2025

Mesleki Deneyim

Konya Sınav Dershanesi, 2008 – 2012

Manisa Büyükşehir Belediyesi Eğitim Merkezi (MABEM), 2012 – 2024