



**Z-SAYILAR VE Z-SAYILARDA
ARİTMETİK İŞLEMLER**
Yüksek Lisans Tezi
Nebi KAYA
Eskişehir 2021

Z-SAYILAR VE Z-SAYILARDA ARİTMETİK İŞLEMLER

Nebi KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Handan AKYAR

Eskişehir
Eskişehir Teknik Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Ocak 2021

ÖZET

Z-SAYILAR VE Z-SAYILARDA ARİTMETİK İŞLEMLER

Nebi KAYA

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonskiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ocak, 2021

Danışman : Prof. Dr. Handan AKYAR

Günlük yaşamdaki birçok problem matematiksel olarak formüle edilmeye çalışılır. Ancak bu problemlerdeki belirsizlik ve bilginin güvenilirliği bu formülasyonu zor hale getirmektedir. Bu amaçla fuzzy sayı kavramı kullanılsa da fuzzy sayılar sadece belirsizlikleri modellemek için kullanılmaktadır. Zadeh tarafından önerilen Z -sayılar ise gerçek hayat problemlerini modellemek için çok daha uygundur. Bir Z -sayı, $Z = (A, B)$ şeklinde sıralı ikiliden oluşmaktadır. Burada, A belirsizliği ifade eden bir fuzzy sayı iken ve B de A 'nın güvenilirliği ile ilgili bir fuzzy sayıdır. Konuşma dilinde belirsizlik içeren cümleler matematiksel olarak Z -sayılar yardımıyla ifade edilebilir. Örneğin, (COVID-19'un kuluçka süresi 5 gün civarındadır, Muhtemelen) ifadesi bir Z -sayıdır. Burada, "COVID-19'un kuluçka süresi 5 gün civarındadır" cümlesi A fuzzy sayısına, "Muhtemelen" ifadesi de A 'nın güvenilirliğini gösteren B fuzzy sayısına karşılık gelmektedir.

Z -sayılar kesin ve güvenilir bilginin olmadığı karar verme süreçlerinde kullanılmaktadır. Ancak Z -sayılarla aritmetik işlemler yapmak çok da kolay değildir. Bu tezde, ilk olarak Z -sayılar hakkında detaylı bilgi sunulmuştur. Sonra, Z -sayılar üzerinde aritmetik işlemlerin nasıl yapılabileceği kapsamlı bir literatür taramasıyla verilmiştir. Son olarak çeşitli örneklerle bu konu pekiştirilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Z -sayı, Sürekli Z -sayı, Kesikli Z -sayı, Fuzzy sayı, Karar-verme

ABSTRACT

Z-NUMBERS AND ARITHMETIC OPERATIONS ON Z-NUMBERS

Nebi KAYA

Department of Mathematics

Analysis and Theory of Functions

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, January, 2021

Supervisor : Prof. Dr. Handan AKYAR

Many problems in real world require mathematical formulization. However, the uncertainty in these problems and the reliability of the information makes this formulation difficult. Although the concept of fuzzy numbers is used for this purpose, fuzzy numbers are deal with only for modeling uncertainties. Z -numbers, proposed by Zadeh, are more convenient for modeling real life problems. A Z -number consists of an ordered pair in the form $Z = (A, B)$. Here, A is a fuzzy number expressing uncertainty and B is also a fuzzy number related to the reliability of A . In linguistic sentences, containing uncertainty, can be expressed mathematically by Z -numbers. For instance, (The incubation period of COVID-19 is around 5 days, Probably) is a Z -number. Here, the phrase "The incubation period of COVID-19 is around 5 days" corresponds to the fuzzy number A , and the expression "Probably" corresponds to the fuzzy number B , which indicates the reliability of A . Z -numbers are used in decision-making processes where precise and reliable information is not available. However, arithmetic operations with Z -numbers are not so easy. In this thesis, first, detailed information about Z -numbers is presented. Then, a comprehensive literature review on how to perform arithmetic operations on Z -numbers is given. Finally, this subject has been reinforced with various examples.

Keywords: Z -number, Continuous Z -number, Discrete Z -number, Fuzzy number, Decision-making

TEŞEKKÜR

Bu çalışmam boyunca desteğini esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Handan AKYAR'a ve her zaman yanımda olan eşime maddi manevi desteklerinden dolayı sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Nebi KAYA

İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
TABLolar DİZİNİ	x
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	3
2.1. Hedef Programlama	3
2.2. Rastlantı Değişkenleri	7
2.2.1. Sürekli rastlantı değişkenleri üzerinde aritmetik işlemler . . .	8
2.2.2. Kesikli rastlantı değişkenleri üzerinde aritmetik işlemler . . .	12
2.3. Fuzzy Sayılar	13
2.3.1. Fuzzy sayılarda işlemler	16
2.4. Kesikli Fuzzy Sayılar	18
2.4.1. Kesikli fuzzy sayılarda işlemler	19
3. Z-SAYILAR	23
3.1. Sürekli ve Kesikli Z-Sayılar, Z^+ -Sayıları	26
3.2. Z-sayılar Üzerinde Aritmetik İşlemler	29
3.3. Kesikli Z-Sayı ve Kesikli Z^+ -Sayı Arasındaki İlişki	37
3.4. Sürekli ve Kesikli Z-Sayılar Hakkında Tartışma	39
4. SÜREKLİ Z-SAYILAR ÜZERİNDE ARİTMETİK İŞLEMLER	41
4.1. Sürekli Z-Sayılar Üzerinde Toplama İşlemi	41
4.2. Sürekli Z-Sayılar Üzerinde Çıkarma İşlemi	56
4.3. Sürekli Z-Sayılar Üzerinde Çarpma İşlemi	58
4.4. Sürekli Z-Sayılar Üzerinde Bölme İşlemi	61
4.5. Sürekli Bir Z-Sayısının Karesi	63

4.6. Sürekli Bir Z-Sayısının Karekökü	64
5. KESİKLİ Z-SAYILAR ÜZERİNDE ARİTMETİK İŞLEMLER	66
5.1. Kesikli Z-Sayılar Üzerinde Toplama İşlemi	66
5.2. Kesikli Z-Sayılar Üzerinde Çıkarma İşlemi	75
5.3. Kesikli Z-Sayılar Üzerinde Çarpma İşlemi	78
5.4. Kesikli Z-Sayılar Üzerinde Bölme İşlemi	81
5.5. Kesikli Bir Z-Sayısının Karesi	82
5.6. Kesikli Bir Z-Sayısının Karekökü	84
6. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER	87
KAYNAKÇA	88
ÖZGEÇMİŞ	90

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Sapma değişkenleri (istenen)	4
Şekil 2.2	Sapma değişkenleri (istenmeyen)	4
Şekil 2.3	Modelin Grafik Yöntemi ile çözümü	6
Şekil 2.4	Normal dağılım grafiği	9
Şekil 2.5	Fuzzy küme	14
Şekil 2.6	LR-fuzzy sayı	15
Şekil 2.7	Yamuk fuzzy sayı	15
Şekil 2.8	Üçgensel fuzzy sayı	16
Şekil 2.9	Kesikli fuzzy sayı	19
Şekil 3.1	A'nın üyelik fonksiyonu ve X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu . .	25
Şekil 3.2	Basit bir sürekli Z-sayısı $Z = (A, B)$	26
Şekil 3.3	Kesikli bir Z-sayı için "X, A'dır" fuzzy olayı örneği	28
Şekil 3.4	Sürekli bir $Z = (A, B)$ -sayısında p_X olasılık dağılımları ile B'nin temel değerleri arasındaki ilişki.	29
Şekil 3.5	B_X fuzzy sayısının temel değerlerine karşılık gelen olasılık dağılımları.	34
Şekil 3.6	$Z_Z^+ = (A_Z, p_{ji})$ toplamı için Z_X^+ ve Z_Y^+ eşleştirmeleri.	35
Şekil 3.7	p_X olasılık dağılımı için fuzzy kısıt belirleme.	36
Şekil 3.8	B_Z fuzzy sayısının bir temel değeri b_Z yi ve üyelik derecesini belirleme.	36
Şekil 3.9	$Z=(A,B)$ yağ fiyatı üzerindeki dilsel olarak ifade edilen kısmen güvenilir bilgiyi tanımlamak için kullanılır. Burada (a) A kesikli fuzzy sayısını (b) B kesikli fuzzy sayısını göstermektedir.	38
Şekil 3.10	A kesikli fuzzy sayısı (kesikli grafik) ve kesikli olasılık dağılımı (sürekli eğri) ile oluşan $Z^+ = (A, p)$ şeklindeki Z^+ -sayısı.	38
Şekil 3.11	$P(A)$ olasılık ölçüsünün tam değeri.	38
Şekil 4.1	Sırasıyla A_1 ve A_2 üçgensel fuzzy sayıları	44
Şekil 4.2	$z = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ fonksiyonunun grafiği	47
Şekil 4.3	B_1 ve B_2 üçgensel fuzzy sayılarının grafikleri	51
Şekil 4.4	A_{12} üçgensel fuzzy sayısı	52
Şekil 4.5	Sürekli Z-sayıların toplamı: A_{12} ve B_{12} nin grafikleri	56
Şekil 4.6	Sürekli Z-sayıların farkı: A_{12} ve B_{12} nin grafikleri	59
Şekil 4.7	Sürekli Z-sayıların çarpımı: A_{12} ve B_{12} nin grafikleri	61
Şekil 4.8	Sürekli Z-sayıların bölümü: A_{12} ve B_{12} nin grafikleri	63
Şekil 4.9	Sürekli bir Z-sayının karesi: A ve B nin grafikleri	64

Şekil 4.10	Sürekli bir Z -sayısının karekökü: A ve B nin grafikleri	65
Şekil 5.1	$\tilde{A}_1$ fuzzy sayısı	70
Şekil 5.2	$\tilde{A}_2$ fuzzy sayısı	70
Şekil 5.3	$\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$ fuzzy sayısı (Grafikte kesirli sayılar ondalık sayılara yuvarlanmıştır.)	72
Şekil 5.4	Kesikli Z -sayıların toplamı: A_{12} ve B_{12} sayıları	75
Şekil 5.5	Kesikli Z -sayıların farkı: A_{12} ve B_{12} sayıları	78
Şekil 5.6	Kesikli Z -sayıların çarpımı: A_{12} ve B_{12} sayıları	80
Şekil 5.7	Kesikli Z -sayıların bölümü: A_{12} ve B_{12} fuzzy sayıları	82
Şekil 5.8	Kesikli bir Z -sayısının karesi: A_3 ve B_3 fuzzy sayıları	85
Şekil 5.9	Kesikli bir Z -sayının karekökü: A_3 ve B_3 sayıları	86

TABLolar DİZİNİ

Tablo 2.1	Modelin çözüm tablosu	6
Tablo 2.2	Standart Z-tablosu	11
Tablo 4.1	Örnek 4.1.1 için hesaplanan σ_{jl} değerleri	49



SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

A	: Fuzzy sayı
B	: A 'nın güvenirliliği ile ilgili bir fuzzy sayı
$Z = (A, B)$	: Z -sayı
μ_A	: A fuzzy sayısının üyelik fonksiyonu
A^α	: A fuzzy kümesinin α -kesmesi
$\text{supp}(A)$	: A fuzzy kümesinin destek kümesi
$A = (a, b, c)$	: Üçgensel fuzzy sayı
$A = (a, b, c, d)$	: Yamuk fuzzy sayı
X	: Rastlantı değişkeni
p	: Olasılık dağılımı
$P(A)$	: A fuzzy sayısının olasılık ölçüsü
R	: X değişkeni üzerinde bir kısıt
$Z^+ = (A, R)$	: Z^+ -sayı
σ	: Standart sapma
μ	: Aritmetik ortalama
$\wedge$	: Minimum
$\circ$	: Konvolüsyon

1. GİRİŞ

Gerçek dünya belirsizliklerle doludur ve karar vermede kullandığımız çoğu bilgi belirsizlik içerir. Ancak insanlar belirsiz, kesin olmayan veya eksik olan bilgiye dayalı rasyonel kararlar verme konusunda dikkate değer bir kabiliyete sahiptir. Bu kabiliyeti en azından bir dereceye kadar formülize etmek bile yeterince zordur. Bu belirsizlik içeren problemleri çözmek için ilk kez 1965 yılında Lotfi A. Zadeh [18] fuzzy küme kavramını ortaya atmıştır. Fuzzy (bulanık) kümeler, sahip olduğu elemanların üyelik derecelerini içeren kümelerdir. Aristo mantığına yani ikili mantığa dayalı klasik kümelerde, elemanlar ya kümeye aittir ya da değildir. Fuzzy kümelerde ise elemanların kümeye ait olması belirli derecelerde olur ve elemanların üyelik dereceleri $[0,1]$ aralığında değerler alır. Fakat kesin olmayan gerçek dünya bilgisi ile uğraştığımızda sadece bulanıklığı hesaba katmak yeterli değildir.

Bilginin diğer önemli özelliği de kısmi güvenirliktir. Dolayısıyla bir yandan bulanıklık diğer yandan kısmi güvenirlik güçlü bir şekilde birbiri ile ilişkilidir. Zadeh 2011 yılında gerçek dünya bilgisini iyi açıklayabilmek için daha da yeterli bir yapı olan Z -sayısı kavramını öne sürmüştür [21]. Z -sayısı kavramı kesin olmayan ve belirsizlik durumunda rasyonel karar verebilmek için insan yeteneğinin büyük ölçüde resmileştirilmesine karşı bir adımdır. Temel olarak Z -sayısı bilginin güvenirliği konusu ile ilgilidir.

Z -bilgisinin temeli kısıtlama kavramına dayanmaktadır. Kısıtlama kavramı aralık, küme, fuzzy küme gibi kavramlardan daha büyük genelliğe sahiptir. Geleneksel teorilerden ayrılan merkezi kısıtlama teorisi bulanık mantığa dayanmaktadır [22]. Bu teoride kısıtlamalar çoğunlukla doğal dilden alınan fuzzy önermelerdir. Bu fuzzy önermeler uzun, şişman veya hızlı, yavaş gibi fuzzy yüklemeler, çok, çoğu, daha çok gibi fuzzy niceleyiciler, muhtemelen, mümkün olmayan gibi fuzzy olasılıklardır.

Z -sayılar özellikle ekonomi, karar analizi, risk değerlendirmesi, tahmin, beklenti, planlama, biyotıp gibi alanlarda birçok uygulamaya sahiptir [3], [5], [6], [10], [11], [12], [15]. Z -aritmetiği ve uygulamaları üzerine kapsamlı ilk çalışma da 2015 yılında yapılan Aliev ve arkadaşlarına aittir [2].

Bu tezde, Z -sayılar üzerinde aritmetik işlemler detaylı bir şekilde incelenecektir. Bunun için öncelikle Z -sayının ne olduğu, Z -sayıların üzerinde tanımlı olduğu rastlantı değişkeni, Z -sayıların bileşenleri olan fuzzy sayılar, fuzzy sayılarda aritmetik işlemler ve bu fuzzy sayıların olasılık değerlerini hesaplamak için gerekli olan olasılık dağılımları ve bir fuzzy sayının olasılık hesabının nasıl yapılacağı 2. bölümde verilecektir. Ayrıca Z -sayılar üzerinde aritmetik işlemlerde

izlenecek adımların birinde karşılaşılan lineer denklem sistemlerinin çözümü için Doğrusal Hedef Programlama ve lineer olmayan denklemlerin çözümü için Newton-Raphson Yönteminden de bahsedilecektir.

3. bölümde ise Z -sayı, sürekli ve kesikli Z -sayı kavramları tanımlanacak ve Z -sayılar üzerinde aritmetik işlemlerden söz edilecektir. 4. bölümde sürekli Z -sayılar ve 5. bölümde de kesikli Z -sayılar üzerinde aritmetik işlemler yapılacaktır.



2. ÖN BİLGİLER

2.1. Hedef Programlama

Hedef programlama, sistem kısıtları haricinde tolere edilebilir hedefler olduğu zaman doğrusal programlamanın formülasyonunun kurulamadığı durumlarda, esnek kısıtların yani hedef kısıtlarının kullanıldığı bir programlama türüdür. Hedef programlamada, amaç fonksiyonu hedeflerden istenmeyen sapmaları minimize edecek şekilde kurulur. Bir veya birden fazla hedef tek amaç fonksiyonunda birleştirilir [14].

Hedef programlama formülasyonunda doğrusal programlamada olduğu gibi karar değişkenleri, sistem kısıtlayıcıları ve amaç fonksiyonu ile doğrusal programlamadan farklı olarak sapma değişkenleri ve hedef kısıtlayıcıları bulunur.

Karar değişkenleri herhangi bir değişkendir ve doğrusal programlamadaki kullanımından farksızdır. Sistem kısıtlayıcıları çözülmek istenen problemdeki kurulan sistemde kesin olarak sağlanması gereken kısıtlardır. Doğrusal programlamadakinden farkı yoktur. Çözüm mutlaka bu kısıtların içerisinde olmak zorundadır. Örneğin bir fabrikanın üretim yapabilmek için işçi çalıştırma kapasitesi, 100 kişiden az 200 kişiden fazla olamaz ise işçi sayısını gösteren x değişkeni için $100 \leq x \leq 200$ şartı sağlanmak zorundadır.

Amaç fonksiyonu hedeflerden istenmeyen sapmaların en küçük olmasını sağlayacak minimum fonksiyonudur. Sapma değişkenleri hedef programlama ile doğrusal programlamadan farkını oluşturan değişkenlerdir.

Sapma değişkenlerinde hedefin üstünde kalan miktar d_i^+ , hedefin altında kalan miktar d_i^- sembolleriyle gösterilir.

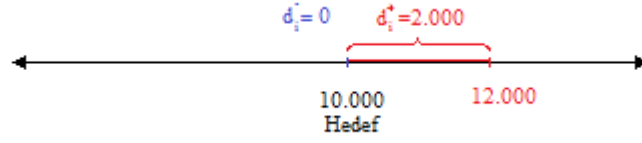
Bir hedef belirlendiğinde bu hedefin hem üstünde hem altında kalmak mümkün değildir. Bu nedenle d_i^+ ya da d_i^- değişkenlerinden biri sıfır olmak zorundadır. Sıfırdan farklı olan sapma değişkeni de pozitif olmalıdır.

Örneğin bir fabrika müdürünün x marka ayakkabı üretimi için belirlediği hedef en az 10.000 adet olsun. Oluşturulan hedef programlama formülasyonunun çözümünde x markanın üretim miktarı 12.000 ise;

$$d_i^+ = 12.000 - 10.000$$

$$d_i^- = 2.000$$

olur ve bu durumda $d_i^- = 0$ olmak zorundadır. Eğer elde edilen çözümde x markadan



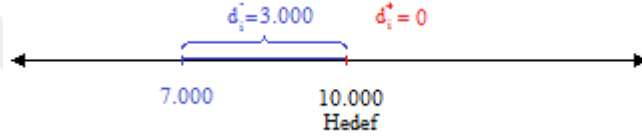
Şekil 2.1. *Sapma değişkenleri (istenen)*

7.000 adet üretildiği görülür ise;

$$d_i^- = 10.000 - 7.000$$

$$d_i^- = 3.000$$

olur ve bu durumda $d_i^+ = 0$ olmak zorundadır.



Şekil 2.2. *Sapma değişkenleri (istenmeyen)*

Hedef programlama çözümünde x marka ayakkabının üretim miktarı tam 10.000 adet ise yani istenen hedef tam olarak gerçekleşmiş ise $d_i^+ = 0$ ve $d_i^- = 0$ değerini alır.

Bu örnekte 10.000 ayakkabının üstünde üretim sorun teşkil etmeyeceği için d_i^+ istenen sapma değişkeni, 10.000 ayakkabının altında üretim istenmediği için, d_i^- istenmeyen sapma değişkeni olarak adlandırılır. Burada hedef olarak 10.000 ayakkabının üstünde üretim olması istenmeseydi sapma değişkenleri tam tersi şekilde isimlendirilmiş olacaktı.

Hedef kısıtlayıcıları yöneticinin kendi isteğine göre ortaya koyduğu hedeflerdir. Bu hedeflerden taviz verilebilir. Yukarıdaki örnekteki gibi en az 10.000 adet ayakkabı üretme hedefi belirlenmiş olsa da çözümde 7.000 ayakkabı üretilmesi gerektiği sonucuna varılabilir. Bunun nedeni sistem kısıtlayıcılarının dışına çıkılamamasıdır. Bu durumda sistem kısıtlarının içinde olacak şekilde hedefleri en küçük sapma ile elde etmek gerekmektedir.

Hedef programlamanın daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.1.1. *Bir mağazada kısa kollu ve uzun kollu olacak şekilde iki tür elbise üretilmektedir. Bu ürünler için iki ayrı işlem gerekmektedir. Kısa kollu elbiseden bir tane üretebilmek için 1. işlemde 6 dakikaya, 2. işlemde 3 dakikaya ihtiyaç vardır. Uzun kollu elbisenin üretimi için de 1. işlemde 3 dakikaya, 2. işlemde yine 3 dakikaya*

ihtiyaç vardır. Bu fabrikanın 1. işlemde 120 dakikalık, 2. işlemde ise 90 dakikalık çalışma zamanı bulunmaktadır.

Fabrika müdürü 15 adet kısa kollu elbiseyi ve 15 adet uzun kollu elbiseyi aynı öncelik derecesiyle üretmek istemektedir. Fabrikanın zaman kısıtı ve fabrika müdürünün hedefleri doğrultusunda bu problem için en uygun çözümü aşağıdaki şekilde bulunabilir.

İlk olarak problemin hedef programlama modelini kuralım. Değişkenleri ve kısıtları oluşturalım.

Karar değişkenleri: x_1 = Kısa kollu elbiseden üretilecek miktar

x_2 = Uzun kollu elbiseden üretilecek miktar

Sapma değişkenleri: d_1^- = 15 adet kısa kollu elbisenin altında kalan üretim miktarı

d_1^+ = 15 adet kısa kollu elbise üretimini aşan miktar

d_2^- = 15 adet uzun kollu elbisenin altında kalan üretim miktarı

d_2^+ = 15 adet uzun kollu elbise üretimini aşan miktar

Hedef kısıtlayıcıları: $x_1 + d_1^- - d_1^+ = 15$

(En az 15 adet kısa kollu elbise üretme hedefi)

$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 15$

(En az 15 adet uzun kollu elbise üretme hedefi)

Sistem kısıtlayıcıları: $6x_1 + 3x_2 \leq 120$ (1. işlem'deki zaman kısıtı)

$3x_1 + 3x_2 \leq 90$ (2. işlem'deki zaman kısıtı)

Pozitiflik kısıtı: $x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \geq 0$

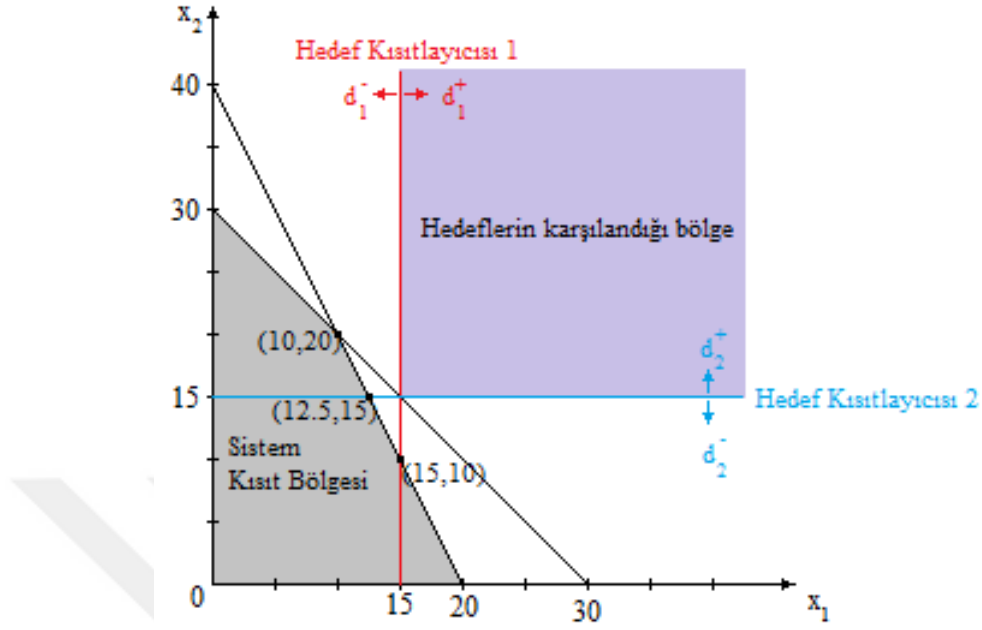
Amaç fonksiyonu: $\min z = d_1^- + d_2^-$

Oluşturulan bu hedef programlama modelinin çözümü grafik yöntemi ile yapılabilir.

Şekil 2.3'te verilen grafiğe göre çözüm noktasının hedeflerin karşılandığı bölgede olması istenir [14]. Fakat bu bölge sistem kısıtlayıcılarının sınırladığı bölgenin dışında kaldığından hedeflerin tam olarak karşılanmsı mümkün değildir.

Amaç istenmeyen sapma değişkenleri olan d_1^- ve d_2^- değerlerini minimum yapmak olduğuna göre, bu grafikte çözüm noktası olarak sistem kısıt bölgesinin dışına çıkılmadan hedeflerin karşılandığı bölgeye en yakın nokta seçilmelidir.

Hedeflerin karşılandığı bölge civarındaki köşelerde bulunan (10, 20), (12.5, 15) ve (15, 10) aday çözüm noktaları denenerek en uygun çözümü veren nokta bulunabilir.



Şekil 2.3. Modelin Grafik Yöntemi ile çözümü

Tablo 2.1. Modelin çözüm tablosu

Nokta	Hedef Denklemlerinin Çözümü	Amaç Fonksiyonu Sonucu
(10, 20)	$x_1 + d_1^- - d_1^+ = 15 \Rightarrow 10 + d_1^- - 0 = 15 \Rightarrow d_1^- = 5, d_1^+ = 0$ $x_2 + d_2^- - d_2^+ = 15 \Rightarrow 20 + 0 - d_2^+ = 15 \Rightarrow d_2^- = 0, d_2^+ = 5$	$\min z = d_1^- + d_2^-$ $\min z = 5 + 0 = 5$
(12.5, 15)	$x_1 + d_1^- - d_1^+ = 15 \Rightarrow 12.5 + d_1^- - 0 = 15 \Rightarrow d_1^- = 2.5, d_1^+ = 0$ $x_2 + d_2^- - d_2^+ = 15 \Rightarrow 15 + 0 - 0 = 15 \Rightarrow d_2^- = 0, d_2^+ = 0$	$\min z = d_1^- + d_2^-$ $\min z = 2.5 + 0 = 2.5$
(15, 10)	$x_1 + d_1^- - d_1^+ = 15 \Rightarrow 15 + 0 - 0 = 15 \Rightarrow d_1^- = 0, d_1^+ = 0$ $x_2 + d_2^- - d_2^+ = 15 \Rightarrow 10 + d_2^- - 0 = 15 \Rightarrow d_2^- = 5, d_2^+ = 0$	$\min z = d_1^- + d_2^-$ $\min z = 0 + 5 = 5$

Yukarıdaki tabloya göre en iyi çözümü veren nokta $(12.5, 15)$ dir. Bu noktada görüleceği üzere birinci hedefteki 15 birim üretimden 2.5 birim kadar az üretilirken ikinci hedefteki 15 birimlik üretim gerçekleştirilebilmiştir.

Hedef Programlama ile ilgili daha detaylı bilgi almak için [14] çalışmasından yararlanılabilir.

2.2. Rastlantı Değişkenleri

Bu bölümde ilerideki bölümler için gerekli olan rastlantı değişkenleri üzerindeki aritmetik işlemler için analitik ve nümerik yöntemler ele alınmıştır. Bu konu hakkında daha detaylı bilgi için [2] ve [16] çalışmalarından yararlanılabilir.

Tanım 2.2.1. *X rastlantı değişkeni, rastgele bir olayın nümerik sonuçlarından olan x olası değerleri için bir değişkendir. Rastlantı değişkenleri sürekli ve kesikli olmak üzere iki şekildedir.*

Sürekli rastlantı değişkeni x olası değerlerinin sonsuz sayıdaki ihtimallerinden birini alabilen bir değişkendir. Kesikli rastlantı değişkeni ise belirgin değerlerden sadece sayılabilir kadarını alabilen bir değişkendir.

Sürekli rastlantı değişkenlerinde bir sabit sayının olasılığına bakılmaz. Sonsuz içinde bir sayının olasılığı 0 olarak kabul edilir. Sürekli rastlantı değişkenlerinde olasılıklar $[a, b]$ kapalı aralıkları şeklinde hesaplanır. Yani X rastlantı değişkeninin bu aralıktan herhangi bir değeri alması olasılığı hesaplanır. Bu olasılık $P(a \leq X \leq b)$ şeklinde gösterilir.

a ve b herhangi iki sayı ve $a \leq b$ olmak üzere, $p(x) \geq 0$ ve $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ iken;

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x)dx$$

şeklindeki $p(x)$ fonksiyonuna olasılık dağılımı ya da olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

$\{x_1, \dots, x_n\}$ örnek uzayı üzerinde X kesikli rastlantı değişkeni için $X = x_i$ nin olasılığı $P(X = x_i)$ şeklinde gösterilir ve bu olasılık değeri, olasılık dağılımının terimlerinde belirtilir.

p olasılık dağılımı ya da olasılık kütle fonksiyonu

$$p(x_i) \in [0, 1] \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$$

iken

$$P(X = x_i) = p(x_i)$$

şeklindedir.

Rastlantı Değişkenine Sabit Ekleme

X bir rastlantı değişkeni $Y = X + c$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. O halde Y nin olasılık yoğunluk fonksiyonu olan p_Y

$$p_Y(y) = p_X(y - c)$$

şeklinde olur.

Rastlantı Değişkenini Skalerle Çarpma

X bir rastlantı değişkeni $Y = a \cdot x$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. O halde $p_Y(y)$ yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$a > 0 \quad \text{iken} \quad p_Y(y) = \frac{1}{a} p_X(y/a),$$

$$a < 0 \quad \text{iken} \quad p_Y(y) = -\frac{1}{a} p_X(y/a).$$

Rastlantı Değişkeninin Karesi

X bir rastlantı değişkeni ve $Y = X^2$ olsun. O halde Y için yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [p_X(\sqrt{y}) + p_X(-\sqrt{y})], \quad y \geq 0.$$

Rastlantı Değişkeninin Kare Kökü

X yoğunluk fonksiyonu p_X olan sürekli bir rastlantı değişkeni olsun. $Y = \sqrt{X}$ için olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$y \geq 0 \quad \text{ise} \quad p_Y(y) = 2yp_X(y^2)$$

şeklindedir.

2.2.1. Sürekli rastlantı değişkenleri üzerinde aritmetik işlemler

X ve Y olasılık dağılımları p_X ve p_Y olan birbirinden bağımsız iki rastlantı değişkeni olsun. $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$ iken $Z = X * Y$ olsun. X_Z nin p_Z olasılık dağılımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

X ve Y rastlantı değişkenlerinin arasındaki işlem dört aritmetik işlemden biriye aşağıdaki gibi dört konvolüsyon eşitliği elde edilir.

$$Z = X + Y : \quad p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X Y(z - x, x) dx,$$

$$Z = X - Y : \quad p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X Y(z + x, x) dx,$$

$$Z = X \cdot Y : \quad p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} p_X Y(z/x, x) dx,$$

$$Z = X/Y : \quad p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| p_X Y(zx, x) dx.$$

X ve Y nin birbirinden bağımsız olduğu durumda ise aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$Z = X + Y : \quad p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X Y(z - x, x) p_Y(x) dx,$$

$$Z = X - Y : \quad p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X Y(z + x, x) p_Y(x) dx,$$

$$Z = X \cdot Y : \quad p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} p_X Y(z/x, x) p_Y(x) dx,$$

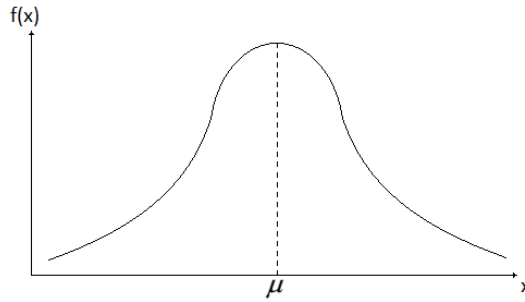
$$Z = X/Y : \quad p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| p_X Y(zx, x) p_Y(x) dx.$$

Bu çalışmada sürekli rastlantı değişkenleri için olasılık dağılımı olarak normal dağılım (Gauss Dağılımı) kullanılmıştır.

Normal Dağılım ([9]): Gauss Dağılımı olarakta bilinen bu dağılım fonksiyonu sürekli bir eğri grafiği oluşturur. Bu eğrinin fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2]}.$$

Bu fonksiyonda gösterilen σ sembolü standart sapma değerini, μ sembolü ise aritmetik ortalama değerini gösterir ve normal dağılım fonksiyonu da $N(\mu, \sigma)$ şeklinde gösterilir. Normal dağılım eğrisi aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.4. Normal dağılım grafiği

Grafikten görüleceği üzere bu eğride, ölçme sonuçları uç noktalarda seyrekleşmekte iken orta noktalarda yoğunlaşmaktadır. Normal dağılımda grafik simetrik, asimptotiktir, eğri altındaki toplam alanın değeri 1 dir, ortalama-mod-medyan değerleri çakışiktir. Normal dağılım $(-\infty, \infty)$ aralığında değer alır. Sürekli rastlantı değişkeninde belirli bir kapalı aralığın olasılığı hesaplandığından bu aralığın olasılığı aralığın sınır değerleriyle, eğrinin altında

kalan alan hesaplanarak bulunur. Yani normal dağılımda olasılık hesabı yapabilmek için yukarıda verilen fonksiyonun integralinin alınması gereklidir. Gauss fonksiyonunun integralini almak ise epeyce güçtür. Bu nedenle Gauss fonksiyonu standartlaştırılmış ve standart halinin olasılık değerleri tekrar tekrar kullanılabilmek üzere tablolastırılmıştır.

Standart Normal Dağılım ([23]): Gauss fonksiyonuna $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ dönüşümü yapılarak normal dağılım standartlaştırılır. Dikkat edilecek olursa, normal ağılım x e, standart normal dağılım z ye bağlıdır.

Bu dönüşümde ortalamanın z değişkeni cinsinden değerini bulmak için $x = \mu$ yazarsak $z = 0$ değerini elde ederiz. O halde standart normal dağılımın ortalaması 0 dır. $\mu = 0$ olarak alındığında da $\sigma = 1$ olacağı kolayca görülebilir.

Standart normal dağılım fonksiyonunun daha önceden hesaplanmış integral sonuçlarını yani olasılık değerlerini içeren Z-tabloları okunuşuna göre çeşitlilik göstermektedir.

Bu tezde kullanılacak Z-tablosu Tablo 2.2’de gösterilmiştir [8]. Tablo $P(0 \leq z \leq Z) = \int_0^Z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ olasılık değerlerinin sonuçlarını göstermektedir.

Normal dağılım içeren bir problem ile karşılaşıldığı zaman öncelikle dağılım standart forma dönüştürülür daha sonra da aşağıda gösterilen Z-tablosu kullanılarak integral sonucu belirlenir.

Örneğin tabloda kırmızı ile işaretlenen değer $Z = 2.00$ değeri için olasılık sonucudur. Yani $P(0 < z < 2.00) = 0.4772$ dir. Mavi ile işaretlenen değer ise $Z = 1.15$ değeri için olasılık sonucudur yani $P(0 < z < 1.15) = 0.3749$ olacaktır. Görüleceği üzere tabloda dikey verilen değerler Z ondalık sayısının birler ve onda birler basamağını, yatay verilen değerler ise Z ondalık sayısının yüzde birler basamağını göstermektedir. Kesiştikleri noktada ise bu Z ondalık sayısı için olasılık sonucu vardır.

Normal Rastlantı Değişkenleri Üzerinde İşlemler

İki normal rastlantı değişkeninin toplamı ve farkının olasılık dağılımlarının hesabı için kesin formüller vardır. Eğer $Z = f(X_1, X_2) = X_1 \pm X_2$ ise,

$$\mu_Z = \mu_{X_1} \pm \mu_{X_2},$$

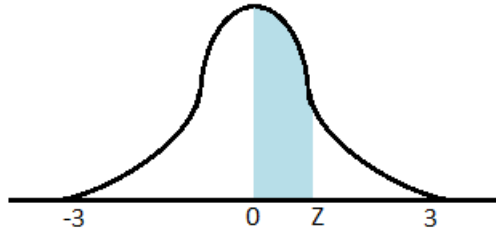
$$\sigma_Z^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2$$

eşitlikleri geçerlidir.

Maalesef çarpım ve bölüm için böyle formüller mevcut değildir.

Birbirinden bağımsız X_1 ve X_2 normal rastlantı değişkenlerinin çarpımının ve bölümünün olasılık dağılımı:

Tablo 2.2. Standart Z-tablosu



Standart Z - Tablosu

$P(0 < z < Z)$

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0190	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2398	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2969	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3513	0.3554	0.3577	0.3529	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998

Eğer $Z = h(X_1, X_2) = X_1 \cdot X_2$ ise

$$\mu_Z \cong \mu_{X_1} \mu_{X_2}, \quad (2.1)$$

$$\sigma_Z^2 \cong \mu_{X_1}^2 \sigma_{X_2}^2 + \mu_{X_2}^2 \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_1}^2 \sigma_{X_2}^2 \quad (2.2)$$

ifadeleri geçerlidir.

Eğer $Z = h(X_1, X_2) = X_1/X_2$ ise

$$\mu_Z \cong \frac{\mu_{X_1}}{\mu_{X_2}} + \frac{\mu_{X_1} \sigma_{X_2}^2}{4\mu_{X_2}^3}, \quad (2.3)$$

$$\sigma_Z^2 \cong \frac{\sigma_{X_1}^2}{\mu_{X_2}^2} + \frac{\mu_{X_1}^2 \sigma_{X_2}^2}{\mu_{X_2}^4} - \frac{\mu_{X_1}^2 \mu_{X_2}^3}{2\mu_{X_2}^5} \quad (2.4)$$

ifadeleri geçerlidir.

2.2.2. Kesikli rastlantı değişkenleri üzerinde aritmetik işlemler

X_1 ve X_2 sırasıyla $X_1 = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}\}$ ve $X_2 = \{x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}\}$ örnek uzaylarına karşılık gelen, olasılık dağılımları p_1 ve p_2 olan birbirinden bağımsız kesikli rastlantı değişkenleri olsun. $*$ herhangi bir ikili işlem olmak üzere $X_1 * X_2$ nin olasılık dağılımı p_1 ve p_2 nin konvolüsyonu olan $p_{12} = p_1 \circ p_2$ dir ve aşağıdaki gibi tanımlıdır.

Herhangi $x \in \{x_1 * x_2 | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ için,

$$p_{12}(x) = \sum_{x=x_{1i} * x_{2j}} p_1(x_{1i}) p_2(x_{2j}).$$

Aşağıda bazı ikili işlemler için $X_{12} = X_1 * X_2$ lerin olasılık dağılımları olan $p_{12} = p_1 \circ p_2$ lerin ifadeleri verilmiştir.

$X_1 + X_2$ toplamı için;

$$p_{12}(x) = \sum_{x=x_{1i} + x_{2j}} p_1(x_{1i}) p_2(x_{2j}).$$

$X_1 - X_2$ farkı için;

$$p_{12}(x) = \sum_{x=x_{1i} - x_{2j}} p_1(x_{1i}) p_2(x_{2j}).$$

$X_1 \cdot X_2$ çarpımı için;

$$p_{12}(x) = \sum_{x=x_{1i} \cdot x_{2j}} p_1(x_{1i}) p_2(x_{2j}).$$

X_1/X_2 bölümü için;

$$p_{12}(x) = \sum_{x=x_{1i}/x_{2j}} p_1(x_{1i}) p_2(x_{2j}).$$

$X = \min(X_1, X_2)$ minumum operatörü için;

$$p_{12}(x) = \sum_{x=\min(x_{1i}, x_{2j})} p_1(x_{1i})p_2(x_{2j}).$$

$X = \max(X_1, X_2)$ maksimum operatörü için;

$$p_{12}(x) = \sum_{x=\max(x_{1i}, x_{2j})} p_1(x_{1i})p_2(x_{2j}).$$

Kesikli Rastlantı Değişkeninin Karesi

Olasılık dağılımı p_x olan bir X kesikli rastlantı değişkeni için $Y = X^2$ olacak şekilde Y nin olasılık dağılımı p_Y aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$p_Y(y) = \sum_{x \in \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\}} p_X(x) = p_X(-\sqrt{y}) + p_X(\sqrt{y}).$$

Kesikli Rastlantı Değişkeninin Karekökü

Olasılık dağılımı p_x olan bir X kesikli rastlantı değişkeni için $Y_1 = \sqrt{X}$ ve $Y_2 = -\sqrt{X}$ olacak şekilde Y_1 ve Y_2 nin olasılık dağılımları p_{Y_1} ve p_{Y_2} aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$p_{Y_1}(y_1) = p_X(y_1^2) \quad \text{ve} \quad p_{Y_2}(y_2) = p_X(y_2^2).$$

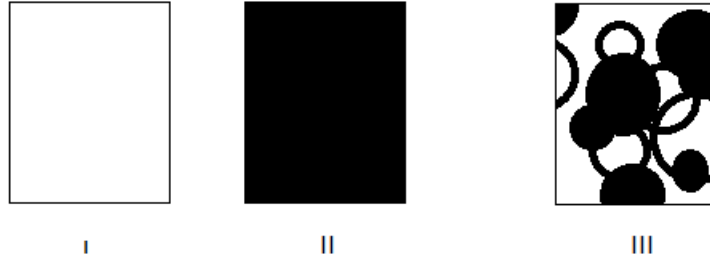
2.3. Fuzzy Sayılar

Fuzzy sayılardan önce "Fuzzy Küme" kavramı tanımlanmalıdır. Zadeh, kesinlik içermeyen problemleri modelleyebilmek için fuzzy (bulanık) küme teorisini önermiştir [18]. Klasik kümelerde bir eleman bir kümeye ya aittir ya da değildir. Oysa bu kullanım gerçek hayattaki birçok sınıflandırmayı modellemede yetersizdir. Örneğin Şekil 2.5'de verilen resimlere bakacak olursak, I. resim beyaz levhalar kümesine, II. resim siyah levhalar kümesine ait ise III. resim hangi kümeye aittir? İşte tam bu noktada üyelik fonksiyonu yardımıyla bir elemanın bir kümeye ait olma derecesi kullanılarak bu gibi durumlar modellenenebilir. Fuzzy kümelerle ilgili daha detaylı bilgi için [2], [13], [19] ve [20] çalışmalarından yararlanılabilir.

Bir X kümesi üzerinde A fuzzy kümesi, $A : X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu olarak tanımlanır. A fonksiyonu için genellikle μ_A simgesi kullanılır ve A fuzzy kümesi her $x \in X$ ögesini $\mu_A(x) \in [0, 1]$ ile eşleyen $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. Burada $\mu_A(x)$ değeri $x \in X$ ögesinin A fuzzy kümesine ait olma derecesini göstermektedir.

A , X kümesi üzerinde tanımlı bir fuzzy küme olsun. Bu durumda

$$\text{supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$$



Şekil 2.5. *Fuzzy küme*

kümesine A fuzzy kümesinin desteği (support'u) denir. A fuzzy kümesinin yüksekliği ise

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

olarak tanımlanır. Eğer $h(A) = 1$ ise A fuzzy kümesine normal fuzzy küme denir.

$\alpha \in [0, 1]$ ve A, X kümesi üzerinde bir fuzzy küme olsun. Bu durumda

$$A^\alpha = \begin{cases} \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\} & , \alpha \in (0, 1] \text{ ise} \\ \text{cl } S(A) & , \alpha = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

kümesine A fuzzy kümesinin α -kesmesi denir. Burada $\text{cl } S(A)$ ile $\text{supp}(A)$ kümesinin kapanışı gösterilmektedir.

A fuzzy kümesi $\mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde tanımlı olsun. Eğer her $\alpha \in [0, 1]$ için A^α α -kesme kümeleri konveks küme ise A fuzzy kümesine konveks fuzzy küme denir.

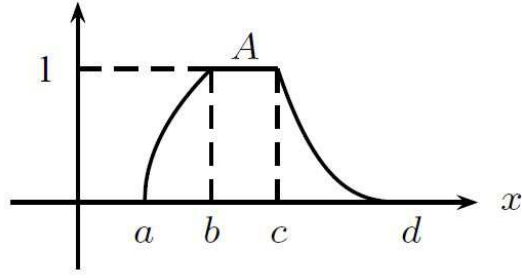
Tanım 2.3.1. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir A fuzzy kümesi, konveks, $0 < h(A) \leq 1$, μ_A üyelik fonksiyonu üst yarı sürekli ve $S(A)$ destek kümesi sınırlı ise A fuzzy kümesine bir genelleştirilmiş fuzzy sayı denir. Eğer, $h(A) = 1$ ise A ya fuzzy sayı denir.

Uygulamalarda çoğunlukla genelleştirilmiş fuzzy sayılar yerine üçgensel, yamuk, LR-fuzzy sayılar gibi özel tipteki fuzzy sayılar kullanılmaktadır.

$L, R : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sürekli, artan ve $L(0) = R(0) = 0, L(1) = R(1) = 1$ koşullarını sağlayan iki fonksiyon olsun. Ayrıca $a \leq b \leq c \leq d$ gerçel sayıları verilsin. Bu durumda

$$A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad A = \begin{cases} 0 & , x < a \\ L\left(\frac{x-a}{b-a}\right) & , a \leq x < b \\ 1 & , b \leq x < c \\ R\left(\frac{d-x}{d-c}\right) & , c \leq x < d \\ 0 & , d \leq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan A fuzzy sayısına LR-fuzzy sayı denir (bkz. Şekil 2.6).

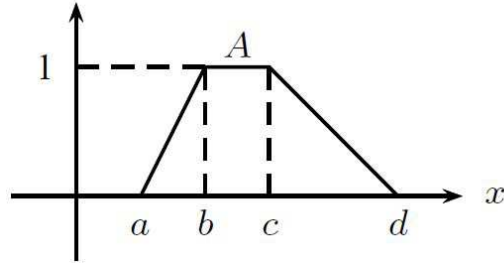


Şekil 2.6. *LR-fuzzy sayı*

Özel olarak L ve R fonksiyonları lineer ise yani

$$A = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x < b \\ 1 & , b \leq x < c \\ \frac{d-x}{d-c} & , c \leq x < d \\ 0 & , d \leq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan A fuzzy sayısına yamuk fuzzy sayı denir ve $A = (a, b, c, d)$ ile gösterilir (bkz. Şekil 2.7).

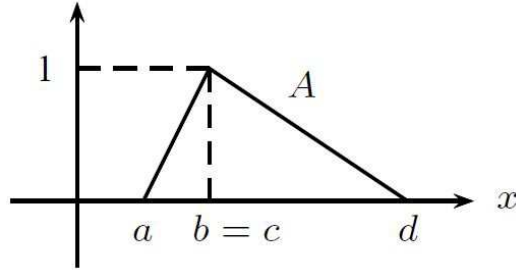


Şekil 2.7. *Yamuk fuzzy sayı*

Eğer $b = c$ ise

$$A = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x < b \\ \frac{d-x}{d-b} & , b \leq x < d \\ 0 & , d \leq x \end{cases}$$

biçiminde elde edilen A fuzzy sayısına üçgensel fuzzy sayı denir ve $A = (a, b, d)$ şeklinde yazılabilir (bkz. Şekil 2.8).



Şekil 2.8. Üçgensel fuzzy sayı

2.3.1. Fuzzy sayılarda işlemler

Zadeh'in genişleme prensibi yardımıyla fuzzy sayılar üzerinde temel aritmetik işlemler aşağıdaki şekilde tanımlanır [18].

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \mu_{(A+B)}(z) = \sup_{z=x+y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\},$$

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \mu_{(A-B)}(z) = \sup_{z=x-y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\},$$

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \mu_{(A \cdot B)}(z) = \sup_{z=x \cdot y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\},$$

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \mu_{(A/B)}(z) = \sup_{z=x/y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}.$$

Fuzzy sayılardaki aritmetik işlemler α -kesmeleri yardımıyla da tanımlanabilir.

Toplama: A ve B iki fuzzy sayı

$$A^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \quad \text{ve} \quad B^\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$$

bu sayıların α -kesmeleri olsun. Yani

$$A^\alpha = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad \text{ve} \quad B^\alpha = \{x | \mu_B(x) \geq \alpha\}$$

olsun. Bu durumda

$$A^\alpha + B^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] + [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]$$

olur.

Çıkarma: A ve B fuzzy sayıları için çıkarma işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(A - B)^\alpha = A^\alpha - B^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha], \forall \alpha \in [0, 1].$$

Bu çıkarma işlemi, B^α kümesininin aşağıdaki gibi $-$ ile çarpılıp

$$\forall \alpha \in [0, 1], B^{\alpha-} = [-b_2^\alpha, -b_1^\alpha]$$

A ile B^- nin toplamıyla da elde edilebilir.

Çarpma: A ve B fuzzy sayıları için çarpma işlemi aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$(A \cdot B)^\alpha = A^\alpha \cdot B^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \cdot [b_1^\alpha, b_2^\alpha], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

$\mathbb{R}$ de bir fuzzy sayının herhangi bir $k \in \mathbb{R}^+$ sayısı ile çarpımı aşağıdaki gibidir.

$$\forall A \subset \mathbb{R}, \quad k.A^\alpha = [k \cdot a_1^\alpha, k \cdot a_2^\alpha], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Bölme: A ve B fuzzy sayıları için bölme işlemi aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$A^\alpha / B^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] / [b_1^\alpha, b_2^\alpha], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Fuzzy Sayının Karesi: μ_{A^2} ile gösterilen A fuzzy sayısının karesi bir fuzzy sayıdır ve aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\mu_{A^2}(y) = \max(\mu_A(\sqrt{y}), \mu_A(-\sqrt{y})).$$

Fuzzy Sayının Karekökü: Bir A fuzzy sayısının karekökü

$$[\sqrt{A}]^\alpha = [\sqrt{a_1^\alpha}, \sqrt{a_2^\alpha}]$$

şeklinde tanımlanır.

$$A = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{ve} \quad B = (b_1, b_2, b_3)$$

şeklinde verilen A ve B üçgensel fuzzy sayıları için toplama ve çıkarma işlemleri aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} A + B &= (a_1, a_2, a_3)(+)(b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} A - B &= (a_1, a_2, a_3)(-)(b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Çarpma işleminde α -kesme kümeleri yardımıyla işlem yapmak kolaylık kazandırmaktadır. Bu nedenle A ve B üçgensel fuzzy sayılarının α -kesmeleri aşağıdaki gibi olsun:

$$A^\alpha = [f_A(\alpha), g_A(\alpha)] \quad \text{ve} \quad B^\alpha = [f_B(\alpha), g_B(\alpha)].$$

O halde bu iki sayının çarpımı olan $A \cdot B$ nin α -kesme kümesi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} A^\alpha \cdot B^\alpha &= [\min_{\alpha=0} \{f_A(\alpha) \cdot f_B(\alpha), f_A(\alpha) \cdot g_B(\alpha), g_A(\alpha) \cdot f_B(\alpha), g_A(\alpha) \cdot g_B(\alpha)\} \\ &\quad , \max_{\alpha=0} \{f_A(\alpha) \cdot f_B(\alpha), f_A(\alpha) \cdot g_B(\alpha), g_A(\alpha) \cdot f_B(\alpha), g_A(\alpha) \cdot g_B(\alpha)\}]. \end{aligned}$$

Buradan $\alpha = 0$ için $A^0 \cdot B^0 = [x_1, x_3]$ ve $\alpha = 1$ için $A^1 \cdot B^1 = [x_2, x_2]$ elde edilirse $A \cdot B$ fuzzy sayısı:

$$A \cdot B = (x_1, x_2, x_3) \quad (2.7)$$

olarak bulunur. Bu yazımda $(x_1, 0)$ ve $(x_2, 1)$ noktaları ile $(x_2, 1)$ ve $(x_3, 0)$ noktaları arası doğrusal değildir. Bu nedenle çarpım sonucu üçgensel fuzzy sayı değildir [13]. Buna rağmen sonuç üçgensel fuzzy sayılara benzediğinden bu çalışmada çarpım sonuçları da sıralı üçlü olarak verilecektir.

Bölme işlemi için de çarpmaya benzer olarak A ve B üçgensel fuzzy sayılarının α -kesmeleri aşağıdaki gibi olsun:

$$A^\alpha = [f_A(\alpha), g_A(\alpha)] \quad \text{ve} \quad B^\alpha = [f_B(\alpha), g_B(\alpha)].$$

O halde bu iki sayının bölümü olan A/B nin α -kesme kümesi aşağıdaki gibi olur.

$$A^\alpha/B^\alpha = \left[\min_{\alpha=0} \{f_B(\alpha)/f_A(\alpha), g_B(\alpha)/f_A(\alpha), f_B(\alpha)/g_A(\alpha), g_B(\alpha)/g_A(\alpha)\} \right. \\ \left. , \max_{\alpha=0} \{f_B(\alpha)/f_A(\alpha), g_B(\alpha)/f_A(\alpha), f_B(\alpha)/g_A(\alpha), g_B(\alpha)/g_A(\alpha)\} \right].$$

Buradan $\alpha = 0$ için $A^0/B^0 = [x_1, x_3]$ ve $\alpha = 1$ için $A^1/B^1 = [x_2, x_2]$ elde edilirse A/B fuzzy sayısı

$$A/B = (x_1, x_2, x_3) \quad (2.8)$$

olarak bulunur. Çarpmaya benzer olarak bu sonuç da üçgensel fuzzy sayı değildir fakat benzerdir.

2.4. Kesikli Fuzzy Sayılar

Tanım 2.4.1. Gerçel sayılar üzerinde üyelik fonksiyonu $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ olan bir A fuzzy kümesi verilsin. Eğer A nın desteği (support'u) sonlu ise yani $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ olmak üzere

$$\text{supp}(A) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

olacak şekilde $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gerçel sayıları varsa ve $1 \leq s \leq t \leq n$ için

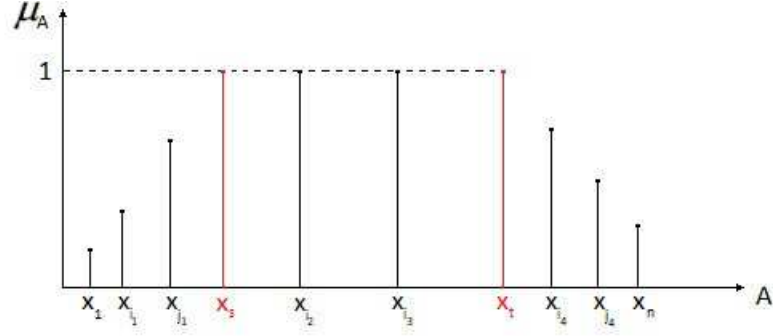
$$(1) \quad s \leq i \leq t \text{ için } \mu_A(x_i) = 1$$

$$(2) \quad 1 \leq i \leq j \leq s \text{ için } \mu_A(x_i) \leq \mu_A(x_j) \text{ ve } t \leq i \leq j \leq n \text{ için } \mu_A(x_i) \geq \mu_A(x_j)$$

koşullarını sağlayan s ve t doğal sayıları varsa A fuzzy kümesine kesikli fuzzy sayı denir (bkz. Şekil 2.9).

Eğer u kesikli bir fuzzy sayı ise aşağıdaki dört koşulu sağlar:

(1) Her $\alpha \in [0, 1]$ için $[u]^\alpha$ ile gösterilen α -kesmesi $\mathbb{R}$ nin boş olmayan sonlu bir altkümesidir.



Şekil 2.9. Kesikli fuzzy sayı

(2) $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ şartıyla $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ için $[u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1}$ dir.

(3) $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ şartıyla $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ için eğer $x \in [u]^{\alpha_1} \setminus [u]^{\alpha_2}$ ise $\forall y \in [u]^{\alpha_2}$ için $x < y$ dir veya $\forall y \in [u]^{\alpha_2}$ için $x > y$ dir.

(4) Her $\alpha_0 \in (0, 1]$ için $0 < \alpha'_0 < \alpha_0$ şartını sağlayan bazı α'_0 reel sayıları vardır öyle ki $[u]^{\alpha'_0} = [u]^{\alpha_0}$ olur. (Başka bir deyişle $\forall \alpha \in [\alpha'_0, \alpha_0]$ için $[u]^\alpha = [u]^{\alpha_0}$) olur.

2.4.1. Kesikli fuzzy sayılarda işlemler

Bu kısımda, kesikli fuzzy sayılarda toplama işlemi için iki farklı yöntem üzerinde durulacaktır. Wang'ın toplama yöntemi aşağıdaki gibi tanımlanır [17].

Tanım 2.4.2. A_1, A_2 kesikli fuzzy sayıları için $A_1 + A_2 = A_{12}$ toplamı da kesikli fuzzy sayıdır ve α -kesme kümeleriyle aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\text{supp}(A_1) + \text{supp}(A_2) = \{x_1 + x_2 | x_j \in \text{supp}(A_j), j = 1, 2\},$$

$$\min\{A_1^\alpha + A_2^\alpha\} = \min\{x_1 + x_2 | x_j \in A_j^\alpha, j = 1, 2\},$$

$$\max\{A_1^\alpha + A_2^\alpha\} = \max\{x_1 + x_2 | x_j \in A_j^\alpha, j = 1, 2\} \text{ iken}$$

$A_{12} = \{x \in \{\text{supp}(A_1) + \text{supp}(A_2)\} | \min\{A_1^\alpha + A_2^\alpha\} \leq x \leq \max\{A_1^\alpha + A_2^\alpha\}\}$ şeklindedir ve üyelik fonksiyonu da

$$\mu_{A_1+A_2}(x) = \sup\{\alpha \in [0, 1] | x \in \{A_1^\alpha + A_2^\alpha\}\}$$

olur.

J. Casanovas ve J. V. Riera'nın çalışmasındaki toplama yönteminde ise kesikli fuzzy sayılar fuzzy sayılara dönüştürülerek toplanmaktadır [7]. Kesikli fuzzy sayıyı fuzzy sayı olarak kullanabilmek için aşağıdaki kuralın sağlanması gerekir.

FDN: Tüm Kesikli Fuzzy Sayıların kümesini

FN: Tüm Fuzzy Sayıların kümesini belirtmek üzere,

$supp(u) = \{x_1, \dots, x_s, \dots, x_t, \dots, x_n\}$ iken $s \leq i \leq t$ olacak şekilde her i doğal sayısı için $u(x_i) = 1$ olmak şartıyla, $\forall u \in FDN$ için $\tilde{u} \in FN(u)$ ise, $\tilde{u}$ aşağıdaki şartları sağlar.

- (1) $supp\tilde{u} = [x_1, x_n]$
- (2) Her $i = 1, \dots, n$ için $x_i \in supp(u)$ ise $\tilde{u}(x_i) = u(x_i)$ dir.
- (3) $1 \leq i \leq i+1 \leq s$ şartıyla $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$ için $u(x_i) \leq \tilde{u}(x) \leq u(x_{i+1})$ eşitsizliği sağlanır.
- (4) $t \leq i \leq i+1 \leq n$ şartıyla $x \in [x_i, x_{i+1}]$ için $u(x_i) \geq \tilde{u}(x) \geq u(x_{i+1})$ eşitsizliği sağlanır.

Kesikli fuzzy sayılardan fuzzy sayılara dönüşüm işlemi yapıldıktan sonra toplama işlemi aşağıdaki gibi tanımlanabilir .

Tanım 2.4.3. u fuzzy sayısı $s \leq p \leq t$ olmak şartıyla her p doğal sayısı için $u(x_p) = 1$ olacak şekilde tanım kümesi $supp(u) = \{x_1, \dots, x_s, \dots, x_t, \dots, x_n\}$ olan bir kesikli fuzzy sayı olsun. v fuzzy sayısı da $m \leq p \leq k$ olmak şartıyla her p doğal sayısı için $v(y_p) = 1$ olacak şekilde tanım kümesi $supp(v) = \{y_1, \dots, y_m, \dots, y_k, \dots, y_r\}$ olan başka bir kesikli fuzzy sayı olsun.

$A : FDN \rightarrow FN$ bir fonksiyon olsun öyle ki $\forall u \in FDN$ için $A(u) \in FN(u)$ dur. $u \oplus v$ olarak gösterilecek fuzzy kümeler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$supp(u \oplus v) = \left\{ \begin{array}{l} z \in R \quad \text{öyle ki} \quad z = x + y \\ x \in supp(u), \quad y \in supp(v) \end{array} \right\}$$

$$(u \oplus v)(z) = (A(u) \oplus A(v))(z) \quad \forall z \in supp(u \oplus v)$$

Tanım 2.4.4. A_1, A_2 kesikli fuzzy sayılarının $A_{12} = A_1 - A_2$ farkı $\alpha -$ kesme kümeleriyle aşağıdaki şekilde tanımlanır [1].

$$supp(A_1) - supp(A_2) = \{x_1 - x_2 | x_j \in supp(A_j), j = 1, 2\},$$

$$\min\{A_1^\alpha - A_2^\alpha\} = \min\{x_1 - x_2 | x_j \in A_j^\alpha, j = 1, 2\},$$

$$\max\{A_1^\alpha - A_2^\alpha\} = \max\{x_1 - x_2 | x_j \in A_j^\alpha, j = 1, 2\} \text{ olmak şartıyla,}$$

$$A_{12}^\alpha = \{x \in \{supp(A_1) - supp(A_2)\} | \min\{A_1^\alpha - A_2^\alpha\} \leq x \leq \max\{A_1^\alpha - A_2^\alpha\}\}$$

şeklindedir ve üyelik fonksiyonu da

$$\mu_{A_1-A_2}(x) = \sup\{\alpha \in [0, 1] \mid x \in \{A_1^\alpha - A_2^\alpha\}\}$$

olur.

Tanım 2.4.5. (Hukuhara Farkı) A_1, A_2 kesikli fuzzy sayıları için $A_{12} = A_1 -_h A_2$ Hukuhara farkı kesikli bir fuzzy sayıdır öyle ki $A_1 = A_2 + A_{12}$ dir [1].

Hukuhara farkı sadece $n \geq m$ iken geçerlidir.

$$supp(A_1) = \{x_{11}, \dots, x_{1n}\}, A_1^\alpha = \{x_{11}^\alpha, \dots, x_{1n_\alpha}^\alpha\}, 1_\alpha, n_\alpha \in \{1, \dots, n\} \text{ ve}$$

$supp(A_2) = \{x_{21}, \dots, x_{2m}\}$, $A_2^\alpha = \{x_{21_\alpha}^\alpha, \dots, x_{2m_\alpha}^\alpha\}$, $1_\alpha, m_\alpha \in \{1, \dots, m\}$ olarak belirtilsin.

$supp(A_{12}) = \{x_1, \dots, x_k\}$, $A_{12}^\alpha = \{x_{1_\alpha}, \dots, x_{r_\alpha}\}$, $l_\alpha, r_\alpha \in \{1, \dots, k\}$ olmak üzere A_{12} Hukuhara farkı vardır ancak ve ancak her $\alpha \in (0, 1]$ için A_1^α nın kardinalitesi A_2^α nın kardinalitesinden az değil ise ve

$A_{1,i}^\alpha = \{x_{1i1}^\alpha, \dots, x_{1im}^\alpha\}$, $x_{1i(j+1)}^\alpha - x_{1ij}^\alpha = x_{2j+1}^\alpha - x_{2j}^\alpha$, $j = 1, \dots, m$; $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere

$$A_1^\alpha = \bigcup_{i=1}^{r_\alpha - l_\alpha + 1} A_{1,i}^\alpha$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.4.6. A_1, A_2 kesikli fuzzy sayılarının $A_{12} = A_1 \cdot A_2$ çarpımının α -kesmesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$supp(A_1) \cdot supp(A_2) = \{x_1 \cdot x_2 | x_j \in supp(A_j), j = 1, 2\},$$

$$\min\{A_1^\alpha \cdot A_2^\alpha\} = \min\{x_1 \cdot x_2 | x_j \in A_j^\alpha, j = 1, 2\},$$

$$\max\{A_1^\alpha \cdot A_2^\alpha\} = \max\{x_1 \cdot x_2 | x_j \in A_j^\alpha, j = 1, 2\} \text{ olmak şartıyla,}$$

$A_{12}^\alpha = \{x \in \{supp(A_1) \cdot supp(A_2)\} | \min\{A_1^\alpha \cdot A_2^\alpha\} \leq x \leq \max\{A_1^\alpha \cdot A_2^\alpha\}\}$ şeklindedir ve üyelik fonksiyonu da

$$\mu_{A_1 \cdot A_2}(x) = \sup\{\alpha \in [0, 1] | x \in \{A_1^\alpha \cdot A_2^\alpha\}\}$$

olur.

Tanım 2.4.7. $0 \notin supp(A_2)$ olmak şartıyla A_1, A_2 kesikli fuzzy sayılarının $A_{12} = A_1/A_2$ bölümü bir kesikli fuzzy sayıdır ve bu sayının α -kesmesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$supp(A_1)/supp(A_2) = \{x_1/x_2 | x_j \in supp(A_j), j = 1, 2\},$$

$$\min\{A_1^\alpha/A_2^\alpha\} = \min\{x_1/x_2 | x_j \in A_j^\alpha, j = 1, 2\},$$

$$\max\{A_1^\alpha/A_2^\alpha\} = \max\{x_1/x_2 | x_j \in A_j^\alpha, j = 1, 2\} \text{ olmak şartıyla,}$$

$A_{12}^\alpha = \{x \in \{supp(A_1)/supp(A_2)\} | \min\{A_1^\alpha/A_2^\alpha\} \leq x \leq \max\{A_1^\alpha/A_2^\alpha\}\}$ şeklindedir ve üyelik fonksiyonu da

$$\mu_{A_1/A_2}(x) = \sup\{\alpha \in [0, 1] | x \in \{A_1^\alpha/A_2^\alpha\}\}$$

şeklinde olur.

Tanım 2.4.8. A kesikli fuzzy sayısının karesi A^2 de bir kesikli fuzzy sayıdır ve bu sayının α -kesmesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$supp(A^2) = \{y | y = x^2, x \in supp(A)\},$$

$$\min(A^\alpha)^2 = \min\{y | y = x^2, x \in A^\alpha\},$$

$\max(A^\alpha)^2 = \max\{y|y = x^2, x \in A^\alpha\}$ olmak şartıyla

$[A^2]^\alpha = \{y \in \text{supp}(A^2) | \min((A^\alpha)^2) \leq y \leq \max((A^\alpha)^2)\}$ şeklindedir.

Böylece $[A^2]^\alpha = (A^\alpha)^2$ olur. A^2 'nin üyelik fonksiyonu da aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\mu_{A^2}(y) = \sup\{\alpha \in [0, 1] | y \in [A^2]^\alpha\}.$$

Tanım 2.4.9. $\text{supp}(A) \subset [0, \infty)$ iken A kesikli fuzzy sayısının karekökü $\sqrt{A}$ da bir kesikli fuzzy sayıdır ve bu sayının α -kesmesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\text{supp}(\sqrt{A}) = \{y|y = \sqrt{x}, x \in \text{supp}(A)\},$$

$$\min \sqrt{A^\alpha} = \min\{y|y = \sqrt{x}, x \in A^\alpha\},$$

$$\max \sqrt{A^\alpha} = \max\{y|y = \sqrt{x}, x \in A^\alpha\} \text{ olmak üzere}$$

$$[\sqrt{A}]^\alpha = \{y \in \text{supp}(\sqrt{A}) | \min \sqrt{A^\alpha} \leq y \leq \max \sqrt{A^\alpha}\} \text{ şeklindedir.}$$

Böylece $[\sqrt{A}]^\alpha = \sqrt{A^\alpha}$ olur. $\sqrt{A}$ nın üyelik fonksiyonu da

$$\mu_{\sqrt{A}}(y) = \sup\{\alpha \in [0, 1] | y \in [\sqrt{A}]^\alpha\}$$

olur.

3. Z-SAYILAR

Yaşamımızda sıklıkla karar verme sorunlarıyla karşı karşıya kalırız. Doğru kararı verebilmek için güvenilir bilgiye ihtiyacımız vardır. Genel olarak Z-sayılar bilginin güvenilirliği konusuyla ilgilidir. Bir Z-sayının $Z = (A, B)$ olacak şekilde iki bileşeni vardır. Burada A bileşeni reel değerli X belirsiz değişkeni üzerinde bir kısıttır. B bileşeni ise birinci bileşenin güvenilirlik (kesinlik) ölçüsüdür. Burada A ve B doğal dilde konuşulan kavramları karakterize etmektedir. Z-sayılar kesin olmayan fonksiyonlar ve ilişkilerini karakterize etmede kullanılmaktadır.

Kısıtlama kavramı kısıt kavramından biraz daha genel bir kavramdır. Örneğin bir olasılık dağılımı kısıtlama iken kısıt değildir. Bir kısıtlama genelleştirilmiş bir kısıt olarak görülebilir [19]. Bu tezde, kısıtlama ve kısıt terimleri birbirinin yerine kullanılmıştır.

$$R(X) : X \text{ is } A$$

$$R(X) : X, A \text{ dır}$$

Kısıtında A olarak gösterilen ifade X in olasılık dağılımı rolünde olmakla birlikte olabilirlik kısıtı gibidir. Daha spesifik olarak, μ_A sembolü A nın üyelik fonksiyonu ve u da X in genel değeri iken,

$$R(X) : X, A \text{ dır} \rightarrow P(X = u) = \mu_A(u)$$

şeklinde ifade edilir. μ_A olarak verilen üyelik fonksiyonu $R(X)$ ile ilgili bir kısıtlama olarak görülebilir yani $\mu_A(u)$, u nun kısıtlamayı karşılama derecesidir.

X Rastlantı değişkeni olduğu zaman, X in olasılık dağılımı X üzerinde olabilirlik kısıtı rolündedir. Olabilirlik kısıtı aşağıdaki gibi ifade edilir.

p ifadesi X in olasılık yoğunluk fonksiyonu iken,

$$R(X) : X \text{ isp } p$$

$$R(X) : X, p \text{ dir}$$

kısıtlaması olasılıksal kısıtlama olarak ifade edilir. Bu durumda

$$R(X) : X, p \text{ dir} \rightarrow P(u \leq X \leq u + du) = p(u)du$$

yazılabilir.

Genel olarak "kısıtlama" terimi " X, R dir" şeklinde karşımıza çıkar. Bazen de "kısıtlama" R için geçerlidir. "Kısıtlama" içeriğin belirginleştirilmesini sağlar.

(X, A, B) sıralı üçlüsü Z -değeri olarak adlandırılır. Z -değeri " $X, (A, B)$ dir" ifadesine eşdeğerdir. Eğer A tek noktalı küme değilse X belirsiz değişkendir.

Benzer şekilde belirsiz hesaplama dediğimiz olgu bir hesaplama sistemidir. Bu sistemde hesaplama sonuçları değişkenlerin değeri değildir fakat değişkenlerin değeri üzerinde bir kısıttır. Bu tezde aksi belirtilmedikçe X rastlantı değişkeni olarak kabul edilecektir. Kolaylık olması açısından X in değerine A denir. Daha net bir ifadeyle söylemek gerekirse A , X in değeri değildir fakat X in alabileceği değerler üzerinde bir kısıttır. İkinci bileşen B kesinlik olarak ifade edilir. Kesinlik kavramı güven, güvenilirlik, dayanıklılık, inancın gücü, olasılık vb. kavramlarla yakından ilgilidir. X rastlantı değişkeni olduğunda, kesinlik dediğimiz kavram olasılık kavramına eşit olabilir. Başka bir deyişle, B şu soruya yanıt olarak yorumlanabilir: X değişkeninin A olduğuna emin misin? Tipik olarak A ve B algıya dayalıdır ve doğal konuşma diliyle tanımlanmıştır. Z -değerlerinin bir derlemesi " Z -bilgisi" olarak ifade edilir. Unutulmamalıdır ki günlük akıl yürütme ve karar verme süreçlerinin çoğu aslında " Z -bilgisi"ne dayanmaktadır. Hesaplama amacıyla A ve B doğal konuşma dilinde tanımlandığında A ve B nin anlamı sırasıyla μ_A ve μ_B üyelik fonksiyonlarıyla ilişkilendirme yoluyla derecelendirilir. A nın üyelik fonksiyonu μ_A sorulacak olan şu sorularla ortaya çıkarılabilir: A yı algılayışınıza göre verilen bir sayının derecesi kaç olmalıdır? Örneğin: 45 dakika civarı için sizin algınıza göre 50 dakikanın derecesi nedir? Aynısı B içinde geçerlidir. A fuzzy kümesi, X in olasılık dağılımı olarak yorumlanabilir. Z -sayılar kavramı çeşitli şekillerde genelleştirilebilir. Özellikle X in $\mathbb{R}^n$ den değer aldığı varsayılabilir. Bu durumda A , fuzzy sayıların bir kartezyen çarpımıdır. Z -değeri için basit örnekler verilecek olursa

(Beklenen bütçe açığı, iki milyon dolara yakın, büyük ihtimalle)

(Yakın gelecekte petrol fiyatı, önemli ölçüde 100 dolar/varilin üstünde, büyük ihtimalle)

Eğer X rastlantı değişkeniyse, " X , A dır" ifadesi $\mathbb{R}$ de bir fuzzy olayı temsil eder. Bu olayın olasılığı aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$p = \int_{\mathbb{R}} \mu_A(u) p_X(u) du.$$

Burada p_X ile gösterilen X in temel olasılık yoğunluğudur. Gerçekten (X, A, B) olarak verilen " Z -değeri" X üzerinde bir kısıt olarak görülebilir ve aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$Z : \text{Prob}(X \text{ is } A) \text{ is } B$$

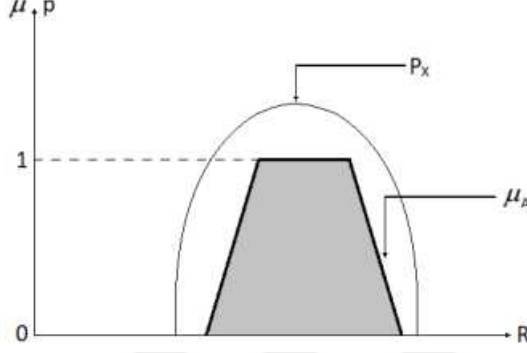
$$P(X, A \text{ dır}), B \text{ dir}$$

$Z = (A, B)$ şeklindeki bir Z -sayısında altı çizilmesi gereken şey, aşağıdaki gibi

ifade edilen p_X temel olasılık dağılımının bilinmemesidir.

$$p = \int_R \mu_A(u) p_X(u) du, \quad B \text{ dir.}$$

p_X ile μ_A arasındaki ilişki şekil 3.1 ile gösterilebilir [2].



Şekil 3.1. A nın üyelik fonksiyonu ve X in olasılık yoğunluk fonksiyonu

B olarak ifade ettiğimiz ikinci bileşen A nın olasılığı üzerinde değil A nın olasılık ölçüsü üzerinde bir kısıttır. Eğer B , A nın olasılık ölçüsü üzerinde kısıt değilse A nın olasılığı üzerinde bir kısıt olsaydı, (A, B) sayısı "Z-sayı" olmazdı.

Aslında bir Z-sayı p_X in özeti olarak görülebilir. Her gün yaşadığımız karar verme süreçlerinde çoğu kararımızın bilgilerin özeti doğrultusunda olduğu önemli bir noktadır. Z-sayılara özet olarak bakmakta bu gerçeklikle tutarlıdır. Karar analizleri uygulamalarında Z-sayıların sıralanması ortaya çıkan temel problemlerden biridir.

Örneğin:

(Yaklaşık olarak 100, muhtemelen) ifadesi (Yaklaşık olarak 90, büyük ihtimalle) ifadesinden büyük müdür? Bu anlamlı bir soru mudur?

p_X ile B arasındaki ilişkinin bir sonucu aşağıdaki gibidir.

A' ifadesi A nın tümleyenini, Z' ifadesi Z nin tümleyenini belirtmek üzere,

$$Z = (A, B) \quad \text{ise} \quad Z' = (A', 1 - B) \quad \text{dir.}$$

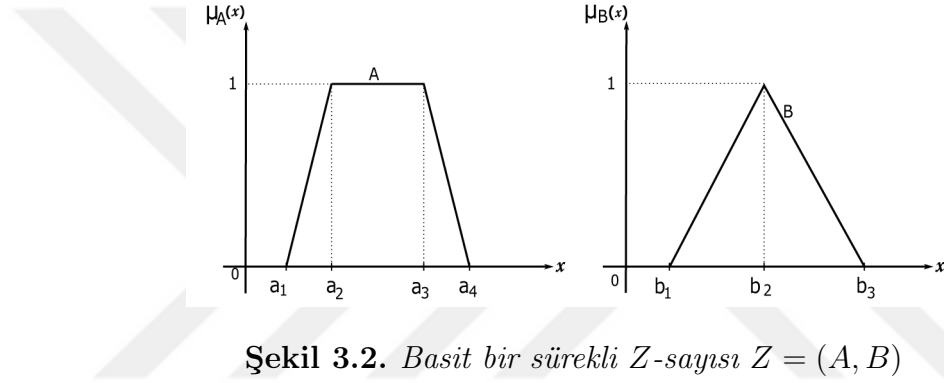
Burada $1 - B$ de B nin karşıtıdır. Örneğin: $Z = (A, \text{muhtemelen})$ 'in tümleyeni $Z' = (A \text{ nın değili, muhtemel olmayan})$ şeklindedir.

Z-sayıların önemli bir niteliği bilgilendirici olmasıdır. Her zaman değil ama genellikle eğer bir Z-sayının ifadesi yüksek özgünlükte ise yani fazlaca kısıtlanmışsa ve kesinliği yüksekse bu Z-sayı bilgilendirici niteliktedir. Z-sayı bir kararın temelindeyse bilgilendiricilik arzu edilen şeydir. Temel bir soru: Bir Z-sayı'nın bilgilendiriciliği bu Z-sayının kullanılabilir olması için yani akıllıca karar verebilmek için ne zaman yeterli olur?

3.1. Sürekli ve Kesikli Z-Sayılar, Z^+ -Sayıları

Z-sayı kavramının olasılık teorisindeki güven aralığı kavramından daha genel bir kavram olduğuna dikkat edilmelidir. Z-sayı kavramıyla fuzzy rastgele sayı ve fuzzy rastgele değişken kavramları arasında bağlantı vardır.

Tanım 3.1.1. A , X rastgele değişkeninin " X , A dır" ifadesinde alabileceği değerler üzerinde fuzzy kısıtlama rolü oynayan sürekli bir fuzzy sayı, B ise " $P(A)$ is B " ($P(A)$, B dir) ifadesi ile verilen A nın olasılık ölçüsü olan $P(A)$ nın üzerinde fuzzy kısıtlama rolü oynayan ve $\mu_B : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ üyelik fonksiyonu ile bir fuzzy sayı olmak üzere $Z = (A, B)$ ikilisine sürekli Z-sayı denir (bkz. Şekil 3.2).



Şekil 3.2. Basit bir sürekli Z-sayısı $Z = (A, B)$

Tanım 3.1.2. A , X rastgele değişkeninin " X , A dır" ifadesinde alabileceği değerler üzerinde fuzzy kısıtlama rolü oynayan kesikli bir fuzzy sayı, B ise " $P(A)$ is B " ($P(A)$, B dir) ifadesi ile verilen A nın olasılık ölçüsü olan $P(A)$ nın üzerinde fuzzy kısıtlama rolü oynayan ve $\mu_B : b_1, \dots, b_n \rightarrow [0, 1]$, $b_1, \dots, b_n \subset [0, 1]$ üyelik fonksiyonu ile kesikli bir fuzzy sayı olmak üzere $Z = (A, B)$ ikilisine kesikli Z-sayı denir.

Tanım 3.1.3. Z^+ -sayısı, $Z^+ = (A, R)$ ikilisi olarak ifade edilir. Burada A yine Z sayısındaki aynı rolü oynar. R ise rastgele bir sayının olasılık dağılımıdır. Yani R , (X, A, B) deki X in gizli olasılık dağılımı olarak yorumlanabilir. Z^+ sayısı (A, p_X) veya (μ_A, p_X) olarak ifade edilir.

Z^+ -sayı kavramı Z-sayı kavramıyla yakından ilgilidir. Bir " Z^+ -değeri" de p_X ifadesi X in olasılık dağılım (yoğunluk) fonksiyonu olmak üzere (X, A, p_X) veya (X, μ_A, p_X) olarak ifade edilebilir. Bir Z^+ -sayısı X in olasılık-olabilirlik dağılımlarının birleşimi olan dağılım ve bimodal dağılım olarak adlandırılan kavram ile ilişkilidir. μ_A ve p_X in ağırlık merkezleri çakışık ise bu dağılımlar

uyumludur.

$$\int_R u p_X(u) du = \frac{\int_R u \mu_A(u) du}{\int_R \mu_A(u) du}.$$

Tanım 3.1.4. μ_A ve p_X in skaler çarpımı olan $\mu_A \cdot p_X$ ifadesi A nın olasılık ölçüsüdür ve $P(A)$ olarak gösterilir. Yani

$$\mu_A \cdot p_X = P(A) = \int_R \mu_A(u) p_X(u) du$$

olur.

Yukarıda verilen tanım Z^+ -sayısını Z -sayı kavramı ile ilişkilendiren bağıntıdır.

$$Z(A, B) = Z^+(A, \mu_A \cdot p_X \quad B \text{ dir}).$$

Vurgulanması gereken şey Z -sayısının bilindiği, p_X olasılık dağılımının bilinmediği fakat p_X üzerinde bir kısıtın bilindiği durumda " $\mu_A \cdot p_X$, B dir" şeklinde ifade edilir. Bir Z^+ -sayısı Z -sayısından daha fazla bilgi içerir. Z^+ -sayılarla hesaplama işlemleri Z -sayılarla hesaplama yapabilmek için bir geçittir.

X , U sonlu kümesi $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ üzerinde değer alabilen reel değerli bir değişken olsun. X üzerinde aynı anda μ olabilirlik dağılımı ve p olasılık dağılımı aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$\mu = \mu_1/u_1 + \mu_2/u_2 + \dots + \mu_n/u_n,$$

$$p = p_1 \setminus u_1 + p_2 \setminus u_2 + \dots + p_n \setminus u_n.$$

Bu denklemlerde $i = 1, 2, \dots, n$ için μ_i/u_i ifadesi $X = u_i$ nin olabilirlik derecesi ve benzer şekilde $p_i \setminus u_i$ ifadesi de $X = u_i$ nin olasılığının p_i olması demektir. μ olabilirlik dağılımıyla p olasılık dağılımının birleşimi

$$\mu : p = (\mu_1, p_1)/u_1 + \dots + (\mu_n, p_n)/u_n$$

biçiminde ifade edilir.

$\mu \cdot p$ olarak ifade edilen skaler çarpım A nın olasılık ölçüsüdür. Bimodal dağılım terimlerinde Z^+ -değeri ve Z -değeri X e bağlıdır ve aşağıdaki gibi ifade edilir

$$(X, A, p_X)$$

$$(X, A, B), \quad \mu_A \cdot p_X \quad B \text{ dir}.$$

Burada B nin $\mu_A \cdot p_X$ üzerinde olabilirlik kısıtı olduğu hatırlanmalıdır.

Z ve Z^+ nın her ikisi de X in alabileceği değerler üzerinde kısıt olarak görülebilir ve sırasıyla; " X, Z dir" ve " X, Z^+ dır" şeklinde yazılır. X üzerinde

kısıt olarak görünen Z ve Z^+ sayıları, bağımlılıkların karakterizasyonu ve bilginin temsili açısından önemli kavramlar olarak ortaya çıkar. Bu bağlamda "fuzzy if-then kuralı" kavramının fuzzy mantık uygulamalarının bir çoğunda kilit rol oynar. Bunu Z -sayı ve Z^+ -sayılarına dahil öncül veya sonuçlar içinde Z -kuralı-if-then-kuralı konusuyla ilgili küçük bir tartışma takip eder.

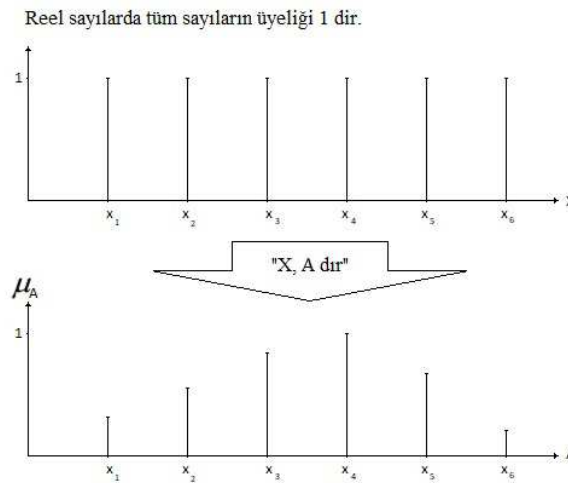
Temel bir fuzzy eğer-ise kuralı şu şekilde ifade edilebilir: A ve B fuzzy sayılar olmak üzere; eğer " X, A dır" ise " Y, B dir". Böyle bir kuralın söylemek istediği aşağıda verilen tanımdaki gibidir.

$A \times B$, A ve B nin kartezyen çarpımı olmak üzere; Eğer " X, A dır" ise " Y, B dir" $\rightarrow "(X, Y), A \times B$ dir" [20].

" Z -değeri" terimleri kullanarak Z -sayılar için temel eğer-ise kuralının genelleştirilmesi aşağıdaki gibidir.

Eğer (X, A_X, B_X) ise (Y, A_Y, B_Y) dir.

Z -sayılar özetlenecek olursa, kesikli bir $Z = (A, B)$ ikilisindeki birinci bileşen için, " X, A dır." fuzzy olayı Şekil 3.3'deki gibi örneklenebilir.

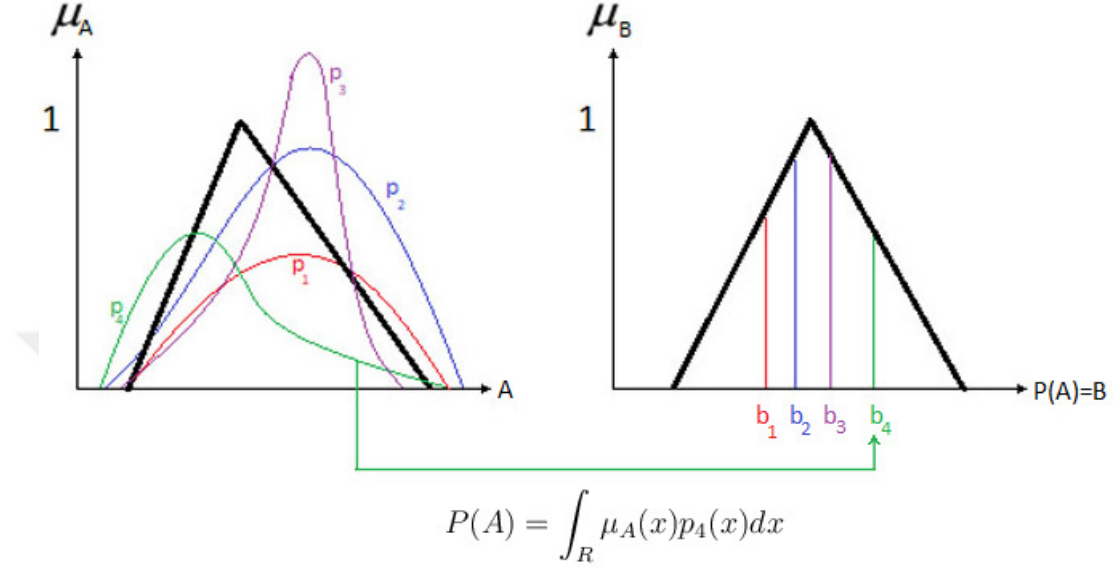


Şekil 3.3. Kesikli bir Z -sayı için " X, A dır" fuzzy olayı örneği

Üstteki grafikte X rastlantı değişkeninin alabileceği değerler için bir kısıtlama yok iken yani her birinin üyelik derecesi bir iken, " X, A dır" fuzzy olayından sonra X in alabileceği değerler üzerine kısıtlar gelmiştir. Yani X rastlantı değişkeni, tanımlı olduğu her değeri artık 1 üyelik derecesiyle alamamaktadır. " $P(X), B$ dir" fuzzy olayı da benzer şekildedir. p olasılık dağılımları kullanılarak " $P(X, A$ dır)" olasılıkları normal sayı olarak bulunur. Daha sonra bu olasılık sonuçlarının her birine fuzzy kısıt eklendiğinde " $P(A), B$ dir" fuzzy olayı uygulanmış olur.

$Z = (A, B)$ ikilisinde B fuzzy sayısının altında yatan olasılık dağılımlarının ne anlama geldiği Şekil 3.4 ile görülebilir. Burada X rastlantı değişkeni üzerinde B nin

temel değerlerini veren olasılık dağılımları vardır. Örneğin yeşil renk ile gösterilen p_4 olasılık dağılımı kullanılarak hesaplanan $P(A)$ olasılığı, B fuzzy sayısında b_4 temel değerini verir. Benzer şekilde sırasıyla p_1, p_2 ve p_3 olasılık dağılımları kullanılırsa b_1, b_2 ve b_3 temel değerleri bulunur. Bu dağılımlar kesikli Z -sayılarda



Şekil 3.4. Sürekli bir $Z = (A, B)$ -sayısında p_X olasılık dağılımları ile B nin temel değerleri arasındaki ilişki.

$$b_l = P(A) = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)p(x_i),$$

sürekli Z -sayılarda

$$b_l = P(A) = \int_R \mu_A(x)p(x)dx,$$

eşitliklerinin sonuçlarıyla, B fuzzy sayısının temel değerlerini oluştururlar.

Böylece $Z = (A, B)$ olarak ifade edilen bir Z -sayısında A ve B fuzzy kısıtlamalarının ne anlama geldiği ve Z -sayısının bileşenleri arasındaki ilişki (bkz. Şekil 3.4) özetlenmiş olur.

3.2. Z -sayılar Üzerinde Aritmetik İşlemler

Z -sayılarla hesaplama yapmak ne anlama gelir, basit bir örnek olarak Eskişehir'den Polatlı'ya Sivrihisar üzerinden arabayla gitmek istediğimizi varsayalım. Bu sezgiye dayalı bilgiler " Z -değerli" olarak şu şekilde ifade edilebilir: (Eskişehir'den Sivrihisar'a seyahat süresi, 1 saat civarı, genellikle) ve (Sivrihisar'dan Polatlı'ya seyahat süresi, 45 dakika civarı, genellikle). Bu durumda

Eskişehir'den Polatlı'ya arabayla gitmek ne kadar sürer? Bu durumda, (1 saat civarı, genellikle) ve (45 dakika civarı, genellikle) şeklindeki iki Z -sayının toplamının yapılması gerekir. Z -sayılarla hesaplamayı içeren problemleri belirtmesi kolaydır fakat çözmesi o kadar kolay değildir. Örneğin: (A, B) nin karekökü nedir? Kelimelerle verilmiş bilgiler üzerinde hesaplama yapabilmek için Z -sayılarla hesaplama yapmamız gerekir. Büyük ölçüde, Z -sayılarla hesap yapmak alışılmadık bir duruma girişmektir.

Z^+ -sayılarla hesap yapmak Z -sayılara göre çok daha basittir. $*$ işlemi $Z_X^+ = (A_X, R_X)$ ile $Z_Y^+ = (A_Y, R_Y)$ şeklindeki Z^+ -sayıları arasında bir ikili işlemi gösterebilir. $R_X * R_Y$ deki $*$ ile $A_X * A_Y$ deki $*$ ın aynı anlama gelmediğini hatırlatarak tanımdan,

$$Z_X^+ * Z_Y^+ = (A_X * A_Y, R_X * R_Y)$$

eşitliği yazılabilir. Bu ifadede $A_X * A_Y$ deki $*$ işleminin terimleri fuzzy sayılar, $R_X * R_Y$ deki $*$ işleminin terimleri ise olasılık dağılımlarıdır.

Örneğin: $*$ işleminin toplama işlemi olsun. Bu durumda $A_X + A_Y$ toplamı $\wedge = \min$ olmak üzere

$$\mu_{(A_X+A_Y)}(v) = \sup_u (\mu_{A_X}(u) \wedge \mu_{A_Y}(v-u))$$

şeklinde tanımlıdır.

Benzer şekilde $R_X * R_Y$ birbirinden bağımsız R_X ve R_Y olasılık yoğunluk fonksiyonlarının konvolüsyon, $\circ$, fonksiyonudur. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonlarını göstermek için p_{R_X} ve p_{R_Y} gösterimleri kullanılır. Böylece aşağıdaki eşitlik yazılabilir

$$p_{R_X+R_Y}(v) = \int_R p_{R_X}(u) p_{R_Y}(v-u) du.$$

Yani

$$Z_X^+ + Z_Y^+ = (A_X + A_Y, p_{R_X} \circ p_{R_Y})$$

olur.

Burada R_X ve R_Y nin bağımsız olma varsayımı en kötü durum analizini gerektirir.

Daha genel olarak, $Z_X * Z_Y$ hesabını yapmak için ihtiyaç duyulan şey fuzzy mantığın genişleme prensibidir. Temel olarak genişleme prensibi parametrelerin değerinin olmadığı fakat parametrelerin değerlerin üzerinde kısıtlar olduğu bilindiğinde bir fonksiyonun değerlendirilmesi için bir kuraldır. Başka bir deyişle bahsedilen kural bir fonksiyonun değerinin değerlendirilmesini içerir.

Bu tezde genişleme prensibinin kısıtlamalarla belirtilen daha geniş bir anlamı vardır. Daha genel olarak, bilgi eksikliği aynı zamanda fonksiyonların özellikle

eğer-ise kuralı şeklinde tanımlanan fonksiyonlar hakkındaki bilgi eksikliğinin argümanların değerleri için geçerlidir. Genişleme prensibinin birçok versiyonu vardır. Temel versiyonunda genişleme prensibi aşağıdaki gibi tanımlanabilir [18].

A fuzzy küme, μ_A , A nın üyelik fonksiyonu, μ_Y , Y nin üyelik fonksiyonu ve u ve v , sırasıyla X ve Y nin genel değişkenleri iken, $v = f(u)$ olmak üzere,

$$Y = f(X)$$

$$R(X) : X, A \text{ dir } (\mu_A(u), u \text{ üzerinde kısıttır})$$

$$R(Y) : \mu_Y(v) = \sup_u \mu_A(u)(f(u) = R(Y)).$$

Bu kuralın kesikli olanı da aşağıdaki gibidir:

$$v = f(u_i) \text{ olmak üzere,}$$

$$Y = f(X)$$

$$R(X) : X, (\mu_1/u_1 + \dots + \mu_n/u_n) \text{ dir}$$

$$R(Y) : \mu_Y(v) = \sup_{u_1, \dots, u_n} \mu_i.$$

Aynı kuralın genel versiyonu ise aşağıdaki gibidir:

$$v = f(u) \text{ olmak üzere,}$$

$$Y = f(X)$$

$$R(X) : g(X), A \text{ dir } (\mu_A(g(u)), u \text{ üzerinde bir kısıttır})$$

$$R(Y) : \mu_Y(v) = \sup_u \mu_A(g(u)).$$

İki değişkenli bir fonksiyon için genişleme prensibi aşağıdaki gibidir:

$$w = f(v, u) \text{ olmak üzere,}$$

$$Z = f(X, Y)$$

$$R(X) : g(X), A \text{ dir } (\mu_A(g(u)), u \text{ üzerinde bir kısıttır})$$

$$R(Y) : h(Y), B \text{ dir } (\mu_B(h(v)), v \text{ üzerinde bir kısıttır})$$

$$R(Z) : \mu_Z(w) = \sup_{u,v} (\mu_X(g(u)) \wedge \mu_Y(h(v))), \quad \wedge = \min.$$

Olasılıksal kısıtlamalar için uygulamalarda, genişleme prensibi olasılık dağılım fonksiyonlarıyla ilgili standart sonuçlarla benzer sonuçlara yol açar. Özellikle kesikli olasılık dağılımları için, aşağıdaki genişleme prensibi elde edilir: $v = f(u_i)$ olmak üzere,

$$Y = f(X)$$

$$R(X) : X, p \text{ dir, } p = p_1 \setminus u_1 + \dots + p_n \setminus u_n.$$

$$R(Y) : p_Y(v) = \sum_i p_i \quad (f(p) = R(Y)).$$

İki değişkenli fonksiyonlar için $w = f(u_i, v_i)$ olmak üzere,

$$Z = f(X, Y)$$

$$R(X) : X, p \text{ dir}, p = p_1 \setminus u_1 + \cdots + p_m \setminus u_m.$$

$$R(Y) : Y, q \text{ dir}, q = q_1 \setminus v_1 + \cdots + q_n \setminus v_n.$$

$$R(Z) : p_Z(w) = \sum_{i,j} p_i q_j \quad (f(p, q) = R(Z)).$$

Kısıtların Z^+ -sayılar olduğu durumda genişleme prensibi aşağıdaki gibidir:

$$Z = f(X, Y)$$

$$R(X) : X, (A_X, p_X) \text{ dir}$$

$$R(Y) : Y, (A_Y, p_Y) \text{ dir}$$

$$R(Z) = (f(A_X, A_Y), f(p_X, p_Y)).$$

Genişleme prensibinin bu bölümü, Z -sayılarla hesaplama yapmanın temelidir. Peki, $f(p_X, p_Y)$, $f(A_X, A_Y)$ ile uyumlu mudur?

Z -sayılarla hesaplamaya dönülürse, $*$ işlemi toplama olsun. $Z_X = (A_X, B_X)$ ve $Z_Y = (A_Y, B_Y)$ olarak kabul edilsin. Şu anda problem, $Z = X + Y$ toplamını hesaplamaktır. Bağlantılı Z -değerleri de (X, A_X, B_X) , (Y, A_Y, B_Y) ve (Z, A_Z, B_Z) olarak alınsın.

İlk aşamada p_Z nin hesaplanması gerekmektedir. p_X ve p_Y nin bilindiği düşünülürse ve Z^+ -sayıların toplamında yapıldığı gibi ilerlenirse,

$$p_Z = p_X \circ p_Y$$

olarak hesaplanır veya daha somut olarak,

$$p_Z(v) = \int_R p_X(u) p_Y(v - u) du$$

ile hesaplanır.

p_X ve p_Y nin olmadığını fakat p_X ve p_Y üzerinde kısıt olduğunu bildiğimiz Z -sayıların olduğu durumda,

$$\int_R \mu_{A_X}(u) p_X(u) du, \quad B_X \quad \text{dir},$$

$$\int_R \mu_{A_Y}(u) p_Y(u) du, \quad B_Y \quad \text{dir}.$$

B_X ve B_Y nin üyelik fonksiyonlarının terimlerindeki kısıtlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\mu_{B_X} \left(\int_R \mu_{A_X}(u) p_X(u) du \right),$$

$$\mu_{B_Y} \left(\int_R \mu_{A_Y}(u) p_Y(u) du \right).$$

p_X ve p_Y üzerindeki ek kısıtlamalar aşağıdaki gibidir:

$$\int_R p_X(u) du = 1,$$

$$\int_R p_Y(u) du = 1,$$

$$\int_R u p_X(u) du = \frac{\int_R u \mu_{A_X}(u) du}{\int_R \mu_{A_X}(u) du} \quad (\text{uyumluluk}),$$

$$\int_R u p_Y(u) du = \frac{\int_R u \mu_{A_Y}(u) du}{\int_R \mu_{A_Y}(u) du} \quad (\text{uyumluluk}),$$

olmak üzere, yukarıda $p_Z = p_X \circ p_Y$ verilen bilgiler yardımı ile sonuç olarak

$$\mu_{p_Z}(p_Z) = \sup_{p_X, p_Y} \left(\mu_{B_X} \left(\int_R \mu_{A_X}(u) p_X(u) du \right) \wedge \mu_{B_Y} \left(\int_R \mu_{A_Y}(u) p_Y(u) du \right) \right)$$

olur.

Değişkenler üzerindeki birleşik kısıtlama, kısıtlamaların bir birleşimi olarak ifade edilir ve $\wedge$ minimumu gösterir. Gerçekte, genişleme prensibinin uygulamaları, p_Z nin hesabını bir fonksiyonel optimizasyon problemine indirger. Dikkat edilmesi gereken nokta, çözüm p_Z nin bir değeri değildir ama p_X ve p_Y üzerindeki kısıtlarla tutarlı olarak p_Z nin değerleri üzerinde bir kısıttır.

Z^+ -sayılarla uğraşırken p_X ve p_Y nin bir fonksiyonu gibi p_Z için bir ifadeye ulaşılır. Bu ifade kullanılarak ve genişleme prensibi uygulanarak p_X ve p_Y üzerindeki kısıtlar tarafından p_Z üzerinde kısıt hesaplanabilir. Göz önüne alınan p_Z değerleri verilen bilgiyle tutarlı olan p_Z değerlerinden oluşmaktadır.

Verilen p_Z için " Z, A_Z dir" fuzzy olayının olasılık hesaplaması yapılır. Daha önce belirtildiği gibi fuzzy mantıkta, " X, A dir" fuzzy olayının olasılık ölçüsü, A bir fuzzy küme ve X, p_X olasılık dağılımıyla bir rastlantı değişkeni iken, aşağıdaki gibi

$$\int_R \mu_A(u) p_X(u) du$$

idi. Bu ifade kullanılarak, A_Z nin olasılık ölçüsü aşağıdaki gibidir.

$$\mu_{A_Z}(u) = \sup_v (\mu_{A_X}(v) \wedge \mu_{A_Y}(u - v))$$

olmak üzere

$$B_Z = \int_R \mu_{A_Z}(u)p_Z(u)du$$

şeklinde tanımlanır.

Burada, p_Z bilinen bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğunda, B_Z bir sayı olur. p_Z olasılık dağılımı üzerinde $\mu_{p_Z}(p_Z)$ fuzzy kısıtı bilindiğinde, B_Z üyelik fonksiyonu μ_{B_Z} olan bir fuzzy küme olur. Genişleme prensibi kullanılarak

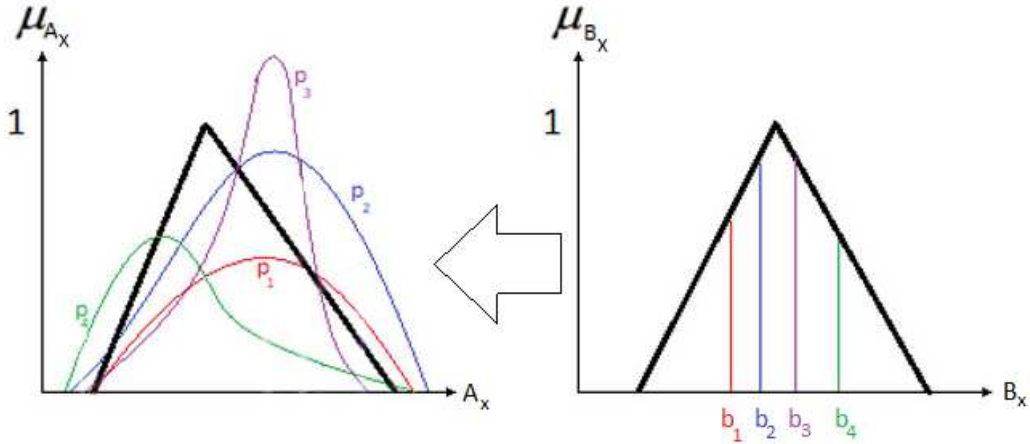
$$w = \int_R \mu_{A_Z}(u)p_Z(u)du$$

iken

$$\mu_{B_Z}(w) = \sup_{p_Z} \mu_{p_Z}(p_Z)$$

dir ve $\mu_{p_Z}(p_Z)$ birinci adımın sonucudur. Z_X ve Z_Y olarak alınan Z -sayıların toplamı hesaplanmış olur.

Yukarıda anlatılanları özetlersek önce Z^+ -sayılara geçilir. Yani B_X ve B_Y nin temel değerlerine karşılık gelen olasılık dağılımları bulunur.

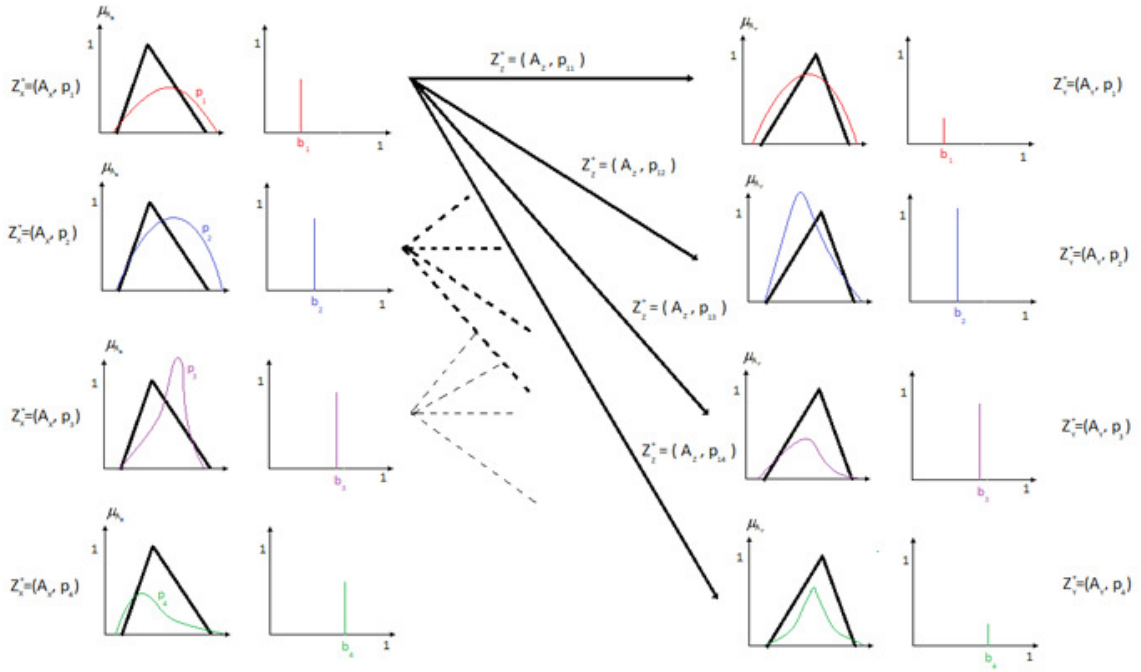


Şekil 3.5. B_X fuzzy sayısının temel değerlerine karşılık gelen olasılık dağılımları.

Şekil 3.5’de B_X fuzzy sayısının temel değerlerine karşılık gelen ve bulunması gereken olasılık dağılımları gösterilmiştir. Bu dağılımlar kesikli fuzzy sayılarda lineer hedef programlama yöntemi, fuzzy sayılarda ise normal olasılık dağılımı kullanılarak Newton-Raphson Yöntemiyle hesaplanır. Böylece $Z_X^+ = (A_X, p_X)$ sayıları elde edilmiş olur. B_Y fuzzy sayısının temel değerlerine karşılık gelen p_Y olasılık dağılımları da benzer şekilde bulunabilir.

Sonra, $Z_Z^+ = (A_X + A_Y, p_X + p_Y)$ toplamı bulunur.

Şekil 3.6’de Z_X^+ sayıları ile Z_Y^+ sayılarının her birinin birbiriyle toplanması gerektiği görülmektedir. Böylece $Z_Z^+ = (A_Z, p_Z)$ toplamı elde edilir.



Şekil 3.6. $Z_Z^+ = (A_Z, p_{ji})$ toplamı için Z_X^+ ve Z_Y^+ eşleştirmeleri.

Elde edilen olasılık dağılımlarının fuzzy kısıtları bulunur. Aslında bu kısıtlar zaten B bileşeninde mevcut olduğundan, hangi olasılık dağılımı B nin hangi temel değerine karşılık geliyorsa, o temel değer in üyelik derecesi olasılık dağılımının üyelik derecesi olarak kabul edilir.

Şekil 3.7’de verilen örnekte p_X olasılığına karşılık elde edilen $b_X = 0.4$ değeri için üyelik derecesi $\mu_{B_X}(0.4) = 0.7$ olduğundan $\mu_{p_X}(p_X) = 0.7$ olarak kabul edilir.

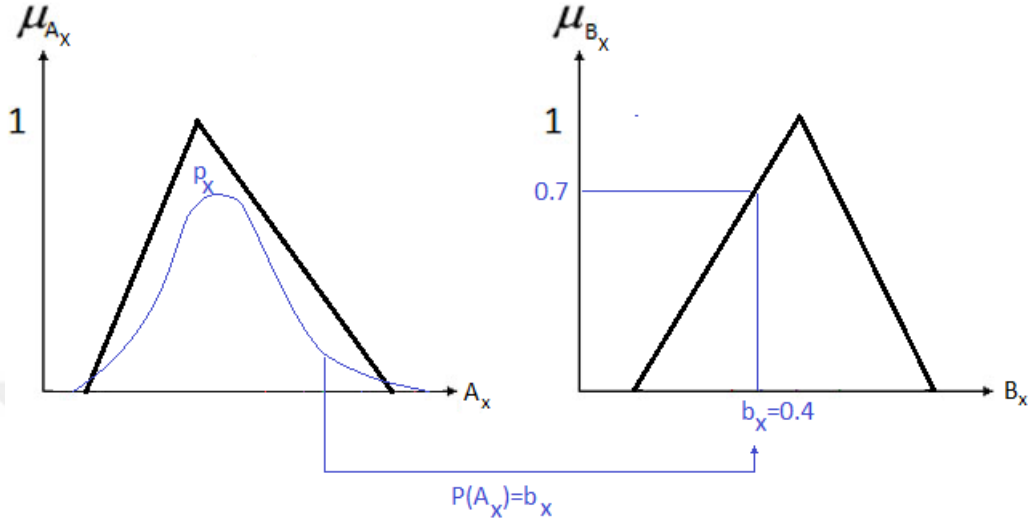
Elde edilen $\mu_{p_X}(p_X)$ ve $\mu_{p_Y}(p_Y)$ üyelik derecelerinden $p_Z = p_X \circ p_Y$ nin $\mu_{p_Z}(p_Z)$ üyelik derecesi hesaplanır. Bu üyelik derecesi, toplanan iki olasılık dağılımından küçük olanın derecesine eşittir. Yani,

$$\mu_{p_Z}(p_Z) = \mu_{p_X}(p_X) \wedge \mu_{p_Y}(p_Y)$$

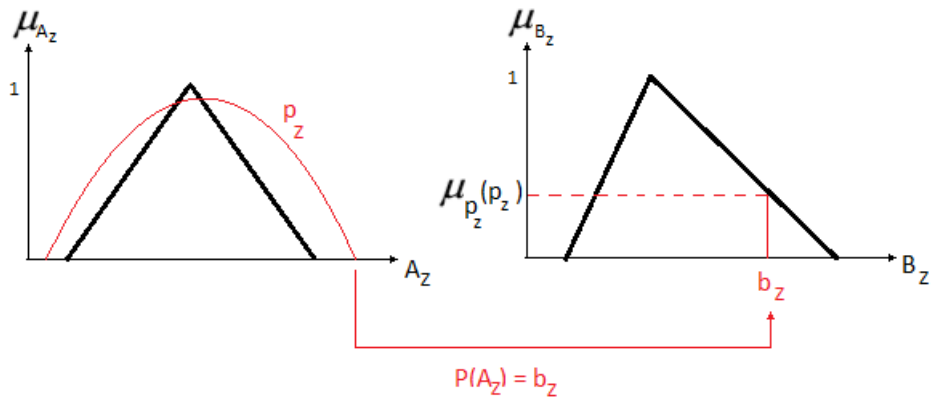
eşitliği ile bulunur.

Daha sonra B_Z fuzzy sayısının b_Z temel değerleri bulunur. Bu değerler elde edilen $A_Z = A_X + A_Y$ fuzzy sayısı ve $p_Z = p_X \circ p_Y$ olasılık dağılımları ile hesaplanan $P(A_Z)$ olasılık ölçüsüdür. Yani $P(A_Z) = b_Z$ dir.

Şekil 3.8’de fuzzy sayıların toplamı olan A_Z nin, olasılık dağılımlarının toplamı olan p_Z konvolüsyonu kullanılarak elde edilen olasılık ölçümü değerinin b_Z olduğu görülmektedir. Bu ölçüm sonucu B_Z nin temel değerlerinden sadece bir tanesi bulunur. A_Z bir tanedir fakat p_Z ler, her p_X ve p_Y nin ayrı ayrı konvolüsyonu olduğu için oldukça fazladır. Bu durumda her bir p_Z için A_Z nin olasılık ölçüsü tekrar tekrar hesaplanmalı ve B_Z nin tüm temel değerleri bulunmalıdır.



Şekil 3.7. p_X olasılık dağılımı için fuzzy kısıt belirleme.



Şekil 3.8. B_Z fuzzy sayısının bir temel değeri b_Z yi ve üyelik derecesini belirleme.

Son olarak b_Z temel değerleri için fuzzy kısıtları oluşturulur. Daha önce elde edilen b_Z temel değerleri için üyelik derecesi, b_Z yi elde ederken kullanılan $p_Z = p_X \circ p_Y$ işlemindeki p_X ve p_Y nin üyelik derecelerinden hangisi daha küçük ise o alınarak hesaplanır. Şekil 3.8'de bu durum,

$$\mu_{b_Z} = \mu_{p_Z}(p_Z) = \mu_{p_X}(p_X) \wedge \mu_{p_Y}(p_Y)$$

ile gösterilmiştir.

Böylece B_Z içinde tüm temel değerler ve fuzzy kısıtlar belirlenmiş ve B_Z nin fuzzy küme yapısı oluşturulmuş olur. Sonuç olarak

$$Z_X + Z_Y = (A_X, B_X) + (A_Y, B_Y) = (A_Z, B_Z)$$

hesaplanmış olur.

3.3. Kesikli Z -Sayı ve Kesikli Z^+ -Sayı Arasındaki İlişki

A kesikli bir fuzzy sayı olsun. A nın olasılık ölçüsü olan $P(A)$

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) p(x_i) \\ &= \mu_A(x_{j1}) p_j(x_{j1}) + \mu_A(x_{j2}) p_j(x_{j2}) + \cdots + \mu_A(x_{jn_j}) p_j(x_{jn_j}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

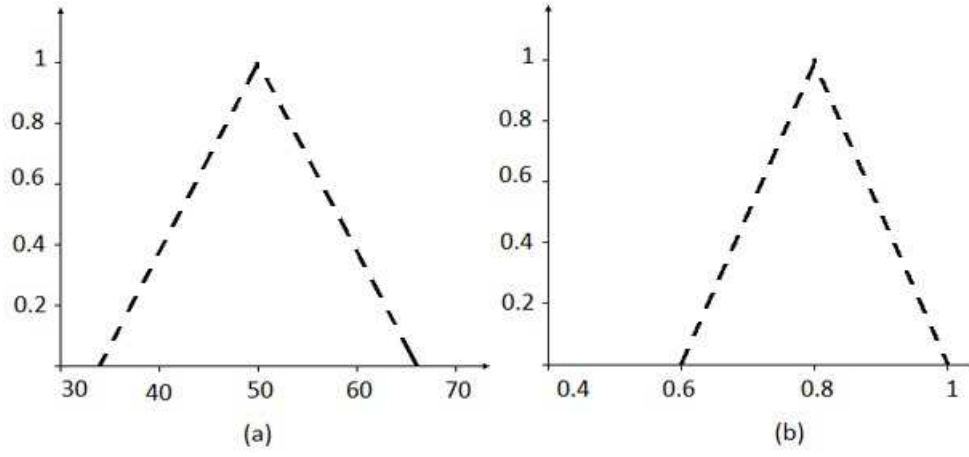
Kesikli Z -sayı ve Kesikli Z^+ -sayı kavramları arasındaki farkı daha iyi anlamak için aşağıdaki örneğe bakılacak olursa

(Yağ ücreti 50 \$/varil civarı olacak, büyük ihtimalle)

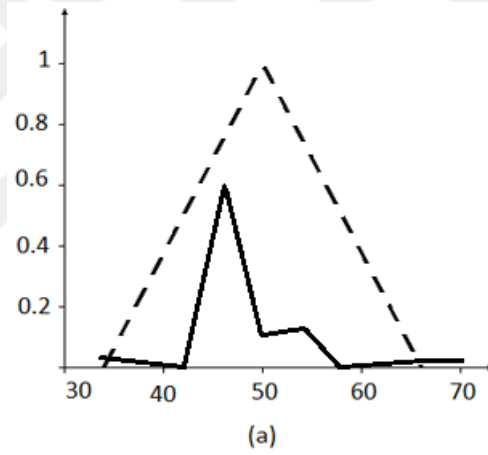
Bu kısmen güvenilir dilsel bilgi Şekil 3.9 ile gösterilen A ve B tarafından oluşturulmuş $Z = (A, B)$ sayısı ile tanımlanabilir [2].

Burada B fuzzy sayısı A fuzzy sayısının olasılık ölçüsü olan $P(A)$ üzerinde esnek bir kısıt vazifesi yapmaktadır. $P(A)$ bazı olasılık dağılımlarının temeli üzerine tanımlıdır. $P(A)$ nın belirsizliği gerçek olasılık dağılımının bilinmediği anlamına gelir. Tersine "büyük ihtimalle" teriminin doğal belirsizliği nedeniyle olası olasılık dağılımları üzerinde esnek bir kısıt kullanılmalıdır veya başka bir deyişle bu sözel ifade olasılık dağılımlarının bir fuzzy kümesi ile temsil edilebilir.

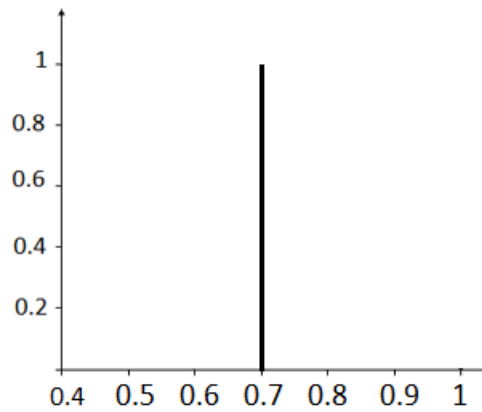
Bu durumda gerçek olasılık dağılımı p bilindiğinde, $Z^+ = (A, p)$ olan kesikli Z^+ -sayı kavramı kullanılır (bkz. Şekil 3.10) [2]. Bu $P(A)$ olasılık ölçüsü ile ilgili bilgilerin daha eksiksiz olduğu bir durumdur ve bu nedenle bu sayılarda Z nin üstünde $+$ sembolü kullanılır.



Şekil 3.9. $Z=(A,B)$ yağ fiyatı üzerindeki dilsel olarak ifade edilen kısmen güvenilir bilgiyi tanımlamak için kullanılır. Burada (a) A kesikli fuzzy sayısını (b) B kesikli fuzzy sayısını göstermektedir.



Şekil 3.10. A kesikli fuzzy sayısı (kesikli grafik) ve kesikli olasılık dağılımı (sürekli eğri) ile oluşan $Z^+ = (A,p)$ şeklindeki Z^+ -sayısı.



Şekil 3.11. $P(A)$ olasılık ölçüsünün tam değeri.

p gerçek olasılık dağılımı A fuzzy sayısının $P(A)$ olasılık ölçüsünün gerçek değerinin elde edilmesini sağlar. Şekil 3.10'da gösterilen Z^+ -sayısı için, $P(A)$ olasılık ölçüsü değeri Şekil 3.11'de gösterilmiştir [2].

Bu nedenle $Z^+ = (A, p)$ sayısı aşağıdaki bilgiyi ifade eder.

(Yağ ücreti 50 \$/varil civarı olacak, 0.7 olasılıkla)

Elbette bu ilk başta verilen dilsel ifadeden daha kesin bir ifadedir fakat onun kadar gerçekçi değildir.

3.4. Sürekli ve Kesikli Z-Sayılar Hakkında Tartışma

Z -sayılarla hesaplama yapma Zadeh tarafından öne sürülmüştür [21]. Genel olarak bu hesaplama iki tane lineer olmayan varyasyonel problem içerir. Hesaplamanın karmaşıklığını azaltmak için küçük bir doğruluk kaybı altında sürekli Z -sayılarla yeni bir yaklaşım önerilmektedir. Bu yaklaşım sürekli hale getirilmiş kesikli Z -sayılar dikkate alınarak oluşturulur. Kesikli Z -sayıların kullanılmasının asıl nedeni gerçek dünya problemlerinin ilgili bilgiler kullanılarak dilsel olarak daha iyi karakterize edilebilmesidir. Dilsel bilgi her zaman anlamlı dilsel terimlerden oluşan bir küme ile tanımlanabilir. Örneğin, aşağıdaki Z -sayı temelli değerlendirme ele alınırsa

(Yağ fiyatları yakın gelecekte orta seviyede olacaktır, büyük ihtimalle).

Görüldüğü üzere, bu değerlendirmede dilsel terimler kullanılmıştır. Bu da Z -sayıların dilsel terimlerin kümesini taban olarak kullanması anlamına gelir. Bu kümeler sıralı dilsel ölçeklerle temsil edilebilir. Bahsedilen bu sıralı dilsel ölçekler durumu, küme içindeki harflerin sırasıyla *çok düşük*, *düşük*, ..., *normal*, ..., *yüksek*, *çok yüksek* terimlerine karşılık geldiği $M = \{\text{ÇD}, D, \dots, N, \dots, Y, \text{ÇY}\}$ kümesi ile ve küme içindeki harflerin sırasıyla *muhtemel olmayan*, *pek muhtemel değil*, ..., *muhtemel*, ..., *çok muhtemel*, *son derece muhtemel* terimlerine karşılık geldiği $N = \{\text{MO}, \text{PMD}, \dots, M, \dots, \text{ÇM}, \text{SDM}\}$ kümesi ile gösterilebilir. Örnekte bahsedilen ölçeklerin dilsel ifadelerini artan sırada yazacak olursak şu şekilde sıralıdır: $\text{ÇD} \prec D \prec \dots \prec N \prec \dots \prec Y \prec \text{ÇY}$ ve $\text{MO} \prec \text{PMD} \prec \dots \prec M \prec \dots \prec \text{ÇM} \prec \text{SDM}$. Dolayısıyla bahsedilen ölçekte dilsel ifadelere karşılık ardışık sayılar getirilebilir ve bu da bizi $L = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ kümesine ulaştırır.

Sürekli Z -sayıların yerine kesikli Z -sayıların ele alınması, bir yandan yeterlilik ve genellik arasında birinden feragat etmeyi kolaylaştırır, diğer yandan hesabın zorluğunu önemli ölçüde azaltmamızı sağlar. Evrensellik olasılık dağılımlarının türü hakkında düşünmeye gerek olmadığını ve genel durumu düşünmeyi ima eder.

Üyelik fonksiyonlarının sürekli ve olasılık dağılımlarının kesikli olmasından kaynaklanan doğruluk kaybıyla ilgili olarak nitel bir bakış açısıyla birçok problem önemli olmayabilir. Kesikli Z -sayılarla hesaplama yapmak sürekli Z -sayılarla hesaplama yapmaktan daha kolaydır.



4. SÜREKLİ Z-SAYILAR ÜZERİNDE ARİTMETİK İŞLEMLER

4.1. Sürekli Z-Sayılar Üzerinde Toplama İşlemi

$Z_1 = (A_1, B_1)$ ve $Z_2 = (A_2, B_2)$, reel değerli X_1 ve X_2 rastgele değişkenleri üzerindeki eksik bilgiyi tanımlayan sürekli Z -sayılar olsun. $Z_{12} = Z_1 + Z_2$ toplamı nasıl yapılır? Daha önce de belirtildiği gibi Z -sayılarla hesaplamaya başlamak için Z^+ -sayılar üzerinde hesaplamalar yapılır. $Z_{12}^+ = Z_1^+ + Z_2^+$ Z^+ -sayısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Z_1^+ + Z_2^+ = (A_1 + A_2, R_1 + R_2).$$

Genel olarak R_1 ve R_2 olasılık dağılımlarının ailesi olarak düşünülür. Daha basit olarak aşağıdaki normal olasılık dağılımlarını ele alalım:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2]}, \quad (4.1)$$

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2})^2]}. \quad (4.2)$$

A_1 ve A_2 gibi iki fuzzy sayının $A_1 + A_2$ toplamı A_1^α ve A_2^α α -kesmeleri yardımıyla

$$A_1^\alpha = [a_{11}^\alpha, a_{12}^\alpha]; \quad A_2^\alpha = [a_{21}^\alpha, a_{22}^\alpha]$$

veya

$$A_1^\alpha = \{x | \mu_{A_1}(x) \geq \alpha\}; \quad A_2^\alpha = \{x | \mu_{A_2}(x) \geq \alpha\}$$

iken

$$A_1^\alpha + A_2^\alpha = [a_{11}^\alpha, a_{12}^\alpha] + [a_{21}^\alpha, a_{22}^\alpha] = [a_{11}^\alpha + a_{21}^\alpha, a_{12}^\alpha + a_{22}^\alpha]$$

şeklinde tanımlanır.

Olasılık dağılımlarının $R_1 + R_2$, $p_{12} = p_1 \circ p_2$ konvolüsyonunda aşağıdaki gibi tanımlı

$$p_{12} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{[-\frac{1}{2} \frac{(x - (\mu_1 + \mu_2))^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}]}$$

sürekli olasılık dağılımıdır.

Böylece $Z_{12}^+ = (A_1 + A_2, p_{12})$ şeklindeki Z_{12}^+ -sayısı elde edilir ve bununla da Z -sayılarla hesaplamaların ilk adımı atılmış olur.

Bir sonraki aşamada $Z_1 = (A_1, B_1)$ ve $Z_2 = (A_2, B_2)$ sayılarının p_1 ve p_2 olasılık dağılımlarının tam olarak bilinmediği fark edilir. Tersine mevcut bilgi fuzzy kısıtlarla aşağıdaki gibi temsil edilmektedir:

$$\int_R \mu_{A_1}(x_1) p_{R_1}(x_1) dx_1, \quad B_1 \text{ dir,}$$

$$\int_R \mu_{A_2}(x_2)p_{R_2}(x_2)dx_2, \quad B_2 \text{ dir.}$$

Üyelik fonksiyonları

$$\mu_{B_1} \left(\int_R \mu_{A_1}(x_1)p_{R_1}(x_1)dx_1 \right)$$

ve

$$\mu_{B_2} \left(\int_R \mu_{A_2}(x_2)p_{R_2}(x_2)dx_2 \right)$$

olur.

Bu kısıtlar, p_1 ve p_2 olasılık dağılımlarının, üyelik fonksiyonları

$$\mu_{p_{R_1}}(p_{R_1}) = \mu_{B_1} \left(\int_R \mu_{A_1}(x_1)p_{R_1}(x_1)dx_1 \right)$$

ve

$$\mu_{p_{R_2}}(p_{R_2}) = \mu_{B_2} \left(\int_R \mu_{A_2}(x_2)p_{R_2}(x_2)dx_2 \right)$$

ile tanımlanan fuzzy kümelerine sahip olduğunu gösterir.

Böylece B_j , $j = 1, 2$ sayısı A_j nin olasılık ölçüsünün değeri üzerinde esnek kısıt işlevi gören bir fuzzy sayıdır. Bundan sonra sürekli üyelik fonksiyonları yerine kesikli üyelik fonksiyonları kullanılacaktır. Bu durumda $j = 1, 2$, $l = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere $b_{jl} \in \text{supp}(B_j)$ iken, B_j kesikli fuzzy sayısının değerleri $j = 1, 2$ olmak üzere A_j fuzzy sayısının olasılık ölçüsünün değerleri yani $b_{jl} = P(A_j)$ dir. Böylece b_{jl} verildiğinde aşağıdaki denklemi sağlayan

$$b_{jl} = \mu_{A_j}(x_{j1})p_{jl}(x_{j1}) + \mu_{A_j}(x_{j2})p_{jl}(x_{j2}) + \dots + \mu_{A_j}(x_{jn_j})p_{jl}(x_{jn_j})$$

p_{jl} olasılık dağılımı bulunmalıdır.

Burada p_{jl} nin aşağıdaki şartları da sağladığı bilinmektedir:

$$\sum_{k=1}^{n_j} p_{jl}x_{jk} = 1, \quad p_{jl}x_{jk} \geq 0.$$

Bu nedenle p_j yi bulmak için hedef programlama modeli aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

Hedef:

$$\mu_{A_j}(x_{j1})p_{jl}(x_{j1}) + \mu_{A_j}(x_{j2})p_{jl}(x_{j2}) + \dots + \mu_{A_j}(x_{jn_j})p_{jl}(x_{jn_j}) \rightarrow b_{jl}$$

Kısıtlar:

$$\left. \begin{aligned} p_{jl}(x_{j1}) + p_{jl}(x_{j2}) + \dots + p_{jl}(x_{jn_j}) &= 1 \\ p_{jl}(x_{j1}), p_{jl}(x_{j2}), \dots, p_{jl}(x_{jn_j}) &\geq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.3)$$

(4.3) denkleminde indislerin karmaşasından kurtulmak için $c_k = \mu_{A_j}(x_{jk})$ ve $v_k = p_j(x_{jk})$ olarak alınsın. Burada c_k ve b_{jl} bilinen sayılar, v_k ise bilinmeyen karar

değişkenleri olmak üzere yukarıdaki problem yerine aşağıdaki lineer hedef programlama modeli yeniden yazılabilir.

Hedef:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n \rightarrow b_{jl} \quad (4.4)$$

Kısıtlar:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 + v_2 + \dots + v_n = 1 \\ v_1, v_2, \dots, v_n \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (4.5)$$

Her $l = 1, 2, \dots, m$ için yukarıdaki problemin v_k , $k = 1, 2, \dots, n$ çözümleri bulunur. $k = 1, 2, \dots, n$ için $v_k = p_{jl}(x_{jk})$ olduğundan p_{jl} olasılık dağılımları hesaplanmış olur. Daha sonra b_{jl} sayesinde elde edilen $j = 1, 2$ için p_{jl} nin istenen üyelik derecesi $\mu_{p_{jl}}(p_{jl}) = \mu_{B_j}(b_{jl})$,

$$\mu_{p_{jl}}(p_{jl}) = \mu_{B_j} \left(\sum_{k=1}^{n_j} \mu_{A_j}(x_{jk}) p_{jl}(x_{jk}) \right)$$

biçimindedir.

Böylece p_{jl} olasılık dağılımlarına bir fuzzy küme yapısı oluşturmak için yukarıda belirtilen n tane lineer hedef programlama modelinin çözülmesi gerekir. Normal rastgele değişkenleri için daha önceki bölümlerde bahsedilen uyumluluk koşulları dikkate alınarak bu problem sadece σ yı içeren tek parametrelili optimizasyon problemine indirgenir. Bu problem basit optimizasyon yöntemleriyle çözülebilir.

$p_{jl}(x_{jk})$ normal dağılımlarının yaklaşık değerlerinden hesaplanan p_1 ve p_2 olasılık dağılımlarının fuzzy kümeleri p_{12s} , ($s = 1, 2, \dots, m^2$) konvolüsyonlarının fuzzy kümesi

$$p_{12} = p_1 \circ p_2 \quad (4.6)$$

olmak üzere,

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \max_{p_1, p_2} [\mu_{p_1}(p_1) \wedge \mu_{p_2}(p_2)] \quad (4.7)$$

üyelik fonksiyonu ile oluşturulur.

Verilen p_{12} için $A_{12} = A_1 + A_2$ nin olasılık ölçüsü hesaplanmalıdır. Bu da "X değişkeni A_{12} dir" fuzzy olayının $P(A_{12})$ olasılık ölçüsünü hesaplamaktır ve aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$P(A_{12}) = \int_R \mu_{A_{12}}(u) p_{12}(u) du.$$

p_{12} bilindiği zaman $P(A_{12}) = b_{12}$ sayısı olur. Ancak bilinen tek şey $\mu_{p_{12}}$ üyelik fonksiyonuyla tanımlanan p_{12} üzerindeki fuzzy kısıtlamadır. Bu nedenle $P(A_{12})$

olasılığı, aşağıda tanımlanan $\mu_{B_{12}}$ üyelik fonksiyonuyla B_{12} fuzzy kümesi olacaktır. Burada,

$$b_{12_s} = \int_R \mu_{A_{12}}(x) p_{12_s}(x_k) dx \quad (4.8)$$

olmak üzere,

$$\mu_{B_{12}}(b_{12_s}) = \sup(\mu_{p_{12_s}}(p_{12_s})) \quad (4.9)$$

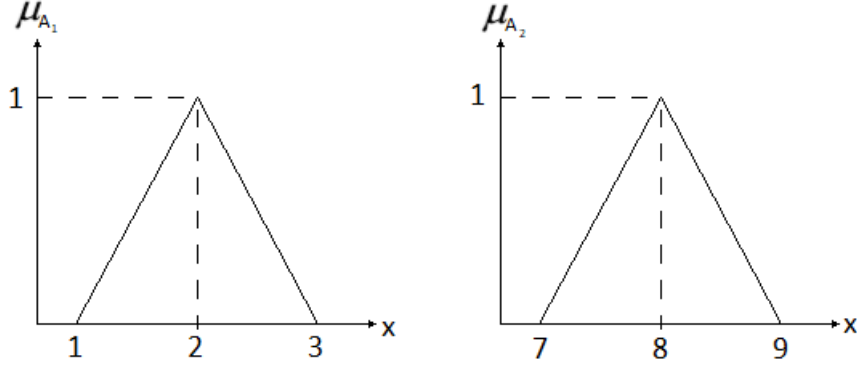
olur.

Sonuç olarak, $Z_{12} = Z_1 + Z_2$ toplamı $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ olarak hesaplanır.

Örnek 4.1.1. *Bileşenleri üçgensel fuzzy sayılar olan sürekli Z-sayılar*

$Z_1 = ((1, 2, 3), (0.7, 0.8, 0.9))$ ve $Z_2 = ((7, 8, 9), (0.4, 0.5, 0.6))$

olsun [2]. $Z_{12} = Z_1 + Z_2$ toplamı hesaplanırken verilen Z-sayıların altında yatan olasılık dağılımları normal olasılık dağılımlar olarak ele alınır.



Şekil 4.1. Sırasıyla A_1 ve A_2 üçgensel fuzzy sayıları

A_1 ve A_2 fuzzy sayılarının üyelik fonksiyonları

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \mu_{A_2}(x) = \begin{cases} x - 7, & 7 \leq x \leq 8 \\ 9 - x, & 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

olur.

İlk olarak Z^+ -sayılara geçilmelidir ve $Z_{12}^+ = Z_1^+ + Z_2^+$

$$Z_{12}^+ = (A_1 + A_2, R_1 + R_2)$$

hesaplanmalıdır.

Burada $A_1 = (1, 2, 3)$ ve $A_2 = (7, 8, 9)$ biliniyor peki R_1 ve R_2 olasılık dağılımları nedir? Öncelikle bu olasılık dağılımlar bulunmalıdır. Örneğin Z_1 -sayısının ikinci bileşeni B_1 fuzzy sayısındaki her bir $P(A_1) = b_{11}$ değeri için X rastgele değişkeni üzerinde bir olasılık dağılımı vardır.

Gerçek olasılık dağılımları olan p_1 ve p_2 bilinemez, sadece sırasıyla B_1 ve B_2 tarafından elde edilen p_1 ve p_2 lerin $\mu_{p_1}(\cdot)$ ve $\mu_{p_2}(\cdot)$ fuzzy kısıtları bilinebilir. Bu

nedenle $j = 1, 2$ olmak üzere B_j lerin altında yatan olasılık dağılımları ortaya çıkarılmalıdır ve $j = 1, 2$ için $\mu_{p_j}(p_j)$ üyelik dereceleri hesaplanmalıdır. $j = 1, 2$ için $p_j = (\mu_j, \sigma_j)$ nin belirlenmesi ile uyumluluk koşulları nedeniyle μ_j nin sabit olduğunu dikkate alarak σ_j ye göre aşağıdaki basit lineer olmayan optimizasyon problemi ile karşılaşılır:

$$\int_{\sup(A_1)} \mu_{A_1}(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{jl}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_{jl}}\right)^2} dx \rightarrow b_{jl}$$

Burada $\sigma_{jl} \geq \epsilon > 0$ dır.

Bu çalışmada sadece $b_{1l} = 0.7$ değeri için karşımıza çıkacak olan olasılık dağılımının nasıl bulunacağı gösterilecektir. Diğer değerler içinde benzer işlemlerle σ değerleri bulunabilir. Olasılık dağılımları normal olasılık dağılımı olarak kabul edildiği için aslında sadece bu normal dağılımın σ değerinin ne olduğunu bulmak gerekir. O halde yukarıdaki integralde μ_{A_1} fonksiyonu ve sınırları yerine yazılırsa ve integralin yakınsadığı $b_{1l} = P(A_1)$ sonucuna eşitlenirse

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \int_1^3 \mu_{A_1}(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{jl}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-2}{\sigma_{jl}}\right)^2} dx \\ 0.7 &= \int_1^2 (x-1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{jl}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-2}{\sigma_{jl}}\right)^2} dx + \int_2^3 (3-x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{jl}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-2}{\sigma_{jl}}\right)^2} dx \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemde tek bilinmeyen σ_{jl} değeridir. $\sigma_{jl} = a$ denirse

$$0.7 = \int_1^2 (x-1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-2}{a}\right)^2} dx + \int_2^3 (3-x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-2}{a}\right)^2} dx$$

olur. Bu integraller normal dağılım fonksiyonları içerdiğinden, standart normal dağılım şekline dönüştürülmesi gerekir.

$$\frac{x-2}{a} = z$$

olsun.

$$0.7 = \int_{-\frac{1}{a}}^0 (a \cdot z + 1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} \cdot a \cdot dz + \int_0^{\frac{1}{a}} (1 - a \cdot z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} \cdot a \cdot dz$$

eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} 0.7 &= \int_{-\frac{1}{a}}^0 (a \cdot z + 1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz + \int_0^{\frac{1}{a}} (1 - a \cdot z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz \\ 0.7 &= \int_{-\frac{1}{a}}^0 a \cdot z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz + \int_{-\frac{1}{a}}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz \\ &\quad + \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz - \int_0^{\frac{1}{a}} a \cdot z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz \\ 0.7 &= \int_{-\frac{1}{a}}^0 a \cdot z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz + \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz - \int_0^{\frac{1}{a}} a \cdot z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Son eşitlikte karşımıza çıkan üç integrali ayrı ayrı hesaplamak için;

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{1}{a}}^0 a \cdot z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz \\ B &= \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz \\ C &= \int_0^{\frac{1}{a}} a \cdot z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz \end{aligned}$$

denirse

$$A = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{a}}^0 z \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz$$

integrali için $-\frac{1}{2} z^2 = u$ dönüşümü yapılır. Bu dönüşüm sonrası elde edilen eşitlik:

$$A = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{2a^2}}^0 -e^u du$$

integralidir.

$$A = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\frac{1}{2a^2}} e^u du = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot (e^{-\frac{1}{2a^2}} - e^0) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot (e^{-\frac{1}{2a^2}} - 1)$$

sonucu elde edilir.

$$B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz$$

integralinin çözümü biraz daha karmaşıktır. Bunun için şöyle bir yaklaşım izlenir.

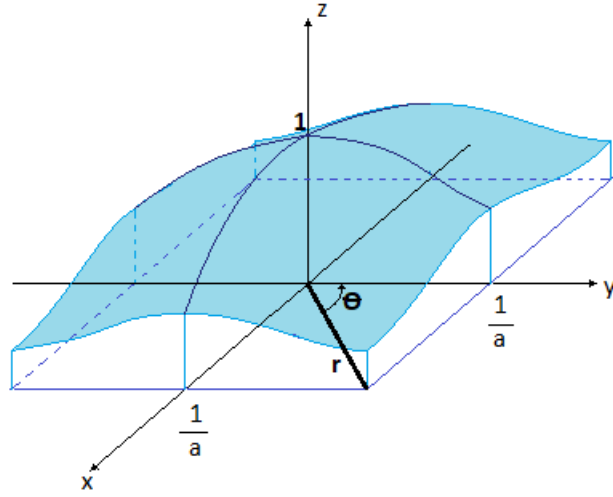
$$\int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz = \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} dx = \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} e^{-\frac{1}{2} \cdot y^2} dy = T$$

olsun.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot y^2} dx dy &= T \cdot T, \\ \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} e^{-\frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2)} dx dy &= T^2 \end{aligned}$$

olur. Burada elde edilen çift katlı integral problemi $z = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ yüzeyi ile $x = \frac{1}{a}$, $x = -\frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{a}$ ve $y = -\frac{1}{a}$ yüzeyleri arasında kalan hacimdir. Bu integrali hesaplayabilmek için kutupsal koordinat dönüşümü uygulanırsa

$$x = r \cdot \cos\theta, \quad y = r \cdot \sin\theta, \quad z = z.$$



Şekil 4.2. $z = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ fonksiyonunun grafiği

olmak üzere $x^2 + y^2 = r^2$ olduğu ve Jacobian matrisinin determinant sonucunun r olduğu kolayca görülür. Dönüşüm sonrası integrallerin yeni sınırlarını belirleyebilmek için Şekil 4.2'deki grafikten yararlanılabilir.

Yukarıda görünen hacmi taramak için ihtiyacımız olan en büyük yarıçap uzunluğu $r = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}} = \sqrt{\frac{2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{a}$ olacaktır. Yine hacmi taramak için θ açısının $360^\circ = 2\pi$ kadar çevrilmesi gerekecektir. Böylece sınırlar belirlenmiş olur.

$$\begin{aligned} T^2 &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{\sqrt{2}}{a}} \int_{z=0}^{z=e^{-\frac{1}{2}r^2}} r dz dr d\theta, \\ T^2 &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{\sqrt{2}}{a}} r \cdot (e^{-\frac{1}{2}r^2} - 0) dr d\theta, \\ T^2 &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{\sqrt{2}}{a}} r \cdot e^{-\frac{1}{2}r^2} dr d\theta \end{aligned}$$

olur. $-\frac{1}{2}r^2 = s$ dönüşümü uygulanırsa,

$$T^2 = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{s=0}^{s=-\frac{1}{a}} -e^s ds d\theta$$

elde edilir.

$$T^2 = - \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (e^{-\frac{1}{a^2}} - 1),$$

$$T^2 = 2\pi(1 - e^{-\frac{1}{a^2}})$$

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = T$$

kabul edildiğinden

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \sqrt{2\pi} \sqrt{1 - e^{-\frac{1}{a^2}}}$$

olarak bulunur.

$$B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{1 - e^{-\frac{1}{a^2}}} = \sqrt{1 - e^{-\frac{1}{a^2}}}$$

olur. Böylece B integralinin değeri hesaplanmış olur. Şimdi de

$$C = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{1}{a}} z \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz$$

C integrali için $-\frac{1}{2}z^2 = u$ dönüşümü yapılırsa

$$C = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\frac{1}{2a^2}} -e^u du$$

olur.

$$C = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\frac{1}{2a^2}} -e^u du = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{2a^2}}^0 e^u du = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot (1 - e^{-\frac{1}{2a^2}})$$

Böylece A , B , C integrallerinin sonuçları hesaplanmış olur. Bu sonuçlar asıl denklemdaki yerlerine yazılırsa,

$$0.7 = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot (e^{-\frac{1}{2a^2}} - 1) + \sqrt{1 - e^{-\frac{1}{a^2}}} - \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot (1 - e^{-\frac{1}{2a^2}})$$

eşitliği elde edilir. İfade düzenlendiğinde,

$$0.7 = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} (e^{-\frac{1}{2a^2}} - 1) + \sqrt{1 - e^{-\frac{1}{a^2}}}$$

sonucu elde edilir. $\sigma_{jl} = a$ değerini bulmak için Newton-Raphson Yönteminden yararlanılabilir. Bunun için yukarıdaki denklemi a değişkenine bağlı bir fonksiyon olarak yazıp, teğetler yardımıyla yaklaşılarak kök değerine ulaşılmaya çalışılır.

$$f(a) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} (e^{-\frac{1}{2a^2}} - 1) + \sqrt{1 - e^{-\frac{1}{a^2}}} - 0.7$$

fonksiyonu olsun.

$$f'(a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} (e^{-\frac{1}{2a^2}} - 1 + \frac{1}{a^2} \cdot e^{-\frac{1}{2a^2}}) - \frac{\frac{1}{a^3} \cdot e^{-\frac{1}{a^2}}}{\sqrt{1 - e^{-\frac{1}{a^2}}}}$$

olur.

Newton-Raphson Yönteminde kökün gerçek değerine yaklaşmak için öncelikle bir başlangıç kök değeri belirlenir. $\sigma_{jl} = a$ standart sapma değeri için ilk çözüm adayı olarak 0.2 değeri alınsın. Yani $a_0 = 0.2$ olsun. Bu değer iterasyon denkleminde yerine yazılarak a_1 değeri bulunur. Daha sonra $a_2, a_3, \dots$ şeklinde

gerçek kök değerine doğru yaklaşan çözüm adayları bulunur. Yöntemin genel iterasyon denklemi aşağıdaki gibidir:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

Buna göre

$$a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)} = 0.2000 - \frac{0.140423683}{-0.797807253} = 0.376012041 \cong 0.3800,$$

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} = 0.3800 - \frac{0.005816998}{-0.617576143} = 0.389419078 \cong 0.3890,$$

$$a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{f'(a_2)} = 0.3890 - \frac{0.000347553}{-0.597855711} = 0.389581333 \cong 0.3896,$$

$$a_4 = a_3 - \frac{f(a_3)}{f'(a_3)} = 0.3896 - \frac{0.000010767}{-0.596542403} = 0.389618049 \cong 0.3896.$$

Yukarıdaki çözüm sonuçlarına bakıldığında hassasiyet ne kadar artırılırsa artırılsın kök sonucunun 0.39 değerine yaklaştığı görülür. $b_{1l} = P(A_1) = 0.7$ değerini veren normal olasılık dağılımının $a = \sigma_{jl}$ değeri 0.39 olarak bulunur.

Benzer işlemler yapılarak Tablo 4.1'deki değerler elde edilir [2]. Bu tablodan da anlaşılacağı üzere $j = 1, 2$ için B_j kesikli gibi düşünülmüştür.

Tablo 4.1. Örnek 4.1.1 için hesaplanan σ_{jl} değerleri

b_{1l}	0.7	0.76	0.8	0.84	0.9
σ_{1l}	0.39	0.31	0.26	0.217	0.15
b_{2l}	0.4	0.46	0.5	0.54	0.6
σ_{2l}	0.91	0.77	0.68	0.61	0.52

İkinci Adım: Bu adımda $Z_{12}^+ = Z_1^+ + Z_2^+$ toplamı hesaplanır.

$$Z_{12} = (A_1 + A_2, R_1 + R_2)$$

$A_1 = (1, 2, 3)$ ve $A_2 = (7, 8, 9)$ idi. R_1 ile R_2 de σ değerleri 1. adımdaki gibi hesaplanmış aşağıdaki normal olasılık dağılımları olsun. Normal olasılık dağılımlarının $N(\mu, \sigma) = N(\text{ortalama}, \text{standart sapma})$ şeklinde gösterildiği hatırlatılarak

$$p_1 = N(2, 0.217),$$

$$p_2 = N(8, 0.77)$$

dır. Öncelikle $A_{12} = A_1 + A_2$ toplamı üçgensel fuzzy sayıların toplamı olup

$$A_{12} = (1, 2, 3) + (7, 8, 9) = (1 + 7, 2 + 8, 3 + 9) = (8, 10, 12)$$

olur. R_1+R_2 toplamı $p_{12} = p_1 \circ p_2$ konvolüsyonudur. Aşağıdaki konvolüsyon fonksiyonu göz önüne alınırsa,

$$p_{12} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{\left[-\frac{1}{2} \frac{(x - (\mu_1 + \mu_2))^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right]}$$

yeni ortalama

$$\mu_1 + \mu_2 = 2 + 8 = 10$$

ve yeni standart sapma da

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{(0.217)^2 + (0.77)^2} = \sqrt{0.639989} \cong 0.8$$

olur. O halde $p_{12} = N(10, 0.8)$ olarak bulunur.

Böylece $Z_{12}^+ = (A_1 + A_2, R_1 + R_2) = (A_{12}, p_{12})$ elde edilmiş olur.

Üçüncü Adım: Bu adımda p_1 ve p_2 dağılımları için $\mu_{p_1}(p_1)$ ve $\mu_{p_2}(p_2)$ nin üyelik dereceleri hesaplanmalıdır. Örnekte kullanılan p_1 ve p_2 dağılımlarına karşılık gelen $b_1 = P(A_1)$ ve $b_2 = P(A_2)$ değerleri tabloya bakıldığında aşağıdaki gibi olduğu görülür. (Tablo 4.1’de $0.217 \cong 0.22$ olarak alınmıştır.)

$$P(A_1) = \int_R \mu_{A_1}(x_1) \frac{1}{0.217 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_1 - 2}{0.217}\right)^2} dx_1 \cong 0.84$$

$$P(A_2) = \int_R \mu_{A_2}(x_2) \frac{1}{0.77 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_2 - 8}{0.77}\right)^2} dx_2 \cong 0.46$$

$$\begin{aligned} \mu_{p_1}(p_1) &= \mu_{B_1} \left(\int_R \mu_{A_1}(x_1) \frac{1}{0.217 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_1 - 2}{0.217}\right)^2} dx_1 \right), \\ \mu_{p_1}(p_1) &= \mu_{B_1}(0.84) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mu_{p_2}(p_2) &= \mu_{B_2} \left(\int_R \mu_{A_2}(x_2) \frac{1}{0.77 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_2 - 8}{0.77}\right)^2} dx_2 \right), \\ \mu_{p_2}(p_2) &= \mu_{B_2}(0.46) \end{aligned}$$

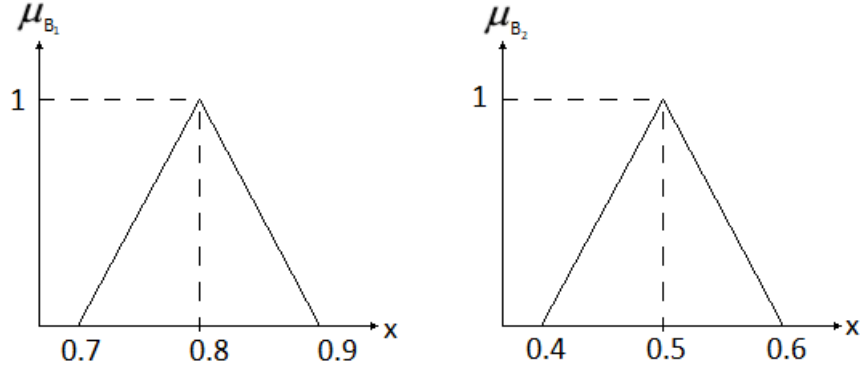
elde edilir. Artık B_1 ve B_2 nin üyelik fonksiyonları yardımıyla $\mu_{p_1}(p_1)$ ve $\mu_{p_2}(p_2)$ değerleri bulunabilir. B_1 ve B_2 üçgensel fuzzy sayılardır ve Şekil 4.3’de grafikleri gösterilmiştir.

Üyelik fonksiyonları da

$$\mu_{B_1}(x) = \begin{cases} 10x - 7, & 0.7 \leq x \leq 0.8 \\ 9 - 10x, & 0.8 \leq x \leq 0.9 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \mu_{B_2}(x) = \begin{cases} 10x - 4, & 0.4 \leq x \leq 0.5 \\ 6 - 10x, & 0.5 \leq x \leq 0.6 \end{cases}.$$

olur. Bu üyelik fonksiyonları yardımıyla

$$\mu_{p_1}(p_1) = \mu_{B_1}(0.84) = 9 - 10 \cdot (0.84) = 9 - 8.4 = 0.6,$$



Şekil 4.3. B_1 ve B_2 üçgensel fuzzy sayılarının grafikleri

$$\mu_{p_2}(p_2) = \mu_{B_2}(0.46) = 10 \cdot (0.46) - 4 = 4.6 - 4 = 0.6$$

hesaplanır.

Dördüncü Adım: B_1 ve B_2 yardımıyla elde edilen p_1 ve p_2 olasılık dağılımlarının konvolüsyonu olan p_{12} ler için fuzzy kısıtları oluşturulmalıdır. Yani $\mu_{p_1}(\cdot)$ ve $\mu_{p_2}(\cdot)$ değerleri bilindiğinde yukarıda bahsedilen tüm p_1 ve p_2 lerden normal dağılım için verilen kuralla elde edilen p_{12} konvolüsyonlarının tamamının üzerinde $\mu_{p_{12}}$ fuzzy kısıtları belirlenmelidir. Örnek 4.1.1’de kullanılan p_1 ve p_2 yardımı ile elde edilen p_{12} konvolüsyonunun fuzzy kısıtının üyelik derecesi aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \mu_{p_1}(p_1) \wedge \mu_{p_2}(p_2) = 0.6 \wedge 0.6 = 0.6.$$

Benzer şekilde Örnek 4.1.1’den elde edilebilecek tüm p_{12} ler için üyelik dereceleri hesaplanmalıdır. (Yani p_1 dağılımının fuzzy kümesi ve p_2 dağılımının fuzzy kümesinden p_{12} konvolüsyonunun fuzzy kümesinin elde edileceği anlamına gelmektedir.)

Beşinci Adım:

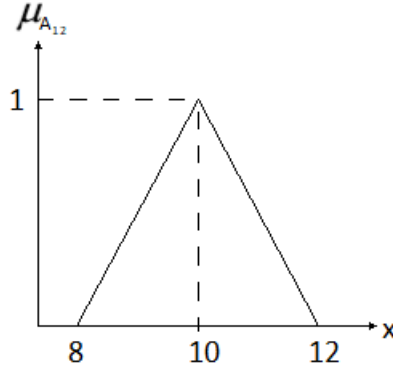
$$b_{12_s} = \int_R \mu_{A_{12}}(x) p_{12_s}(x_k) dx$$

$$\mu_{B_{12}}(b_{12_s}) = \sup(\mu_{p_{12_s}}(p_{12_s}))$$

eşitlikleri baz alınarak, $P(A_{12})$ olasılık ölçüsü üzerinde esnek bir kısıt olan B_{12} yapısı oluşturulmalıdır. İlk olarak elde edilen p_{12} konvolüsyonları için $P(A_{12})$ olasılık ölçüsü değerleri hesaplanmalıdır. Örnek 4.1.1’de kullanılan p_1 ve p_2 den elde edilen $p_{12} = (10, 0.8)$ konvolüsyonu için $P(A_{12})$ olasılık ölçüsü aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$P(A_{12}) = \int_R \mu_{A_{12}}(x_{12}) \frac{1}{0.8\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_{12}-10}{0.8}\right)^2} dx_{12}$$

$A_{12} = (8, 10, 12)$ üçgensel fuzzy sayısı ve üyelik fonksiyonu



Şekil 4.4. A_{12} üçgensel fuzzy sayısı

$$\mu_{A_{12}}(x) = \begin{cases} \frac{x-8}{2}, & 8 \leq x \leq 10 \\ \frac{12-x}{2}, & 10 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

olur. Bu üyelik fonksiyonu $P(A_{12})$ olasılık ölçüsü denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P(A_{12}) &= \int_8^{10} \frac{x-8}{2} \frac{1}{0.8\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (\frac{x-10}{0.8})^2} dx + \int_{10}^{12} \frac{12-x}{2} \frac{1}{0.8\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (\frac{x-10}{0.8})^2} dx \\ P(A_{12}) &= \int_8^{10} \frac{x}{1.6\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (\frac{x-10}{0.8})^2} dx - \int_8^{10} \frac{8}{1.6\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (\frac{x-10}{0.8})^2} dx \\ &+ \int_{10}^{12} \frac{12}{1.6\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (\frac{x-10}{0.8})^2} dx - \int_{10}^{12} \frac{x}{1.6\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (\frac{x-10}{0.8})^2} dx \end{aligned}$$

olur.

$$\frac{x-10}{0.8} = z$$

denirse

$$\begin{aligned} P(A_{12}) &= \int_{-2.5}^0 \frac{0.8z+10}{1.6\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} 0.8dz - \int_{-2.5}^0 \frac{8}{1.6\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} 0.8dz \\ &+ \int_0^{2.5} \frac{12}{1.6\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} 0.8dz - \int_0^{2.5} \frac{0.8z+10}{1.6\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} 0.8dz \end{aligned}$$

İntegral "Standart Normal Dağılım" fonksiyonu olduğundan, bu integralin sonucuna "Standart Z-Tablosu" ndan bakılır (bkz. Şekil 2.2). "Standart Z Tablosu" nda $z = -2.5$ değeri yoktur fakat dağılım simetrik olduğundan $z = 2.5$ değerine bakılabilir böylece bu integralin sonucunun 0.4938 olduğu görülür.

$$\frac{(0.8)^2}{1.6\sqrt{2\pi}} \int_{-2.5}^0 z \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz + \int_{-2.5}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz$$

integralinin çözümü için

$$-\frac{1}{2} z^2 = u$$

değişken değiştirmesi uygulanırsa

$$\frac{(0.8)^2}{1.6\sqrt{2\pi}} \int_{-3.125}^0 -e^u du + 0.4938 \cong 0.341234408$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \frac{12 \cdot (0.8)}{1.6} \int_0^{2.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz - \frac{10 \cdot (0.8)}{1.6} \int_0^{2.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz \\ & - \frac{(0.8)^2}{1.6\sqrt{2\pi}} \int_0^{2.5} z \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz \\ & = \int_0^{2.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz - \frac{(0.8)^2}{1.6\sqrt{2\pi}} \int_0^{2.5} z \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz \\ & \cong 0.341234408 \end{aligned}$$

bulunur.

$$P(A_{12}) = 0.341234408 + 0.341234408 \cong 0.682468816$$

$$P(A_{12}) \cong 0.68$$

olur. Hesaplanan bu $P(A_{12})$ olasılığı, B_{12} fuzzy kısıt yapısı içinde sadece bir olasılık değeridir ve $b_{12} = 0.68$ dir.

$$\mu_{B_{12}} \left((b_{12}) = \int_R \mu_{A_{12}}(x_{12}) p_{12}(x_{12}) dx_{12} \right) = \mu_{p_{12}}(p_{12})$$

denkleminde $\mu_{p_{12}}(p_{12} = (10, 0.8)) = 0.6$ olduğu dikkate alınırsa,

$$b_{12} = \int_R \mu_{A_{12}}(x_{12}) \frac{1}{0.8\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_{12}-10}{0.8}\right)^2} dx_{12} = 0.68$$

için,

$$\mu_{B_{12}}(b_{12} = 0.68) = 0.6$$

sonucu elde edilir. Benzer hesaplamalar yapılarak B_{12} yapısı oluşturulur.

Altıncı Adım: $B_{12} = (a, b, c)$ olarak alınan üçgensel fuzzy sayısının bileşenleri bulunur.

B_{12} nin ilk bileşeni olan $a = b_{12_a}$ değeri, B_1 in ilk bileşeni olan 0.7 ile B_2 nin ilk bileşeni olan 0.4 değerlerine karşılık gelen olasılık dağılımları yardımıyla bulunur. Bu olasılık dağılımları sırasıyla $p_1 = N(2, \sigma_1)$ ve $p_2 = N(8, \sigma_2)$ olsun. σ_1 ve σ_2 değerleri Tablo 4.1'den bakılarak bulunabilir. Bu tabloya göre $\sigma_1 = 0.39$, $\sigma_2 = 0.91$ dir. Bu durumda

$$p_1 = N(2, 0.39)$$

ve

$$p_2 = N(8, 0.91)$$

olasılık dağılımları kullanılarak elde edilen $p_{12} = (\mu_{12}, \sigma_{12})$ dağılımı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\mu_{12} = 2 + 8 = 10,$$

$$\sigma_{12} = \sqrt{0.39^2 + 0.91^2} \cong 0.99,$$

$$p_{12} = (10, 0.99).$$

Bulunan p_{12} için fuzzy kısıt oluşturulur. Buna göre, $\mu_{p_1}(p_1) = \mu_{B_1}(0.7) = 0$ ve $\mu_{p_2}(p_2) = \mu_{B_2}(0.4) = 0$ olduğundan

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \mu_{p_1}(p_1) \wedge \mu_{p_2}(p_2) = 0 \wedge 0 = 0$$

olur.

$$\begin{aligned} P(A_{12}) &= \int_R \mu_{A_{12}}(x_{12}) \frac{1}{0.99\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_{12}-10}{0.99}\right)^2} dx_{12} \\ &= \int_8^{10} \frac{x-8}{2} \frac{1}{0.99\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-10}{0.99}\right)^2} dx + \int_{10}^{12} \frac{12-x}{2} \frac{1}{0.99\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-10}{0.99}\right)^2} dx \end{aligned}$$

$z = \frac{x-10}{0.99}$ değişken değiştirmesi ile

$$\begin{aligned} P(A_{12}) &= \int_{-2.02}^0 \frac{0.99z+10}{1.98\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} 0.99 dz - \int_{-2.02}^0 \frac{8}{1.98\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} 0.99 dz \\ &+ \int_0^{2.02} \frac{12}{1.98\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} 0.99 dz - \int_0^{2.02} \frac{0.99z+10}{1.98\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} 0.99 dz \end{aligned}$$

olur. Örneğin

$$\int_{-2.02}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz$$

integralinde standart normal dağılım fonksiyonu bulunmaktadır. "Standart Z-Tablosu"ndan $z = -2.02$ değeri ile aynı sonucu veren $z = 2.02$ değerine bakıldığında bu integralin sonucunun 0.4783 olduğu görülür (bkz. Tablo 4.1).

$$P(A_{12}) \cong 0.306496042 + 0.306496042 = 0.612992084 \cong 0.62$$

olarak bulunur.

$$\mu_{B_{12}}(b_{12_a} = 0.62) = \mu_{p_{12}}(p_{12}) = 0.$$

B_{12} nin ikinci bileşeni olan $b = b_{12_b}$ değeri, B_1 in ikinci bileşeni 0.8 ile B_2 nin ikinci bileşeni 0.5 değerlerine karşılık gelen olasılık dağılımları yardımıyla bulunur. Bu olasılık dağılımları sırasıyla yine $p_1 = N(2, \sigma_1)$ ve $p_2 = N(8, \sigma_2)$ olsun. Tablo 4.1'den $\sigma_1 = 0.26$ ve $\sigma_2 = 0.68$ olduğundan $p_1 = N(2, 0.26)$ ve $p_2 = N(8, 0.68)$ olur.

$$\mu_{12} = 2 + 8 = 10,$$

$$\sigma_{12} = \sqrt{0.26^2 + 0.68^2} = 0.73,$$

$$p_{12} = (10, 0.73)$$

dir. Bulunan p_{12} için fuzzy kısıt oluşturulur. $\mu_{p_1}(p_1) = \mu_{B_1}(0.8) = 1$ ve $\mu_{p_2}(p_2) = \mu_{B_2}(0.5) = 1$ olduğundan

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \mu_{p_1}(p_1) \wedge \mu_{p_2}(p_2) = 1 \wedge 1 = 1$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} P(A_{12}) &= \int_R \mu_{A_{12}}(x_{12}) \frac{1}{0.73\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (\frac{x_{12}-10}{0.73})^2} dx_{12} \\ &= \int_8^{10} \frac{x-8}{2} \frac{1}{0.73\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (\frac{x-10}{0.73})^2} dx + \int_{10}^{12} \frac{12-x}{2} \frac{1}{0.73\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (\frac{x-10}{0.73})^2} dx \\ &\cong 0.36068841 + 0.36068841 \cong 0.72137682 \cong 0.72 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $b_{12_b} = P(A_{12}) = 0.72$ nin fuzzy kısıtıda

$$\mu_{B_{12}}(b_{12_b} = 0.72) = \mu_{p_{12}}(p_{12}) = 1$$

dir.

B_{12} nin üçüncü bileşeni olan $b = b_{12_c}$ değeri, B_1 in üçüncü bileşeni 0.9 ile B_2 nin ilk bileşeni 0.6 değerlerine karşılık gelen olasılık dağılımları yardımıyla hesaplanır. Bu olasılık dağılımları sırasıyla yine $p_1 = N(2, \sigma_1)$ ve $p_2 = N(8, \sigma_2)$ olsun. Tablo 4.1'den $\sigma_1 = 0.15$ ve $\sigma_2 = 0.52$ olduğu görülür. Buradan $p_1 = N(2, 0.15)$ ve $p_2 = N(8, 0.52)$ olur.

$$\mu_{12} = 2 + 8 = 10,$$

$$\sigma_{12} = \sqrt{0.15^2 + 0.52^2} \cong 0.54,$$

$$p_{12} = (10, 0.54)$$

dir. Bulunan p_{12} için fuzzy kısıt oluşturulur. Buna göre, $\mu_{p_1}(p_1) = \mu_{B_1}(0.9) = 0$ ve $\mu_{p_2}(p_2) = \mu_{B_2}(0.6) = 0$ olduğundan

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \mu_{p_1}(p_1) \wedge \mu_{p_2}(p_2) = 0 \wedge 0 = 0$$

dır.

$$\begin{aligned} P(A_{12}) &= \int_R \mu_{A_{12}}(x_{12}) \frac{1}{0.54\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (\frac{x_{12}-10}{0.54})^2} dx_{12} \\ &= \int_8^{10} \frac{x-8}{2} \frac{1}{0.54\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (\frac{x-10}{0.54})^2} dx + \int_{10}^{12} \frac{12-x}{2} \frac{1}{0.54\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (\frac{x-10}{0.54})^2} dx \\ P(A_{12}) &\cong 0.392300275 + 0.392300275 = 0.78460055 \cong 0.79 \end{aligned}$$

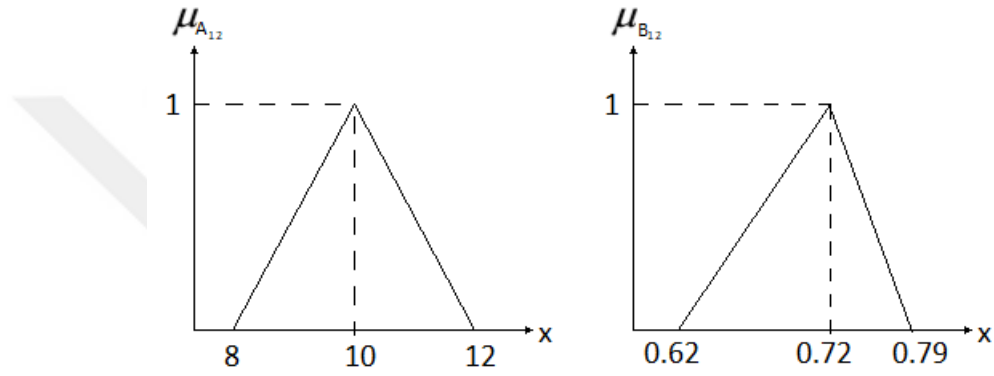
olarak bulunur. $b_{12_c} = P(A_{12}) = 0.79$ un fuzzy kısıtıda

$$\mu_{B_{12}}(b_{12_c} = 0.79)) = \mu_{p_{12}}(p_{12}) = 0$$

dır.

$$B_{12} = (0.62, 0.72, 0.79)$$

olarak hesaplanır. Böylece Z_1 ile Z_2 sürekli Z-sayılarının toplamının sonucu, A_{12} ve B_{12} nin grafikleri Şekil 4.5'deki gibi olan $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ olarak hesaplanmış olur [2].



Şekil 4.5. Sürekli Z-sayıların toplamı: A_{12} ve B_{12} nin grafikleri

Z-sayılar üzerindeki diğer aritmetik işlemlerde yer alan örnekler toplama işlemindeki kadar ayrıntılı yapılmayacaktır. Çünkü burada kullanılan yöntemler diğer işlemlerde de uygulanabilir.

4.2. Sürekli Z-Sayılar Üzerinde Çıkarma İşlemi

$Z_1 = (A_1, B_1)$ ve $Z_2 = (A_2, B_2)$ sürekli Z-sayılarının farkı $Z_{12} = Z_1 - Z_2$ ile gösterilir. İlk olarak $Z_{12}^+ = Z_1^+ - Z_2^+$ şeklindeki kesikli bir Z^+ -sayısına dönüştürülür ve

$$Z_1^+ - Z_2^+ = (A_1 - A_2, R_1 - R_2)$$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitlikte R_1 ve R_2 normal olasılık dağılımlarıdır.

$A_1 - A_2$ daha önce bahsedilen iki fuzzy sayının farkıdır. $R_1 - R_2$ ise normal olasılık dağılımlarının aşağıdaki gibi olan $p_{12} = p_1 \circ p_2$ konvolüsyonudur

$$p_{12} = \frac{e^{-[x-(\mu_1-\mu_2)]^2/[2\cdot(\sigma_1^2+\sigma_2^2)]}}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}.$$

Burada

$$\mu_{12} = \mu_1 - \mu_2, \quad \sigma_{12} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

dır. Z -sayılarda çıkarma işleminin ilk adımı olarak Z^+ -sayılardaki çıkarma işleminden yararlanılır ve $Z_{12}^+ = (A_{12}, p_{12})$ şeklindeki Z_{12}^+ sayısı hesaplanır.

Sonra, daha önce sözü edilen hedef programlama modelinin çözümü ile elde edilen $j = 1, 2$ ve $l = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere $\mu_{p_{jl}}(p_{jl})$ fuzzy kümeleri oluşturulur.

Ardından

$$p_{12} = p_1 \circ p_2 \quad \text{ve} \quad \mu_{p_{12}}(p_{12})$$

üyelik fonksiyonları yardımıyla, p_{12_s} ($s = 1, 2, \dots, m^2$) konvolüsyonlarının fuzzy kümesi oluşturulur.

Daha sonra B_{12} nin yapısı oluşturulur. Bunun için verilen p_{12} lere göre $A_{12} = A_1 - A_2$ nin olasılık ölçüsü hesaplanır. Yani $P(A_{12})$ tanımını baz alarak " X fuzzy olayının olasılığı A_{12} dir". Son olarak b_{12_s} ve $\mu_{B_{12}}(b_{12_s})$ tanımları yardımıyla B_{12} fuzzy kümesi hesaplanır. Sonuç olarak $Z_{12} = Z_1 - Z_2$ iki sürekli Z -sayısının farkı,

$$Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$$

elde edilmiş olur.

Örnek 4.2.1. $Z_1 = ((1, 2, 3), (0.7, 0.8, 0.9))$ ve $Z_2 = ((7, 8, 9), (0.4, 0.5, 0.6))$ sürekli Z -sayıları için $Z_{12} = Z_1 - Z_2$ çıkarma işlemi hesabı.

İlk olarak Z^+ -sayılara geçilmesi için gerekli olan olasılık dağılımları hesaplanır. B_1 in her bir temel b_1 elemanına karşılık R_1 olasılık dağılımı, B_2 nin her bir temel b_2 değerine karşılık R_2 olasılık dağılımı vardır. Bu olasılık dağılımlarının Newton-Raphson Yöntemi yardımıyla nasıl hesaplandığı sürekli Z -sayıların toplama işlemi örneğinde ayrıntılı anlatılmıştır.

$Z_{12}^+ = (A_{12}, R_1 - R_2)$ Z^+ -sayısı belirlenmelidir.

$$A_{12} = A_1 - A_2 = (1 - 9, 2 - 8, 3 - 7) = (-8, -6, -4)$$

olur. $R_1 - R_2$ normal olasılık dağılımlarının p_{12} konvolüsyonudur.

Örnek 4.1.1'de olduğu gibi

$$p_1 = N(2, 0.217) \quad \text{ve} \quad p_2 = N(8, 0.77)$$

olasılık dağılımları için p_{12} konvolüsyonu

$$\mu_{12} = \mu_1 - \mu_2 = 2 - 8 = -6$$

$$\sigma_{12} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{(0.217)^2 + (0.77)^2} = \sqrt{0.639989} \cong 0.8$$

olduğundan $p_{12} = (-6, 0.8)$ bulunur. $Z_{12}^+ = (A_1 - A_2, p_{12})$ sayısı hesaplanmış olur.

p_1 ve p_2 olasılık dağılımlarının fuzzy kısıtlarının belirlenmesi için, $\mu_{p_1}(p_1)$ ve $\mu_{p_2}(p_2)$ üyelik dereceleri hesaplanmalıdır. Olasılık dağılımları Örnek 4.1.1 ile aynı olduğu için oradaki sonuçları kullanarak

$$\mu_{p_1}(p_1) = \mu_{B_1}(0.84) = 9 - 10 \cdot (0.84) = 9 - 8.4 = 0.6$$

ve

$$\mu_{p_2}(p_2) = \mu_{B_2}(0.46) = 10 \cdot (0.46) - 4 = 4.6 - 4 = 0.6$$

olur.

p_{12} konvolüsyonunun $\mu_{p_{12}}(p_{12})$ üyelik derecesi

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \mu_{p_1}(p_1) \wedge \mu_{p_2}(p_2) = 0.6 \wedge 0.6 = 0.6$$

olur.

B_{12} yapısı oluşturulur. İlk olarak elde edilen p_{12} konvolüsyonlarıyla $P(A_{12})$ olasılık ölçüsü

$$P(A_{12}) = \int_R \mu_{A_{12}}(x_{12}) \frac{1}{0.8\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_{12}-6}{0.8}\right)^2} dx_{12} \cong 0.69$$

hesaplanır. $P(A_{12}) \cong 0.69 = b_{12}$ ile B_{12} nin temel bir değeri hesaplanmış olur. Bu temel değer fuzzy kısıtı

$$\mu_{B_{12}}(b_{12})\mu_{B_{12}}(0.69) = \mu_{p_{12}}(p_{12}) = 0.6$$

olarak bulunur.

Son olarak, (4.8) ve (4.9) denklemleri yardımıyla

$$B_{12} = (0.62, 0.72, 0.79)$$

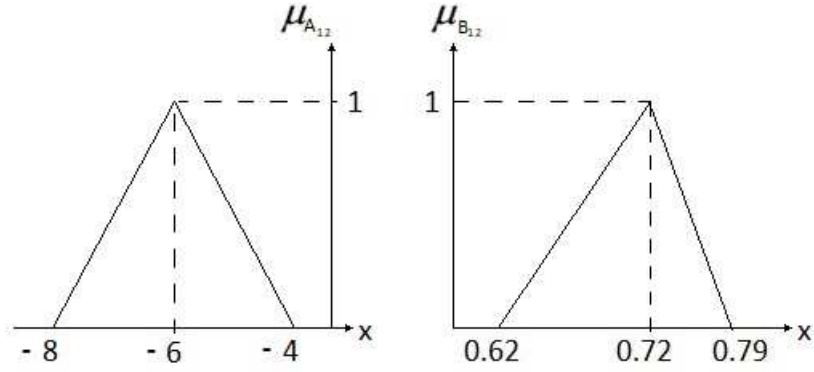
olur. Böylece A_{12} ve B_{12} nin Şekil 4.6'de görüldüğü üzere $Z_{12} = Z_1 - Z_2 = (A_{12}, B_{12})$ farkı hesaplanmış olur [2].

4.3. Sürekli Z-Sayılar Üzerinde Çarpma İşlemi

$Z_1 = (A_1, B_1)$ ve $Z_2 = (A_2, B_2)$ şeklinde verilen sürekli Z-sayıların çarpımı $Z_{12} = Z_1 \cdot Z_2$ ile gösterilir. Bu çarpımı yapabilmek için ilk olarak R_1 ve R_2 , normal olasılık dağılımları olmak üzere

$$Z_1^+ \cdot Z_2^+ = (A_1 \cdot A_2, R_1 \cdot R_2)$$

şeklinde $Z_{12}^+ = Z_1^+ \cdot Z_2^+$ sayısı tanımlanmalıdır. Fuzzy sayıların $A_1 \cdot A_2$ çarpımı α -kesme kümeleri yardımıyla (2.7) denklemi ile tanımlanmıştı. Bu denklem yardımı ile $A_1 \cdot A_2$ hesaplanır.



Şekil 4.6. Sürekli Z-sayıların farkı: A_{12} ve B_{12} nin grafikleri

$R_1 \cdot R_2$ ise (2.1) ve (2.2) denklemleri ile tanımlı olasılık dağılımlarının $p_{12} = p_1 \circ p_2$ konvolüsyonudur.

Böylece $Z_{12}^+ = (A_1 \cdot A_2, p_{12})$ sayısı bulunur. Daha sonra toplama işleminde yapıldığı gibi $l = 1, 2, \dots, m$ için $\mu_{p_{jl}}(p_{jl})$ fuzzy kümeleri ve

$$p_{12} = p_1 \circ p_2,$$

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \max_{p_1, p_2} [\mu_{p_1}(p_1) \wedge \mu_{p_2}(p_2)]$$

eşitliklerinin çözümüyle tanımlanan üyelik fonksiyonlarıyla, $s = 1, 2, \dots, m^2$ için p_{12_s} konvolüsyonları hesaplanır.

Son olarak B_{12} , (4.8) ve (4.9) denklemleri ile oluşturulan bir fuzzy kümedir. $Z_{12} = Z_1 \cdot Z_2$, $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ olarak elde edilir.

Örnek 4.3.1. $Z_1 = ((1, 2, 3), (0.7, 0.8, 0.9))$ ve $Z_2 = ((7, 8, 9), (0.4, 0.5, 0.6))$ sürekli Z-sayıları verilsin. $Z_{12} = Z_1 \cdot Z_2$ hesabını yapabilmek için $Z_{12}^+ = (A_1 \cdot A_2, R_1 \cdot R_2)$ belirlenmelidir.

İlk olarak toplama işlemindeki gibi B_1 ve B_2 fuzzy kümelerinin altında yatan olasılık dağılımları hesaplanmalıdır. Olasılık dağılımları bu örnekte normal olasılık dağılımı olduğundan sadece bu dağılımların standart sapma değerleri bulunur. Bu değerler de Newton-Raphson Yöntemi ile kolayca hesaplanabilmektedir.

Sonra iki fuzzy sayının çarpımı $A_1 \cdot A_2$, α -kesme kümelerinden yararlanılarak hesaplanır. μ_{A_1} ve μ_{A_2} üyelik fonksiyonlarının tersi bulunarak elde edilen α -kesme kümeleri aşağıdaki gibidir:

$$A_1^\alpha = [\alpha + 1, 3 - \alpha],$$

$$A_2^\alpha = [\alpha + 7, 9 - \alpha].$$

$$\begin{aligned} A_1^\alpha \cdot A_2^\alpha &= [(\alpha + 1)(\alpha + 7), (3 - \alpha)(9 - \alpha)] \\ &= [\alpha^2 + 8\alpha + 7, \alpha^2 - 12\alpha + 27] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\alpha = 0$ değeri için $A_1^0 \cdot A_2^0 = [7, 27]$, $\alpha = 1$ değeri için $A_1^1 \cdot A_2^1 = [16, 16]$ değerleri bulunur. O halde $A_1 \cdot A_2$ fuzzy sayısı üçgensel fuzzy sayı olmasa da sıralı üçlü olarak gösterilebilir ve $(7, 16, 27)$ olur. Üyelik fonksiyonu da aşağıdaki gibidir:

$$\mu_{A_{12}}(x) = \begin{cases} \sqrt{x+9} - 4, & 7 \leq x \leq 16 \\ 6 - \sqrt{x+9}, & 16 \leq x \leq 27 \end{cases}.$$

$R_1 \cdot R_2$ bir Örnek 4.2.1'de kullanılan $p_1 = N(2, 0.217)$ ve $p_2 = N(8, 0.77)$ olasılık dağılımlarının p_{12} konvolüsyonudur ve (2.1) ve (2.2) denklemleri ile

$$p_{12} \cong (16, 5.5)$$

olur. Sonra p_1 ve p_2 olasılık dağılımlarının $\mu_{p_1}(p_1)$ ve $\mu_{p_2}(p_2)$ üyelik dereceleri hesaplanır.

$$\mu_{p_1}(p_1) = \mu_{B_1}(0.84) = 9 - 10 \cdot (0.84) = 9 - 8.4 = 0.6,$$

$$\mu_{p_2}(p_2) = \mu_{B_2}(0.46) = 10 \cdot (0.46) - 4 = 4.6 - 4 = 0.6.$$

p_{12} konvolüsyonunun üyelik derecesi, toplama ve çıkarma işlemlerinde yapılan işlemlere benzer olarak $\mu_{p_1}(p_1)$ ve $\mu_{p_2}(p_2)$ kullanılarak hesaplanır. Yani p_{12} nin üyelik derecesi

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \mu_{p_1}(p_1) \wedge \mu_{p_2}(p_2) = 0.6 \wedge 0.6 = 0.6$$

olur. Ardından B_{12} nin temel değerleri oluşturulur. Bunun için elde edilen p_{12} konvolüsyonlarıyla $P(A_{12})$ olasılık ölçüsü hesaplanır. Yukarıdaki p_1 ve p_2 olasılık dağılımları kullanılarak Örnek 4.1.1'de izlenen adımlar yardımıyla p_{12} konvolüsyonu

$$P(A_{12}) = b_{12} = 0.67$$

olarak hesaplanmıştır.

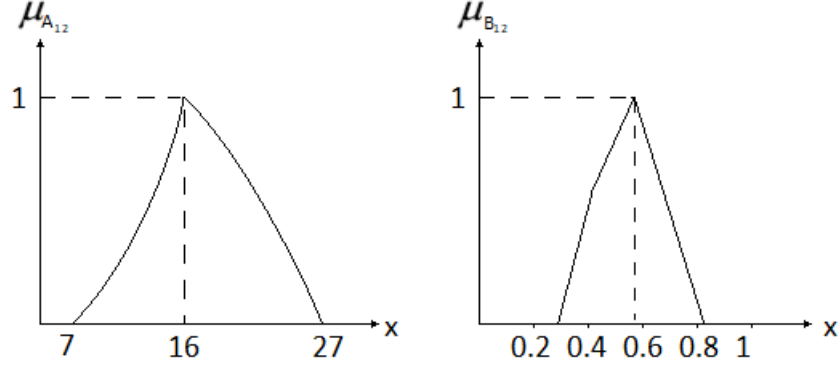
b_{12_s} ve $\mu_{B_{12}}(b_{12_s})$ tanımları ile B_{12} fuzzy yapısı kurulur. $b_{12} = 0.67$ temel değeri için üyelik derecesi

$$\mu_{B_{12}}(0.67) = 0.6$$

olarak hesaplanmıştır.

Toplama örneğinde gösterildiği gibi, kesikli sayı gibi düşünerek kullanılan B_1 ve B_2 nin altında yatan b_{1l} ve b_{2l} değerlerine karşılık, Tablo 4.1'de gösterilen tüm σ_{1l} ve σ_{2l} standart sapmalarının kullanıldığı p_{1l} ve p_{2l} olasılık dağılımlarının konvolüsyonları olan p_{12_s} olasılık dağılımlarıyla, B_{12} nin $P(A_{12_s}) = b_{12_s}$ temel değerleri hesaplanır ve bulunan her b_{12_s} temel değeri için üyelik derecesi bulunur. Şekil 4.7'de B_{12} nin grafiği gösterilmiştir.

Böylece Z_1 ve Z_2 sürekli Z -sayılarının çarpımı $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ olup A_{12} ve B_{12} nin grafikleri Şekil 4.7'de gösterilmiştir [2].



Şekil 4.7. Sürekli Z -sayıların çarpımı: A_{12} ve B_{12} nin grafikleri

4.4. Sürekli Z -Sayılar Üzerinde Bölme İşlemi

$0 \notin \text{supp}(A_2)$ olmak üzere, $Z_1 = (A_1, B_1)$ ve $Z_2 = (A_2, B_2)$ sürekli Z -sayılarının bölümü $Z_{12} = Z_1/Z_2$ ile gösterilir. İlk önce, $Z_{12}^+ = (A_{12}, p_{12})$ belirlenir. Burada $A_{12} = A_1/A_2$ ile daha önce tanımlanan iki fuzzy sayının bölümü (2.8) denklemi yardımıyla hesaplanır. Sonra p_1 ve p_2 olasılık dağılımlarının p_{12} konvolüsyonu (2.3) ve (2.4) denklemleri yardımıyla hesaplanır.

Ardından toplama örneğindeki gibi $l = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2$ için $\mu_{p_{jl}}(p_{jl})$ fuzzy kümeleri ve (4.6) ve (4.7) eşitliklerinin çözümüyle tanımlanan üyelik fonksiyonlarıyla, $s = 1, 2, \dots, m^2$ için p_{12_s} konvolüsyonları oluşturulur. Daha sonra A_{12} nin olasılık ölçüsü $P(A_{12})$ hesaplanır.

Son olarak B_{12} yapısı, b_{12_s} ve $\mu_{B_{12}}(b_{12_s})$ tanımları yardımıyla inşa edilir. Böylece $Z_{12} = Z_1/Z_2$ bölümü $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ hesaplanmış olur.

Örnek 4.4.1. $Z_1 = ((1, 2, 3), (0.7, 0.8, 0.9))$ ve $Z_2 = ((7, 8, 9), (0.4, 0.5, 0.6))$ sürekli Z -sayıları için $Z_{12} = Z_1/Z_2$ hesaplayalım.

İlk olarak B_1 ve B_2 sayılarının b_{1l} ve b_{2l} temel değerlerine karşılık gelen olasılık dağılımları bulunur. Bu dağılımların nasıl hesaplanacağı toplama işleminde gösterilmiş olup B_1 ve B_2 kesikli sayı gibi düşünerek bazı temel değerlerine karşılık gelen olasılık dağılımlarının sonuçları Tablo 4.1'de gösterilmiştir.

Sonra $Z_1^+ = (A_1, R_1)$ ve $Z_2^+ = (A_2, R_2)$ sayılarına geçilip $Z_{12}^+ = (A_{12}, R_1/R_2)$ sayıları hesaplanmalıdır. Burada fuzzy sayıların $A_{12} = A_1/A_2$ bölümü için α -kesme kümelerinden yararlanılır. μ_{A_1} ve μ_{A_2} üyelik fonksiyonlarının tersi bulunarak elde

edilen α -kesme kümeleri

$$A_1^\alpha = [\alpha + 1, 3 - \alpha]$$

ve

$$A_2^\alpha = [\alpha + 7, 9 - \alpha]$$

dır.

$$A_1^\alpha/A_2^\alpha = \left[\frac{\alpha + 7}{3 - \alpha}, \frac{9 - \alpha}{\alpha + 1} \right]$$

olur. $\alpha = 0$ için $A_1^0/A_2^0 = [\frac{7}{3}, 9]$ ve $\alpha = 1$ için $A_1^1/A_2^1 = [4, 4]$ değeri bulunur. O halde A_1/A_2 fuzzy sayısı üçgensel fuzzy sayı olmasa da sıralı üçlü olarak $(\frac{7}{3}, 4, 9)$ ifade edilebilir. Üyelik fonksiyonu da aşağıdaki gibidir:

$$\mu_{A_{12}}(x) = \begin{cases} \frac{3x-7}{x+1}, & \frac{7}{3} \leq x \leq 4 \\ \frac{9-x}{x+1}, & 4 \leq x \leq 9 \end{cases}.$$

R_1/R_2 toplama örneğinde kullanılan $p_1 = N(2, 0.217)$ ve $p_2 = N(8, 0.77)$ olasılık dağılımlarının p_{12} konvolüsyonları ile $p_{12} = (4, 0.34)$ olur.

Önceki örneklerde olduğu gibi

$$\mu_{p_1}(p_1) = \mu_{B_1}(0.84) = 9 - 10 \cdot (0.84) = 9 - 8.4 = 0.6$$

ve

$$\mu_{p_2}(p_2) = \mu_{B_2}(0.46) = 10 \cdot (0.46) - 4 = 4.6 - 4 = 0.6$$

olur.

p_1 ve p_2 ile elde edilen p_{12} konvolüsyonlarının üyelik dereceleri hesaplanır $\mu_{p_{12}}(p_{12}) = 0.6$ bulunur.

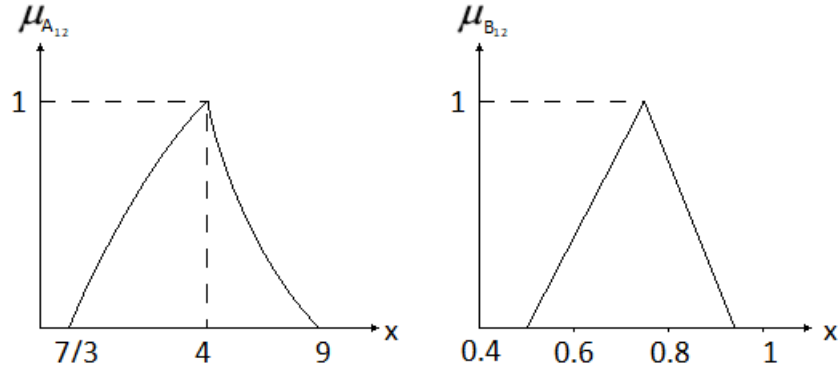
Daha sonra B_{12} hesaplanır. Bunun için elde edilen tüm p_{12} konvolüsyonları kullanılarak olasılık ölçüsü $P(A_{12}) = b_{12} = 0.77$ hesaplanır.

Son olarak, b_{12s} ve $\mu_{B_{12}}(b_{12s})$ tanımları kullanılarak B_{12} nin fuzzy yapısı oluşturulur. Yukarıda elde edilen $b_{12} = 0.77$ temel değeri için üyelik derecesi

$$\mu_{B_{12}}(b_{12} = 0.77) = 0.6$$

olur.

Bu şekilde tüm b_{12} temel değerleri için fuzzy kısıtlar bulunur ve böylece B_{12} nin fuzzy yapısı elde edilmiş olur. Böylece Z_1 ve Z_2 sürekli Z-sayılarının bölümü $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ Şekil 4.8'deki gibi hesaplanmış olur [2].



Şekil 4.8. Sürekli Z-sayıların bölümü: A_{12} ve B_{12} nin grafikleri

4.5. Sürekli Bir Z-Sayısının Karesi

$Z_Y = Z_X^2$ nin nasıl hesaplanacağı verilecektir. R_X , (4.1) denklemi ile temsil edilmek üzere, $Z_X^+ = (A_X, R_X)$ olsun. Bu durumda sürekli Z^+ -sayısı için Z_Y^+ sayısı, $A_Y = A_X^2$ ve $\mu_{A^2}(y) = \max(\mu_A(\sqrt{y}), \mu_A(-\sqrt{y}))$ kullanılarak $Z_Y^+ = (A_Y, R_Y)$ oluşturulur.

R_Y ise

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[p_X(\sqrt{y}) + p_X(-\sqrt{y})], \quad y \geq 0 \quad (4.10)$$

ile tanımlı $\mu_{p_X}(p_X)$ üyelik dereceleri toplama işlemi başlığı altında anlatılan lineer programlama modelinin çözümüyle hesaplanır.

Daha sonra p_X olasılık dağılımının $\mu_{p_X}(p_{X,l})$ üyelik fonksiyonuyla oluşan fuzzy kümesinin doğal olarak, $\mu_{p_Y}(p_{Y,l})$ şeklinde tanımlanan üyelik fonksiyonuyla (4.10) denkleminin uygun olarak elde edilen, $p_{Y,l}$ olasılık dağılımının fuzzy kümesi ortaya çıkarılır. Sonra elde edilen p_Y olasılık dağılımları kullanılarak, A_Y nin olasılık ölçüsü hesaplanır. Son olarak, p_Y olasılık dağılımı üzerinde elde edilen μ_{p_Y} üyelik fonksiyonuyla gösterilen fuzzy kısıtlar yardımıyla, (4.8) ve (4.9) tanımları kullanılarak B_Y nin fuzzy küme yapısı kurulur. Sonuç olarak Z^2 sayısı $Z^2 = (A_Y, B_Y)$ biçiminde elde edilir.

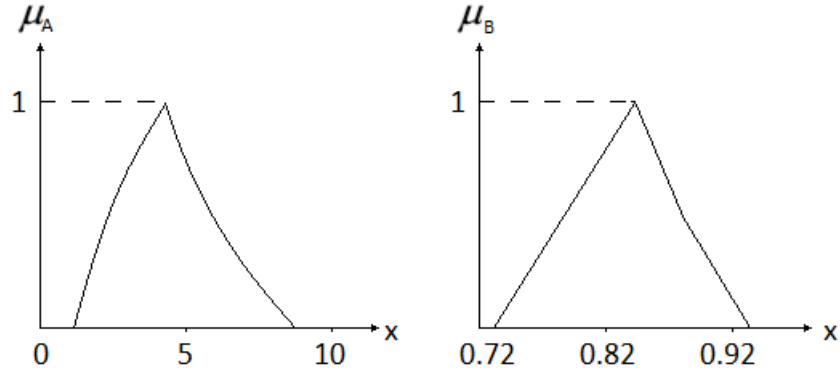
Bu durum daha da genelleştirilerek n herhangi bir doğal sayı olmak üzere $Z_Y = Z_X^n$ şeklindeki bir Z-sayısının hesabı benzer şekilde yapılabilir.

Örnek 4.5.1. $Z_1 = (A_1, B_1) = ((1, 2, 3), (0.7, 0.8, 0.9))$ sürekli Z-sayısı için $Z = (A, B) = Z_1^2$ ni hesaplayalım.

$A = A_1^2$ fuzzy sayısı,

$$\mu_{A^2}(y) = \max(\mu_A(\sqrt{y}), \mu_A(-\sqrt{y}))$$

eşitliği ile hesaplanır ve elde edilen B fuzzy sayısının grafiği Şekil 4.9'daki gibidir [2].



Şekil 4.9. Sürekli bir Z-sayısının karesi: A ve B nin grafikleri

4.6. Sürekli Bir Z-Sayısının Karekökü

Zadeh [21] nolu çalışmasında "sürekli bir Z-sayısının karekökü nedir?" sorusunu sorar. Yani $Z_Y = \sqrt{Z_X}$ nasıl hesaplanır. Z_X^+ ve Z_X sayıları daha önce tanımladığımız gibi olsun. Bu durumda Z_Y^+ sürekli Z^+ -sayısı aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$A_Y = \sqrt{A_X}$ daha önceki bölümde tanımlanmıştı ve R_Y de

$$y \geq 0 \quad \text{iken} \quad p_Y(y) = 2yp_X(y^2) \quad (4.11)$$

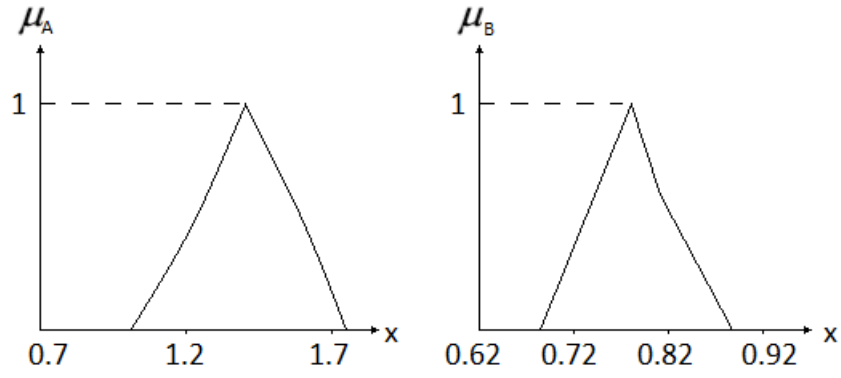
denklemleri ile hesaplanır. $\mu_{p_X}(p_X)$ üyelik dereceleri toplama işlemi için anlatılan (4.4) ve (4.5) denklemleri ile verilen lineer programlama modelinin çözümüyle hesaplanır ve (4.11) denkleminde de yararlanılarak elde edilen p_Y olasılık dağılımı için

$$\mu_{p_Y}(p_{Y,l}) = \mu_{p_X}(p_{X,l})$$

bulunur. Daha sonra A_Y nin olasılık ölçüsü hesaplanır ve elde edilen μ_{p_Y} üyelik fonksiyonları yardımıyla sürekli bir Z-sayısının karesini hesaplarken yapılan işlemlere benzer olarak B_Y fuzzy kümesi yapısı oluşturulur.

Örnek 4.6.1. $Z_1 = ((1, 2, 3), (0.7, 0.8, 0.9))$ sürekli Z-sayısı verilsin. $Z = (A, B) = \sqrt{Z_1}$ karekökünü hesaplayalım.

$A = \sqrt{A_1}$ in hesabı için önce bir fuzzy sayının karekökü hesabı yapılır. Ardından B sayısının yapısı da Şekil 4.10'da gösterildiği gibidir [2].



Şekil 4.10. Sürekli bir Z -sayısının karekökü: A ve B nin grafikleri

Sürekli Z -sayılarla ilgili aritmetik işlemler için [2], [4] ve [5] çalışmalarına bakılabilir.

5. KESİKLİ Z-SAYILAR ÜZERİNDE ARİTMETİK İŞLEMLER

5.1. Kesikli Z-Sayılar Üzerinde Toplama İşlemi

$Z_1 = (A_1, B_1)$ ve $Z_2 = (A_2, B_2)$ reel değerli X_1 ve X_2 belirsiz değişkenleri hakkında eksik bilgiyi tanımlayan kesikli Z -sayılar olsun. $Z_{12} = Z_1 + Z_2$ toplamı nasıl yapılır? Kesikli Z -sayılarla hesaplama yapabilmek için sürekli Z -sayılarda olduğu gibi öncelikle kesikli Z^+ -sayılara geçilmeli ve Z^+ -sayılarla işlemler yapılmalıdır. $Z_{12}^+ = Z_1^+ + Z_2^+$ şeklindeki kesikli Z^+ -sayısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Z_1^+ + Z_2^+ = (A_1 + A_2, R_1 + R_2)$$

Burada R_1 ve R_2

$$p_1 = p_1(x_{11}) \setminus x_{11} + p_1(x_{12}) \setminus x_{12} + \cdots + p_1(x_{1n}) \setminus x_{1n},$$

$$p_2 = p_2(x_{21}) \setminus x_{21} + p_2(x_{22}) \setminus x_{22} + \cdots + p_2(x_{2n}) \setminus x_{2n},$$

$$\sum_{k=1}^n p_1(x_{1k}) = 1,$$

$$\sum_{k=1}^n p_2(x_{2k}) = 1,$$

kesikli olasılık dağılımlarıdır.

$A_1 + A_2$ ve $R_1 + R_2$ de işleme alınan terimler Z -sayılar bölümünde bahsedilen farklı kısıtlama türlerini temsil etmektedir. Kesikli fuzzy sayıların $A_1 + A_2$ toplamı Ön Bilgiler bölümünde verilmiştir. $R_1 + R_2$ ise kesikli olasılık dağılımlarının $p_{12} = p_1 \circ p_2$ konvolüsyonudur ve Ön Bilgiler kısmındaki tanıma uygun olarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir

$$p_{12}(x) = \sum_{x=x_1+x_2} p_1(x_1)p_2(x_2).$$

Böylece $Z_{12}^+ = (A_1 + A_2, p_{12})$ şeklinde Z_{12}^+ -sayısı elde edilir. Kesikli Z^+ -sayılarla hesaplanan bu sonuç Z -sayılarla hesap yapmanın ilk adımıdır.

Bir sonraki adımda $Z_1 = (A_1, B_1)$ ve $Z_2 = (A_2, B_2)$ sayılarında, gerçek olasılık dağılımları p_1 ve p_2 nin tam olarak bilinmemektedir. Aksine mevcut bilgiler fuzzy kısıtlarla gösterilmektedir:

$$\mu_{B_1} \left(\sum_{k=1}^{n_1} \mu_{A_1}(x_{1k}) p_1(x_{1k}) \right),$$

$$\mu_{B_2} \left(\sum_{k=1}^{n_2} \mu_{A_2}(x_{2k}) p_2(x_{2k}) \right)$$

üyelik fonksiyonları ile

$$\sum_{k=1}^{n_1} \mu_{A_1}(x_{1k}) p_1(x_{1k}) \quad B_1 \quad \text{dir,}$$

$$\sum_{k=1}^{n_2} \mu_{A_2}(x_{2k}) p_2(x_{2k}) \quad B_2 \quad \text{dir.}$$

Bu kısıtlar p_1 ve p_2 olasılık dağılımlarının üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanan fuzzy kümelerini ifade etmektedir:

$$\begin{aligned} \mu_{p_1}(p_1) &= \mu_{B_1} \left(\sum_{k=1}^{n_1} \mu_{A_1}(x_{1k}) p_1(x_{1k}) \right), \\ \mu_{p_2}(p_2) &= \mu_{B_2} \left(\sum_{k=1}^{n_2} \mu_{A_2}(x_{2k}) p_2(x_{2k}) \right). \end{aligned}$$

Böylece $j = 1, 2$ için B_j , A_j nin olasılık ölçüsünün bir değeri olan $P(A_j)$ üzerinde esnek bir kısıt işlevi gören kesikli bir fuzzy sayıdır. Bu nedenle $j = 1, 2$ olacak şekilde B_j kesikli fuzzy sayısının $j = 1, 2$ ve $l = 1, 2, \dots, m$ için $b_{jl} \in \text{supp}(B_j)$ temel değerleri A_j nin olasılık ölçüsünün değerleridir. Yani $b_{jl} = P(A_j)$ dir. Böylece Z-Sayılar bölümünde verilen

$$P(A) = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) p(x_i) = \mu_A(x_{j1}) p_j(x_{j1}) + \mu_A(x_{j2}) p_j(x_{j2}) + \dots + \mu_A(x_{jn_j}) p_j(x_{jn_j})$$

tanımına uygun olarak b_{jl} ler hesaplandığında, aşağıdaki eşitliği sağlayan ve p_{jl} ile gösterilen olasılık dağılımı bulunmak zorundadır:

$$b_{jl} = \mu_{A_j}(x_{j1}) p_{jl}(x_{j1}) + \mu_{A_j}(x_{j2}) p_{jl}(x_{j2}) + \dots + \mu_{A_j}(x_{jn_j}) p_{jl}(x_{jn_j}).$$

Aynı zamanda p_{jl} olasılık dağılımı olduğu için aşağıdaki kısıtlarıda sağlamak zorundadır:

$$\sum_{k=1}^{n_j} p_{jl}(x_{jk}) = 1, \quad p_{jl}(x_{jk}) \geq 0.$$

Bu bilgiler yardımıyla p_j yi bulmak için aşağıdaki hedef programlama probleminin çözümü yapılır:

Hedef:

$$\mu_{A_j}(x_{j1}) p_{jl}(x_{j1}) + \mu_{A_j}(x_{j2}) p_{jl}(x_{j2}) + \dots + \mu_{A_j}(x_{jn_j}) p_{jl}(x_{jn_j}) \rightarrow b_{jl}$$

Kısıtlar:

$$\left. \begin{aligned} p_{jl}(x_{j1}) + p_{jl}(x_{j2}) + \dots + p_{jl}(x_{jn}) &= 1 \\ p_{jl}(x_{j1}), p_{jl}(x_{j2}), \dots, p_{jl}(x_{jn}) &\geq 0 \end{aligned} \right\}.$$

Şimdi bu modellemede, indislerin karmaşasından kurtulmak amacıyla $k = 1, 2, \dots, n$ için $c_k = \mu_{A_j}(x_{jk})$ ve $v_k = p_j(x_{jk})$ olarak alınsın. Burada c_k ve b_{jl} bilinen sayılar, v_k ise bilinmeyen karar değişkenleridir. Yukarıdaki problem aşağıdaki lineer hedef programlama modeli ile gösterilebilir.

Hedef:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \rightarrow b_{jl} \quad (5.1)$$

Kısıtlar:

$$\left. \begin{aligned} v_1 + v_2 + \dots + v_n &= 1 \\ v_1, v_2, \dots, v_n &\geq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.2)$$

Her $l = 1, 2, \dots, m$ için yukarıdaki problemin v_k , $k = 1, 2, \dots, n$ çözümleri elde edilir. $k = 1, 2, \dots, n$ için $v_k = p_{jl}(x_{jk})$ dır. Sonuç olarak, $k = 1, 2, \dots, n$ için $p_{jl}(x_{jk})$ hesaplanmış olur ve buradan p_{jl} olasılık dağılımı elde edilmiş olur. Elde edilen b_{jl} ler p_{jl} gibidir. Buradan istenen üyelik derecesi $j = 1, 2$ için $\mu_{p_{jl}}(p_{jl}) = \mu_{B_j}(b_{jl})$ eşitliğidir. Yani

$$\mu_{p_{jl}}(p_{jl}) = \mu_{B_j} \left(\sum_{k=1}^{n_j} \mu_{A_j}(x_{jk}) p_{jl}(x_{jk}) \right)$$

dır. Böylece p_{jl} olasılık dağılımlarının fuzzy kümelerini oluşturmak için yukarıda bahsedilen n tane lineer hedef programlama probleminin çözülmesi gerekir.

p_{1l} ve p_{2l} olasılık dağılımlarının fuzzy kümeleri, $s = 1, 2, \dots, m^2$ olmak üzere p_{12s} konvolüsyonlarının üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi olan fuzzy kümesini oluşturur.

$p_{12} = p_1 \circ p_2$ ve $\wedge = \min$ operatörü olmak üzere,

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \max_{p_1, p_2} [\mu_{p_1}(p_1) \wedge \mu_{p_2}(p_2)].$$

Bir sonraki adımda elde edilen p_{12} ler ile $A_{12} = A_1 + A_2$ nin olasılık ölçüsü hesaplanmalıdır. Yani " X, A_{12} dir " fuzzy olayının olasılığını hesaplamak içindir.

Böylece, p_{12} ler hesaplandığında, $P(A_{12})$ olasılık ölçüsü $P(A_{12}) = b_{12}$ sayıdır. Ancak burada yalnızca bilinen şey $\mu_{p_{12}}$ üyelik fonksiyonuyla ifade edilen p_{12} dağılımı üzerindeki bir fuzzy kısıttır. Bu nedenle $P(A_{12})$, aşağıdaki gibi tanımlı $\mu_{B_{12}}$ üyelik fonksiyonuyla B_{12} fuzzy kümesi olacaktır:

$$b_{12s} = \sum_k p_{12s}(x_k) \mu_{A_{12}}(x_k) \quad (5.3)$$

olmak üzere,

$$\mu_{B_{12}}(b_{12s}) = \sup(\mu_{p_{12s}}(p_{12s})). \quad (5.4)$$

Sonuç olarak, $Z_{12} = Z_1 + Z_2$ toplamı $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ olarak hesaplanmış olur.

Örnek 5.1.1. Bileşenleri aşağıdaki gibi verilen $Z_1 = (A_1, B_1)$ ve $Z_2 = (A_2, B_2)$ şeklindeki iki kesikli Z sayının $Z_{12} = Z_1 + Z_2$ toplamını hesaplayalım:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0/1+0.3/2+0.5/3+0.6/4+0.7/5+0.8/6+0.9/7+1/8+0.8/9+0.6/10+0/11, \\ B_1 &= 0/0 + 0.5/0.1 + 0.8/0.2 + 1/0.3 + 0.8/0.4 + 0.7/0.5 + 0.6/0.6 + 0.4/0.7 + \\ &0.2/0.8 + 0.1/0.9 + 0/1, \\ A_2 &= 0/1+0.5/2+0.8/3+1/4+0.8/5+0.7/6+0.6/7+0.4/8+0.2/9+0.1/10+0/11, \\ B_2 &= 0/0 + 0.3/0.1 + 0.5/0.2 + 0.6/0.3 + 0.7/0.4 + 0.8/0.5 + 0.9/0.6 + 1/0.7 + \\ &0.9/0.8 + 0.8/0.9 + 0/1. \end{aligned}$$

İlk olarak sürekli Z -sayılarda olduğu gibi Z_{12} yi hesaplamak için kesikli Z^+ -sayılara geçilir. Bunun için B_1 ve B_2 nin b_1 ve b_2 temel değerlerine karşılık gelen olasılık dağılımları hesaplanmalıdır. Yukarıda bahsedilen lineer hedef programlama problemine bir örnek olarak, $b_{1l} = 0.4$ ve $b_{2l} = 0.7$ değerlerine karşılık gelen olasılık dağılımlarının bulunmasını sağlayacak işlemler aşağıdaki gibidir:

Hedef ($b_{1l} = 0.4$):

$$\begin{aligned} \mu_{A_1}(x_{11})p_{1l}(x_{11}) + \mu_{A_1}(x_{12})p_{1l}(x_{12}) + \dots + \mu_{A_1}(x_{1n_1})p_{1l}(x_{1n_1}) &\rightarrow b_{1l} = 0.4, \\ 0 \cdot v_{11} + 0.3v_{12} + 0.5v_{13} + 0.6v_{14} + 0.7v_{15} + 0.8v_{16} + 0.9v_{17} + 1v_{18} + 0.8v_{19} + 0.6v_{110} + \\ 0 \cdot v_{111} &\rightarrow 0.4 \end{aligned}$$

Kısıtlar:

$$\left. \begin{aligned} v_{11} + v_{12} + \dots + v_{111} &= 1 \\ v_{11}, v_{12}, \dots, v_{111} &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

ve

Hedef ($b_{2l} = 0.7$):

$$\begin{aligned} \mu_{A_2}(x_{21})p_{2l}(x_{21}) + \mu_{A_2}(x_{22})p_{2l}(x_{22}) + \dots + \mu_{A_2}(x_{2n_2})p_{2l}(x_{2n_2}) &\rightarrow b_{2l} = 0.7 \\ 0 \cdot v_{21} + 0.5v_{22} + 0.8v_{23} + 1v_{24} + 0.8v_{25} + 0.7v_{26} + 0.6v_{27} + 0.4v_{28} + 0.2v_{29} + 0.1v_{210} + \\ 0 \cdot v_{211} &\rightarrow 0.7 \end{aligned}$$

Kısıtlar:

$$\left. \begin{aligned} v_{21} + v_{22} + \dots + v_{211} &= 1 \\ v_{21}, v_{22}, \dots, v_{211} &\geq 0 \end{aligned} \right\}.$$

Bu verilenlerin çözümünden elde edilen olasılık dağılımları da,

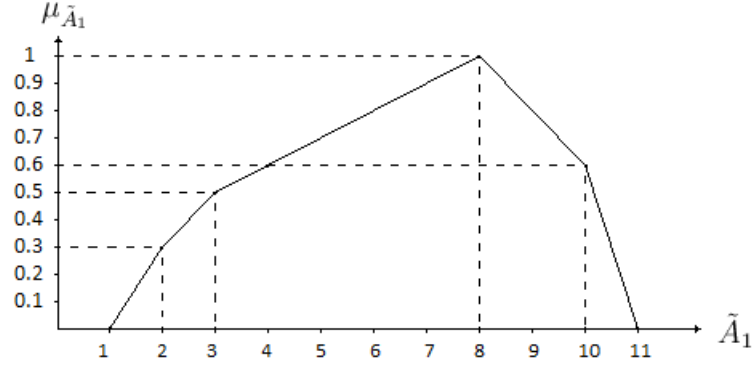
$$p_1 = 0.27 \setminus 1 + 0 \setminus 2 + 0 \setminus 3 + 0.0027 \setminus 4 + 0.04 \setminus 5 + 0.075 \setminus 6 + 0.11 \setminus 7 + 0.15 \setminus 8 + 0.075 \setminus 9 + 0.0027 \setminus 10 + 0.27 \setminus 11,$$

$$p_2 = 0.09 \setminus 1 + 0 \setminus 2 + 0.18 \setminus 3 + 0.32 \setminus 4 + 0.18 \setminus 5 + 0.1 \setminus 6 + 0.036 \setminus 7 + 0 \setminus 8 + 0 \setminus 9 + 0 \setminus 10 + 0.09 \setminus 11,$$

şeklinde. Benzer işlemlerle diğer olasılık dağılımları da hesaplanabilir. Bu olasılık dağılımları yardımıyla $Z_1^+ = (A_1, R_1)$ ve $Z_2^+ = (A_2, R_2)$ Z^+ -sayıları elde edilir.

$Z_{12}^+ = (A_1 + A_2, R_1 + R_2)$ kesikli Z^+ -sayısı belirlenmelidir. Bunun için $A_1 + A_2$ toplamı daha sonra da $R_1 + R_2$ toplamı hesaplanır.

$A_1 + A_2$ toplamı için Ön Bilgiler bölümünde bahsedilen yöntemle göre, verilen kesikli fuzzy sayılar fuzzy sayılara dönüştürerek yapılır. Şekil 5.1'deki grafikte A_1 kesikli fuzzy sayısının noktaları birleştirilerek bir fuzzy sayı haline getirilmiş ve $\tilde{A}_1$ olarak gösterilmiştir.

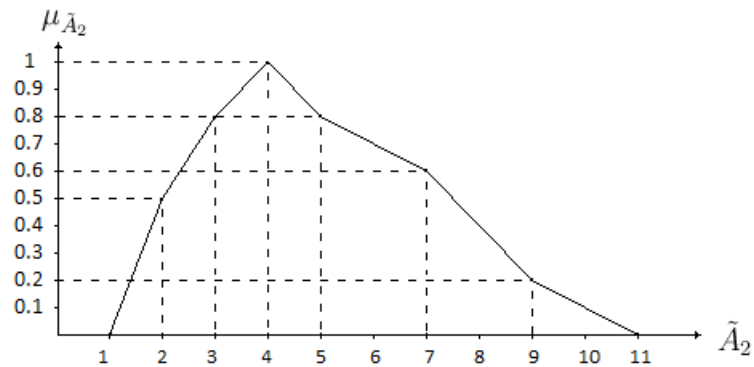


Şekil 5.1. $\tilde{A}_1$ fuzzy sayısı

$\tilde{A}_1$ grafiğinden $\mu_{\tilde{A}_1}$ parçalı fonksiyonu ve $\tilde{A}_1^\alpha$ ile gösterilen α -kesme kümesi aşağıdaki gibi kolayca elde edilebilir:

$$\mu_{\tilde{A}_1}(x) = \begin{cases} \frac{3x-3}{10}, & x \in [1, 2] \\ \frac{2x-1}{10}, & x \in [2, 3] \\ \frac{x+2}{10}, & x \in [3, 8] \\ \frac{26-2x}{10}, & x \in [8, 10] \\ \frac{66-6x}{10}, & x \in [10, 11] \end{cases} \quad \text{ve} \quad \tilde{A}_1^\alpha = \begin{cases} [\frac{10\alpha+3}{3}, \frac{66-10\alpha}{6}], & \alpha \in [0, 0.3] \\ [\frac{10\alpha+1}{2}, \frac{66-10\alpha}{6}], & \alpha \in [0.3, 0.5] \\ [\frac{10\alpha-2}{1}, \frac{66-10\alpha}{6}], & \alpha \in [0.5, 0.6] \\ [\frac{10\alpha-2}{1}, \frac{26-10\alpha}{2}], & \alpha \in [0.6, 1] \end{cases}$$

Benzer olarak, Şekil 5.2'teki grafikte de A_2 kesikli fuzzy sayısının noktaları birleştirilerek bir fuzzy sayı haline getirilmiş ve $\tilde{A}_2$ olarak gösterilmiştir.



Şekil 5.2. $\tilde{A}_2$ fuzzy sayısı

$\tilde{A}_2$ nın grafiğinden elde edilebilecek $\mu_{\tilde{A}_2}$ parçalı fonksiyonu ve $\tilde{A}_2^\alpha$ ile gösterilen α -kesme kümesi aşağıdaki gibidir.

$$\mu_{\tilde{A}_2}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & x \in [1, 2] \\ \frac{3x-1}{10}, & x \in [2, 3] \\ \frac{2x+2}{10}, & x \in [3, 4] \\ \frac{18-2x}{10}, & x \in [4, 5] \\ \frac{13-x}{10}, & x \in [5, 7] \\ \frac{20-2x}{10}, & x \in [7, 9] \\ \frac{11-x}{10}, & x \in [9, 11] \end{cases} \quad \text{ve} \quad \tilde{A}_2^\alpha = \begin{cases} [\frac{2\alpha+1}{1}, \frac{11-10\alpha}{1}], & \alpha \in [0, 0.2] \\ [\frac{2\alpha+1}{1}, \frac{10-5\alpha}{1}], & \alpha \in [0.2, 0.5] \\ [\frac{10\alpha+1}{3}, \frac{10-5\alpha}{1}], & \alpha \in [0.5, 0.6] \\ [\frac{10\alpha+1}{3}, \frac{13-10\alpha}{1}], & \alpha \in [0.6, 0.8] \\ [\frac{10\alpha-2}{2}, \frac{18-10\alpha}{2}], & \alpha \in [0.8, 1] \end{cases}$$

$\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$ toplamı, üçgensel fuzzy sayıların α -kesme kümeleri yardımıyla toplanması işlemine benzer olarak yapılabilir. Ancak $\mu_{\tilde{A}_1}$ ve $\mu_{\tilde{A}_2}$ parçalı fonksiyon olduğundan, fonksiyonların kırıldığı yani kuralın değiştiği her aralıkta tekrar işlem yapmak gereklidir. Yani $[\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2]^\alpha$ toplamı, $\tilde{A}_1$ ve $\tilde{A}_2$ deki kırılma yaşanan tüm α noktalarında yapılmalıdır. Örneğin $\tilde{A}_1$ fuzzy sayısı $\alpha = 0, \alpha = 0.3, \alpha = 0.5, \alpha = 0.6$ ve $\alpha = 1$ değerlerinde kırılmıştır. O halde $[\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2]^\alpha$ toplamında da bu değerlerde kırılma olacaktır.

$[\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2]^\alpha$ toplamının bir kısmının nasıl elde edildiği gösterilip diğer kısımlar sadece için işlem sonucu yazılacaktır. İlk aralık için 0 dan sonra ilk kırılma noktası olan α değerine bakılır. Bu değer $\tilde{A}_2$ de $\alpha = 0.2$ dir. O halde ilk aralık olan $\alpha \in [0, 0.2]$ için $\tilde{A}_1^\alpha$ dan $\alpha \in [0, 0.3]$ kısmı ile $\tilde{A}_2^\alpha$ dan $\alpha \in [0, 0.2]$ kısmı toplanır. Yani

$$\left[\frac{10\alpha+3}{3} + \frac{2\alpha+1}{1}, \frac{66-10\alpha}{6} + \frac{11-10\alpha}{1} \right] = \left[\frac{16\alpha+6}{3}, \frac{132-70\alpha}{6} \right]$$

$$\left[\frac{16\alpha+6}{3}, \frac{132-70\alpha}{6} \right], \quad \alpha \in [0, 0.2]$$

olur. $\tilde{A}_1$ ve $\tilde{A}_2$ den herhangi birinde 0.2 den sonra gelen ilk kırılma değerine bakılır. $\tilde{A}_1$ da $\alpha = 0.3$ değerinde kırılma olduğu için bir sonraki aralık $[0.2, 0.3]$ olur.

Bu şekilde devam edilerek elde edilen $[\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2]^\alpha$ toplamı aşağıdaki gibi olur.

$$[\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2]^\alpha = \begin{cases} [\frac{16\alpha+6}{3}, \frac{132-70\alpha}{6}], & \alpha \in [0, 0.2] \\ [\frac{16\alpha+6}{3}, \frac{126-40\alpha}{6}], & \alpha \in [0.2, 0.3] \\ [\frac{14\alpha+3}{2}, \frac{126-40\alpha}{6}], & \alpha \in [0.3, 0.5] \\ [\frac{40\alpha-5}{3}, \frac{126-40\alpha}{6}], & \alpha \in [0.5, 0.6] \\ [\frac{40\alpha-5}{3}, \frac{52-30\alpha}{2}], & \alpha \in [0.6, 0.8] \\ [\frac{30\alpha-6}{2}, \frac{44-20\alpha}{2}], & \alpha \in [0.8, 1] \end{cases}$$

$[\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2]^\alpha$ toplamından $\mu_{\tilde{A}_1+\tilde{A}_2}$ üyelik fonksiyonu elde edilir. Bunun için her kırılma noktasında α değerine karşılık gelen x değerleri bulunur. Bu noktalardan çizilerek oluşan grafikten üyelik fonksiyonu elde edilebileceği gibi $[\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2]^\alpha$ da görünen α ya bağlı fonksiyonların tersi alınarakta $\mu_{\tilde{A}_1+\tilde{A}_2}$ üyelik fonksiyonu bulunabilir.

Örneğin $\alpha = 0.5$ değeri için

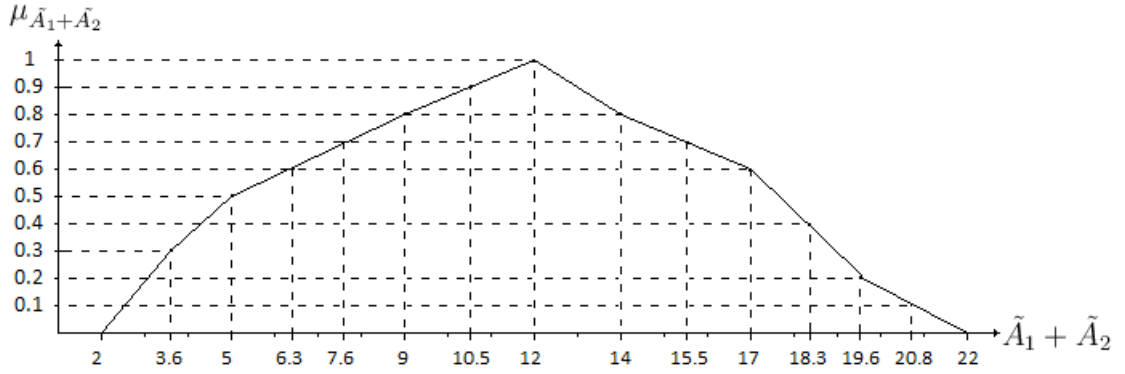
$$\left[\frac{14\alpha + 3}{2}, \frac{126 - 40\alpha}{6} \right] \quad \text{veya} \quad \left[\frac{40\alpha - 5}{3}, \frac{126 - 40\alpha}{6} \right]$$

α -kesme kümeleri kullanılarak bulunabilir:

$$\left[\frac{14 \cdot (0.5) + 3}{2}, \frac{126 - 40 \cdot (0.5)}{6} \right] \quad \text{veya} \quad \left[\frac{40 \cdot (0.5) - 5}{3}, \frac{126 - 40 \cdot (0.5)}{6} \right],$$

$$\left[5, \frac{53}{3} \right] \quad \text{veya} \quad \left[5, \frac{53}{3} \right].$$

Buradan $\mu_{\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2}(5) = 0.5$ ve $\mu_{\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2}(\frac{53}{3}) = 0.5$ dir. Benzer şekilde diğer noktalar bulunarak oluşturulan $\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$ grafiği Şekil 5.3'deki gibidir. Ayrıca $\mu_{\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2}$ üyelik



Şekil 5.3. $\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$ fuzzy sayısı (Grafikte kesirli sayılar ondalık sayılara yuvarlanmıştır.)

fonksiyonu da

$$\mu_{\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2}(x) = \begin{cases} \frac{15x-30}{80}, & x \in [2, \frac{18}{5}] \\ \frac{10x-15}{70}, & x \in [\frac{18}{5}, 5] \\ \frac{3x+5}{40}, & x \in [5, 9] \\ \frac{x+3}{15}, & x \in [9, 12] \\ \frac{22-x}{10}, & x \in [12, 14] \\ \frac{26-x}{15}, & x \in [14, 17] \\ \frac{63-3x}{20}, & x \in [17, \frac{59}{3}] \\ \frac{66-3x}{35}, & x \in [\frac{59}{3}, 22] \end{cases}$$

olur.

Böylece $\text{supp}(A_1 + A_2) = \{1, 2, \dots, 22\}$ kümesinde istenen her sayının üyelik değeri bulunabilir. Örneğin $x = 7$ için üyelik değeri

$$\mu_{\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2}(7) = \frac{3 \cdot 7 + 5}{40} = \frac{26}{40} = 0.65$$

olur. Benzer şekilde diğer üyelik değerleri de hesaplandığı zaman $A_1 + A_2$ aşağıdaki gibidir.

$$A_{12} = 0/1 + 0/2 + 0.19/3 + 0.36/4 + 0.5/5 + 0.58/6 + 0.65/7 + 0.73/8 + 0.8/9 + 0.87/10 + 0.93/11 + 1/12 + 0.9/13 + 0.8/14 + 0.73/15 + 0.7/16 + 0.6/17 + 0.45/18 + 0.3/19 + 0.17/20 + 0.086/21 + 0/22.$$

Şimdi de $R_1 + R_2$ toplamını hesaplayalım. $R_1 + R_2$ toplamı daha önce bahsedilen p_1 ve p_2 olasılık dağılımlarının,

$$p_{12}(x) = \sum_{x=x_{1i}+x_{2j}} p_1(x_{1i})p_2(x_{2j})$$

şeklindeki $p_{12} = p_1 \circ p_2$ konvolüsyonudur.

Örneğin $x = 4$ için $p_{12}(x)$ değeri hesaplınsın. $x = 4$ aşağıdaki ihtimallerle elde edilebilir:

$$x = x_{11} + x_{23} = 1 + 3 = 4, x = x_{13} + x_{21} = 3 + 1 = 4 \quad \text{veya} \quad x = x_{12} + x_{22} = 2 + 2 = 4.$$

Sonra bunlar yardımıyla

$$p_{12}(4) = p_1(1)p_2(3) + p_1(3)p_2(1) + p_1(2)p_2(2) = (0.27) \cdot (0.18) + (0) \cdot (0.09) + 0 \cdot 0 = 0.0486$$

değeri hesaplanır.

Benzer şekilde diğer değerler de hesaplanırsa

$$p_{12} = 0/1 + 0.0243/2 + 0/3 + 0.0486/4 + \dots + 0.007/19 + 0.0002/20 + 0.0243/21$$

olur.

Böylece $Z_{12}^+ = (A_1 + A_2, R_1 + R_2) = (A_{12}, R_{12})$ sayısı elde edilmiş olur.

p_1 ve p_2 olasılık dağılımları tam olarak bilinmemekte sadece B_1 ve B_2 den elde edilen p_1 ve p_2 olasılık dağılımları için μ_{p_1} ve μ_{p_2} fuzzy kısıtları bilinmektedir. Denklem (5.1) ve (5.2) ile verilen lineer hedef programlama modelinin çözümünden p_j ler elde edildikten sonra fuzzy kısıtların, $j = 1, 2$ için $\mu_{p_j}(p_j)$ üyelik dereceleri hesaplanır. Örnek olarak verilen p_1 ve p_2 olasılık dağılımı için üyelik derecelerinin hesabı aşağıdaki gibidir.

$$\mu_{p_1}(p_1) = \mu_{B_1} \left(\sum_{k=1}^{n_1} \mu_{A_1}(x_{1k})p_1(x_{1k}) \right)$$

eşitliğinden daha önceden bahsedilmişti. Bu eşitlik p_1 için kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_1} \mu_{A_1}(x_{1k})p_1(x_{1k}) &= 0 \cdot 0.27 + 0.3 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0 + 0.6 \cdot 0.0027 + 0.7 \cdot 0.04 \\ &+ 0.8 \cdot 0.075 + 0.9 \cdot 0.11 + 1 \cdot 0.15 + 0.8 \cdot 0.075 \\ &+ 0.6 \cdot 0.002 + 0 \cdot 0.27 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

olur. Buradan $\mu_{p_1}(p_1) = \mu_{B_1}(0.4) = 0.8$ olduğu görülür. Benzer şekilde örneğimizdeki p_2 dağılımı için $\mu_{p_1}(p_1) = 1$ olarak hesaplanır. Sonuç olarak p_1 ve p_2 nin üyelik dereceleri hesaplanmış olur.

Elde edilecek tüm p_1 ve p_2 dağılımlarından, $p_{12} = p_1 \circ p_2$ ve $\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \max_{p_1, p_2} [\mu_{p_1}(p_1) \wedge \mu_{p_2}(p_2)]$ eşitlikleri dikkate alınarak, tüm p_{12} konvolüsyonları üzerinde $\mu_{p_{12}}$ fuzzy kısıtları hesaplanmalıdır. $\mu_{p_{12}}$ fuzzy kısıtının μ_{p_1} ve μ_{p_2} fuzzy kısıtlarından elde edileceği açıktır. Örneğin, yukarıda bulunan p_{12} konvolüsyonunun fuzzy kısıt olarak üyelik derecesi:

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \mu_{p_1}(p_1) \wedge \mu_{p_2}(p_2) = 0.8 \wedge 1 = 0.8$$

dir. Benzer şekilde elde edilecek tüm p_{12} konvolüsyonlarının dereceleri hesaplanmalıdır.

$P(A_{12})$ olasılık ölçüsü üzerinde esnek bir kısıt olan B_{12} yapısı oluşturulur. Örneğin yukarıda hesaplanan p_{12} konvolüsyonu için $P(A_{12})$ olasılık ölçüsü değeri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} P(A_{12}) &= \sum_{k=1}^{n_1} \mu_{A_{12}}(x_{12_k}) p_{12}(x_{12_k}) \\ &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0.243 + 0.19 \cdot 0 + 0.36 \cdot 0.0486 + 0.087 \cdot 0.5 + \dots + 0.086 \cdot 0.243 \\ &= 0.63. \end{aligned}$$

Bu bulunan $P(A_{12})$ değeri B_{12} nin fuzzy kısıtı içinde olasılık ölçüsünün muhtemel bir değeridir ve $b_{12} = 0.63$ olarak bulunur.

$$\mu_{B_{12}} \left(b_{12} = \sum_k \mu_{A_{12}}(x_{12_k}) p_{12}(x_{12_k}) \right) = \mu_{p_{12}}(p_{12}).$$

Bu eşitlik kullanılarak daha önceden hesaplanan $\mu_{p_{12}}(p_{12}) = 0.8$ sonucu yerine yazılırsa,

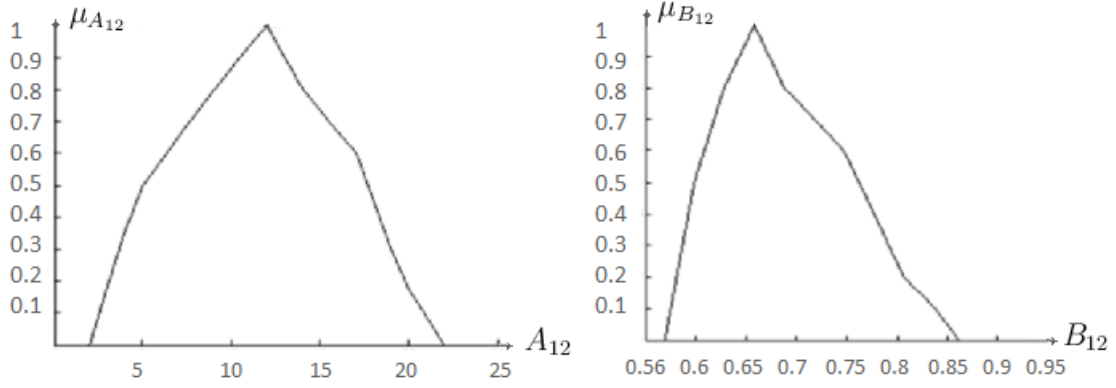
$$\mu_{B_{12}}(b_{12} = 0.63) = 0.8$$

olarak elde edilir.

Son olarak benzer hesaplamalar yapılarak B_{12}

$$\begin{aligned} B_{12} &= 0/0.56 + 0.5/0.60 + 0.8/0.63 + 1/0.66 + 0.8/0.69 + 0.7/0.72 \\ &+ 0.6/0.75 + 0.4/0.78 + 0.2/0.81 + 0.1/0.84 + 0/0.86 + 0/1 \end{aligned}$$

olur. Böylece A_{12} ve B_{12} nin grafikleri Şekil 5.4'teki gibi olan $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ toplamı elde edilmiş olur [2].



Şekil 5.4. Kesikli Z-sayıların toplamı: A_{12} ve B_{12} sayıları

5.2. Kesikli Z-Sayılar Üzerinde Çıkarma İşlemi

$Z_1 = (A_1, B_1)$ ve $Z_2 = (A_2, B_2)$ kesikli Z-sayılarının $Z_{12} = Z_1 - Z_2$ farkını hesaplayalım. İlk olarak $Z_{12}^+ = Z_1^+ - Z_2^+$ kesikli Z^+ -sayısı belirlenir.

$$\sum_{k=1}^n p_1(x_{1k}) = 1 \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^n p_2(x_{2k}) = 1,$$

$$p_1 = p_1(x_{11}) \setminus x_{11} + p_1(x_{12}) \setminus x_{12} + \cdots + p_1(x_{1n}) \setminus x_{1n},$$

$$p_2 = p_2(x_{21}) \setminus x_{21} + p_2(x_{22}) \setminus x_{22} + \cdots + p_2(x_{2n}) \setminus x_{2n},$$

R_1 ve R_2 kesikli olasılık dağılımları olmak üzere,

$$Z_1^+ - Z_2^+ = (A_1 - A_2, R_1 - R_2)$$

şeklinde tanımlanır.

Kesikli fuzzy sayıların $A_1 - A_2$ farkı Ön Bilgiler bölümünde verilen tanıma uygun olarak yapılır. Kesikli olasılık dağılımlarının $p_{12} = p_1 \circ p_2$ konvolüsyonu olan $R_1 - R_2$

$$p_{12}(x) = \sum_{x=x_1-x_2} p_1(x_1)p_2(x_2)$$

ile hesaplanır.

Böylece $Z_{12}^+ = (A_1 - A_2, p_{12})$ şeklindeki Z^+ -sayısı elde edilecektir.

$j = 1, 2$ ve $l = 1, 2, \dots, m$ için daha önceden (5.1) ve (5.2) denklemleri ile bahsedilen lineer hedef programlama modelinin çözümüyle elde edilen p_{jl} olasılık dağılımları hesaplandığında

$$\mu_{p_{jl}}(p_{jl}) = \mu_{B_j} \left(\sum_{k=1}^{n_j} \mu_{A_j}(x_{jk}) p_{jl}(x_{jk}) \right)$$

şeklindeki fuzzy kümeleri oluşturulur.

$s = 1, 2, \dots, m^2$ için

$$p_{12}(x) = \sum_{x=x_1-x_2} p_1(x_1)p_2(x_2)$$

tanımına göre hesaplanan p_{12_s} konvolüsyonlarının fuzzy kümesi,

$$p_{12} = p_1 \circ p_2,$$

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \max_{p_1, p_2} [\mu_{p_1}(p_1) \wedge \mu_{p_2}(p_2)]$$

eşitlikleri yardımıyla oluşturulur.

B_{12} nin yapısını oluşturulur. Bunun için ilk olarak elde edilen p_{12} konvolüsyonlarıyla $A_{12} = A_1 - A_2$ nin olasılık ölçüsü hesaplanır. Bulunan olasılık sonucu B_{12} için fuzzy kısıtı olmadan sadece bir temel değer olur ve bu değer $P(A_{12} = b_{12})$ olarak gösterilir. Daha sonra bulunan her b_{12} temel değeri için fuzzy kısıtlar,

$$\mu_{B_{12}} \left(b_{12} = \sum_k \mu_{A_{12}}(x_{12_k}) p_{12}(x_{12_k}) \right) = \mu_{p_{12}}(p_{12})$$

eşitliği kullanarak elde edilir.

Sonuç olarak, B_{12} fuzzy kümesi (5.3) ve (5.4) denklemleri yardımıyla hesaplanır. Böylece $Z_{12} = Z_1 - Z_2$ sayısı $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ olarak elde edilir.

Örnek 5.2.1. $A_1 = 0/1 + 0.3/2 + 0.5/3 + 0.6/4 + 0.7/5 + 0.8/6 + 0.9/7 + 1/8 + 0.8/9 + 0.6/10 + 0/11$,

$B_1 = 0/0 + 0.5/0.1 + 0.8/0.2 + 1/0.3 + 0.8/0.4 + 0.7/0.5 + 0.6/0.6 + 0.4/0.7 + 0.2/0.8 + 0.1/0.9 + 0/1$,

$A_2 = 0/1 + 0.5/2 + 0.8/3 + 1/4 + 0.8/5 + 0.7/6 + 0.6/7 + 0.4/8 + 0.2/9 + 0.1/10 + 0/11$,

$B_2 = 0/0 + 0.3/0.1 + 0.5/0.2 + 0.6/0.3 + 0.7/0.4 + 0.8/0.5 + 0.9/0.6 + 1/0.7 + 0.9/0.8 + 0.8/0.9 + 0/1$

olmak üzere $Z_1 = (A_1, B_1)$ ve $Z_2 = (A_2, B_2)$ kesikli Z -sayılarının $Z_{12} = Z_1 - Z_2$ farkını hesaplayalım:

İlk olarak Z^+ -sayılara geçilir. B_1 ve B_2 nin olasılık dağılımları bulunmalıdır. Bunun için kesikli Z -sayılarda toplama işleminde bahsedilen lineer hedef programlama problemleri çözümlenmelidir. Bu örnekte de toplama işlemi örneğinde kullanılan aşağıdaki olasılık dağılımları kullanılacaktır:

$p_1 = 0.27 \setminus 1 + 0 \setminus 2 + 0 \setminus 3 + 0.0027 \setminus 4 + 0.04 \setminus 5 + 0.075 \setminus 6 + 0.11 \setminus 7 + 0.15 \setminus 8 + 0.075 \setminus 9 + 0.0027 \setminus 10 + 0.27 \setminus 11$,

$p_2 = 0.09 \setminus 1 + 0 \setminus 2 + 0.18 \setminus 3 + 0.32 \setminus 4 + 0.18 \setminus 5 + 0.1 \setminus 6 + 0.036 \setminus 7 + 0 \setminus 8 + 0 \setminus 9 + 0 \setminus 10 + 0.09 \setminus 11$.

Sonra $Z_{12}^+ = (A_{12}, R_{12}) = (A_1 - A_2, R_1 - R_2)$ şeklindeki kesikli Z^+ -sayısı hesaplanmalıdır. İlk olarak kesikli fuzzy sayıların farkı olan $A_1 - A_2$ yi hesaplayalım. Toplama işlemindeki adımlara benzer şekilde A_{12} aşağıdaki gibi elde edilir:

$$A_{12} = 0/-10 + 0.075/-9 + 0.15/-8 + 0.24/-7 + 0.35/-6 + 0.45/-5 + 0.53/-4 + 0.6/-3 + 0.65/-2 + 0.7/-1 + 0/0.75 + 0.8/1 + 0.87/2 + 0.93/3 + 1/4 + 0.9/5 + 0.8/6 + 0.68/7 + 0.53/8 + 0.27/9 + 0/10.$$

p_1 ve p_2 olasılık dağılımlarının konvolüsyonu $p_{12} = p_1 \circ p_2$ ile $R_1 - R_2$ farkı hesaplanır. Örneğin $x = -5$ için $p_{12}(x)$ nasıl hesaplanır onu görelim.

$$x = x_{1,5} - x_{2,10} = 5 - 10 = -5 \quad \text{veya} \quad x = x_{1,6} - x_{2,11} = 6 - 11 = -5$$

durumları söz konusu olur.

$$p_{12}(-5) = p_1(5)p_2(10) + p_1(6)p_2(11) = 0.04 \cdot 0 + 0.075 \cdot 0.09 = 0.00675.$$

Benzer şekilde diğer x değerlerininde olasılık sonucu hesaplandığında p_{12} aşağıdaki gibi olur.

$$p_{12}(x) = 0.025 \setminus -10 + 0 \setminus -9 + 0 \setminus -8 + 0 \setminus -7 + 0.0135 \setminus -6 + 0.00675 \setminus -5 + \dots + 0.243 \setminus 10.$$

Böylece, $Z_{12}^+ = (A_{12}, p_{12})$ elde edilmiş olur.

p_1 ve p_2 olasılık dağılımları üzerindeki fuzzy kısıtlar için $\mu_{p_1}(p_1)$ ve $\mu_{p_2}(p_2)$ üyelik dereceleri hesaplanmalıdır. Toplama örneğindeki aynı Z -sayılar ve aynı olasılık dağılımları kullanıldığından sonuç toplama örneğindeki ile aynıdır. O halde bu dereceler aşağıdaki gibidir:

$$\mu_{p_1}(p_1) = 0.8 \quad \text{ve} \quad \mu_{p_1}(p_1) = 1.$$

p_{12} konvolüsyonlarının $\mu_{p_{12}}(p_{12})$ üyelik dereceleri hesaplanmalıdır. Aslında bu dereceler sadece p_{12} konvolüsyonunu oluşturan p_1 ve p_2 olasılık dağılımlarının $\mu_{p_1}(p_1)$ ve $\mu_{p_2}(p_2)$ üyelik derecelerine bağlıdır, herhangi bir aritmetik işleme bağlı değildir. Bu nedenle, $\mu_{p_{12}}(p_{12})$ üyelik dereceleri toplama işlemi örneğindekiyle aynı sonucu vermektedir. Bu nedenle kullanılan p_1 ve p_2 olasılık dağılımlarından elde edilen p_{12} konvolüsyonu için sonuç toplama işlemindeki gibi $\mu_{p_{12}}(p_{12}) = 0.8$ dir.

B_{12} nin yapısını oluşturacak bileşenler bulunmalıdır. Öncelikle elde edilen p_{12} konvolüsyonlarıyla $P(A_{12})$ olasılık ölçüsü hesaplanır. Örneğin yukarıda elde edilen p_{12} kullanılarak A_{12} nin olasılık ölçüsü

$$\begin{aligned} P(A_{12}) &= \sum_k \mu_{A_{12}}(x_k) p_{12}(x_k) \\ &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0.243 + 0.19 \cdot 0 + 0.36 \cdot 0.0486 + 0.087 \cdot 0.5 + \dots + 0.086 \cdot 0.243 \\ &= 0.71 \end{aligned}$$

olur. Buradan B_{12} nin bir temel değeri $b_{12} = 0.71$ hesaplanmış olur. b_{12} nin fuzzy kısıtı için üyelik derecesi

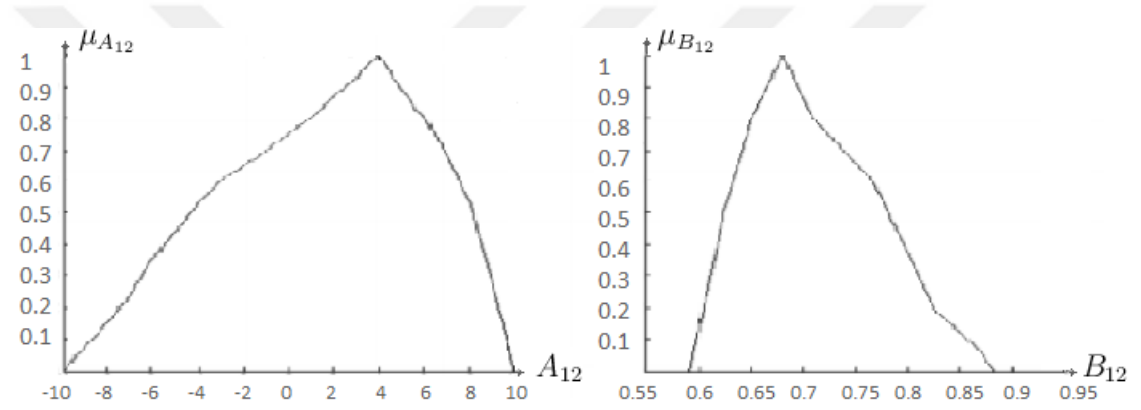
$$\mu_{B_{12}}(b_{12} = 0.71) = 0.8$$

olarak bulunur.

Son olarak B_{12} yapısı (5.3) ve (5.4) denklemleri yardımıyla oluşturulur. Tüm b_{12_s} değerleri ve üyelik dereceleri hesaplandıktan sonra elde edilen B_{12} yapısı aşağıdaki gibidir:

$$B_{12} = 0/0.59 + 0.5/0.62 + 0.8/0.65 + 1/0.68 + 0.8/0.71 + 0.7/0.74 + 0.6/0.77 + 0.4/0.8 + 0.2/0.83 + 0.1/0.86 + 0/0.88.$$

Böylece A_{12} ve B_{12} nin grafikleri Şekil 5.5'teki gibi olan $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ farkı elde edilir [2].



Şekil 5.5. Kesikli Z-sayıların farkı: A_{12} ve B_{12} sayıları

5.3. Kesikli Z-Sayılar Üzerinde Çarpma İşlemi

$Z_1 = (A_1, B_1)$ ve $Z_2 = (A_2, B_2)$ şeklinde verilen iki kesikli Z-sayının $Z_{12} = Z_1 \cdot Z_2$ çarpımı sırayla aşağıdaki adımlar izlenerek hesaplanır. İlk olarak $Z_{12}^+ = Z_1^+ \cdot Z_2^+$ kesikli Z^+ -sayısı belirlenir.

$$p_1 = p_1(x_{11}) \setminus x_{11} + p_1(x_{12}) \setminus x_{12} + \cdots + p_1(x_{1n}) \setminus x_{1n},$$

$$p_2 = p_2(x_{21}) \setminus x_{21} + p_2(x_{22}) \setminus x_{22} + \cdots + p_2(x_{2n}) \setminus x_{2n},$$

R_1 ve R_2 yukarıdaki gibi tanımlanan kesikli olasılık dağılımları olmak üzere,

$$Z_1^+ \cdot Z_2^+ = (A_1 \cdot A_2, R_1 \cdot R_2)$$

şeklindeir. Kesikli fuzzy sayıların $A_1 \cdot A_2$ çarpımı Ön Bilgiler bölümünde verilen tanımına göre hesaplanır. $R_1 \cdot R_2$ ise

$$p_{12}(x) = \sum_{x=x_1 \cdot x_2} p_1(x_1)p_2(x_2)$$

denklemleri kullanılarak hesaplanan kesikli olasılık dağılımlarının $p_{12} = p_1 \circ p_2$ konvolüsyonudur.

$A_1 \cdot A_2$ ve $R_1 \cdot R_2$ bu şekilde hesaplandıktan sonra $Z_{12}^+ = (A_1 \cdot A_2, p_{12})$ elde edilir. Önceki bölümlerde anlatılan adımlara benzer olarak, $j = 1, 2, \dots, m$ için $\mu_{p_{jl}}(p_{jl})$ fuzzy kümeleri ve üyelik fonksiyonları $p_{12} = p_1 \circ p_2$, ile tanımlı, $s = 1, 2, \dots, m^2$ için p_{12_s} konvolüsyonlarının fuzzy kümesi oluşturulur.

Daha sonra, $A_{12} = A_1 \cdot A_2$ çarpımının olasılık ölçüsü hesaplanır. Son olarak, B_{12} fuzzy kümesi oluşturulur. Böylece $Z_{12} = Z_1 \cdot Z_2$ çarpımı $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ olarak elde edilir.

Örnek 5.3.1. $A_1 = 0/1 + 0.3/2 + 0.5/3 + 0.6/4 + 0.7/5 + 0.8/6 + 0.9/7 + 1/8 + 0.8/9 + 0.6/10 + 0/11$,

$B_1 = 0/0 + 0.5/0.1 + 0.8/0.2 + 1/0.3 + 0.8/0.4 + 0.7/0.5 + 0.6/0.6 + 0.4/0.7 + 0.2/0.8 + 0.1/0.9 + 0/1$,

$A_2 = 0/1 + 0.5/2 + 0.8/3 + 1/4 + 0.8/5 + 0.7/6 + 0.6/7 + 0.4/8 + 0.2/9 + 0.1/10 + 0/11$,

$B_2 = 0/0 + 0.3/0.1 + 0.5/0.2 + 0.6/0.3 + 0.7/0.4 + 0.8/0.5 + 0.9/0.6 + 1/0.7 + 0.9/0.8 + 0.8/0.9 + 0/1$

olmak üzere $Z_1 = (A_1, B_1)$ ve $Z_2 = (A_2, B_2)$ kesikli Z -sayılarının $Z_{12} = Z_1 \cdot Z_2$ çarpımını hesaplayalım.

Önce kesikli Z^+ -sayılar elde edilir. $Z_{12}^+ = (A_{12}, R_{12}) = (A_1 + A_2, R_1 + R_2)$ hesaplanır. $A_{12} = A_1 \cdot A_2$ çarpımı Ön Bilgiler bölümünde verilen tanımına göre hesaplanır. $R_1 \cdot R_2$ ise p_1 ve p_2 nin

$$p_{12}(x) = \sum_{x=x_1 \cdot x_2} p_1(x_1)p_2(x_2)$$

şeklindeki konvolüsyonu olarak hesaplanır. Burada p_1 ve p_2 toplama işlemindeki örnekte kullanılan kesikli olasılık dağılımları ile aynıdır. O halde p_1 ve p_2 aşağıdaki gibidir:

$p_1 = 0.27 \setminus 1 + 0 \setminus 2 + 0 \setminus 3 + 0.0027 \setminus 4 + 0.04 \setminus 5 + 0.075 \setminus 6 + 0.11 \setminus 7 + 0.15 \setminus 8 + 0.075 \setminus 9 + 0.0027 \setminus 10 + 0.27 \setminus 11$,

$p_2 = 0.09 \setminus 1 + 0 \setminus 2 + 0.18 \setminus 3 + 0.32 \setminus 4 + 0.18 \setminus 5 + 0.1 \setminus 6 + 0.036 \setminus 7 + 0 \setminus 8 + 0 \setminus 9 + 0 \setminus 10 + 0.09 \setminus 11$.

Buradan

$$A_{12} = 0/1 + 0.16/2 + \dots + 1/32 + \dots + 0.17/100 + 0/121$$

ve

$$p_{12} = 0.243 \setminus 1 + 0 \setminus 2 + \dots + 0 \setminus 100 + 0.243 \setminus 121$$

olur. Böylece $Z_{12}^+ = (A_{12}, p_{12})$ şeklinde çarpma işleminin sonucu elde edilmiş olur.

$\mu_{p_1}(p_1)$ ve $\mu_{p_2}(p_2)$ üyelik dereceleri hesaplanır

$$\mu_{p_1}(p_1) = 0.8 \quad \text{ve} \quad \mu_{p_1}(p_1) = 1.$$

p_{12} konvolüsyonlarının üyelik dereceleri hesaplanmalıdır. Bu üyelik derecesi $\mu_{p_1}(p_1)$ ve $\mu_{p_2}(p_2)$ ye bağlı olduğundan ve kullanılan olasılık dağılımları toplama işlemindeki ile aynı olduğundan $\mu_{p_{12}}(p_{12}) = 0.8$ olur.

B_{12} nin fuzzy sayı yapısını oluşturmak için bu adımda b_{12} temel değerleri bulunmalıdır. $A_1 \cdot A_2$ çarpımının $P(A_{12})$ olasılık ölçüsü, B_{12} için bir temel değerdir ve $b_{12} = P(A_{12})$ ile gösterilir. Örnek olarak kullandığımız p_1 ve p_2 olasılık dağılımlarından elde edilen p_{12} konvolüsyonu için $A_1 \cdot A_2$ nin olasılık ölçüsü

$$P(A_{12}) = b_{12} = 0.67$$

olur.

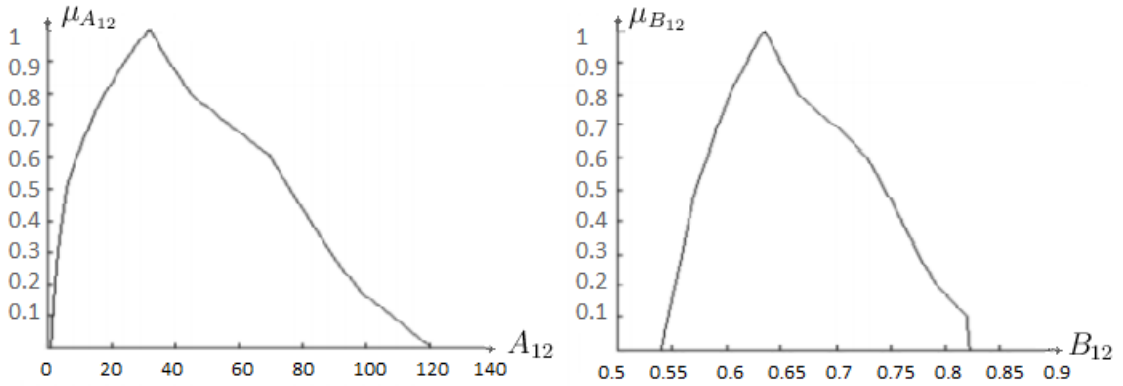
Sonra B_{12} yapısı oluşturulur. Yani b_{12} temel değerlerinin üyelik dereceleri hesaplanır. Örnek olarak kullanılan p_1 ve p_2 olasılık dağılımlarından elde edilen $b_{12} = 0.67$ temel değeri için üyelik derecesi

$$\mu_{B_{12}}(b_{12} = 0.67) = 0.8$$

dir. Bu şekilde elde edilecek tüm üyelik dereceleri ile B_{12}

$$B_{12} = 0/0.54 + 0.5/0.57 + 0.8/0.61 + 1/0.63 + 0.8/0.67 + 0.7/0.7 + 0.6/0.73 + 0.4/0.76 + 0.2/0.79 + 0.1/0.819 + 0/0.82$$

olur. Böylece A_{12} ve B_{12} nin grafikleri Şekil 5.6'daki gibi olan çarpma işleminin sonucu $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ hesaplanmış olur [2].



Şekil 5.6. Kesikli Z-sayıların çarpımı: A_{12} ve B_{12} sayıları

5.4. Kesikli Z-Sayılar Üzerinde Bölme İşlemi

$0 \notin \text{supp}(A_2)$ olmak üzere $Z_1 = (A_1, B_1)$ ve $Z_2 = (A_2, B_2)$ kesikli Z -sayılarının bölümü $Z_{12} = Z_1/Z_2$ ile gösterilir. Öncelikle $Z_{12}^+ = (A_{12}, p_{12})$ sayıları hesaplanmalıdır. Burada A_{12} Ön Bilgiler bölümünde verilen kesikli fuzzy sayıların bölümüdür. p_{12} ise p_1 ve p_2 kesikli olasılık dağılımlarının,

$$p_{12}(x) = \sum_{x=x_1/x_2, (x_2 \neq 0)} p_1(x_1)p_2(x_2)$$

konvolüsyonudur.

Daha önceki kısımlarda söz edildiği gibi $j = 1, 2, l = 1, 2, \dots, m$ için $\mu_{p_{jl}}(p_{jl})$ fuzzy kümeleri oluşturulur ve $s = 1, 2, \dots, m^2$ için p_{12_s} konvolüsyonlarının fuzzy kümesi, üyelik fonksiyonları yardımıyla oluşturulur.

Sonra A_{12} nin olasılık ölçüsü hesaplanır. Son olarak B_{12} fuzzy kümesi oluşturulur. Böylece $Z_{12} = Z_1/Z_2$ sayısı $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ olarak elde edilir.

Örnek 5.4.1. $A_1 = 0/1 + 0.3/2 + 0.5/3 + 0.6/4 + 0.7/5 + 0.8/6 + 0.9/7 + 1/8 + 0.8/9 + 0.6/10 + 0/11$,

$B_1 = 0/0 + 0.5/0.1 + 0.8/0.2 + 1/0.3 + 0.8/0.4 + 0.7/0.5 + 0.6/0.6 + 0.4/0.7 + 0.2/0.8 + 0.1/0.9 + 0/1$,

$A_2 = 0/1 + 0.5/2 + 0.8/3 + 1/4 + 0.8/5 + 0.7/6 + 0.6/7 + 0.4/8 + 0.2/9 + 0.1/10 + 0/11$,

$B_2 = 0/0 + 0.3/0.1 + 0.5/0.2 + 0.6/0.3 + 0.7/0.4 + 0.8/0.5 + 0.9/0.6 + 1/0.7 + 0.9/0.8 + 0.8/0.9 + 0/1$

olan $Z_1 = (A_1, B_1)$ ve $Z_2 = (A_2, B_2)$ iki kesikli Z sayısının $Z_{12} = Z_1/Z_2$ bölümünü hesaplayalım.

Yine ilk olarak Z^+ -sayılara geçilir. Toplama örneğinde olduğu gibi p_1 ve p_2 olasılık dağılımları bulunur. Böylece $Z_1^+ = (A_1, R_1)$ ve $Z_2^+ = (A_2, R_2)$ sayıları elde edilir. Bu örnekte de p_1 ve p_2 kesikli olasılık dağılımları olarak, toplama işlemindeki örnekle aynı dağılımlar kullanılacaktır. Yani:

$p_1 = 0.27 \setminus 1 + 0 \setminus 2 + 0 \setminus 3 + 0.0027 \setminus 4 + 0.04 \setminus 5 + 0.075 \setminus 6 + 0.11 \setminus 7 + 0.15 \setminus 8 + 0.075 \setminus 9 + 0.0027 \setminus 10 + 0.27 \setminus 11$,

$p_2 = 0.09 \setminus 1 + 0 \setminus 2 + 0.18 \setminus 3 + 0.32 \setminus 4 + 0.18 \setminus 5 + 0.1 \setminus 6 + 0.036 \setminus 7 + 0 \setminus 8 + 0 \setminus 9 + 0 \setminus 10 + 0.09 \setminus 11$.

$Z_{12}^+ = Z_1^+/Z_2^+ = (A_{12}/A_2, R_1/R_2)$ sayısı hesaplanır. Bunun için kesikli fuzzy sayıların A_1/A_2 bölümü, Ön Bilgiler bölümünde verilen tanımları uygulanarak

$$A_{12} = 0.07/0.36 + 0.1/0.375 + \dots + 1/1.6 + \dots + 0.17/100 + 0/121$$

olur. R_1/R_2 ise $p_{12} = p_1 \circ p_2$ konvolüsyonu olup

$$p_{12} = 0.025 \setminus 1 + 0 \setminus 2 + \dots + 0 \setminus 1.6 + \dots + 0 \setminus 100 + 0.025 \setminus 121$$

dir. Bu sonuçlarla $Z_{12}^+ = (A_1/A_2, p_{12})$ elde edilmiş olur.

p_1 ve p_2 olasılık dağılımları için $\mu_{p_1}(p_1)$ ve $\mu_{p_2}(p_2)$ üyelik dereceleri hesaplanır. Yine olasılık dağılımları daha önceki örneklerdeki ile aynı kullanıldığından sonuç da $\mu_{p_1}(p_1) = 0.8$ ve $\mu_{p_1}(p_1) = 1$ olur.

p_1 ve p_2 konvolüsyonlarından elde edilen p_{12} konvolüsyonlarının üyelik dereceleri hesaplanır. Bu üyelik derecesi $\mu_{p_1}(p_1)$ ve $\mu_{p_2}(p_2)$ ye bağlı olduğundan ve kullanılan olasılık dağılımları toplama işlemindeki ile aynı olduğundan sonuç yine diğer örnekler ile aynı bulunur. Yani $\mu_{p_{12}}(p_{12}) = 0.8$ olur.

p_{12} ile $P(A_{12}) = b_{12}$ olasılık ölçüsü değerleri hesaplanır. Bu örnekte elde edilen p_{12} değeri için $P(A_{12})$ olasılık ölçüsü

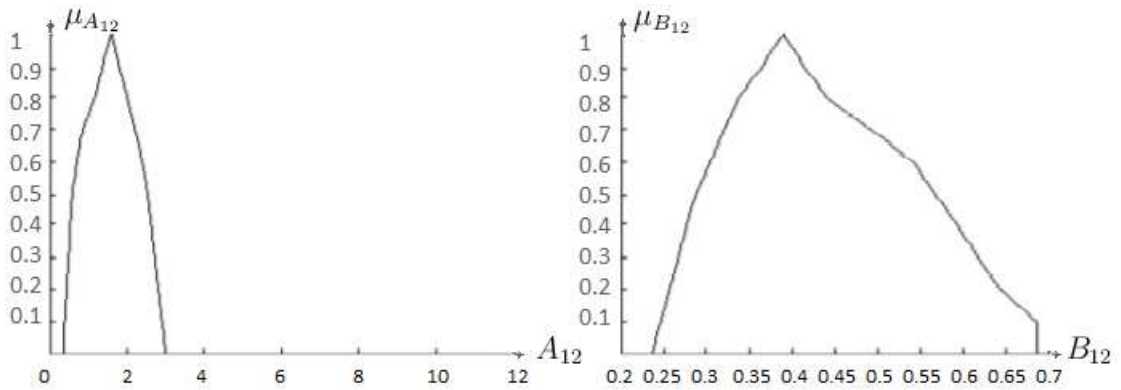
$$P(A_{12}) = b_{12} = 0.44$$

olur. Son olarak elde edilen b_{12} değerleri için üyelik dereceleri hesaplanarak B_{12} fuzzy kümesinin yapısı oluşturulur. Bu örnek dağılımlar ile elde edilen $b_{12} = 0.44$ değeri için üyelik derecesi

$$\mu_{B_{12}}(b_{12} = 0.44) = \mu_{p_{12}}(p_{12}) = 0.8$$

olur.

Böylece, A_{12} ve B_{12} nin grafikleri Şekil 5.7'deki gibi olan $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ bölümü elde edilir [2].



Şekil 5.7. Kesikli Z-sayıların bölümü: A_{12} ve B_{12} fuzzy sayıları

5.5. Kesikli Bir Z-Sayısının Karesi

$Z_Y = Z_X^2$ hesabı aşağıdaki işlemler takip edilerek yapılır. R_X

$$p_X = p_X(x_1) \setminus x_1 + p_X(x_2) \setminus x_2 + \cdots + p_X(x_n) \setminus x_n$$

şeklindeki kesikli olasılık dağılımı ve $Z_X^+ = (A_X, R_X)$ olsun. Z_Y^+ kesikli Z^+ -sayısı

$$Z_Y^+ = (A_Y, R_Y)$$

olur. Burada, $A_Y = A_X^2$ kesikli fuzzy sayısının karesi Ön Bilgiler bölümünde verilen tanıma göre hesaplanır. R_Y kesikli olasılık dağılımı da,

$$p_Y(y) = \sum_{x \in \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\}} p_X(x) = p_X(-\sqrt{y}) + p_X(\sqrt{y})$$

olmak üzere

$$y_r = x_k^2 \quad ve \quad p_Y(y_r) = \sum_{y_r=x^2} p_X(x), r = 1, 2, \dots, m, \quad (5.5)$$

için,

$$p_Y = p_Y(y_1) \setminus y_1 + p_Y(y_2) \setminus y_2 + \dots + p_Y(y_m) \setminus y_m \quad (5.6)$$

şeklindedir.

Z_Y^+ - kesikli Z^+ -sayıları hesaplandıktan sonra kesikli Z-sayılar üzerinde toplama işlemi kısmında anlatılan hedef programlama modelinin çözümünden elde edilen olasılık dağılımlarının üyelik derecelerinin hesabından yararlanılır ve

$$\mu_{p_X}(p_{X,l}) = \mu_{B_X} \left(\sum_{k=1}^n \mu_{A_X}(x_k) p_{X,l}(x_k) \right)$$

hesaplanır.

Sonra p_X olasılık dağılımının $\mu_{p_X}(p_{X,l})$ üyelik fonksiyonuyla gösterilen fuzzy kümesi, doğal olarak $p_{Y,l}$ olasılık dağılımının fuzzy kümesini oluşturur ve üyelik fonksiyonu

$$\mu_{p_Y}(p_{Y,l}) = \mu_{p_X}(p_{X,l})$$

olur. Daha sonra, elde edilen p_Y ler ile, A_Y nin olasılık ölçüsü hesaplanır. Son olarak p_Y üzerindeki μ_{p_Y} üyelik fonksiyonuyla gösterilen fuzzy kısıtlar hesaplandığında

$$b_{Y,l} = \sum_k p_{Y,l}(x_k) \mu_{A_Y}(x_k)$$

olmak üzere

$$\mu_{B_Y}(b_{Y,l}) = \sup(\mu_{p_Y}(p_{Y,l}))$$

üyelik fonksiyonu yardımıyla B_Y fuzzy kümesi oluşturulur.

Sonuç olarak, Z^2 sayısı $Z^2 = (A_Y, B_Y)$ hesaplanmış olur. $x_i \geq 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$) için $y_k = x_k^2$ olmak üzere, $p_{Y,l}(y_k) = p_{X,l}(x_k)$, $\mu_{p_Y}(p_{Y,l}) = \mu_{p_X}(p_{X,l})$ ve $\mu_{A_Y}(y_k) = \mu_{A_X}(x_k)$ eşitlikleri sağlanır. Buradan,

$$b_{Y,l} = b_{X,l} \quad ve \quad \mu_{B_Y}(b_{Y,l}) = \mu_{B_X}(b_{X,l})$$

olur. Bu ise $B_Y = B_X$ demektir.

n herhangi bir doğal sayı olmak üzere $Z_Y = Z_X^n$ benzer yolla hesaplanır.

Örnek 5.5.1. *Toplama işlemi örneğinde verilen ve bileşenleri aşağıdaki gibi olan $Z_2 = (A_2, B_2)$ sayısı için $Z_3 = Z_2^2$ hesabını yapalım:*

$$A_2 = 0/1 + 0.5/2 + 0.8/3 + 1/4 + 0.8/5 + 0.7/6 + 0.6/7 + 0.4/8 + 0.2/9 + 0.1/10 + 0/11,$$

$$B_2 = 0/0 + 0.3/0.1 + 0.5/0.2 + 0.6/0.3 + 0.7/0.4 + 0.8/0.5 + 0.9/0.6 + 1/0.7 + 0.9/0.8 + 0.8/0.9 + 0/1.$$

İlk olarak Z^+ -sayılara geçilir ve $Z_2^+ = (A_2, R_2)$ sayısında bulunan R_2 bileşeni kesikli Z -sayılar üzerinde toplama işlemi bölümünde bahsedilen lineer hedef programlama problemi ile hesaplanır. Bu örnekte de toplama işlemi örneğinde çözülen ve diğer örneklerde kullanılan aşağıdaki olasılık dağılımı ele alınacaktır.

$$p_2 = 0.09 \setminus 1 + 0 \setminus 2 + 0.18 \setminus 3 + 0.32 \setminus 4 + 0.18 \setminus 5 + 0.1 \setminus 6 + 0.036 \setminus 7 + 0 \setminus 8 + 0 \setminus 9 + 0 \setminus 10 + 0.09 \setminus 11.$$

Ardından $Z^+ = (A_3, R_3)$ kesikli Z^+ -sayısı hesaplanır. (5.5) ve (5.6) denklemlerinden yararlanılır. Böylece sonuç aşağıdaki gibidir.

$$A_3 = 0/1 + 0.5/4 + 0.8/9 + 1/16 + 0.8/25 + 0.7/36 + 0.6/49 + 0.4/64 + 0.2/81 + 0.1/100 + 0/121,$$

$$p_3 = 0.09 \setminus 1 + 0 \setminus 4 + 0 \setminus 9 + 0.32 \setminus 16 + 0.18 \setminus 25 + 0.1 \setminus 36 + 0.036 \setminus 49 + 0 \setminus 64 + 0 \setminus 81 + 0 \setminus 100 + 0.09 \setminus 121.$$

$B_3 = B_2$ olduğundan diğer hesaplara gerek yoktur. Bununla birlikte burada,

$$\mu_{p_2}(p_2) = \mu_{B_2} \left(\sum_{k=1}^n \mu_{A_2}(x_k) p_2(x_k) \right)$$

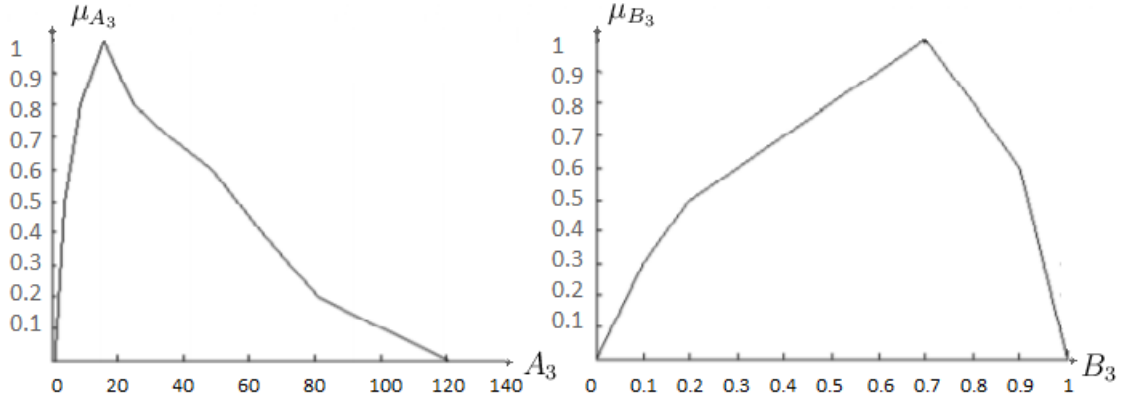
üyelik derecesiyle, $\mu_{p_3}(p_3) = \mu_{p_2}(p_2)$ olduğundan A_3 yardımıyla B_3 hesaplanmış olur. A_3 ve B_3 ün grafikleri Şekil 5.8'deki gibi olan $Z_3 = (A_3, B_3)$ olarak Z_2 nin karesi hesaplanmış olur [2]. $B_3 = B_2$ dir.

5.6. Kesikli Bir Z-Sayısının Karekökü

Bu kısımda kesikli Z -sayıların karekökü hesaplanacaktır. $Z_Y = \sqrt{Z_X}$ i göz önünde bulunduralım. Z_X^+ ve Z_X bir Z -sayısının karesini alma işleminde bahsedilen Z -sayılarla aynı olsun. Z_Y^+ kesikli Z^+ -sayısı

$$Z_Y^+ = (A_Y, R_Y)$$

biçiminde tanımlıdır. Burada $A_Y = \sqrt{A_X}$ şeklindeki kesikli bir fuzzy sayısının kareköküdür.



Şekil 5.8. Kesikli bir Z -sayısının karesi: A_3 ve B_3 fuzzy sayıları

R_Y kesikli olasılık dağılımı da,

$$p_{R_Y} = p_{R_Y}(y_1) \setminus y_1 + p_{R_Y}(y_2) \setminus y_2 + \cdots + p_{R_Y}(y_n) \setminus y_n$$

öyle ki,

$$y_k = \sqrt{x_k} \quad \text{ve} \quad p_{R_Y}(y_k) = p_{R_X}(x_k)$$

dir.

Z_Y^+ hesaplandıktan sonra,

$$\mu_{p_X}(p_{X,l}) = \mu_{B_X} \left(\sum_{k=1}^n \mu_{A_X}(x_k) p_{X,l}(x_k) \right)$$

yapısı oluşturulur. Burada,

$$\mu_{p_Y}(p_{Y,l}) = \mu_{p_X}(p_{X,l})$$

dir.

Daha sonra A_Y nin olasılık ölçüsü hesaplanır ve μ_{p_Y} üyelik fonksiyonu bilindiği zaman, B_Y fuzzy kümesi oluşturulur. Sonuç olarak, $\sqrt{Z}$ sayısı $\sqrt{Z} = (A_Y, B_Y)$ biçiminde hesaplanır. Burada birinci bileşen negatif olmayan kesikli bir Z -sayısının karesini alma işleminde olduğu gibi, B_Y nin hesaplanmasına gerek yoktur. Kesikli bir Z -sayısının karekökünü hesaplama işleminde $B_Y = B_X$ eşitliğinin sağlandığı kolayca görülür.

Örnek 5.6.1. Bir önceki örnekte kullanılan $Z_2 = (A_2, B_2)$ sayısı için $Z_3 = \sqrt{Z_2}$ hesabını yapalım.

$$A_2 = 0/1 + 0.5/2 + 0.8/3 + 1/4 + 0.8/5 + 0.7/6 + 0.6/7 + 0.4/8 + 0.2/9 + 0.1/10 + 0/11,$$

$$B_2 = 0/0 + 0.3/0.1 + 0.5/0.2 + 0.6/0.3 + 0.7/0.4 + 0.8/0.5 + 0.9/0.6 + 1/0.7 + 0.9/0.8 + 0.8/0.9 + 0/1.$$

Yine ilk olarak Z^+ -sayılara geçilir. Bir önceki bölümle aynı Z -sayı kullanıldığından burada aynı Z^+ -sayılara ulaşılır. Olasılık dağılımı

$$p_2 = 0.09 \setminus 1 + 0 \setminus 2 + 0.18 \setminus 3 + 0.32 \setminus 4 + 0.18 \setminus 5 + 0.1 \setminus 6 + 0.036 \setminus 7 + 0 \setminus 8 + 0 \setminus 9 + 0 \setminus 10 + 0.09 \setminus 11$$

olsun. Bileşenleri aşağıdaki gibi olan $Z_3^+ = (A_3, R_3)$ şeklindeki Z^+ -sayısı hesaplanır. $A_3 = \sqrt{A_2}$ hesabı için Ön Bilgiler kısmında verilen kesikli fuzzy sayıların karekökü hesaplaması kullanılır. R_3 sayısı da,

$$p_{R_Y} = p_{R_Y}(y_1) \setminus y_1 + p_{R_Y}(y_2) \setminus y_2 + \cdots + p_{R_Y}(y_n) \setminus y_n$$

öyle ki,

$$y_k = \sqrt{x_k} \quad \text{ve} \quad p_{R_Y}(y_k) = p_{R_X}(x_k),$$

eşitlikleri kullanılarak hesaplanır.

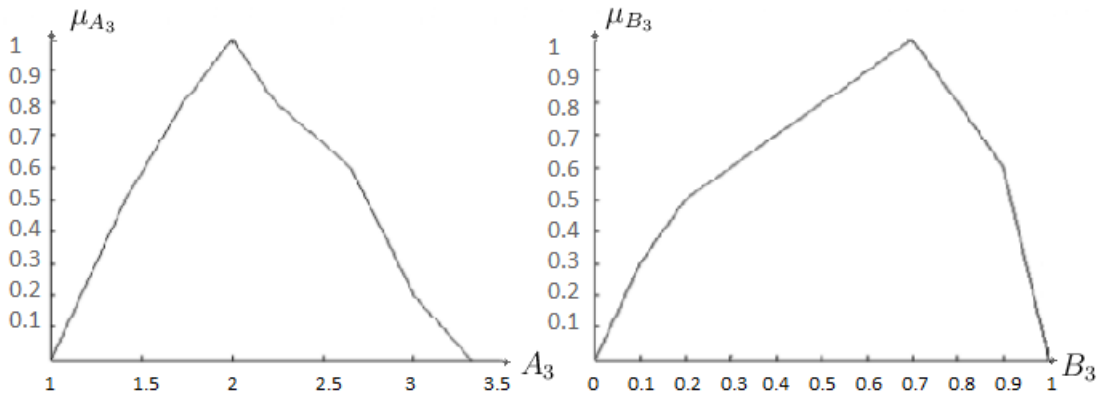
$$A_3 = 0/1 + 0.5/1.4 + 0.8/1.7 + 1/2 + 0.8/2.2 + 0.7/2.4 + 0.6/2.6 + 0.4/2.8 + 0.2/3 + 0.1/3.2 + 0/3.3,$$

$$p_3 = 0.09 \setminus 1 + 0 \setminus 1.4 + 0 \setminus 1.7 + 0.32 \setminus 2 + 0.18 \setminus 2.2 + 0.1 \setminus 2.4 + 0.036 \setminus 2.6 + 0 \setminus 2.8 + 0.2 \setminus 3 + 0.1 \setminus 3.2 + 0.09 \setminus 3.3.$$

$B_3 = B_2$ olduğu yukarıda gösterildiğinden diğer işlemlere gerek yoktur. Bununla birlikte burada,

$$\mu_{p_2}(p_2) = \mu_{B_2} \left(\sum_{k=1}^n \mu_{A_2}(x_k) p_2(x_k) \right)$$

üyelik derecesiyle, $\mu_{p_3}(p_3) = \mu_{p_2}(p_2)$ eşitliği göz önüne alınarak, verilen A_3 ile, B_3 hesaplanmış olur. Böylece A_3 ve B_3 ün grafikleri Şekil 5.9'daki gibi olan $Z_3 = (A_3, B_3)$, Z_2 nin karekökü olan kesikli Z -sayısı hesaplanmış olur [2].



Şekil 5.9. Kesikli bir Z -sayının karekökü: A_3 ve B_3 sayıları

6. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Z -sayıların ne anlama geldiği incelenmiş, hesaplaması oldukça karmaşık olan Z -sayılar üzerindeki aritmetik işlemler analiz edilmiştir. Z -sayılarda aritmetik işlemler altı basamak halinde çözümlenmiştir. Sürekli ve kesikli Z -sayılar için bu basamakların benzer olduğu, sadece ilk adımda $Z = (A, B)$ şeklindeki bir Z -sayısının ikinci bileşenindeki B nin temel değerlerine karşılık gelen olasılık dağılımları hesaplanırken, sürekli Z -sayılarda Newton-Raphson Yöntemi'nin, kesikli Z -sayılarda ise lineer hedef programlamanın kullanıldığı görülmüş ve bu yöntemler detaylı olarak incelenmiştir.

Literatürde fuzzy sayıların sıralanması üzerine birçok yöntem sunulmuştur. Bunların her biri fuzzy sayıların sıralanmasına yardımcı olan fuzzy sayıların belirli özelliklerine dayanmaktadır. Z -sayılarda sadece bulanıklık olmayıp hesaba güvenilirlikte katıldığı için Z -sayıların sıralanması bulanık sayıların sıralanmasından daha önemli hale gelmektedir. Z -sayılar, reel sayılarda olduğu gibi doğal bir sıra oluşturamadıkları için bir Z -sayının diğerinden küçük veya büyük olduğu kolaylıkla belirlenememektedir.

Z -sayıları sıralamak ekonomi, karar analizi, risk değerlendirmesi gibi alanlarda belirsizlik içeren durumların karar verme süreçlerinde büyük bir öneme sahiptir. Z -sayıları sıralamak için yayımlanmış birçok çalışma olmasına rağmen genel geçerliliği olan bir sıralama bağıntısı bulunmamaktadır. Bir sonraki çalışmamız Z -sayılar üzerinde doğrudan hesaplamaya dayalı Z -bilgi altında bir karar verme yaklaşımını oluşturmaktır. Bu yaklaşımın başta ekonomi alanında olmak üzere karşılaştırmalı karar verme problemlerine uygulamaları yapılabilir.

KAYNAKÇA

- [1] Aliev R.A., Alizadeh A.V., Huseynov O.H. (2015). The arithmetic of discrete Z-numbers. *Inf. Sci.*, 290, 134–155.
- [2] Aliev R.A., Huseynov O.H., Aliyev R.R., Alizadeh A.A. (2015). *The arithmetic of Z-numbers. Theory and applications*. Hackensack, NJ: World Scientific.
- [3] Aliev R.A., Huseynov O.H., Serdaroglu R. (2016). Ranking of Z-numbers and Its Application in Decision Making. *Int J Inform Technol Dec Mak.*, 15, 1503.
- [4] Aliev R.A., Huseynov O.H., Zeinalova L.M. (2016). The arithmetic of continuous Z-numbers. *Inf. Sci.*, 373, 441–460.
- [5] Aliev R.A., Salimov V.H. (2017). Software for Z-arithmetic. *Procedia Computer Science*, 120, 290–295.
- [6] Bakar A.S.A., Gogov A. (2014). Multi-Layer Decision Methodology for Ranking Z-Numbers. *Int J Comput Intell Syst.*, 8, 395–406.
- [7] Casasnovas J., Riera J.V. (2006). On the addition of discrete fuzzy numbers. *Wseas Trans. Math.*, 5, 549–554.
- [8] Creighton J.H.C. (1994). *A first course in probability models and statistical inference*. San Francisco: Springer.
- [9] Çelik Ş. (2006). *Normal dağılım ve normal dağılım ile ilgili çıkarımlar*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Ankara: Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [10] Farina M., Amato P. (2004). A Fuzzy Definition of "optimality" for Many-Criteria Optimization Problems. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. A, Sits. Humans*, 34 (3), 315–326.
- [11] Kang B., Wei D., Li Y., Deng Y. (2012 a). A Method of Converting Z-Number to Classical Fuzzy Number. *J Inform Comput Sci.*, 9, 703–709.
- [12] Kang B., Wei D., Li Y., Deng Y. (2012 b). Decision Making Using Z-numbers Under Uncertain Environment. *J Comput Inform Syst.*, 8, 2807–2814.
- [13] Lee K.H. (2005). *First course on fuzzy theory and applications*. Berlin: Springer.
- [14] Öztürk A. (1997). *Yöneylem Araştırması*. Bursa: Ekin Kitapevi Yayınları.

- [15] Ren Z., Liao H., Liu Y. (2020). Generalized Z-numbers with hesitant fuzzy linguistic information and its application to medicine selection for the patients with mild symptoms of the COVID-19. *Computes and Industrial Engineering*, 145, 106517.
- [16] Springer M.D. (1979). *The algebra of random variables*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons
- [17] Wang G., Wu C., Zhao C. (2005). Representation and operations of discrete fuzzy numbers. *Southeast Asian Bull. Math*, 29(5), 1003–1010.
- [18] Zadeh L.A. (1965). Fuzzy sets. *Inform. Control*, 8, 338–353.
- [19] Zadeh L.A. (1975). Calculus of fuzzy restrictions. *Fuzzy Sets Appl. cogn. Decis. Processes, U.S.-Japan Semin., Berkeley* 1974, 1-39.
- [20] Zadeh L.A. (1996). Fuzzy logic and the calculi of fuzzy rules and fuzzy graphs. *Multiple-Valued Logic*, 1, 1–38.
- [21] Zadeh L.A. (2011). A note on Z-numbers. *Inform. Sciences*, 181, 2923–2932.
- [22] Zadeh L.A. (2013). Toward a Restriction-Centered Theory of Truth and Meaning. *Information Sciences*, 248, 1–14.
- [23] <http://kisi.deu.edu.tr/hamdi.emec/ist1-7.pdf> (Erişim tarihi: 30.12.2020)

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Nebi KAYA
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Geçmişi:

- 2018-2021, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi, Yüksek Lisans.
- 2006-2010, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü.
- 2002-2005, Ankara Sincan İbn-i Sina Lisesi