

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN ÖLÇEĞİNDE BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN
KARARLILIĞI VE YAKINSAKLIK SONUÇLARI

DOKTORA TEZİ

Zeynep KALKAN

Matematik Anabilim Dalı

Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz Bilim Dalı

ARALIK 2024

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN ÖLÇEĞİNDE BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN
KARARLILIĞI VE YAKINSAKLIK SONUÇLARI

DOKTORA TEZİ

Zeynep KALKAN

Matematik Anabilim Dalı

Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Aynur ŞAHİN

ARALIK 2024

Zeynep KALKAN tarafından hazırlanan “ZAMAN ÖLÇEĞİNDE BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI VE YAKINSAKLIK SONUÇLARI ” adlı tez çalışması 18.12.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı **Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz** Bilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı : **Doç. Dr. Aynur ŞAHİN** (Danışman)
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Prof. Dr. Metin BAŞARIR**
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Prof. Dr. Fuat Usta**
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Prof. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK**
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Dr. Öğr. Üyesi Ekber GİRGİN**
Sakarya Uygulamalı Bilimler Üniversitesi



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “ZAMAN ÖLÇEĞİNDE BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI VE YAKINSAKLIK SONUÇLARI” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(18/12/2024)

Zeynep KALKAN





Oğlum Göktuğ Ali'ye



TEŞEKKÜR

Yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar her aşamada yardımlarını esirgemeyen, beni yüreklendiren ve yönlendiren kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Aynur ŞAHİN'e, tez izleme komitesinde bulunan sayın Prof. Dr. Metin BAŞARIR ve Prof. Dr. Fuat USTA hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez savunma sınavı jüri üyeliğini kabul ederek bana destek veren değerli Prof. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK ve Dr. Öğr. Üyesi Ekber GİRGİN hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca yanımda olan, desteğini her zaman hissettiğim ve en zor anlarımda bile bana güç vererek yeniden ayağa kalkmamı sağlayan sevgili eşim Metin KALKAN'a en kalbi teşekkürlerimi sunarım. Canım oğlum Göktuğ Ali'ye, onunla geçirebileceğim vakitlerden fedakârlık ettiğim için özür diler ve bu süreçteki sabrı için teşekkür ederim. Ayrıca beni bugünlere getiren aileme de emeklerinden dolayı teşekkür ederim.

Zeynep KALKAN



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	v
TEŞEKKÜR	ix
İÇİNDEKİLER	xi
SİMGELER	xiii
TABLO LİSTESİ	xv
ŞEKİL LİSTESİ	xvii
ÖZET	xix
SUMMARY	xxi
1. GİRİŞ	1
1.1. Literatür Özeti	2
2. TEMEL KAVRAMLAR	7
2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler	7
2.2. Sabit Nokta Kavramı ve Bazı İterasyonlar	14
2.3. Bazı Dönüşüm Sınıfları	19
2.4. İntegral Denklemler	23
2.5. Zaman Ölçeği Kavramı	27
2.6. Kararlılık Kavramları	33
2.7. Bazı Genelleştirilmiş Metrik Uzaylar	36
3. ZAMAN ÖLÇEĞİ ÜZERİNDEKİ VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN KARARLILIK SONUÇLARI	41
3.1. Ulam-Hyers ve Ulam-Hyers-Rassias Kararlılık Teoremleri	41
4. ZAMAN ÖLÇEĞİ ÜZERİNDEKİ İNTEGRAL DENKLEMLERE UYGULAMALARI İLE b –METRİK BENZERİ UZAYLARDA T –PİCARD İTERASYONU İÇİN SABİT NOKTA VE KARARLILIK SONUÇLARI	51
4.1. Sabit Nokta Sonuçları	51
4.2. (T, S) –Kararlılık Sonucu	55
4.3. Zaman Ölçeği Üzerindeki İntegral Denklemlere Uygulamalar	56
5. ZAMAN ÖLÇEĞİ ÜZERİNDEKİ İNTEGRAL DENKLEMLERE UYGULAMALARI İLE HİPERBOLİK METRİK UZAYLARDA AA – İTERASYONU İÇİN KARARLILIK VE YAKINSAKLIK SONUÇLARI	63
5.1. Zayıf w^2 –Kararlılık Sonucu	63
5.2. Yakınsaklık Sonuçları	67
5.3. Nümerik Örnek	72
5.4. Zaman Ölçeği Üzerindeki İntegral Denklemlere Uygulamalar	76
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	83
KAYNAKLAR	85
ÖZGEÇMİŞ	91



SİMGELER

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: $\{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ n 'lilerinin kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{F}$	: Sayı cismi ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)
T	: Zaman ölçeği
σ	: İleri sıçrama operatörü
ρ	: Geri sıçrama operatörü
μ	: Graininess fonksiyonu
f^Δ	: f fonksiyonunun Δ –türevi (Hilger Türevi)
$\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$	: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonların kümesi
(X, d)	: Metrik uzay
(X, d, W)	: Hiperbolik metrik uzay
$Fix(T)$	: T dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi
$r(C, \{x_n\})$	: $\{x_n\}$ dizisinin C kümesine göre asimptotik yarıçapı
$r(\{x_n\})$	: $\{x_n\}$ dizisinin X uzayına göre asimptotik yarıçapı
$A(C, \{x_n\})$	: $\{x_n\}$ dizisinin C kümesine göre tüm asimptotik merkezlerinin kümesi
$A(\{x_n\})$	: $\{x_n\}$ dizisinin X uzayına göre tüm asimptotik merkezlerinin kümesi
$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$	: $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti
$\Delta - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$	: $\{x_n\}$ dizisinin Δ – limiti
η	: X uzayının düzgün konvekslik modülü
$\mathcal{C}_{rd}(I, \mathbb{R})$	: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ rd-sürekli fonksiyonların kümesi
$\mathcal{R}^+$	: $1 + \mu(t)f(t) > 0$ şartını sağlayan tüm rd-sürekli f fonksiyonlarının kümesi
$\mathbb{X}$	: η monoton düzgün konvekslik modülüne sahip düzgün konveks ve tam hiperbolik metrik uzay



TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 5.1. $x_1 = 20$ başlangıç noktası için farklı iterasyon yöntemlerinin yakınsama hızlarının karşılaştırılması.....	74
Tablo 5.2. Farklı başlangıç noktaları ile 0 sabit noktasını elde etmek için gereken iterasyon adım sayısı.....	75
Tablo 5.3. Farklı parametrelerle 0 sabit noktasını elde etmek için gereken iterasyon adım sayısı.....	76



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1. $T(x) = \sin(x^2 + \pi x - 1)$ fonksiyonunun sabit noktaları	14
Şekil 5.1. Tablo 5.1'e göre AA-iterasyonu ve diğer iterasyonlar arasında grafiksel karşılaştırma.	75





ZAMAN ÖLÇEĞİNDE BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI VE YAKINSAKLIK SONUÇLARI

ÖZET

Anahtar kelimeler: Zaman ölçeği, integral denklemler, kararlılık, sabit nokta, genişlemeyen dönüşümler

Bu tezin amacı $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin keyfi, boştan farklı ve kapalı bir alt kümesi olarak tanımlanan zaman ölçeğinde Volterra integral denklemlerin Ulam-Hyers ve Ulam-Hyers-Rassias kararlılıklarını incelemektir. Tezde aynı zamanda farklı uzaylarda zaman ölçekleri üzerinde verilen Fredholm integral denklemlerin çözümlerinin varlığı veya tekliği incelenmiştir. Bu amaçlar doğrultusunda hazırlanan tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmış olup integral denklem, zaman ölçeği ve kararlılık kavramlarının tarihsel gelişimi hakkında kısaca bilgiler verilmiştir.

İkinci kısımda temel kavramlar başlığı ile tezde kullanılan temel bilgiler, teoremler ve örnekler ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur.

Diğer kısımlar tezin orijinal sonuçlarını içermektedir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak zaman ölçeklerinde verilen farklı türden iki Volterra integral denklemi genelleştirilmiş ve bu denklemler için Ulam-Hyers ve Ulam-Hyers-Rassias kararlılıkları incelenmiştir. Ayrıca lineer olmayan bir Volterra integral denklemi zaman ölçeği üzerinde tanımlanarak bu denklem için Ulam-Hyers ve Ulam-Hyers-Rassias kararlılık sonuçları ispatlanmış ve bu sonuçları destekleyen bir örnek sunulmuştur. Bu bölümün son kısmında ise zaman ölçeğinde verilen genel bir Volterra integral denklemin Ulam-Hyers-Rassias kararlılığına sahip olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, b –metrik benzeri uzaylarda T –ortalama genişlemeyen bir dönüşümün tek bir sabit noktasının olduğu gösterilmiş ve bu dönüşüm kullanılarak T –Picard iterasyon yönteminin (T, S) –kararlılık sonucuna yer verilmiştir. Sabit nokta teoreminin sonucu ile zaman ölçeklerinde tanımlanan lineer olmayan Fredholm-Hammerstein ve lineer Fredholm integral denklemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. Ek olarak, bulguları desteklemek için farklı zaman ölçeklerinden iki sayısal örnek sunulmuştur.

Beşinci bölümde, ilk olarak 2022 yılında Abbas ve ark. tarafından Banach uzayında tanıtılan AA –iterasyon metodu hiperbolik metrik uzaya modifiye edilmiştir. Daha sonra bu tür uzaylarda daralma dönüşümleri için zayıf w^2 –kararlılık sonucu ile genelleştirilmiş (α, β) –genişlemeyen dönüşümler için kuvvetli yakınsaklık ve Δ –yakınsaklık sonuçları incelenmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş (α, β) –genişlemeyen dönüşümler için nümerik bir örnek sunulup, farklı iterasyon metotları ile karşılaştırmalı bir yakınsama analizi yapılmıştır. Son olarak elde edilen bulgular zaman ölçeğindeki lineer olmayan Fredholm-Hammerstein ve lineer Fredholm integral denklemleri üzerinde uygulamalar ile değerlendirilmiştir.

Son bölüm ise sonuç ve öneriler kısmı ile tamamlanmıştır.

Bu tezden üretilen makalelerden biri Maltepe Journal of Mathematics dergisinde diğer ikisi ise AIMS Mathematics dergisinde yayımlanmıştır. Bahsi geçen makaleler zaman ölçeği üzerinde integral denklemlerin kararlılığı ve çözümlerinin varlığı veya tekliği ile ilgili ileride yapılacak çalışmalara kaynak teşkil edecek niteliktedir.



CONVERGENCE RESULTS AND STABILITY OF SOME INTEGRAL EQUATIONS ON TIME SCALE

SUMMARY

Keywords: Time scale, integral equations, stability, fixed point, nonexpansive mappings

The aim of this thesis is to examine the Ulam-Hyers and Ulam-Hyers-Rassias stabilities for Volterra integral equations, which are special classes of integral equations, on time scales and to investigate the existence or uniqueness of solutions to Fredholm integral equations on time scales in different spaces using fixed point theorems. The thesis prepared for this purpose consists of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction and brief information is given about the historical development of the integral equation, time scale and stability concepts.

Integral equations are fundamental to many areas of applied mathematics and naturally occur in many applications in the fields of mathematics, physics, and technology. Numerous physical issues, including diffusion, neutron transport, quantum mechanics, geophysics, electricity, traffic theory, and many more, can be modeled using them. Algebraic surfaces, hyper-surfaces, and curves can be efficiently parameterized using solutions to integral equations. By definition, equations with an unknown function under the integral sign are called integral equations.

The concept of time scale discussed here is an arbitrary, nonempty and closed subset of the set of real numbers $\mathbb{R}$. The theory of time scales analysis has been rising fast and has attracted much interest. Therefore, many researchers have studied this issue. The pioneer of this theory was Stephan Hilger. He introduced this theory in 1988 with the inspiration to unify continuous and discrete calculus.

On the other hand, the concept of stability was originally raised by Ulam in 1940 in a talk given at Wisconsin University. The problem posed by Ulam was the following: “Under what conditions does there exist an additive mapping near an approximately additive mapping?” The first answer to the question of Ulam was given by Hyers in 1941 in the case of Banach spaces. Let G_1, G_2 be two Banach spaces and $\epsilon > 0$. Then for every mapping $f : G_1 \rightarrow G_2$ satisfying

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$$

for all $x, y \in G_1$, there exists a unique additive mapping $h : G_1 \rightarrow G_2$ such that

$$\|f(x) - h(x)\| \leq \epsilon, \quad \text{for all } x \in G_1.$$

Thereafter, this type of stability is called the Ulam-Hyers stability. In 1978, Rassias provided a remarkable generalization of the Ulam-Hyers stability of mappings by considering variables.

In the second part, the basic information, theorems and examples used in the thesis are presented in detail under the title of basic concepts. This information is listed as follows.

- Basic definitions and theorems
- The concept of fixed point and some iterations
- Some mapping classes
- Integral equations
- The concept of time scale
- The concepts of stability
- Some generalized metric spaces

Other parts contain the original results of the thesis.

In the third chapter, firstly, two different types of Volterra integral equations on time scales are generalized and the Ulam-Hyers and Ulam-Hyers-Rassias stabilities for these equations are examined. Also, by defining a nonlinear Volterra integral equation on time scales, the stability results for this Volterra integral equation are proven and an example supporting these results is presented. Finally, it is shown that a general Volterra integral equation given on the time scale has Ulam-Hyers-Rassias stability. The equations studied here are given as follows, respectively.

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, x(s), x(\sigma(s))) \Delta s, \quad t, s \in I_{\mathbb{T}} = [a, \infty) \cap \mathbb{T},$$

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s) x(s) \Delta s, \quad t, s \in I_{\mathbb{T}} = [a, b] \cap \mathbb{T},$$

$$x(t) = f(t) + \varphi \left(\int_a^t K(t, s, x(s)) \Delta s \right), \quad t, s \in I_{\mathbb{T}} = [a, b] \cap \mathbb{T},$$

$$x(t) = f \left(t, x(t), x(\sigma(t)), \int_a^t K(t, s, x(s), x(\sigma(s))) \Delta s \right), \quad t, s \in I_{\mathbb{T}} = [a, +\infty) \cap \mathbb{T}.$$

In the fourth chapter, it is shown that a T –mean nonexpansive mapping has a unique fixed point in a b –metric-like space which is a more general space than the metric space, and a (T, S) –stability result of the T –Picard iteration method is given by using this mapping. The definition of the mentioned mapping is as follows.

Let T, S be self-mappings on a metric space (X, d) . S is said to be a T –mean nonexpansive mapping if there exist $\alpha, \beta \geq 0$ with $\alpha + \beta \leq 1$ such that

$$d(T(Sx), T(Sy)) \leq \alpha d(T(x), T(y)) + \beta d(T(x), T(Sy)), \quad \forall x, y \in X.$$

In this definition if $T = I$, then the mapping S is mean nonexpansive, that is, under the same condition it is satisfy

$$d(Sx, Sy) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, Sy), \quad \forall x, y \in X.$$

With the result of the fixed point theorem, the existence and uniqueness of the solutions of the nonlinear Fredholm-Hammerstein and linear Fredholm integral equations defined on time scales have been proven. Additionally, two numerical examples from different time scales are presented to support the findings.

In the fifth chapter, the AA –iteration method, first introduced in Banach spaces by Abbas et al. in 2022, is extended to hyperbolic metric spaces. Then, the weak w^2 –stability result for contraction mappings and the strong convergence and

Δ –convergence results for generalized (α, β) –nonexpansive mappings were examined in such spaces. In addition, a numerical example for generalized (α, β) –nonexpansive mappings is presented and a comparative analysis is made with different iteration methods. Finally, the findings were evaluated with applications to nonlinear Fredholm-Hammerstein and linear Fredholm integral equations on time scales.

The mentioned iteration method has been modified to hyperbolic spaces as follows:

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ w_n = W(x_n, T(x_n), \sigma_n), \\ z_n = T(W(w_n, T(w_n), \rho_n)), \\ y_n = T(W(T(w_n), T(z_n), \eta_n)), \\ x_{n+1} = T(y_n), \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

The mapping studied in this section is the generalized (α, β) –nonexpansive mappings, which is a more general mappings than some nonexpansive mappings and is introduced by Ullah et al. in 2020 as follows:

A self mapping T on a nonempty subset C of a metric space (X, d) is said to be generalized (α, β) –nonexpansive mapping if there exist real numbers $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ satisfying $\alpha + \beta < 1$ such that $\frac{1}{2}d(Tx, x) \leq d(x, y)$ implies

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, Ty) + \alpha d(Tx, y) + \beta d(x, Tx) + \beta d(y, Ty) + (1 - 2\alpha - 2\beta)d(x, y).$$

A numerical example of generalized (α, β) –nonexpansive mapping is given as follows:

Let $X = \mathbb{R}$ be a space endowed with the metric $d(u, v) = |u - v|$. Assume that $C = [0, \infty)$. Consider a self-mapping $T: C \rightarrow C$ defined by

$$T(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{8}, \\ \frac{19x}{40}, & x > \frac{1}{8}. \end{cases}$$

If $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$, then T is a generalized (α, β) –nonexpansive mapping.

The last section is completed with the conclusion and recommendations.

Three article have been published within the scope of this thesis. One of the articles produced from this thesis was published in Maltepe Journal of Mathematics, and the others in AIMS Mathematics. The mentioned articles will serve as a source for future studies on the stability of integral equations on the time scale and the existence of their solutions.



1. GİRİŞ

Sabit nokta teoremleri farklı problemlere yönelik çözümlerin varlığını ve tekliğini göstermek için önemli araçlardır. Bu nedenle sabit nokta teorisi modern matematiğin en önemli konularından biridir. Aynı zamanda fizik, mühendislik, ekonomi, iktisat gibi pek çok alanda uygulamaları olan bir disiplindir. Tarihsel olarak topolojik, ayırık ve metrik olmak üzere üç ana dalda gelişme göstermiştir.

İlk topolojik çalışmalar 1912 yılında Brouwer'in $\mathbb{R}^n$ nin kapalı birim yuvarından kendisine tanımlı sürekli dönüşümlerin sabit noktasının var olduğunu göstermesi ile başlamıştır [1]. Ardından 1930 yılında Schauder bir Banach uzayının kompakt ve konveks alt kümesinden kendisine tanımlı sürekli dönüşümlerin sabit noktasının varlığını ispat ederek Brouwer'in çalışmasını sonsuz boyutlu uzaylara genişletmiştir [2]. Darbo ise 1955 yılında kompakt olmama ölçüsü kavramını kullanarak yoğunlaşma (condensing) operatörleri olarak adlandırılan dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını garanti eden bir teorem ispatlamıştır [3]. Ayrıca Krasnoselskii ve Mönch bu alandaki çalışmaları genişletmişlerdir [4-5].

Metrik sabit nokta teorisindeki çalışmaların temeli ise Banach'ın sabit nokta teoremine dayanmaktadır [6]. Bu teorem diğer sabit nokta teoremlerinden farklı olarak sabit noktanın varlığını garanti ederek nasıl bulunabileceğini de göstermektedir. Ancak bu teoremden yalnızca daralma (contraction) dönüşümleri çalışıldığında Picard iterasyonundan elde edilen dizi sabit noktaya yakınsamaktadır [7]. Daralma dönüşümleri düzgün sürekli dönüşümlerdir. Oysa ki, bilimin çok farklı sahalarında ortaya çıkan problemlerin modellenmesinde kullanılan dönüşümlerin büyük çoğunluğu sürekli değildir. Bu ise araştırmacılar tarafından yeni iterasyon yöntemleri tanımlama ihtiyacını ortaya çıkarmıştır.

İterasyon algoritmaları, çözümleri analitik yöntemlerle elde edilemeyen lineer olmayan problemlerin çözümlerine yaklaşımda kullanılan en güçlü araçlardır. Bu nedenle son yıllarda, bilimin ve mühendisliğin çeşitli dallarında ortaya çıkan lineer olmayan problemleri çözmek için daha hızlı ve daha etkili iterasyon yöntemleri geliştirmeye yoğun bir ilgi oluşmuştur [8-16].

Bu tanımlanan iterasyon yöntemleri için uygun şartlar altında, varlığı veya tekliği garanti edilen bu sabit noktaya ulaşmak için yakınsaklık, yakınsaklık hızı ve kararlılık gibi sabit nokta teoremleri elde edilerek geniş bir literatür oluşturulmuştur.

1.1. Literatür Özeti

Banach uzaylarının geometrisi ile sabit nokta teorisi arasındaki ilişki çok faydalı ve güçlü olmuştur. Özellikle sabit nokta problemlerinde çalışılan uzayın geometrik özelliğinin kilit bir rolü vardır. Bu problemlerde ağırlıklı olarak konvekslik özelliği ve Banach uzaylarının diğer geometrik özellikleri kullanılmaktadır. Her Banach uzayı bir vektör uzayı olduğundan, bu uzaylara konveks bir yapı vermek daha kolaydır. Bu nedenle Banach uzaylarının geometrisi konveks yapıları ile yoğun bir şekilde çalışılmıştır. Ancak metrik uzaylarda konveks bir yapı elde etmek daha zordur. Bu zorluk Takahashi tarafından metrik uzaylarda konvekslik kavramının tanımlanmasıyla aşılmıştır [17]. Diğer yandan sabit nokta teorisi, metrik uzayların da birçok genelleştirilmesinde ele alınmıştır. Bu genelleştirmelerden biri Alghamdi ve ark. [18] tarafından 2013 yılında tanımlanan b –metrik benzeri uzaydır. Bu uzayda metrik uzay tanımının ilk şartı olan $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ifadesi $D(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ şeklinde sadece gerek şart olarak verilmiştir. Bu durum bize bazı x ler için $D(x, x)$ ifadesinin pozitif olması durumunu sağlar. Dolayısıyla her metrik uzay b –metrik benzeri uzaydır ancak tersi her zaman doğru değildir.

Gerçek hayatta karşılaşılan birçok problem lineer olmayan formda ifade edilebildiği için bu problemlerin Banach uzayları gibi lineer yapılar yerine lineer olmayan yapılarda incelenmesi daha gerçekçi bir yaklaşım olacaktır. Bu bağlamda, lineer olmayan yapısı ve güçlü geometrik özelliği nedeniyle hiperbolik metrik uzay, bu problemlerin incelenmesinde sabit nokta teorisi için uygun bir matematiksel temel sunmaktadır. Hiperbolik metrik uzaylar, lineer uzaylarla pek çok benzerlik taşıyan konvekslik özelliklerine sahiptir. Bu uzaylar, normlu vektör uzaylarından, Hadamard manifoldlarına, CAT(0) uzayına, Hilbert yuvarına, Hilbert yuvarlarının kartezyen çarpımına ve $\mathbb{R}$ –ağaçlarına kadar geniş bir yapı sınıfını kapsamaktadır [19]. 2005 yılında, Kohlenbach [20] tarafından tanımlanan hiperbolik metrik uzaylar, Goebel ve Kirk [21] tarafından verilen hiperbolik uzay tanımına göre daha kısıtlayıcı ve Reich ve Shafrir [22] tarafından ortaya atılan hiperbolik uzay tanımından ise daha geneldir. Bu çalışmalar, klasik sabit nokta iterasyon yöntemlerinin hiperbolik metrik uzaylara

uyarlanmasını sağlamış ve pek çok sabit nokta teoremine ulaşılmasına olanak tanımıştır.

Öte yandan farklı iterasyon yöntemlerinin gelişimi ile birlikte dönüşüm sınıfları da çeşitlenmiştir. Bunlardan bazıları genişlemeyen dönüşümlerin daha genel bir sınıfı olan genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümlerdir. Özellikle Suzuki'nin [23] ile tanıttığı genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümlerden sonra bu alanda yapılan çalışmalar büyük ilgi görmüştür. 2017'de Pant ve Shukla [24] α –genişlemeyen dönüşümleri, 2018'de Pant ve Pandey [25] β –Reich Suzuki genişlemeyen dönüşümleri tanıtmışlardır. 2020'de ise Ullah ve ark. [26] genelleştirilmiş (α, β) –genişlemeyen dönüşümleri tanımlamış ve bu dönüşümün diğerlerinden daha genel bir dönüşüm olduğunu belirtmişlerdir. Son olarak 2022 yılında, Mebawonu ve ark. [27] T –ortalama genişlemeyen dönüşümleri tanımlamışlardır.

Diğer yandan fizik ve mühendislik uygulamalarında bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında olan denklemlere sıklıkla rastlanır. Bu tür denklemler integral denklemler olarak adlandırılır [28-29]. Banach sabit nokta teoreminin reel analiz, nümerik analiz, adi diferansiyel denklemler ve integral denklemlere yönelik çeşitli uygulamaları mevcuttur. İntegral denklemlerin ele alınışı 19. yüzyılın ilk yarısına kadar uzanır. Başlangıçta bu alanda dağınık ve bireysel çalışmalar yürütülse de, aynı yüzyılın sonlarına doğru daha sistematik ve bilinçli araştırmaların yapıldığı ve bazı önemli sonuçların elde edildiği gözlenmiştir. Abel'in 1823 yılında bir mekanik problemi incelerken ilk kez bir integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Ancak integral denklem terimini Du Bois Reymond'un bir çalışmasında önerdiği anlaşılmaktadır.

Zaman ölçeği $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin keyfi, boştan farklı ve kapalı bir alt kümesidir. Zaman ölçeği teorisi son yıllarda oldukça ilgi görmektedir ve hızla yayılmaktadır. Bu teoremin öncüsü Stefan Hilger' dir [30]. Hilger doktora tezinde sürekli ve ayrık hesaplamaları birleştirmek için bir çalışma başlatmıştır. Zaman ölçeklerinde hesaplamaya ve dinamik denklemler teorisine giriş yapmak için ise Bohner ve Peterson tarafından yazılan kitap temel kaynak niteliğindedir [31]. Zaman ölçeklerindeki hesaplamalar, gerçek süreçlerin matematiksel modellerindeki uygulamalar için muazzam bir potansiyele sahiptir. Örneğin; biyoteknoloji, kimya teknolojisi, ekonomi, sinir ağları, fizik, sosyal bilimler vb [32-33].

Ulam-Hyers ve pek çok genelleştirilmiş Ulam-Hyers tipi kararlılığın tarihi Ulam'ın grup homeomorfizmin kararlılığı ile ilgili meşhur konuşmasındaki şu soruyu sorduğu 1940 yılında başlamıştır [34].

“($G_1, *$) bir grup ve ($G_2, \cdot, d$) $d(\cdot, \cdot)$ metriği ile bir metrik grup olsun. $f: G_1 \rightarrow G_2$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olmak üzere $\varepsilon > 0$ için

$$d(f(x * y), f(x) \cdot f(y)) < \delta, \quad \forall x, y \in G_1$$

eşitsizliğinin sağlanması durumunda $h: G_1 \rightarrow G_2$ homeomorfizmi

$$d(f(x), h(x)) < \varepsilon, \quad \forall x \in G_1$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ mevcut mudur ?”

Bu problem fonksiyonel denklemlerin kararlılık teorisinin başlangıç noktası olarak kabul edilmiştir. Matematik problemlerinin kararlılık kavramı daha geniş bir bakış açısıyla şu şekilde verilebilir: "Bir teoremin hipotezlerinde küçük bir değişiklik yapıldığında teoremin ana sonucunun doğru ya da yaklaşık olarak doğru kaldığı durumlar nelerdir?" veya "Belirli bir özelliği yaklaşık olarak sağlayan bir matematiksel nesnenin, bu özelliği tam olarak sağlayan bir nesneye yakın olmasının gerektiği durumlar hangi koşullarda geçerlidir?". Bu kavramı fonksiyonel denklemler bağlamında ele alınırsa, şu sorular öne çıkar: “Verilen bir denklemden yalnızca biraz farklı olan bir denklemin çözümü, bu denklemin çözümüne ne zaman yakın olur?” ya da “Bir fonksiyonel denklem bir fonksiyonel eşitsizlik ile değiştirildiğinde eşitsizliğin çözümlerinin denklemin çözümlerine yakın olması gerektiği hangi durumlarda doğrudur?” Fonksiyonel denklemlerin kararlılık problemi bu tür temel sorulara yanıt aranması sonucu ortaya çıkmıştır [35].

Bir yıl sonra Hyers [36], G_1 ve G_2 'nin Banach uzay olması halinde bu problemi doğrudan yaklaşımla zekice çözmüştür. O zamandan beri bu kararlılık kavramı Ulam-Hyers kararlılığı olarak adlandırılmaktadır. Hyers, $f: G_1 \rightarrow G_2$ bir fonksiyon olmak üzere $\varepsilon > 0$ için

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in G_1$$

eşitsizliğinin her bir çözümünün toplam fonksiyonu olarak adlandırılan bir tam çözüme yaklaştırılabileceğini ispat etmiştir. Bu durumda $f(x + y) = f(x) + f(y)$ Cauchy toplam fonksiyonel denklemin Ulam-Hyers kararlılığına sahip olduğu iddia edilmektedir. Daha sonra Aoki [37], Bourgin [38] ve Rassias [39] bu sonucu

genelleştirmiştir. Bunlardan en etkili olanı Rassias'ın Cauchy farkı normunun sınır koşulunu zayıflatarak elde ettiği yeni sonuç olmuştur. Rassias tarafından tanıtılan bu yeni tip kararlılık şimdilerde Ulam-Hyers -Rassias kararlılığı olarak bilinmektedir.

O zamandan beri bu ilk soru geniş bir denklem yelpazesine genelleştirilmiş ve fonksiyonel denklemler ile operatoryal denklemler için birkaç önemli sonuç elde edilmiştir. Son 10 yılda, çeşitli denklem tipleri için (fonksiyonel, diferansiyel, kesirli diferansiyel, integral, kısmi diferansiyel denklemler gibi) Ulam-Hyers kararlılık problemi çok sayıda çalışmada ele alınmıştır [40-43].





2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmanın temel sonuçlarının elde edilmesine yardımcı olan bazı tanımlar, teoremler, dönüşüm sınıfları ve iterasyon yöntemleri verilmiştir.

2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 2.1.1. (Metrik Kavramı ve Metrik Uzak)

X boştan farklı bir küme ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri)

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlansın. Bu durumda d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzak denir [44].

Örnek 2.1.2.

(i) $X = \mathbb{R}$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) = |x - y|$$

şeklinde tanımlanan $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir ve $(\mathbb{R}, d)$ uzayına da alışılmış metrik uzak denir [45].

(ii) $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $C(I, \mathbb{R}) = \{x = x(t) \mid x: I \rightarrow \mathbb{R}, x \text{ sürekli}\}$ kümesi üzerinde

$$d_{\infty}(x, y) = \sup_{t \in I} |x(t) - y(t)|$$

ile tanımlanan $d_{\infty}: C(I, \mathbb{R}) \times C(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir metriktir ve $(C(I, \mathbb{R}), d_{\infty})$ uzayı bir metrik uzaydır [44].

Tanım 2.1.3. (Kuvvetli Yakınsaklık)

(X, d) bir metrik uzak ve $\{x_n\}$ bu uzakda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\forall n \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine $x \in X$

noktasına yakınsar ya da kuvvetli yakınsar denir. Bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) şeklinde gösterilir. [44].

Tanım 2.1.4. (Cauchy Dizisi)

(X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\forall n, m \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir [44].

Tanım 2.1.5. (Tam Metrik Uzay)

(X, d) bir metrik uzay olsun. X deki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsak ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir [46].

Metrik uzaylarda aşağıdaki durumlar geçerlidir:

- (i) Yakınsak bir dizinin limiti tektir. Ayrıca, bir dizinin yakınsaklığı uzayda tanımlanan metriğe ve içinde bulunduğu uzaya bağlı olarak değişir.
- (ii) Yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir, fakat tersi her zaman doğru değildir.
- (iii) Yakınsak bir dizinin herhangi bir alt dizisi de aynı noktaya yakınsaktır.
- (iv) Tam metrik uzayların her alt uzayının tam olması gerekmez. Tam metrik uzayların kapalı her alt uzayı tamdır [44].

Örnek 2.1.6.

$X = (0,1]$, $(\mathbb{R}, d)$ alışılmış metrik uzayın bir alt kümesi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \frac{1}{n}$ dizisi bu uzayda bir Cauchy dizisidir ancak yakınsak değildir. Gerçekten her $\varepsilon > 0$ ve $m, n > \frac{1}{\varepsilon}$ için $d(x_n, x_m) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon$ dir. Ancak $x_n \rightarrow 0 \notin X$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisi bu uzayda bir yakınsak dizi değildir [44].

Örnek 2.1.7.

$\mathbb{R}$ alışılmış metriğe göre tam metrik uzaydır fakat $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ alışılmış metriğe göre tam metrik uzay değildir [44].

Teorem 2.1.8. (Weierstrass $M -$ Testi)

(X, d) bir metrik uzay, $C \subset X$ ve $f_n: C \rightarrow X$ bir fonksiyon dizisi olsun. $\forall x \in C$ ve $\forall k$ için $|f_k(x)| \leq M_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$ sağlanırsa, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ serileri C 'de düzgün yakınsaktır [46, Teorem 5].

Tanım 2.1.9. (Kompakt Küme)

(X, d) bir metrik uzay ve $C \subset X$ olsun. C kümesindeki her $\{x_n\}$ dizisi C kümesinin bir elemanına yakınsayan bir alt diziye sahipse C kümesine kompakt küme denir [45].

Tanım 2.1.10. (Süreklilik Dönüşümü)

(X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa f ye x_0 noktasında süreklidir denir. f, X in her noktasında sürekli ise f ye X de süreklidir denir [47].

Teorem 2.1.11. (Ortalama Değer Teoremi)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. O halde (a, b) aralığında

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

olacak şekilde en az bir c noktası vardır [47].

Tanım 2.1.12. (Asimptotik Yarıçap ve Asimptotik Merkez)

(X, d) bir metrik uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme ve $\{x_n\}$ bu uzayda sınırlı bir dizi olsun. $r(., \{x_n\}): X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $x \in X$ olmak üzere

$$r(x, \{x_n\}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, \{x_n\})$$

şeklinde tanımlansın. C üzerindeki $r(., \{x_n\})$ fonksiyonunun infimumuna $\{x_n\}$ dizisinin C ye göre asimptotik yarıçapı denir ve $r(C, \{x_n\})$ ile gösterilir [38]. Yani asimptotik yarıçap $r(C, \{x_n\}) = \inf\{r(x, \{x_n\}): x \in C\}$ dir.

Eğer $w \in C$ için

$$r(w, \{x_n\}) = \inf\{r(x, \{x_n\}): x \in C\} = r(C, \{x_n\})$$

olursa $w \in C$ noktasına $\{x_n\}$ dizisinin C ye göre asimptotik merkezi denir ve $\{x_n\}$ dizisinin C ye göre tüm asimptotik merkezlerinin kümesi $A(C, \{x_n\})$ ile gösterilir.

$\{x_n\}$ dizisinin asimptotik yarıçapı ve asimptotik merkezi X e göre alınırsa sırasıyla $r(\{x_n\})$ ve $A(\{x_n\})$ ile gösterilir [48].

Tanım 2.1.13. (Δ –yakınsaklık)

(X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin her $\{u_n\}$ alt dizisi tek bir x asimptotik merkezine sahipse $\{x_n\}$ dizisi x elemanına Δ –yakınsar denir. Bu durum $\Delta - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir ve x elemanına $\{x_n\}$ dizisinin Δ –limiti denir [49].

Tanım 2.1.14. (Vektör Uzayı)

X boştan farklı bir küme ve $\mathbb{F}$ bir sayı cismi olsun. $+: X \times X \rightarrow X$ ve $.: \mathbb{F} \times X \rightarrow X$ işlemleri tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X kümesine $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzayı (lineer uzay) denir.

1) X kümesi $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

- (i) Her $x, y \in X$ için $x + y \in X$ dir.
- (ii) Her $x, y, z \in X$ için $(x + y) + z = x(y + z)$ dir.
- (iii) Her $x \in X$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır.
- (iv) Her $x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in X$ vardır.
- (v) Her $x, y \in X$ için $x + y = y + x$ dir.

2) $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

- (i) $\alpha x \in X$ dir.
- (ii) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ dir
- (iii) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ dir.
- (iv) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ dir.
- (v) $1.x = x$ dir.

Burada $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise X kümesine reel vektör uzayı, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ise X kümesine kompleks vektör uzayı denir [50].

Tanım 2.1.15. (Normlu Uzay)

$X, \mathbb{F}$ sayı cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun ve $\|.\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x noktasındaki değeri $\|x\|$ ile verilsin. Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için

- (i) $\|x\| \geq 0$

$$(ii) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$(iii) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(iv) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartlarını sağlayan $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [45].

Normlu uzaylar için aşağıdaki örnekler verilebilir.

Örnek 2.1.16.

(i) $X = \mathbb{R}$ olsun. $x \in \mathbb{R}$ için $\|\cdot\|$ fonksiyonu $\|x\| = |x|$ ile tanımlandığında $\mathbb{R}$ üzerinde bir norm belirtir [45].

(ii) $X = C([a, b], \mathbb{R})$ tüm sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\|f - g\| = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$ ile bir norm belirtir [46].

(iii) $X = C_\beta([a, b], \mathbb{R}^n)$, $[a, b]$ aralığında bir lineer uzay olsun. $x \in C_\beta([a, b], \mathbb{R}^n)$ için $\|\cdot\|$ fonksiyonu $\|x\|_\beta = \sup_{t \in [a, b]} \frac{|x|}{e_\beta(t, a)}$ ile tanımlandığında $C_\beta([a, b], \mathbb{R}^n)$ üzerinde Bielecki tipi bir norm belirtir [51].

Tanım 2.1.17. (Sınırlı Lineer Operatör)

X bir lineer uzay olmak üzere $\forall x \in X$ için $\|\varphi(x)\| \leq M\|x\|$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı mevcutsa $\varphi: X \rightarrow X$ lineer operatörü sınırlıdır. Bu durumda $x \in X$ için $\|\varphi\| = \sup \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}; x \neq 0$ olarak tanımlanır ve böylece φ operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\|\varphi\| < \infty$ olmasıdır [46].

Tanım 2.1.18. (Banach Uzay)

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu vektör uzay olsun. Eğer X uzayı

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad (x, y \in X)$$

ile verilen normdan üretilen metriğe göre tam ise bu uzaya Banach uzayı denir [52].

Örnek 2.1.16'da verilen $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.19. (Konveks Küme)

X bir vektör uzayı ve $C \subseteq X$ olsun. Her $x \in C$ için

$B = \{z \in X: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq C$ ise C kümesine konvektir denir [47].

Tanım 2.1.20. (Düzgün Konveks Uzay)

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu vektör uzay olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $x, y \in X$ için $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olduğunda $\frac{\|x-y\|}{2} \leq 1 - \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa X uzayına düzgün konvektir denir [53].

Tanım 2.1.21. (Konveks Metrik Uzay)

(X, d) bir metrik uzay ve $W: X \times X \times [0,1] \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $d(z, W(x, y, \alpha)) \leq (1 - \alpha)d(z, x) + \alpha d(z, y)$ şartı sağlanıyorsa W dönüşümüne X üzerinde bir konveks yapı ve W konveks yapısıyla birlikte X e konveks metrik uzay denir [17].

Kohlenbach, 2005 yılında Takahashi'nin konveks metrik uzay tanımına aşağıdaki diğer üç şartı da ekleyerek hiperbolik metrik uzay kavramını tanımlamıştır.

Tanım 2.1.22. (Hiperbolik Metrik Uzay)

(X, d) bir metrik uzay ve $W: X \times X \times [0,1] \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y, z, w \in X$ ve $\alpha, \beta \in [0,1]$ için

$$(W1) \ d(z, W(x, y, \alpha)) = (1 - \alpha)d(z, x) + \alpha d(z, y)$$

$$(W2) \ d(W(x, y, \alpha), W(x, y, \beta)) = |\alpha - \beta|d(x, y)$$

$$(W3) \ W(x, y, \alpha) = W(y, x, (1 - \alpha))$$

$$(W4) \ d(W(x, z, \alpha), W(y, w, \alpha)) \leq (1 - \alpha)d(x, y) + \alpha d(z, w)$$

şartları sağlanıyorsa (X, d) metrik uzayına hiperbolik metrik uzay denir ve (X, d, W) ile gösterilir [20].

Bu tanımdaki (W1) şartından her hiperbolik metrik uzayın bir konveks metrik uzay olduğu görülür. Ancak, her konveks metrik uzay bir hiperbolik metrik uzay değildir. Diğer taraftan her Banach uzayı bir hiperbolik metrik uzaydır. Bunu görmek için Banach uzayını norm metriği ile düşünüp $W(x, y, \alpha) = (1 - \alpha)x + \alpha y$ almak yeterlidir. Ancak her hiperbolik metrik uzay bir Banach uzayı teşkil etmez.

Örnek 2.1.23.

$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1, x_2 > 0\}$ kümesi verilsin. X kümesindeki her $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ için $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ metriği $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_1 x_2 - y_1 y_2|$ şeklinde tanımlansın. O zaman (X, d) bir metrik uzaydır. Ancak $\alpha \in [0,1]$ için

$$W(x, y, \alpha) = \left((1 - \alpha)x_1 + \alpha y_1, \frac{(1 - \alpha)x_1x_2 + \alpha y_1y_2}{(1 - \alpha)x_1 + \alpha y_1} \right)$$

şeklinde $W: X \times X \times [0,1] \rightarrow X$ fonksiyonu tanımlansın. O zaman (X, d, W) bir hiperbolik metrik uzaydır fakat bir normlu lineer uzay değildir [25].

Tanım 2.1.24. (Düzgün Konveks Hiperbolik Metrik Uzay)

(X, d, W) bir hiperbolik metrik uzay olsun. Her $x, y, u \in X$, $r > 0$ ve $\varepsilon \in (0,2]$ için

$$\left. \begin{array}{l} d(x, u) \leq r \\ d(y, u) \leq r \\ d(x, y) \geq \varepsilon r \end{array} \right\} \Rightarrow d\left(W\left(x, y, \frac{1}{2}\right), u\right) \leq (1 - \delta)r$$

olacak şekilde $\delta \in (0,1]$ sabiti varsa X e düzgün konveks hiperbolik metrik uzay denir [53].

Tanım 2.1.25. (Düzgün Konvekslik Modülü)

Verilen bir $r > 0$ ve $\varepsilon \in (0,2]$ için $\delta = \eta(r, \varepsilon)$ eşitliğini sağlayan $\eta: (0, \infty) \times (0,2] \rightarrow (0,1]$ dönüşümüne düzgün konvekslik modülü denir. Sabit bir ε için η dönüşümü r ye göre azalıyorsa η modülüne monotondur denir [53].

Çalışmanın geri kalanında η monoton düzgün konvekslik modülüne sahip düzgün konveks ve tam hiperbolik metrik uzayı $\mathbb{X}$ sembolü ile gösterilecektir.

Bu kısma, daha sonra kullanılacak olan lemmalar ile devam edilecektir.

Lemma 2.1.26.

$C, \mathbb{X}$ uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda, $\mathbb{X}$ deki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi C ye göre bir tek asimptotik merkeze sahiptir [53].

Lemma 2.1.27.

$x \in \mathbb{X}$ ve $a, b \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}$, $[a, b]$ aralığında bir dizi olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ $\mathbb{X}$ de iki dizi olmak üzere uygun bir $c \geq 0$ için $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = c$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x) = c$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d(W(x_n, y_n, \alpha_n), x) = c$ şartları sağlansın. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$ dır [54].

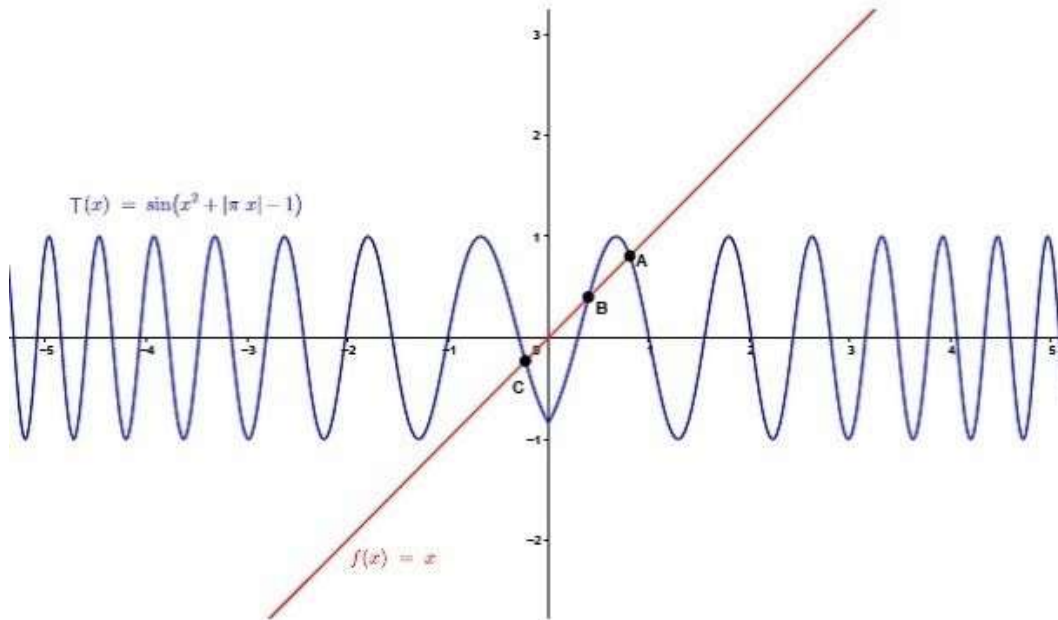
2.2. Sabit Nokta Kavramı ve Bazı İterasyonlar

Tanım 2.2.1. (Sabit Nokta)

X boştan farklı bir küme ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. $T(x) = x$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ noktasına T dönüşümünün sabit noktası (fixed point) denir ve T nin tüm sabit noktalarının kümesi $Fix(T)$ ile gösterilir [55].

Aşağıdaki örneklerden de görülebileceği gibi $T: X \rightarrow X$ ile tanımlanan bir dönüşümün herhangi bir sabit noktası olmayabilir veya bir sabit noktası olabilir ya da birden fazla sabit noktası olabilir [56].

- (i) $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T(x) = e^{x^2}$ dönüşümü için $Fix(T) = \emptyset$ dir.
- (ii) $X = (0,1]$ olmak üzere $T(x) = x^2$ dönüşümü için $Fix(T) = \{1\}$ olur.
- (iii) $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T(x) = x$ dönüşümü için $Fix(T) = \mathbb{R}$ dir.
- (iv) $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T(x) = \sin(x^2 + |\pi x| - 1)$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi, yani fonksiyonun $y = f(x) = x$ doğrusu ile kesim noktaları aşağıdaki grafikte belirtilen noktalardan oluşur.



Şekil 2.1. $T(x) = \sin(x^2 + |\pi x| - 1)$ fonksiyonunun sabit noktaları

Tanım 2.2.2. (Lipschitzian Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k > 0$ sabit sayısı varsa T dönüşümüne Lipschitzian dönüşüm, bu eşitsizliği sağlayan en küçük k sabitine de Lipschitzian sabiti denir [55].

Yukarıdaki tanıma göre Lipschitzian şartını sağlayan her dönüşüm düzgün süreklidir. Çünkü her $\varepsilon > 0$ için $d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow kd(x, y) < k\delta = \varepsilon$ olduğundan $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) < \varepsilon$ olur. Bu da T dönüşümünün düzgün sürekli olduğunu gösterir. Ancak, bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 2.2.3. (Daralma Dönüşümü)

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0, 1)$ sabit sayısı varsa T dönüşümüne daralma (contraction) dönüşüm denir [55].

Örnek 2.2.4.

(X, d) alışılmış bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T(x) = \frac{3x}{5}$ olarak tanımlanan dönüşüm bir daralma dönüşümüdür.

Çünkü $d(T(x), T(y)) = d\left(\frac{3x}{5}, \frac{3y}{5}\right) \leq \frac{3}{5}d(x, y)$ olduğu açıkça görülür.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm düzgün sürekli olduğundan daralma dönüşümleri de düzgün süreklidir. Dolayısıyla T sürekli değilse, bir daralma dönüşümü de olamaz. Buna karşın T daralma dönüşümü olmasa bile, herhangi bir N için T^N daralma dönüşümü olabilir. Bu durum için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.2.5.

$T: [0, 3] \rightarrow [0, 3]$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ 1, & x \in (1, 3] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. T dönüşümü $x = 1$ noktasında süreksizdir dolayısıyla daralma dönüşümü değildir. Ancak $T^2: [0, 1] \rightarrow \{0\}$, $T^2(x) = 0$ olup bir daralma dönüşümüdür. Ayrıca $x = 0$ noktası T^2 dönüşümünün tek sabit noktasıdır.

Teorem 2.2.6. (Schauder Sabit Nokta Teoremi)

C , X Banach uzayının boştan farklı, kompakt ve konveks bir alt kümesi olsun. $T: C \rightarrow C$ sürekli operatör ise T dönüşümünün en az bir sabit noktası vardır [2].

Teorem 2.2.7. (Banach Sabit Nokta Teoremi)

(X, d) tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir [6].

Örnek 2.2.4'te tanımlanan T dönüşümü ve Örnek 2.2.5 de tanımlanan T^2 dönüşümü Banach sabit nokta teoremi gereğince tam metrik uzay üzerinde bir tek sabit noktaya sahiptir.

Tanım 2.2.8. (I) Şartı

C , (X, d) metrik uzayının boştan farklı, konveks bir alt kümesi, $T: C \rightarrow C$ herhangi bir dönüşüm ve $Fix(T) \neq \emptyset$ olsun. Eğer $f(0) = 0$ ve $\forall r \in (0, \infty)$ için $f(r) > 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu mevcut ve $\forall x \in C$ için

$$d(x, T(x)) \geq f(d(x, Fix(T)))$$

ise T dönüşümü (I) şartını sağlıyor denir. Burada $d(x, Fix(T)) = \inf\{d(x, x^*): x^* \in Fix(T)\}$ dir [57].

Bir dönüşümün sabit noktası veya noktalarını bulurken çeşitli iterasyon yöntemleri kullanılır. $x_1 \in C$ keyfi bir başlangıç noktası ve $\{\sigma_n\}, \{\rho_n\}$ ve $\{\eta_n\}$ $[0,1]$ aralığında reel sayı dizileri olmak üzere bu iterasyonlardan bazıları aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.2.9. (Picard İterasyonu)

(X, d) bir metrik uzay, $C \subseteq X$ kapalı bir alt küme ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda Picard iterasyonu

$$x_{n+1} = T(x_n) = T^n(x_1), \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır [7].

Bu iterasyon yöntemi Banach sabit nokta teoreminde tek sabit noktayı elde etmek için kullanılmıştır.

Tanım 2.2.10. (T-Picard İterasyonu)

(X, d) bir metrik uzay ve $T, S: X \rightarrow X$ birer dönüşüm olsun.

$$T(x_{n+1}) = T(S(x_n)) = T(S^n(x_1)), \quad n \geq 1 \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan $\{T(x_n)\} \subset X$ dizisi S dönüşümüne göre T –Picard iterasyonu olarak adlandırılır [58].

(2.1) ile verilen iterasyonda $T = I$ birim dönüşüm olarak alınırsa, Picard iterasyonu elde edilir.

Tanım 2.2.11. (Mann İterasyonu)

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı konveks bir alt küme ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olmak üzere Mann iterasyonu

$$x_{n+1} = (1 - \eta_n)x_n + \eta_n T(x_n), \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır [8].

Mann iterasyonunda her $n \geq 1$ için $\eta_n = 1$ olarak alınırsa bu iterasyon, Picard iterasyonuna indirgenir.

Tanım 2.2.12. (Ishikawa İterasyonu)

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı konveks bir alt küme ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olmak üzere Ishikawa iterasyonu

$$\begin{cases} y_n = (1 - \rho_n)x_n + \rho_n T(x_n), \\ x_{n+1} = (1 - \eta_n)x_n + \eta_n T(y_n), \end{cases} \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır [9].

Bu iterasyonda her $n \geq 1$ için $\rho_n = 0$ alınırsa, bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir. Buna rağmen Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur.

Tanım 2.2.13. (Noor İterasyonu)

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı konveks bir alt küme ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olmak üzere Noor iterasyonu

$$\begin{cases} z_n = (1 - \sigma_n)x_n + \sigma_n T(x_n), \\ y_n = (1 - \rho_n)x_n + \rho_n T(z_n), \\ x_{n+1} = (1 - \eta_n)x_n + \eta_n T(y_n), \end{cases} \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır [10].

Noor iterasyonunda her $n \geq 1$ için $\sigma_n = 0$ olarak alınırsa bu iterasyon Ishikawa iterasyonuna ve her $n \geq 1$ için $\rho_n = \sigma_n = 0$ alınırsa bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir.

Tanım 2.2.14. (Agarwal ve ark. İterasyonu)

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı konveks bir alt küme ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olmak üzere S –iterasyonu

$$\begin{cases} y_n = (1 - \rho_n)x_n + \rho_n T(x_n), \\ x_{n+1} = (1 - \eta_n)T(x_n) + \eta_n T(y_n), \end{cases} \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır [11].

Bu iterasyon literatürde S –iterasyonu olarak da adlandırılır ve S –iterasyon yöntemi Mann ve Ishikawa iterasyon yöntemlerinden bağımsızdır.

Tanım 2.2.15. (Abbas ve Nazir İterasyonu)

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı konveks bir alt küme ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olmak üzere Abbas ve Nazir iterasyonu

$$\begin{cases} z_n = (1 - \sigma_n)x_n + \sigma_n T(x_n), \\ y_n = (1 - \rho_n)T(x_n) + \rho_n T(z_n), \\ x_{n+1} = (1 - \eta_n)T(y_n) + \eta_n T(z_n), \end{cases} \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır [12].

Tanım 2.2.16. (Thakur ve ark. İterasyonu)

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı konveks bir alt küme ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olmak üzere Thakur ve ark. iterasyonu

$$\begin{cases} z_n = (1 - \rho_n)x_n + \rho_n T(x_n), \\ y_n = T((1 - \eta_n)x_n + \eta_n z_n), \\ x_{n+1} = T(y_n), \end{cases} \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır [13].

Tanım 2.2.17. (M – İterasyonu)

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı konveks bir alt küme ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olmak üzere M – iterasyonu

$$\begin{cases} z_n = (1 - \eta_n)x_n + \eta_n T(x_n), \\ y_n = T(z_n), \\ x_{n+1} = T(y_n), \end{cases} \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır [14].

Tanım 2.2.18. (F – İterasyonu)

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı konveks bir alt küme ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olmak üzere F – iterasyonu

$$\begin{cases} z_n = T((1 - \eta_n)x_n + \eta_n T(x_n)), \\ y_n = T(z_n), \\ x_{n+1} = T(y_n), \end{cases} \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır [15].

2022 yılında Abbas ve ark. [16] AA –iterasyonu olarak adlandırılan, dört adımlı yeni bir iterasyon yöntemi tanımladılar ve Banach uzayında zenginleştirilmiş genişlemeyen (enriched nonexpansive) dönüşümler için bu iterasyon yönteminin kuvvetli ve zayıf yakınsama sonuçlarını ispatladılar. Ayrıca, AA –iterasyonun bazı dönüşüm sınıfları için önceki iterasyonlardan daha hızlı yakınsadığını gösterdiler.

Tanım 2.2.19. (AA – İterasyonu)

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı kapalı konveks bir alt küme ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olmak üzere AA – iterasyonu

$$\begin{cases} w_n = (1 - \sigma_n)x_n + \sigma_n T(x_n), \\ z_n = T((1 - \rho_n)w_n + \rho_n T(w_n)), \\ y_n = T((1 - \eta_n)T(w_n) + \eta_n T(z_n)), \\ x_{n+1} = T(y_n), \end{cases} \quad n \geq 1 \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır [16].

2.3. Bazı Dönüşüm Sınıfları

Bu kısımda, tezde kullanılan T –ortalama genişlemeyen ve genelleştirilmiş (α, β) –genişlemeyen dönüşüm tanımları ile yaygın olarak kullanılan bazı dönüşümler hakkında bilgiler verilecektir.

Tanım 2.3.1. (Genişlemeyen Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq d(x, y)$$

ise T ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir [55].

Tanım 2.3.2. (Quasi Genişlemeyen Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Eğer $x^* \in \text{Fix}(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in C$ için

$$d(T(x), x^*) \leq d(x, x^*)$$

ise T ye quasi genişlemeyen (quasi nonexpansive) dönüşüm denir [55].

Tanım 2.3.3. (Ortalama Genişlemeyen Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in C$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, Ty)$$

olacak şekilde $\alpha + \beta \leq 1$ şartını sağlayan $\alpha, \beta \in [0, 1)$ sayıları varsa T ye ortalama genişlemeyen (mean nonexpansive) dönüşüm denir [59].

2022 yılında Mebawondu ve ark. [27] T –ortalama genişlemeyen dönüşüm sınıfını tanıttılar. Ayrıca ortalama genişlemeyen dönüşümün sabit noktasının varlığını ve tekliğini gösteren sonucu genelleştirdiler.

Tanım 2.3.4. (T –Ortalama Genişlemeyen Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay ve $T, S: X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. $\alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha + \beta \leq 1$ olmak üzere

$$d(T(Sx), T(Sy)) \leq \alpha d(T(x), T(y)) + \beta d(T(x), T(Sy)) \quad \forall x, y \in X \quad (2.3)$$

şartını sağlayan S dönüşümüne T –ortalama genişlemeyen (T –mean nonexpansive) dönüşüm denir [27].

Tanım 2.3.5. (Genelleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in C$ için

$$\frac{1}{2} d(T(x), x) \leq d(x, y) \Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq d(x, y)$$

ise T dönüşümüne genelleştirilmiş genişlemeyen veya (C) şartını sağlayan dönüşüm denir [23].

Her genişlemeyen dönüşümün (C) şartını sağlayan bir dönüşüm olduğu açıktır ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Bu durum aşağıda verilen örneklerle açıklanabilir.

Örnek 2.3.6. [24, Örnek 1]

$C = [0,3]$ kümesi verilsin ve $T: C \rightarrow C$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 3 \\ 1, & x = 3 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Burada T dönüşümü (C) şartını sağlayan bir dönüşümdür fakat genişlemeyen dönüşüm değildir.

Tanım 2.3.7. (α -Genişlemeyen Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in C$ için

$$d^2(T(x), T(y)) \leq \alpha d^2(T(x), y) + \alpha d^2(x, T(y)) + (1 - 2\alpha)d^2(x, y)$$

olacak şekilde $\alpha < 1$ sayısı varsa T ye α - genişlemeyen (α -nonexpansive) dönüşüm denir [60].

Tanım 2.3.8. (Genelleştirilmiş α -Genişlemeyen Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in C$

$$\frac{1}{2}d(T(x), x) \leq d(x, y) \Rightarrow$$

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(T(x), y) + \alpha d(x, T(y)) + (1 - 2\alpha)d(x, y)$$

olacak şekilde $\alpha \in [0,1)$ sayısı varsa T ye genelleştirilmiş α -genişlemeyen (generalized α -nonexpansive) dönüşüm denir [24].

Tanım 2.3.9. (Genelleştirilmiş β -Reich Suzuki Genişlemeyen Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in C$

$$\frac{1}{2}d(T(x), x) \leq d(x, y) \Rightarrow$$

$$d(T(x), T(y)) \leq \beta d(T(x), x) + \beta d(T(y), y) + (1 - 2\beta)d(x, y)$$

olacak şekilde $\alpha \in [0,1)$ sayısı varsa T ye genelleştirilmiş β –Reich Suzuki genişlemeyen (generalized β –Reich Suzuki nonexpansive) dönüşüm denir [25].

Her (C) şartını sağlayan dönüşüm genelleştirilmiş 0 –genişlemeyen dönüşümdür fakat tersi doğru değildir. Aynı zamanda her (C) şartını sağlayan dönüşüm 0 –Reich Suzuki genişlemeyen dönüşümdür fakat tersi yine doğru değildir. Aşağıda bu durumları açıklayan bir örnek sunulmuştur.

Örnek 2.3.10.

$d(x, y) = |x - y|$ alışılmış metrik ile donatılmış bir $X = \mathbb{R}$ uzayı verilsin.

(i) $C = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $T: C \rightarrow C$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda T dönüşümü $\frac{1}{3}$ –genişlemeyen dönüşümdür fakat (C) şartını sağlayan bir dönüşüm değildir [61, Örnek 4.6].

(ii) $C = [-2, 2] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $T: C \rightarrow C$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & x \in [-2, 0) \setminus \{-1/8\} \\ 0, & x = -1/8 \\ -\frac{x}{3}, & x \in [0, 2] \end{cases}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda T dönüşümü $\frac{1}{2}$ –Reich-Suzuki genişlemeyen dönüşümdür fakat (C) şartını sağlayan bir dönüşüm değildir [25, Örnek 3.4].

2020 yılında, Ullah ve ark. [26] bu dönüşümlerden daha genel bir sınıf olan yeni bir genişlemeyen dönüşüm sınıfı tanıtmış ve bu sınıfın özelliklerini göstermişlerdir.

Tanım 2.3.11. (Genelleştirilmiş (α, β) -Genişlemeyen Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay ve C , X 'in boştan farklı bir alt kümesi olsun. $T: C \rightarrow C$ dönüşümü $\alpha + \beta \leq 1$ olacak şekilde her $x, y \in C$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ için

$$\frac{1}{2}d(T(x), x) \leq d(x, y) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &\leq \alpha d(x, T(y)) + \alpha d(T(x), y) + \beta d(x, T(x)) + \beta d(y, T(y)) \\ &\quad + (1 - 2\alpha - 2\beta)d(x, y) \end{aligned} \quad (2.4)$$

şartını sağlıyorsa genelleştirilmiş (α, β) –genişlemeyen (generalized (α, β) –nonexpansive) dönüşüm olarak adlandırılır [26].

Açıklama 2.3.12.

Genelleştirilmiş (α, β) –genişlemeyen dönüşüm tanımından aşağıdaki ifadelerin doğru olduğunu görmek kolaydır.

- (i) T dönüşümünde $\alpha = \beta = 0$ alınırsa (C) şartını sağlayan dönüşüm elde edilir.
- (ii) T dönüşümünde $\beta = 0$ alınırsa genelleştirilmiş α –genişlemeyen dönüşüm elde edilir.
- (iii) T dönüşümünde $\alpha = 0$ alınırsa genelleştirilmiş β –Reich Suzuki genişlemeyen dönüşüm elde edilir.

Önerme 2.3.13.

T dönüşümü genelleştirilmiş (α, β) –genişlemeyen dönüşüm olsun. O zaman aşağıdaki durumlar geçerlidir [26].

- (i) $Fix(T) \neq \emptyset$ ise T dönüşümü quasi-genişlemeyen dönüşümdür.
- (ii) $Fix(T)$ kümesi kapalı bir kümedir.
- (iii) Her $x, y \in C$ için

$$d(x, T(y)) \leq \frac{3+\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta} d(x, T(x)) + d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanır.

2.4. İntegral Denklemler

İntegral denklemler teorisi matematiğin kapsamlı bir konusudur ve fizik, mekanik, mühendislik, biomühendislik, kontrol teorisi gibi alanlarda çeşitli uygulamalara sahiptir. Bu denklemler pek çok problemin integral denklemler ile tekrar formüle edilebilir olması bakımından da önemli bir rol oynamaktadır.

Genel olarak integral işareti altında bilinmeyen fonksiyonun bulunduğu denklemlere integral denklem denir. $x(t)$ bilinmeyen fonksiyon, $K(t, s)$ çekirdek fonksiyon, $\lambda \neq 0$ reel veya kompleks bir parametre ve $a \leq t, s \leq b$ olmak üzere

$$x(t) = h(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

şeklinde verilen bir denklem için $h(t)$ ve $K(t, s)$ fonksiyonları bilinirken, $x(t)$ bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında oluşturduğu denklemlerdir.

İntegral denklemler farklı özelliklerine göre aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir [28].

I. Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler

- II. Tekil ve Tekil Olmayan İntegral Denklemler
- III. I.Tip ve II. Tip İntegral Denklemler
- IV. Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler
- V. Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri

I. Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler

En temelde integral denklemler, lineer integral denklem ve lineer olmayan integral denklem olarak sınıflandırılır.

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds \quad (2.5)$$

$$x(t) = h(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds \quad (2.6)$$

$$x(t) = h(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)[x(s)]^n ds \quad (2.7)$$

$x(t)$ fonksiyonu bilinmeyen fonksiyon olmak üzere, $x(t)$ fonksiyonu üzerinde sadece lineer işlemler yapılıyor olması halinde integral denklemi lineer integral denklemdir. (2.5) ve (2.6) denklemleri lineer integral denklemine örnek olurken (2.7) denklemi lineer integral denklem değildir.

II. Tekil ve Tekil Olmayan İntegral Denklemler

Tekil olan ve tekil olmayan integral denklemlerin durumu çekirdek $K(t, s)$ fonksiyonun t ve s değişkenlerinin tanımlı olduğu aralıklardaki, $K(t, s)$ çekirdek fonksiyonun sürekliliğine bağlıdır.

$K(t, s)$ çekirdek fonksiyonu, $a \leq t \leq b$ ve $a \leq s \leq b$ aralıklarında sürekli ise, integral denklem bu aralıkta tekil olmayan integral denklemdir.

$$x(t) = h(t) + \lambda \int_0^\pi \cos(ts)x(s)ds$$

integral denklemi tekil olmayan integral denklemine bir örnektir.

$K(t, s)$ çekirdek fonksiyonu verilen aralıkta sürekli olmaması durumunda ve sınırlardan birinin veya ikisinin sonsuz olduğu durumda integral denklemi tekil (singüler) integral denklemdir.

$$x(t) = h(t) + \lambda \int_0^t \ln(t - s)x(s)ds$$

ve

$$x(t) = h(t) + \lambda \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} x(s) ds$$

integral denklemleri tekil integral denklemlerdir.

III. I. Tip ve II. Tip İntegral Denklemler

Bu tip denklemler bilinmeyen fonksiyonun bulunduğu yere göre sınıflandırılır. $x(t)$ bilinmeyen fonksiyon ve $K(t, s)$ çekirdek fonksiyonu olmak üzere

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds \quad (2.8)$$

şeklindeki denkleme 1. tip integral denklem denir. Bu tip integral denklemlerde bilinmeyen sadece integral altında mevcuttur. Burada $\varphi(t)$ verilmiş bir fonksiyondur. Benzer şekilde

$$\varphi(t) = h(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

şeklindeki integral denklem de 1. tip integral denklemdir. Burada $\varphi(t)$ ve $h(t)$ verilmiş fonksiyonlardır. Bu denklem $\varphi(t) - h(t) = \psi(t)$ olmak üzere

$$\psi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

şeklinde ifade edilerek (2.8) denklemi yapısında yazılabilir. Örneğin

$$\log(t + 5) = (2t^2 + 3) + \int_0^1 tsx(s)ds$$

denklemi bu tip integral denklemdir.

Eğer bilinmeyen $x(t)$ fonksiyonu integralin hem içinde hem de dışında bulunuyorsa bu tip integral denklemlere 2. tip integral denklem denir. Bu tip denklemler

$$x(t) = h(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

şeklindedir. Örneğin

$$x(t) = 2 - t + \int_0^\infty \sin(ts)x(s)ds$$

denklemi 2. tip integral denklemdir.

IV) Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemler $x(t)$ bilinmeyen, $K(t, s)$ ve $h(t)$ bilinen fonksiyonlar olmak üzere $h(t)$ fonksiyonunun olup olmamasına göre de sınıflandırılabilir.

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

formundaki integral denklemlere homojen integral denklem;

$$x(t) = h(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

formundaki integral denklemlere homojen olmayan integral denklem denir.

V) Volterra ve Fredholm İntegral Denklemler

İntegral denklemlerin farklı bir sınıflandırması da integralin sınırlarının değişken veya sabit olmasına göre yapılmaktadır. Bu tür denklemlerde denklemin lineer veya homojenliklerine bakılmaksızın, integralin sınırlarının durumu belirleyici olmaktadır.

İntegralin sınırlarından biri değişken ise bu denklemlere Volterra İntegral Denklemleri denir. Örneğin $\varphi(t)$, $h(t)$ ve $K(t,s)$ bilinen fonksiyonlar olmak üzere

$$\varphi(t) = h(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)x(s)ds$$

$$x(t) = h(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)x(s)ds$$

ve

$$x(t)\varphi(t) = h(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)x(s)ds$$

formundaki denklemler Volterra integral denklemleridir. Yani Volterra denklemleri, integralin üst sınırı t değişkeni iken alt sınırı a sabiti olan denklemlerdir.

Eğer alt ve üst sınırların ikisi de sabit ise bu denklemlere de Fredholm integral denklemleri denir.

Fredholm integral denkleminin özel bir türü ise

$$x(t) = h(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)f(s,x(s))ds \quad a \leq t,s \leq b \quad (2.9)$$

şeklinde verilen Fredholm-Hammerstein integral denklemdir. Burada $x(t)$ bilinmeyen fonksiyon, $h(t)$ ve $K(t,s)$ bilinen fonksiyonlar olmak üzere, $\lambda \neq 0$ sabit bir reel sayı ve f bilinen fonksiyon sürekli ve x e göre lineer olmayan bir fonksiyondur. $\forall t \in [a,b]$ için (2.9) denkleminde $h(t) = 0$ ise denklem homojen olarak adlandırılır.

2.5. Zaman Ölçeği Kavramı

Tanım 2.5.1. (Zaman Ölçeği)

Zaman ölçeği (time scale) $\mathbb{T}$ reel sayılar kümesinin keyfi, boştan farklı ve kapalı bir alt kümesidir ve bu küme genellikle $\mathbb{T}$ sembolü ile gösterilmektedir. $\mathbb{T}$ 'nin en popüler örnekleri $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ dir. Bunun yanında örnek olarak $\mathbb{T} = \{n^2: n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{T} = [0,1] \cup \mathbb{N}$ ve $\mathbb{T} = \{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ verilebilir ancak $\mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ve $(0,1)$ kümeleri zaman ölçeği örneği değildir [31].

Aşağıda bir zaman ölçeği üzerinde ileri sıçrama operatörü, geri sıçrama operatörü ve Graininess fonksiyonu tanımları verilmiştir.

Tanım 2.5.2. (İleri/Geri Sıçrama Operatörleri)

$\mathbb{T}$ bir zaman ölçeği olsun. $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T}, s > t\}$$

ve $\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ geri sıçrama operatörü

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{T}, s < t\}$$

ile tanımlanmaktadır. Bu tanımlarda $\emptyset$ boş küme olmak üzere $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ ve $\inf \mathbb{T} = \sup \emptyset$ olarak kabul edilir [31].

Tanım 2.5.3. (Noktaların Sınıflandırılması)

$\mathbb{T}$ bir zaman ölçeğinde $\sigma(t) > t$ ise t noktası sağa yığılmış nokta; $\rho(t) < t$ ise t noktası sola yığılmış nokta olarak adlandırılır. Hem sağa hem de sola yığılmış noktalara ise izole noktalar adı verilir. Ayrıca $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise t noktası sağa yoğun; $t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise t noktası sola yoğun nokta denir. Eğer bir nokta aynı zamanda hem sağa yoğun hem de sola yoğun ise bu noktaya yoğun nokta denir [32].

Tanım 2.5.4. (Graininess Fonksiyonu)

$t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) = \sigma(t) - t$ ile tanımlanan $\mu: \mathbb{T} \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonuna Graininess fonksiyonu denir [31].

Örnek 2.5.5.

$\mathbb{T}$ zaman ölçeğinin $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olması durumunda ileri sıçrama operatörü ve Graininess fonksiyonu sırasıyla $\sigma(t) = t$ ve $\mu(t) = 0$ ile $\sigma(t) = t + 1$ ve $\mu(t) = 1$ dir [31].

Tanım 2.5.6. (Regressive Fonksiyon)

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $1 + \mu(t)f(t) \neq 0$ şartını sağlarsa regressive fonksiyon olarak adlandırılır [31].

Tanım 2.5.7. (Komşuluk)

$t \in \mathbb{T}$ olsun. $U_\varepsilon(t) = \{s \in \mathbb{T} : |s - t| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ kümesine t noktasının ε - komşuluğu denir [31].

Tanım 2.5.8. (Süreklilik)

$t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $t \in U_\delta(t_0)$ için $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı mevcut ise $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t = t_0$ noktasında süreklidir denir.

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{T}$ 'nin her sağa yoğun noktasında sürekli ve $\mathbb{T}$ 'deki her sola yoğun noktada soldan limiti mevcut ise rd-sürekli olarak adlandırılır. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ rd-sürekli fonksiyonların kümesi $C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir. $\forall t \in \mathbb{T}$ için $1 + \mu(t)f(t) > 0$ şartını sağlayan tüm rd-sürekli f fonksiyonlarının kümesi $\mathcal{R}^+$ ile gösterilmektedir.

Benzer şekilde bir $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ 'nin her sola yoğun noktasında sürekli ve $\mathbb{T}$ 'deki her sağa yoğun noktada sağdan limiti mevcutsa bu fonksiyon ld-sürekli olarak adlandırılır.

$\mathbb{T}$ üzerindeki her sürekli fonksiyonun hem rd-sürekli hem de ld-sürekli olduğu açıktır [31].

Aşağıdaki tanımda delta türev tanımında ihtiyaç duyulacak olan $\mathbb{T}^\kappa$ kümesi verilmiştir.

Tanım 2.5.9.

$\mathbb{T}$ bir zaman ölçeği olmak üzere $\mathbb{T}^\kappa$ kümesi

$$\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T} - \{m\}, & \sup \mathbb{T} = m \text{ ve } m \text{ sola yığılmış ise} \\ \mathbb{T}, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [31].

Tanım 2.5.10. (Delta Türev)

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall s \in U$ için

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s) \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

olacak şekilde t' nin bir $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğu varsa, f fonksiyonunun t noktasında $f^\Delta(t)$ delta türevi (Hilger türevi) vardır denir. Ayrıca, $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için $f^\Delta(t)$ var ise f , $\mathbb{T}^k$ üzerinde delta diferansiyellenebilirdir veya kısaca diferansiyellenebilirdir denir. $f^\Delta: \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna f nin $\mathbb{T}^k$ üzerinde delta türevi adı verilir [31, Tanım 1.10].

Teorem 2.5.11.

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. O zaman aşağıda verilen ifadeler doğrudur [31].

- (i) f fonksiyonu t noktasında diferansiyellenebilir ise t noktasında sürekli.
- (ii) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t noktası sağa yığılmış ise, t' de diferansiyellenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

dir.

- (iii) t sağa yoğun ise, o zaman f' nin t noktasında diferansiyellenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin mevcut ve sonlu bir sayı olmasıdır. Bu durumda

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

olur.

- (iv) f , t noktasında diferansiyellenebilir ise o zaman

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) \cdot f^\Delta(t)$$

dir.

Aşağıda, $\mathbb{T}$ zaman ölçeğinin özel olarak $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ kümeleri seçildiği durumlarda

Δ –türevin hangi özel hallere indirgendiği incelenmiştir.

- $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olsun. Her $t \in \mathbb{R}$ noktası yoğun bir nokta olduğundan Teorem 2.5.11 (iii) den $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ –türevi

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

olarak elde edilir. Buradaki $f'(t)$ ile klasik türev temsil edilmektedir.

- $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun. Her $t \in \mathbb{Z}$ noktası izole nokta (ve dolayısıyla sağa yığılmış bir nokta) olduğundan Teorem 2.5.11 (ii) den $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonunun Δ –türevi

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{t+1-t} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

olarak bulunur. Burada $\Delta f(t)$ fark denklemlerinde kullanılan ileri fark operatörünü temsil eder.

Örnek 2.5.12.

$\mathbb{T} = \left\{ \frac{n}{3}, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$ olsun. Bu durumda $\forall t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) = t + \frac{1}{3}$ ve $\mu(t) = \frac{1}{3}$ bulunur. Böylece bu zaman ölçeğinin tüm noktaları sağa yığılmış

noktalardır. $\forall t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{6}$ ve $g(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{6} - \frac{t}{54}$ fonksiyonları verilsin.

Teorem 2.5.11'den

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f\left(t + \frac{1}{3}\right) - f(t)}{\frac{1}{3}} = t$$

ve

$$g^\Delta(t) = \frac{g(\sigma(t)) - g(t)}{\mu(t)} = \frac{g\left(t + \frac{1}{3}\right) - g(t)}{\frac{1}{3}} = t^2$$

elde edilir.

Tanım 2.5.13. (Cauchy İntegral)

Bir f fonksiyonu rd-sürekli ise o zaman $F^\Delta(t) = f(t)$ olacak şekilde bir F fonksiyonu (yani f 'nin antitürevi) vardır. Bu durumda Cauchy integral (delta integral) şu şekilde tanımlanır:

$$\int_a^b f(t)\Delta(t) = F(b) - F(a) \quad (\forall a, b \in \mathbb{T}).$$

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise o zaman $\int_a^b f(t)\Delta t$ integrali $\int_a^b f(t)dt$ Riemann integraline karşılık gelirken, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise o zaman $\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{t=a}^{b-1} f(t)$ eşitliği sağlanır [62].

Aşağıda Cauchy integral ile ilgili bazı özellikler verilmiştir.

Lemma 2.5.14. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

$f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli iki fonksiyon olsun. $a \leq b$ şartını sağlayan $\forall a, b \in \mathbb{T}$ için

$$\int_a^b |f(t).g(t)|\Delta t \leq \sqrt{\left\{ \int_a^b |f(t)|^2 \Delta t \right\} \cdot \left\{ \int_a^b |g(t)|^2 \Delta t \right\}}$$

eşitsizliği sağlanır [63].

Teorem 2.5.15.

$\mathbb{T}$ bir zaman ölçeği ve $a, b \in \mathbb{T}$ olsun. f ve g fonksiyonlarının $[a, b)$ üzerinde Δ –integrallenebilir olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur [62].

(i) $\forall t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = c$ olacak şekilde sabit bir fonksiyon ise

$$\int_a^b c \Delta t = c.(b - a)$$

dir.

(ii) $f + g$ fonksiyonu da $[a, b)$ üzerinde Δ –integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t$$

dir.

(iii) $\forall t \in [a, b)$ için $f(t) \leq g(t)$ ise $\int_a^b f(t) \Delta t \leq \int_a^b g(t) \Delta t$ dir.

(iv) $\left| \int_a^b f(t).g(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b |f(t).g(t)| \Delta t \leq (\sup_{t \in [a, b)} |f(t)|). \int_a^b |g(t)| \Delta t$ dir.

Tanım 2.5.16.

$\beta: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir regressive ve rd-sürekli fonksiyon olmak üzere $e_\beta(., a): \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ üstel fonksiyonu

$$x^\Delta(t) = \beta(t)x(t), \quad x(a) = 1, \quad a \in \mathbb{T}$$

başlangıç-değer probleminin tek çözümü olarak tanımlanır. Daha açık bir şekilde üstel fonksiyon $e_\beta(., a)$

$$\xi_h(z) = \begin{cases} z, & h = 0, \\ \frac{1}{h} \log(1 + hz), & h > 0 \end{cases}$$

olmak üzere

$$e_\beta(t, a) = \exp \left(\int_a^t \xi_{\mu(s)}(\beta(s)) \Delta s \right) \quad t \in \mathbb{T}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $e_\beta(t, s) = \exp \left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(\beta(\tau)) \Delta \tau \right)$ dir [63].

Örnek 2.5.17.

Örnek 2.1.16'da verilen $C_\beta(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ uzayı $\|x\|_\beta = \sup_{t \in \mathbb{T}} \frac{|x|}{e_\beta(t, a)}$ Bielecki tipi norm ile bir Banach uzaydır [51].

Teorem 2.5.18. (Bernoulli Eşitsizliği)

$\beta \in \mathcal{R}^+$ olmak üzere $\beta \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman $\forall t, s \in \mathbb{T}$ için

$$e_\beta(t, s) \geq 1 + \beta(t - s)$$

dir [63].

Adomian [64], 1988'de bir ayrıştırma yöntemi kurmuştur. Son zamanlarda bu yöntem uygulamalı matematik ve sonsuz seri çözümlerinde çok ilgi görmüştür. Bahsi geçen yöntem birçok diferansiyel ve integral denklemi çözmek için etkili bir yöntemdir. Adomian ayrıştırma yöntemi, $x(t)$ çözümünü seri halinde şu şekilde tanımlar:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \quad (2.10)$$

veya denk olarak

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + \dots$$

dir. Burada $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $x_n(t)$ bileşenleri tekrarlanarak belirlenecektir. Tekrarlanan ilişkinin kurulabilmesi için, (2.10) ile verilen seri formu aşağıda verilen, zaman ölçeği üzerinde ikinci türden lineer Fredholm integral denkleminde yerine yazılmıştır.

$$x(t) = h(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)x(s) \Delta s \quad (2.11)$$

(2.11) denkleminde $K(t, s)$ çekirdek fonksiyon, $h(t)$ bilinen fonksiyon ve $x(t)$ belirlenecek olan bilinmeyen fonksiyondur. Burada λ sıfırdan farklı reel bir parametredir. Bu durumda

$x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + \dots = h(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)[x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + \dots] \Delta s$ eşitliğine ulaşılır. Teorem 2.5.15 (ii)'den

$$x_0(t) = h(t),$$

$$x_1(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x_0(s) \Delta s,$$

$$x_2(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x_1(s) \Delta s$$

elde edilir ve bu şekilde diğer bileşenler de yazılmaya devam edilirse, bu ifadeye denk olarak

$$x_0(t) = h(t),$$

$$x_n(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x_{n-1}(s) \Delta s, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.12)$$

yazılabilir. Bu durumda (2.12) verildiğinde tüm bileşenler belirlenebilir. (2.11) in seri formundaki çözümü olan $x(t)$, (2.10) yardımıyla çözülebilir. Başka bir deyişle, Adomian ayrıştırma yöntemi Fredholm integral denklemi hesaplanabilir bileşenlerin belirlenmesine dönüştürür. Elde edilen seri, (2.11) denkleminin bir çözümü varsa bu çözüme yakınsar.

2.6. Kararlılık Kavramları

Tanım 2.6.1. (Ulam-Hyers Kararlılık)

(X, d) bir metrik uzay, $C(X, X)$ X üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi ve $T: C \rightarrow C$ bir operatör olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall t \in X$ için $d(y(t), T(y)(t)) < \varepsilon$ eşitsizliğinin her bir y^* çözümü için

$$d(y^*(t), x^*(t)) < c \cdot \varepsilon \quad (2.13)$$

olacak şekilde $x(t) = T(x)(t)$ sabit nokta denkleminin bir x^* çözümü ve $c > 0$ sabiti varsa, bu sabit nokta denklemi Ulam-Hyers kararlılığına sahiptir denir [34]. Burada c sabitine Ulam-Hyers kararlılık sabiti adı verilir.

Tanım 2.6.2. (Ulam-Hyers -Rassias Kararlılık)

(X, d) bir metrik uzay, $C(X, X)$ X üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi ve $T: C \rightarrow C$ bir operatör olsun. $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$d(y(t), T(y)(t)) < \varphi(t) \quad \forall t \in X$$

eşitsizliğinin her bir y^* çözümü için

$$d(y^*(t), x^*(t)) < c. \varphi(t) \quad \forall t \in X$$

olacak şekilde $x(t) = T(x)(t)$ sabit nokta denkleminin bir x^* çözümü ve $c > 0$ sabiti varsa, bu sabit nokta denklemi Ulam-Hyers-Rassias kararlılığına sahiptir denir [35].

Harder ve Hicks [65], T –kararlılık kavramını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.6.3. (T –kararlılık)

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü yardımıyla elde edilen $\{x_n\} \subset X$ dizisi

$$\begin{cases} x_1 \in X \\ x_{n+1} = f(T, x_n), \quad \forall n \geq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

olarak tanımlansın. Burada x_1 keyfi başlangıç noktası ve f bir fonksiyondur. $\{x_n\}$ dizisinin $x^* \in \text{Fix}(T)$ e kuvvetli yakınsadığı varsayılın. Keyfi bir $\{y_n\} \subset X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_{n+1}, f(T, y_n)) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x^*$$

olursa $\{x_n\}$ dizisi, T ye göre kararlıdır ya da T –kararlıdır denir.

Tanım 2.6.4. (Denk Diziler)

(X, d) bir metrik uzay olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri X de iki dizi olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$ ise bu dizilere denk diziler adı verilir [66].

Timiş [67], Tanım 2.6.3'teki rastgele diziler yerine denk dizileri ele alarak aşağıdaki zayıf w^2 –kararlılık kavramını tanıtmıştır.

Tanım 2.6.5. (Zayıf w^2 –Kararlılık)

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ olsun. $\{x_n\}$ iterasyon dizisi ise (2.14) ile verilsin. $\{x_n\}$ dizisinin $x^* \in \text{Fix}(T)$ e kuvvetli yakınsadığı varsayılın. Eğer $\{x_n\}$ dizisinin herhangi bir denk dizisi $\{y_n\} \subset X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_{n+1}, f(T, y_n)) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x^*$$

sağlanırsa $\{x_n\}$ iterasyon dizisi T ye göre zayıf w^2 –kararlıdır (weak w^2 –stable) denir [67].

Açıklama 2.6.6.

Herhangi bir kararlı iterasyon aynı zamanda zayıf kararlı olacaktır, ancak bunun tersi genellikle doğru değildir [67].

2023 yılında Calderon ve ark. [68] metrik uzayda (T, S) –kararlılık kavramını incelemişlerdir.

Tanım 2.6.7. $((T, S) - \text{Kararlılık})$

(X, d) bir metrik uzay olsun. T sürekli bir fonksiyon ve $x^* \in \text{Fix}(S)$ olmak üzere $T, S: X \rightarrow X$ fonksiyonları verilsin. $x_1 \in X$ başlangıç noktası ve f bir fonksiyon olmak üzere $\{T(x_n)\}$ dizisi

$$T(x_{n+1}) = f(T, S, x_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

iterasyon metodu ile oluşturulsun. $\{T(x_n)\}$ dizisinin $T(x^*)$ e yakınsadığı varsayalım. $\{T(y_n)\} \subset X$ keyfi bir dizi ve $\varepsilon_n = d(T(y_{n+1}), f(T, S, y_n))$, $n \geq 1$ olarak verilirse (2.15) ile verilen iterasyon metodu (T, S) –kararlıdır ancak ve ancak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T(y_n) = T(x^*)$$

dir.

Sonuç 2.6.8.

(T, S) kararlılık tanımında $T = I$ birim dönüşüm alınırsa Tanım 2.6.3’de verilen kararlılık kavramına indirgenir.

Şimdi (T, S) –kararlılık kavramının ispatında kullanılacak bir lemma sunulacaktır.

Lemma 2.6.9.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_{n+1} \leq \theta p_n + q_n$ koşulunu sağlayan negatif olmayan $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ dizileri ve $0 \leq \theta < 1$ sabiti verilsin. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$ ise o zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ olur [55].

2.7. Bazı Genelleştirilmiş Metrik Uzaylar

Bu kısımda metrik aksiyomlarının değiştirilmesi sonucu elde edilen bazı genelleştirilmiş metrik uzay tanımlarına, örneklerine ve bazı teoremlere yer verilmiştir.

Metrik fonksiyonunun en popüler genelleştirmelerinden biri b –metrik fonksiyonudur. İlk olarak b –metrik uzay yapısı Bakhtin’in [69] çalışmasında 1989 yılında görülmüştür. Fakat Czerwik’in [70] 1993 yılındaki çalışmalarından sonra pek çok yazarın dikkatini çekmiştir. Czerwik b –metrik uzay yapısını aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

Tanım 2.7.1. (b –Metrik Uzaylar)

$X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlanan bir $d_b: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ ve $s \geq 1$ sabiti olacak şekilde aşağıdaki üç şartı sağlarsa b –metrik olarak adlandırılır.

$$(d_b 1) \quad d_b(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$(d_b 2) \quad d_b(x, y) = d_b(y, x);$$

$$(d_b 3) \quad d_b(x, y) \leq s[d_b(x, z) + d_b(z, y)]$$

(X, d_b) çifti b –metrik uzayı olarak adlandırılır [70].

Eğer $s = 1$ olarak seçilir ise b –metrik fonksiyonu ile metrik fonksiyonu çıkarır.

Örnek 2.7.2.

$l_p (0 < p < 1)$ uzayı, $l_p = \{(x_n) \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ olmak üzere $d: l_p \times l_p \rightarrow \mathbb{R}$

$$d(x, y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon ile bir b –metrik uzayıdır [71]. Temel bir hesaplamayla $d(x, z) \leq 2^{1/p}[d(x, y) + d(y, z)]$ dir. Böylece $s = 2^{1/p} > 1$ elde edilir.

Uyarı 2.7.3.

Metrik fonksiyonu daima süreklidir. Ancak b –metrik fonksiyonu her zaman sürekli olmak zorunda değildir [72].

1994’te Matthews [73] klasik metrik uzay kavramından farklı olarak kısmi metrik uzay kavramını ortaya atmıştır. Bu yaklaşım, herhangi bir noktanın kendisiyle olan

mesafesinin sıfır olmak zorunda olmadığı bir yapı sunmaktadır. Matthews, bu yeni kavram doğrultusunda, Banach daralma ilkesinin kısmi metrik uzaylar üzerinde de geçerli olduğunu göstermiştir.

Tanım 2.7.4. (Kısmi Metrik Uzaylar)

$X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlanan bir $p: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için

$$(p1) \quad p(x, y) = p(x, x) = p(y, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$(p2) \quad p(x, x) \leq p(x, y);$$

$$(p3) \quad p(x, y) = p(y, x)$$

$$(p3) \quad p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$$

şartlarını sağlarsa kısmi metrik olarak tanımlanır. (X, p) çifti ise kısmi metrik uzayı (partial metric space) olarak adlandırılır [73].

Uyarı 2.7.5.

Her metrik uzay bir kısmi metrik uzaydır. Ancak bu ifadenin tersi her zaman doğru olmayabilir [73].

Tanım 2.7.6. (Metrik Benzeri Uzaylar)

$X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlanan bir $\rho: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ olacak şekilde aşağıdaki üç şartı sağlarsa X üzerinde metrik benzeri olarak adlandırılır.

$$(\rho1) \quad \rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y;$$

$$(\rho2) \quad \rho(x, y) = \rho(y, x);$$

$$(\rho3) \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

(X, ρ) çifti metrik benzeri uzayı (metric like space) olarak adlandırılır [74].

Klasik metrik dönüşümü ile karşılaştırıldığında metrik benzeri dönüşümde $(\rho1)$ aksiyomunun tek yönlü olarak sağlandığı görülmektedir. Bu nedenle metrik benzeri uzaylar, metrik uzaylardan daha genel bir uzaydır.

Ayrıca metrik benzeri uzaylar, kısmi metrik uzayların bir genellemesi olarak incelenmiştir ve üçgen eşitsizliği şu şekildedir.

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) - \rho(y, y).$$

Her kısmi metrik uzay, metrik benzeri bir uzaydır fakat tersi doğru değildir. Aşağıda bu yargıyı açıklayan bir örnek sunulmuştur.

Örnek 2.7.7.

$X = \{0,1\}$ kümesi verilsin ve

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 2, & x = y = 0 \\ 1, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde (X, ρ) metrik benzeri bir uzaydır fakat $\rho(0,0) \not\leq \rho(0,1)$ olduğundan (X, ρ) kısmi metrik uzay değildir [74].

Tanım 2.7.8. (b –Metrik Benzeri Uzaylar)

$X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlanan bir $D: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ ve $k \geq 1$ sabiti olacak şekilde aşağıdaki üç şartı sağlarsa b -metrik benzeri olarak adlandırılır.

$$(D1) \quad D(x, y) = 0 \Rightarrow x = y;$$

$$(D2) \quad D(x, y) = D(y, x);$$

$$(D3) \quad D(x, y) \leq k[D(x, z) + D(z, y)].$$

(X, D) çifti b –metrik benzeri uzayı (b –metric like space) olarak adlandırılır [18].

İstisnai olarak $k = 1$ sabiti ile her b – metrik benzeri uzay, metrik benzeri bir uzay oluşturur. Öte yandan aynı parametre ile her b –metrik uzay, b – metrik benzeri uzaydır. Dolayısıyla b – metrik benzeri uzayı, b –metrik, metrik benzeri ve kısmi metrik uzaylardan daha genel bir uzaydır. Fakat bu durumun tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.7.9.

$X = [0, \infty)$ olsun. $D: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $D(x, y) = (x + y)^2$ ile tanımlansın. O zaman (X, D) çifti $k = 2$ sabiti ile bir b –metrik benzeri uzaydır. Gerçekten, $\forall x, y, z \in X$ için

$$\begin{aligned} D(x, y) &= (x + y)^2 \leq (x + z + z + y)^2 = (x + z)^2 + (z + y)^2 + 2(x + z)(z + y) \\ &\leq 2[(x + z)^2 + (z + y)^2] = 2[D(x, z) + D(z, y)] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (D3) sağlanır. Diğer iki şartın sağlandığı aşıkardır. Açıkça, (X, D) b –metrik veya metrik benzeri uzay değildir [18].

Şimdi b –metrik benzeri uzay üzerindeki topoloji verilecektir. (X, D) b –metrik benzeri bir uzay olsun. Bu durumda $x \in X$ merkezli $\epsilon > 0$ yarıçaplı açık yuvarı

$$B_D(x, \epsilon) = \{y \in X \mid |D(x, y) - D(x, x)| < \epsilon\}$$

şeklinde tanımlanır. X üzerindeki tüm açık yuvarların ailesi τ_D , b –metrik benzeri için bir topoloji oluşturur.

Açıklama 2.7.10.

b –metrik benzeri fonksiyonu her zaman sürekli olmak zorunda değildir. Bu çalışma boyunca b –metrik benzeri fonksiyonunun sürekli olduğu kabul edilmiştir.

Aşağıda b –metrik benzeri uzaylar ilgili bazı tanımlar sunulmuştur.

Tanım 2.7.11.

(X, D) b –metrik benzeri uzay, $\{x_n\}$, X 'de bir dizi ve $x \in X$ olsun.

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} D(x, x)$ ise $\{x_n\}$ yakınsak dizidir ve $\lim_{m, n \rightarrow \infty} D(x_m, x_n)$ mevcut ve sonlu ise $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.
- (ii) X 'deki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi için $\lim_{m, n \rightarrow \infty} D(x_m, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} D(x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x)$ olacak şekilde $x \in X$ varsa (X, D) tam uzaydır denir.

Açıklama 2.7.12.

Bir b –metrik benzeri uzayda yakınsak dizinin limiti genelde tek değildir. Ancak (X, D) tam b –metrik benzeri uzayda $\{x_n\}$ dizisi $\lim_{m, n \rightarrow \infty} D(x_m, x_n) = 0$ olacak şekilde bir Cauchy dizisi ise o zaman limit tektir. Nitekim böyle bir durumda $x_n \rightarrow x$ ($D(x_n, x) \rightarrow D(x, x)$), $n \rightarrow \infty$ ise $D(x, x) = 0$ olur.

2009 yılında Beiranvand ve ark. [75] metrik uzaylarda dizisel yakınsak dönüşüm kavramını tanımladı. Bunu takiben birçok araştırmacı bu kavram üzerinde çalışmıştır. Bu çalışmalardan hareketle b –metrik benzeri uzayda dizisel yakınsaklık kavramı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.7.13. (Dizisel Yakınsaklık)

(X, D) b –metrik benzeri uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $\{x_n\}$ dizisi için $\{T(x_n)\}$ yakınsak olduğunda $\{x_n\}$ dizisi de yakınsak ise bu durumda T dönüşümüne dizisel yakınsaktır denir.

Lemma 2.7.14.

(X, D) b –metrik benzeri uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü $x \in X$ de sürekli ise, o zaman $x_n \rightarrow x$ şartını sağlayan X 'deki her $\{x_n\}$ dizisi için $T(x_n) \rightarrow T(x)$ dir. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(T(x_n), T(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} D(T(x), T(x))$$

dir [76, Lemma 1.10].

Metrik uzaylarda verilen (T, S) –kararlılık tanımı b –metrik benzeri uzaylar için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.7.15.

X bir b –metrik benzeri uzay, $T, S: X \rightarrow X$ iki dönüşüm ve $x^* \in \text{Fix}(S)$ olsun. $x_1 \in X$ başlangıç noktası ve f bir fonksiyon olmak üzere $\{T(x_n)\}$ dizisi

$$T(x_{n+1}) = f(T, S, x_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

iterasyon metodu ile oluşturulsun. $\{T(x_n)\}$ dizisinin $T(x^*)$ e yakınsadığı varsayılın. $\{T(y_n)\} \subset X$ keyfi bir dizi ve $\varepsilon_n = D(T(y_{n+1}), f(T, S, y_n))$, $n \geq 1$ olarak verilirse (2.16) ile verilen iterasyon metodu (T, S) –kararlıdır ancak ve ancak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T(y_n) = T(x^*)$$

dir.

3. ZAMAN ÖLÇEĞİ ÜZERİNDEKİ VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN KARARLILIK SONUÇLARI

Bu bölümde elde edilen sonuçlar (bak. [77]), Maltepe Journal of Mathematics dergisinde makale olarak yayımlanmıştır.

3.1. Ulam-Hyers ve Ulam-Hyers-Rassias Kararlılık Teoremleri

Bu bölümde ilk olarak zaman ölçeği üzerinde verilen

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, x(\sigma(s))) \Delta s, \quad t, s \in I_{\mathbb{T}} = [a, \infty) \cap \mathbb{T}$$

Volterra integral denklemi

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, x(s), x(\sigma(s))) \Delta s \quad t, s \in I_{\mathbb{T}} = [a, \infty) \cap \mathbb{T} \quad (3.1)$$

olarak genelleştirildi ve (3.1) denkleminin Ulam-Hyers ile Ulam-Hyers-Rassias kararlılıklarına sahip olduğu ispatlandı. Burada $x: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ bilinmeyen fonksiyon, $f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $K: I_{\mathbb{T}} \times I_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineer olmayan fonksiyonlardır.

Teorem 3.1.1.

f fonksiyonu sürekli ve K fonksiyonu 2. değişkene göre rd-sürekli diğer değişkenlerine göre sürekli olsun. $L_1, L_2: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ rd-sürekli fonksiyonlar, $\sup_{s \in I_{\mathbb{T}}} |L_2(s)\mu(s)| = r < 1$, $1 < \gamma < r^{-1}$ ve $\beta(s) = \frac{[L_1(s)+L_2(s)]\gamma}{1-r\gamma}$ olsun. Üstelik K fonksiyonu $s < t$ ve $p, q, \bar{p}, \bar{q} \in \mathbb{R}^n$ için $|K(t, s, p, q) - K(t, s, \bar{p}, \bar{q})| \leq L_1(s)|p - \bar{p}| + L_2(s)|q - \bar{q}|$ ve $m = \sup_{t \in I_{\mathbb{T}}} \frac{1}{e_{\beta}(t, a)} \left| f(t) + \int_a^t K(t, s, 0, 0) \Delta s \right| < \infty$ eşitsizliklerini sağlasın. O halde (3.1) integral denklemi Ulam-Hyers-Rassias kararlılığına sahiptir, yani $\psi \in C_{\beta}(I_{\mathbb{T}}, [0, \infty))$ olmak üzere

$$\sup_{t \in I_{\mathbb{T}}} \frac{|x(t) - f(t) - \int_a^t K(t, s, x(s), x(\sigma(s))) \Delta s|}{e_{\beta}(t, a)} = \|x - Fx\|_{\beta} \leq \psi(t) \quad (3.2)$$

eşitsizliğini sağlayan her $x \in C_{\beta}(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ için $F(x_0) = x_0$ ve $\|x - x_0\|_{\beta} \leq c \cdot \psi(t)$ olacak şekilde bir $x_0 \in C_{\beta}(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ elemanı vardır.

İspat.

[78]'deki Teorem 1'den (3.1) denkleminin

$$[Fx](t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, x(s), x(\sigma(s))) \Delta s$$

olmak üzere $F(x_0) = x_0$ olacak şekilde tek bir $x_0 \in C_\beta(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ çözümü vardır. Yine bu teoremden

$$\|Fx - Fy\|_\beta \leq \frac{1}{\gamma} \|x - y\|_\beta$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} \|x - x_0\|_\beta &\leq \|x - Fx\|_\beta + \|Fx - x_0\|_\beta \\ &\leq \psi(t) + \frac{1}{\gamma} \|x - x_0\|_\beta \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \|x - x_0\|_\beta \leq \psi(t)$$

bulunur. Böylece $c = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^{-1}$ olmak üzere

$$\|x - x_0\|_\beta \leq c \cdot \psi(t)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.2.

Teorem 3.1.1 in şartları altında ψ fonksiyonu sabit fonksiyon olarak alınırsa, o halde (3.1) denklemi Ulam-Hyers kararlılığına sahiptir.

İkinci olarak zaman ölçeği üzerinde

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s)x(s)\Delta s \quad t, s \in I_{\mathbb{T}} = [a, b] \cap \mathbb{T}$$

olarak verilen homojen olmayan Volterra integral denklemi genelleştirilerek Ulam-Hyers ve Ulam-Hyers-Rassias kararlılıklarına sahip olduğu ispatlandı. Bu kısımda ele alınan Volterra integral denklemi

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)x(s)\Delta s \quad t \in I_{\mathbb{T}} = [a, b] \cap \mathbb{T} \quad (3.3)$$

şeklindedir. Burada $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in C_{rd}(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$, $K \in C_{rd}(I_{\mathbb{T}} \times I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ ve $x: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ bilinmeyen fonksiyondur.

Teorem 3.1.3.

(3.3) ile verilen integral denklem Ulam-Hyers-Rassias kararlılığı sahiptir, yani $\psi \in C_{rd}(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ fonksiyonu bazı $\omega \in C_{rd}(I_{\mathbb{T}}, [0, \infty))$ için

$$\left| \psi(t) - f(t) - \lambda \int_a^t K(t, s) \psi(s) \Delta s \right| < \omega(t), \quad \forall t \in I_{\mathbb{T}}$$

şartını sağlasın. Burada $\forall t, s \in I_{\mathbb{T}}$ için $\int_a^t \omega(s) \Delta s \leq P\omega(t)$ ve $|K(t, s)| \leq M$ olacak şekilde $|\lambda MP| < 1$ ile P, M sabitleri vardır. Öyleyse (3.3) denkleminin bazı $c > 0$ için

$$|\psi(t) - \varphi(t)| \leq c \cdot \omega(t)$$

şartını sağlayan bir $\varphi \in C_{rd}(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ çözümü vardır.

İspat.

$t \in I_{\mathbb{T}}$ için $\psi_0(t) = \psi(t)$ olmak üzere aşağıdaki iterasyon şeması göz önüne alınsın.

$$\psi_n(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s) \psi_{n-1}(s) \Delta s, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4)$$

Burada $\{\psi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin (3.3) integral denkleminin tek bir çözümüne düzgün yakınsadığı ispatlanacaktır. $\psi_n(t)$ dizisi teleskopik toplam olarak

$$\psi_n(t) = \psi_0(t) + \sum_{i=1}^n [\psi_i(t) - \psi_{i-1}(t)]$$

yazılabilir. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t) = \psi_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} [\psi_i(t) - \psi_{i-1}(t)], \quad \forall t \in I_{\mathbb{T}} \quad (3.5)$$

elde edilir. Matematiksel tümevarımla her bir $n \in \mathbb{N}$ ve $\forall t \in I_{\mathbb{T}}$ için aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını görmek kolaydır.

$$|\psi_n(t) - \psi_{n-1}(t)| \leq (\lambda MP)^{n-1} \omega(t) \quad (3.6)$$

$n = 1$ için $|\psi_1(t) - \psi(t)| < \omega(t)$ olur. Böylece $n = 1$ için (3.6) eşitsizliğinin doğru olduğu söylenir. Bu eşitsizliğin $n = k > 1$ için doğruluğu kabul edilsin. O halde

$$\begin{aligned}
|\psi_{k+1}(t) - \psi_k(t)| &\leq \lambda \int_a^t |K(t, s)| |\psi_k(s) - \psi_{k-1}(s)| \Delta s \\
&\leq \lambda M \int_a^t (\lambda MP)^{k-1} \omega(s) \Delta s \\
&\leq (\lambda MP)^k \omega(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.6) nın $n = k + 1$ için de doğru olduğu görülür. Bu durum ise $\forall n \geq 1$ için (3.6) eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterir. Bu sonuçtan yola çıkarak $|\psi_i(t) - \psi_{i-1}(t)| \leq (\lambda MP)^{i-1} \omega(t)$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} (\lambda MP)^{i-1} \omega(t) = \frac{\omega(t)}{1-\lambda MP}$ yazılabilir. Weierstrass M-testi uygulanarak $\sum_{i=1}^{\infty} [\psi_i(t) - \psi_{i-1}(t)]$ sonsuz serisinin $t \in I_{\mathbb{T}}$ ye düzgün yakınsadığı görülür. Nitekim, (3.5)' ten $\{\psi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde bazı $\varphi(t) \in C_{rd}(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ elemanına düzgün yakınsadığı söylenir. Şimdi dizinin limiti $\varphi(t)$ nin (3.3) ün bir çözümü olduğu gösterilsin. Her $t \in I_{\mathbb{T}}$ ve herbir $n \geq 1$ için

$$\left| \int_a^t K(t, s) \psi_n(s) \Delta s - \int_a^t K(t, s) \varphi(s) \Delta s \right| \leq M \int_a^t |\psi_n(s) - \varphi(s)| \Delta s$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra yakınsar ve böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^t K(t, s) \psi_n(s) \Delta s = \int_a^t K(t, s) \varphi(s) \Delta s, \quad \forall t \in I_{\mathbb{T}}$$

olur. (3.4) ün her iki tarafından limit alınırsa $\varphi(t)$ nin (3.3) ün bir çözümü olduğu görülür. Bu durumda $|\psi_N(t) - \varphi(t)| \leq \omega(t)$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
|\psi(t) - \varphi(t)| &\leq |\psi(t) - \psi_N(t)| + |\psi_N(t) - \varphi(t)| \\
&\leq |\psi(t) - \psi_1(t)| + |\psi_1(t) - \psi_2(t)| + \dots + |\psi_{N-1}(t) - \psi_N(t)| \\
&\quad + |\psi_N(t) - \varphi(t)| \\
&\leq \sum_{i=1}^N |\psi_{i-1}(t) - \psi_i(t)| + |\psi_N(t) - \varphi(t)| \\
&\leq \sum_{i=1}^N (\lambda MP)^{i-1} \omega(t) + |\psi_N(t) - \varphi(t)| \\
&\leq \sum_{i=1}^N (\lambda MP)^{i-1} \omega(t) + \omega(t) \\
&\leq \frac{\omega(t)}{1-\lambda MP} + \omega(t) = \left(1 + \frac{1}{1-\lambda MP}\right) \omega(t) = c \cdot \omega(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (3.3) denkleminin Ulam-Hyers-Rassias kararlılığına sahip olduğunu gösterir.

Sonuç 3.1.4.

Teorem 3.1.3 ün şartları altında, ω fonksiyonu sabit fonksiyon olarak alınırsa, o halde (3.3) denklemi Ulam-Hyers kararlılığına sahiptir.

Üçüncü olarak

$$x(t) = f(t) + \varphi \left(\int_a^t K(t, s, x(s)) ds \right), \quad t \in [a, b]$$

ile verilen integral denklem zaman ölçeğine genelleştirilerek Ulam-Hyers-Rassias ve Ulam-Hyers kararlılıklarına sahip olduğu gösterildi. Göz önüne alınan Volterra integral denklem

$$x(t) = f(t) + \varphi \left(\int_a^t K(t, s, x(s)) \Delta s \right), \quad t \in I_{\mathbb{T}} = [a, b] \cap \mathbb{T} \quad (3.7)$$

şeklinde olup bu denklemde $f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $K: I_{\mathbb{T}} \times I_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bilinen fonksiyonlar, $x: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ bilinmeyen fonksiyon ve φ ise $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde bir sınırlı lineer operatördür.

Teorem 3.1.5.

f fonksiyonu sürekli ve K fonksiyonu 2. değişkene göre rd-sürekli diğer değişkenlerine göre sürekli olsun. Ayrıca $L: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ rd-sürekli fonksiyon, $\gamma > 1$ ve $\gamma > \|\varphi\|$ olmak üzere $\beta(s) = L(s) \gamma$ olsun. Eğer $s < t$ ve $p, q \in \mathbb{R}^n$ için

$$|K(t, s, p) - K(t, s, q)| \leq L(s)|p - q|$$

ve

$$m = \sup_{t \in I_{\mathbb{T}}} \frac{1}{e_{\beta}(t, a)} \left| f(t) + \varphi \left(\int_a^t K(t, s, 0) \Delta s \right) \right| < \infty$$

ise o zaman (3.7) integral denklemi tek bir $x \in C_{\beta}(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ çözümüne sahiptir.

İspat.

$C_{\beta}(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ Banach uzayında

$$[Fx](t) = f(t) + \varphi \left(\int_a^t K(t, s, x(s)) \Delta s \right) \quad (3.8)$$

ile verilen bir $F: C_\beta(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n) \rightarrow C_\beta(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ operatörü tanımlansın. F nin sabit noktası (3.7) nin çözümü olacaktır. Dolayısıyla $F(x) = x$ olacak şekilde tek bir x çözümünün var olduğu ispat edilecektir. Keyfi $u, v \in C_\beta(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ için

$$\begin{aligned}
\|Fu - Fv\|_\beta &= \sup_{t \in I_{\mathbb{T}}} \frac{|[Fu](t) - [Fv](t)|}{e_\beta(t, a)} \\
&= \sup_{t \in I_{\mathbb{T}}} \frac{1}{e_\beta(t, a)} \left| \varphi \left(\int_a^t [K(t, s, u(s)) - K(t, s, v(s))] \Delta s \right) \right| \\
&\leq \sup_{t \in I_{\mathbb{T}}} \frac{1}{e_\beta(t, a)} \|\varphi\| \int_a^t L(s) |u(s) - v(s)| \Delta s \\
&= \|\varphi\| \sup_{t \in I_{\mathbb{T}}} \frac{1}{e_\beta(t, a)} \int_a^t L(s) e_\beta(s, a) \frac{|u(s) - v(s)|}{e_\beta(s, a)} \Delta s \\
&\leq \|\varphi\| \|u - v\|_\beta \sup_{t \in I_{\mathbb{T}}} \frac{1}{e_\beta(t, a)} \int_a^t L(s) e_\beta(s, a) \Delta s \\
&= \frac{\|\varphi\|}{\gamma} \|u - v\|_\beta \sup_{t \in I_{\mathbb{T}}} \frac{1}{e_\beta(t, a)} \int_a^t \beta(s) e_\beta(s, a) \Delta s \\
&= \frac{\|\varphi\|}{\gamma} \|u - v\|_\beta \sup_{t \in I_{\mathbb{T}}} \frac{1}{e_\beta(t, a)} \int_a^t e_\beta^\Delta(s, a) \Delta s \\
&= \frac{\|\varphi\|}{\gamma} \|u - v\|_\beta \sup_{t \in I_{\mathbb{T}}} \left[1 - \frac{1}{e_\beta(t, a)} \right] \\
&\leq \frac{\|\varphi\|}{\gamma} \|u - v\|_\beta
\end{aligned}$$

olur. Şimdi $F: C_\beta(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n) \rightarrow C_\beta(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ olduğu gösterilecektir. $x \in C_\beta(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ elemanı verilsin. (3.8) ifadesinde norm alınırsa

$$\begin{aligned}
\|Fx\|_\beta &= \|Fx - F0 + F0\|_\beta \leq \|Fx - F0\|_\beta + \|F0\|_\beta \\
&\leq \frac{\|x\|_\beta}{\gamma} \|\varphi\| + m < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{\|\varphi\|}{\gamma} < 1$ olduğu için $F: C_\beta(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n) \rightarrow C_\beta(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ operatörünün daralma operatörü olduğu görülür ve Banach sabit nokta teoremi uygulanırsa F tek bir x sabit noktasına sahip olur.

Teorem 3.1.6.

Teorem 3.1.5'in tüm koşulları geçerli olsun. (3.8) ile tanımlanan $F \in C_{rd}(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ operatöründe $F(x) = x$ denklemi Ulam-Hyers-Rassias kararlılığı sahiptir, yani $\psi \in C_{rd}(I_{\mathbb{T}}, [0, \infty))$ fonksiyonu ve $\|x - Fx\|_\beta \leq \psi(t)$ şartını sağlayan her $x \in$

$C_{rd}(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ için $F(x_0) = x_0$ ve $\|x - x_0\|_{\beta} \leq c \cdot \psi(t)$ olacak şekilde tek bir $x_0 \in C_{rd}(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ vardır.

İspat.

Teorem 3.1.5'ten $F(x_0) = x_0$ olacak şekilde bir tek $x_0 \in C_{rd}(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|x - x_0\|_{\beta} &\leq \|x - Fx\|_{\beta} + \|Fx - x_0\|_{\beta} \\ &\leq \psi(t) + \|Fx - x_0\|_{\beta} \\ &\leq \psi(t) + \frac{\|x - x_0\|_{\beta}}{\gamma} \|\varphi\| \end{aligned}$$

yazılır. Böylece $C = \left[1 - \frac{\|\varphi\|}{\gamma}\right]^{-1}$ olmak üzere $\|x - x_0\|_{\beta} \leq c \cdot \psi(t)$ elde edilir.

Sonuç 3.1.7.

- (i) ψ fonksiyonu sabit fonksiyon olarak alınırsa, (3.7) denkleminin Ulam-Hyers kararlılığına sahip olduğu sonucuna ulaşılır.
- (ii) ψ sabit bir fonksiyon olarak alınırsa ve $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ tam metrik uzayı göz önüne alınırsa [43] deki Teorem 4.1 elde edilir.

Örnek 3.1.8.

$$x(t) = t^4 + \varphi \left(\int_a^t (s + \sigma(s)) [x(s)^2 + 1]^{\frac{1}{2}} \Delta s \right), \quad a, t \in I_{\mathbb{T}}, \quad a \geq 0$$

Volterra integral denklemi göz önüne alınsın. Bu integral denklem keyfi bir $\mathbb{T}$ zaman ölçeği için tek bir sabit noktaya sahiptir ve Ulam-Hyers-Rassias kararlılığına sahiptir.

Çözüm.

Teorem 3.1.5 kullanılırsa ve $K(t, s, p) = (s + \sigma(s)) [p^2 + 1]^{\frac{1}{2}}$ nin her yerde p 'ye göre sınırlı bir kısmi türevi olduğu gerçeğinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned} |K(t, s, p) - K(t, s, q)| &= \left| (s + \sigma(s)) [p^2 + 1]^{\frac{1}{2}} - (s + \sigma(s)) [q^2 + 1]^{\frac{1}{2}} \right| \\ &\leq (s + \sigma(s)) \sup_{r \in \mathbb{R}} \left| \frac{r}{[r^2 + 1]^{\frac{1}{2}}} \right| |p - q| \\ &\leq (s + \sigma(s)) |p - q| \end{aligned}$$

elde edilir. Burada ortalama değeri teoremi kullanılmıştır. Böylece $L(s) = s + \sigma(s)$ olur. $\gamma = 2$ ve $\|\varphi\| = \frac{2}{3}$ seçimleri için $\beta(s) = 2(s + \sigma(s))$ olduğu görülür. Bernoulli Eşitsizliği kullanılarak $e_\beta(t, a) \geq 1 + t^2 - a^2$ elde edilir. Buradan $m < \infty$ koşulu sağlanır. Dolayısıyla Teorem 3.1.5'ten verilen integral denklemin tek bir çözüme sahip olduğu görülür.

$\psi(t)$ negatif olmayan fonksiyon olmak üzere $\|x - Fx\|_\beta \leq \psi(t)$ eşitsizliğini sağlayan bir $x \in C_\beta(I_\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ mevcutsa, Teorem 3.1.6'dan $F(x_0) = x_0$ ve $\|x - x_0\|_\beta \leq \frac{3}{2}\psi(t)$ olacak şekilde bir tek x_0 vardır. Böylece verilen integral denklem Ulam-Hyers-Rassias kararlılığına sahiptir.

Bu bölümde son olarak zaman ölçeği üzerinde

$$x(t) = f\left(t, x(t), x(\sigma(t)), \int_a^t K(t, s, x(s), x(\sigma(s))) \Delta s\right) \quad t \in [0, \infty) \cap \mathbb{T} \quad (3.9)$$

ile verilen Volterra integral denkleminin Ulam-Hyers-Rassias kararlılığına sahip olduğu gösterilmiştir.

Teorem 3.1.9.

f fonksiyonu sürekli ve K fonksiyonu 2. değişkene göre rd-sürekli diğer değişkenlerine göre sürekli olsun. $L_1, L_2: I_\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ rd-sürekli fonksiyonlar, $\sup_{s \in I_\mathbb{T}} |L_1(s)\mu(s)| = q < \infty$, $\sup_{s \in I_\mathbb{T}} |L_2(s)\mu(s)| = r < 1$, $1 < \gamma < r^{-1}$ ve $\beta(s) = \frac{[L_1(s)+L_2(s)]\gamma}{1-r\gamma}$ olsun. Üstelik $M\left(1 + \frac{1+q\gamma}{1-r\gamma} + \frac{1}{\gamma}\right) < 1$ olmak üzere ve $s < t$ için

$$|f(t, x, x', x'') - f(t, \bar{x}, \bar{x}', \bar{x}'')| \leq M(|x - \bar{x}| + |x' - \bar{x}'| + |x'' - \bar{x}''|)$$

$$|K(t, s, x, \bar{x}) - K(t, s, x', \bar{x}')| \leq L_1(s)|x - x'| + L_2(s)|\bar{x} - \bar{x}'| \text{ ve}$$

$$m = \sup_{t \in I_\mathbb{T}} \frac{1}{e_\beta(t, a)} \left| f\left(t, 0, 0, \int_a^t K(t, s, 0, 0) \Delta s\right) \right| < \infty$$

şartları sağlansın. O halde (3.9) integral denklemini Ulam-Hyers-Rassias kararlılığına sahiptir, yani $\psi \in C_\beta(I_\mathbb{T}, [0, \infty))$ olmak üzere

$$\sup_{t \in I_\mathbb{T}} \frac{|x(t) - f(t, x(t), x(\sigma(t)), \int_a^t K(t, s, x(s), x(\sigma(s))) \Delta s)|}{e_\beta(t, a)} = \|x - Fx\|_\beta \leq \psi(t)$$

şartını sağlayan her $x \in C_\beta(I_\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ için $F(x_0) = x_0$ ve $\|x - x_0\|_\beta \leq c \cdot \psi(t)$ olacak şekilde tek bir $x_0 \in C_\beta(I_\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ vardır.

İspat.

[79]'daki Teorem 3.1'den (3.9) denkleminin

$$[Fx](t) = f\left(t, x(t), x(\sigma(t)), \int_a^t K(t, s, x(s), x(\sigma(s))) \Delta s\right)$$

olmak üzere $F(x_0) = x_0$ olacak şekilde tek bir $x_0 \in C_\beta(I_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ çözümü vardır. Yine bu teoremden

$$\|Fx - Fy\|_\beta \leq M \left(1 + \frac{1+q\gamma}{1-r\gamma} + \frac{1}{\gamma}\right) \|x - x_0\|_\beta$$

dir. Bu sebeple

$$\|x - x_0\|_\beta \leq \|x - Fx\|_\beta + \|Fx - Fx_0\|_\beta$$

$$\leq \psi(t) + M \left(1 + \frac{1+q\gamma}{1-r\gamma} + \frac{1}{\gamma}\right) \|x - x_0\|_\beta$$

yazılabilir. Böylece $c = \left(1 - M \left(1 + \frac{1+q\gamma}{1-r\gamma} + \frac{1}{\gamma}\right)\right)^{-1}$ olmak üzere $\|x - x_0\|_\beta \leq$

$c \cdot \psi(t)$ eşitsizliği sağlanır.

Açıklama 3.1.10.

Teorem 3.1.9 da $\psi(t) = \epsilon$ seçilirse [79] daki Teorem 3.3 elde edilir.



4. ZAMAN ÖLÇEĞİ ÜZERİNDEKİ İNTEGRAL DENKLEMLERE UYGULAMALARI İLE b –METRİK BENZERİ UZAYLARDA T –PİCARD İTERASYONU İÇİN SABİT NOKTA VE KARARLILIK SONUÇLARI

Bu bölümde elde edilen sonuçlar (bak. [80]), AIMS Mathematics dergisinde yayımlanmıştır.

4.1. Sabit Nokta Sonuçları

İlk olarak T –ortalama genişlemeyen dönüşüm olan ancak ortalama genişlemeyen dönüşüm olmayan bir örnek sunulmuştur.

Örnek 4.1.1.

$X = [0,1]$ ve $\forall x, y \in X$ için $D(x, y) = (\max \{x, y\})^2$ olsun. O zaman (X, D) ikilisi $k = 2$ sabiti ile bir b –metrik benzeri uzaydır. $T, S: X \rightarrow X$ dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{3x}{8}, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

$$S(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

$\alpha = 0$ ve $\beta = 1$ alınsın. Bu durumda $\forall x, y \in X$ için

$$D(T(S(x)), T(S(y))) = 0 \leq \alpha D(T(x), T(y)) + \beta D(T(x), T(S(y)))$$

elde edilir. O halde S dönüşümü T –ortalama genişlemeyen dönüşümdür. Ancak S dönüşümü ortalama genişlemeyen dönüşüm değildir. Bunu göstermek için $x = 0$ ve $y = 1$ alınırsa

$$D(S(x), S(y)) = 1 > 0 = 0.1 + 1.0 = \alpha D(x, y) + \beta D(x, S(y))$$

elde edilir. Böylece S dönüşümünün ortalama genişlemeyen dönüşüm olmadığı görülür.

Genişlemeyen dönüşümlerde sabit noktanın tek olması gerekmez. Fakat aşağıda b –metrik benzeri uzaylarda T –ortalama genişlemeyen dönüşümün sabit noktasının tek olduğu gösterilmiştir.

Teorem 4.1.2.

(X, D) bir tam b -metrik benzeri uzay ve $T: X \rightarrow X$ sürekli, birebir ve dizisel yakınsak bir dönüşüm olsun. $S: X \rightarrow X$ dönüşümü $k(a + 2\beta k) < 1$ ile T –ortalama genişlemeyen dönüşüm ise o zaman S tek bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca $x^* \in \text{Fix}(S)$ olmak üzere (2.1) ile tanımlanan $\{T(x_n)\}$ dizisi $T(x^*)$ noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat.

(2.1), (2.3) ve (D3) kullanılarak

$$\begin{aligned}
 D(T(x_{n+1}), T(x_n)) &= D(T(S(x_n)), T(S(x_{n-1}))) \\
 &\leq a D(T(x_n), T(x_{n-1})) + \beta D(T(x_n), T(S(x_{n-1}))) \\
 &= a D(T(x_n), T(x_{n-1})) + \beta D(T(x_n), T(x_n)) \\
 &\leq a D(T(x_n), T(x_{n-1})) + \beta k [D(T(x_n), T(x_{n-1})) + D(T(x_{n-1}), T(x_n))] \\
 &= (a + 2\beta k) D(T(x_n), T(x_{n-1}))
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 D(T(x_n), T(x_{n-1})) &= D(T(S(x_{n-1})), T(S(x_{n-2}))) \\
 &\leq a D(T(x_{n-1}), T(x_{n-2})) + \beta D(T(x_{n-1}), T(S(x_{n-2}))) \\
 &= a D(T(x_{n-1}), T(x_{n-2})) + \beta D(T(x_{n-1}), T(x_{n-1})) \\
 &\leq a D(T(x_{n-1}), T(x_{n-2})) + \beta k [D(T(x_{n-1}), T(x_{n-2})) + D(T(x_{n-2}), T(x_{n-1}))] \\
 &= (a + 2\beta k) D(T(x_{n-1}), T(x_{n-2}))
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

elde edilir. (4.2) deki ifade (4.1) deki eşitsizlikte yerine konulursa,

$$D(T(x_{n+1}), T(x_n)) \leq (a + 2\beta k)^2 D(T(x_{n-1}), T(x_{n-2}))$$

olduğu görülür ve tümevarımsal olarak

$$D(T(x_{n+1}), T(x_n)) \leq (a + 2\beta k)^{n-1} D(T(x_2), T(x_1)) \tag{4.3}$$

yazılabilir. Üstelik, $n > m$ için

$$\begin{aligned}
D(T(x_m), T(x_n)) &\leq k[D(T(x_m), T(x_{m+1})) + D(T(x_{m+1}), T(x_n))] \\
&\leq k D(T(x_m), T(x_{m+1})) + k^2[D(T(x_{m+1}), T(x_{m+2})) + D(T(x_{m+2}), T(x_n))] \\
&\quad \vdots \\
&\leq k D(T(x_m), T(x_{m+1})) + k^2 D(T(x_{m+1}), T(x_{m+2})) + \dots \\
&\quad + k^{n-m-1} D(T(x_{n-2}), T(x_{n-1})) + k^{n-m} D(T(x_{n-1}), T(x_n))
\end{aligned} \tag{4.4}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Ayrıca (4.3) ve (4.4) eşitsizlikleri yardımı ile

$$\begin{aligned}
D(T(x_m), T(x_n)) &\leq [k(a + 2\beta k)^{m-1} + k^2(a + 2\beta k)^m + k^3(a + 2\beta k)^{m+1} + \dots \\
&\quad + k^{n-m}(a + 2\beta k)^{n-2}] D(T(x_2), T(x_1)) \\
&= k(a + 2\beta k)^{m-1} [1 + k(a + 2\beta k) + (k(a + 2\beta k))^2 + \dots \\
&\quad + (k(a + 2\beta k))^{n-m-1}] D(T(x_2), T(x_1)) \\
&\leq \frac{k(a+2\beta k)^{m-1}}{1-k(a+2\beta k)} D(T(x_2), T(x_1))
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise $\lim_{n,m \rightarrow \infty} D(T(x_m), T(x_n)) = 0$ olması gerektiği anlamına gelir yani $\{T(x_n)\}$ Cauchy dizisidir. (X, D) tam b – metrik benzeri uzay olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(T(x_n), \xi_0) = D(\xi_0, \xi_0) = 0 \tag{4.5}$$

olacak şekilde $\xi_0 \in X$ vardır. T dönüşümü dizisel yakınsak ve $\{T(x_n)\}$ dizisi yakınsak olduğu için $\{x_n\}$ dizisi de yakınsaktır. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x^*) = D(x^*, x^*) \tag{4.6}$$

olacak şekilde bir $x^* \in X$ vardır. T dönüşümü sürekli bir dönüşüm olduğundan, Lemma 2.7.11 ve (4.6) yardımıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(T(x_n), T(x^*)) = D(T(x^*), T(x^*)) \tag{4.7}$$

yazılabilir. Bu durumda (4.5) ve (4.7) kullanılarak $T(x^*) = \xi_0$ elde edilir. Böylece

$$D(T(S(x^*)), T(x^*))$$

$$\begin{aligned}
&\leq k \left[D \left(T(S(x^*)), T(S(x_n)) \right) + D \left(T(S(x_n)), T(x^*) \right) \right] \\
&\leq k \left[\alpha D(T(x^*), T(x_n)) + \beta D(T(x^*), T(S(x_n))) \right] + k \left[D(T(S(x_n)), T(x^*)) \right] \\
&= k\alpha D(T(x^*), T(x_n)) + k(\beta + 1)D(T(x^*), T(x_{n+1})) \\
&\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty \text{ iken})
\end{aligned}$$

olur. Bu sebeple $D(T(S(x^*)), T(x^*)) = 0$ olur ki bu ifade $T(S(x^*)) = T(x^*)$ eşitliğini gerektirir. T dönüşümü bire-bir dönüşüm olduğundan $S(x^*) = x^*$ yazılır. Böylece x^* , S dönüşümünün bir sabit noktası olur. Bu sabit noktanın tek olduğunu göstermek için $x^* \neq \xi^*$ olacak şekilde bir başka sabit noktanın var olduğu varsayalım. Yani $S(x^*) = x^*$ ve $S(\xi^*) = \xi^*$ dir. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
D(T(x^*), T(\xi^*)) &= D(T(S(x^*)), T(S(\xi^*))) \\
&\leq \alpha D(T(x^*), T(\xi^*)) + \beta D(T(x^*), T(S(\xi^*))) \\
&= (\alpha + \beta)D(T(x^*), T(\xi^*))
\end{aligned}$$

olup buradan

$$(1 - (\alpha + \beta))D(T(x^*), T(\xi^*)) \leq 0$$

eşitsizliği yazılır. $k(\alpha + 2\beta k) < 1$ ve $k \geq 1$ olduğundan $\alpha + \beta < 1$ bulunur. Sonuç olarak $D(T(x^*), T(\xi^*)) = 0$ elde edilir. Buradan $T(x^*) = T(\xi^*)$ olur. T dönüşümünün bire-bir olma özelliğinden $x^* = \xi^*$ sonucuna ulaşılır. Bu ise S dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu gösterir.

Açıklama 4.1.3.

Teorem 4.1.2, [27]'deki Teorem 2.3'ün metrik uzaydan b – metrik benzeri uzaya bir genişlemesidir.

Teorem 4.1.2'de $T = I$ birim dönüşüm olarak seçilirse literatürde yeni olan aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.1.4.

(X, D) bir tam b -metrik benzeri uzay ve $S: X \rightarrow X$ dönüşümü $k(\alpha + 2\beta k) < 1$ ile ortalama genişlemeyen dönüşüm ise o zaman S tek bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 4.1.2 ve Sonuç 4.1.4'te $k = 1$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.5.

(X, ρ) bir tam metrik benzeri uzay olsun.

- (i) $T: X \rightarrow X$ sürekli, birebir ve dizisel yakınsak bir dönüşüm ve $S: X \rightarrow X$ $\alpha + 2\beta < 1$ ile T –ortalama genişlemeyen dönüşüm ise o zaman S tek bir sabit noktaya sahiptir.
- (ii) $S: X \rightarrow X$ dönüşümü $\alpha + 2\beta < 1$ ile ortalama genişlemeyen dönüşüm ise o zaman S tek bir sabit noktaya sahiptir.

4.2. (T, S) –Kararlılık Sonucu

Bu bölümde Tanım 2.7.15 ile verilen b –metrik benzeri uzaylardaki (T, S) –kararlılık tanımı kullanılarak aşağıdaki sonuç verilmiştir.

Teorem 4.2.1.

Teorem 4.1.2'nin tüm şartları sağlansın. Bu durumda (2.1) ile tanımlanan $\{T(x_n)\}$ dizisi (T, S) –kararlıdır.

İspat.

$\{T(\xi_n)\}$ dizisi X 'de keyfi bir dizi ve $\rho_n = D(T(\xi_{n+1}), T(S(\xi_n)))$ olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ olduğu varsayalım. (2.3) ve (D3)'ten

$$\begin{aligned} D(T(\xi_{n+1}), T(x^*)) &\leq k \left[D(T(\xi_{n+1}), T(S(\xi_n))) + D(T(S(\xi_n)), T(x^*)) \right] \\ &= k \left[D(T(\xi_{n+1}), T(S(\xi_n))) + D(T(S(\xi_n)), T(S(x^*))) \right] \\ &\leq k\rho_n + k(\alpha + \beta)D(T(\xi_n), T(x^*)) \end{aligned}$$

yazılabilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ olduğundan Lemma 2.6.9 yardımıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} T(\xi_n) = T(x^*)$ elde edilir.

Diğer taraftan, $\lim_{n \rightarrow \infty} D(T(\xi_{n+1}), T(x^*)) = 0$ olsun. O zaman tekrar aynı lemma kullanılarak $n \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} \rho_n &= D(T(\xi_{n+1}), T(S(\xi_n))) \\ &\leq k \left[D(T(\xi_{n+1}), T(x^*)) + D(T(x^*), T(S(\xi_n))) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k \left[D(T(\xi_{n+1}), T(x^*)) + D(T(S(\xi_n)), T(S(x^*))) \right] \\
&\leq k D(T(\xi_{n+1}), T(x^*)) + k(\alpha + \beta) D(T(\xi_n), T(x^*)) \\
&\rightarrow 0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (2.1) ile tanımlanan $\{T(x_n)\}$ dizisi (T, S) –kararlıdır sonucuna ulaşılır.

4.3. Zaman Ölçeği Üzerindeki İntegral Denklemlere Uygulamalar

Bu bölümde ilk olarak zaman ölçeği üzerinde

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) f(s, x(s)) \Delta s, \quad t \in [a, b]_{\mathbb{T}} = [a, b] \cap \mathbb{T} \quad (4.8)$$

şeklinde verilen ikinci tür homojen Fredholm-Hammerstein integral denklemler kullanılarak bir uygulama yapılmıştır. Burada $f: [a, b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $K: [a, b]_{\mathbb{T}} \times [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ bilinen fonksiyonlar, $x: [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ bilinmeyen fonksiyon ve $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ bir parametredir. Ayrıca f fonksiyonu sürekli ve x 'e göre lineer olmayan bir fonksiyondur.

Aşağıdaki teorem $\forall x, y \in C([a, b]_{\mathbb{T}})$ olmak üzere

$$D(x, y) = \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} (|x(t)| + |y(t)|)^2$$

ile donatılan $C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ tam b –metrik benzeri bir uzayda (4.8) integral denkleminin çözümünün varlığını ve tekliğini göstermektedir.

Teorem 4.3.1

K ve f fonksiyonları $[a, b]_{\mathbb{T}}$ üzerinde Δ -integrallenebilen fonksiyonlar olmak üzere

(4.8) denklemi verilsin. $L \in \left(0, \frac{1}{2\lambda^2(b-a)}\right)$ bir sabit olmak üzere

$$\sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} \left(\int_a^b K^2(t, s) \Delta s \right) \leq L \quad (4.9)$$

ve $\forall x, y \in C([a, b]_{\mathbb{T}})$ için

$$(|u(t, x(t))| + |u(t, y(t))|)^2 \leq (|x(t)| + |y(t)|)^2 \quad (4.10)$$

şartları sağlansın. O halde (4.8) lineer olmayan Fredholm-Hammerstein integral denklemi $C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ de tek bir çözüme sahiptir.

İspat.

T ile S fonksiyonları $t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ olmak üzere

$$T(x(t)) = \frac{2}{3}x(t)$$

ve

$$S(x(t)) = \lambda \int_a^b K(t, s) f(s, x(s)) \Delta s,$$

şeklinde tanımlansın. K ve f fonksiyonları Δ -integrallenebilen fonksiyonlar olduğundan o halde S fonksiyonu açıkça $C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ de kendi üzerine olan fonksiyondur, yani $S: C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}) \rightarrow C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ dir. Lemma 2.5.14'teki Cauchy-Schwarz eşitsizliği, Teorem 2.5.15 ve (4.10) yardımıyla $\forall x, y \in C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} & (|T(S(x(t)))| + |T(S(y(t)))|)^2 \\ &= \left(\left| \frac{2\lambda}{3} \int_a^b K(t, s) f(s, x(s)) \Delta s \right| + \left| \frac{2\lambda}{3} \int_a^b K(t, s) f(s, y(s)) \Delta s \right| \right)^2 \\ &\leq \frac{4\lambda^2}{9} \left(\int_a^b |K(t, s)| \cdot |f(s, x(s))| \Delta s + \int_a^b |K(t, s)| \cdot |f(s, y(s))| \Delta s \right)^2 \\ &= \frac{4\lambda^2}{9} \left(\int_a^b |K(t, s)| \cdot (|f(s, x(s))| + |f(s, y(s))|) \Delta s \right)^2 \\ &\leq \frac{4\lambda^2}{9} \left(\int_a^b K^2(t, s) \Delta s \right) \left(\int_a^b (|f(s, x(s))| + |f(s, y(s))|)^2 \Delta s \right) \\ &\leq \frac{4\lambda^2}{9} \left(\int_a^b K^2(t, s) \Delta s \right) \left(\int_a^b (|x(s)| + |y(s)|)^2 \Delta s \right) \\ &\leq \frac{4\lambda^2}{9} \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} \left(\int_a^b K^2(t, s) \Delta s \right) (b - a) \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} (|x(t)| + |y(t)|)^2 \end{aligned}$$

yazılabilir ki bu durumda

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} \left(|T(S(x(t)))| + |T(S(y(t)))| \right)^2 \\ &\leq \frac{4\lambda^2}{9} \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} \left(\int_a^b K^2(t, s) \Delta s \right) (b - a) \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} (|x(t)| + |y(t)|)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.9) den yararlanarak

$$\sup_{t \in [a,b]_{\mathbb{T}}} \left(\left| T(S(x(t))) \right| + \left| T(S(y(t))) \right| \right)^2 \leq \frac{4\lambda^2}{9} L(b-a) D(x, y)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlikte $\lambda^2 L(b-a) = \alpha$ olarak yazılırsa

$$D(T(S(x)), T(S(y))) \leq \alpha D(T(x), T(y)) \leq \alpha D(T(x), T(y)) + \beta D(T(x), T(S(y)))$$

bulunur. $L < \frac{1}{2\lambda^2(b-a)}$ olduğundan $\alpha < \frac{1}{2}$ dir. Öyleyse $\alpha < \frac{1}{2}$ ve $\beta = 0$ yani $2(\alpha + 4\beta) < 1$ iken $C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ üzerinde S dönüşümü T –ortalama genişlemeyen dönüşümdür. Diğer yandan T dönüşümünün sürekli, bire-bir ve dizisel yakınsak olduğu açıktır. Bu nedenle Teorem 4.1.2'nin tüm şartları sağlanmaktadır ve böylece

S bir tek sabit noktaya sahiptir, yani $|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{2L(b-a)}}$ için (4.8) integral denklemi bir tek çözüme sahiptir.

Bu kısımda Teorem 4.3.1'i açıklayan bir örnek sunulmuştur.

Örnek 4.3.2.

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olarak verilsin.

$$x(t) = \lambda \int_0^4 (s + \sigma(s)) \frac{x(s)}{1 + (x(s))^2} \Delta s, \quad \forall t \in [0, 4]_{\mathbb{T}} \quad (4.11)$$

ile verilen integral denkleminde $K(t, s) = s + \sigma(s)$, $\forall x \in C([0, 4]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ için $f(t, x(t)) = \frac{x(t)}{1 + (x(t))^2}$ ve $\forall t \in \mathbb{Z}$ için $\sigma(s) = t + 1$ dir. Cauchy integral tanımından

$$\begin{aligned} \int_0^4 K^2(t, s) \Delta s &= \int_0^4 (2s + 1)^2 \Delta s \\ &= \int_0^4 (4s^2 + 4s + 1) \Delta s \\ &= \sum_{s=0}^3 (4s^2 + 4s + 1) \\ &= 84 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $L = 84$ olmak üzere (4.9) şartı sağlanır. Diğer yandan

$$(|f(t, x(t))| + |f(t, y(t))|)^2 = \left(\left| \frac{x(t)}{1 + (x(t))^2} \right| + \left| \frac{y(t)}{1 + (y(t))^2} \right| \right)^2 \leq (|x(t)| + |y(t)|)^2$$

yazılır. Bu ise (4.10) şartının sağlandığını gösterir. Teorem 4.3.1 den, $L < \frac{1}{8\lambda^2}$ için (4.11) ile verilen integral denklemin tek bir çözüme sahip olduğu söylenir. Bu

durumda $|\lambda| < \frac{2}{4\sqrt{42}}$ bulunur. Sonuç olarak verilen integral denklemin $x(t) = 0$ olan aşikar çözüme sahip olduğu görülür.

Gerçekten doğrudan hesaplama yöntemi ile $|\lambda| < \frac{2}{4\sqrt{42}}$ için $x(t) = 0$ çözümüne sahip olduğu gösterilebilir. Bunun için

$$c = \int_0^4 (s + \omega(s)) \frac{x(s)}{1 + (x(s))^2} \Delta s, \quad (4.12)$$

olarak alınsın. Böylece

$$x(t) = c\lambda \quad (4.13)$$

şeklinde yazılır. (4.13) ile verilen $x(t)$, (4.12) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} c &= \int_0^4 (s + s + 1) \frac{c\lambda}{1 + (c\lambda)^2} \Delta s \\ &= \frac{c\lambda}{1 + (c\lambda)^2} \int_0^4 (2s + 1) \Delta s \\ &= 16 \frac{c\lambda}{1 + (c\lambda)^2} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $c^3\lambda^2 + c(1 - 16\lambda) = 0$ olur. $\lambda < \frac{1}{16}$ için $x(t) = 0$ olacak şekilde bir tek çözüm vardır. Böylece (4.11) denklemi $\lambda < \frac{1}{16}$ iken tek bir çözüme sahiptir.

Teorem 4.3.1 deki $f(s, x(s))$ yerine $x(s)$ alınırsa, literatürde yeni olan aşağıdaki sonuç benzer şekilde elde edilir. Bu nedenle ispatsız verilmiştir.

Teorem 4.3.3.

K ve u fonksiyonları $[a, b]_{\mathbb{T}}$ üzerinde Δ –integrallenebilen fonksiyonlar olmak üzere

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) x(s) \Delta s, \quad t \in [a, b]_{\mathbb{T}} \quad (4.14)$$

denklemi verilsin. $L \in \left(0, \frac{1}{2\lambda^2(b-a)}\right)$ sabiti olmak üzere

$$\sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} \left(\int_a^b K^2(t, s) \Delta s \right) \leq L \quad (4.15)$$

şartları sağlansın. O halde (4.14) lineer Fredholm integral denklemi $C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ de tek bir çözüme sahiptir.

Aşağıda sunulan nümerik örnek ise Teorem 4.3.3'ü destekler.

Örnek 4.3.4.

$\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0} = \{1, 2, 4, \dots\}$ zaman ölçeği verilsin. Bu durumda $\forall t \in 2^{\mathbb{N}_0}$ için $\omega(t) = 2t$ olur.

$$x(t) = \lambda \int_1^4 \frac{x(s)}{s^2} \Delta s, \quad \forall t \in [1, 4]_{\mathbb{T}}$$

integral denklemi incelendiğinde $K(t, s) = s^{-2}$ olduğu görülür. Böylece Teorem 2.5.11 (ii)'den

$$\begin{aligned} \int_1^4 K^2(t, s) \Delta s &= \int_1^4 (s^{-2})^2 \Delta s \\ &= \int_1^4 s^{-4} \Delta s \\ &= \int_1^4 \left(-\frac{8}{7} s^{-3} \right)^\Delta \Delta s \\ &= -\frac{8}{7} s^{-3} \Big|_{s=1}^{s=4} \\ &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $L = \frac{9}{8}$ olmak üzere (4.15) şartı sağlanır. Teorem 4.3.3 aracılığıyla, $L < \frac{1}{6\lambda^2}$ yani $|\lambda| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ için verilen Fredholm integral denklemi tek bir çözüme sahiptir. Sonuç olarak bu integral denklemin $x(t) = 0$ olan aşıkâr çözüme sahip olduğu görülür.

Gerçekten doğrudan hesaplama yöntemi ile $|\lambda| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ için $x(t) = 0$ çözümüne sahip olduğu gösterilebilir. Bunun için

$$c = \int_1^4 \frac{x(s)}{s^2} \Delta s$$

verilsin. Bu durumda $x(t) = c\lambda$ ve böylece

$$\begin{aligned}
c &= \int_1^4 \frac{c\lambda}{s^2} \Delta s \\
&= c\lambda \int_1^4 \frac{1}{s^2} \Delta s \\
&= \frac{3}{2} c\lambda
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem $c \left(1 - \frac{3}{2} \lambda\right) = 0$ şeklinde yeniden yazılabilir, yani $\lambda \neq \frac{2}{3}$ için $c = 0$ olacak şekilde tek bir çözüm vardır. O halde $\lambda \neq \frac{2}{3}$ olması durumunda verilen integral denklem tek bir çözüme sahiptir.

Açıklama 4.3.5.

Örnek 4.3.2 ve Örnek 4.3.4’te ilgili teoremler, λ için küçük bir aralık sağlar. Ancak bu aralıkta çözümün varlığı ve tekliği hesaplama olmaksızın garanti edilebilir.



5. ZAMAN ÖLÇEĞİ ÜZERİNDEKİ İNTEGRAL DENKLEMLERE UYGULAMALARI İLE HİPERBOLİK METRİK UZAYLARDA AA –İTERASYONU İÇİN KARARLILIK VE YAKINSAKLIK SONUÇLARI

Bu bölümde elde edilen sonuçlar (bak. [81]), AIMS Mathematics adlı dergide yayımlanmıştır.

5.1. Zayıf w^2 –Kararlılık Sonucu

Bu bölümde Banach uzaylarda Abbas ve ark. [16] tarafından tanımlanan AA –iterasyonu hiperbolik metrik uzaylara aktarılmış ve elde edilen modifiye iterasyon için zayıf w^2 –kararlılık sonucu gösterilmiştir.

AA –iterasyonunun hiperbolik metrik uzaylardaki formu aşağıdaki biçimdedir:

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ w_n = W(x_n, T(x_n), \sigma_n), \\ z_n = T(W(w_n, T(w_n), \rho_n)), \\ y_n = T(W(T(w_n), T(z_n), \eta_n)), \\ x_{n+1} = T(y_n), \quad \forall n \geq 1. \end{cases} \quad (5.1)$$

İlk olarak zayıf w^2 –kararlılık teoreminde etkili bir rol oynayan kuvvetli yakınsaklık teoremi verilecektir.

Teorem 5.1.1.

X bir hiperbolik metrik uzay, C de X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi, $T: C \rightarrow C$ dönüşümü $k \in [0,1)$ sabiti ile $Fix(T) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir daralma dönüşümü olsun. $\{x_n\}$ iterasyon dizisi (5.1)’ de tanımlanan şekilde verilsin. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına kuvvetli yakınsar yani $x^* \in Fix(T)$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ dir.

İspat.

T daralma dönüşümü bir sabit noktaya sahip olduğunda bu sabit nokta tektir. Bu tek sabit nokta x^* olsun. (5.1) iterasyon yönteminden

$$d(w_n, x^*) = d(W(x_n, T(x_n), \sigma_n), x^*)$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - \sigma_n)d(x_n, x^*) + \sigma_n d(T(x_n), x^*) \\
&\leq (1 - \sigma_n)d(x_n, x^*) + k \cdot \sigma_n d(x_n, x^*) \\
&= (1 - \sigma_n(1 - k)) \cdot d(x_n, x^*) \tag{5.2}
\end{aligned}$$

elde edilir. $k \in [0,1)$ ve $0 \leq \sigma_n \leq 1$ olduğundan $1 - \sigma_n(1 - k) \leq 1$ olduğu görülür. Böylece (5.2) ile verilen eşitsizlikten

$$d(w_n, x^*) \leq d(x_n, x^*) \tag{5.3}$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
d(z_n, x^*) &= d\left(T\left(W(w_n, T(w_n), \rho_n)\right), x^*\right) \\
&\leq k \cdot d(W(w_n, T(w_n), \rho_n), x^*) \\
&\leq k \cdot [(1 - \rho_n)d(w_n, x^*) + \rho_n d(T(w_n), x^*)] \\
&\leq k \cdot (1 - \rho_n)d(w_n, x^*) + k^2 \cdot \rho_n d(w_n, x^*) \\
&= k \cdot (1 - \rho_n(1 - k)) \cdot d(w_n, x^*) \tag{5.4}
\end{aligned}$$

bulunur. Tekrar $k \in [0,1)$ ve $0 \leq \rho_n \leq 1$ olduğundan $1 - \rho_n(1 - k) \leq 1$ olduğu görülür. Böylece (5.3) yardımıyla (5.4) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
d(z_n, x^*) &< d(w_n, x^*) \\
&\leq d(x_n, x^*) \tag{5.5}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. (5.1) iterasyonu ve (5.5) eşitsizliği ile

$$\begin{aligned}
d(y_n, x^*) &= d(T(W(T(w_n), T(z_n), \eta_n)), x^*) \\
&\leq k \cdot d(W(T(w_n), T(z_n), \eta_n), x^*) \\
&\leq k \cdot [(1 - \eta_n)d(T(w_n), x^*) + \eta_n d(T(z_n), x^*)] \\
&\leq k^2 \cdot (1 - \eta_n)d(w_n, x^*) + k^2 \cdot \eta_n d(z_n, x^*) \\
&< k^2 \cdot (1 - \eta_n)d(w_n, x^*) + k^2 \cdot \eta_n d(w_n, x^*) \\
&= k^2 \cdot d(w_n, x^*) \tag{5.6}
\end{aligned}$$

olur. $k \in [0,1)$ olduğundan (5.3) ve (5.6) yardımıyla

$$d(y_n, x^*) < d(x_n, x^*) \tag{5.7}$$

elde edilir. Son olarak (5.7) eşitsizliği ile $k \in [0,1)$ gerçeği kullanılarak

$$d(x_{n+1}, x^*) = d(T(y_n), x^*) \leq k \cdot d(y_n, x^*) < d(y_n, x^*) < d(x_n, x^*) \quad (5.8)$$

sonucuna ulaşılır. $d(x_n, x^*) = A_n$ olarak alınırsa o zaman (5.8) eşitsizliği

$$A_{n+1} < A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

formuna dönüşür. Böylece $\{A_n\}$ reel sayıların monoton azalan bir dizisidir. Üstelik bu dizi alttan sınırlıdır ve bu yüzden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{A_n\} = 0$$

elde edilir. Yani $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ olur.

Uyarı 5.1.2.

Daralma dönüşümü kullanılarak (2.2) ile verilen AA –iterasyon algoritmasının kuvvetli yakınsama teoremi, Teorem 5.1.1’in bir sonucu olarak verilebilir.

Şimdi de (5.1) ile tanımlanan modifiye edilmiş iterasyon yönteminin T dönüşümüne göre zayıf w^2 –kararlılık teoremi ispatlanacaktır.

Teorem 5.1.3.

Teorem 5.1.1’in tüm koşulları sağlandığında, (5.1) ile verilen modifiye edilmiş AA –iterasyonu T dönüşümüne göre zayıf w^2 –kararlıdır.

İspat.

$\{x_n\}$, (5.1) ile verilen iterasyon dizisi ve $\{p_n\} \subset C$, $\{x_n\}$ ’in bir denk dizisi olsun. $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}^+$ dizisi

$$\begin{cases} p_1 \in L, \\ r_n = W(p_n, T(p_n), \sigma_n), \\ s_n = T(W(r_n, T(r_n), \rho_n)), \\ q_n = T(W(T(r_n), T(s_n), \eta_n)), \\ \varepsilon_n = T(p_{n+1}, T(q_n)), \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (5.9)$$

olarak verilsin. Burada $\{\sigma_n\}, \{\rho_n\}$ ve $\{\eta_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında tanımlı reel dizilerdir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ kabul edilsin ve $x^* \in \text{Fix}(T)$ olsun. Bu durumda $k \in [0,1)$ ve $0 \leq \sigma_n, \rho_n, \eta_n \leq 1$ olduğu hatırlanırsa $1 - \sigma_n(1 - k) \leq 1$, $1 - \rho_n(1 - k) \leq 1$ ve $1 - \eta_n(1 - k) \leq 1$ olduğu söylenebilir. Böylece

$$\begin{aligned}
d(w_n, r_n) &= d\left(W(x_n, T(x_n), \sigma_n), W(p_n, T(p_n), \sigma_n)\right) \\
&\leq (1 - \sigma_n)d(x_n, p_n) + \sigma_n d(T(x_n), T(p_n)) \\
&\leq (1 - \sigma_n)d(x_n, p_n) + \sigma_n \cdot k \cdot d(x_n, p_n) \\
&= (1 - \sigma_n(1 - k)) d(x_n, p_n) \\
&\leq d(x_n, p_n)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

olur. (5.10) eşitsizliği ile

$$\begin{aligned}
d(z_n, s_n) &= d\left(T(W(w_n, T(w_n), \rho_n)), T(W(r_n, T(r_n), \rho_n))\right) \\
&\leq k \cdot d(W(w_n, T(w_n), \rho_n), W(r_n, T(r_n), \rho_n)) \\
&\leq k \cdot [(1 - \rho_n)d(w_n, r_n) + \rho_n \cdot d(T(w_n), T(r_n))] \\
&\leq k \cdot (1 - \rho_n)d(w_n, r_n) + k^2 \cdot \rho_n \cdot d(w_n, r_n) \\
&\leq k \cdot [1 - \rho_n(1 - k)] \cdot d(w_n, r_n) \\
&\leq k \cdot d(w_n, r_n) \\
&\leq k \cdot d(x_n, p_n)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

elde edilir. (5.10) ve (5.11) eşitsizliklerinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
d(y_n, q_n) &= d\left(T(W(T(w_n), T(z_n), \eta_n)), T(W(T(r_n), T(s_n), \eta_n))\right) \\
&\leq k \cdot d(W(T(w_n), T(z_n), \eta_n), W(T(r_n), T(s_n), \eta_n)) \\
&\leq k \cdot [(1 - \eta_n) \cdot d(T(w_n), T(r_n)) + \eta_n \cdot d(T(z_n), T(s_n))] \\
&\leq k^2 \cdot (1 - \eta_n) \cdot d(w_n, r_n) + k^2 \cdot \eta_n \cdot d(z_n, s_n) \\
&\leq k^2 \cdot (1 - \eta_n) \cdot d(w_n, r_n) + k^3 \cdot d(w_n, r_n) \\
&= k^2 \cdot (1 - \eta_n(1 - k)) \cdot d(w_n, r_n) \\
&\leq k^2 \cdot d(w_n, r_n) \\
&\leq k^2 \cdot d(x_n, p_n)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

sonucuna ulaşılır. (5.1), (5.9) ve (5.12) ile verilenlerden

$$d(p_{n+1}, x^*) \leq d(p_{n+1}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x^*)$$

$$\begin{aligned}
&\leq d(p_{n+1}, T(q_n)) + d(T(q_n), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x^*) \\
&= d(p_{n+1}, T(q_n)) + d(T(q_n), T(y_n)) + d(x_{n+1}, x^*) \\
&\leq \varepsilon_n + k \cdot d(y_n, q_n) + d(x_{n+1}, x^*) \\
&\leq \varepsilon_n + k^3 \cdot d(x_n, p_n) + d(x_{n+1}, x^*) \tag{5.13}
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 5.1.1’de belirtildiği gibi $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) = 0$ dır. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x^*) = 0$ olduğu sonucuna ulaşılır. $\{x_n\}$ ile $\{p_n\}$ denk diziler olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p_n) = 0$ olur. Bu durumda (5.13) eşitsizliğinin her iki tarafının limiti alınır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ varsayımı kullanılırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} d(p_{n+1}, x^*) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\{x_n\}$ iterasyon dizisi T dönüşümüne göre zayıf w^2 –kararlıdır.

5.2. Yakınsaklık Sonuçları

İlk olarak (5.1) ile verilen modifiye edilmiş iterasyonun Δ –yakınsama sonucu verilmiştir.

Teorem 5.2.1.

$C, \mathbb{X}$ uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Ayrıca $T: C \rightarrow C$, $Fix(T) \neq \emptyset$ ile bir genelleştirilmiş (α, β) –genişlemeyen dönüşüm ve $\{x_n\}$ (5.1) ile verilen iterasyon dizisi olsun. O zaman $\{x_n\}$ dizisi T ’nin bir sabit noktasına Δ –yakınsar.

İspat.

İspat üç adımda elde edilmiştir.

1.Adım: İlk olarak keyfi bir $x^* \in Fix(T)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) \tag{5.14}$$

limitinin var olduğu gösterilmiştir. $x^* \in Fix(T)$ olduğundan Önerme 2.3.13 (i)’den T dönüşümü quasi genişlemeyen bir dönüşümdür, yani $\forall x \in C$ ve her bir $x^* \in Fix(T)$ ve için $d(T(x), x^*) \leq d(x, x^*)$ olur. (5.1) kullanılarak

$$\begin{aligned}
d(w_n, x^*) &= d(W(x_n, T(x_n), \sigma_n), x^*) \\
&\leq (1 - \sigma_n)d(x_n, x^*) + \sigma_n d(T(x_n), x^*) \\
&\leq (1 - \sigma_n)d(x_n, x^*) + \sigma_n d(x_n, x^*) = d(x_n, x^*) \tag{5.15}
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.15) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
d(z_n, x^*) &= d(T(W(w_n, T(w_n), \rho_n)), x^*) \\
&\leq d(W(w_n, T(w_n), \rho_n), x^*) \\
&\leq (1 - \rho_n)d(w_n, x^*) + \rho_n d(T(w_n), x^*) \\
&\leq (1 - \rho_n)d(w_n, x^*) + \rho_n d(w_n, x^*) = d(w_n, x^*) \\
&\leq d(x_n, x^*)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

bulunur. (5.15) ve (5.16) eşitsizlikleri birleştirilerek

$$\begin{aligned}
d(y_n, x^*) &= d(T(W(T(w_n), T(z_n), \eta_n)), x^*) \\
&\leq d(W(T(w_n), T(z_n), \eta_n), x^*) \\
&\leq (1 - \eta_n)d(T(w_n), x^*) + \eta_n d(T(z_n), x^*) \\
&\leq (1 - \eta_n)d(w_n, x^*) + \eta_n d(z_n, x^*) \\
&\leq (1 - \eta_n)d(x_n, x^*) + \eta_n d(x_n, x^*) \\
&= d(x_n, x^*)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

yazılır. Son olarak (5.1) ile (5.17)'teki eşitsizlik kullanılarak

$$d(x_{n+1}, x^*) = d(T(y_n), x^*) \leq d(y_n, x^*) \leq d(x_n, x^*) \tag{5.18}$$

elde edilir. Böylece $\{d(x_n, x^*)\}$ dizisi artmayan ve alttan sınırlıdır. Bu yüzden (5.14)'te istenilen sonuca ulaşılır.

2. Adım: Bu kısımda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, T(x_n)) = 0 \tag{5.19}$$

olduğu ispatlanmıştır. (5.14)'ten her bir $x \in \text{Fix}(T)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*)$ limiti mevcut olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) = \mathfrak{S} \tag{5.20}$$

yazılabilir. (5.15) ve (5.20) den

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(w_n, x^*) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) = \mathfrak{S} \tag{5.21}$$

elde edilir. T quasi genişlemeyen bir dönüşüm olduğundan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(T(x_n), x^*) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) = \mathfrak{S} \tag{5.22}$$

bulunur. Diğer yandan (5.1) kullanılarak

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x^*) &\leq d(y_n, x^*) \\
&\leq (1 - \eta_n)d(T(w_n), x^*) + \eta_n d(T(z_n), x^*) \\
&\leq (1 - \eta_n)d(w_n, x^*) + \eta_n d(z_n, x^*) \\
&\leq (1 - \eta_n)d(w_n, x^*) + \eta_n d(w_n, x^*) \\
&= d(w_n, x^*)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $d(x_{n+1}, x^*) \leq d(w_n, x^*)$ olması anlamına gelir. Bu nedenle

$$\mathfrak{S} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(w_n, x^*) \quad (5.23)$$

yazılabilir. (5.21) ve (5.23) eşitsizlikleri ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(w_n, x^*) = \mathfrak{S} \quad (5.24)$$

bulunur. (5.24)'ten

$$\mathfrak{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} d(w_n, x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(W(x_n, T(x_n), \sigma_n), x^*) \quad (5.25)$$

elde edilir. Son olarak (5.20), (5.22) ve (5.25) eşitsizliklerini kullanarak ve Lemma 2.1.23'ü uygulayarak (5.19) ile verilen sonuç elde edilir.

3.Adım: Bu bölümde ise $\{x_n\}$ dizisinin Δ –yakınsaklık sonucu verilmiştir. Lemma 2.1.23'ten $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı olduğu bilindiğinden bu dizinin $A(C, \{x_n\}) = \{x^*\}$ olacak şekilde tek bir asimptotik merkezi vardır. $\{x_n\}$ dizisinin $A(C, \{k_n\}) = \{k\}$ olmak üzere herhangi bir $\{k_n\}$ alt dizisi verilsin. O halde (5.19)'dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(k_n, T(k_n)) = 0$$

bulunur. k elemanının, T dönüşümünün sabit noktası olduğu gösterilmek istenmektedir. Önerme 2.3.14 (iii)'den,

$$\begin{aligned}
r(T(k), \{k_n\}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} d(k_n, T(k)) \\
&\leq \frac{3+\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta} \limsup_{n \rightarrow \infty} d(k_n, T(k_n)) + \limsup_{n \rightarrow \infty} d(k_n, k) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} d(k_n, k) \\
&= r(k, \{k_n\})
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ifade $T(k) \in A(C, \{k_n\})$ olmasını gerektirir. Asimptotik merkezin tekliği $T(k) = k$ olduğunu gösterir, yani $k \in \text{Fix}(T)$ dir. Ayrıca $\{x_n\}$ dizisinin alt dizisi olan $\{k_n\}$ dizisi için k noktasının tek bir sabit nokta olduğu ileri sürülmektedir. Aksine $x^* \neq k$ şeklinde farklı bir diğer sabit nokta verilsin. (5.14)'ten $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, k)$ limitinin varlığı bilinmektedir. Bu durumda asimptotik merkezin tekliğini göz ardı etmeden

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} d(k_n, k) &< \limsup_{n \rightarrow \infty} d(k_n, x^*) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) \\ &< \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, k) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} d(k_n, k) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $\{x_n\}$ dizisinin herhangi bir $\{k_n\}$ alt dizisi için $x^* \in \text{Fix}(T)$ tek asimptotik merkezdir. Bu durum $\{x_n\}$ dizisinin T dönüşümünün bir sabit noktasına Δ -yakınsadığını ispat eder.

Şimdi (5.1) ile verilen iterasyonun kuvvetli yakınsaklığı için gerekli ve yeterli olan şartlar verilecektir.

Teorem 5.2.2.

C, T ve $\{x_n\}$ Teorem 5.1.1'deki özelliklere sahip olsun. O zaman $\{x_n\}$ dizisinin T dönüşümünün bir sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \text{Fix}(T)) = 0$$

veya

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \text{Fix}(T)) = 0$$

olmasıdır.

İspat. Eğer $\{x_n\}$ dizisi bir $x^* \in \text{Fix}(T)$ noktasına yakınsaksa, o zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) = 0$ dır. Ayrıca $0 \leq d(x_n, \text{Fix}(T)) \leq d(x_n, x^*)$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \text{Fix}(T)) = 0 \quad (5.26)$$

elde edilir.

Tersine $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \text{Fix}(T)) = 0$ olsun. Önerme 2.3.14 (ii)'den $\text{Fix}(T)$ kümesi C' 'de kapalıdır. İspatın geri kalanına [82] deki Teorem 3'e benzer şekilde devam edilebilir.

Şimdi ise (I) şartı kullanılarak yakınsaklık teoremi ispatlanacaktır.

Teorem 5.2.3.

Teorem 5.2.1'deki varsayımlar göz önüne alındığında, eğer T dönüşümü (I) şartını sağlarsa o zaman $\{x_n\}$, T dönüşümünün bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat. (5.7) eşitliğinden $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, T(x_n)) = 0$ dır. (I) şartından ise

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, \text{Fix}(T))) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, T(x_n)) = 0$$

yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, \text{Fix}(T))) = 0$ bulunur. f fonksiyonun özelliklerinden

$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \text{Fix}(T)) = 0$ elde edilir. Bu durumda Teorem 5.2.2'nin tüm şartları sağlanır.

Böylece $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Aşağıdaki sonuç ise kümenin kompaktlığına dayanmaktadır.

Teorem 5.2.4.

C, X uzayının boştan farklı, kompakt ve konveks bir alt kümesi olsun. Ayrıca $T: C \rightarrow C$, $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ ile bir genelleştirilmiş (α, β) –genişlemeyen dönüşüm ve $\{x_n\}$ (5.1) ile oluşturulmuş iterasyon dizisi olsun. O zaman $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat. $x^* \in C$ verilsin. C kümesinin kompaktlığı göz önüne alındığında $\{x_n\}$ dizisinin $\lim_{n \rightarrow \infty} d(k_n, x^*) = 0$ olacak şekilde bir $\{k_n\}$ alt dizisi vardır. (5.19)'dan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(k_n, T(k_n)) = 0$ elde edilir. Önerme 2.3.14 (iii) den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(k_n, T(x^*)) \leq \frac{3 + \alpha + \beta}{1 - \alpha - \beta} \lim_{n \rightarrow \infty} d(k_n, T(k_n)) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(k_n, x^*) = 0$$

bulunur. Böylece $T(x^*) = x^*$ dır, yani, $x^* \in \text{Fix}(T)$ olur. Ayrıca (5.14)'ten $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*)$ mevcuttur. Böylece $x^*, \{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limitidir.

Açıklama 5.2.5.

Teorem 5.2.1-5.2.4 [83] deki bulguları hem uzay yönünden hem de dönüşüm yönünden genelleştirmektedir.

Açıklama 2.3.13 (ii) ve (iii) yardımıyla literatürde yeni olan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2.6.

C ve $\{x_n\}$ dizisi Teorem 5.2.1’de verilen şartları sağlasın. T dönüşümü $Fix(T) \neq \emptyset$ ile genelleştirilmiş α –genişlemeyen (veya β – Reich-Suzuki genişlemeyen) bir dönüşüm ise, o zaman aşağıdaki sonuçlar geçerlidir:

- (i) $\{x_n\}$ dizisi T ’nin bir sabit noktasına Δ –yakınsar.
- (ii) $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar ancak ve ancak $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Fix(T)) = 0$ veya $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Fix(T)) = 0$ dır.
- (iii) T dönüşümü (I) şartını sağlarsa veya C kümesi kompaktsa o zaman $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Açıklama 5.2.7.

Sonuç 5.2.6 ile [83] deki Teorem 2-5 deki sonuçlar düzgün konveks Banach uzaydan tam düzgün konveks hiperbolik metrik uzaya genelleştirilir.

5.3. Nümerik Örnek

Bu kısımda genelleştirilmiş (α, β) –genişlemeyen dönüşüm olan ancak (C) şartını sağlamayan ve genelleştirilmiş α –genişlemeyen dönüşüm ile β – Reich-Suzuki genişlemeyen dönüşüm olma şartlarına uymayan bir örnek sunulmuştur.

Örnek 5.3.1.

$\mathbb{X} = \mathbb{R}$ uzayı $d(x, y) = |x - y|$ normu ile donatılsın ve $\forall x, y \in \mathbb{X}$ ve $a \in [0, 1]$ için $W(x, y, a) = (1 - a)x + ay$ şeklinde verilsin. Açıkça görülür ki $(\mathbb{X}, d, W)$ bir hiperbolik metrik uzaydır. $C = [0, \infty)$ olmak üzere $T: C \rightarrow C$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{8}] \\ \frac{19x}{40}, & x > \frac{1}{8} \end{cases}$$

olarak verilsin. T dönüşümünün sabit noktasının $x = 0$ olduğu aşikardır.

Şimdi $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$ seçilerek T nin genelleştirilmiş (α, β) –genişlemeyen dönüşüm olduğu gösterilecektir.

Durum 1: $x, y \in [0, \frac{1}{8}]$ için $T(x) = T(y) = 0$ elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{4}d(x, T(y)) + \frac{1}{4}d(y, T(x)) + \frac{1}{4}d(x, T(x)) + \frac{1}{4}d(y, T(y)) + 0 \cdot d(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \cdot |x - T(y)| + \frac{1}{4} \cdot |y - T(x)| + \frac{1}{4} \cdot |x - T(x)| + \frac{1}{4} \cdot |y - T(y)| \\
&= \frac{1}{4} \cdot |x| + \frac{1}{4} \cdot |y| + \frac{1}{4} \cdot |x| + \frac{1}{4} \cdot |y| \\
&\geq 0 = |T(x) - T(y)| = d(T(x), T(y))
\end{aligned}$$

bulunur.

Durum 2: $x, y > \frac{1}{8}$ olsun. O halde $T(x) = \frac{19x}{40}$ ve $T(y) = \frac{19y}{40}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}d(x, T(y)) + \frac{1}{4}d(y, T(x)) + \frac{1}{4}d(x, T(x)) + \frac{1}{4}d(y, T(y)) + 0 \cdot d(x, y) \\
&= \frac{1}{4} \cdot |x - T(y)| + \frac{1}{4} \cdot |y - T(x)| + \frac{1}{4} \cdot |x - T(x)| + \frac{1}{4} \cdot |y - T(y)| \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left| x - \frac{19y}{40} \right| + \frac{1}{4} \cdot \left| y - \frac{19x}{40} \right| + \frac{1}{4} \cdot \left| x - \frac{19x}{40} \right| + \frac{1}{4} \cdot \left| y - \frac{19y}{40} \right| \\
&\geq \frac{1}{4} \cdot \left| \frac{59x}{40} - \frac{59y}{40} \right| + \frac{1}{4} \cdot \left| \frac{21x}{40} - \frac{21y}{40} \right| \\
&\geq \frac{1}{2} |x - y| \\
&\geq \frac{19}{40} |x - y| = |T(x) - T(y)| = d(T(x), T(y))
\end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 3: $x \in [0, \frac{1}{8}]$ ve $y > \frac{1}{8}$ olsun. O zaman $T(x) = 0$ ve $T(y) = \frac{19y}{40}$ olur.

Böylece

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}d(x, T(y)) + \frac{1}{4}d(y, T(x)) + \frac{1}{4}d(x, T(x)) + \frac{1}{4}d(y, T(y)) + 0 \cdot d(x, y) \\
&= \frac{1}{4} \cdot |x - T(y)| + \frac{1}{4} \cdot |y - T(x)| + \frac{1}{4} \cdot |x - T(x)| + \frac{1}{4} \cdot |y - T(y)| \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left| x - \frac{19y}{40} \right| + \frac{1}{4} \cdot |y| + \frac{1}{4} \cdot |x| + \frac{1}{4} \cdot \left| y - \frac{19y}{40} \right| \\
&\geq \frac{1}{4} \cdot \left| \frac{80y}{40} \right| \\
&\geq \frac{19}{40} \cdot |y| = |T(x) - T(y)| = d(T(x), T(y))
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç olarak T dönüşümü $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$ ile bir genelleştirilmiş (α, β) –genişlemeyen dönüşümdür.

Ancak $x = \frac{1}{8}$ ve $y = \frac{23}{120}$ olarak alınırsa $\frac{1}{2}d(x, T(x)) = \frac{1}{16} < \frac{1}{15} = d(x, y)$ iken

$$(i) \quad d(T(x), T(y)) = \frac{437}{4800} > \frac{1}{15} = d(x, y)$$

$$(ii) \quad d(T(x), T(y)) = \frac{437}{4800} > \frac{1723}{19200}$$

$$= \frac{1}{4}d(x, T(y)) + \frac{1}{4}d(y, T(x)) + \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{4}\right)d(x, y)$$

$$(iii) \quad d(T(x), T(y)) = |T(x) - T(y)|$$

$$= \frac{437}{4800} > \frac{1723}{19200}$$

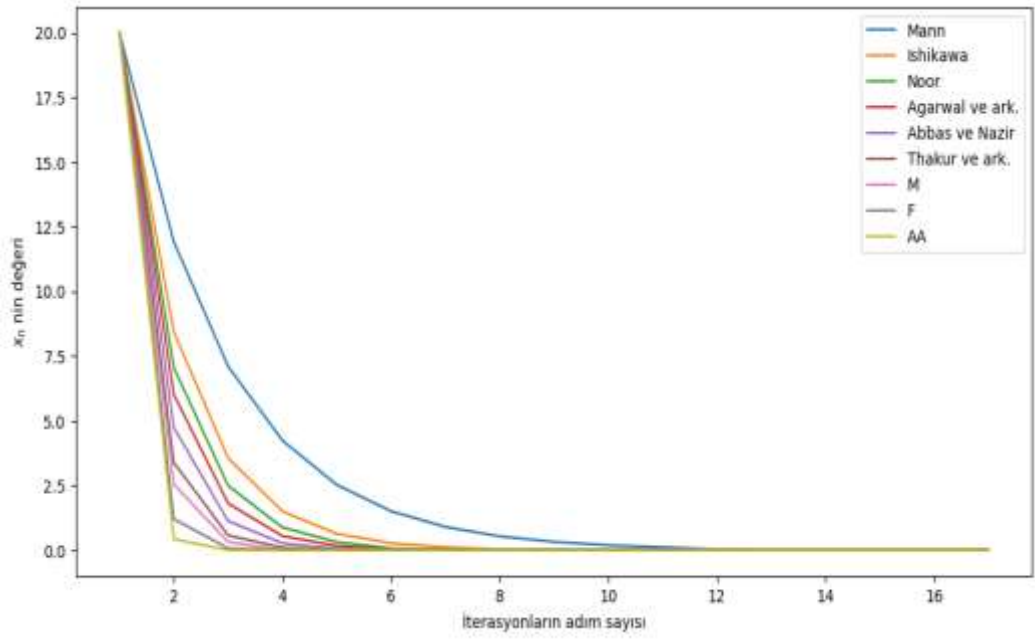
$$= \frac{1}{4}d(x, T(x)) + \frac{1}{4}d(y, T(y)) + \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{4}\right)d(x, y)$$

bulunur. Bu nedenle T dönüşümü (C) şartını ve genelleştirilmiş α –genişlemeyen ile β – Reich-Suzuki genişlemeyen dönüşüm olma şartlarını sağlamaz.

Aşağıdaki tablo ve grafik $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sigma_n = \frac{10}{13}$, $\rho_n = \frac{10}{12}$ ve $\eta_n = \frac{10}{11}$ özel değerleri ve $x_1 = 20$ başlangıç noktası ile genelleştirilmiş (α, β) –genişlemeyen dönüşümü için AA –iterasyonunun diğer iterasyonlardan daha hızlı yakınsadığını gösterir.

Tablo 5.1. $x_1 = 20$ başlangıç noktası için farklı iterasyon yöntemlerinin yakınsama hızlarının karşılaştırılması

İterasyon Adım Sayısı	Mann	Ishikawa	Noor	Agarwal ve ark.	Abbas ve Nazir	Thakur ve ark.	M	F	AA
1	20	20	20	20	20	20	20	20	20
2	11,92308	8,43531	7,05474	6,01224	4,73775	3,38188	2,53828	1,20568	0,42654
3	7,10799	3,55773	2,48847	1,80735	1,12231	0,57186	0,32214	0,07268	0
4	4,23745	1,50053	0,87778	0,54331	0,26586	0,09670	0	0	0
5	2,52617	0,63287	0,30962	0,16333	0,05464	0	0	0	0
6	1,50599	0,26692	0,07145	0,01790	0	0	0	0	0
7	0,89780	0,11258	0,01649	0	0	0	0	0	0
8	0,53523	0,02598	0,00381	0	0	0	0	0	0
9	0,31908	0,00600	0,00088	0	0	0	0	0	0
10	0,19022	0,00138	0,00020	0	0	0	0	0	0
11	0,11340	0,00032	0,00005	0	0	0	0	0	0
12	0,02617	0,00007	0,00001	0	0	0	0	0	0
13	0,00604	0,00002	0	0	0	0	0	0	0
14	0,00139	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0,00032	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0,00007	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0,00002	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0



Şekil 5.1. Tablo 5.1’e göre AA –iterasyonu ve diğer iterasyonlar arasında grafiksel karşılaştırma

Aşağıdaki tabloda, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sigma_n = \frac{10}{13}$, $\rho_n = \frac{10}{12}$ ve $\eta_n = \frac{10}{11}$ parametreleri kullanarak çeşitli iterasyonlarda başlangıç noktasının etkisi incelenmiştir.

Tablo 5.2. Farklı başlangıç noktaları ile 0 sabit noktasını elde etmek için gereken iterasyon adım sayısı

Başlangıç Noktası	Mann	Ishikawa	Noor	Agarwal ve ark.	Abbas ve Nazir	Thakur ve ark.	M	F	AA
2	14	12	11	5	4	4	3	3	2
20	18	14	13	7	6	5	4	4	3
300	24	17	16	9	8	7	6	5	4
5000	29	21	19	11	9	8	7	6	4
20000	32	22	20	12	10	9	8	6	5
10^5	35	24	21	14	12	10	8	7	5
10^6	39	27	24	16	13	11	10	7	6

Ayrıca aşağıdaki tabloda $x_1 = 20$ başlangıç noktasıyla çeşitli iterasyon algoritmaları için parametrelerin etkisi elde edilmiştir.

Tablo 5.3. Farklı parametrelerle 0 sabit noktasını elde etmek için gereken iterasyon adım sayısı

İterasyon adı	$\sigma_n = 0.90$ $\rho_n = 0.65$ $\eta_n = 0.90$	$\sigma_n = 2n/(3n + 1)$ $\rho_n = 2n/(3n + 1)$ $\eta_n = 2n/(3n + 1)$	$\sigma_n = n/(2n + 5)$ $\rho_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}$ $\eta_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
Mann	14	24	41
Ishikawa	10	20	38
Noor	10	20	37
Agarwal ve ark.	6	8	9
Abbas ve Nazir	6	6	5
Thakur ve ark.	5	6	6
M	5	5	5
F	4	4	4
AA	3	3	3

Sonuç 5.3.6.

Tablo 5.2. ve 5.3.'te kalın olarak yazılan öğeler AA –iterasyonunun geliştirilmiş (α, β) –genişlemeyen dönüşümler için diğer iterasyon yöntemlerinden daha iyi bir yakınsama hızına sahip olduğunu göstermektedir.

5.4. Zaman Ölçeği Üzerindeki İntegral Denklemlere Uygulamalar

Bu bölümde, öncelikle zaman ölçeğinde

$$x(t) = h(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)f(s, x(s)) \Delta s, \quad t, s \in [a, b]_{\mathbb{T}} \quad (5.27)$$

şeklinde verilen ikinci tür homojen olmayan Fredholm-Hammerstein integral denklemler kullanılarak bir uygulama verilmiştir. Burada $h: [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $\lambda \in \mathbb{R}$ sıfırdan farklı bir reel sayı ve çekirdek fonksiyonu $K: [a, b]_{\mathbb{T}} \times [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ ile lineer olmayan $f: [a, b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ –integrellenebilirdir.

$\mathbb{X} = C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ uzayı $\|x - y\| = \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} |x(t) - y(t)|$ normu ile donatılmış tüm sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ nin bir Banach uzayı olduğu açıktır [18].

Şimdi, iterasyon algoritmasının (5.27) integral denkleminin çözümüne kuvvetli bir şekilde yakınsadığı ispatlanacaktır.

Teorem 5.4.1.

C , $\mathbb{X}$ uzayının boştan farklı, kompakt ve konveks bir alt kümesi olsun ve $T: C \rightarrow C$ dönüşümü

$$T(x(t)) = h(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) f(s, x(s)) \Delta s, \quad t, s \in [a, b]_{\mathbb{T}} \quad (5.28)$$

şeklinde tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlansın:

(i) h, K ve f sürekli fonksiyonlardır.

(ii) $\forall t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ için

$$|f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq k|x(t) - y(t)| \quad (5.29)$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ vardır.

(iii) $\int_a^b |K(t, s)| \Delta s \leq \psi$ şartını sağlayan bir $\psi \geq 0$ sabiti vardır.

(iv) $|\lambda| \leq (\psi \cdot k)^{-1}$ dır.

O zaman (5.27) lineer olmayan Fredholm-Hammerstein integral denklemi C 'de bir çözüme sahiptir ve (5.1) ile tanımlanan iterasyon dizisi bu çözüme kuvvetli yakınsar.

İspat. (ii) ve (iii) şartları ile Teorem 2.5.14'ten

$$\begin{aligned} & |T(x(t)) - T(y(t))| \\ &= \left| h(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) f(s, x(s)) \Delta s - h(t) - \lambda \int_a^b K(t, s) f(s, y(s)) \Delta s \right| \\ &\leq |\lambda| \cdot \left| \int_a^b K(t, s) \cdot [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] \Delta s \right| \\ &\leq |\lambda| \cdot \int_a^b |K(t, s)| \cdot |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \Delta s \\ &\leq |\lambda| \cdot \int_a^b |K(t, s)| \cdot k \cdot |x(s) - y(s)| \Delta s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq |\lambda|.k.\sup_{s \in [a,b]_{\mathbb{T}}} |x(s) - y(s)| \int_a^b |K(t,s)| \Delta s \\ &\leq |\lambda|.k.\psi. \|x - y\| \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\sup_{t \in [a,b]_{\mathbb{T}}} |T(x(t)) - T(y(t))| \leq |\lambda|.k.\psi. \|x - y\|$$

olur. $|\lambda|. \psi. k \leq 1$ olduğundan $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$ bulunur. Bu durum T dönüşümünün genişlemeyen dönüşüm ve böylece sürekli bir dönüşüm olduğunu gösterir. Klasik Schauder sabit nokta teoremi yardımıyla (5.28) ile tanımlanan T dönüşümünün C' 'de bir sabit noktaya sahip olduğu, yani (5.27) de verilen Fredholm-Hammerstein integral denklemin bir çözümüdür. T genişlemeyen dönüşüm olduğundan bu dönüşüm genelleştirilmiş $(0,0)$ -genişlemeyen dönüşümdür. Sonuç olarak Teorem 5.2.4 ün tüm şartları sağlanır ve (5.1) den üretilen $\{x_n\}$ dizisi (5.27) de verilen Fredholm-Hammerstein integral denklemin bir çözümüne kuvvetli yakınsar.

Aşağıdaki örnek Teorem 5.4.1 deki sonucu açıklar.

Örnek 5.4.2.

Zaman ölçeği olarak $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve aşağıdaki lineer olmayan Fredholm-Hammerstein integral denklemi ele alınsın:

$$x(t) = \sqrt{t} - \frac{28}{9} + \frac{1}{12} \int_0^{12} \sqrt{[x(s)]^2 + 4} \Delta s, \quad t, s \in [0,12]_{\mathbb{T}}. \quad (5.30)$$

Bu denklemde çözüm $x(t) = \sqrt{t}$ olacak şekilde $h(t) = \sqrt{t} - \frac{28}{9}$ seçilmiştir. Ayrıca burada $K(t,s) = 1$, $f(t, x(t)) = \sqrt{[x(t)]^2 + 4}$ ve $\lambda = \frac{1}{12}$ olarak verilmiştir. Ortalama değer teoremini kullanarak

$$\begin{aligned} |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| &= \left| \sqrt{[x(t)]^2 + 4} - \sqrt{[y(t)]^2 + 4} \right| \\ &\leq \sup_{r \in \mathbb{R}} \left| \frac{r}{\sqrt{r^2 + 4}} \right| \cdot |x(t) - y(t)| \\ &\leq |x(t) - y(t)| \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (5.29) ile verilen eşitsizlik $k = 1$ sabiti ile sağlanmış olur. Ayrıca $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olduğundan

$$\int_0^{12} |K(t, s)| \Delta s = \int_0^{12} 1. ds = 12$$

olarak bulunur, yani $\psi = 12 > 0$ dır. Diğer yandan, $\lambda = \frac{1}{12} = \frac{1}{\psi.k}$ elde edilir. Sonuç olarak Teorem 5.4.1 nin tüm şartları karşılanmış olur. O halde, (5.1) ile üretilen $\{x_n\}$ dizisi

$$T(x(t)) = \sqrt{t} - \frac{28}{9} + \frac{1}{12} \int_0^{12} \sqrt{[x(s)]^2 + 4} \Delta s$$

ile verilen dönüşümün sabit noktasına yani (5.30) ile verilen lineer olmayan Fredholm-Hammerstein integral denkleminin çözümüne kuvvetli yakınsar.

Teorem 5.4.1 de verilen $f(t, x(t))$ fonksiyonu yerine $x(t)$ alınırsa, literatürde yeni olan aşağıdaki sonuç benzer şekilde elde edilebilir. Bu nedenle ispat atlanmıştır.

Teorem 5.4.2.

$C, \mathbb{X}$ uzayının boştan farklı, kompakt ve konveks bir alt kümesi olsun ve $T: C \rightarrow C$ dönüşümü

$$T(x(t)) = h(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)x(s) \Delta s, \quad t, s \in [a, b]_{\mathbb{T}} \quad (5.31)$$

şeklinde tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlansın.

- (i) h, K ve f sürekli fonksiyonlardır.
- (ii) $\int_a^b |K(t, s)| \Delta s \leq \psi$ şartını sağlayan bir $\psi \geq 0$ sabiti vardır.
- (iii) $|\lambda| \leq (\psi)^{-1}$ dir.

O zaman (2.6) ile verilen lineer Fredholm integral denklemi C 'de bir çözüme sahiptir ve (5.1) ile tanımlanan iterasyon dizisi bu çözüme kuvvetli yakınsar.

Aşağıdaki örnek Teorem 5.4.2 ile verilen sonucu açıklar.

Örnek 5.4.3.

Örnek 2.5.12 ile verilen zaman ölçeği ve

$$x(t) = t + 1 + \int_0^1 t.s.x(s) \Delta s \quad t, s \in [0, 1]_{\mathbb{T}} \quad (5.32)$$

lineer Fredholm integral denklemi ele alınsın. Burada $h(t) = t + 1$, $K(t, s) = t \cdot s$,
ve $\lambda = 1$ dir. Ayrıca $t \in [0, 1]_{\mathbb{T}}$ için Örnek 2.5.12 kullanılarak

$$\begin{aligned}\int_0^1 |K(t, s)| \Delta s &= \int_0^1 |t \cdot s| \Delta s \\ &= t \int_0^1 s \cdot \Delta s = t \int_0^1 \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s}{6} \right)^{\Delta} \Delta s \\ &= t \cdot \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s}{6} \right) \Big|_{s=0}^{s=1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot t \leq \frac{1}{3}\end{aligned}$$

bulunur, yani burada $\psi = \frac{1}{3} \geq 0$ elde edilir. Son olarak $\lambda = 1 < 3 = \frac{1}{\psi}$ dir. Sonuç olarak Teorem 5.4.2'nin tüm varsayımları karşılanır. O halde (5.1) den üretilen $\{x_n\}$ dizisi

$$T(x(t)) = t + 1 + \int_0^1 t \cdot s \cdot x(s) \Delta s$$

ile verilen dönüşümün sabit noktasına yani (5.32) ile verilen lineer Fredholm integral denkleminin çözümüne kuvvetli yakınsar.

Bu denklemin çözümü Adomian ayrıştırma metodu [65] kullanılarak çözülebilir. Bahsedilen metot uygulanırsa

$$x_0(t) = t + 1,$$

$$x_1(t) = \int_0^1 t \cdot s(s + 1) \Delta s$$

$$= t \cdot \int_0^1 (s^2 + s) \Delta s$$

$$= t \cdot \int_0^1 \left[\left(\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{6} + \frac{s}{54} \right)^{\Delta} + \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s}{6} \right)^{\Delta} \right] \Delta s$$

$$= t \cdot \left(\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{6} + \frac{s}{54} + \frac{s^2}{2} - \frac{s}{6} \right) \Big|_{s=0}^{s=1}$$

$$= \frac{14}{27} \cdot t,$$

$$x_2(t) = \int_0^1 t \cdot s \cdot \left(\frac{14}{27} \cdot s \right) \Delta s$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{14}{27} \cdot t \cdot \int_0^1 s^2 \Delta s \\
&= \frac{14}{27} \cdot t \cdot \left(\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{6} + \frac{s}{54} \right) \Big|_{s=0}^{s=1} \\
&= \frac{14}{27} \cdot \frac{5}{27} \cdot t, \\
x_3(t) &= \int_0^1 t \cdot s \cdot \left(\frac{14}{27} \cdot \frac{5}{27} \cdot s \right) \cdot \Delta s \\
&= \frac{14}{27} \cdot \frac{5}{27} \cdot t \cdot \int_0^1 s^2 \Delta s \\
&= \frac{14}{27} \cdot \left(\frac{5}{27} \right)^2 \cdot t
\end{aligned}$$

bulunur ve böylece seri formundaki çözüm

$$x(t) = t + 1 + \frac{14}{27} \cdot t + \frac{14}{27} \cdot \frac{5}{27} \cdot t \cdot \left[1 + \frac{5}{27} + \dots \right]$$

şeklinde verilir. Geometrik serilerin yakınsaklığından

$$\begin{aligned}
x(t) &= t + 1 + \frac{14}{27} \cdot t + \frac{14}{27} \cdot \frac{5}{27} \cdot t \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{27}} \\
&= t + 1 + \frac{14}{27} \cdot t + \frac{14}{27} \cdot \frac{5}{22} \cdot t \\
&= t + 1 + \frac{7}{11} \cdot t \\
&= \frac{18}{11} \cdot t + 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (5.32) ile verilen Fredholm integral denkleminin çözümü $t \in [0,1]_{\mathbb{T}}$ olmak üzere $x(t) = \frac{18}{11} \cdot t + 1$ dir.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışması kapsamında öncelikle zaman ölçeği üzerinde verilen farklı türdeki iki Volterra integral denklemin Ulam-Hyers ve Ulam-Hyers-Rassias kararlılıkları incelenmiştir. Daha sonra lineer olmayan bir Volterra integral denklemi zaman ölçeği üzerinde tanımlanarak bu denklemin Ulam-Hyers ve Ulam-Hyers-Rassias kararlılık sonuçları ispatlanmıştır ve bu sonuçları destekleyecek bir nümerik örnek sunulmuştur. Ayrıca zaman ölçeğinde verilen genel bir Volterra integral denklemin Ulam-Hyers-Rassias kararlılık sonucu verilmiştir. Gelecekteki çalışmalarda bu tip denklemler için farklı kararlılık sonuçları araştırılabilir.

Daha sonra metrik uzayların bir genellemesi olan b –metrik benzeri uzaylarda T – ortalama genişlemeyen dönüşüm için sabit noktanın varlığı ve tekliği gösterilmiş ve T –Picard iterasyon yönteminin (T, S) –kararlılık sonucu elde edilmiştir. Buna ek olarak zaman ölçeğinde Fredholm integral denklemlere uygulamalar ve bu uygulamaları destekleyen iki nümerik örnek sunulmuştur. Bu sonuçlardan ilham alınarak [27]’de tanımlanan T – ortalama genişlemeyen dönüşümlerin integral tipi b –metrik benzeri uzaylarda incelenebilir. Ayrıca yine T – ortalama genişlemeyen dönüşüm türleri Kohlenbach [20] tarafından tanıtılan hiperbolik metrik uzaylar gibi farklı uzaylarda çalışılabilir.

Son olarak, (2.2) ile verilen AA –iterasyonu hiperbolik metrik uzaylara modifiye edilerek daralma dönüşümleri için zayıf w^2 –kararlılık sonucu ve genelleştirilmiş (α, β) –genişlemeyen dönüşümler için kuvvetli yakınsama ve Δ –yakınsama sonuçları elde edilmiştir. Genelleştirilmiş (α, β) –genişlemeyen dönüşümler için lineer bir hiperbolik metrik uzay olan Banach uzayda nümerik bir örnek sunulmuştur. Python programı kullanılarak bu örneğin tablo ve grafikleri elde edilmiştir. Sonuçların uygulanabilirliğini göstermek için, elde edilen bulgular zaman ölçeğinde verilen Fredholm integral denklemlerine uygulanmıştır. Gelecek çalışmalarda Banach uzay özelliği taşımayan hiperbolik metrik uzaylarda genelleştirilmiş (α, β) –genişlemeyen dönüşümler için sayısal örnekler verilebilir. Diğer yandan [84]’deki makale incelenerek hiperbolik metrik uzaylarda genelleştirilmiş

(α, β) –genişlemeyen dönüşümlerin zenginleştirilmiş (enriched) versiyonları için yakınsama sonuçlarının araştırılması da öngörülmektedir.



KAYNAKLAR

- [1] Brouwer, L. (1912). Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 71, 97–115. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01456931>
- [2] Schauder, J. (1930). Der fixpunktsatz in funktionalräumen. *Studia Math.*, 2, 171-182, <https://doi.org/10.4064/sm-2-1-171-180>
- [3] Darbo, G. (1955). Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 24, 84–92.
- [4] Krasnoselskij, M. A., (1955). Two remarks on the method of successive approximations, *Uspehi Mat. Nauk.*, 10, 123-127.
- [5] Mönch, H. (1980). Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces. *Nonlinear Anal.*, 4, 985–999, [https://doi.org/10.1016/0362-546x\(80\)90010-3](https://doi.org/10.1016/0362-546x(80)90010-3)
- [6] Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraites et leurs applications, *Fund. Math.*, 3, 133–187. <https://doi.org/10.4064/fm-3-1-133-181>
- [7] Picard, E. (1980). Mémoire sur la théorie des équations aux dérivés partielles et la méthode des approximations successives, *J. Math. Pures Appl.*, 6, 145–210.
- [8] Mann, W. (1953). Mean value methods in iteration, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4, 506–510. <https://doi.org/10.2307/2032162>
- [9] Ishikawa, S. (1974). Fixed points by a new iteration method. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 44, 147-150, <https://doi.org/10.2307/2039245>
- [10] Noor, M. (2000). New approximation schemes for general variational inequalities. *J. Math. Anal. Appl.*, 251, 217–229, <https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7042>
- [11] Agarwal, R., O'Regan, D., Sahu, D. (2007). Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings, *J. Nonlinear Convex Anal.*, 8, 61-79.
- [12] Abbas, M. and Nazir, T. (2014). A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems, *Mat. Vesn.* 66, 223–234.
- [13] Thakur, D., Thakur, B.S. and Postolache, M. (2016). New iteration scheme for approximating fixed points of nonexpansive mappings, *Filomat* 30, 2711-2720, <https://doi.org/10.2298/FIL1610711T>
- [14] Ullah, K. and Arshad, M. (2018). Numerical reckoning fixed points for Suzuki's generalized nonexpansive mappings via new iteration process, *Filomat*, 32, 187–196, <https://doi.org/10.2298/FIL1801187U>

- [15] Ali, J. and Ali, F. (2020). A new iterative scheme to approximating fixed points and the solution of a delay differential equation. *J. Nonlinear Convex Anal.* 21, 2151-2163.
- [16] Abbas, M., Asghar, M. W. and De La Sen, M. (2022). Approximation of the solution of delay fractional differential equation using AA –iterative scheme, *Mathematics*, 10, 273, <https://doi.org/10.3390/math10020273>
- [17] Takahashi, W. (1970). A convexity in metric space and nonexpansive mappings, *I. Kodai Math. J.*, 22, 142–149, <https://doi.org/10.2996/kmj/1138846111>
- [18] Alghamdi, M. A., Hussain, N. and Salimi, P. (2013). Fixed point and coupled fixed point theorems on b –metric like spaces, *J. Inequal. Appl.*, <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-402>
- [19] Bridson, M. and Haefliger, A. *Metric spaces of nonpositive curvature*, Berlin: Springer, 1999. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-12494-9>
- [20] Kohlenbach U. (2005). Some logical metatheorems with applications in functional analysis. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(1), 89–128, <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-04-03515-9>
- [21] Goebel, K., and Kirk, W.A. (1983). Iteration processes for nonexpansive mappings. In: Singh, S.P., Thomeier, S., Watson, B. (eds.) *Topological Methods in Nonlinear Functional Analysis*, , 21 of Contemporary Mathematics, pp. 115–123, *Amer. Math. Soc., Providence, RI, USA*, <https://doi.org/10.1090/conm/021>
- [22] Reich, S. and Shafrir, I. (1990). Nonexpansive iterations in hyperbolic spaces, *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, 15, 537-558. [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(90\)90058-O](https://doi.org/10.1016/0362-546X(90)90058-O)
- [23] Suzuki, T. (2008). Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.* 340, 1088-1095, <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.09.023>
- [24] Pant, R. and Shukla, R. (2017). Approximating fixed points of generalized α -nonexpansive mappings in Banach spaces, *Numer. Funct. Anal. Optim.* 38, 248-266, <https://doi.org/10.1080/01630563.2016.1276075>
- [25] Pant, R. and Pandey, R. (2019). Existence and convergence results for a class of nonexpansive type mappings in hyperbolic spaces, *Appl. Gen. Topol.* 20, 281-295, <https://doi.org/10.4995/agt.2019.11057>
- [26] Ullah, K., Ahmad, J. and De La Sen, M. (2020). On generalized nonexpansive maps in Banach spaces, *Computation* 8, 61. doi:10.3390/computation8030061
- [27] Mebawondu, A. A., Izuchukwu, C., Abass, H. A. and Mewomo, O. T. (2022). Some results on generalized mean nonexpansive mapping in complete metric spaces, *Boll. Soc. Parana. Mat.*, 40, 1–16. <https://doi.org/10.5269/bspm.44174>
- [28] Bocher, M. *An Introduction to the Study of Integral Equations*, New York, (1913).
- [29] Hochstadt, H. *Integral Equations* New York: Wiley, 1973.

- [30] Hilger, S. (1990). Analysis on measure chains a unified approach to continuous and discrete calculus, *Results Math.* 18, 18-56, <https://doi.org/10.1007/bf03323153>
- [31] Bohner, M. and Peterson, A. *Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhauser Boston/Berlin, 2001, <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0201-1>
- [32] Agarwal, R. P., Bohner, M., O'Regan, D., and Peterson, A. (2002). Dynamic equations on time scales: a survey. *J. Comp. Appl. Math.*, 141, (1-2), 1-26, [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(01\)00432-0](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(01)00432-0)
- [33] Bohner, M. and Peterson, A. *Advances on Dynamic Equations on Time Scales*. Birkhauser, Boston, Mass, USA, 2003, <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8230-9>
- [34] Ulam, S. M. *A Collection of the Mathematical Problems*, Interscience, New York, 1960.
- [35] Rassias, T. M. (2000). On the stability of functional equations in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 251(1), 264-284, <https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7046>
- [36] Hyers, D. H. (1941). On the stability of linear functional equation, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 27(4), 222-224, <https://doi.org/10.1073/pnas.27.4.222>
- [37] Aoki, T. (1950). On the stability of the linear transformation in Banach spaces, *J. Math. Soc. Japan*, 2, 64-66, <https://doi.org/10.2969/jmsj/00210064>
- [38] Bourgin, D. G. (1951). Classes of transformation and bordering transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.* 57, 223-237, <https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1951-09511-7>
- [39] Rassias, T. M. (1978). On the stability of linear mapping in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 72, 297-300, <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1978-0507327-1>
- [40] Abbas, S. and Benchohra, M. (2014). Ulam-Hyers stability for the Darboux problem for partial fractional differential and integro-differential equations via Picard operators. *Results Math.* 65, 67-79, <https://doi.org/10.1007/s00025-013-0330-x>
- [41] Andras, S. and Meszaros, A. R. (2013). Ulam-Hyers stability of dynamic equations on time scales via Picard operators, *Appl. Math. Comput.* 219(9), 4853-4864, <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.10.115>
- [42] Bae, J. H. and Jun, K. W. (2001). On the generalized Hyers-Ulam-Rassias stability of a quadratic functional equation, *Bull. Korean Math. Soc.* 38(2), 325-336, <https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7372>
- [43] Gachpazan, M. and Baghani, O. (2010). Hyers-Ulam stability of nonlinear integral equation, *Fixed Point Theory Appl.*, Article ID 927640, <https://doi.org/10.1155/2010/927640>
- [44] Kreyzig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [45] Soykan, Y. *Fonksiyonel Analiz, Genişletilmiş ve Yeniden Düzenlenmiş* (2. Baskı). Nobel Yayıncılık. Ankara, 2012.

- [46] Maddox, I. J. *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, 1970.
- [47] Brown, A. L. and Page, A. *Elements of Functional Analysis*, The New University Mathematics Series, 1970.
- [48] Edelstein, M. (1972). The construction of an asymptotic center with a fixed-point property. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78, 206-208, <https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1972-12918-5>
- [49] Lim, T. C. (1976). Remarks on some fixed point theorems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 60(1), 179-182. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1976-0423139-X>
- [50] Pugachev, V. S. and Sinitsyn, I. *Lectures on functional analysis and applications*. World Scientific Publishing Company, 1999.
- [51] Bielecki, A. (1956). Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la théorie des équations différentielles ordinaires, *Bull. Polish Acad. Sci. Cl. III* 4, 261-264.
- [52] Curtain, R. F. and Pritchard, A. J. *Functional in Modern Applied Mathematics*, Academic Press, London, 1977.
- [53] Shimizu, T. and Takahashi, W. (1996). Fixed points of multivalued mappings in certain convex metric spaces, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 8 (1), 197–203.
- [54] Khan, A. R., Fukhar-Ud-Din, H., and Ahmad Khan, M. A. (2012). An implicit algorithm for two finite families of nonexpansive maps in hyperbolic spaces. *Fixed Point Theory and Appl.*, 2012(1), 1-12. <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2012-54>.
- [55] Berinde, V. *Iterative Approximation of Fixed Points*, Springer, Berlin, 2007. <https://doi.org/10.1109/SYNASC.2007.49>
- [56] Sintunavarat, W. *Fixed point theory and applications*, Lecture Notes, 2020.
- [57] Senter, H. F. and Dotson, W. (1974). Approximating fixed points of nonexpansive mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 44(2), 375-380.
- [58] Morales, J. and Rojas, E. (2009). Some results on T – Zamfirescu operators, *Rev. Notas Mat.*, 5, 64–71.
- [59] Zhang, S. S. (1975). About fixed point theory for mean nonexpansive mapping in Banach spaces. *J. Sichuan University*, 2, 67-68.
- [60] Aoyama, K. and Kohsaka, F. (2011). Fixed point theorem for α –nonexpansive mappings in Banach spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Appl.*, 74(13), 4387-4391. <https://doi.org/10.1016/j.na.2011.03.057>
- [61] Piri, H., Daraby, B., Rahrovi, S. and Ghasemi, M. (2019). Approximating fixed points of generalized α –nonexpansive mappings in Banach spaces by new faster iteration process, *Numer. Algor.*, 81, 1129–1148. <http://dx.doi.org/10.1007/s11075-018-0588-x>
- [62] Guseinov, G. (2003). Integration on time scales, *J. Math. Anal. Appl.*, 285, 107–127, [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-247X\(03\)00361-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00361-5).

- [63] Agarwal, R., Bohner, M. and Peterson, A. (2001). Inequalities on time scales: A survey, *Math. Inequal. Appl.*, 4, 535–557. <https://doi.org/10.7153/mia-04-48>
- [64] Adomian, G. (1988). A review of the decomposition method in applied mathematics, *J. Math. Anal. Appl.*, 135, 501–544. [http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X\(88\)90170-9](http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X(88)90170-9)
- [65] Harder, A. M., and Hicks, T. L. (1988). Stability results for fixed point iteration procedures. *Mathematics Japonica*, 33(5), 693-706.
- [66] Cardinali, T., and Rubbioni, P. (2010). A generalization of the Caristi fixed point theorem in metric spaces. *Fixed Point Theory*, 11(1), 3-10.
- [67] Timis, I. (2010). On the weak stability of Picard iteration for some contractive type mappings. *Ann. Univ. Craiova-Mathematics Comput Sci.*, 37(2), 106-114. <https://doi.org/10.52846/ami.v37i2.324>
- [68] Calderón, K., Padcharoen, A. and Moreno, J. M. (2023). Some stability and strong convergence results for the algorithm with perturbations for a T -Ciric quasicontraction in $CAT(0)$ spaces, *J. Inequal. Appl.*, <https://doi.org/10.1186/s13660-022-02911-z>
- [69] Bakhtin, I. A. (1989). The contraction principle in quasimetric spaces, *Funct. Anal.*, 30, 26–37.
- [70] Czerwik, S. (1993). Contraction mappings in b –metric spaces, *Acta Math. Inform. Univ. Ostrav.*, 1, 5–11.
- [71] Berinde, V. (1993). Generalized contractions in quasimetric spaces, *Sem. Fixed Point Theory*, 3, 3-9.
- [72] Hussain, N., Parvaneh, V., Roshan, J. R., Kadelburg, Z. (2013). Fixed points of cyclic weakly (ψ, φ, L, A, B) –contractive mappings in ordered b –metric spaces with applications. *Fixed Point Theory Appl.*, 1-18, <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2013-256>
- [73] Matthews, S. (1994). Partial Metric Topology, Proceedings of the 8th summer conference on Topology and its applications, *Ann. N.Y Acad. Sci.*, 728, 183–197, <https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1994.tb44144.x>
- [74] Amini Harandi, A. (2012). Metric-like spaces, partial metric spaces and fixed points. *Fixed Point Theory Appl.*, Article ID 204 (2012), <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2012-204>
- [75] Beiranvand, A., Moradi, S., Omid, M. and Pazandeh, H. (2009). Two fixed point theorems for special mappings, arXiv Preprint.
- [76] Aydi, H., Felhi, A. and Sahmim, S. (2016). On common fixed points for α – ψ contractions and generalized cyclic contractions in b – metric-like spaces and consequences. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 9, 2492-2510, <https://doi.org/10.22436/jnsa.009.05.48>
- [77] Kalkan, Z. and Şahin, A. (2022). Some new stability results of Volterra integral equations on time scales, *Maltepe J. Math.*, 4 (2), 44-54.

- [78] Reinfelds, A. and Christian, S. (2019). A nonstandart Volterra integral equation on time scales. *Demonstr. Math.*, 52, 503-510, <https://doi.org/10.1515/dema-2019-0042>
- [79] Reinfelds, A. and Christian, S. (2020). Hyers-Ulam stability of Volterra type integral equations on time scales. *Adv. Dyn. Syst. Appl.*, 15 (1), 39-48, https://doi.org/10.1007/978-3-030-56323-3_10
- [80] Kalkan, Z., Şahin, A., Aloqaily, A. and Mlaiki, N. (2024). Some fixed point and stability results in b –metric like spaces with an application to integral equations on time scales, *AIMS Math.*, 9 (5), (2024), 11335-11351, <http://dx.doi.org/10.3934/math.2024556>
- [81] Şahin, A. and Kalkan, Z. (2024). The AA –iterative algorithm in hyperbolic spaces with applications to integral equations on time scales, *AIMS Math.*, 9(9), 24480-24506, <http://dx.doi.org/10.3934/math.20241192>
- [82] Şahin, A., Öztürk, E. and Aggarwal, G. (2023). Some fixed point results for the KF –iteration process in hyperbolic metric spaces, *Symmetry*, 15, 1360. <http://dx.doi.org/10.3390/sym15071360>
- [83] Beg, I., Abbas, M. and Asghar, M. (2022). Convergence of AA –iterative algorithm for generalized α –nonexpansive mappings with an application, *Mathematics*, 10, 4375, <http://dx.doi.org/10.3390/math10224375>
- [84] Berinde, V. and Pacurar, M. (2020). Approximating fixed points of enriched contractions in Banach spaces. *J. Fixed Point Theory Appl.* 22, 10, <https://doi.org/10.1007/s11784-020-0769-9>

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Zeynep KALKAN

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2014, İnönü Üniversitesi, İlköğretim Bölümü, İlköğretim Matematik Öğretmenliği
- **Yüksek Lisans** : 2017, Sakarya Üniversitesi, Matematik Bölümü, Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz
- **Doktora** : Devam Ediyor, Sakarya Üniversitesi, Matematik Bölümü, Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2014 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'nda öğretmen olarak çalışmaya başladı. Halen bakanlık bünyesinde çalışmaktadır.

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER:

- Z. Kalkan, A. Şahin. (2022, 13-15, Kasım). On the stabilities of some Volterra integral equations on time scales. *Sivas International Scientific Research and Innovation Congress, Sivas Science and Technology University*, Sivas, Türkiye.
- Z. Kalkan, A. Şahin. 2022. Some new stability results of Volterra integral equations on time scales, *Maltepe J. Math.*, 4 (2), 44-54.
- Z. Kalkan, A. Şahin. (2023, 5-7, Haziran). A fixed point result for T –mean nonexpansive mappings in b –metric-like spaces with an application, *2nd International E-Conference on Mathematical and Statistical Sciences: A Selçuk Meeting, Selçuk University*, Konya, Türkiye.
- Z. Kalkan, A. Şahin, A. Aloqaily and N. Mlaiki. 2024. Some fixed point and stability results in b –metric like spaces with an application to integral equations on time scales, *AIMS Math.*, 9 (5), (2024), 11335-11351.

- A. Şahin, Z. Kalkan, (2024, 11-13, Mayıs). The AA –iterative algorithm for solving nonlinear integral equations on time scales, *7th International Antalya Scientific Research And Innovative Studies Congress*, Antalya, Türkiye.
- A. Şahin, Z. Kalkan, 2024. The AA –iterative algorithm in hyperbolic spaces with applications to integral equations on time scales, *AIMS Math.*, 9(9), 24480-24506.

DİĞER ESERLER:

- A. Şahin, H. Arısoy and Z. Kalkan, (2018, 31 Temmuz- 6 Ağustos). On the stability of two functional equations arising in mathematical biology and theory of learning, *2nd International Conference of Mathematical Sciences (ICMS 2018)*, Maltepe University, İstanbul, Türkiye.
- A. Şahin, Z. Kalkan, (2018, 12-15 Eylül). b –metrik uzayda bazı yeni sabit nokta teoremleri, *31.Ulusal Matematik Sempozyumu*, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Erzincan, Türkiye.
- A. Şahin, H. Arısoy and Z. Kalkan. 2019. On the stability of two functional equations arising in mathematical biology and theory of learning, *Creat. Math. Inform.*, 28 (1), 91-95.
- Z. Kalkan, A. Şahin. 2020. Some new results in partial cone b –metric space, *Commun. Adv. Math. Sci.*, 3(2), 67-73.