



YÜKSEK MERTEBEDEN
LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN
ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

DOKTORA TEZİ

Ali ÇAKIR

Danışman

Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

İkinci Danışman

Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ekim 2023

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK MERTEBEDEN
LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN
ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

ALİ ÇAKIR

Danışman
Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

İkinci Danışman
Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ekim 2023

TEZ ONAY SAYFASI

Ali ÇAKIR tarafından hazırlanan “Yüksek Mertebeden Lineer Olmayan Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Salınımlılığı” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca .../.../2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

İkinci Danışman : Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

Başkan :

Üye :

Üye :

Üye :

Üye :

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....

Prof. Dr. Bekir YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

.../.../2023

Ali ÇAKIR

ÖZET
Doktora Tezi

YÜKSEK MERTEBEDEN
LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN
ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Ali ÇAKIR

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

İkinci Danışman: Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde fark denklemleri ile ilgili genel bilgiler ve literatürde yapılan çalışmalardan bazıları sunulmuş, ayrıca son yıllarda tez çalışmamızın konusu ile ilgili yapılmış olan bazı çalışmalar sonuçları ile birlikte verilmiştir. İkinci bölümde fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve teoremler hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde $\{p(n)\}$ ve $\{q(n)\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri, $h, f: R \rightarrow R$ sürekli azalmayan fonksiyonlar $uh(u) > 0, uf(u) > 0, u \neq 0$ $\{\sigma(n)\}$ ve $\{\tau(n)\}$ tamsayı dizileri ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n) = \infty.$$

olmak üzere

$$\Delta^m \left[x(n) + p(n)h(x(\sigma(n))) \right] + q(n)f(x(\tau(n))) = 0, n \in N = \{0, 1, \dots\}$$

yüksek mertebeden lineer olmayan karma neutral fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili daha önce literatürde olmayan tamamen orijinal sonuçlar verilmiştir. Son olarak tartışma ve sonuç kısmına yer verilmiştir.

2023, v+ sayfa

Anahtar Kelimeler: Fark denklemleri, Lineer olmayan fark denklemleri, Yüksek mertebeden fark denklemleri, Gecikmeli, ileri ve Karma neutral fark denklemleri, Fark denklemlerinin salınımlılığı,

ABSTRACT
Doctoral Thesis

OSCILLATORY BEHAVIOR OF
HIGH ORDER NONLINEAR MIXED TYPE
NEUTRAL DIFFERENCE EQUATIONS

Ali ÇAKIR

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

Co-Supervisor: Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, general information about difference equations and some of the studies in the literature are presented, and some studies that have been studied in recent years on the subject of our thesis are given with their results. In the second chapter, we mention some basic notions and theorems about difference equations. In the third chapter, completely original results are given that were not previously available in the literature on the oscillation of solutions of the high-order nonlinear mixed type neutral difference equation;

$$\Delta^m \left[x(n) + p(n)h \left(x(\sigma(n)) \right) \right] + q(n)f \left(x(\tau(n)) \right) = 0, n \in N = \{0, 1, \dots\}$$

where $\{p(n)\}$ and $\{q(n)\}$ are sequences of nonnegative real numbers, $h, f: R \rightarrow R$ are continuous and nondecreasing with $uh(u) > 0, uf(u) > 0, u \neq 0$, and $\{\sigma(n)\}$ and $\{\tau(n)\}$ are sequences of integers such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n) = \infty.$$

Finally, the discussion and conclusion part is given.

2023, v + 33 pages

Keywords: Difference equations, Nonlinear difference equations, Higher order difference equations, Delayed, forward and mixed type neutral difference equations, Oscillation of difference equations,

TEŞEKKÜR

Öncelikle eğitim ve öğretim hayatım boyunca desteklerini hep yanımda hissettiğim tüm dostlarıma ve bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bana bu araştırma konusunu tez çalışması olarak veren, çalışmamın her aşamasında benden yardımlarını, desteğini, sabrını ve bilgisini esirgemeyen, çok değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ' a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarımın yönlendirilmesinde ve tez çalışmamın başarıyla sonuçlanmasında büyük pay sahibi olan çok değerli ikinci danışman hocam Sayın Prof. Dr. Özkan ÖCALAN' a teşekkürü bir borç bilirim.

Ali ÇAKIR

AFYONKARAHİSAR, 2023

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR	19
2.1 Fark Analizi ve Genel Tanımlar	19
2.2. Lineer Fark Denklemleri Teorisi	21
2.3. Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Salınımlılığı	23
3. YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN KARMA NEUTRAL FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI	31
3.1 (1.1) Denkleminin Çözümlerinin Salınımlılığı.....	31
3.2 (4.1.1) Denkleminin m'nin Çift Olması Durumunda Salınımlılık Şartları	33
3.3 (4.1.1) Denkleminin m'nin Tek Olması Durumunda Salınımlılık Şartları	35
4. TARTIŞMA ve SONUÇ	42
5. KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ.....	47

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel sayılar
$\mathbb{R}^-$	Negatif Reel sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar
$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\mathbb{R}_+$	$[0, \infty)$
τ_i	Monoton olmayan argümanlar
h_i	Monoton argümanlar
Π	Çarpım sembolü
Σ	Toplam sembolü
Δ	İleri fark operatörü
E	Öteleme (kaydırma) operatörü
C	Sürekli fonksiyonların kümesi

1 GİRİŞ

Fark denklemleri; mühendislik, kimya, fizik, biyolojideki genetik, radyasyondaki kuantum, ekonomi gibi birçok bilim alanında kullanılmaktadır. Fark denklemleri teorisi, diferansiyel denklemlerin teorisine çok büyük benzerlik göstermektedir. Diferansiyel denklemler, zamanın sürekli olarak alındığı modellerde kullanılmaktadır. Bunlarda bir değişkendeki değişme, türevselleştirilerek gösterilmektedir. Zaman kesikli durumda ise yani t değişkeni sadece tam sayı değerleri alıyorsa, bir değişkendeki değişme, türevseller yerine farklarla gösterilir ve bunların yer aldığı denklemler fark denklemleri olarak adlandırılır. Fark denklemlerinin incelenmesi, diferansiyel denklemlere kıyasla daha yeni bir kavramdır. 20. yy da, genetik ve radyasyondaki kuantum gibi bilimin çeşitli dallarındaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının, süreklilik ifadeleri dışında ifadelere de ihtiyaç duyduğunu göstermiştir. Fark denklemleri teorisinin uygulamaları, kontrol teorisinde kararlılık durumunun incelenmesinde, biyolojide canlı populasyon sayısının araştırılmasında, ekonomide borsa hareketlerinin izlenmesinde, tıp biliminde hücre hareketlerinin incelenmesinde ve bir çok bilim dalında kullanılmaktadır. Uygulama alanının geniş olması fark denklemlerine duyulan ilgiyi arttırmış ve sadece matematikçilerin değil aynı zamanda fen, mühendislik, sağlık ve sosyal bilimlerde çalışan araştırmacıların da dikkatini çekmiştir. Böylece son 50 yıl içerisinde hatırı sayılır bir literatür oluşmuştur. Bu konuyla ilgili olarak Miller (1968), Goldberg (1986), Lakshmikantham ve Trigiante (1988), Mickens (1990), Györi ve Ladas (1991), Agarwal ve Wong (1997), Elaydi (1999), Agarwal (2000), Agarwal, Grace ve O'Regan (2000), Kelley ve Peterson (2001), Cheng (2003) ve Cull vd. (2005) kitaplarından söz edilebilir.

Bilindiği üzere fizik, mekanik ve mühendislikteki teknik alanlarla ilgili somut problemlerin matematiksel olarak modellenmesinde çoğu zaman fark denklemleri ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla, söz konusu problemlerin aydınlatılması herseyden önce karşılık gelen fark denklemlerinin tanımlanmasına bağlı kalmaktadır. Fark denklemleri için cevaplanması gereken başlıca soru çözümün mevcut olup olmamasıdır. Çözümün mevcut olması durumunda çözümün analitik olarak hesaplanması ve irdelenmesi süreci başlar. Fakat analitik çözümleri bulmak çok zor hatta bulundukları zaman da irdelenmeleri güçlük-

lerle dolu olabilir. Bu nedenle denklemleri çözmeden çözümlerin yapısı hakkında bilgi sahibi olmak son derece önemlidir. Bu gibi durumlarda fark denklemlerinin kalitatif olarak incelenmesi devreye girer. Çözümleri bulmaksızın onların sınırlılık, salımlılık ve yakınsaklık gibi durumlarının incelenmesi kalitatif analizin başlıca araştırma konularını oluşturmaktadır.

Bu tez çalışmasında fark denklemlerinin önemli sınıflarından biri olan

$$\Delta^m [x(n) + p(n)h(x(\sigma(n)))] + q(n)f(x(\tau(n))) = 0, n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\} \quad (1.1)$$

$(p(n))$ ve $(q(n))$ negatif olmayan reel sayı dizileri, $h, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli azalmayan fonksiyonlar olmak üzere $uh(u) > 0$, $uf(u) > 0$, $u \neq 0$ için, $(\sigma(n))$ ve $(\tau(n))$ tamsayı dizileri olmak üzere yüksek mertebeden lineer olmayan karma neutral fark denkleminin çözümlerinin kalitatif incelemesi yapılacaktır. Neutral fark denklemleri, değişme hızı geçmiş veya gelecek değerlere bağlı olan biyolojik ve fiziksel sistemler için bir matematiksel model oluşturur. Bu tip denklemler popülasyon dinamikleri, kararlılık teorisi, gecikmeli veya ileri ağ sistemlerinin dinamik davranışları gibi bir çok alanda uygulama bulabilmektedir. Neutral gecikmeli fark denklemlerinin en önemli özelliği en yüksek basamaktan farkın bilinmeyen fonksiyonun sadece n bağımsız değişkenine değil, aynı zamanda önceki argümentlere bağlı olmasıdır. Genel olarak, en yüksek basamaktan fark bilinmeyen fonksiyonun n anındaki ve $n - r_1, n - r_2$ ve $n - r_3, \dots$ anlarındaki gibi gecikmelere bağlı olarak ifade edilmiş ise, bu tür fark denklemleri neutral gecikmeli fark denklemleri olarak adlandırılır. Genel olarak k . basamaktan bir adi fark denklemi

$$\Delta^k x(n) + f(n, x(n), \Delta x(n), \Delta^2 x(n), \dots, \Delta^{k-1} x(n)) = 0,$$

k . basamaktan bir gecikmeli fark denklemi

$$\Delta^k x(n) + f(n, x(n - r_1), \Delta x(n - r_2), \Delta^2 x(n - r_3), \dots, \Delta^{k-1} x(n - r_k)) = 0,$$

ve k . basamaktan bir neutral gecikmeli fark denklemi

$$\begin{aligned} & \Delta^k (x(n) + \alpha(n)x(n - r)) \\ & + f(n, x(n - r_1), \Delta x(n - r_2), \Delta^2 x(n - r_3), \dots, \Delta^{k-1} x(n - r_k)) = 0, \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $n \in \mathbb{N}$, $r, r_1, r_2, \dots, r_k$ lar pozitif tamsayılardır.

Neutral fark denklemlerinin kapalı formda çözümlerini bulmak genellikle zordur. Çözümler bulunamadığı zaman fark denklemlerinin çözümlerinin kalitatif bakımdan incelenmesi büyük önem taşır. Neutral gecikmeli fark denklemlerinin kalitatif teorisinde daha çok çözümlerin salınımlılık, sınırlılık ve asimptotiksel davranışları incelenmektedir. Neutral gecikmeli fark denklemleri çatallanma analizi, populasyon dinamiği, kararlılık teorisi, gecikmeli ağ sistemlerinin dinamiği gibi bir çok konuda kendine uygulama alanı bulmaktadır.

Adi fark denklemleri ile matematiksel modeller kurulurken gerçekte mevcut olan gecikmeler göz ardı edilerek analizler yapılmaktadır. Gecikmeli, ileri, neutral gecikmeli ve neutral ileri fark denklemler ise sistemin geçmişteki veya gelecekteki davranışlarını belirlerken fonksiyonun ve onun farklarının hem şimdiki hem geçmişteki hem de gelecekteki hareketlerini göz önünde bulundurmaktadır. Bu durum ise modelin başarısını arttırmaktadır. Fakat gecikmeli neutral ve ileri neutral fark denklemlerinin kalitatif teorisi adi fark denklemleri kadar kolay olmayıp bazı zorluklar içermektedir. Adi fark denklemleri için geçerli olan sonuçlar neutral gecikmeli denklemler için sağlanamayabilir. Teorinin zorluğuna rağmen bu denklemlerin uygulama alanlarının oldukça geniş olması yapılan çalışmaların hız kazanmasını sağlamıştır.

Son yıllarda gecikmeli ve ileri fark denklemlerinin çözümlerinin davranışı ve özellikle salınımlılığı ile ilgili bir çok çalışma yapılmaktadır. Ladas (1989), çalışmasında $p \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere birinci mertebeden lineer, sabit katsayılı

$$x(n+1) - x(n) + px(n-k) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

denklemini ele almış ve denklemin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili gerek ve yeter şartlar elde etmişlerdir. Erbe ve Zhang (1989), çalışmalarında

$$x(n+1) - x(n) + p(n)x(n-k) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

$(p(n))$ negatif olmayan reel terimli dizi ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere birinci mertebeden, lineer, değişken katsayılı gecikmeli fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı

için yeter şart vermişlerdir. Ladas vd. (1989), çalışmalarında yukarıdaki fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart vermişlerdir. Tang ve Liu (2001), çalışmalarında

$$x(n+1) - x(n) + p(n)x^\alpha(n-k) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.4)$$

$(p(n))$ negatif olmayan reel sayı dizisi ve k pozitif bir tamsayı olmak üzere $0 < \alpha < 1$ olması durumunda yani denklemin sublineer olması durumunda (1.4) lineer olmayan gecikmeli fark denkleminin salınımlılığı için gerek ve yeter şart elde etmişler ve $\alpha > 1$ durumunda yani superlineer durumunda ise yeter şartlar elde etmişlerdir. Zhang (2002), çalışmasında

$$\Delta(x(n) - px(n-l)) + q(n)x^\alpha(n-k) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

$(q(n))$ negatif olmayan reel sayı dizisi, k ve l birer pozitif tamsayı, $0 < \alpha < 1$ ve $0 \leq p < 1$ olmak üzere (1.5) neutral lineer olmayan gecikmeli fark denkleminin salınımlı olması için gerek ve yeter şart elde etmiştir. Thandapani vd. (2003), yapmış oldukları çalışmada

$$\Delta(x(n) + h(n)x(n-l)) + \delta q(n)x^\alpha(n-k) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.6)$$

$\delta = \pm 1$ ve α pozitif tek tamsayıların oranı, $(h(n)), (q(n))$ pozitif reel sayı dizileri, k pozitif bir tamsayı, l herhangi bir tamsayı olmak üzere (1.6) neutral gecikmeli lineer olmayan fark denkleminin salınımlılık davranışlarını incelemişler ve $\delta = 1, 0 < \alpha < 1$ ve $l > k$ olması ve $\delta = -1, \alpha > 1$ ve l negatif bir tamsayı olması durumlarının her ikisi için (1.6) denkleminin çözümlerinin salınımlı olması için yeter şartlar elde etmişlerdir. Agarwal (1996), çalışmasında

$$\Delta^m(x(n) + p(n)x(n-k)) + q(n)f(x(n-l)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.7)$$

k, l negatif olmayan tamsayılar, $q(n) \geq 0$ olmak üzere $(q(n))$ ve $(p(n))$ reel sayı dizileri, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon ve $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$ olmak üzere lineer olmayan neutral gecikmeli fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için yeter şartlar vermiştir. Agarwal ve Gracea (1999), çalışmalarında

$$\Delta^m(x(n) + x(n-r)) + q(n)f(x(n-g)) = 0, \quad m \geq 1, \quad (1.8)$$

$(p(n))$ negatif olmayan reel terimli dizi, $g, r \in \mathbb{Z}^+$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve azalmayan bir fonksiyon ve $uf(u) > 0$, $u \neq 0$, ayrıca $xy > 0$ için $-f(-xy) \geq f(xy) \geq f(x)f(y)$ şartları altında yüksek mertebeden lineer olmayan fark denkleminin salınımlılığı üzerine çalışmışlar ve m nin tek olması durumunda denklemin salınımlılığı için yeter şartlar vermişlerdir. Yıldız ve Öcalan (2006), çalışmalarında

$$\Delta^m(x(n) + p(n)x(n-l) + q(n)x^\alpha(n-k)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.9)$$

$(q_n), (p_n)$ negatif olmayan reel sayı dizisi, k ve l birer pozitif tamsayı, $\alpha \in (0, 1)$ pozitif tek tamsayıların oranı olmak üzere, yüksek mertebeden neutral gecikmeli fark denkleminin salınımlılığı üzerine bazı yeter şartlar vermişlerdir. Yıldız ve Ögünmez (2013), çalışmalarında

$$\Delta^m[x(n) + p(n)x^\alpha(n-k)] + q(n)x^\beta(n-l) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.10)$$

burada $(p(n))$ reel sayı dizisi, $(q(n))$ negatif olmayan reel sayı dizisi, k ve l birer pozitif tamsayı, α, β tek tamsayıların oranı ve $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ olmak üzere lineer olmayan neutral gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı için yeter şartlar elde etmişlerdir. Zhang (2014), çalışmasında

$$\Delta^m(x(n) + p(n)x(n-r)) + q(n)f(x(n-k)) = 0, \quad (1.11)$$

$m \geq 2$ ve çift tamsayı, $r, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere karşılaştırma teoremi kullanarak çift mertebeli lineer olmayan neutral gecikmeli fark denklemlerinin salınımlılığı ile ilgili kriterler vermiştir. Kaleeswari (2019), çalışmasında

$$\Delta^m[x(n) + p(n)x(\tau(n))] + q(n)f(x(\sigma(n))) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.12)$$

$m \geq 1$ olmak üzere lineer olmayan neutral fark denklemini

$(H_1) : (q(n))$ negatif olmayan reel sayı dizisi ve özdeş olarak sıfır olmayan,

$(H_2) : (p(n))$ reel sayı dizisi ve $0 < p(n) < 1$, $n \in \mathbb{N}$,

$(H_3) : (\tau(n))$ ve $(\sigma(n))$ azalmayan diziler ve $\tau(n) < n$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(n) = +\infty$, $\sigma(n) < n$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n) = +\infty$,

$(H_4) : f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve azalmayan bir fonksiyon ve $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$, ayrıca $xy > 0$ için $-f(-xy) \geq f(xy) \geq f(x)f(y)$,

şartları altında incelemiş ve bu denklemin salınımlılığı ile ilgili bazı kriterler ortaya koymuştur. Grace ve Graef (2020), çalışmalarında

$$\Delta [(\alpha(t)(\Delta^{n-1}x(t))^\alpha] + q(t)x^\beta(t-m+1), \quad t \geq t_0, \quad n \geq 3, \quad (1.13)$$

α, β tek tamsayıların oranı ve $\alpha \geq \beta$, $(\alpha(t))$ ve $(q(t))$ pozitif reel sayı dizileri ($t \geq t_0$) ve $m > 1$ durumunda lineer olmayan yüksek mertebeden fark denkleminin salınımlılığı üzerine bazı kriterler elde etmişlerdir. Zhang ve Tian (1998), çalışmalarında $q(n) \geq 0$ bir reel sayı dizisi $\tau(n) \geq 0$ tamsayı dizisi olmak üzere

$$\Delta x(n) + q(n)x(\tau(n)) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

denklemini ele almışlar ve $\tau(n) \leq n$ ve $\tau(n)$ azalmayan olması durumunda

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} q(n) > 0 \quad \text{and} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} q(j) > \frac{1}{e}, \quad (1.15)$$

ise (1.14) denkleminin tüm çözümlerinin salımlı olduğunu göstermişler ve Öcalan (2020),

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} q(j) > \frac{1}{e}, \quad (1.16)$$

olması durumunda (1.14) denkleminin tüm çözümlerinin salımlı olduğunu göstermiştir ki bu $\tau(n)$ in azalmadığı ve yalnızca alt limit koşulunu içerdiği durumlarda literatürdeki en iyi sonuçtur.

Bu tez çalışmamın asıl konusu olan (1.1) denkleminin bazı özel hallerinin çözümlerinin kalitatif incelenmesi ile ilgili son yıllarda yapılmış olan önemli bazı çalışmalar aşağıda sonuçları ve örnekleri ile birlikte verilmiştir;

Kaleeswari ve Selvaraj (2010), (1.1) denkleminin özel hali olan

$$\Delta^m [x(n) + p(n)x(\tau(n))] + q(n)f(x(\sigma(n))) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.17)$$

denklemini

$(H_1) : (q(n))$ negatif olmayan reel sayı dizisi ve özdeş olarak sıfır olmayan;

$(H_2) : (p(n))$ reel sayı dizisi ve $0 \leq p(n) < 1, \quad n \in \mathbb{N}$,

$(H_3) : (\tau(n))$ ve $(\sigma(n))$ azalmayan diziler ve $\tau(n) < n$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(n) = +\infty$, $\sigma(n) < n$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n) = +\infty$,

$(H_4) : f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve azalmayan bir fonksiyon ve $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$, ayrıca $xy > 0$ için $-f(-xy) \geq f(xy) \geq f(x)f(y)$,

şartları altında incelemiş ve aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 1.1 (H_1) ve (H_4) sağlansın.

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\sum_{j=n}^{\infty} q(j) \right) (\sigma(n))^{(m-2)} = \infty \quad (1.18)$$

ve m tek olsun. Eğer tüm 2. mertebeden

$$\Delta^2 y(n) + R_j(n) f(y(\sigma(n))) = 0, \quad j \in \{2, 4, \dots, m-1\}$$

denklemleri $n \geq n_0$ için salınımlı ve

$$\Delta v(n) + R_0(n) f(v(\eta(n))) = 0 \quad (1.19)$$

birinci mertebeden denklemi salınımlı olacak şekilde azalmayan $\sigma(n) < \eta(n) \leq n$, $n \geq n_0$ için $(\eta(n))$ dizisi var ise bu durumda denklem (1.17) ün tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 1.1 Üçüncü mertebeden

$$\Delta^3 \left[x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) \right] + 4x(n-2) = 0 \quad (1.20)$$

denklemini ele alalım. Burada $0 \leq p(n) = \frac{1}{2} < 1$, $q(n) = 4n$, $\tau(n) = n-1 < n$, $\sigma(n) = n-2 < n$, ve $f(u) = \frac{u}{n}$ dir. Ayrıca

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\sum_{j=n}^{\infty} q(j) \right) (\sigma(n))^{(m-2)} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\sum_{j=n}^{\infty} 4j \right) (n-2) = \infty.$$

Böylece Teorem 1.1 in tüm şartları sağlandığından (1.20) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Örneğin bu çözümlerden birisi $x(n) = (-1)^n$ dir.

Teorem 1.2 (H_1) ve (H_4) şartları ve (1.18) sağlansın, ayrıca m tek olsun. Eğer $j \in \{2, 4, \dots, m-1\}$ için

$$f \left(\frac{(\sigma(n)-m+j)^{(j-i)}}{j!} \right) \sum_{r=n_0}^{\infty} \frac{(r-n+m-j-2)^{m-j-2}}{(m-j-2)!} \left(\sum_{j=r}^{\infty} q(j) \right) f(1-p(\sigma(r))) = \infty, \quad (1.21)$$

ve (1.19) denklemi salınımlı olacak şekilde azalmayan $\sigma(n) < \eta(n) \leq n$, $n \geq n_0$ için $(\eta(n))$ dizisi var ise; bu durumda denklem (1.17) nin tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 1.2 Birinci mertebeden

$$\Delta \left[x(n) + \frac{3}{4}x(n-1) \right] + \frac{1}{2}x(n-2) = 0 \quad (1.22)$$

denklemini ele alalım. Burada $0 \leq p(n) = \frac{3}{4} < 1$, $q(n) = \frac{1}{2}$, $\tau(n) = n-1 < n$, $\sigma(n) = n-2 < n$ ve $f(u) = u$ dur. Teorem 1.2 nin tüm şartları sağlandığından (1.22) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. (1.22) denkleminin salınımlı olan bu çözümlerinden biri olarak $x(n) = \frac{(-1)^n}{2}$ verilebilir.

Yıldız ve Öğünmez (2013), yaptıkları çalışmada (1.1) denkleminin özel hallerinden biri olan

$$\Delta^m [x(n) + p(n)x^\alpha(n-k)] + q(n)x^\beta(n-l) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.23)$$

denklemini $(p(n))$ reel sayı dizisi, $(q(n))$ negatif olmayan reel sayı dizisi, $\alpha \in (0, \infty)$ ve $\beta \in (0, \infty)$ olacak şekilde tek tamsayıların oranı, k, l pozitif tamsayılar olmak üzere aşağıdaki şartlar altında incelemişlerdir.

$$(C_1) : \liminf_{n \rightarrow \infty} q(n) > 0;$$

$$(C_2) : 0 \leq p(n) < 1;$$

$$(C_3) : -1 < -P \leq p(n) \leq 0 \quad (P \in \mathbb{R}).$$

Teorem 1.3 $1 \leq \alpha \leq \infty$ (C_1) ve (C_2) sağlansın.

(a) m çift olduğunda eğer

$$\Delta \omega(n) + q(n) \left(\frac{1 - (p(n-l))}{(m-1)!} \right)^\beta \left(\frac{n-l}{2^{m-1}} \right)^{(m-1)\beta} \omega^\beta(n-l) = 0, \quad (1.24)$$

denklemini salınımlı ise (1.23) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

(b) m tek olduğunda (1.23) denkleminin salınımlı olmayan tüm çözümleri $n \rightarrow \infty$ için 0 a yakınsar.

Örnek 1.3 m çift ve l tek tamsayı, $\alpha \in [1, \infty)$, $\beta \in (0, 1)$, $0 < p < 1$ ve $q > 0$ olsun.

$$\Delta^m [x(n) + px^\alpha(n-k)] + qx^\beta(n-l) = 0, \quad (1.25)$$

denklemini ele alalım. (1.25) denklemi Teorem (1.3)(a) nın tüm şartlarını sağlar. (1.25)

denkleminin 1. mertebeye indirgenmiş hali

$$\Delta \omega(n) + q \left(\frac{1-p}{(m-1)!} \right)^\beta \left(\frac{n-l}{2^{m-1}} \right)^{(m-1)\beta} \omega^\beta(n-l) = 0,$$

böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty} q \left(\frac{1-p}{(m-1)!} \right)^{\beta} \left(\frac{n-l}{2^{m-1}} \right)^{(m-1)\beta} = \infty$$

olduğundan (1.25) denkleminin tüm çözümleri Teorem (1.3) e göre salınımlıdır. Bu çözümlerden birtanesi $x(n) = \left(\frac{2^m}{q} \right)^{\frac{1}{\beta-1}} \cos(n\pi)$ dir.

Teorem 1.4 (C_1) ve (C_3) sağlansın. Bu durumda denklem (1.23)' ün tüm çözümleri ya salınımlıdır, ya da sifıra yakınsar.

Örnek 1.4 m tek ve l çift tamsayı, $\alpha \in [1, \infty)$ ve β tek tamsayıların oranı, $p \in (-1, 1) - \{0\}$ ve $q, k > 0$ olmak üzere

$$\Delta^m [x(n) + px^{\alpha}(n-k)] + qx^{\beta}(n-l) = 0, \quad (1.26)$$

denklemini $0 < p < 1$ için Teorem (1.3)(b) nin tüm şartlarını sağlar ve $-1 < p < 0$ için Teorem (1.4) ün tüm şartlarını sağlar ve salınımlı olmadığı takdirde kesinlikle sifıra yakınsar. Örneğin $x(n) = \left(\frac{2^m}{q} \right)^{\frac{1}{\beta-1}} \sin(n\pi + \frac{\pi}{2})$ denklem (1.26) nın salınımlı bir çözümüdür.

Zhang (2014), çalışmasında m çift olmak üzere

$$\Delta^m [x(n) + p(n)x(n-\tau)] + q(n)f(x(n-k)) = 0, \quad (1.27)$$

$\tau, k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}(n_0) = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$ denklemini ele almış ve

$(H_1) : (p(n))$ reel sayı dizisi ve $0 \leq p(n) < 1, n \in \mathbb{N}$; ve $(q(n))$ negatif olmayan reel sayı dizisi ve özdeş olarak sıfır olmasın;

$(H_2) : f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve tek bir fonksiyon ve $xf(x) > 0, x \neq 0$;

şartları altında ve aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

Teorem 1.5 (H_1) ve (H_2) sağlansın ve her $|x| \geq x_0 > 0$ için $|f(x)| \geq |x|$ olsun. Birinci mertebeden

$$\Delta z(n) + \frac{\lambda_m}{(m-1)!} q(n)(n-k)^{m-1} (1-p(n-k)) z(n-k) = 0, \quad (1.28)$$

denklemini salınımlı olacak şekilde öyle bir $\lambda_m = \left(\frac{1}{2} \right)^{(m-1)^2}$ sabit sayısı var ise (1.27) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Teorem 1.6 (H_1) ve (H_2) sağlansın ve her $|x| \geq x_0 > 0$ için $|f(x)| \geq |x|$ olsun. $k \geq 1$ için eğer

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n-k}^{n-1} q(i) (i-k)^{m-1} (1-p(i-k)) > 2^{(m-1)^2} (m-1)! \left(\frac{k}{k-1} \right)^{1+k}$$

veya

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n-k}^n q(i) (i-k)^{m-1} (1-p(i-k)) > 2^{(m-1)^2} (m-1)!$$

ise denklem (1.27) nin tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 1.5

$$\Delta^m \left[x(n) + \frac{1}{n} x(n-\tau) \right] + \frac{2^{(m-1)^2} (m-1)! \left[2 + \left(\frac{(-1)^n}{n} \right) \right]}{e^{(n-3)(n-2)^{m-2}}} \quad (1.29)$$

$$x(n-2) \ln(e + x^2(n-2)) = 0$$

$n > 3$, m çift ve τ pozitif tamsayı, denklemini ele alalım. Burada $0 < p(n) = \frac{1}{n} < 1$, $q(n) = \frac{2^{(m-1)^2} (m-1)! \left[2 + \left(\frac{(-1)^n}{n} \right) \right]}{e^{(n-3)(n-2)^{m-2}}} > 0$, $f(x) = x \ln(e + x^2)$, $k = 2$ dir.

$$\sum_{i=n-2}^n q(i) (i-2)^{m-1} \left(1 - \frac{1}{i-2} \right) = \sum_{i=n-2}^n \frac{2^{(m-1)^2} (m-1)! \left[2 + \left(\frac{(-1)^n}{n} \right) \right]}{e}$$

buradan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n-2}^n \frac{2^{(m-1)^2} (m-1)! \left[2 + \left(\frac{(-1)^n}{n} \right) \right]}{e} = \frac{6}{e} 2^{(m-1)^2} (m-1)! > 2^{(m-1)^2} (m-1)!$$

olur ve Teorem (1.6) gereğince denklem (1.29) salınımlıdır.

Teorem 1.7 (H_1) ve (H_2) sağlansın ve her $|x| \geq x_0 > 0$ için $|f(x)| \geq |x|$ olsun. $k > 0$ için eğer

$$0 < \alpha \leq \left(\frac{k}{1+k} \right)^{1+k}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda eğer

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n-k}^{n-1} q(i) (i-k)^{m-1} (1-p(i-k)) > 2^{(m-1)^2} (m-1)! \left(1 - \frac{\alpha^2}{4} \right)$$

veya

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n-k}^{n-1} q(i) (i-k)^{m-1} (1-p(i-k)) > 2^{(m-1)^2} (m-1)! (1 - \alpha^k)$$

ise denklem (1.27) nin tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 1.6

$$\Delta^m \left[x(n) + \frac{n-1}{n} x(n-\tau) \right] + \frac{2^{(m-1)^2} (m-1)! \left[\frac{15}{32} + \left(\frac{(-1)^n}{n} \right) \right]}{(n-2)^{m-2}} \quad (1.30)$$

$$x(n-2) \ln(e + x^2(n-2)) = 0$$

$n > 2$, m çift ve τ pozitif tamsayı, denklemini ele alalım. Burada $0 < p(n) = \frac{n-1}{n} < 1$, $q(n) = \frac{2^{(m-1)^2}(m-1)! \left[\frac{15}{32} + \left(\frac{(-1)^n}{n} \right) \right]}{(n-2)^{m-2}} > 0$, $f(x) = x \ln(e + x^2)$, $k = 2$ dir. $\alpha = \frac{4}{14}$ alalım bu durumda;

$$\sum_{i=n-2}^n q(i) (i-2)^{m-1} \left(1 - \frac{i-2-1}{i-2} \right) = \sum_{i=n-2}^{n-1} 2^{(m-1)^2} (m-1)! \left[\frac{15}{32} + \left(\frac{(-1)^n}{n} \right) \right]$$

ve buradan;

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n-2}^{n-1} 2^{(m-1)^2} (m-1)! \left[\frac{15}{32} + \left(\frac{(-1)^n}{n} \right) \right] &= \frac{15}{16} 2^{(m-1)^2} (m-1)! \\ &> (m-1)! \left(1 - \left(\frac{4}{14} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

olur ve böylece Teorem 1.7 den dolayısıyla denklem (1.30) un tüm çözümleri salınmıdır. Kaleeswari (2019), çalışmasında

$$\Delta^m [x(n) + p(n)x(\tau(n))] + q(n)f(x(\sigma(n))) = 0, n \in N = \{0, 1, \dots\} \quad (1.31)$$

denklemini $m \geq 1$ ve aşağıdaki şartlar altında incelemiştir.

$(H_1) : (q(n))$ negatif olmayan reel sayı dizisi ve özdeş olarak sıfır olmasın;

$(H_2) : (p(n))$ reel sayı dizisi ve $0 \leq p(n) < 1$, $n \in \mathbb{N}$;

$(H_3) : (\tau(n))$ ve $(\sigma(n))$ azalmayan diziler ve $\tau(n) < n$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(n) = +\infty$, $\sigma(n) < n$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n) = +\infty$;

$(H_4) : f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve azalmayan bir fonksiyon ve $xf(x) > 0, x \neq 0$, $-f(-xy) \geq f(xy) \geq f(x)f(y)$;

Teorem 1.8 (H_1) ve (H_4) şartları sağlansın.

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\sum_{j=n}^{\infty} q(j) \right) (\sigma(n))^{(m-2)} = \infty \quad (1.32)$$

ve m tek olsun. Eğer ikinci mertebeden

$$\Delta^2 y(n) + R_j(n)f(y(\sigma(n))) = 0, j \in \{2, 4, \dots, m-1\} \quad (1.33)$$

denklemini salınmı ve birinci mertebeden

$$\Delta v(n) + R_0(n)f(v(\eta(n))) = 0 \quad (1.34)$$

denklemleri salınımlı olacak şekilde bir azalmayan $\sigma(n) < \eta(n) \leq n, n \geq n_0$ $\{\eta(n)\}$ dizisi var ise bu durumda denklem (1.31) in tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 1.7 Üçüncü mertebeden

$$\Delta^3 \left[x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) \right] + 4x(n-2) = 0 \quad (1.35)$$

denklemini ele alalım. Burada $0 \leq p(n) = \frac{1}{2} < 1$, $q(n) = 4n$, $\tau(n) = n-1 < n$, $\sigma(n) = n-2 < n$, ve $f(u) = \frac{u}{n}$ dir. Ayrıca

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\sum_{j=n}^{\infty} q(j) \right) (\sigma(n))^{(m-2)} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\sum_{j=n}^{\infty} 4j \right) (n-2) = \infty$$

Böylece Teorem 1.8 in tüm şartları sağlandığından, (1.35) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Örneğin bu çözümlerden birisi $x(n) = (-1)^n$ dir.

Teorem 1.9 (H_1) ve (H_4) şartları ve (1.32) sağlansın. m çift olsun. (1.33) denkleminin tüm çözümleri $j \in \{1, 3, \dots, m-3\}$ için salınımlı ve

$$\Delta^2 u(n) + R_{m-1}(n) f(u(\sigma(n))) = 0, \quad (1.36)$$

denklemleri $n \geq n_0$ için salınımlı ise denklem (1.31) in tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 1.8

$$\Delta^2 \left[x(n) + \frac{1}{4}x(n-2) \right] + \frac{5n+3}{n-1}x(n-1) = 0 \quad (1.37)$$

2. mertebeden denklemini ele alalım. Burada $0 \leq p(n) = \frac{1}{4} < 1$, $q(n) = \frac{5n+3}{n-1}$, $\tau(n) = n-2 < n$, $\sigma(n) = n-1 < n$, ve $f(u) = u$ dur. Ayrıca

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\sum_{j=n}^{\infty} q(j) \right) (\sigma(n))^{(m-2)} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \frac{5j+3}{j-1} \right) = \infty$$

olur ve böylece Teorem (1.9) in tüm şartları sağlanmış olur. Denklem (1.37) salınımlı çözümlere sahiptir. Bu çözümlerden biri $x(n) = n(-1)^n$ olarak verilebilir.

Teorem 1.10 (H_1) ve (H_4) şartları ve (1.32) sağlansın. m tek olsun. Eğer $j \in \{2, 4, \dots, m-1\}$ için

$$f \left(\frac{(\sigma(n)-m+j)^{(j-i)}}{j!} \right) \sum_{r=n_0}^{\infty} \frac{(r-n+m-j-2)^{m-j-2}}{(m-j-2)!} \left(\sum_{j=r}^{\infty} q(j) \right) f(1-p(\sigma(r))) = \infty \quad (1.38)$$

ve (1.34) denklemleri salınımlı olacak şekilde azalmayan $\sigma(n) < \eta(n) \leq n, n \geq n_0$ $\{\eta(n)\}$ dizisi var ise bu durumda denklem (1.31) in tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 1.9

$$\Delta \left[x(n) + \frac{3}{4}x(n-1) \right] + \frac{1}{2}x(n-2) = 0 \quad (1.39)$$

denklemini ele alalım. Burada $0 \leq p(n) = \frac{3}{4} < 1$, $q(n) = \frac{1}{2}$, $\tau(n) = n-1 < n$, $\sigma(n) = n-2 < n$, ve $f(u) = u$ dur. Teorem (1.10) un tüm şartları sağlandığından denklem (1.39) un tüm çözümleri salınımlıdır ve bu çözümlerden biri $x(n) = \frac{(-1)^n}{2}$ dir.

Teorem 1.11 (H_1) ve (H_4) şartları ve (1.32) sağlansın. m çift olsun. Eğer (1.38) şartı yeterince büyük n ler ve $j \in \{1, 3, \dots, m-3\}$ için sağlanıyor ve

$$f \left(\frac{(\sigma(n)^{(m-2)})}{(m-1)!} \right) f(1-p(\sigma(n))) \left(\sum_{r=n_0}^{\infty} q(r) \right) = \infty$$

ise bu durumda denklem (1.31) in tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 1.10

$$\Delta^4 \left[x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) \right] + 8(n+2)x(n-1) = 0 \quad (1.40)$$

4. dereceden denklemini ele alalım. Burada $0 \leq p(n) = \frac{1}{2} < 1$, $q(n) = 8(n+2)$, $\tau(n) = n-1 < n$, $\sigma(n) = n-1 < n$, ve $f(u) = \frac{u}{n+2}$ dur. Teorem (1.11) in tüm şartları sağlandığından (1.40) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Örneğin $x(n) = (-1)^n$ (1.40) denkleminin salınımlı bir çözümlüdür.

Grace ve Graef (2020), çalışmalarında

$$\Delta \left((a(t)\Delta^{n-1}x(t))^\alpha \right) + q(t)x^\beta(t-m+1), t \geq t_0 \quad (1.41)$$

$n \geq 3$, denklemini

- (i) : α, β tek tamsayıların oranı ve $\alpha \geq \beta$;
- (ii) : $(a(t))$ ve $(q(t))$ $t \geq t_0$ için pozitif reel sayı dizisi;
- (iii) : $m > 1$.

şartları altında incelemişler ve aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir. Ayrıca bu çalışmalarda

$$A(v, u) = \sum_{s=u}^v \frac{1}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}, v \geq u \geq t_0$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t, t_0) < \infty \quad (K1)$$

kabul edilmiştir.

Teorem 1.12 n çift ve $m > (n-2)k+1$ olacak şekilde bir k sayısı olsun. Eğer birinci mertebeden

$$\begin{aligned} \Delta Y(t) + q(t) \left(\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \right)^\beta \left((t-m+1)^{(n-1)\beta} a^{-\frac{\beta}{\alpha}}(t-m+1) \right) \\ Y^{\frac{\beta}{\alpha}}(t-m+1) = 0, \end{aligned} \quad (1.42)$$

ve

$$\Delta Z(t) + \left(\frac{1}{a(t)} \sum_{s=t_0}^{t-1} \left(\frac{1}{2^{n-2}(n-2)!} \right)^\beta q(s) (s-m+1)^{(n-2)\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha}} Z^{\frac{\beta}{\alpha}}(t-m+1) = 0, \quad (1.43)$$

ve

$$\Delta W(t) + \frac{(k^{n-2})^{\frac{\beta}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(t)} \left(\sum_{s=t_0}^{t-1} q(s) \right)^{\frac{1}{\alpha}} W^{\frac{\beta}{\alpha}}(t-m+(n-2)k+1) = 0$$

denklemleri salınımlı ise denklem (1.41) in tüm çözümleri salınımlıdır.

Sonuç 1.1 n çift ve $m > (n-2)k+1$ olacak şekilde bir k sayısı olsun. Eğer birinci mertebeden

$$\Delta y(t) + P(t)y^{\frac{\beta}{\alpha}}(t-\tau) = 0$$

gecikmeli fark denklemi salınımlı ise (1.41) denklemi salınımlıdır.

Sonuç 1.2 n çift ve $m > (n-2)k+1$ olacak şekilde bir k sayısı olsun. Eğer $\beta = \alpha$ için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=t-m+1}^{t-1} P(s) > \frac{(\tau-1)^{\tau-1}}{\tau^\tau}$$

veya $\beta < \alpha$ için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=t-m+1}^{t-1} P(s) = \infty$$

ise denklem (1.41) salınımlıdır.

Teorem 1.13 n tek ve $m > (n-1)k+1$ olacak şekilde bir k sayısı olsun. Eğer birinci mertebeden (1.42), (1.43) ve

$$\Delta W(t) + q(t) \left(\frac{k^{n-1}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(t)} \right)^\beta W^{\frac{\beta}{\alpha}}(t-m+(n-1)k+1) = 0 \quad (1.44)$$

denklemleri salınımlı ise denklem (1.41) salınımlıdır.

Şimdi aşağıdaki iki sonuç için

$$\begin{aligned} P^*(t) \leq \min \left\{ q(t) \left(\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \right)^\beta \left((t-m+1)^{(n-1)\beta} a^{-\frac{\beta}{\alpha}}(t-m+1) \right), \right. \\ \left. \left(\frac{1}{a(t)} \sum_{s=t_0}^{t-1} \left(\frac{1}{2^{n-2}(n-2)!} \right)^\beta q(s) (s-m+1)^{(n-2)\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{(k^{n-1})^{\frac{\beta}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(t)} \left(\sum_{s=t_0}^{t-1} q(s) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \end{aligned}$$

ve $\tau^* = \max \{m - (n - 1)k - 1, m - 1\}$ kabul edelim.

Sonuç 1.3 n tek ve $m > (n - 1)k + 1$ olacak şekilde bir k sayısı olsun. Eğer birinci mertebeden

$$\Delta y(t) + P^*(t)y_{\alpha}^{\beta}(t - \tau^*) = 0$$

gecikmeli fark denklemi salınımlı ise (1.41) denklemi salınımlıdır.

Sonuç 1.4 n tek ve $m > (n - 1)k + 1$ olacak şekilde bir k sayısı olsun. Eğer $\beta = \alpha$ için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=t-m+1}^{t-1} P^*(s) > \frac{(\tau^* - 1)^{\tau^* - 1}}{\tau^{*\tau^*}}$$

veya $\beta < \alpha$ için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=t-m+1}^{t-1} P^*(s) = \infty$$

ise denklem (1.41) salınımlıdır. Ayrıca ilk başta kabul edilen (K1) şartını revize ederek

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t, t_0) = \infty \quad (K2)$$

olarak aşağıdaki iki sonucu da ortaya koymuşlardır.

Teorem 1.14 n çift ve $m > (n - 2)k + 1$ olacak şekilde bir k sayısı olsun ayrıca (K2) şartı da sağlansın. Eğer birinci dereceden (1.42) denklemi salınımlı ise denklem (1.41) salınımlıdır.

Teorem 1.15 n tek ve $m > (n - 1)k + 1$ olacak şekilde bir k sayısı olsun ayrıca (K2) şartı da sağlansın. Eğer (1.42) ve (1.44) denklemleri salınımlı ise bu durumda denklem (1.41) salınımlıdır.

Yukarıda verilen örnek çalışmalar ve literatürde var olan çalışmalara bakıldığında (1.1) denkleminin özel bazı durumları ele alınmış ve çözümlerinin davranışları bazı özel şartlara bağlı olarak verilmiştir. Bu tez çalışmasında ise (1.1) denklemi en genel halde çalışılmış ve çözümlerinin davranışları ile ilgili daha önce literatürde olmayan en genel kapsamlı sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde fark denklemleri ile ilgili genel bilgiler ve literatürde yapılan çalışmalardan bazıları sunulmuş, ayrıca son yıllarda tez çalışmamızın asıl konusu olan (1.1) denkleminin çözümlerinin davranışı ile ilgili

yapılmış olan bazı çalışmalar sonuçları ile birlikte verilmiştir. İkinci bölümde fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve teoremler hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde ise (1.1) denklemi literatürde daha önce incelenen koşullardan daha geniş bir şekilde ele alınmış ve çözümlerinin davranışı ile ilgili tamamen orijinal ve literatürde olmayan yeni sonuçlar verilmiştir.



2 TEMEL TANIMLAR ve KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmamızda ihtiyaç duyacağımız, bilinen bazı tanım, teorem ve lemmaları vereceğiz. İlk önce fark analizi ve fark denklemleri tanıtılacak ve daha sonra fark denklemlerinin çözümleri hakkında bilgiler verilecektir. Daha sonra fark denklemlerinin salınımlılığı hakkında bilinen bazı tanım ve teoremler hatırlatılacaktır.

2.1 Fark Analizi ve Genel Tanımlar

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x(n)$ fonksiyonu için kaydırma (öteleme) operatörü

$$Ex(n) = x(n+1)$$

ve ileri fark operatörü

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

şeklinde tanımlanır (Goldberg 1958, Elaydi 1999, Agarwal 2000)

$$E^k x(n) = x(n+k)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $\Delta^k x(n)$ i hesaplamak için I özdeşlik operatörü olmak üzere, $\Delta = E - I$ ve $E = \Delta + I$ ifadelerini kullanabiliriz. O zaman,

$$\begin{aligned} \Delta^k x(n) &= (E - I)^k x(n) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} E^{k-i} x(n) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} x(n+k-i) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$E^k x(n) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Delta^{k-i} x(n)$$

olduğu görülür.

Tanım 2.1.1 $n \geq n_0$ için $\Delta f(n) = f(n)$ verilsin. Bu durumda $n \geq n_0$ için

$$\Delta^{-1} f(n) = F(n) + c$$

şeklinde ifade edilen Δ^{-1} operatörüne ters fark operatörü ve $F(n)$ fonksiyonuna da $f(n)$ ' nin ters farkı denir. Burada c keyfi sabittir.

Tanım 2.1.2. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere x_n , $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı reel (veya kompleks) değerli bir fonksiyon olsun.

$$x(n), x(n+1), \dots, x(n+k) \quad (2.1.1)$$

ifadelerini içeren bir bağıntıya (denkleme) k ncı mertebeden bir fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.3. Bir fark denkleminin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indis arasındaki fark olarak tanımlanır. Örneğin; $x(n+3) - 3x(n+2) + 7x(n+1) = 0$ denklemi ikinci mertebeden bir fark denklemdir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.4. Eğer (2.1.1) fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^k a(in)x(n+i) = b(n) \quad (2.1.2)$$

formunda verilirse k ncı mertebeden olan (2.1.1) fark denklemine lineerdir denir.

Eğer en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $b(n)$ sıfırdan farklı ise, bu durumda (2.1.2) fark denklemine homogen olmayan lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Eğer (2.1) fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^k a_{in}x(n+i) = 0 \quad (2.1.3)$$

şeklinde verilirse (2.1.3) fark denklemine homogen lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x(n)$ fonksiyonu için kaydırma (öteleme) operatörü

$$Ex(n) = x(n+1)$$

ve ileri fark operatörü

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

şeklinde tanımlanır (Goldberg 1958, Elaydi 1999, Agarwal 2000)

$$E^k x(n) = x(n+k)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $\Delta^k x(n)$ i hesaplamak için I özdeşlik operatörü olmak

üzere, $\Delta = E - I$ ve $E = \Delta + I$ ifadelerini kullanabiliriz. O zaman,

$$\begin{aligned}\Delta^k x(n) &= (E - I)^k x(n) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} E^{k-i} x(n) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} x(n + k - i)\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$E^k x(n) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Delta^{k-i} x(n)$$

olduğu görülür.

Tanım 2.1.1 $n \geq n_0$ için $\Delta f(n) = f(n)$ verilsin. Bu durumda $n \geq n_0$ için

$$\Delta^{-1} f(n) = F(n) + c$$

şeklinde ifade edilen Δ^{-1} operatörüne ters fark operatörü ve $F(n)$ fonksiyonuna da $f(n)$ ' nin ters farkı denir. Burada c keyfi sabittir.

Tanım 2.1.2. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere x_n , $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı reel (veya kompleks) değerli bir fonksiyon olsun.

$$x(n), x(n+1), \dots, x(n+k) \quad (2.1.1)$$

ifadelerini içeren bir bağıntıya (denkleme) k ıncı mertebeden bir fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.3. Bir fark denkleminin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indis arasındaki fark olarak tanımlanır. Örneğin; $x(n+3) - 3x(n+2) + 7x(n+1) = 0$ denklemi ikinci mertebeden bir fark denklemidir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.4. Eğer (2.1.1) fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^k a(in)x(n+i) = b(n) \quad (2.1.2)$$

formunda verilirse k ıncı mertebeden olan (2.1.1) fark denkleminde lineerdir denir.

Eğer en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $b(n)$ sıfırdan farklı ise, bu durumda (2.1.2) fark denkleminde homogen olmayan lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Eğer (2.1) fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^k a_{in}x(n+i) = 0 \quad (2.1.3)$$

şeklinde verilirse (2.1.3) fark denkleminde homogen lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

2.2 Lineer Fark Denklemleri Teorisi

Bu kısımda k ıncı mertebeden lineer fark denklemleri hakkında bilinen bazı tanım ve teoremler verilecektir. k ıncı mertebeden, homogen olmayan, lineer fark denklemini

$$x(n+k) + p(in)x(n+k-1) + \dots + p(kn)x(n) = g(n) \quad (2.2.1)$$

formunda yazabiliriz. Burada $p(in)$ ve $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $\forall n \geq n_0$ için $p(kn) \neq 0$ dır.

Teorem 2.2.1. Aşağıdaki başlangıç değer problemi bir tek $x(n)$ çözümüne sahiptir

$$x(n+k) + p(in)x(n+k-1) + \dots + p(kn)x(n) = g(n)$$

$$x(n_0) = a_0, x(n_0+1) = a_1, \dots, x(n_0+k-1) = a_{k-1}$$

(Elaydi 1999).

Şimdi (2.2.1) fark denkleminin

$$x(n+k) + p(1n)x(n+k-1) + \dots + p(kn)x(n) = 0 \quad (2.2.2)$$

şeklindeki lineer, homogen şeklini yazalım ve aşağıdaki tanımları hatırlatalım.

Tanım 2.2.1. Eğer $\forall n \geq n_0$ için

$$a_1 f(1n) + a_2 f(2n) + \dots + a_r f(m) = 0$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \dots, a_r$ sabitleri var ise $n \geq n_0$ için $f(1n), f(2n), \dots, f(m)$ fonksiyonlarına lineer bağımlıdır denir.

Eğer $\forall n \geq n_0$ için

$$a_1 f(1n) + a_2 f(2n) + \dots + a_r f(m) = 0$$

eşitliği sadece $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$ durumunda sağlanıyorsa, $n \geq n_0$ için $f(1n), f(2n), \dots, f(m)$ fonksiyonlarına lineer bağımsızdır denir (Elaydi 1999, Lakshmikantham ve Trigiante 1988).

Tanım 2.2.2. (2.2.2) fark denkleminin k tane lineer bağımsız çözümlerinin kümesine, temel çözümler kümesi denir (Elaydi 1999, Lakshmikantham ve Trigiante 1988).

Tanım 2.2.3. $x(1n), x(2n), \dots, x(km)$ çözümlerinin Casoration determinanı veya kısaca Casoration, $C(n)$ ile gösterilir ve

$$C(n) = \det \begin{pmatrix} x(1n) & x(2n) & \dots & x(m) \\ x(1(n+1)) & x(2(n+1)) & \dots & x(r(n+1)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(1(n+r-1)) & x(2(n+r-1)) & \dots & x(r(n+r-1)) \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

ile verilir. Casoration determinanı diferensiyel denklemlerdeki wronskiye'nin diskret benzeridir (Elaydi 1999, Kelley ve Peterson 1991).

Lemma 2.2.1. (Abel Lemması) $x(1n), x(2n), \dots, x(km)$ çözümleri (2.2.2) fark denkleminin çözümleri olsun. Bu durumda Casoration determinanı $n \geq n_0$ için

$$C_n = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p(ki) \right) C(n_0) \quad (2.2.4)$$

ile verilir (Elaydi 1999).

Teorem 2.2.2. (2.2.2) fark denkleminin $x(1n), x(2n), \dots, x(km)$ çözümlerinin, temel çözümler kümesi olması için gerek ve yeter şart, $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ için $C(n_0) \neq 0$ olmasıdır (Elaydi 1999).

Tanım 2.2.4. $\{x(1n), x(2n), \dots, x(km)\}$, (2.2.2) fark denkleminin temel çözümler kümesi olsun. Bu durumda a_i ler keyfi sabitler olmak üzere (2.2.2) fark denkleminin genel çözümü $x(n) = \sum_{i=1}^k a_i x(in)$ ile verilir (Elaydi 1999).

2.3 Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Salınımlılığı

Bu kısımda fark denklemlerinin ve fark denklem sistemlerinin salınımlılığı ile ilgili bilinen bazı tanım ve teoremler verilecek.

Tanım 2.3.1. Eğer her pozitif N tamsayısı ve $n \geq N$ için $x(n)x(n+1) \leq 0$ ise $x(n)$ aşıkı olmayan çözümlüne sıfır etrafında salınımlıdır denir. Aksi halde $x(n)$ çözümlüne salınımlı olmayan çözümler denir. Başka bir şekilde ifade edersek, eğer bir $x(n)$ çözümü belli bir yerden (n değeriinden itibaren) sonra sadece pozitif ya da sadece negatif değilse sıfır etrafında salınımlıdır denir (Agarwal vd 2000, Györi ve Ladas 1991, Elaydi 1999).

Tanım 2.3.2. k ıncı mertebeden bir fark denklem sisteminin bir $(x(n))$ çözümü $x(n) = [x^1(n), x^2(n), \dots, x^r(n)]^T$ olsun. Eğer her bir $(x^i(n))$ bileşeni salınımlı ise $(x(n))$ çözümüne salınımlıdır denir. Diğer durumda yani, bir $(x^i(n))$ bileşeni belli bir yerden sonra pozitif ya da negatif ise $(x(n))$ çözümüne salınımlı olmayan bir çözüm denir. Burada $n = 0, 1, 2, \dots$ için $x_n \in \mathbb{R}^r$ dir (Györi ve Ladas 1991).

Teorem 2.3.1. $k, l \in \mathbb{N}$ ve $j = -k, \dots, l$ için $p_j \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$x(n+1) - x(n) + \sum_{j=-k}^l p_j x(n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.1)$$

fark denklemini gözönüne alalım. Bu durumda aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

(i) (2.3.1) fark denkleminin her çözümü salınımlıdır.

(ii) (2.3.1) fark denklemine ait

$$\lambda - 1 + \sum_{j=-k}^l p_j \lambda^j = 0$$

karakteristik denkleminin pozitif kökü yoktur (Györi ve Ladas 1991).

Teorem 2.3.2. $p \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için,

$$x(n+1) - x(n) + px(n-k) = 0 \quad (2.3.2)$$

şeklindeki $(k+1)$ inci mertebeden otonom fark denklemini gözönüne alalım. Bu durumda (2.3.2) fark denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadelerden birinin sağlanmasıdır:

(i) $k = -1$ ise $p \leq -1$;

(ii) $k = 0$ ise $p \geq 1$;

(iii) $k \in \{\dots, -3, -2\} \cup \{1, 2, \dots\}$ ise $p > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$

(Györi ve Ladas 1991, Ladas vd. 1989).

Teorem 2.3.3. $p(n)$ negatif olmayan reel terimli dizi ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$x(n+1) - x(n) + p(n)x(n-k) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.3)$$

birinci mertebeden, lineer, değişken katsayılı gecikmeli fark denklemini ele alalım. Kabul edelim ki

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} p(n) = c > 0$$

ve

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} p(n) > 1 - c$$

olsun.

- (i) $x(n+1) - x(n) + p(n)x(n-k) \leq 0$ eşitsizliği pozitif çözümlere sahip değildir.
- (ii) $x(n+1) - x(n) + p(n)x(n-k) \geq 0$ eşitsizliği negatif çözümlere sahip değildir.
- (iii) (2.3.3) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Erbe ve Zhang 1989).

Teorem 2.3.4. $p(n) \geq 0$ ve

$$\sup p(n) < \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

olsun. Bu durumda (2.3.3) denkleminin en az bir tane salınımlı olmayan çözümü vardır (Erbe ve Zhang 1989).

Teorem 2.3.5 p_n negatif olmayan reel terimli dizi $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$x(n+1) - x(n) + p(n)f(x(n-k)) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.4)$$

denklemini ele alalım.

- (i) $xf(x) > 0, \quad x \neq 0$
- (ii) $\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = M, \quad 0 < M < +\infty$
- (iii) $cM > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}, \quad k \geq 1, \quad c = \liminf_{n \rightarrow \infty} p(n) > 0$. şartları sağlansın. Bu durumda (2.3.4) denkleminin her çözümü salınımlıdır. (Erbe ve Zhang 1989).

Teorem 2.3.6 $p(n) \geq 0$ ve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve azalmayan fonksiyon olsun.

- (i) $xf(x) > 0, \quad x \neq 0$
- (ii) $\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = M, \quad 0 < M < +\infty$ şartları sağlansın.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n-m}^n p(k) > \frac{1}{M}$$

ise (2.3.4) denkleminin her çözümü salınımlıdır. (Erbe ve Zhang 1989).

Teorem 2.3.7. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$x(n+1) - x(n) + p(n)x^\alpha(n-k) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.5)$$

lineer olmayan gecikmeli fark denkleminin her çözümü salınımlıdır ancak ve ancak

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = \infty \quad (2.3.6)$$

dur (Tang ve Liu 2001).

Teorem 2.3.8. Kabul edelim ki $\alpha > 1$ olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar sağlanır.

(i) Eğer bir $\lambda > k^{-1} \ln \alpha$ varsa öyle ki

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} [p(n) \exp(-e^{\lambda n})] > 0 \quad (2.3.7)$$

ise bu durumda (2.3.5) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

(ii) Eğer

$$(p(n), p(n+1), \dots, p(n+k-1)) \neq 0$$

sağlanır ve bir $\mu < k^{-1} \ln \alpha$ varsa öyle ki

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} [p(n) \exp(-e^{\mu n})] < \infty \quad (2.3.8)$$

ise bu durumda (2.3.5) denklemi belirli bir n den sonra pozitif çözüme sahiptir (Tang ve Liu 2001).

Teorem 2.3.9. Aşağıdaki birinci mertebeden neutral fark denklemini ele alalım.

$$\Delta(y(n) + h(n)y(n-k)) + \delta q(n)y^\alpha(n-l) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.9)$$

Burada $(h(n))$ ve $(q(n))$ birer pozitif reel sayı dizisi, k bir pozitif tamsayı ve l de herhangi bir tamsayı olmak üzere

(i) $\delta = +1$, $0 < \alpha < 1$ ve $l > k$;

(ii) $\delta = -1$, $\alpha < 1$ ve l bir negatif tamsayı

şartlar altında

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \min \left\{ \frac{q(n)}{1 + h^\alpha(n-l+k)}, \frac{q(n-k)}{1 + h^\alpha(n-l)} \right\} = \infty$$

ise (2.3.9) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Thandapani vd. 2002).

Teorem 2.3.10. $(q(n))$ bir pozitif reel sayı dizisi ve l de pozitif bir tamsayı olmak üzere eğer

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=n-l}^{n-1} q(s) > \left(\frac{l}{l+1} \right)^{l+1}$$

ise

$$\Delta v(n) + q(n)v(n+l) \geq 0$$

eşitsizliği belirli bir n den sonra pozitif çözüme sahip değildir (Thandapani vd. 2002).

Teorem 2.3.11. $(q(n))$ bir pozitif reel sayı dizisi ve l de pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=n}^{n+l-1} q(s) > \left(\frac{l}{l+1} \right)^{l+1}$$

ise

$$\Delta v(n) - q(n)v(n+l) \geq 0$$

eşitsizliği belirli bir n den sonra pozitif çözüme sahip değildir (Thandapani vd. 2002).

Teorem 2.3.12. $(q(n))$ bir pozitif reel sayı dizisi ve l de pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} p(i) > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \quad (2.3.10)$$

ise

$$x(n+1) - x(n) + p(n)x(n-k) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.11)$$

fark denkleminin her çözümü salınımlıdır (Ladas vd. 1989).

Teorem 2.3.13. Kabul edelim ki $0 \leq p < 1$ ve $0 < \alpha < 1$ olsun. Bu durumda

$$\Delta(x(n) - px(n-l)) + q(n)x^\alpha(n-k) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

denkleminin her çözümü salınımlıdır ancak ve ancak

$$\sum_{n=0}^{\infty} q(n) = \infty$$

dur (Zhang 2002).

Teorem 2.3.14 $\tau(n) \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ ve $\tau(n)$ azalmayan, $(q(n))$ negatif olmayan reel sayı dizisi ve özdeş olarak sıfır olmasın, $h, f : R \rightarrow R$ sürekli ve azalmayan fonksiyonlar ve $uf(u) > 0, u \neq 0$ sağlansın. Ayrıca

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)} = M. \quad (2.3.12)$$

olsun. Eğer

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} p(j) > \frac{M}{e}, \quad 0 \leq M < \infty, \quad (2.3.13)$$

veya

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=\tau(n)}^n p(j) > M, \quad 0 < M < \infty, \quad (2.3.14)$$

ise

$$\Delta x(n) + q(n)f(x(\tau(n))) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.15)$$

denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Öcalan ve Yıldız 2018).

Teorem 2.3.15

$$\Delta^m(x(n) - x(n - r)) + q(n)f(x(n - g)) = 0, m \geq 1. \quad (2.3.16)$$

denklemini aşağıdaki şartlar altında ele alalım.

$(H_1) : (q(n))$ negatif olmayan reel sayı dizisi ve özdeş olarak sıfır olmasın;

$(H_2) : f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve azalmayan bir fonksiyon ve $uf(u) > 0, u \neq 0, xy > 0$ için $-f(-xy) \geq f(xy) \geq f(x)f(y)$;

$(H_3) : g, r \in \mathbb{N}^+$

m tek olduğunda eğer

$$\sum_{k=0}^{\infty} q(k) < \infty$$

ve

$$Q_n = \sum_{k=n}^{\infty} q(k)$$

olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} q(n)f(nQ(n)) = \infty$$

ise bu durumda (2.3.16) denklemi salınımlıdır (Agarwal vd. 2000).

Teorem 2.3.16 Birinci mertebeden

$$\Delta \omega(n) + f\left(\frac{2^{2-2m}}{(m-1)!}\right)^{\beta} q(n)f((n-g)^{m-1})f(\omega(n-g)) = 0$$

denklemini salınımlı ve

$$\Delta^m x(n) + (-1)^{m+1\beta} q(n)f(x(n-g)) = 0$$

denkleminin tüm sınırlı çözümleri salınımlı ise, (2.3.16) denklemi salınımlıdır (Agarwal vd. 2000).

Teorem 2.3.17

$$\Delta^m(x(n) - P(n)x(n-k)) + q(n)f(x(n-l)) = 0, m \geq 1. \quad (2.3.17)$$

denklemini ele alalım. $(q(n))$ negatif olmayan reel sayı dizisi ve özdeş olarak sıfır olmasın, $(p(n))$ bir reel sayı dizisi, k ve l negatif olmayan tamsayılar ve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve azalmayan bir fonksiyon ve $uf(u) > 0, u \neq 0, xy > 0$ için $-f(-xy) \geq f(xy) \geq Kf(x)f(y)$ olacak şekilde K pozitif tamsayı olmak üzere bir f fonksiyonu var olsun. Ayrıca aşağıdaki şartları verelim.

$$(H_1) : 0 \leq p(n) < 1;$$

$$(H_2) : 0 \leq p(n) \leq P_1 < 1, P_1 \text{ sabit. ;}$$

$$(H_3) : -1 < -P_2 \leq p(n) \leq 0, P_2 > 0 \text{ sabit}$$

$$(H_4) : \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{s=n-l}^{n-1} q(s) F \left((1 - p(s-l)) \left(\frac{s-l}{2^{m-1}} \right)^{m-1} \right) \right] > \left(\frac{l}{l+1} \right)^{l+1} \frac{1}{K^2 \mu F(1/(1-m)!)};$$

$$(H_5) : \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{s=n-l}^{n-1} q(s) F \left(\left(\frac{s-l}{2^{m-1}} \right)^{m-1} \right) \right] > \left(\frac{l}{l+1} \right)^{l+1} \frac{1}{K^2 \mu F(M)} \quad M \in (0, 1);$$

(a) : m çift olduğunda (H_1) ve (H_4) sağlanırsa (2.3.17) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

(b) : m tek olduğunda (H_2) ve (H_5) sağlanırsa (2.3.17) denkleminin tüm çözümleri ya salınımlıdır ya da sıfıra yakınsar.

Teorem 2.3.18 (H_3) ve (H_5) sağlanırsa (2.3.17) denkleminin tüm çözümleri ya salınımlıdır ya da sıfıra yakınsar (Agarwal vd. 1996).

3 YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN KARMA NEUTRAL FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

3.1 Teorem İspatlarında Kullanılacak Bazı Lemmalar

Çalışmamızın bu bölümünde

$$\Delta^m [x(n) + p(n)h(x(\sigma(n)))] + q(n)f(x(\tau(n))) = 0, n \in N = \{0, 1, \dots\} \quad (3.1.1)$$

$(p(n))$ ve $(q(n))$ negatif olmayan reel sayı dizileri, $h, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli azalmayan fonksiyonlar $u \neq 0$ için $uh(u) > 0$, $uf(u) > 0$, $(\sigma(n))$ ve $(\tau(n))$ tamsayı dizileri ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n) = \infty \quad (3.1.2)$$

olmak üzere yüksek mertebeden lineer olmayan karma neutral fark denkleminin çözümlerinin kalitatif incelemesi aşağıdaki şartlar geçerli olmak üzere yapılacaktır.

$(H_1) : (p(n))$ reel sayı dizisi $p(n) \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

$(H_2) : (q(n))$ negatif olmayan reel sayı dizisi ve özdeş olarak sıfır olmasın.

$(H_3) : h, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve azalmayan fonksiyonlar $uf(u) > 0$, $uh(u) > 0$ $u \neq 0$ için.

Bu bölümde $p(n)$ ve $q(n)$ katsayılarını literatürde daha önce incelenen koşullardan daha geniş olarak ele alacağız ve (3.1.1) denkleminin çözümlerinin salımlılığı ile ilgili farklı sonuçlar ortaya koyacağız. Ayrıca burada elde edilen sonuçlar $h(x) = x$ ve $f(x) = x$ için tamamen yenidir. Elde edilen sonuçların daha iyi anlaşılabilmesi için bazı lemmalara ihtiyaç vardır. Önce lemmaları vereceğiz ardından (3.1.1) denkleminin m çift ve m tek olduğu durumları ayrı ayrı inceleyeceğiz. Ayrıca $p(n)$ ve $q(n)$ dizilerinin farklı durumları için de literatürde olmayan yeni sonuçlar elde edeceğiz.

Lemma 3.1.1 (Ayrık Kneser Teoremi) $z(n)$ $n \geq a$ için tanımlı ve $z(n) > 0$, $\Delta^m z(n)$ $n \geq a$ için sabit işaretli ve özdeş olarak sıfır olmasın. $0 \leq j \leq m$ için $(m+j)$ tek olduğunda $\Delta^m z(n) \leq 0$ ve $(m+j)$ çift olduğunda $\Delta^m z(n) \geq 0$ olacak şekilde öyle bir j tamsayısı bulunabilir ki

$$\text{her } n \geq a, \text{ için } j \leq m-1 \text{ olduğunda } (-1)^{j+i} \Delta^i z(n) > 0, j \leq i \leq m-1,$$

ve

yeterince büyük $n \geq a$ için $j \geq 1$ olduğunda $\Delta^i z(n) > 0$, $1 \leq i \leq j - 1$.

dir.

Lemma 3.1.2 $z(n)$ $n \geq a$ için tanımlı ve $z(n) > 0$, $\Delta^m z(n)$ $n \geq a$ için sabit işaretli ve özdeş olarak sıfır olmasın ve sınırlı olsun. Bu durumda yeterince büyük $n \geq a$ için $(-1)^{i+1} \Delta^{m-i} z(n) > 0$, ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^i z(n) = 0, \quad 1 \leq i \leq m - 1.$$

dir.

Lemma 3.1.3 $(q(n))$ negatif olmayan reel sayı dizisi $(\tau(n))$ azalmayan tamsayı dizisi ve $\tau(n) \leq n$, $f : R \rightarrow R$ sürekli ve azalmayan fonksiyon ve $uf(u) > 0$, $u \neq 0$ olsun. Eğer

$$\Delta y(n) + q(n)f(y(\tau(n))) \leq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

birinci dereceden gecikmeli eşitsizliği pozitif çözümlere sahip ise

$$\Delta y(n) + q(n)f(y(\tau(n))) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

birinci dereceden gecikmeli fark denklemi de pozitif çözümlere sahiptir.

3.2 (3.1.1) Denkleminde m Çift Olması Durumunda Salınımlılık Şartları

Bu bölümde m çift olduğu durumda (H_1) -(H_3) şartları altında (3.1.1) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili yeni bir sonuç elde edeceğiz. Aşağıda vereceğimiz teorem m 'nin çift olduğu durumda literatürde bugüne kadar elde edilmiş en kapsamlı sonuçtur.

Teorem 3.2.1 m çift olsun. Kabul edelim $\sigma(n)$ ve $\tau(n)$ ileri veya geri argümentler olsun ve (3.1.2), (H_1) -(H_3) sağlansın. Bu durumda (3.1.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat. $x(n) > 0$ için $(x(n))$ (3.1.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun.

$$z(n) = x(n) + p(n)h(x(\sigma(n))). \quad (3.2.1)$$

yazalım. Buradan $z(n) \geq x(n) > 0$ ve

$$\Delta^m z(n) = -q(n)f(x(\tau(n))) \leq 0, \quad n \geq n_0. \quad (3.2.2)$$

olur. Ayrıca Lemma (3.1.1) den biliyoruz ki $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$ için $\Delta^i z(n)$ sabit işaretli ve $\Delta^{m-1} z(n) > 0$ artmayandır. $\Delta z(n) < 0$ veya $\Delta z(n) > 0$ olmak üzere iki durum söz konusudur. Biz burada $\Delta z(n) < 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. $\Delta z(n) > 0$ olduğunu düşünelim. $\lim_{n \rightarrow \infty} z(n) = a$ $0 < a \leq \infty$ olsun. (3.1.1) denkleminde her iki tarafın $n_1 \geq n_0$ ' dan N ' ye m kez toplamını alırsak

$$z(N+m) - z(n_1) + \sum_{j_1=n_1}^N \sum_{j_2=j_1}^N \cdots \sum_{j_m=j_{m-1}}^N q(j_m)f(x(\tau(j_m))) = 0. \quad (3.2.3)$$

elde ederiz. Burada $N \rightarrow \infty$ için (3.2.3) te

$$a - z(n_1) + \sum_{j_1=n_1}^{\infty} \sum_{j_2=j_1}^{\infty} \cdots \sum_{j_m=j_{m-1}}^{\infty} q(j_m)f(x(\tau(j_m))) = 0. \quad (3.2.4)$$

olur. Burada $\Delta z(n) > 0$, $a > z(n_1)$, $f(x) > 0$ olduğundan ve (H_2) şartını göz önüne aldığımızda, kolayca görülebilir ki bu durum (3.2.4) denkleminin sıfıra eşit olması ile çelişir. Buna göre $\Delta z(n) < 0$ dır. $\Delta z(n) < 0$ olduğundan Lemma (3.1.1) den dolayı $j = 0$ olmak zorundadır. Diğer taraftan yine Lemma (3.1.1) den $\Delta^m z(n) \leq 0$ için $(m+j)$ nin tek olduğunu biliyoruz ki bu durum da $j = 0$ için m nin çift olması ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.2.1 Aşağıdaki dördüncü dereceden fark denklemini ele alalım.

$$\Delta^4 \left[x(n) + 2nx^{\frac{1}{3}}(n+1) \right] + \frac{n}{n+1} x^{\frac{5}{3}}(n-3) = 0, \quad n \geq 0. \quad (3.2.5)$$

Literatürde daha önce yapılmış olan çalışmalarda bu denklemin çözümlerinin salınımlı olup olmadığını söyleyebilecek herhangi bir makale yoktur. Ancak (3.2.5) denklemini Teorem (4.2.1) in tüm şartlarını sağladığından tüm çözümleri salınımlıdır.

3.3 (3.1.1) Denkleminde m nin Tek Olması Durumunda Salınımlılık Şartları

Bu bölümde m nin tek olduğu durumda $(p(n))$ ve $(q(n))$ nin farklı durumları için (3.1.1) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili yeni sonuçlar ortaya koyacağız.

Teorem 3.3.1 m tek olsun. $\sigma(n)$ ve $\tau(n)$ ileri veya geri argümentler olmak üzere (3.1.2), (H_1) - (H_3) sağlansın ve kabul edelim ki $\limsup_{n \rightarrow \infty} q(n) > 0$ olsun. Bu durumda (3.1.1) denkleminin salınımlı olmayan her çözümü $n \rightarrow \infty$ için sifıra yakınsar.

İspat. $(x(n))$ (3.1.1) denkleminin salınımlı olmayan ve aynı zamanda $n \rightarrow \infty$ için sifıra yakınsamayan bir çözümü olsun

$$z(n) = x(n) + p(n)h(x(\sigma(n))). \quad (3.3.1)$$

yazalım. Buradan $z(n) \geq x(n) > 0$ ve

$$\Delta^m z(n) = -q(n)f(x(\tau(n))) \leq 0, \quad n \geq n_0. \quad (3.3.2)$$

olur. Ayrıca Lemma (3.1.1) den biliyoruz ki $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$ için $\Delta^i z(n)$ sabit işaretli ve $\Delta^{m-1} z(n) > 0$ artmayandır. (3.3.2) de her tarafın $n_1 \geq n_0$ dan sonsuza toplamı alınırsa

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \Delta^m z(n) = - \sum_{n=n_1}^{\infty} q(n)f(x(\tau(n))),$$

buradan

$$0 < \Delta^{m-1} z(n_1) - L = \sum_{n=n_1}^{\infty} q(n)f(x(\tau(n))),$$

olur. Burada $0 \leq L = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{m-1} z(n) < \infty$ ve $\sum_{n=n_1}^{\infty} q(n)f(x(\tau(n))) < \infty$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} q(n)f(x(\tau(n))) = 0$ olur ki burada da $\limsup_{n \rightarrow \infty} q(n) > 0$ olduğu göz önüne alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x(\tau(n))) = 0$ elde edilir. Ayrıca f hakkındaki kabulümüzden $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$ olduğu bulunur ki bu da $n \rightarrow \infty$ için $x(n)$ in sifıra yakınsamayan bir çözüm olması ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.2 m tek olsun. $\sigma(n)$ ve $\tau(n)$ ileri veya geri argümentler olmak üzere (3.1.2), (H_1) - (H_3) sağlansın, eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} c(n) = 0$ olacak şekilde bir $(c(n))$, dizisi var ve

$$\Delta y(n) + q(n)f[c(\tau(n))y(\tau(n))] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.3.3)$$

denkleminin tüm çözümleri salınımlı ise (3.1.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat. $(x(n))$ (3.1.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü ve $x(n) > 0$ olsun.

$$z(n) = x(n) + p(n)h(x(\sigma(n))). \quad (3.3.4)$$

yazalım. Buradan $z(n) \geq x(n) > 0$ ve

$$\Delta^m z(n) = -q(n)f(x(\tau(n))) \leq 0, \quad n \geq n_0 \quad (3.3.5)$$

olur. Ayrıca Lemma (3.1.1) den biliyoruz ki $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$ için $\Delta^i z(n)$ sabit işaretli ve $\Delta^{m-1} z(n) > 0$ artmayandır. $(\Delta^{m-1} z(n))$ sınırlı olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} c(n) = 0$ olacak şekilde öyle bir $(c(n))$ dizisi bulabiliriz ki

$$x(n) \geq c(n)\Delta^{m-1} z(n), \quad n \geq n_1 \geq n_0. \quad (3.3.6)$$

Böylece (3.1.1), (3.3.4), (3.3.6) dan ve f azalmayan olduğundan

$$\Delta^m z(n) + q(n)f[c(\tau(n))(\Delta^{m-1} z(\tau(n)))] \leq 0, \quad n \geq n_1. \quad (3.3.7)$$

elde ederiz. Şimdi $y(n) = \Delta^{m-1} z(n) > 0$ alalım. Buna göre (3.3.7) den

$$\Delta y(n) + q(n)f(c(\tau(n))y(\tau(n))) \leq 0, \quad n \geq n_1, \quad (3.3.8)$$

elde ederiz. Böylece (3.3.8) eşitsizliğinin pozitif çözümlere sahip olduğunu bulmuş oluruz. Lemma (3.1.3) den biliyoruzki (3.3.8) eşitsizliğine karşılık gelen denklem de pozitif çözümlere sahiptir. Bu da (3.3.3) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması ile çelişir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.3 m tek olsun. $\sigma(n)$ ve $\tau(n)$ ileri veya geri argümentler olmak üzere (3.1.2), (H_1) - (H_3) sağlansın ve kabul edelim ki $\lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = 0$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} p(n) = \infty$ olsun. Bu durumda (3.1.1) denkleminin $n \rightarrow \infty$ için sifıra yakınsamayan tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat. $(x(n))$ (3.1.1) denkleminin salınımlı olmayan ve aynı zamanda $n \rightarrow \infty$ için sifıra yakınsamayan bir çözümü ve $x(n) > 0$ olsun.

$$z(n) = x(n) + p(n)h(x(\sigma(n))). \quad (3.3.9)$$

yazalım. Buradan $z(n) \geq x(n) > 0$ ve

$$\Delta^m z(n) = -q(n)f(x(\tau(n))) \leq 0, \quad n \geq n_0 \quad (3.3.10)$$

olur. Ayrıca Lemma (3.1.1) den biliyoruz ki $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$ için $\Delta^i z(n)$ sabit işaretli ve $\Delta^{m-1} z(n) > 0$ artmayandır. $\Delta z(n) < 0$ veya $\Delta z(n) > 0$ olmak üzere iki durum söz

konusudur. (3.3.9) den ve $\limsup_{n \rightarrow \infty} p(n) = \infty$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} z(n) = \infty$ ve buradan $\Delta z(n) > 0$ elde ederiz. Diğer taraftan Teorem (3.2.1) in ispatından $\Delta z(n) < 0$ olduğunu biliyoruz ki bu da $\Delta z(n) > 0$ ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.4 m tek olsun. $\sigma(n)$ ve $\tau(n)$ ileri veya geri argümentler olmak üzere (3.1.2), (H_1) -(H_3) sağlansın ve kabul edelim ki $\lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = 0$ olsun. Bu durumda (3.1.1) denkleminin sınırlı olmayan her çözümü salınımlıdır.

İspat. $(x(n))$ (3.1.1) denkleminin salınımlı ve sınırlı olmayan bir çözümü ve $x(n) > 0$ olsun.

$$z(n) = x(n) + p(n)h(x(\sigma(n))) \quad (3.3.11)$$

yazalım. Buradan $z(n) \geq x(n) > 0$ ve

$$\Delta^m z(n) = -q(n)f(x(\tau(n))) \leq 0, \quad n \geq n_0 \quad (3.3.12)$$

olur. Ayrıca Lemma (3.1.1) den biliyoruz ki $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$ için $\Delta^i z(n)$ sabit işaretli ve $\Delta^{m-1} z(n) > 0$ artmayandır. $\Delta z(n) < 0$ veya $\Delta z(n) > 0$ olmak üzere iki durum söz konusudur. (3.3.12) den ve $(x(n))$ sınırsız olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} z(n) = \infty$ olur ve buradan da $\Delta z(n) > 0$ elde edilir ancak Teorem (3.2.1) in ispatından $\Delta z(n) < 0$ olduğunu biliyoruz ki bu da $\Delta z(n) > 0$ ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.5 m tek, $\sigma(n)$ ileri veya geri argüment olmak üzere $\tau(n) \leq n$ ve azalmayan olsun. (3.1.2), (H_1) -(H_3) sağlansın ve kabul edelim ki $\lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = 0$ ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} p(n) < \infty$ olsun. Eğer

$$\Delta y(n) + q(n)f(y(\tau(n))) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.13)$$

denkleminin tüm çözümleri salınımlı ise, bu durumda (3.1.1) denkleminin sınırlı ve $n \rightarrow \infty$ için sıfıra yakınsamayan her çözümü salınımlıdır.

İspat. $(x(n))$ (3.1.1) denkleminin sınırlı ancak salınımlı olmayan ve $n \rightarrow \infty$ için sıfıra yakınsamayan bir çözümü $x(n) > 0$ olsun.

$$z(n) = x(n) + p(n)h(x(\sigma(n))) \quad (3.3.14)$$

yazalım. Buradan $z(n) \geq x(n) > 0$ ve

$$\Delta^m z(n) = -q(n)f(x(\tau(n))) \leq 0, \quad n \geq n_0 \quad (3.3.15)$$

olur. Ayrıca Lemma (3.1.1) den biliyoruz ki $i = 1, 2, 3, \dots, m - 1$ için $\Delta^i z(n)$ sabit işaretli ve $\Delta^{m-1} z(n) > 0$ artmayandır. $\Delta z(n) < 0$ veya $\Delta z(n) > 0$ olmak üzere iki durum söz konusudur. Dahası Teorem (3.2.1) in ispatından $\Delta z(n) < 0$ olduğunu ve $(z(n))$ in sınırlı olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan $(x(n))$ sınırlı ve sifıra yakınsamayan bir çözüm olduğundan $0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} x(n) < \infty$ olur. Ayrıca $\liminf_{n \rightarrow \infty} p(n) < \infty$ olduğundan $0 < a < \infty$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = a$ elde ederiz. Lemma (3.1.2) den biliyoruz ki $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{m-1} z(n) = 0$,’ dir. $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = a$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{m-1} z(n) = 0$ olduğundan

$$x(n) \geq \Delta^{m-1} z(n), \quad n \geq n_1 \geq n_0 \quad (3.3.16)$$

yazabiliriz ve burada (3.1.1), (3.3.14) ve (3.3.16) kullanılarak f azalmayan olduğundan

$$\Delta^m z(n) + q(n)f[\Delta^{m-1} z(\tau(n))] \leq 0, \quad n \geq n_1 \quad (3.3.17)$$

olur. Burada $y(n) = \Delta^{m-1} z(n) > 0$ yazarsak

$$\Delta y(n) + q(n)f(y(\tau(n))) \leq 0, \quad n \geq n_1 \quad (3.3.18)$$

elde ederiz. Böylece (3.3.18) eşitsizliğinin pozitif çözümlere sahip olduğunu bulmuş oluruz. Lemma (3.1.3) den biliyoruzki (3.3.18) eşitsizliğine karşılık gelen denklem de pozitif çözümlere sahiptir. Bu da (3.3.12) denkleminin tüm çözümlerinin salımlı olması ile çelişir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.3.1 Üçüncü dereceden

$$\Delta^3 \left[x(n) + \frac{n+1}{n} x(n+1) \ln(e + |x(n+1)|) \right] + nx(n-1) \ln(e + |x(n-1)|) = 0 \quad (3.3.19)$$

denklemini ele alalım. Burada $p(n) = \frac{n+1}{n}$, $q(n) = n$, $\sigma(n) = n+1$, $\tau(n) = n-1$, $h(x) = f(x) = x \ln(e + |x|)$ ’ dir. Burada eğer $c(n) = \frac{1}{n}$ alınırsa (3.3.3) den

$$\Delta y(n) + n \frac{y(n-1)}{n-1} \ln \left(e + \frac{|y(n-1)|}{n-1} \right) = 0 \quad (3.3.20)$$

elde ederiz. Burada $k(n) = \frac{n}{n-1}$, $\tau(n) = n-1$, $g(y) = y \ln \left(e + \frac{|y|}{n} \right)$ dir. Diğer taraftan (3.1.1) den

$$\limsup_{y \rightarrow 0} \frac{y}{f(y)} = M = 1$$

elde ederiz. Böylece

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} k(j) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n-1}^{n-1} \frac{j}{j-1} = 1 > \frac{1}{e}.$$

olur. Teorem (2.3.10) dan biliyoruz ki (3.3.20) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Böylece Teorem (3.3.2) nin tüm şartları sağlandığından (3.3.19) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Dikkat edilmelidir ki (3.3.19) denkleminin çözümlerinin davranışı hakkında literatürde daha önceden verilmiş olan hiç bir sonuç yoktur.

Örnek 3.3.2 Beşinci dereceden

$$\Delta^5 \left[x(n) + p(n)x \left(\left[\frac{3}{2}n \right] \right) \right] + \frac{1}{n+1}x \left(\left[\frac{n}{2} \right] \right) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.3.21)$$

denklemini ele alalım. Burada $p(n) = \begin{cases} 2n, & n \text{ çift ise} \\ \frac{n}{n+1}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$, $q(n) = \frac{1}{n+1}$, $\sigma(n) = \left[\frac{3}{2}n \right]$, $\tau(n) = \left[\frac{n}{2} \right]$, ve $[.]$ tamdeğer fonksiyonu, $h(x) = f(x) = x$. Ayrıca (3.3.13) den

$$\Delta y(n) + \frac{1}{n+1}y \left(\left[\frac{n}{2} \right] \right) = 0. \quad (3.3.22)$$

elde ederiz. Böylece $n = 2k$ için

$$\sum_{j=\tau(n)}^{n-1} q(j) = \sum_{j=k}^{2k-1} q(j) = \sum_{j=k}^{2k-1} \frac{1}{j+1} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2} > \frac{1}{e},$$

olduğu görülebilir. Eğer $n = 2k - 1$ ise bu durumda

$$\sum_{j=\tau(n)}^{n-1} q(j) = \sum_{j=k-1}^{2k-2} \frac{1}{j+1} = \frac{k}{2k-1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{e}.$$

olur. Ayrıca (1.16) dan

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} q(j) \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{e}.$$

olduğunu biliyoruz ki buradan (3.3.22) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olduğunu söyleyebiliriz. Böylece Teorem (3.3.5) in tüm şartları sağlanmış olur ve buna göre denklem (3.3.21) in tüm çözümleri salınımlıdır. Denklem (3.3.21) in karma tipte bir denklem olması ve $\lim_{n \rightarrow \infty} p(2n) = \infty$, olması sebebiyle literatürde daha önce bu denklemi yanıtlayan hiçbir sonuç bulunmadığına dikkat edilmelidir.

4 TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında

$$\Delta^m [x(n) + p(n)h(x(\sigma(n)))] + q(n)f(x(\tau(n))) = 0, n \in N = \{0, 1, \dots\} \quad (4.1)$$

$(p(n))$ ve $(q(n))$ negatif olmayan reel sayı dizileri, $h, f : R \rightarrow R$ sürekli azalmayan fonksiyonlar $u \neq 0$ için $uh(u) > 0$, $uf(u) > 0$, ayrıca $(\sigma(n))$ ve $(\tau(n))$ tamsayı dizileri ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n) = \infty.$$

olmak üzere yüksek mertebeden lineer olmayan karma neutral fark denkleminin çözümlerinin kalitatif incelemesi aşağıdaki şartlar geçerli olmak üzere yapılmıştır.

$(H_1) : (p(n))$ reel sayı dizisi $p(n) \geq 0, n \in \mathbb{N}$.

$(H_2) : (q(n))$ negatif olmayan reel sayı dizisi ve özdeş olarak sıfır olmasın.

$(H_3) : h, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve azalmayan fonksiyonlar ve $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$.

Yaptığımız bu çalışmada $p(n)$ ve $q(n)$ katsayılarını literatürde daha önce incelenen koşullardan daha geniş olarak ele aldık ve (4.1) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili m nin tek veya çift olması durumlarında ayrı ayrı farklı sonuçlar elde ettik. Ayrıca burada elde edilen sonuçlar $h(x) = x$ ve $f(x) = x$ için tamamen yeni olmakla birlikte elde edilmiş olan bu sonuçlar bugüne kadar literatürde elde edilmiş en genel kapsamlı sonuçlardır.

Yapmış olduğumuz bu çalışmanın, ilerleyen zamanlarda bu konular üzerinde çalışacak olan yeni araştırmacılara yol gösterici nitelikte olacağı düşünülmektedir. Ayrıca yeni yapılacak olan çalışmalarda ortaya çıkacak yeni matematiksel modellerin çözümü hakkında araştırmacıların referans alabileceği yeni bir kaynak ortaya konmuştur.

5 KAYNAKLAR

- Agarwal R P, Thandapani E, Wong P J Y, 1997, Oscillations of higher-order neutral difference equations, *Applied Mathematics Letters*, 10(1), 71-78
- Elaydi S, 1999, *An introduction to difference equations*. Springer-Verlag, Newyork.
- Ladas G, Philos C G, Sficas Y G, 1989, Sharp condition for the oscillation of delay difference equations. *Journal of Applied Mathematics and Simulation*, 2; 101-112.
- Györi I, Ladas G, 1991, *Oscillation theory of delay differential equations*. Clarendon press. ,Oxford.
- Goldberg S, 1958, *Introduction to difference equations*. Newyork.
- Ladas G, 1990, Explicit conditions for the oscillation of difference equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 153, 276-287.
- Agarwal R P, 2000, *Difference Equations and Inequalities*, Marcel Dekker, New York.
- Agarwal R P, Grace S R, O'Regan D, 2000, *Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Agarwal R P, Bohner M, Grace S R, O'Regan D, 2005, *Discrete Oscillation Theory*. Hindawi, New York, <https://doi.org/10.1155/9789775945198>.
- Agarwal R P, Grace S R, O'Regan D, 2005, On the oscillation of higher order difference equations, *Soochow Journal of Mathematics*, 31(2), 245–259
- Braverman E, Karpuz B, 2011, On oscillation of differential and difference equations with non-monotone delays, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 3880–3887
- Dharuman C, Thandapani E, 2018, Oscillation of solutions of nonlinear difference equation with a super-linear neutral term, *Nonautonomous Dynamical Systems*, 5(1), 52–58.

- Erbe L H, Kong Q, Zhang G, 1995, Oscillation Theory for Functional Differential Equations, Marcel Dekker, New York.
- Grace S R, Dontha S, 2003, Oscillation of higher order neutral difference equations of mixed type, Dynamic Systems and Applications, 12(3-4), 521–532
- Grace S R, Graef J R, 2020, Oscillatory behavior of higher order nonlinear difference equations, Mathematical Modelling and Analysis Impact Factor, 25(4), 522–530
- Grace S R, 2021, Oscillatory and asymptotic behavior of higher order nonlinear difference equations, Mediterranean Journal of Mathematics, 18(4), 169, 7 pp.
- Kaleeswari S, 2019, On the oscillation of higher order nonlinear neutral difference equations. Advances in Difference Equations, Paper No. 275, 10 pp.
- Kaleeswari S, Selvaraj B, 2016, On the oscillation of certain odd order nonlinear neutral difference equations. Applied Sciences, 18, 50–59
- Öcalan Ö, Özkan U M, Yıldız M K, 2018, Oscillation analysis for nonlinear difference equation with non-monotone arguments, Advances in Difference Equations, 166, 1-11.
- Öcalan A, Öcalan Ö, Özkan U M, 2022, Oscillatory behavior for nonlinear delay difference equation with non-monotone arguments, Dynamic Systems and Applications, 31(2), 53-62
- Öcalan Ö, 2020, Oscillation of first-order dynamic equations with nonmonotone delay, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 43(7), 3954-3964
- Öcalan Ö, 2022, Upper and lower limit oscillation conditions for first-order difference equations, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 65(2), no. 3, 618–631.
- Tang X H, Liu Y J, 2001, Oscillation for nonlinear delay difference equations, Tamkang Journal of Mathematics, 32, 275-280

- Thandapani E, Sundaram P, 1994, Oscillation properties of first order nonlinear functional difference equation of neutral type, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 36(1), 59 -71
- Thandapani E, Arul R, Raja P S, 2003, Oscillation of first order neutral delay difference equations, Applied Mathematics E-Notes, 3, 88-94.
- Yan W, Meng Q, Yan J, 2006, Oscillation criteria for difference equation of variable delays, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis, 13A, Part 2, suppl., 641–647.
- Yıldız M K, Öcalan Ö, 2007, Oscillation results for higher order nonlinear neutral delay difference equations, Applied Mathematics Letters, 20(3), 243-247
- Yıldız M K, Ögünmez H, 2014, Oscillation results of higher order nonlinear neutral delay difference equations with a nonlinear neutral term, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 43(5), 809-814
- Zhang B G, Tian C J, 1998, Nonexistence and existence of positive solutions for difference equations with unbounded delay, Computers & Mathematics with Applications, 36, 1–8
- Zhang G, Gao Y, 1999, Positive solutions of higher order nonlinear difference equation, Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 19(2), 157-161
- Zhang G, 2002, Oscillation for nonlinear neutral difference equations, Applied Mathematics E-Notes, 2, 22-24.
- Zhang Q X, 2014, A comparison theorem for oscillation of the even-order nonlinear neutral difference equation, Abstract and Applied Analysis, Article ID 492492, 5 p.
- Zhou Y, 2006, Oscillation of higher-order delay difference equations, Advances in Difference Equations, Art. ID 65789, 7 pp.