



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ZAMAN GECİKMELİ COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR
AĞLARININ ROBUST KARARLILIK ANALİZİ**

Muhammet Mert KETENCİGİL

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Doç. Dr. Özlem FAYDASIÇOK

Ağustos, 2022

İSTANBUL

Bu alışma 15.08.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. Özlem FAYDASIÇOK (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakóltesi

Prof. Dr. Rüya řAMLI
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpařa
Mühendislik Fakóltesi

Dr. Öğr. Üyesi Beran PİRİNİ
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakóltesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneliği olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması ve yüksek lisans öğrenimim boyunca bilgilerini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli danışman hocam Doç.Dr.Özlem Faydasıçok'a candan teşekkür ederim.

Ayrıca bu tez çalışmasında bize katkılarıyla destek veren değerli hocamız Prof.Dr.Sabri Arık'a teşekkür ederim.

Son olarak, sevgili aileme çalışmalarım süresince göstermiş oldukları sabır için en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ağustos, 2022

Muhammet Mert KETENCİGİL

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
SUMMARY	x
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	5
2.1. YAPAY SİNİR AĞI MODELLERİ	5
3. MALZEME VE YÖNTEM	12
3.1. MATRİS VE VEKTÖR NORMLARI	12
3.1.1. Öklid Uzayı	12
3.1.2. Vektör normları	13
3.1.3. Matris Normları	14
3.2. MATRİS SINIFLARI	15
3.3. AKTİVASYON FONKSİYONLARI	18
3.3.1. Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları	18
3.3.2. Sürekli Artan Türevi Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları	19
3.3.3. Azalmayan Türevi Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları	19
3.3.4. Lipschitz Aktivasyon Fonksiyonları	20
3.4. DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERİN DENGİ NOKTASI ANALİZİ	20
3.5. DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN KARARLILIK TEOREMLERİ ...	21
3.5.1. Kararlılık Kavramı	21
3.5.2. Lyapunov Kararlılık Teoremi (Lyapunov'un Direkt Metodu)	24
3.5.3. Lyapunov'un Dolaylı Metodu	25
3.5.4. Barbashin-Krasovskii Teoremi	26
3.5.5. Hurwitz Kararlılık Teoremi	26

3.5.6. LaSalle’ nin Değişmezlik İlkesi	27
4. ZAMAN GECİKMELİ COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞLARININ ROBUST KARARLILIK ANALİZİ	29
4.1. ZAMAN GECİKMELİ COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞININ DENG NOKTASININ VARLIK VE TEKLİK ANALİZİ	32
4.2. ZAMAN GECİKMELİ COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞININ DENG NOKTASININ ROBUST KARARLILIK ANALİZİ	39
5. BULGULAR	46
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	50
KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ	55



ŞEKİL LİSTESİ

	Page No
Şekil 2.1: Herhangi bir nörona ait devre modeli [34]	6
Şekil 3.1: Kararlılık [36]	22
Şekil 3.2: Asimtotik Kararlılık [36]	23



SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$A = (a_{rs})_{m \times m}$	: $m \times m$ boyutlu kare matris
A^T	: A matrisinin transpozu
A^{-1}	: A matrisinin tersi
$\ A\ _1$	: A matrisinin birinci normu
$\ A\ $	: A matrisinin ikinci normu (Öklid normu)
$\ A\ _\infty$	: A matrisinin sonsuz normu
u, v, x, y, z	: Vektörler
u^T	: u vektörünün transpozu
u_r	: u vektörünün r . bileşeni
$\ u\ $	: u vektörünün ikinci normu (Öklid normu)
$\ u\ _m$	: u vektörünün m . normu
$\lambda_r(A)$	: A matrisinin r . özdeğeri
$\lambda_{\min}(A)$	: A matrisinin minimum özdeğeri
$\lambda_{\max}(A)$	: A matrisinin maksimum özdeğeri
$\text{diag}(d_r > 0)$	: elemanları d_r olan pozitif diyagonal matris
$\det A$	: A matrisinin determinantı
$\dot{V}(x)$	: $V(x)$ fonksiyonunun türevi
$A > 0$	: pozitif tanımlı matris
$A \geq 0$	: yarı pozitif tanımlı simetrik matris
$A < 0$	: negatif tanımlı matris
$A \leq 0$	: yarı negatif tanımlı simetrik matris
$P > 0$	: pozitif tanımlı matris simetrik matris
$P \geq 0$	: yarı pozitif tanımlı simetrik matris
$P < 0$	: negatif tanımlı matris simetrik matris
$P \leq 0$	: yarı negatif tanımlı simetrik matris
R	: reel sayılar uzayı
R^m	: m boyutlu reel değerli vektör uzayı

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMAN GECİKMELİ COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞLARININ ROBUST KARARLILIK ANALİZİ

Muhammet Mert KETENCİGİL

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Özlem FAYDASIÇOK

Bu tez çalışması kapsamında, çoklu zaman gecikmesine sahip Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının global asimtotik robust kararlılık özellikleri analiz edilmiştir. Bu yapay sinir ağı modelinde nöron aktivasyonlarının, türevi sınırlı azalmayan aktivasyon fonksiyonları sınıfına ait olduğu varsayılmıştır. Ayrıca tanımlanan alt ve üst sınırlar içerisinde, sistemdeki ağ parametrelerinin belirsiz olduğu kabul edilmiştir. Bu varsayımlar altında öncelikle homeomorfizm özellikleri kullanılarak zaman gecikmesinden bağımsız biçimde sadece ağ parametrelerine bağlı olarak denge noktasının varlığını ve tekliğini sağlayan yeni yeterli koşullar elde edilmiştir. Sonrasında Lyapunov Kararlılık Teoreminden faydalanılarak, elde edilen yeni yeterli koşulların aynı zamanda sistemin denge noktasının global asimtotik robust kararlılığını sağladığı gösterilmiştir. Son olarak, bu koşulların literatürde benzer varsayımlar altında elde edilmiş sonuçlara göre üstünlüklerini göstermek amacıyla sayısal örnekler kullanılarak bazı karşılaştırmalar yapılmıştır.

Temmuz 2022, x+55 sayfa.

Anahtar kelimeler: Cohen-Grossberg yapay sinir ağları, zaman gecikmeli sistemler, robust kararlılık analizi, Lyapunov'un Direkt Metodu.

SUMMARY

M.Sc. THESIS

ROBUST STABILITY ANALYSIS OF COHEN-GROSSBERG NEURAL NETWORKS WITH TIME DELAYS

Muhammet Mert KETENCİGİL

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Özlem FAYDASIÇOK

In the scope of this thesis, the global asymptotic robust stability properties of Cohen-Grossberg neural networks with multiple time delays were analyzed. In this neural network model, it is assumed that neuron activations belong to the class of non-decreasing slope-bounded nonlinear functions. In addition, it is considered that the network parameters in the system have bounded upper norms. Under these assumptions, firstly, by using the homeomorphism properties, new sufficient conditions that ensure the existence and uniqueness of the equilibrium point are obtained independently of the time delay and only depending on the network parameters. Secondly, by using Lyapunov Stability Theorem, it has been shown that the conditions that the obtained new sufficient conditions also realize the global asymptotic robust stability of the equilibrium point of the system. Finally, some comparisons were made using numerical examples in order to show the superiority of these conditions over the results obtained under similar assumptions in the literature.

July 2022, x+55 pages.

Keywords: Cohen-Grossberg neural networks, time delayed systems, robust stability analysis, Lyapunov's Direct Method

1. GİRİŞ

Literatürde birçok farklı tanımı bulunan yapay sinir ağları, en genel ifadeyle biyolojik sinir sisteminin bilgi işleme yöntemini taklit ederek öğrenme, hatırlama, karar verme, kıyaslama ve genelleme gibi pek çok özelliğini matematiksel modellerle gerçekleyen ve farklı öğrenme algoritmaları kullanarak önceden öğrenilmiş bilgilerden yeni bilgiler türeten bilgi işlem sistemleridir. Nöron adı verilen, birbirine bağlı ve uyum içinde çalışan çok sayıda bilgi işlem elemanından meydana gelen yapay sinir ağları; kaotik modelleme, genetik algoritma, bulanık mantık, robotik, bilgisayarlı görü ve doğal dil işleme gibi yapay zekanın temel yöntemlerinden birisidir.

Dinamik yapay sinir ağı modelleri, sahip oldukları yapısal özelliklere göre farklı uygulama alanlarında tercih edilmektedirler. Örneğin; Hopfield ve Cohen-Grossberg sinir ağları daha çok optimizasyon problemlerinin çözümlerinde, Nötral-tip sinir ağları sinyal işleme uygulamalarında, Hücrel sinir ağları görüntü işleme uygulamalarında ve Çift Yönlü Çağrışimli Bellek sinir ağları da çağrışimli bellek tasarımlarında tercih edilen yapay sinir ağı modelleridir. Bu uygulamalarda genel itibarıyla işlenecek bilgi, nöronların durumları ile ifade edildiğinden, tasarlanacak yapay sinir ağındaki nöron durumlarının sabit değerlere yakınsaması arzu edilir. Başka bir deyişle, biyolojik sinir sisteminin bilgi işlem sürecine ait özelliklerini farklı matematiksel modellerle gerçekleyen bu diferansiyel denklem sistemi, kararlı denge noktalarına sahip olmalıdır. Dolayısıyla denge noktasının kararlılık özelliklerinin analiz edilmesi, yapay sinir ağlarının önemli dinamik davranış özelliklerinden bir tanesidir ve literatürde önemli bir araştırma konusudur.

Mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılmak üzere tasarlanan bir yapay sinir ağının başarılı sonuçlar elde edebilmesi için, uygulandığı problemin yapısıyla uyumlu bir dinamik davranış sergilemesi gereklidir. Örneğin, yapay sinir ağı optimizasyon, kontrol veya paralel işlem problemlerinin çözümünde kullanıldığında, her bir giriş değeri için başlangıç koşullarından bağımsız tek bir denge noktasına sahip olacak şekilde tasarlanmalı ve bu denge noktası global asimtotik kararlı olmalıdır. Zira birden fazla denge noktasının var olması, bu problemlerin çözümlerinde yanılgılara sebebiyet verebilir. Öte yandan, yapay sinir ağı çağrışimli bellek olarak tasarlandığında, daha fazla bilgi depolamak amacıyla

sistemin başlangıç koşullarına bağlı birden fazla denge noktasına sahip olması ve bu denge noktalarının kararlı olması arzu edilir. Bu tip bir uygulamada bağlantı matrisleri; bellekte saklanacak bilgilere, ağıın kararlı durumları karşılık gelecek şekilde seçilir. Böylece yapay sinir ağı, var olan bilgilere karşılık benzer yeni bilgiler türetebilir.

1982 yılında John J. Hopfield literatürdeki ilk dinamik yapay sinir ağını geliştirmiş ve gecikme parametresi içermeyen bu modelin dinamik davranış analizini yaparak bazı kararlılık sonuçları elde etmiştir [1]. Hopfield geliştirdiği bu modelde, nöronlar arasındaki bağlantı katsayılarını ifade eden bağlantı matrisinin simetrik, nöron durumu ile nöron çıkışı arasındaki ilişkiyi belirleyen aktivasyon fonksiyonunun ise sınırlı ve monoton artan karakteristikteki sigmoid fonksiyonu olduğunu varsaymıştır. Bu varsayımlar ışığında Hopfield, sistemin kararlılık analizini gerçekleştirmek için pozitif değerler alan bir Lyapunov fonksiyonu tanımlamış ve bu fonksiyonun zamana bağlı türevinin negatif olmasından yola çıkarak yapay sinir ağıının global kararlı olduğunu göstermiştir. Bu sebeple yapay sinir ağlarında bağlantı matrislerinin simetrik olması, sistemin global kararlılığı için yeterli bir koşuldur [2]. Ancak bu tür bir kararlılık, sistemin kaç tane denge noktasının olduğu konusunda bilgi vermemektedir. Bu bağlamda Hopfield'ın geliştirdiği yapay sinir ağı modelinin denge noktasının dinamik davranış analizini gerçekleştiren daha ileri düzeyde çalışmalara ihtiyaç duyulmuştur. Başka bir deyişle, Hopfield tipi yapay sinir ağı için denge noktasının tek ve global asimtotik kararlı olduğu koşullar tespit edilmelidir. Bu koşulların elde edilmesi için de iki temel parametrenin belirlenmesi gerekir. Bu parametreler sırasıyla, yapay sinir ağıında kullanılan aktivasyon fonksiyonlarının karakteristiği ve bağlantı matrisi üzerine getirilen kısıtlayıcı koşullardır.

1983 yılına gelindiğinde Cohen ve Grossberg, Hopfield yapay sinir ağını geliştirerek yeni bir yapay sinir ağı modellemişlerdir [3]. Cohen-Grossberg yapay sinir ağı olarak adlandırılan bu model; görüntü işleme, paralel işlem, çağrışımlı bellek ve optimizasyon problemlerinin çözümünde sıklıkla tercih edilmektedir. Gerçek zamanlı uygulamalarda sistemin denge noktasına hızlıca yakınsaması istendiğinden, Cohen-Grossberg modelinde, yakınsama hızı için bir kontrol parametresi olan kuvvetlendirici fonksiyonu ve durum uzayında sistemin kararlı noktalarını uygun yerlere koymamızı sağlayan bir davranış fonksiyonu bulunmaktadır. Bununla birlikte, Hopfield ve Hücresel yapay sinir ağı modelleri, Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelinin özel durumları olarak ifade edilebilir [4].

1987 yılında yapılan bir çalışmada, yapay sinir ağlarında bağlantı matrisinin simetrik olmasının kararlı denge noktalarının varlığını garantilemek için gerekli bir koşul olmadığı gösterilmiştir [5]. Diğer taraftan, yapay sinir ağlarında bağlantı matrislerinin simetrik olarak seçilmedikleri durumlarda limit döngüleri, yani kararsız denge noktaları oluşabilmektedir [5].

Günümüzde yapay sinir ağları, VLSI teknolojisi yardımıyla her biri elektronik devre elemanı olan işlemsel kuvvetlendirici, direnç ve kapasite kullanılmak suretiyle donanımsal olarak gerçekleştirilebilmektedir. Ancak donanımsal modellemelerde işlemsel kuvvetlendiricilerin anahtarlama hızları ve nöronlar arasında geçen iletişim süreleri, zamana bağlı değişen nöron durumlarında zaman gecikmelerini de beraberinde getirmektedir [6]. Bu zaman gecikmeleri sistemin dinamik davranışını büyük ölçüde etkileyerek ağın kararsız duruma geçmesiyle sonuçlanacak osilasyonlara yol açabilmektedir [7]. Bu nedenle, gecikme parametrelerinin matematiksel modele kararlılık analizinden önce eklenmiş olması yapılan analizin uygulanabilir sonuçlar üretmesi açısından dikkat edilmesi gereken bir husustur. Bu bağlamda, gecikme parametrelili yapay sinir ağlarının dinamik davranışlarını incelemek oldukça önemlidir. Öte yandan bu durumun, sistemin modelini karmaşık bir forma getirmesinin yanı sıra denge noktasının kararlılığını analiz ederken de zorluklar meydana getirdiğini söyleyebiliriz.

Yapay sinir ağlarının donanımsal olarak gerçekleştirilmeleri sırasında kararlılık özellikleri üzerinde etkisi olan bir başka faktör de her bir nöronun elektronik devre tasarımında yer alan direnç ve kapasite gibi elemanların tolerans değerlerinden, modelleme hatalarından ve gürültü gibi dış etkenlerden kaynaklanan ağ parametrelerindeki sapmalardır. Ağ parametrelerinde oluşabilecek bu sapmalar, yapay sinir ağının dinamik davranış özelliklerini tamamıyla değiştirebilir. Bu nedenle, yapay sinir ağlarının kararlılık analizi gerçekleştirilirken ağ parametrelerindeki değişimler matematiksel olarak tanımlanmalı ve bu değişimlerin sistemin dinamik davranışına etkisi incelenerek kararlılık koşulları bu parametre değişimlerinden etkilenmeyecek şekilde belirlenmelidir. Bu yaklaşımla ağ parametreleri üzerine bir takım kısıtlamalar getirilerek gerçekleştirilen kararlılık analizi robust kararlılık analizi olarak isimlendirilir.

Son yıllarda literatürde farklı tipteki yapay sinir ağlarının dinamik davranışlarını analiz eden birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda belirli varsayımlar altında kullanılan sistemler için denge noktasının varlığı, tekliği, global asimtotik kararlılığı ve global üstel kararlılığı gibi çeşitli kararlılık türleri için yeni yeterli koşullar elde edilmiştir [8–33]. Bu tez çalışmasının amacı ise Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarında zaman gecikmelerinin yanı sıra ağ parametrelerindeki belirsizliklerin de ifade edilmesi suretiyle, sistemin başlangıç koşullarından bağımsız olarak, kararlı tek bir denge noktasına yakınsaması için robust kararlılık analizini gerçekleştirmek ve literatürde benzer varsayımlar altında elde edilmiş yeterli koşullardan daha esnek yeni yeterli koşullar elde etmektir.

Bu minval üzere, Genel Kısımlar başlıklı ikinci bölümde tez çalışmasının anlaşılması hususunda gerekli görülen yapay sinir ağı modelleri, gecikme tiplerine göre incelenmiştir.

Malzeme ve Yöntem başlıklı üçüncü bölümde ise dinamik yapay sinir ağlarının kararlılık analizinde kullanılan matris sınıfları, matris-vektör normları ve aktivasyon fonksiyonu sınıfları açıklanmıştır. Sonrasında bu bilgiler ışığında, doğrusal olmayan sistemlerde denge noktası analizi ve bu analizi gerçekleştirmek için sıkça uygulanan kararlılık teoremleri ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde bu tez çalışmasının temelini oluşturan zaman gecikmeli Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının robust kararlılık analizi için gerekli olan varsayımlar, teoremler ve matematiksel işlemler ifade edilerek sistemin kararlılık analizi gerçekleştirilmiş ve yeni yeterli kararlılık koşulları elde edilmiştir.

Bulgular başlıklı beşinci bölümde elde edilen kararlılık koşullarının uygulanabilir olduğunu ve literatürdeki çalışmalarda benzer varsayımlar altında elde edilen koşullardan daha esnek olduğunu göstermek amacıyla sayısal örnekler üzerinde karşılaştırmalar yapılmıştır.

Tartışma ve Sonuç bölümünde ise bu tezin kapsamında elde edilen özgün sonuçlar özetlenerek tezin literatüre sağladığı katkılardan bahsedilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

Bu bölümde tez çalışmasının anlaşılması amacıyla, tez kapsamında kullanılacak temel kavramlar açıklanmıştır. Bu doğrultuda öncelikle Hopfield ve Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının gecikmesiz modelleri ele alınmış daha sonra gecikmeli modeller gecikme tiplerine göre incelenmiştir.

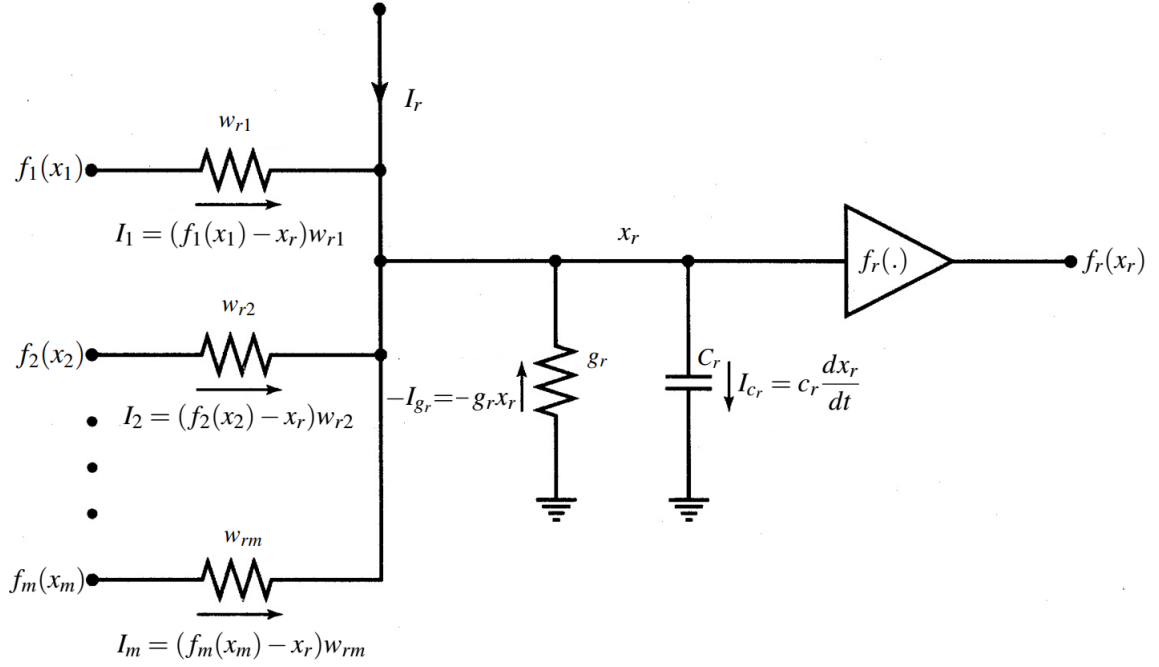
2.1. YAPAY SİNİR AĞI MODELLERİ

Yapay sinir ağları son yıllarda sinyal işleme, optimizasyon, çağrışımlı bellek tasarımı, sınıflandırma ve öngörü gibi birçok mühendislik probleminin çözümünde sıkça kullanılmaktadır. Yapay sinir ağlarının sahip olduğu paralel bilgi işleme yeteneği; karmaşık, eksik veya belirsiz bilgi ile çalışabilmesini ve hatalı durumlarda dereceli bozulma göstermesini, böylece hata toleransına sahip olmasını sağlar. Sistem parametrelerinin bu sayede dış etkilere karşı dayanıklı olduğu söylenebilir. Yapay sinir ağlarının sahip olduğu bu avantajlar, günümüzde birçok mühendislik probleminin çözümünde tercih edilmelerini sağlamıştır.

Yapay sinir ağlarının geniş ölçekli uygulamaları ile birlikte zaman içerisinde; Cohen-Grossberg sinir ağları, Hopfield sinir ağları, Hücresel sinir ağları ve Çift Yönlü Çağrışımlı Bellek sinir ağları gibi farklı matematiksel modeller ortaya çıkmıştır. Bu modeller, yakınsama hızını ayarlamak için kullanılan kuvvetlendirici fonksiyonu ve durum uzayında sistemin kararlı noktalarının uygun yerlere konumlandırılmasını sağlayan davranış fonksiyonu gibi parametre farklılıklarının yanı sıra nöronlar arasındaki bağlantı biçimi ve katman sayısı gibi mimari farklılıklarla da birbirlerinden ayrılmaktadır. Bu ayrışımın bir sonucu olarak, farklı yapay sinir ağı modellerinin denge noktalarının varlık, teklik ve kararlılık analizleri de farklılaşmıştır.

Yapay sinir ağlarının ilk dinamik modeli dirençler, kapasiteler ve işlemsel kuvvetlendirici kullanılarak donanımsal olarak gerçekleştirilen Hopfield tipi yapay sinir ağıdır. 1982 yılında John J. Hopfield tarafından geliştirilen bu yapay sinir ağına ait herhangi bir nöron için

elektronik devre modeli aşağıda gösterilmiştir [34]:



Şekil 2.1: Herhangi bir nörona ait devre modeli [34]

Burada I akım değerlerini, g_r r . nöron girişi ile toprak arasındaki kondüktans değerini, w_{rs} s . nöron çıkışı ile r . nöron girişi arasındaki kondüktans değerini ve C_r r . nöronun sıfırdan farklı giriş kapasitansını gösterebilir. Kirchhoff Akım Kanununa göre devre üzerinde herhangi bir noktaya gelen akım ve bu noktadan ayrılan akım eşit olduğundan aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\sum_{s=1}^m I_s + I_r - I_{g_r} - I_{c_r} = 0 \quad (2.1)$$

Bu eşitlikteki her bir terim aşağıdaki denklemler ile ifade edilir.

$$\sum_{s=1}^m I_s = \sum_{s=1}^m w_{rs} (f_s(x_s) - x_r) \quad (2.2)$$

$$I_{g_r} = g_r x_r \quad (2.3)$$

$$I_{c_r} = c_r \frac{dx_r}{dt} \quad (2.4)$$

Bu bilgiler ışığında (2.1) denklemindeki terimler düzenlenirse,

$$\frac{dx_r}{dt} = -\frac{x_r}{c_r} \left(\sum_{s=1}^m w_{rs} + g_r \right) + \sum_{s=1}^m \frac{w_{rs}}{c_r} f_s(x_s) + \frac{I_r}{c_r} \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (2.5)$$

formunda bir diferansiyel denklem seti elde edilir. Burada $G_r \triangleq \sum_{s=1}^m w_{rs} + g_r$ biçiminde pozitif tanımlı herhangi bir diyagonal matrisin elemanı olarak ifade edilebilir. Bu durumda (2.5) denklemleri, aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{dx_r}{dt} = -\frac{x_r}{c_r} G_r + \sum_{s=1}^m \frac{w_{rs}}{c_r} f_s(x_s) + \frac{I_r}{c_r} \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (2.6)$$

Bu modeldeki terimler $\frac{x_r}{c_r} G_r = e_r$, $\frac{w_{rs}}{c_r} = a_{rs}$ ve $\frac{I_r}{c_r} = u_r$ biçiminde yeniden düzenlenirse aşağıdaki gecikmesiz Hopfield yapay sinir ağına ait denklem modeli elde edilir.

$$\frac{dx_r}{dt} = -e_r x_r(t) + \sum_{s=1}^m a_{rs} f_s(x_s(t)) + u_r \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (2.7)$$

Bu denklem sisteminde m sistemin içerdiği nöron sayısını, $x_r(t)$ r . nöronun durum değişkenini, e_r r . nöronun devresel gerçekleşmesinde yer alan direnç ve kapasite değerlerinden oluşan ve $E = \text{diag}(e_r > 0)$ olarak tanımlanan pozitif tanımlı diyagonal matris elemanını, a_{rs} r . ve s . nöronlar arasındaki ağırlık katsayısını, $f_s(x_s(t))$ s . nöron durumu ile çıkışı arasındaki ilişkiyi ifade eden nöron aktivasyonunu, u_r ise r . nöron için giriş değerlerini göstermektedir.

1983 yılına gelindiğinde ise Cohen ve Grossberg, Hopfield tarafından geliştirilmiş (2.7) denklemleriyle ifade edilen modele, sistem çözümlerinin denge noktasına yakınsama hızını kontrol eden bir kuvvetlendirici fonksiyonu ve kararlı çözümlerin durum uzayında uygun yerlere konulmasına olanak sağlayan bir davranış fonksiyonu ekleyerek Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelini geliştirmiştir. Kombinatorial optimizasyon, örüntü tanıma ve işaret işleme gibi birçok mühendislik probleminde oldukça yaygın kullanılan bu model, aşağıda verilen diferansiyel denklemler ile temsil edilir:

$$\dot{x}_r(t) = d_r(x_r(t)) \left(-c_r(x_r(t)) + \sum_{s=1}^m a_{rs} f_s(x_s(t)) \right) + u_r \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (2.8)$$

Burada m sistemin içerdği nöron sayısını, $x_r(t)$ r . nöronun durum değişkenini, $d_r(x(t))$ r . nöronun kuvvetlendirici fonksiyonunu, $c_r(x(t))$ r . nöronun davranış fonksiyonunu, a_{rs} r . ve s . nöronlar arasındaki ağırlık katsayısını, $f_s(x_s(t))$ s . nöronun durumu ile çıkışı arasındaki ilişkiyi ifade eden nöron aktivasyonunu, u_r ise r . nöron için giriş değerlerini göstermektedir.

Aynı denklemlerin matris-vektör formunda yazılabilmesi için yapay sinir ağı modelindeki terimlerin incelenmesi gerekir. Buna göre;

x durum değişkeni, her nöron için tanımlandığından $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ biçiminde m boyutlu bir vektör ile ifade edilir. Benzer şekilde $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T$ nöron aktivasyonlarını ve $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ giriş değerlerini ifade eden m boyutlu vektörlerdir. Her bir a_{rs} değeri ise r . ve s . nöron arasındaki bağlantı katsayısını temsil ettiğinden $m \times m$ boyutlu bir matris olur ve $A = (a_{rs})_{m \times m}$ ile gösterilir. Denge noktası üzerinde herhangi bir etkisi bulunmayan kuvvetlendirici fonksiyonu ise $D(x(t)) = \text{diag}(d_1(x_1), d_2(x_2), \dots, d_m(x_m)) > 0$ formunda $m \times m$ boyutlu pozitif diyagonal matristir. $C(x(t)) = (c_1(x_1), c_2(x_2), \dots, c_m(x_m))$ ise sistemin kararlı çözümlerinin durum uzayında uygun yerlere konulmasına olanak sağlayan, böylece denge noktalarını optimize ederek sistemin davranışı etkileyen m boyutlu davranış fonksiyonudur.

Bu bilgiler ışığında (2.8) sisteminin matris-vektör formunda yazılışı aşağıda gösterilmiştir:

$$\frac{dx(t)}{dt} = D(x(t)) \left[-C(x(t)) + Af(x(t)) + u \right]$$

Bu sistemde özel olarak $D(x(t)) = 1$ ve $C = \text{diag}(c_r > 0)$ pozitif tanımlı bir köşegen matris olmak üzere, $C(x(t)) = Cx(t)$ alındığında Hopfield yapay sinir ağı elde edilir. Benzer şekilde $D(x) = 1$ ve $C(x(t)) = x(t)$ ile birlikte aktivasyon fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|)$ seçildiğinde ise Hücresel yapay sinir ağı elde edilir. Sonuç itibarıyla, Hopfield ve Hücresel sinir ağlarının, Cohen-Grossberg sinir ağı modelinin özel durumları olduğu söylenebilir.

Dikkat edilirse bu model için gerek denklem formunda gerekse matris-vektör formunda herhangi bir gecikme parametresi bulunmadığı kolayca görülebilir. Ancak yapay sinir ağlarının donanımsal gerçeklemelerinde nöronlar arasındaki veri alışverişi sırasında zaman gecikmeleri oluşması kaçınılmazdır. Bu zaman gecikmeleri yapay sinir ağının kararlılığı üzerine direkt etki ederek çözüm yörüngelerinin denge noktası civarında osilasyon yapmasına, böylece sistemin dinamik davranışının tamamen değişmesine yol açabilir. Bu

bağlamda zaman gecikmelerinin sistemin dinamik davranışı üzerindeki etkisini tam olarak analiz etmek için dinamik yapay sinir ağının matematiksel modelinin inşasında zaman gecikmeleri de sisteme dahil edilmelidir.

(2.8) modeline ilave edilebilecek zaman gecikmeleri üç farklı formda olabilir:

- Nöronların iletişimi sırasında oluşan zaman gecikmesinin sabit olduğu düşünülerek sisteme eklenen sabit $\tau \geq 0$ gecikmesi, en basit gecikmeli model olarak ifade edilir. Bu modele ait diferansiyel denklemler aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\dot{x}_r(t) = d_r(x_r(t)) \left(-c_r(x_r(t)) + \sum_{s=1}^m a_{rs} f_s(x_s(t - \tau)) \right) + u_r \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (2.9)$$

Benzer şekilde bu denklemlerin sabit $\tau \geq 0$ gecikmeli matris-vektör formu aşağıda ifade edilmiştir:

$$\frac{dx(t)}{dt} = D(x(t)) \left[-C(x(t)) + Af(x(t - \tau)) + u \right]$$

Zaman gecikmesinin sabit kabul edildiği bu tip modeller, yapay sinir ağlarının kararlılık analizlerinde hesaplama kolaylığı sunduğundan sıklıkla kullanılmaktadır. Ancak nöronların veri akışı sırasında oluşan gecikmelerin eşit kabul edilmesi pratikte mümkün değildir. Bu nedenle hassas bir yaklaşım olduğu söylenemez.

- s.nöron ile diğer nöronlar arasındaki zaman gecikmesinin sabit olduğu kabul edilerek sisteme eklenen tek boyutlu $\tau_s \geq 0$ gecikmesi, sabit gecikmeden farklı olarak bir skaler değil, m boyutlu bir vektördür. Bu modele ait diferansiyel denklemler aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\dot{x}_r(t) = d_r(x_r(t)) \left(-c_r(x_r(t)) + \sum_{s=1}^m a_{rs} f_s(x_s(t - \tau_s)) \right) + u_r \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (2.10)$$

Bu denklemler ise matris-vektör formunda, gecikme terimi m boyutlu $\tau \geq 0$ vektörü olmak üzere aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir:

$$\frac{dx(t)}{dt} = D(x(t)) \left[-C(x(t)) + Af(x(t - \tau)) + u \right]$$

Ayrık zaman gecikmesi, zaman gecikmesinin sabit alındığı modele göre daha gerçekçi bir yaklaşım olsa da bir nöronun diğer nöronlar ile iletişimi sırasında meydana gelen gecikmenin sabit olması, donanımsal gerçeklemelerde ortaya çıkan gecikmeyi doğru yansıtmaz.

- Tüm nöron çiftleri arasında zaman gecikmesinin farklı olabileceği öngörüsü ile modele eklenen çift boyutlu $\tau_{rs} \geq 0$ gecikmesi, r . ve s . nöronlar arasındaki gecikmeyi ifade eden $m \times m$ boyutlu bir matristir. Bu modele ait diferansiyel denklemler aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$$\dot{x}_r(t) = d_r(x_r(t)) \left(-c_r(x_r(t)) + \sum_{s=1}^m a_{rs} f_s(x_s(t - \tau_{rs})) \right) + u_r \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (2.11)$$

Bu model yapay sinir ağlarının donanımsal gerçeklemelerindeki karakteristik değişimleri en uygun şekilde yansıtır. Öte yandan matematiksel analizlerin çok daha zorlaşmasına neden olur. Zira gecikme parametrelerinin $m \times m$ boyutlu bir matris olması nedeniyle bu diferansiyel denklem sistemi matris-vektör formunda yazılamamaktadır.

Dikkat edilirse, verilen denklemler için aktivasyon fonksiyonlarının sadece gecikme parametresi içeren nöronlara uygulandığı görülebilir. Fakat bazı problemlerin çözümünde özellikle hareket içeren uygulamalarda, gecikme parametresi kasıtlı olarak yapay sinir ağına eklenir. Böyle durumlarda yapay sinir ağı modelinde hem gecikme parametrelili hem de zaman gecikmesiz nöronlar bulunabilir. Yapay sinir ağlarının bu ve benzer uygulamalarını da kapsayacak şekilde geliştirilen en genel yapay sinir ağı modeli aşağıdaki diferansiyel denklemlerle verilmiştir:

$$\dot{x}_r(t) = d_r(x_r(t)) \left(-c_r(x_r(t)) + \sum_{s=1}^m a_{rs} f_s(x_s(t)) + \sum_{s=1}^m b_{rs} f_s(x_s(t - \tau_{rs})) \right) + u_r, \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (2.12)$$

$C([- \tau, 0], R)$ kümesi, $[- \tau, 0] \rightarrow R$ tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesini göstermek üzere, (2.12) modelinde başlangıç koşulu,

$$x_r(t) = \phi_r(t) \in C([- \tau, 0], R)$$

olarak belirlenmiştir.

Bu tez çalışmasının birincil hedefi, donanımsal gerçeklemelerde oluşan zaman gecikmelerini en uygun şekilde yansıtan, her nöron çifti arasındaki gecikmelerin farklı olabileceği, çoklu zaman gecikmesine sahip Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelinin global asimtotik robust kararlılığını analiz ederek, literatürde benzer varsayımlar altında elde edilmiş kararlılık koşullarından daha esnek yeni yeterli koşullar elde etmektir. Bunun için ilk olarak (2.12) ile ifade edilen modelde yer alan ağ parametrelerinin gerçek değerlerinden sapma sınırları belirlenmiş, sonrasında bir takım kısıtlayıcı koşullar altında yapay sinir ağının dinamik denkleminde hareketle, matris norm ilişkileri ve Lyapunov Kararlılık Teoremi kullanılarak kararlılık analizi yapılmıştır. Bu analiz sonucunda ise sistemin global asimtotik robust kararlılığını gerçekleyen yeni sonuçlara ulaşılmıştır. Son olarak, bu tez kapsamında elde edilen yeni yeterli koşulların, literatürde benzer kısıtlar altında elde edilmiş kararlılık koşulları ile sayısal örnekler üzerinden karşılaştırılması yapılmıştır.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Dinamik yapay sinir ağları için denge noktasının kararlılık özellikleri, sistemdeki bağlantı matrislerine ve aktivasyon fonksiyonlarına uygulanan kısıtlayıcı koşullara dayandığından matrisler ve vektörler kararlılık analizlerinde büyük önem taşırlar. Başka bir deyişle, yapay sinir ağlarında kullanılan aktivasyon fonksiyonlarının karakteristikleri ve ağ parametrelerinin özellikleri sistemin dinamik davranışı üzerine direkt etki eder. Bu bilgiler ışığında yapay sinir ağlarına ait kararlılık özelliklerinin belirlenmesinde matris teorisinin ve matris özelliklerinin incelenmesinin büyük önem arz ettiği söylenebilir.

Bu bölümde ilk olarak, yapay sinir ağlarının kararlılık analizinde sıkça kullanılan matris-vektör normları, matris sınıfları ve aktivasyon fonksiyonu sınıfları tanımlanmıştır. Sonrasında ise kararlılık kavramı açıklanarak doğrusal olmayan sistemlerin denge noktası analizinden elde edilen önemli temel sonuçlara ve bu sistemlerin analizini gerçekleştirmek için sıkça kullanılan kararlılık teoremlerine yer verilmiştir.

3.1. MATRİS VE VEKTÖR NORMLARI

Bu kısımda, literatürde sıkça kullanılan ve tez kapsamında incelenecek modelin kararlılık analizinde kullanılacak olan matris ve vektör normlarına ait özellikler verilmiştir. Ayrıca bu kavramların daha rahat anlaşılması için de Öklid Uzayı kavramı izah edilmiştir.

3.1.1. Öklid Uzayı

$u_1, u_2, \dots, u_m \in R$ olmak üzere, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ biçiminde tanımlanan reel değerli tüm m -boyutlu vektörlerin kümesi R^m ile gösterilir ve m -boyutlu Öklid Uzayı olarak tanımlanır.

3.1.2. Vektör normları

R^m Öklid Uzayındaki herhangi bir $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ vektörünün normu $\|u\|$ ile gösterilen ve aşağıda tanımlanan özellikleri gerçekleyen bir reel değerli fonksiyon olarak tanımlanır:

- $\forall u \in R^m - \{0\}$ için $\|u\| > 0$ ve $u = 0$ için $\|u\| = 0$.
- $\forall u, v \in R^m$ için $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
- $\alpha \in R$ ve $\forall u \in R^m$ için $\|\alpha v\| = |\alpha| \|u\|$.

Bu bilgiler ışığında m boyutlu bir u vektörünün p normu aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\|u\|_p = \sqrt[p]{|u_1|^p + |u_2|^p + \dots + |u_m|^p} = \sqrt[p]{\sum_{r=1}^m |u_r|^p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

Bu tez kapsamındaki sonuçlara ulaşırken kullanılacak $\|u\|_1$, $\|u\|_2$ ve $\|u\|_\infty$ vektör normları ise şu şekilde yazılabilir:

$$\|u\|_1 = (|u_1| + |u_2| + \dots + |u_m|) = \sum_{r=1}^m |u_r|$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \dots + |u_m|^2} = \sqrt{\sum_{r=1}^m |u_r|^2}$$

$$\|u\|_\infty = \max_{1 \leq r \leq m} |u_r|$$

Ayrıca $\|u\|_\alpha$ ve $\|u\|_\beta$, u vektörünün farklı birer p normu olmak üzere, $\forall u \in R^m$ için $c_1 \|u\|_\alpha \leq \|u\|_\beta \leq c_2 \|u\|_\alpha$ koşulunu gerçekleyen c_1 ve c_2 pozitif sabitleri mevcuttur.

Bu ifadeye göre, $\|u\|_1$, $\|u\|_2$ ve $\|u\|_\infty$ normları için aşağıdaki eşitsizlikleri yazmak mümkündür.

$$\|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq \sqrt{m} \|u\|_2$$

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \sqrt{m} \|u\|_\infty$$

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_1 \leq \sqrt{m} \|u\|_\infty$$

Vektörlerin p normları ile ilgili ifade edilebilecek bir başka eşitsizlik ise Hölder Eşitsizliği'dir. Buna göre, $\forall u, v \in R^m$ için $|u^T v| \leq \|u\|_p \|v\|_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartını sağlayan p, q sayıları mevcuttur.

3.1.3. Matris Normları

Tüm elemanları reel değerli olan $m \times n$ boyutlu herhangi bir A matrisi için p -normu aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\|A\|_p = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|_p}{\|u\|_p} = \max_{\|u\|_p=1} \|Au\|_p$$

$A = (a_{rs})_{m \times m}$ kare matrisinin $p = 1, 2, \infty$ normları için ise sırasıyla aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\|A\|_1 = \max_r \sum_{s=1}^m |a_{sr}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}, \quad \|A\|_\infty = \max_r \sum_{s=1}^m |a_{rs}|$$

Ayrıca $m \times n$ boyutlu reel değerli bir A matrisi ve $n \times q$ boyutlu reel değerli B matrisi için aşağıdaki eşitsizlikler gerçekleşir:

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$$

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p$$

3.2. MATRİS SINIFLARI

Genel olarak, dinamik sistemlerin kararlılığı üzerinde her bileşen ayrı bir öneme sahiptir. Bu bağlamda, yapay sinir ağlarında kullanılan aktivasyon fonksiyonları ve katsayılar gibi bağlantı matrislerinin özellikleri de sistemin kararlılığı üzerine direkt etki edebilmektedir.

Bu kısımda yapay sinir ağlarının kararlılık analizlerinde sıkça kullanılan bazı matris sınıfları tanımlanmıştır:

- $m \times m$ boyutlu simetrik A matrisine ait özdeğerler pozitifse, A , pozitif tanımlı matris olarak adlandırılır ve $A > 0$ ile gösterilir.
- $m \times m$ boyutlu simetrik A matrisine ait özdeğerler pozitif veya sıfırsa, A , yarı pozitif tanımlı matris olarak adlandırılır ve $A \geq 0$ ile gösterilir.
- $m \times m$ boyutlu A matrisine ait özdeğerlerin reel kısmı pozitif ise, A 'ya pozitif kararlı matris denir. Bu özelliği sağlayan matrisler H -kararlı matris olarak adlandırılır ve $A \in H$ ile gösterilir.
- $m \times m$ boyutlu A matrisine ait özdeğerlerin reel kısmı pozitif veya sıfır ise, A 'ya pozitif yarı kararlı matris denir. Bu özelliği sağlayan matrisler H_0 -kararlı matris olarak adlandırılır ve $A \in H_0$ ile gösterilir.
- $m \times m$ boyutlu bir $A = (a_{rs})$ matrisinin elemanları $a_{rr} \geq 0$ ve $a_{rs} \leq 0$ eşitsizliklerini sağlıyor ise, A matrisine Z_m kümesinin bir elemanıdır denir ve $A \in Z_m$ ile gösterilir.
- $m \times m$ boyutlu bir A matrisi Z_m kümesinin elemanı ve pozitif kararlı matris ise, A tekil olmayan bir M -matrisi olarak adlandırılır ve $A \in K$ ile gösterilir.
- $m \times m$ boyutlu bir A matrisi Z_m kümesinin elemanı ve pozitif yarı kararlı matris ise, A bir M -matris olarak adlandırılır ve $A \in K_0$ ile gösterilir.

- $m \times m$ boyutlu bir A matrisi için kıyas matrisi $C = \{c_{rs}\}$ ile gösterilir ve elemanları $c_{rr} = a_{rr}, c_{rs} = -|a_{rs}|$ olarak tanımlanır.

- $m \times m$ boyutlu bir A matrisine ait köşegen elemanlar $a_{rr} > 0$ olarak verilsin. A 'nın kıyas matrisi tekil olmayan bir M -matris özelliği taşıyorsa A 'ya tekil olmayan $\mathcal{H}$ -matris denir ve $A \in C$ ile gösterilir.

- $m \times m$ boyutlu bir A matrisine ait köşegen elemanlar $a_{rr} \geq 0$ olarak verilsin. A 'nın kıyas matrisi bir M -matris özelliği taşıyorsa A 'ya $\mathcal{H}$ -matris denir ve $A \in C_0$ ile gösterilir.

- $m \times m$ boyutlu bir A matrisine ait elemanlar

$$a_{rr} > \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^m |a_{rs}|, \quad r = 1, \dots, m$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, diğer bir deyişle A matrisinin her köşegen elemanı bulunduğu satırdaki diğer elemanların mutlak değerce toplamlarından büyük ise A matrisine kesin köşegen satır baskın matris denir.

- $m \times m$ boyutlu bir A matrisine ait elemanlar

$$a_{rr} \geq \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^m |a_{rs}|, \quad r = 1, \dots, m$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, diğer bir deyişle A matrisinin her köşegen elemanı bulunduğu satırdaki diğer elemanların mutlak değerce toplamlarından büyük eşit ise A matrisine köşegen satır baskın matris denir.

- $m \times m$ boyutlu bir A matrisine ait elemanlar

$$a_{rr} > \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^m |a_{sr}|, \quad r = 1, \dots, m$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, diğer bir deyişle A matrisinin her köşegen elemanı bulunduğu satırdaki diğer elemanların mutlak değerce toplamlarından büyük ise A matrisine kesin köşegen sütun baskın matris denir.

- $m \times m$ boyutlu bir A matrisine ait elemanlar

$$a_{rr} \geq \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^m |a_{sr}|, \quad r = 1, \dots, m$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, diğer bir deyişle A matrisinin her köşegen elemanı bulunduğu satırdaki diğer elemanların mutlak değerce toplamlarından büyük eşit ise A matrisine köşegen sütun baskın matris denir.

Matris sınıflarına ait bilinmesi önem arz eden bazı özellikler ise aşağıda verilmiştir.

- Eğer A matrisi C_0 sınıfına ait ise $(A \in C_0)$, $\alpha > 0$ olmak üzere $\alpha I + A \in C$ olan bir α sabiti tanımlıdır.
- Z_m kümesindeki bir matrisin kıyas matrisi kendisine eşittir. Buna bağlı olarak K_0 kümesi C_0 kümesinin bir alt kümesi olarak ifade edilebilir.
- $m \times m$ boyutlu bir A matrisine ait tüm köşegen elemanlar pozitif olmak üzere, A 'nın kıyas matrisi tekil olmayan M-matris ise

$$d_r a_{rr} > \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^m d_s |a_{sr}|, \quad r = 1, \dots, m$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif d_r , $r = 1, \dots, m$ katsayıları vardır.

3.3. AKTİVASYON FONKSİYONLARI

Yapay sinir ağının kararlılığını belirlemede önemli parametrelerden birisi olan aktivasyon fonksiyonları, her bir nörona gelen toplam ağırlıklı girdiyi işleyerek nöron durumları ile nöron çıkışları arasındaki ilişkiyi modelleyen ve ekseriyetle doğrusal olmayan fonksiyonlardır. Aktivasyon fonksiyonlarının kullanımı, yapay sinir ağının modeline ve uygulanacağı mühendislik problemine göre çeşitlilik göstermektedir. Örneğin optimizasyon probleminin çözümünde kullanılacak bir yapay sinir ağı modelinde, her giriş değerine karşılık tek bir denge noktası isteneceğinden sınırlı bir aktivasyon fonksiyonu tercih edilmesi avantajlı olacaktır. Zira bu tipte bir aktivasyon fonksiyonu içeren yapay sinir ağı modelinde denge noktasının kararlılığını analiz etmek için uygun Lyapunov fonksiyonları bulmak çok daha kolaydır ve sistem parametreleri üzerine daha az kısıtlama vardır. Ayrıca sınırlı aktivasyon fonksiyonlarının kullanımı yapay sinir ağlarında denge noktasının varlığını garantiler. Bu nedenle sınırlı aktivasyon fonksiyonları kullanılan modellerde kararlılık analizini gerçekleştirmek, sınırsız aktivasyon fonksiyonlarına göre çok daha kolaydır. Ancak bazı optimizasyon problemleri için sınırsız ve sürekli artmayan fonksiyonlara yer verilmesi ile daha iyi sonuç alındığından her türlü problem için aynı tipte aktivasyon fonksiyonları kullanmak uygun değildir. Ayrıca yapay sinir ağlarında nöronların hepsi aynı aktivasyon fonksiyonlarına sahip olmak zorunda da değildir. Gruplara bölünmüş veya her nöron farklı bir aktivasyon fonksiyonuna sahip olabilir.

Literatürdeki çalışmalarda yapay sinir ağlarının kararlılık analizleri gerçekleştirilirken sıklıkla tercih edilen aktivasyon fonksiyonu sınıfları aşağıda gösterilmiştir:

3.3.1. Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları

μ_r pozitif sabitler olmak üzere, aşağıdaki şartı sağlayan fonksiyonlar sınırlı fonksiyonlardır.

$$|f_r(x)| \leq \mu_r, \quad r = 1, \dots, m. \quad (3.1)$$

Bu koşulu gerçekleyen aktivasyon fonksiyonlarının kümesi $f \in \mathcal{B}$ şeklinde gösterilir.

3.3.2. Sürekli Artan Türevi Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları

ρ_r pozitif sabitler olmak üzere, aşağıdaki şartı gerçekleyen aktivasyon fonksiyonları sürekli artan türevi sınırlı fonksiyonlardır:

$$0 < \frac{f_r(x) - f_r(y)}{x - y} \leq \rho_r \quad \forall x, y \in R, \quad x \neq y, \quad r = 1, 2, \dots, m. \quad (3.2)$$

Bu koşulu gerçekleyen aktivasyon fonksiyonlarının kümesi $f \in S$ ile gösterilir.

Bu sınıftaki fonksiyonların sürekli artan karakteristiğe sahip olması, kullanım alanı açısından hayli daraltıcı bir faktördür. Bu durumdan kaçınmak adına yapay sinir ağlarında yer verilecek aktivasyon fonksiyonlarının kümesini mümkün olduğunca büyük seçmekte uygulama alanlarındaki başarıyı arttırmak açısından fayda vardır.

3.3.3. Azalmayan Türevi Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları

k_r pozitif sabitler olmak üzere, aşağıda verilen şartı gerçekleyen aktivasyon fonksiyonları azalmayan türevi sınırlı fonksiyonlardır:

$$0 \leq \frac{f_r(x) - f_r(y)}{x - y} \leq k_r \quad \forall x, y \in R, \quad x \neq y, \quad r = 1, 2, \dots, m. \quad (3.3)$$

Bu koşulu gerçekleyen aktivasyon fonksiyonlarının kümesi $f \in \mathcal{K}$ şeklinde gösterilir.

Bu küme monoton artan özelliğe sahip tüm aktivasyon fonksiyonlarını içerdiğinden $\mathcal{K}$ sınıfı, S sınıfından daha geniş bir küme ifade eder. Zira $\mathcal{K}$ sınıfı S sınıfında olmayan sabit fonksiyonları da içermektedir. Başka bir deyişle, bu sınıfa ait aktivasyon fonksiyonlarının türevleri sıfır ya da pozitif olabilmektedir.

3.3.4. Lipschitz Aktivasyon Fonksiyonları

$\ell_r > 0$ Lipschitz sabitleri olmak üzere aşağıdaki şartı sağlayan aktivasyon fonksiyonları Lipschitz aktivasyon fonksiyonlarıdır:

$$|f_r(x) - f_r(y)| \leq \ell_r |x - y|, \quad \forall x, y \in R, \quad x \neq y, \quad r = 1, 2, \dots, m. \quad (3.4)$$

Bu koşulu gerçekleyen aktivasyon fonksiyonlarının kümesi $f \in \mathcal{L}$ şeklinde gösterilir. Bu sınıf, S ve $\mathcal{K}$ sınıflarında olmayan türevi negatif aktivasyon fonksiyonlarını da içerir.

3.4. DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERİN DENGİ NOKTASI ANALİZİ

Bu kısımda, Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının kararlılık analizine geçmeden önce, doğrusal olmayan sistemlerin denge noktası analizinden elde edilen temel sonuçlardan bahsedilecektir.

İlk olarak aşağıda verilen doğrusal olmayan dinamik sistem ele alınsın:

$$\dot{x}_r(t) = f_r(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)), \quad r = 1, 2, \dots, m. \quad (3.5)$$

Bu sistem $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))^T \in R^m$ durum vektörü olmak üzere, aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.6)$$

Burada $f(x^*) = 0$ koşulunu gerçekleyen bir sabit değerli x^* vektörü, dinamik sisteme ait denge noktasını temsil eder. Genellikle doğrusal olmayan sistemler analiz edilirken sistemin denge noktası civarındaki davranışı ile ilgilenilir. Böylece uzun bir zaman limitinde sisteme ait çözüm yörüngelerinin denge noktasına yakınsaması, ayrışması ya da denge noktasının civarında osilasyon yapması ve benzeri davranışları analiz edilir.

Çoğu uygulama alanında dinamik sistemlerin tek denge noktasına sahip olması, yani başka bir değişle, $\dot{x} = f(x)$ sisteminin tek çözümünün olması arzu edilir. $f(x)$ 'in bütün argümanlarının zamana göre sürekliliği, en az bir çözümün varlığı için yeterli bir koşul olmasına rağmen çözümün tekliğini garanti etmez. Çözümün tek olabilmesi için, $f(x)$ fonksiyonu üzerine bir takım kısıtlamalar getirilmelidir. Bunun için $\dot{x} = f(x)$ sistemi analiz edilirken genel olarak $f(x)$ fonksiyonunun önceki kısımda ifade edilen fonksiyon sınıflarından birine ait olduğu varsayılır.

Dinamik sistemlerin analizleri gerçekleştirilirken, işlemleri sadeleştirmek ve basitleştirmek amacıyla analiz edeceğimiz sistemin denge noktasının orijinde olduğu varsayılacaktır. Benzer şekilde, $f(x)$ fonksiyonunun da $f(0) = 0$ eşitliğini sağladığı kabul edilecektir. Zira ilerleyen bölümlerde de ifade edileceği üzere, denge noktasını değişkenlerin değişimi yöntemiyle ile kolaylıkla orijin noktasına ötelenebilir. Bu işlemin, sistemin dinamik davranışı üzerinde bir etkisi bulunmaz. Böylece öteleme dönüşümü sonucu sistemin orijin noktası civarında sergilediği davranışın kararlı olması ihtimalinde ötelenmiş sistemin denge noktasının da kararlı olacağı açıktır.

3.5. DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN KARARLILIK TEOREMLERİ

Bu kısımda, ilk olarak kararlılık kavramı açıklanmış ve farklı kararlılık tipleri hakkında genel bilgiler verilmiştir. Daha sonra, doğrusal olmayan sistemlerin denge noktası analizinde sıkça kullanılan kararlılık teoremleri ifade edilmiş ve bu teoremler arasındaki matematiksel ilişkiler belirlenmiştir.

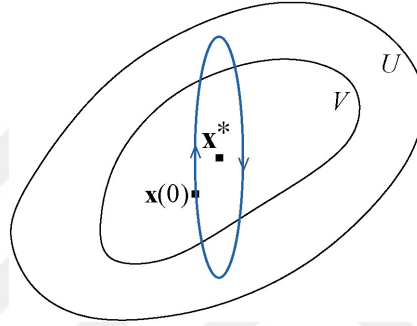
3.5.1. Kararlılık Kavramı

Genel olarak doğrusal veya doğrusal olmayan sistemlerin kararlılığı, sisteme ait çözüm yörüngelerinin denge noktasına gitmeye eğilimli olması veya denge noktasına yakınsaması şeklinde tanımlanabilir. Bu nedenle, en az bir denge noktasının var olması, sistemin kararlılığı için gerekli bir koşuldur ancak yeterli bir koşul değildir. Kararlılık durumunun sağlanabilmesi için sistemin denge noktası civarındaki dinamik davranışını belirleyen unsurların incelenmesi gerekmektedir. Bu husustaki gereksinimi karşılamak üzere literatürde doğrusal olmayan dinamik sistemlerin kararlılık derecelerini ve özelliklerini sınıflandıran birçok analiz yöntemi geliştirilmiştir. Ayrıca belirtmek gerekir ki, doğrusal olmayan sistemlerin kararlılığını analiz eden bu yöntemler doğrusal sistemler için de kullanılabilir.

Doğrusal olmayan sistemler için kararlılık derecelerine ve özelliklerine göre bazı kararlılık kavramları matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Kararlılık:

Doğrusal olmayan bir dinamik sistemin kararlı olması, sistemin çözüm yörüngelerinin, denge noktasının belli bir komşuluğunda kalması olarak tanımlanabilir. Her $t \geq 0$ için, x^* noktasının her U komşuluğunda, x^* 'ın $x(0) \in V$ ile başlayan her $x(t)$ çözümünün U içerisinde kaldığı bir $V \subseteq U$ komşuluğu bulunabilirse x^* denge noktası kararlıdır. Bu şekilde tanımlanan bir kararlılık için $x(t)$ 'ye ait yörüngelerin x^* denge noktasına yaklaşması gerekmez [36].



Şekil 3.1: Kararlılık [36]

Burada verilen kararlılık tanımına denk olarak;

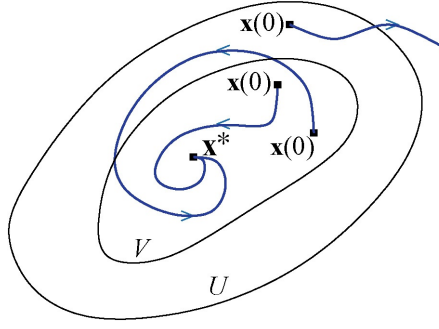
Nonlinear bir dinamik sistemin denge noktası x^* ve $t \geq 0$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki koşulu gerçekleyen bir δ var ise kararlıdır:

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \implies \|x(t) - x^*\| < \varepsilon \quad (3.7)$$

Bu bilgiler ışığında kararlı bir sistemdeki $x(t)$ çözüm yörüngelerinin, denge noktasının yakın komşuluğundaki bölgelerde olduğu sonucu çıkarılabilir. Bu şekilde sistemin, kararlılık koşulunu gerçekleyen birden fazla denge noktası var olabilir.

Asimtotik Kararlılık:

Bir x^* kararlı denge noktasının, her $x(0) \in V$ başlangıç koşulu için $t \rightarrow \infty$ iken $|x(t) - x^*| \rightarrow 0$ olacak şekilde bir V komşuluğu mevcutsa, x^* denge noktası asimtotik kararlıdır [36].



Şekil 3.2: Asimtotik Kararlılık [36]

Burada verilen kararlılık tanımına denk olarak;

x^* denge noktası için, aşağıdaki koşulu sağlayan bir $\delta > 0$ varsa, dinamik sistem asimtotik kararlıdır:

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^* \quad (3.8)$$

Bu koşul sağlandığında, uzun bir zaman limitinde sistemin çözüm yörüngelerinin başlangıç koşullarından bağımsız olarak tek bir denge noktasına yakınsadığı kesin bir ifadeyle söylenebilir. Buradan, asimtotik kararlılığın gerçekleştiği dinamik sistemlerde birden fazla denge noktasının bulunamayacağı kolayca görülebilir.

Üstel Kararlılık:

Bir x^* denge noktasının, bir V komşuluğu varsa ve bu komşulukta her $x(0) \in V$ için $t \rightarrow \infty$ 'a giderken $|x(t) - x^*| < e^{-\alpha t}$ eşitsizliğini gerçekleyen bir $\alpha > 0$ skaleri varsa üstel kararlıdır. Öte yandan, üstel kararlılık koşulunu gerçekleyen bir sistemin, asimtotik kararlılığı ve böylece kararlılığı da gerçeklediği söylenebilir.

Bu kısım içerisinde şimdiye kadar açıklanan kavramlar kararlılığın derecesini belirtmektedir. Bunun dışında kararlılık sınıflandırmaları da yapılabilir.

Global Kararlılık:

Lineerleştirme teoremine göre, birçok durumda doğrusal olmayan sistemlerin denge noktası civarındaki davranışları doğrusal sistemlerle benzerlik gösterir. Bunun yanında lineerleştirme işlemi basit değilse veya tek merkezi işaret ediyorsa bu durumda faydalı bir sonuç alınamaz

ve sadece belirli, lokal bir bölgede doğru sonuçları ifade eder. Bu duruma lokal kararlılık denir. Lokal kararlılık durumunda lokal minimuma yaklaşan birçok denge noktası olabilir. Bu ise optimizasyon gibi uygulamalarda istenen bir durum değildir. Bu durumun üstesinden gelebilmek adına sistemlerin global kararlı tek denge noktasına sahip biçimde tasarlanması gerekir. Sistemin global kararlılığı, her noktadaki çözümün lineer sistemi çağrıştırması yani her noktada kararlı olması anlamına gelir.

Robust Kararlılık:

Yapay sinir ağlarının donanımsal gerçeklemelerinde özellikle osilasyon, kararsızlık gibi istenmeyen dinamik davranışlara sebebiyet veren zaman gecikmelerinin olduğu görülmüştür. Bu nedenle, yapay sinir ağı modellerine, sistemin analizinden elde edilecek sonuçların uygulanabilirliğini sağlamak amacıyla zaman gecikmeleri eklenerek, bu gecikmelerin sistemin dinamik davranışı üzerindeki olumsuz etkisi dikkate alınır. Böylece gecikmeli sistemin analizi sonucunda elde edilen kararlılığı sağlayan koşullar gecikme parametresinden bağımsız olarak ifade edilebilir. Ancak yapay sinir ağlarının donanımsal gerçeklemeleri sırasında kararlılık özellikleri üzerinde olumsuz etkileri olabilecek bir başka faktör de her bir nöron için elektronik devre tasarımında yer alan direnç ve kapasite gibi elemanların tolerans değerlerinden, modelleme hatalarından ve gürültü gibi dış etkenlerden kaynaklanan ağ parametrelerindeki sapmalardır. Ağ parametrelerindeki sapmalar, yapay sinir ağının dinamik davranış özelliklerini tamamıyla değiştirebilir. Bu nedenle, yapay sinir ağlarının kararlılık analizi gerçekleştirilirken ağ parametrelerindeki değişimler matematiksel olarak tanımlanmalı ve bu değişimlerin sistemin dinamik davranışına etkisi incelenerek kararlılık koşulları bu parametre değişimlerinden etkilenmeyecek şekilde belirlenmelidir. Bu yaklaşımla ağ parametreleri üzerine bir takım kısıtlamalar getirilerek gerçekleştirilen kararlılık analizi robust kararlılık analizi olarak isimlendirilir.

Buraya kadar ifade edilen kararlılık özelliklerinin analizinde tercih edilen başlıca yöntemler aşağıdaki gibidir.

3.5.2. Lyapunov Kararlılık Teoremi (Lyapunov'un Direkt Metodu)

Doğrusal olmayan sistemlerdeki kararlılık genellikle, pozitif bir enerji fonksiyonu tanımlanarak, fonksiyonun zamana göre değişiminin analiz edildiği Lyapunov metoduyla karakterize edilmektedir.

Teorem 3.5.2.1 (Lyapunov'un Direkt Metodu) [37]

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ dinamik sisteminin denge noktası $x^* = 0$ olmak üzere, $V(x(t)) : R^m \rightarrow R$ pozitif tanımlı, sürekli ve türevlenebilir herhangi bir fonksiyon olarak tanımlansın. Bu durumda $V(x(t))$ fonksiyonunun zamana bağlı türevi aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{r=1}^m \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_r(t)} \dot{x}_r(t) = \sum_{r=1}^m \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_r(t)} f_r(x_r(t)) = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)} f(x(t)) \quad (3.9)$$

Lyapunov fonksiyonun $V(0) = 0$ ve $\forall x(t) \neq 0, V(x(t)) > 0$ ile ifade edilen pozitif tanımlılık koşuluna ek olarak,

- $\forall x(t) \in R^m$ için $\dot{V}(x) \leq 0$ ise $x^* = 0$ denge noktası kararlıdır.
- $\forall x(t) \in R^m - \{0\}$ için $\dot{V}(x) < 0$ ise $x^* = 0$ denge noktası asimtotik kararlıdır.
- $\forall x(t) \in R^m - \{0\}$ için $\dot{V}(x) > 0$ ise $x^* = 0$ denge noktası kararsızdır.

Bu metodun doğrusal olmayan sistemlerin kararlılık analizinde sağladığı en önemli avantaj, denge noktasına ait kararlılık özelliklerini sadece enerji değişimi ile karakterize ederek, sisteme ait diferansiyel denklemleri çözmeden belirlememizi sağlamasıdır. Ancak literatürde her durumda uygun bir Lyapunov fonksiyonunun bulunması için henüz geçerli bir yöntem bulunmamaktadır. Bu nedenle Lyapunov yöntemi ile sistemin kararlılığı, ancak uygun bir Lyapunov fonksiyonu bulunabildiğinde belirlenebilir. Fakat, uygun bir Lyapunov fonksiyonu bulunamaz ise bu durum, incelenen dinamik sistemin kararsız olduğunu göstermez.

3.5.3. Lyapunov'un Dolaylı Metodu
Teorem 3.5.3.1 (Lyapunov'un Dolaylı Metodu)[37]:

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ dinamik sistemi için D kümesi $x^* = 0$ denge noktasının bir komşuluğu olmak üzere, $f : D \rightarrow R^m$ tanımlı, sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $\dot{x}(t) = f(x(t))$ sisteminin Jacobian matrisi,

$$A = \left. \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} \right|_{x=0} \quad (3.10)$$

formunda tanımlansın. Bu durumda,

- A matrisinin tüm özdeğerleri için $Re(\lambda_r) < 0$ ise orijin noktası ya da başka bir değişle sistemin denge noktası asimtotik karardır.
- A matrisinin tüm özdeğerleri için $Re(\lambda_r) > 0$ ise orijin noktası ya da başka bir değişle sistemin denge noktası kararsızdır.

3.5.4. Barbashin-Krasovskii Teoremi

Teorem 3.5.4.1 (Barbashin-Krasovskii)[37]:

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ dinamik sistemi için $x^* = 0$ denge noktası olmak üzere, $V(x(t)) : R^m \rightarrow R$, sürekli, türevlenebilir ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun.

$$V(0) = 0 \text{ ve } V(x(t)) > 0, \quad \forall x(t) \neq 0$$

$$\dot{V}(x(t)) < 0, \quad \forall x(t) \neq 0$$

$$\|x(t)\| \rightarrow \infty \implies V(x(t)) \rightarrow \infty$$

Bu koşullar altında $x = 0$ denge noktası global asimtotik karardır.

3.5.5. Hurwitz Kararlılık Teoremi

Teorem 3.5.5.1 (Hurwitz)[37]:

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ dinamik sisteminin denge noktası $x^* = 0$ olmak üzere, sistemin denge noktası civarında doğrusallaştırılmış modeli, aşağıdaki $\dot{x} = f(x)$ sisteminin Jacobian'ı ile gösterilsin :

$$A = \left. \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} \right|_{x=0} \quad (3.11)$$

- $\dot{x}(t) = f(x(t))$ sisteminin denge noktası, A matrisinin tüm özdeğerleri için $Re(\lambda_r) \leq 0$ sağlanıyorsa karardır.
- $\dot{x}(t) = f(x(t))$ sisteminin denge noktası, A matrisinin tüm özdeğerleri için $Re(\lambda_r) < 0$ sağlanıyorsa asimtotik karardır. Ayrıca bu durumda A matrisi kararlılık matrisi ya da "Hurwitz matrisi" olarak adlandırılır.

- $\dot{x}(t) = f(x(t))$ sisteminin denge noktası, A matrisinin en az bir özdeğeri için $Re(\lambda_r) > 0$ sağlanıyorsa kararsızdır.

Aslında 3.5.2 ve 3.5.5 numaralı teoremler $\dot{x}(t) = f(x(t))$ ile tanımlanan dinamik sistem için özdeş asimtotik kararlılık sonucunu ifade eder. Bu teoremler arasındaki ilişkiyi kurmak için aşağıdaki gibi bir Lyapunov fonksiyonu tanımlayalım :

$$V(x) = x^T P x \quad (3.12)$$

P burada simetrik ve reel değerli bir pozitif tanımlı matris olsun. O halde, $V(x)$ fonksiyonunun türevi kuadratik formda aşağıdaki gibi ifade edilebilir :

$$\dot{V}(x) = x^T [PA + A^T P] x = -x^T W x \quad (3.13)$$

Burada W simetrik matris olup aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır :

$$-W = PA + A^T P \quad (3.14)$$

Bu bilgiler ışığında her W pozitif tanımlı matrisine karşılık, (3.14) denklemini gerçekleyen pozitif tanımlı bir P matrisi bulunabiliyorsa, A matrisi kararlılık matrisi olarak tanımlanır. Bu durumda Lyapunov kararlılık teoreminden hareketle, $\dot{x} = f(x)$ sisteminin denge noktasının asimtotik kararlı olduğunu söyleyebiliriz, yani, A matrisine ait özdeğerlerin reel kısımları negatif olur.

3.5.6. LaSalle'nin Değişmezlik İlkesi

LaSalle'nin değişmezlik ilkesi, Lyapunov kararlılık teoreminin genel bir ifadesi olup denge noktalarının lokal ve global asimtotik kararlılığı ile alakalıdır.

Teorem 3.5.6.1 (LaSalle'nin Değişmezlik İlkesi)[37]:

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ dinamik sistemi için $x^* = 0$ bir denge noktası olmak üzere, $V(x(t)) : \Omega \rightarrow R$, Ω kümesi üzerinde $\dot{V}(x(t)) < 0$ olacak şekilde ve denge noktasının Ω komşuluğunda sürekli, türevlenebilen pozitif tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki şekilde bir S kümesi tanımlayalım.

$$S = \{x(t) \in \Omega \mid \dot{V}(x(t)) = 0\}$$

Bu küme içerisinde $t \rightarrow \infty$ için kalan çözüm sadece orijin noktası ise, orijin sistemin tek denge noktasıdır ve asimtotik karardır.

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ dinamik sistemi için $x^* = 0$ bir denge noktası olmak üzere, $V(x(t)) : R^m \rightarrow R$, her $x(t) \in R^m$ için $\dot{V}(x) < 0$ ve $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ iken $V(x(t)) \rightarrow \infty$ koşullarını gerçekleyen sürekli, türevlenebilen ve pozitif değerler alan bir fonksiyon olarak tanımlansın. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki şekilde bir S kümesi tanımlayalım.

$$S = \{x(t) \in R^m \mid \dot{V}(x(t)) = 0\}$$

Bu küme içerisinde $t \rightarrow \infty$ için kalan çözüm sadece orijin noktası ise, orijin sistemin tek denge noktası olup global asimtotik karardır.

LaSalle değişmezlik ilkesinin, Lyapunov kararlılık teoreminde ifade edilen $V(x(t))$ fonksiyonunun pozitif tanımlı olma şartını sağlaması gerekmez. Öte yandan, pozitif tanımlı fonksiyonlarda radyal sınırsızlığın kontrolü daha kolaydır. Ancak fonksiyonun pozitif olmadığı durumlarda radyal sınırsızlığın gerçekleştirilmesi mümkün olamayabilir. Örneğin, aşağıda tanımlanan fonksiyonu düşünebiliriz:

$$V(x(t)) = (x_1(t) - x_2(t))^2 \quad (3.15)$$

Bu durumda $x_1(t) = x_2(t)$ seçilirse $V(x(t)) = 0$ olur. Yani, $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ olsa bile, $V(x(t))$ sonsuza gitmediğinden radyal sınırsızlık koşulu sağlanmaz.

Burada önemle ifade edilmelidir ki, $\dot{x} = f(x)$ 'in denge noktası lokal veya global asimtotik kararlıysa, bu sistemde bir denge noktası olması zorunludur. Bu sebeple, birden fazla denge noktasına sahip olan sistemlerde asimtotik kararlılık koşulu gerçekleştirilemez. Ayrıca denge noktasının lokal olarak asimtotik kararlı olması, bu noktanın global asimtotik kararlı olması için gerekli bir koşuldur. Öte yandan $\dot{x}(t) = f(x(t))$ sisteminin denge noktası kararlı, ancak asimtotik kararlı değilse, bu nokta sisteme ait tek denge noktası olmayabilir. Böyle bir durumda, sistem çözümleri başlangıç koşullarına bağlı olarak kararlı olan denge noktalarından herhangi birine yakınsayabilir.

4. ZAMAN GECİKMELİ COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞLARININ ROBUST KARARLILIK ANALİZİ

Bu tez çalışmasının temelini oluşturan zaman gecikmeli Cohen-Grossberg yapay sinir ağları için m adet nörona karşılık m^2 adet gecikme parametresi var ise bu modele çoklu zaman gecikmeli Cohen-Grossberg yapay sinir ağı adı verilir ve aşağıda verilen diferansiyel denklemlerle temsil edilir:

$$\dot{x}_r(t) = d_r(x_r(t)) \left(-c_r(x_r(t)) + \sum_{s=1}^m a_{rs} f_s(x_s(t)) \right) + \sum_{s=1}^m b_{rs} f_s(x_s(t - \tau_{rs})) + u_r, \quad r = 1, \dots, m \quad (4.1)$$

Burada m sistemin içerdiği nöron sayısını, $x_r(t)$ r . nöronun durum değişkenini, $d_r(x(t))$ r . nöronun yakınsama hızı için kullanılan kuvvetlendirici fonksiyonunu, $c_r(x(t))$ r . nöronun davranış fonksiyonunu, a_{rs} ve b_{rs} sırasıyla zaman gecikmesiz ve gecikmeli nöron bağlantı katsayılarını, $f_s(x_s(t))$ s . nöronun durumu ile çıkışı arasındaki ilişkiyi ifade eden nöron aktivasyonunu, τ_{rs} r . ve s . nöronlar arasındaki zaman gecikmesini, u_r ise r . nöron için giriş değerlerini göstermektedir.

(4.1) ile tanımlanan çoklu zaman gecikmeli Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının kararlılık analizini gerçekleştirmek için $d_r(x_r(t))$, $c_r(x_r(t))$ ve $f_r(x_r(t))$ fonksiyonlarının karakteristik özelliklerini belirlememiz gerekir. Tez kapsamında bu fonksiyonların aşağıda verilen özellikleri sağladığı varsayılmıştır:

A_1 : $d_r(x_r(t))$ kuvvetlendirici fonksiyonları sürekli, sınırlı ve pozitifdir. Bu nedenle

$$0 < \mu_r \leq d_r(x_r(t)) \leq \rho_r \quad \forall x_r \in R, \quad r = 1, 2, \dots, m.$$

koşulunu sağlayan μ_r ve ρ_r pozitif sabitleri vardır.

A_2 : $c_r(x_r(t))$ davranış fonksiyonları süreklidir ve

$$\frac{c_r(x_r(t)) - c_r(y_r(t))}{x_r(t) - y_r(t)} \geq \gamma_r > 0 \quad \forall x_r, y_r \in R, \quad x_r \neq y_r, \quad r = 1, 2, \dots, m.$$

koşulunu sağlayan γ_r sabitleri vardır.

A_3 : $f_r(x_r(t))$ aktivasyon fonksiyonları sınırlı bir eğim ile monoton artandır. Yani,

$$0 \leq \frac{f_r(x_r(t)) - f_r(y_r(t))}{x_r(t) - y_r(t)} \leq k_r \quad \forall x_r, y_r \in R, \quad x_r \neq y_r, \quad r = 1, 2, \dots, m.$$

koşulunu sağlayan k_r sabitleri vardır.

Bu varsayımlara ek olarak, (4.1) de verilen çoklu zaman gecikmesine sahip yapay sinir ağlarının kararlılık analizinde elde edilecek sonuçların robust nitelikte olabilmesi için sistem parametrelerindeki değişimlerin alt ve üst sınırlarının matematiksel olarak tanımlanması gereklidir. Bu bilgiler doğrultusunda, Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelinde yer alan $A = (a_{rs})_{m \times m}$ ve $B = (b_{rs})_{m \times m}$ matrislerindeki parametre değişimlerinin aşağıda tanımlanan aralıklar içerisinde kaldığını varsayacağız.

$$\begin{aligned} A_I = [\underline{A}, \overline{A}] &= \{A = (a_{rs})_{m \times m} : \underline{a_{rs}} \leq a_{rs} \leq \overline{a_{rs}}, \quad r, s = 1, 2, \dots, m\} \\ B_I = [\underline{B}, \overline{B}] &= \{B = (b_{rs})_{m \times m} : \underline{b_{rs}} \leq b_{rs} \leq \overline{b_{rs}}, \quad r, s = 1, 2, \dots, m\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

(4.1)'de $d_r(x_r(t)) = 1$ ve $c_r(x_r(t)) = c_r x_r(t)$, alınırsa sistem Hopfield yapay sinir ağı modeline dönüşür ve aşağıdaki formda ifade edilir:

$$\dot{x}_r(t) = -c_r x_r(t) + \sum_{s=1}^m a_{rs} f_s(x_s(t)) + \sum_{s=1}^m b_{rs} f_s(x_s(t - \tau_{rs})) + u_r \quad (4.3)$$

Burada $c_1, c_2, \dots, c_m$ pozitif sabitleri göstermektedir. Hopfield yapay sinir ağı modelindeki $A = (a_{rs})_{m \times m}$, $B = (b_{rs})_{m \times m}$ ve $C = \text{diag}(c_i > 0)_{m \times m}$ sistem parametreleri için alt ve üst sınırlar ise aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} C_I = [\underline{C}, \overline{C}] &= \{C = \text{diag}(c_r > 0)_{m \times m} : 0 < \underline{c_r} \leq c_r \leq \overline{c_r}, \quad r = 1, 2, \dots, m\} \\ A_I = [\underline{A}, \overline{A}] &= \{A = (a_{rs})_{m \times m} : \underline{a_{rs}} \leq a_{rs} \leq \overline{a_{rs}}, \quad r, s = 1, 2, \dots, m\} \\ B_I = [\underline{B}, \overline{B}] &= \{B = (b_{rs})_{m \times m} : \underline{b_{rs}} \leq b_{rs} \leq \overline{b_{rs}}, \quad r, s = 1, 2, \dots, m\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Yukarıdaki bilgiler ışığında, (4.1) ve (4.3) sistemlerinin robust kararlılığı için aşağıdaki genel tanımlar yapılabilmektedir.

Tanım 4.1 [38]:

(4.1) dinamik sistemiyle tanımlanan yapay sinir ağının denge noktası $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)^T$ tüm $A \in A_I$ ve $B \in B_I$ parametreleri için global asimtotik kararlı ise bu yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır [38].

Tanım 4.2 [38]:

(4.3) dinamik sistemiyle tanımlanan yapay sinir ağının denge noktası $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)^T$ tüm $A \in A_I, B \in B_I$ ve $C \in C_I$ parametreleri için global asimtotik kararlı ise bu yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır [38].

Teorem 4.3 [33]:

A reel değerli matrisindeki parametre değişimleri için izin verilen alt ve üst sınırlar aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$A \in A_I = [\underline{A}, \bar{A}] = \{A = (a_{rs})_{m \times m} : \underline{a}_{rs} \leq a_{rs} \leq \bar{a}_{rs}, \quad r, s = 1, 2, \dots, m\}$$

O halde, her pozitif $P = \text{diag}(p_r > 0)$ ve her $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in R^m$ için aşağıda ifade edilen eşitsizlik gerçekleşir:

$$x^T (PA + A^T P)x \leq - \sum_{r=1}^m \alpha_r x_r^2 \quad (4.5)$$

Burada, $v_{rr} = -2p_r \bar{a}_{rr}$ ve $r \neq s$ için $v_{rs} = -\max(|p_r \bar{a}_{rs} + p_s \bar{a}_{sr}|, |p_r \underline{a}_{rs} + p_s \underline{a}_{sr}|)$ olmak üzere;

$$\alpha_r = \sum_{s=1}^m v_{rs} \quad r = 1, 2, \dots, m. \quad (4.6)$$

olarak tanımlanmıştır.

4.1. ZAMAN GECİKMELİ COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞININ DENGİ NOKTASININ VARLIK VE TEKLİK ANALİZİ

Bu kısımda, (4.1) ile tanımlanmış gecikme parametrelili Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelinin A_1, A_2, A_3 varsayımlarını gerçeklediği ve (4.2) ile tanımlanan ağı belirsizliklerini karşıladığı durumda denge noktasının varlığını ve tekliliğini garantileyen yeni bir yeterli koşul sunulacaktır. Doğrudan sonuçları elde etmeye başlamadan önce, bu minval üzere temel oluşturacak bazı tanım ve kurallardan bahsetmemiz gerekecektir.

Tanım 4.1.1 [39]:

C^0 kümesine ait ve $H : R^m \rightarrow R^m$ tanımlı bir H operatörünün kendi üzerinde homeomorfizm olması için H operatörünün birebir ve örten olması ve tersi H^{-1} 'in de C^0 kümesine ait olması gerekir [39].

Kural 4.1.2 [39]:

C^0 kümesine ait ve tersi alınabilir $H : R^m \rightarrow R^m$ operatörünün homeomorfizm olması için aşağıdaki radyal sınırsızlık koşulunu sağlaması yeterlidir [39]:

$$\|x\| \rightarrow \infty \text{ iken } \|H(x)\| \rightarrow \infty$$

Kural 4.1.3 [39]:

$H : R^m \rightarrow R^m$ tanımlanmış bir operatör olsun. $H \in C^1$ ise ve her $x \neq y$ için $H(x) \neq H(y)$ koşulu sağlanıyorsa H operatörünün tersi mevcuttur ve $H^{-1} \in C^1$ 'dir [39].

(4.1) ile verilen yapay sinir ağı modelinde $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)^T$ denge noktası olarak tanımlansın. Bu durumda x^* aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$D(x^*)[-C(x^*) + Af(x^*) + Bf(x^*) + u] = 0 \quad (4.7)$$

$D(x^*)$ pozitif diyagonal bir matris olduğu için, (4.7) eşitliğini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$-C(x^*) + Af(x^*) + Bf(x^*) + u = 0 \quad (4.8)$$

Ayrıca $H(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x))^T$ olmak üzere,

$$h_r(x) = -c_r(x_r) + \sum_{s=1}^m a_{rs}f_s(x_s) + \sum_{s=1}^m b_{rs}f_s(x_s) + u_r = 0, \quad r = 1, 2, \dots, m.$$

operatörünü göz önüne alalım. Bu denklemler matris-vektör formunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$H(x) = -C(x) + Af(x) + Bf(x) + u = 0 \quad (4.9)$$

Buradan açıkça görüldüğü üzere, (4.8) denkleminin çözümü, (4.9) eşitliğinin denge noktasıdır. Bu nedenle, (4.1) ile ifade edilen sistemin her u sabit girdisine karşın tek denge noktası olabilmesi için, $H(x)$ 'in R^m üzerinde bir homeomorfizm olması gerekir.

Yukarıda ifade edilen sonuçlardan aşağıdaki kural tanımı yapılabilmektedir.

Kural 4.1.4 [39]:

(4.1) ile ifade edilen yapay sinir ağı modelinin en az bir denge noktasının var olması ve bu denge noktasının tek olması için $H(x) = -C(x) + Af(x) + Bf(x) + u = 0$ ile tanımlanan operatörün aşağıda verilen iki şartı sağlaması gerekir [39]:

- $x, y \in R^m, \forall x \neq y$ için $H(x) \neq H(y)$,
- $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$

Bu koşullardan birincisi denge noktasının tekliğini, ikincisi ise denge noktasının varlığını göstermek amacıyla kullanılmaktadır. Genel olarak, aktivasyon fonksiyonları üzerine getirilen varsayımlara göre, her $x \neq y$ vektörleri için iki farklı durum bulunmaktadır :

- $x \neq y$ ve $f(x) - f(y) \neq 0$,
- $x \neq y$ ve $f(x) - f(y) = 0$.

Bu durumlar sırasıyla aktivasyon fonksiyonlarının birebir oldukları ve olmadıkları koşulları ifade eder. Böylece (4.1) ile tanımlanan yapay sinir ağının denge noktasının varlığını ve tekliğini analiz etmek için ihtiyaç duyduğumuz temel araçlara artık sahip durumdayız.

Teorem 4.1.5 [40]: (4.1) ile tanımlanmış yapay sinir ağı modeli için A_1, A_2, A_3 varsayımları sağlansın ve sistemin (4.2) ile tanımlanan ağ belirsizliklerini karşıladığı varsayılın. Burada $\hat{b}_{rs} = \max\{|\underline{b}_{rs}|, |\bar{b}_{rs}|\}$, $v_{rr} = -2p_r \bar{a}_{rr}$, $v_{rs} = -\max\{|p_r \bar{a}_{rs} + p_s \bar{a}_{sr}|, |p_r \underline{a}_{rs} + p_s \underline{a}_{sr}|\}$ ve $0 \leq \sigma \leq 1$ olmak üzere;

$$\zeta_r = 2 \frac{p_r \gamma_r}{k_r} + \sum_{s=1}^m v_{rs} - (1 - \sigma) \sum_{s=1}^m (\varepsilon p_r \hat{b}_{rs} + \frac{1}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr}) - \sigma (m p_r \eta + \frac{1}{\eta} \sum_{s=1}^m p_s \hat{b}_{sr}^2) > 0, r = 1, \dots, m$$

koşulunu gerçekleyen bir diyagonal $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_m) > 0$ pozitif matrisi ile ε ve η pozitif sabitleri mevcutsa, (4.1) ile tanımlanmış Cohen-Grossberg sinir ağı için her u sabit girdisine karşılık bir denge noktası vardır ve tektir.

İspat:

(4.1) sisteminin denge noktasının varlığını ve tekliğini ispat etmek için aşağıdaki operatör kullanılacaktır:

$$H(x) = -C(x) + Af(x) + Bf(x) + u = 0 \quad (4.10)$$

Daha önceden belirtildiği üzere $H(x) = 0$ denkleminde ait her çözüm (4.1) sisteminin denge noktasıdır. Bu bilgiler ışığında (4.1) için tanımlanan operatörün Kural 4.1.4 [39]'teki koşulları gerçeklediğini göstereceğiz.

Öncelikle $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in R^m$ vektörleri için, (4.10) ile tanımlanmış $H(x)$ operatörü kullanılarak aşağıdaki denklem sistemi yazılabilir:

$$H(x) - H(y) = -(C(x) - C(y)) + A(f(x) - f(y)) + B(f(x) - f(y)) \quad (4.11)$$

Bu ifade A_3 varsayımı altında, içerdiği aktivasyon fonksiyonlarının birebir olup olmamasına göre iki durumda incelenir. İlk olarak $x \neq y$ için $f(x) - f(y) = 0$ durumu göz önüne alınırsa, (4.11) denklem sistemi aşağıdaki formda yazılabilir:

$$H(x) - H(y) = -(C(x) - C(y)) \quad (4.12)$$

A_2 varsayımı altında, $x \neq y$ için $C(x) \neq C(y)$ olduğu aşıkardır. Böylece $H(x) \neq H(y)$ durumu gerçekleşir. Ayrıca (4.12) denkleminde $y = 0$ alındığında aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$H(x) - H(0) = -(C(x) - C(0)) \quad (4.13)$$

Bu durumda eşitliğin her iki tarafındaki terimlerin 1.normu alınırsa,

$$\begin{aligned} \|H(x) - H(0)\|_1 &= \|C(x) - C(0)\|_1 = \sum_{r=1}^m |c_r(x) - c_r(0)| \\ &\geq \sum_{r=1}^m \gamma_r |x_r| \geq \gamma_\mu \sum_{r=1}^m |x_r| = \gamma_\mu \|x\|_1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, $\gamma_\mu = \min\{\gamma_r\}$ 'dir. Standart norm özellikleri kullanılarak (4.14)'ten aşağıdaki eşitsizlik türetilir:

$$\|H(x)\|_1 \geq \gamma_\mu \|x\|_1 - \|H(0)\|_1 \quad (4.15)$$

Bu ifadede $\|H(0)\|_1$ teriminin sabit bir değer olmasından dolayı $\|x\| \rightarrow \infty$ için $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ radyal sınırsızlık koşulu sağlanmış olur. Böylece $x \neq y$ ve $f(x) - f(y) = 0$ durumu için denge noktasının varlığı ve tekliği analiz edilmiştir.

Şimdi ise $x \neq y$ ve $f(x) - f(y) \neq 0$ durumunu inceleyelim. $P = \text{diag}(p_r > 0)$ pozitif tanımlı diyagonal matris olmak üzere, (4.11) denkleminin iki tarafı da $2(Pf(x) - f(y))^T$ ile çarpılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} 2[P(f(x) - f(y))]^T [H(x) - H(y)] &= -2[f(x) - f(y)]^T P [C(x) - C(y)] \\ &\quad + 2[f(x) - f(y)]^T P A [f(x) - f(y)] \\ &\quad + 2[f(x) - f(y)]^T P B [f(x) - f(y)] \\ &= -2[f(x) - f(y)]^T P [C(x) - C(y)] \\ &\quad + [f(x) - f(y)]^T (P A + A^T P) [f(x) - f(y)] \\ &\quad + 2[f(x) - f(y)]^T P B [f(x) - f(y)] \end{aligned} \quad (4.16)$$

(4.16) denklemindeki terimler için A_2 ve A_3 varsayımları altında, aşağıdaki eşitsizlikler gerçekleşir:

$$\begin{aligned} -2(f(x) - f(y))^T P(C(x) - C(y)) &= -2 \sum_{r=1}^m p_r (f_r(x_r) - f_r(y_r)) (c_r(x_r) - c_r(y_r)) \\ &= -2 \sum_{r=1}^m p_r |f_r(x_r) - f_r(y_r)| |c_r(x_r) - c_r(y_r)| \\ &\leq -2 \sum_{r=1}^m p_r \gamma_r |f_r(x_r) - f_r(y_r)| |x_r - y_r| \\ &\leq -2 \sum_{r=1}^m \frac{p_r \gamma_r}{k_r} (f_r(x_r) - f_r(y_r))^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Teorem 4.3'te [33] gösterildiği üzere aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$f(x) - f(y)^T (PA + A^T P)(f(x) - f(y)) \leq - \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m v_{rs} (f_r(x_r) - f_r(y_r))^2 \quad (4.18)$$

Burada $v_{rr} = -2p_r \bar{a}_{rr}$ ve her $r \neq s$ için $v_{rs} = -\max\{|p_r \bar{a}_{rs} + p_s \bar{a}_{sr}|, |p_r \underline{a}_{rs} + p_s \underline{a}_{sr}|\}$ dir.

Ayrıca $0 \leq \sigma \leq 1$ olmak üzere, elde edilecek sonuç için büyük önem taşıyan aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} 2(f(x) - f(y))^T PB(f(x) - f(y)) &= \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m 2p_r b_{rs} (f_r(x_r) - f_r(y_r))(f_s(x_s) - f_s(y_s)) \\ &= (1 - \sigma) \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m 2p_r b_{rs} (f_r(x_r) - f_r(y_r))(f_s(x_s) - f_s(y_s)) \\ &\quad + \sigma \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m 2p_r b_{rs} (f_r(x_r) - f_r(y_r))(f_s(x_s) - f_s(y_s)) \\ &\leq (1 - \sigma) \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \varepsilon p_r b_{rs} (f_r(x_r) - f_r(y_r))^2 \\ &\quad + (1 - \sigma) \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{1}{\varepsilon} p_r b_{rs} (f_s(x_s) - f_s(y_s))^2 \\ &\quad + \sigma \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m p_r \eta (f_r(x_r) - f_r(y_r))^2 \\ &\quad + \sigma \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{1}{\eta} b_{rs}^2 p_r (f_s(x_s) - f_s(y_s))^2 \\ &\leq (1 - \sigma) \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m (\varepsilon p_r \hat{b}_{rs} + \frac{1}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr}) (f_r(x_r) - f_r(y_r))^2 \\ &\quad + \sigma \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m (p_r \eta + \frac{1}{\eta} p_s \hat{b}_{sr}^2) (f_r(x_r) - f_r(y_r))^2 \\ &= (1 - \sigma) \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m (\varepsilon p_r \hat{b}_{rs} + \frac{1}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr}) (f_r(x_r) - f_r(y_r))^2 \\ &\quad + \sigma \sum_{r=1}^m (m p_r \eta + \frac{1}{\eta} \sum_{s=1}^m p_s \hat{b}_{sr}^2) (f_r(x_r) - f_r(y_r))^2 \quad (4.19) \end{aligned}$$

Burada ε ve η pozitif sabitlerdir. (4.17)-(4.19) eşitsizliklerinden elde edilen terimler (4.16)'da yerine yazılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
2(f(x) - f(y))^T P(H(x) - H(y)) &\leq -2 \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{p_r \gamma_r}{k_r} (f_r(x_r) - f_r(y_r))^2 \\
&\quad - \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m v_{rs} (f_r(x_r) - f_r(y_r))^2 \\
&\quad + (1 - \sigma) \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m (\varepsilon p_r \hat{b}_{rs} + \frac{1}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr}) (f_r(x_r) - f_r(y_r))^2 \\
&\quad + \sigma \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m (p_r \eta + \frac{1}{\eta} p_s \hat{b}_{sr}^2) (f_r(x_r) - f_r(y_r))^2 \\
&= - \sum_{r=1}^m \left(2 \frac{p_r \gamma_r}{k_r} + \sum_{s=1}^m v_{rs} - (1 - \sigma) \sum_{s=1}^m (\varepsilon p_r \hat{b}_{rs} + \frac{1}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr}) \right. \\
&\quad \left. - \sigma (m p_r \eta + \frac{1}{\eta} \sum_{s=1}^m p_s \hat{b}_{sr}^2) \right) (f_r(x_r) - f_r(y_r))^2 \\
&= - \sum_{r=1}^m \zeta_r (f_r(x_r) - f_r(y_r))^2 \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Burada $\zeta_\mu = \min\{\zeta_r\}$ alınırsa (4.20) eşitsizliği,

$$2(f(x) - f(y))^T P(H(x) - H(y)) \leq -\zeta_\mu (f(x) - f(y))^T (f(x) - f(y)) \tag{4.21}$$

ile ifade edilebilir. Bu durumda eşitsizliğin her iki tarafındaki terimlerin ikinci normu alınarak,

$$2\|f(x) - f(y)\|_2 \|P\|_2 \|H(x) - H(y)\|_2 \geq \zeta_\mu \|f(x) - f(y)\|_2^2 \tag{4.22}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadedeki terimler için gerekli sadeleştirmeler yapıldığında aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$2\|P\|_2 \|H(x) - H(y)\|_2 \geq \zeta_\mu \|f(x) - f(y)\|_2 \tag{4.23}$$

$\|P\|_2 \neq 0$ olduğundan $f(x) \neq f(y)$ direkt olarak $H(x) \neq H(y)$ sonucunu verir. Ayrıca bu eşitsizlikte $y = 0$ alınırsa, (4.23) aşağıdaki gibi tek değişkene bağlı olarak yazılabilir.

$$2\|P\|_2\|H(x) - H(0)\|_2 \geq \zeta_\mu\|f(x) - f(0)\|_2 \quad (4.24)$$

Son olarak standart norm özelliklerinden yararlanılarak, (4.24) eşitsizliğinden aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\|H(x)\|_2 \geq \frac{\zeta_\mu(\|f(x)\|_2 - \|f(0)\|_2)}{2\|P\|_2} - \|H(0)\|_2 \quad (4.25)$$

Burada $\|H(0)\|_2, \|f(0)\|_2$ ve $\|P\|_2$ ifadelerinin sabit değerler olduklarına dikkat edilmelidir. A_3 varsayımı nedeniyle $\|x\|_2 \rightarrow \infty$ iken $\|f(x)\|_2 \rightarrow \infty$ gerçekleşir. Bu durumda (4.25)'te $\|x\|_2 \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\|_2 \rightarrow \infty$ koşulu da sağlanmış olur. Böylece A_3 varsayımı altındaki birebir ve birebir olmayan tüm aktivasyon fonksiyonları için denge noktasının varlığı ve tekliği analiz edilmiştir. Bu bilgiler ışığında, $H(x) : R^m \rightarrow R^m$, tanımlanmış operatörün bir homeomorfizm olduğunu ifade edebiliriz. Bu bizi, Teorem 4.1.5 [40]'da belirtilen varsayımlar altında, (4.1) ile gösterilen gecikmeli Cohen-Grossberg sinir ağı için, her sabit girdiye karşılık tek bir denge noktası olduğu sonucuna götürür.

4.2. ZAMAN GECİKMELİ COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞININ DENGİ NOKTASININ ROBUST KARARLILIK ANALİZİ

Bu kısımda, (4.1) ile tanımlanmış gecikmeli Cohen-Grossberg yapay sinir ağının A_1, A_2, A_3 varsayımları ve (4.2) ile ifade edilen parametre belirsizlikleri altında robust kararlılık analizi gerçekleştirilecektir. Bu tez kapsamında doğrudan (4.1) sisteminin dengi noktasını analiz etmek yerine, matematiksel işlemlerin daha sade formda ifade edilebilmesi için dengi noktasını orijine öteleyeceğiz. Yapılacak öteleme dönüşümünün sistemin dinamik davranışına herhangi bir etkisi bulunmadığından kararlılık analizi için bir sorun teşkil etmeyecektir.

Buna göre, (4.1) sisteminin dengi noktasını $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$ olarak tanımlayalım. Burada $z_r(\cdot) = x_r(\cdot) - x_r^*$, $r = 1, 2, \dots, m$ dönüşümü yapılarak, dengi noktası orijine ötelenebilir. Bu dönüşümden sonra $\dot{z}_r(\cdot)$ aşağıdaki şekilde türetilir :

$$\dot{z}_r(t) = \alpha_r(z_r(t)) \left(-\beta_r(z_r(t)) + \sum_{s=1}^m a_{rs} g_s(z_s(t)) \right) + \sum_{s=1}^m b_{rs} g_s(z_s(t - \tau_{rs})) \quad (4.26)$$

Burada,

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t))^T, \quad \alpha(z(t)) = \text{diag}(\alpha_1(z_1(t)), \alpha_2(z_2(t)), \dots, \alpha_m(z_m(t)))$$

$$A = (a_{rs})_{m \times m}, \quad B = (b_{rs})_{m \times m}, \quad \beta(z(t)) = (\beta_1(z_1(t)), \beta_2(z_2(t)), \dots, \beta_m(z_m(t)))^T$$

olmak üzere dönüştürülmüş (4.26) sistemi için aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \alpha_r(z_r(t)) &= d_r(z_r(t) + x_r^*), \quad r = 1, 2, \dots, m, \\ \beta_r(z_r(t)) &= c_r(z_r(t) + x_r^*) - c_r(x_r^*), \quad r = 1, 2, \dots, m, \\ g_r(z_r(t)) &= f_r(z_r(t) + x_r^*) - f_r(x_r^*), \quad r = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

A_1, A_2 ve A_3 varsayımlarının özelliklerinden yola çıkarak, (4.26) dönüştürülmüş sistem parametreleri için aşağıdaki varsayımları ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 : 0 < \mu_r &\leq \alpha_r(z_r(t)) \leq \rho_r, \quad r = 1, 2, \dots, m, \\ \tilde{A}_2 : z_r(t) \beta_r(z_r(t)) &\geq \gamma_r z_r^2(t), \quad r = 1, 2, \dots, m, \\ \tilde{A}_3 : |g_r(z_r(t))| &\leq k_r |z_r(t)|, \quad z_r(t) g_r(z_r(t)) \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Burada g_r fonksiyonunun f_r üstündeki tüm varsayımları gerçeklediği açıktır. Böylece (4.1) sistemine ait denge noktasının kararlılığını analizini etmektense, (4.26) ile tanımlanan dönüştürülmüş sistemin orijininin kararlılık analizini gerçekleştirmek aynı anlama gelecektir.

Teorem 4.2.1 [40] : (4.26) ile tanımlanmış yapay sinir ağı modeli için $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ varsayımları sağlansın ve sistemin (4.27) ile tanımlanan ağ belirsizliklerini karşıladığı varsayılsın. Burada $\hat{b}_{rs} = \max\{|\underline{b}_{rs}|, |\bar{b}_{rs}|\}$, $v_{rr} = -2p_r \bar{a}_{rr}$, $v_{rs} = -\max\{|p_r \bar{a}_{rs} + p_s \bar{a}_{sr}|, |p_r \underline{a}_{rs} + p_s \underline{a}_{sr}|\}$ ve $0 \leq \sigma \leq 1$, olmak üzere;

$$\zeta_r = 2\frac{p_r \gamma_r}{k_r} + \sum_{s=1}^m v_{rs} - (1 - \sigma) \sum_{s=1}^m (\varepsilon p_r \hat{b}_{rs} + \frac{1}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr}) - \sigma (m p_r \eta + \frac{1}{\eta} \sum_{s=1}^m p_s \hat{b}_{sr}^2) > 0, r = 1, \dots, m$$

koşulunu gerçekleyen bir diyagonal $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_m) > 0$ pozitif matrisi ile ε ve η pozitif sabitleri mevcutsa, (4.26) ile tanımlanmış Cohen-Grossberg yapay sinir ağına ait denge noktası global asimtotik robust kararlıdır.

İspat:

(4.26) sisteminde denge noktasının kararlılığını analiz etmek amacıyla aşağıdaki gibi tanımlanan pozitif Lyapunov fonksiyonu kullanılacaktır:

$$\begin{aligned} V(z(t)) = & 2 \sum_{r=1}^m \int_0^{z_r(t)} \frac{s}{\alpha_r(s)} ds + 2\kappa \sum_{r=1}^m p_r \int_0^{z_r(t)} \frac{g_r(s)}{\alpha_r(s)} ds \\ & + \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \int_{t-\tau_{sr}}^t \left(\frac{m}{\gamma_\mu} + \frac{m}{\gamma_\mu} \hat{b}_{sr}^2 + \frac{(1-\sigma)\kappa}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr} + \frac{\sigma\kappa}{\eta} p_s \hat{b}_{sr}^2 \right) g_r^2(z_r(\xi)) d\xi \end{aligned} \quad (4.28)$$

Burada $\gamma_\mu = \min\{\gamma_r\}$, p_r ve κ pozitif nümerik sabitleri sonradan tayin edilecek değerlerdir. (4.28) ile tanımlanan Lyapunov fonksiyonunun zaman parametresine göre türevi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) = & -2 \sum_{r=1}^m \beta_r(z_r(t)) z_r(t) + \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m 2a_{rs} z_r(t) g_s(z_s(t)) + \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m 2b_{rs} z_r(t) g_s(z_s(t - \tau_{rs})) \\
& - 2\kappa \sum_{r=1}^m \beta_r(z_r(t)) p_r g_r(z_r(t)) + 2\kappa \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m p_r a_{rs} g_r(z_r(t)) g_s(z_s(t)) \\
& + 2\kappa \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m p_r b_{rs} g_r(z_r(t)) g_s(z_s(t - \tau_{rs})) \\
& + \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \left(\frac{m}{\gamma_\mu} + \frac{m}{\gamma_\mu} \hat{b}_{sr}^2 + \frac{(1-\sigma)\kappa}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr} + \frac{\sigma\kappa}{\eta} p_s \hat{b}_{sr}^2 \right) g_r^2(z_r(t)) \\
& - \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \left(\frac{m}{\gamma_\mu} + \frac{m}{\gamma_\mu} \hat{b}_{sr}^2 + \frac{(1-\sigma)\kappa}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr} + \frac{\sigma\kappa}{\eta} p_s \hat{b}_{sr}^2 \right) g_r^2(z_r(t - \tau_{sr})) \quad (4.29)
\end{aligned}$$

Burada (4.29) denklemindeki terimler için aşağıdaki skaler eşitsizlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{r=1}^m \beta_r(z_r(t)) z_r(t) + \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m 2a_{rs} z_r(t) g_s(z_s(t)) \\
\leq & - \sum_{r=1}^m \gamma_\mu z_r^2(t) + \frac{\gamma_\mu}{m} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m z_r^2(t) + \frac{m}{\gamma_\mu} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m a_{rs}^2 g_s^2(z_s(t)) \\
= & - \sum_{r=1}^m \gamma_\mu z_r^2(t) + \sum_{r=1}^m \gamma_\mu z_r^2(t) + \frac{m}{\gamma_\mu} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m a_{rs}^2 g_s^2(z_s(t)) \\
\leq & \frac{m}{\gamma_\mu} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \hat{a}_{sr}^2 g_r^2(z_r(t)) \quad (4.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{r=1}^m \beta_r(z_r(t)) z_r(t) + \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m 2b_{rs} z_r(t) g_s(z_s(t - \tau_{rs})) \\
\leq & - \sum_{r=1}^m \gamma_\mu z_r^2(t) + \frac{\gamma_\mu}{m} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m z_r^2(t) + \frac{m}{\gamma_\mu} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m b_{rs}^2 g_s^2(z_s(t - \tau_{rs})) \\
= & - \sum_{r=1}^m \gamma_\mu z_r^2(t) + \sum_{r=1}^m \gamma_\mu z_r^2(t) + \frac{m}{\gamma_\mu} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m b_{rs}^2 g_s^2(z_s(t - \tau_{rs})) \\
\leq & \frac{m}{\gamma_\mu} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \hat{b}_{sr}^2 g_r^2(z_r(t - \tau_{sr})) \quad (4.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m 2\kappa p_r b_{rs} g_r(z_r(t)) g_s(z_s(t - \tau_{rs})) \\
= & (1 - \sigma) \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m 2\kappa p_r b_{rs} g_r(z_r(t)) g_s(z_s(t - \tau_{rs})) \\
& + \sigma \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m 2\kappa p_r b_{rs} g_r(z_r(t)) g_s(z_s(t - \tau_{rs})) \\
\leq & (1 - \sigma) \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m 2\kappa p_r |b_{rs}| |g_r(z_r(t))| |g_s(z_s(t - \tau_{rs}))| \\
& + \sigma \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \kappa p_r (\eta g_r^2(z_r(t)) + \frac{1}{\eta} b_{rs}^2 g_s^2(z_s(t - \tau_{rs}))) \\
\leq & (1 - \sigma) \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \kappa p_r \hat{b}_{rs} \varepsilon g_r^2(z_r(t)) + (1 - \sigma) \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \kappa p_r \hat{b}_{rs} \frac{1}{\varepsilon} g_s^2(z_s(t - \tau_{rs})) \\
& + \sigma \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \kappa p_r \eta g_r^2(z_r(t)) + \sigma \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \kappa p_r \frac{1}{\eta} \hat{b}_{rs}^2 g_s^2(z_s(t - \tau_{rs})) \\
= & (1 - \sigma) \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \kappa p_r \hat{b}_{rs} \varepsilon g_r^2(z_r(t)) + (1 - \sigma) \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \kappa p_s \hat{b}_{sr} \frac{1}{\varepsilon} g_r^2(z_r(t - \tau_{sr})) \\
& + \sigma \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \kappa p_r \eta g_r^2(z_r(t)) + \sigma \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \kappa p_s \frac{1}{\eta} \hat{b}_{sr}^2 g_r^2(z_r(t - \tau_{sr})) \tag{4.32}
\end{aligned}$$

$\tilde{A}_3$ varsayımı kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
-2\kappa \sum_{r=1}^m \beta_r(z_r(t)) p_r g_r(z_r(t)) & \leq -2\kappa \sum_{r=1}^m \gamma_r |z_r(t)| p_r |g_r(z_r(t))| \\
& \leq -2\kappa \sum_{r=1}^m \frac{\gamma_r}{k_r} p_r g_r^2(z_r(t)) \tag{4.33}
\end{aligned}$$

Ayrıca Teorem 4.3'te [33] gösterildiği üzere aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\kappa \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m 2p_r a_{rs} g_r(z_r(t)) g_s(z_s(t)) & = \kappa g^T(z(t)) (PA + A^T P) g(z(t)) \\
& \leq -\kappa \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m v_{rs} g_r^2(z_r(t)) \tag{4.34}
\end{aligned}$$

Burada $v_{rr} = -2p_r \bar{a}_{rr}$ ve $v_{rs} = -\max\{|p_r \bar{a}_{rs} + p_s \bar{a}_{sr}|, |p_r \underline{a}_{rs} + p_s \underline{a}_{sr}|\}$ dir. O halde (4.30)-(4.34) eşitsizlikleri (4.29) denkleminde yazıldığında $V(z(t))$ fonksiyonunun zaman parametresine göre türevi için aşağıdaki eşitsizlik gerçekleşir:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) \leq & m \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{1}{\gamma_\mu} \hat{a}_{sr}^2 g_r^2(z_r(t)) + m \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{1}{\gamma_\mu} \hat{b}_{sr}^2 g_r^2(z_r(t - \tau_{sr})) \\
& - 2\kappa \sum_{r=1}^m \frac{\gamma_r}{k_r} p_r g_r^2(z_r(t)) - \kappa \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m v_{rs} g_r^2(z_r(t)) \\
& (1 - \sigma) \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \kappa p_r \hat{b}_{rs} \varepsilon g_r^2(z_r(t)) + (1 - \sigma) \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \kappa p_s \hat{b}_{sr} \frac{1}{\varepsilon} g_r^2(z_r(t - \tau_{sr})) \\
& + \sigma \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \kappa p_r \eta g_r^2(z_r(t)) + \sigma \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \kappa p_s \frac{1}{\eta} \hat{b}_{sr}^2 g_r^2(z_r(t - \tau_{sr})) \\
& + \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \left(\frac{m}{\gamma_\mu} + \frac{m}{\gamma_\mu} \hat{b}_{sr}^2 + \frac{(1 - \sigma)\kappa}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr} + \frac{\sigma\kappa}{\eta} p_s \hat{b}_{sr}^2 \right) g_r^2(z_r(t)) \\
& - \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \left(\frac{m}{\gamma_\mu} + \frac{m}{\gamma_\mu} \hat{b}_{sr}^2 + \frac{(1 - \sigma)\kappa}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr} + \frac{\sigma\kappa}{\eta} p_s \hat{b}_{sr}^2 \right) g_r^2(z_r(t - \tau_{sr})) \quad (4.35)
\end{aligned}$$

(4.35) eşitsizliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılarak aşağıdaki sonuç türetilir:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) \leq & m \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{1}{\gamma_\mu} \hat{a}_{sr}^2 g_r^2(z_r(t)) - 2\kappa \sum_{r=1}^m \frac{\gamma_r}{k_r} p_r g_r^2(z_r(t)) - \kappa \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m v_{rs} g_r^2(z_r(t)) \\
& + (1 - \sigma) \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \kappa p_r \hat{b}_{rs} \varepsilon g_r^2(z_r(t)) + \sigma \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \kappa p_r \eta g_r^2(z_r(t)) \\
& + \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \left(\frac{m}{\gamma_\mu} + \frac{m}{\gamma_\mu} \hat{b}_{sr}^2 + \frac{(1 - \sigma)\kappa}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr} + \frac{\sigma\kappa}{\eta} p_s \hat{b}_{sr}^2 \right) g_r^2(z_r(t)) \quad (4.36)
\end{aligned}$$

Burada $\hat{a}_M = \max\{(\hat{a}_{sr})\}$, $\hat{b}_M = \max\{(\hat{b}_{sr})\}$ olarak tanımlansın. Böylece (4.36) eşitsizliği aşağıdaki formu alacaktır:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &\leq m \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{1}{\gamma_\mu} \hat{a}_M^2 g_r^2(z_r(t)) - 2\kappa \sum_{r=1}^m \frac{\gamma_r}{k_r} p_r g_r^2(z_r(t)) - \kappa \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m v_{rs} g_r^2(z_r(t)) \\
&\quad + (1 - \sigma) \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \kappa p_r \hat{b}_{rs} \varepsilon g_r^2(z_r(t)) + \sigma \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \kappa p_r \eta g_r^2(z_r(t)) \\
&\quad + \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \left(\frac{m}{\gamma_\mu} + \frac{m}{\gamma_\mu} \hat{b}_M^2 + \frac{(1 - \sigma)\kappa}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr} + \frac{\sigma\kappa}{\eta} p_s \hat{b}_{sr}^2 \right) g_r^2(z_r(t)) \\
&= \sum_{r=1}^m \frac{m^2}{\gamma_\mu} (\hat{a}_M^2 + \hat{b}_M^2 + 1) g_r^2(z_r(t)) - 2\kappa \sum_{r=1}^m \frac{\gamma_r}{k_r} p_r g_r^2(z_r(t)) - \kappa \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m v_{rs} g_r^2(z_r(t)) \\
&\quad + (1 - \sigma) \kappa \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \left(\varepsilon p_r \hat{b}_{rs} + \frac{1}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr} \right) g_r^2(z_r(t)) \\
&\quad + \kappa \sigma \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \left(p_r \eta + \frac{1}{\eta} p_s \hat{b}_{sr}^2 \right) g_r^2(z_r(t)) \\
&= \sum_{r=1}^m \frac{m^2}{\gamma_\mu} (\hat{a}_M^2 + \hat{b}_M^2 + 1) g_r^2(z_r(t)) - \kappa \sum_{r=1}^m \zeta_r g_r^2(z_r(t)) \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Burada $\delta = \frac{m^2}{\gamma_\mu} (\hat{a}_M^2 + \hat{b}_M^2 + 1)$ ve $\zeta_\mu = \min\{\zeta_r\}$ olarak ifade edilsin. Bu durumda (4.37) eşitsizliği aşağıdaki biçimde daha kompakt bir formda yazılabilir:

$$\dot{V}(z(t)) \leq (\delta - \kappa \zeta_\mu) \|g(z(t))\|_2^2 \tag{4.38}$$

Bu eşitsizlikte $\kappa > \frac{\delta}{\zeta_\mu}$ seçildiğinde, $g(z(t)) \neq 0$ olduğu tüm durumlar için $\dot{V}(z(t)) < 0$ dır. Burada dikkat edilmelidir ki, $\tilde{A}_3$ varsayımı altında $g(z(t)) \neq 0$ durumunun gerçekleşmesi, $z(t) \neq 0$ olmasını gerektirir.

Eğer $g(z(t)) = 0$ durumu ele alınırsa, (4.29) denklemi aşağıdaki forma sadeleşir:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &= -2 \sum_{r=1}^m \beta_r(z_r(t)) z_r(t) + \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m 2b_{rs} z_r(t) g_s(z_s(t - \tau_{rs})) \\
&\quad - \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \left(\frac{m}{\gamma_\mu} + \frac{m}{\gamma_\mu} \hat{b}_{sr}^2 + \frac{(1 - \sigma)\kappa}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr} + \frac{\sigma\kappa}{\eta} p_s \hat{b}_{sr}^2 \right) g_r(z_r(t - \tau_{sr})) \\
&\leq -2 \sum_{r=1}^m \beta_r(z_r(t)) z_r(t) + \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m 2b_{rs} z_r(t) g_s(z_s(t - \tau_{rs})) \\
&\quad - \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{m}{\gamma_\mu} \hat{b}_{sr}^2 g_r^2(z_r(t - \tau_{sr})) \tag{4.39}
\end{aligned}$$

(4.31) eşitsizliği (4.39)'de uygulanırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\dot{V}(z(t)) \leq -\sum_{r=1}^m \beta_r(z_r(t))z_r(t) \leq -\sum_{r=1}^m \gamma_r z_r^2(t) \leq -\gamma_\mu \sum_{r=1}^m z_r^2(t) \quad (4.40)$$

(4.40) eşitsizliğinde $z(t) \neq 0$ olduğu durum için $\dot{V}(z(t)) < 0$ sonucunun gerçekleştiği aşıkardır.

Son olarak, $g(z(t)) = 0$ ve $z(t) = 0$ durumu ele alındığında ise, (4.29) denklemi aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= -\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \left(\frac{m}{\gamma_\mu} + \frac{m}{\gamma_\mu} \hat{b}_{sr}^2 + \frac{(1-\sigma)\kappa}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr} + \frac{\sigma\kappa}{\eta} p_s \hat{b}_{sr}^2 \right) g_r(z_r(t - \tau_{sr})) \\ &\leq -\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{m}{\gamma_\mu} \hat{b}_{rs}^2 g_s(z_s(t - \tau_{rs})) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Buradan kolayca görülebileceği üzere $g_s(z_s(t - \tau_{rs})) \neq 0$ değerleri için $\dot{V}(z(t)) < 0$ sağlanır. $\dot{V}(z(t)) = 0$ ise sadece $z_r(t) = g_r(z_r(t)) = 0$ ve $z_s(t - \tau_{rs}) = g_s(z_s(t - \tau_{rs})) = 0$ durumunda mümkündür. Diğer tüm olası durumlar için $\dot{V}(z(t)) < 0$ gerçekleşir. Buna ek olarak, $\|z(t)\| \rightarrow \infty$ iken $V(z(t)) \rightarrow \infty$ olduğundan $V(z(t))$ fonksiyonu radyal sınırsızlık özelliğini sağlar. Sonuç itibarıyla (4.26) ile tanımlanan çoklu zaman gecikmeli Cohen-Grossberg yapay sinir ağının orijini ve eşdeğer anlamda (4.1) ile tanımlanan sistemin denge noktası global asimtotik robust kararlıdır.

5. BULGULAR

Bu bölüm, tez kapsamında elde edilen robust kararlılık koşulları ile daha önceden literatürde elde edilmiş bazı önemli robust kararlılık koşullarının karşılaştırılmasına ayrılmıştır. Ayrıca bu karşılaştırmalar sayısal örnekler kullanılarak desteklenmiştir. Böylece tez kapsamında elde edilen sonuçların, literatürde benzer varsayımlarla elde edilmiş sonuçlardan daha az kısıtlayıcı olduğu gösterilmiştir. Daha uygun karşılaştırmalar yapabilmek amacıyla, ilk olarak Teorem 4.1.5 ve Teorem 4.2.1'in bazı özel durumları incelenecektir.

$\sigma = 0$ için Teorem 4.1.5 ve Teorem 4.2.1'de verilen koşullar aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Teorem 5.1: (4.1) ile tanımlanmış yapay sinir ağı A_1, A_2 ve A_3 varsayımlarını sağlasın ve bu sistemin (4.2) ile tanımlanan ağ belirsizliklerini karşıladığı varsayılın. Burada $v_{rr} = -2p_r \bar{a}_{rr}$, $v_{rs} = -\max(|p_r \bar{a}_{rs} + p_s \bar{a}_{sr}|, |p_r \underline{a}_{rs} + p_s \underline{a}_{sr}|)$ ve $\hat{b}_{rs} = \max(|\underline{b}_{rs}|, |\bar{b}_{rs}|)$ olmak üzere;

$$\zeta_r = 2 \frac{p_r \gamma_r}{k_r} + \sum_{s=1}^m v_{rs} - \sum_{s=1}^m (\varepsilon p_r \hat{b}_{rs} + \frac{1}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr}) > 0, \forall r.$$

koşulunu gerçekleyen bir diyagonal $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_m) > 0$ pozitif matrisi ve ε pozitif sabiti mevcutsa, (4.1) ile tanımlanan Cohen-Grossberg sinir ağının, her sabit u girdisine karşılık bir tek denge noktası vardır ve denge noktası global asimtotik robust kararlıdır.

Teorem 4.1.5 ve Teorem 4.2.1'de verilen koşullar (4.3) ile tanımlanan gecikmeli Hopfield yapay sinir ağı modeli için aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

Teorem 5.2: (4.3) ile tanımlanmış yapay sinir ağı A_3 varsayımını sağlasın ve sistemin (4.4) ile tanımlanan ağ belirsizliklerini karşıladığı varsayılın. Burada $\hat{b}_{rs} = \max(|\underline{b}_{rs}|, |\bar{b}_{rs}|)$, $v_{rr} = -2p_r \bar{a}_{rr}$, $v_{rs} = -\max(|p_r \bar{a}_{rs} + p_s \bar{a}_{sr}|, |p_r \underline{a}_{rs} + p_s \underline{a}_{sr}|)$ ve $0 \leq \sigma \leq 1$ olmak üzere;

$$v_r = 2 \frac{p_r c_r}{k_r} + \sum_{s=1}^m v_{rs} - (1 - \sigma) \sum_{s=1}^m (\varepsilon p_r \hat{b}_{rs} + \frac{1}{\varepsilon} p_s \hat{b}_{sr}) - \sigma (m p_r \eta + \frac{1}{\eta} \sum_{s=1}^m p_s \hat{b}_{sr}^2) > 0, \forall r.$$

koşulunu gerçekleyen bir diyagonal $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_m) > 0$ pozitif matrisi ile ε ve η pozitif sabitleri mevcutsa, (4.3) ile tanımlanan Hopfield sinir ağının, her sabit u girdisine

karşılık tek denge noktası vardır ve denge noktası global asimtotik robust kararlıdır.

$\sigma = 1$ için Teorem 5.2 aşağıdaki şekilde yazılabilir:

Teorem 5.3: (4.3) ile tanımlanmış yapay sinir ağı A_3 varsayımını sağlasın ve sistemin (4.4) ile tanımlanan ağ belirsizliklerini karşıladığı varsayılın. Burada $v_{rr} = -2p_r\bar{a}_{rr}$, $v_{rs} = -\max(|p_r\bar{a}_{rs} + p_s\bar{a}_{sr}|, |p_r\underline{a}_{rs} + p_s\underline{a}_{sr}|)$ ve $\hat{b}_{rs} = \max(|\underline{b}_{rs}|, |\bar{b}_{rs}|)$ olmak üzere;

$$\epsilon_r = 2\frac{p_r c_r}{k_r} + \sum_{s=1}^m v_{rs} - (mp_r\eta + \frac{1}{\eta} \sum_{s=1}^m p_s \hat{b}_{sr}^2) > 0, \forall r.$$

koşulunu gerçekleyen bir diyagonal $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_m) > 0$ pozitif matrisi ve η pozitif sabiti mevcutsa, (4.3) ile tanımlanan Hopfield sinir ağının, her sabit u girdisine karşılık tek denge noktası vardır ve denge noktası global asimtotik robust kararlıdır.

Aşağıdaki teorem [25] numaralı çalışmada sunulmuştur:

Teorem 5.4 [25]: (4.3) ile tanımlanmış yapay sinir ağı A_3 varsayımını sağlasın ve sistemin (4.4) ile tanımlanan ağ belirsizliklerini karşıladığı varsayılın. Burada $v_{rr} = -2p_r\bar{a}_{rr}$, $v_{rs} = -\max(|p_r\bar{a}_{rs} + p_s\bar{a}_{sr}|, |p_r\underline{a}_{rs} + p_s\underline{a}_{sr}|)$, ve $\hat{b}_{rs} = \max(|\underline{b}_{rs}|, |\bar{b}_{rs}|)$ olmak üzere;

$$\xi_r = 2\frac{p_r c_r}{k_r} + \sum_{s=1}^m v_{rs} - \sum_{s=1}^m (\epsilon p_r \hat{b}_{rs} + \frac{1}{\epsilon} p_s \hat{b}_{sr}) > 0, \forall r.$$

koşulunu gerçekleyen bir diyagonal $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_m) > 0$ pozitif matrisi ve ϵ pozitif sabiti mevcutsa, (4.3) ile tanımlanan Hopfield sinir ağının, her sabit u girdisine karşılık tek denge noktası vardır ve denge noktası global asimtotik robust kararlıdır.

Aşağıdaki teorem [32] numaralı çalışmada sunulmuştur:

Teorem 5.5 [32]: (4.1) ile tanımlanan yapay sinir ağı modeli için A_1, A_2 ve A_3 varsayımları sağlansın ve sistemin (4.2) ile tanımlanan ağ belirsizliklerini karşıladığı varsayılın. Burada

$u_{rs} = -\max(|p_r \bar{a}_{rs} + p_s \bar{a}_{sr}|, |p_r \underline{a}_{rs} + p_s \underline{a}_{sr}|)$ ve $\hat{b}_{rs} = \max(|\underline{b}_{rs}|, |\bar{b}_{rs}|)$ olmak üzere;

$$\psi_r = 2 \frac{p_r \gamma_r}{k_r} + \sum_{s=1}^m u_{rs} - \sum_{s=1}^m (p_r \hat{b}_{rs} + p_s \hat{b}_{sr}) > 0, \forall r.$$

koşulunu gerçekleyen bir diyagonal $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_m) > 0$ pozitif matrisi mevcutsa, (4.1) ile tanımlanan Cohen-Grossberg sinir ağı robust kararlıdır.

Sonuç 5.6: Teorem 5.2’de verilen kararlılık koşulunda $\sigma = 0$ alınırsa bu ifade Teorem 5.4’teki kararlılık koşuluna özdeş hale gelir. Bu nedenle Teorem 5.4, Teorem 5.2’nin özel bir durumu olarak düşünülebilir.

Sonuç 5.7: Dikkat edilmelidir ki Teorem 5.1, Teorem 5.5’in sonuçlarını $v_{rr} = -2p_r \bar{a}_{rr} \geq u_{rr} = -2p_r |\bar{a}_{rr}|$ şeklinde genelleştirir. Ayrıca Teorem 5.5, (4.1) sisteminin sadece lokal kararlılığını kanıtlarken, Teorem 5.1 ise (4.1) gecikmeli yapay sinir ağının global asimtotik kararlılığını kanıtlar.

Teorem 5.3 ve Teorem 5.4’ün sonuçlarını ayırt etmek için aşağıda verilen sayısal örnek incelenmelidir.

Örnek 5.8: (4.3) ile tanımlanan çoklu sabit gecikmeli Hopfield yapay sinir ağındaki sistem parametreleri aşağıdaki şekilde verilmiş olsun:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}$$

Öncelikle Teorem 5.4'ün dayattığı kararlılık koşullarını belirleyelim. Burada $P = I$ ve $\varepsilon = \frac{4}{3}$ alınırsa Teorem 5.4'ün sonucu $\xi_1 = 2c_1 - 23$, $\xi_2 = 2c_2 - 26$, $\xi_3 = 2c_3 - 26$ ve $\xi_4 = 2c_4 - 32$ olarak bulunur. Böylece robust kararlılık koşulları $c_1 > 11.5$, $c_2 > 13$, $c_3 > 13$ ve $c_4 > 16$ şeklinde ifade edilebilir.

Şimdi ise Teorem 5.3'ün kararlılık koşullarını elde edelim. $P = I$ ve $\eta = 4$ olsun. Buna göre Teorem 5.3'ün sonucu $\epsilon_1 = 2c_1 - 28$, $\epsilon_2 = 2c_2 - 28$, $\epsilon_3 = 2c_3 - 28$ ve $\epsilon_4 = 2c_4 - 28$ bulunur. Dolayısıyla, bu örnek için robust kararlılık koşulları $c_1 > 14$, $c_2 > 14$, $c_3 > 14$ ve $c_4 > 14$ olarak elde edilir.

Sonuç 5.9: Bu örnekte parametreler için türetilen kararlılık koşullarına dayanarak, Teorem 5.3 ve Teorem 5.4'ün (4.3) sistemi için farklı esneklikte robust kararlılık koşulları olduklarını söyleyebiliriz. Bu bağlamda, Teorem 5.3'te verilen robust kararlılık sonucu, Teorem 5.4'te sunulana alternatif bir sonuç olarak düşünülebilir. Öte yandan [25]'in yazarı, Teorem 5.4'te verilen kararlılık koşullarının [27–30, 33] çalışmalarında elde edilen koşullara alternatif bir sonuç olarak değerlendirilebileceğini göstermiştir. Bu nedenle, Teorem 5.3'te ifade edilen kararlılık koşullarının da [27–30, 33] çalışmalarında sunulan koşullara alternatif bir sonuç olarak kabul edilebileceğini hemen söyleyebiliriz.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında standart yapay sinir ağı modellerinden daha genel bir yapıya sahip olan çoklu zaman gecikmeli Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelleri için hem denge noktasının varlığını ve tekliğini hem de global asimtotik kararlılığını gerçekleyen yeni ve özgün koşullara ulaşılmıştır. Bu koşulların elde edilmesinde incelenen yapay sinir ağı modelindeki ağ parametreleri için alt ve üst sınırlar tanımlanmış ve ağ parametrelerinin bu sınırlar içerisinde belirsiz olduğu kabul edilmiştir. Böylece sistemin kararlılık analizi gerçekleştirilirken, gecikme parametrelerinin yanı sıra sistem parametrelerindeki değişimlerin de denge noktasının dinamik davranışı üzerindeki etkileri dikkate alınmıştır. Başka bir deyişle, yaptığımız matematiksel analizler sonucunda elde ettiğimiz yeni yeterli koşullar, zaman gecikmesinden ve ağ parametrelerindeki sapmalardan bağımsız olarak, incelenen yapay sinir ağı modelinin robust kararlılığını sağlamıştır. Bu koşullar elde edilirken, analiz edilen yapay sinir ağının azalmayan türevi sınırlı aktivasyon fonksiyonları ihtiva ettiği varsayılmış, böylece aktivasyon fonksiyonları kümesi mümkün olabildiğince geniş tutulmuştur.

Bu tezin literatüre yaptığı en önemli katkı, Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelinin denge noktasının dinamik davranışını robust olarak karakterize eden yeni yeterli koşulların elde edilmiş olmasıdır. Bu koşulların elde edilmesinde öncelikle denge noktasının varlık ve teklik analizi gerçekleştirilmiş olup sonrasında denge noktasının kararlılığı analiz edilmiştir. Bu analizin iki kısımda yapılmış olmasındaki temel etken, denge noktasının varlığını ve tekliğini sağlayan koşulların hakikatte denge noktasının global asimtotik kararlılığını sağladığının kesin olarak bilinmemesidir. Benzer şekilde sistemin global asimtotik kararlılığını sağlayan koşulların denge noktasının varlığını ve tekliğini sağlayabileceği de kesin değildir. Bizim yapmış olduğumuz analizlerden elde edilen sonuçların ise hem denge noktasının varlığını ve tekliğini hem de global asimtotik kararlılığını sağladığı ispatlanmıştır.

Bu tez çalışmasının temelini oluşturan Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modeli, tez içerisinde bahsedildiği üzere, Hopfield ve Hücresel yapay sinir ağı modellerine kolaylıkla dönüştürülebilir. Bu nedenle tez kapsamında Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modeli için elde edilen yeterli koşullar, benzer varsayımlar altında farklı tipteki yapay sinir ağları için de

gerçeklenecektir. Ayrıca literatürde Cohen-Grossberg modeli için gerçekleştirilmiş birçok analiz ve elde edilmiş kararlılık koşulları vardır. Bu çalışmaların önemli bir kısmında yapay sinir ağı modelinde kullanılan aktivasyon fonksiyonu sınıfı sınırlı, gecikme parametresi ise tüm nöronlar için sabit veya bir nöron ile diğer tüm nöronlar arasında sabit kabul edilmiştir. Oysa bu tez çalışmasındaki kararlılık koşulları, azalmayan türevi sınırlı aktivasyon fonksiyonları ve her nöron çifti için farklı gecikme parametresi içeren modeller kullanılarak elde edildiğinden yukarıda bahsettiğimiz kısıtlayıcı koşullar elimine edilmiştir. Dahası, tez kapsamında elde edilen bu koşullar sadece sistem parametrelerine ve belirsiz bir takım sabit değerli nümerik parametrelere bağlı olarak ifade edildiğinden literatürdeki birçok koşulun aksine kolay bir şekilde test edilebilir. Bunun bir ifadesi olarak bulgular kısmında literatürde benzer varsayımlar altında elde edilmiş kararlılık koşulları ile bulduğumuz yeterli koşullar nümerik bir örnek üzerinde karşılaştırılmıştır. Ayrıca bu tez çalışmasında kullanılan özgün analiz yöntemlerinin, ileride yapılacak farklı tipteki modellerin kararlılık analizleri için de yol gösterici niteliğe sahip olduğu düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1]. Hopfield, J.J., 1982, Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79 (8), 2554-2558.
- [2]. Hopfield, J.J., 1984, Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 81 (10), 3088-3092.
- [3]. Cohen, M.A. ve Grossberg, S., 1983, Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 13 (5), 815-826.
- [4]. Chua, L.O. ve Yang, L., 1988, Cellular neural networks: Applications, *IEEE Transactions on Circuits and Systems: Part-I*, 35 (10), 1273-1290.
- [5]. Carpenter, G.A., Cohen, M.A. ve Grossberg, S., 1987, Computing with Neural Networks, *American Association for the Advancement of Science*, 235 (4793), 1226-1227.
- [6]. Baldi, P. ve Atiya, F., 1994, How Delays Affect Neural Dynamics and Learning, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 5 (4), 612-621.
- [7]. Marcus, C.M. ve Westervelt, R.M., 1989, Stability of analog neural networks with delay, *Physical Review A*, 39 (1), 347-359.
- [8]. Arik S., 2014, New criteria for global robust stability of delayed neural networks with norm-bounded uncertainties, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 25 (6), 1045-1052.
- [9]. Li, X. ve Li, P., 2021, Stability of time-delay systems with impulsive control involving stabilizing delays, *Automatica J. IFAC*, 124, 109336, 6 pp.
- [10]. Zhang, C.-K., He, Y., Jiang, L., Lin, W.-J. ve Wu, M., 2017, Delay-dependent stability analysis of neural networks with time-varying delay: A generalized free-weighting-matrix approach, *Applied Mathematics and Computation*, 294, 102-120.
- [11]. Li, X., Song, S. ve Wu, J., 2019, Exponential stability of nonlinear systems with delayed impulses and applications, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64 (10), 4024-4034.
- [12]. Chen, S., Song, Q., Zhao, Z., Liu, Y. ve Alsaadi, F. E., 2021, Global asymptotic stability of fractional-order complex-valued neural networks with probabilistic time-varying delays, *Neurocomputing*, 450, 311-318.

- [13]. Chen, J., Chen, B. ve Zeng, Z., 2021, Basic theorem and global exponential stability of differential algebraic neural networks with delay, *Neural Networks*, 140, 336-343.
- [14]. Li, X., Yang, X. ve Song, S., 2019, Lyapunov conditions for finite-time stability of time-varying time-delay systems, *Automatica J. IFAC*, 103, 135-140.
- [15]. Dong, Z., Zhang, X. ve Wang, X., 2021, Global exponential stability of discrete-time higher-order Cohen-Grossberg neural networks with time-varying delays, connection weights and impulses, *Journal of the Franklin Institute*, 358 (11), 5931-5950.
- [16]. Xiao, Q. ve Huang, T., 2020, Stability of delayed inertial neural networks on time scales: A unified matrix-measure approach, *Neural Networks*, 130, 33-38.
- [17]. Li, X., Peng, D. ve Cao, J., 2020, Lyapunov stability for impulsive systems via event-triggered impulsive control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65 (11), 4908-4913.
- [18]. Chen, Y., Wang, Z., Liu, Y. ve Alsaadi, F. E., 2018, Stochastic stability for distributed delay neural networks via augmented Lyapunov-Krasovskii functionals, *Applied Mathematics and Computation*, 338, 869-881.
- [19]. Song, Q., Yu, Q., Zhao, Z., Liu, Y. ve Alsaadi, F. E., 2018, Boundedness and global robust stability analysis of delayed complex-valued neural networks with interval parameter uncertainties, *Neural Networks*, 103, 55-62.
- [20]. Pan, J., ve Pan, Z., 2021, Novel robust stability criteria for uncertain parameter quaternionic neural networks with mixed delays: Whole quaternionic method, *Applied Mathematics and Computation*, 407 ,126326, 15pp.
- [21]. Arslan, E., 2021, Novel criteria for global robust stability of dynamical neural networks with multiple time delays, *Neural Networks*, 142, 119-127.
- [22]. Cao, Y., Sriraman, R., Shyamsundarraj, N. ve Samidurai, R., 2020, Robust stability of uncertain stochastic complex-valued neural networks with additive time-varying delays, *Mathematics and Computers in Simulation*, 171, 207-220.
- [23]. Xue, H., Xu, X., Zhang, J. ve Yang X., 2019, Robust stability of impulsive switched neural networks with multiple time delays, *Applied Mathematics and Computation*, 359, 456-475.
- [24]. Samli, R., 2015, A new delay-independent condition for global robust stability of neural networks with time delays, *Neural Networks*, 66, 131-137.
- [25]. Senan, S., 2015, Robustness analysis of uncertain dynamical neural networks with multiple time delays, *Neural Networks*, 70, 53-60.
- [26]. Chen, T. ve Rong, L., 2004, Robust global exponential stability of Cohen-Grossberg neural networks with time delays, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 15 (1), 203-206.
- [27]. Arik, S., 2016, Dynamical analysis of uncertain neural networks with multiple time delays, *International Journal of Systems Science*, 47 (3), 730-739.

- [28]. Faydasıcok, O. ve Arik, S., 2012, Equilibrium and stability analysis of delayed neural networks under parameter uncertainties, *Applied Mathematics and Computation*, 218 (12), 6716-6726.
- [29]. Faydasıcok, O. ve Arik, S., 2013, An analysis of stability of uncertain neural networks with multiple time delays, *Journal of the Franklin Institute*, 350 (7), 1808-1826.
- [30]. Arik, S., 2014, Further analysis of stability of uncertain neural networks with multiple time delays, *Advances in Difference Equations*, 41, 16 pp.
- [31]. Liao, X., Wong, K.-W., Wu, Z. ve Chen, G., 2001, Novel robust stability for interval-delayed hopfield neural, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 48 (11), 1355-1359.
- [32]. Rong, L. ve Chen, T., 2006, New results on the robust stability of Cohen-Grossberg neural networks with delays, *Neural Processing Letters*, 24 (3), 193-202.
- [33]. Ozcan, N. ve Arik, S., 2014, New global robust stability condition for uncertain neural networks with time delays, *Neurocomputing*, 142 , 267-274.
- [34]. Zurada, J. M., 1992, *Introduction to Artificial Neural Systems*, West Publishing Company, St. Paul, ISBN: 0-314-93391-3.
- [35]. Perko, L., 2001, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, ISBN: 0-387-95116-4.
- [36]. Holmes,P. ve Shea-Brown, E.T., 2006, *Definitions: Stability of an Equilibrium*, <http://www.scholarpedia.org/article/Stability>, [Ziyaret Tarihi: 26.05.2022].
- [37]. Khalil,H. K., 1996, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, New Jersey, ISBN: 0-13-228024-8.
- [38]. Cao, J. ve Chen, T., 2004, Globally exponentially robust stability and periodicity of delayed neural networks, *Chaos, Solitons and Fractals*, 22 (3), 957-963.
- [39]. Forti, M. ve Tesi, A., 1995, New conditions for global stability of neural networks with application to linear and quadratic programming problems, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I*, 42 (7), 354-366.
- [40]. Ketencigil, M. M., Faydasıcok O., ve Arik, S., 2022, Novel criteria for robust stability of Cohen-Grossberg neural networks with multiple time delays, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*, doi: 10.3934/dcdss.2022081

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Muhammet Mert KETENCİGİL
Doğum Yeri	–
Doğum Tarihi	–
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	–
E-Posta Adresi	–
Web Adresi	http://



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik Programı
Mezuniyet Yılı	2020

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2022

Makale ve Bildiriler	
Makaleler	
Ketencigil, M. M., Faydasicok O., ve Arik, S., 2022, Novel criteria for robust stability of Cohen-Grossberg neural networks with multiple time delays, <i>Discrete and Continuous Dynamical Systems - S</i> , doi: 10.3934/dcdss.2022081	