

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ZAMAN SERİLERİNDE FAZ UZAYININ
OLUŞTURULMASI ve KAOSUN TESPİTİ: DÖVİZ
KURLARI ÜZERİNE BİR UYGULAMA**

İşletme Mühendisi Gürsan ÇOBAN

**FBE İstatistik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ali H. BÜYÜKLÜ (YTÜ)

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	i
KISALTMA LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÇİZELGE LİSTESİ	ix
ÖNSÖZ	x
ÖZET	xi
ABSTRACT	xii
1. GİRİŞ	1
1.1 Klasik Determinizm	1
1.2 Kaos	3
1.3 Çalışmanın Kapsamı	5
2. SÜREKLİ DİNAMİK DENKLEM SİSTEMLERİ	6
2.1 Denklem Sistemleri	8
2.2 Lineer Sistemler	11
2.3 Farklı Denge Noktası Türleri	14
2.3.1 Çekerler (Attractors)	15
2.3.2 Yarı-Periyodik Hareket (Quasi-periodicity)	17
2.4 Kaos Nasıl Ortaya Çıkar?	18
2.5 Kesikli Haritalarda Kaotik Süreçler: Periyot Eşleşme Kavramı	19
2.5.1 Lojistik Denklemden Kaos	21
2.5.1.1 Periyot Eşleşme	24
3. ZAMAN SERİLERİNDE GÖMME UZAYININ OLUŞTURULMASI VE KAOS'UN TESPİTİ	30
3.1 Kaotik Çekerler	30
3.2 Lorenz Çekeri	30
3.3 Kaotik Çekerler ve Zaman Serileri Arasındaki İlişki	33
3.3.1 Deneysel Durum (Experimental Situation)	33
3.4 Kaotik Çekerlerin Nicel Belirleyicileri (Quantifiers)	36
3.4.1 Lyapunov Üstelleri	36
3.4.1.1 En Büyük Lyapunov Üstelinin Elde Edilmesi	39
3.4.1.2 Algoritmalar	41
3.4.2 Entropi	44
3.4.3 Kaotik Sistemler Açısından Entropinin Önemi: Kolmogorov-Sinai Entropisi	48
3.4.4 Fraktallar	50
3.4.4.1 Fraktal Boyut	52
3.4.4.2 Korelasyon Boyutu	54
3.4.5 Determinizmin Test Edilmesi	57
3.4.5.1 Diğer Boyut Türleri	59

3.5	Faz Uzayının Yeniden İnşası (FOUR) (Phase Space Reconstruction)	59
3.5.1	Gömme Uzayı (Embedding Space)	62
3.5.1.1	Gömme Teoremi	63
3.5.1.2	Gömme Uzayı Parametreleri (d_g, τ)	65
3.6	Gömme Uzayında Gürültünün Azaltılması	71
3.6.1	Faz Uzayının Görsel Özellikleri: Tekil Spektrum Analizi (Ana Bileşenler).....	71
3.6.2	Gürültünün Azaltılması	73
3.7	Durağanlığın Tespiti	75
3.7.1	Determinizmin Test Edilmesi	78
3.7.2	Analizlerin Tutarlılığı (Surrogate Data Method)	80
4.	UYGULAMA: TÜRK LİRASI-DOLAR ALIŞ FİYATLARI VERİLERİNİN GÖMME UZAYININ OLUŞTURULMASI VE KAOS'UN VARLIĞININ ARAŞTIRILMASI	83
4.1	Literatür Araştırması ve Uygulama Alanının Seçilmesi.....	83
4.1.1	Döviz Kurları Hakkında Genel Bilgiler (Exchange Rate).....	87
4.2	Veri Seti: Araştırmaya Konu Olan Serinin Seçilmesi	89
4.3	Türkiye’de Döviz Kurlarını Etkileyen Tarihi Olaylar.....	89
4.4	1990-2007 ve 2001-2007 Zaman Aralıklarında TL-Dolar Kuru Alış Fiyatlarının Analizi.....	91
4.4.1	Uygulamada Kullanılan Bilgisayar Programları	93
4.4.2	Faz Uzayı Parametrelerinin Tespiti	94
4.4.3	Durağanlığın Araştırılması	97
4.4.4	Serilerin Korelasyon Boyutları ve Gürültü Azaltımı Uygulaması	102
4.4.5	Lyapunov Üsteli ve Tahmin Zamanı	110
4.4.6	Determinizmin Tespiti	114
4.4.7	1990-2007 Arasında Faz Uzayı Yörüngelerinin Üç Boyutlu Alt Uzayda İncelenmesi: 1994 ve 2001 Krizlerinin Faz Uzayındaki Görsel Analizi.....	117
5.	SONUÇLAR ve ÖNERİLER	125
5.1	Gelecek Çalışmalar için Öneriler ve Değerlendirmeler.....	127
	KAYNAKLAR.....	129
	EKLER	131
	Ek 1 Ergodiklik Kavramı.....	132
	Ek 2 Logusd9007 ve logusd0107 için kurulan modeller ve BDS test istatistikleri.....	134
	Ek 3 Kullanılan bilgisayar programları, komutlar ve ek açıklamalar.....	136
	ÖZGEÇMİŞ.....	143

SİMGE LİSTESİ

$y(x)$	Diferansiyel denklem sistemi için bağımlı değişken
$y' \dots y^n$	y 'nin 1'den n . Mertebeye kadar olan türevleri
F_i	Diferansiyel denklem sisteminde i . değişkeni etkileyen fonksiyon
$L(y)$	Lineer diferansiyel operatör.
A	Lineer diferansiyel denklem için katsayı matrisi
ζ	$Ax = \zeta x$ koşulunu sağlayan A 'nın özdeğerleri
t	Zaman
x_n	Tek boyutlu kesikli haritalar için değişken
v_n	Kesikli haritalar için denge noktası civarında alınan çok küçük değer
μ	Sistem parametresi
μ_i	Tek boyutlu haritalarda periyot eşleşmenin meydana geldiği i . çatallaşma noktası
$s(t)$	Faz uzayı yörüngesinin t anındaki durum vektörü
λ_i	i . Lyapunov üsteli
$\lambda_{\max}$	En büyük Lyapunov üsteli
$f^n(x_0)$	n . iterasyon sonunda x_0 'dan başlayan dinamik sürecin aldığı konum.
$l(0)$	Lyapunov üstellerinin hesaplanmasında seçilen ilk $l(0)$ yarıçaplı hacim
$l_i(t)$	t zaman sonra i . ana eksene ait uzunluk
V_0	Lyapunov üstellerinin tanımladığı ilk hacim
V_t	Lyapunov üstellerinin t anı sonunda tanımladığı ilk hacim
$B(f^t(x_0))$	Merkezi x_0 'da olan $B(x_0)$ n boyutlu küresinin t anı sonunda aldığı durum
$\delta x(t)$	x_0 merkezli kürenin faz yörüngesi ile tanımladığı $\delta x(0)$ vektörünün t anı sonundaki durumu
$D_{x_0} f^t$	f^t 'nin x_0 noktasındaki Jakobyeni
L	Çeşitli kısımlarda verilen uzunluk tanımı.
d_g	Gömme boyutu
$Z(\mathcal{E}, d_g, t)$	Rosenstein algoritması için logaritmik ayrılma düzeyi
s	Gömme uzayı vektörü

Δ	Uzaydaki yörüngeler arasında ölçülen uzaklık
U_n^ε	ε yarıçapında s_n 'e komşu olan vektörlerin kümesi
$U_\varepsilon^X(\bar{y}_n)$	Y serisine ait faz uzayı vektörünün, ε yarıçapındaki komşuluğunda X serisinin faz uzayına ait vektörlerin kümesi.
$A(n)$	$p_i = 1/n$ olasılığına sahip olaylar dizisinin entropi tahmini fonksiyonu.
S	Shannon entropisi
p_i	i . olayın gerçekleşme olasılığı
p_A	A olayının gerçekleşme olasılığı
$OB(\tau)$	$x(t+\tau)$ 'nin $x(t)$ 'ye olan bağıllığını ölçen ortak bilgi fonksiyonu
K_n	Entropide meydana gelen değişimin ölçütü olarak K-S entropisi
K	Tüm çeker karakterize eden ortalama K-S entropisi
$N(L, \xi)$	Detaylı geometrik bir şekli en ufak bir boşluk bırakmadan kaplayabilecek minimum birim hacim sayısını veren fonksiyon.
$X(t)$	$\{x_1, \dots, x_n\}$ veya $\{X_1, \dots, X_n\}$ şeklinde gösterilebilen seri
$Y(t)$	$\{y_1, \dots, y_n\}$ şeklinde gösterilebilen seri
G_i	$G_0 = [0,1]$ kapalı aralığında üçte birlik kısmın i . defa çıkarılması ile elde edilen şekil.
G^*	Detaylı bir geometrik şekil.
r	Geometrik bir şeklin kenar uzunluğu (kare, küp).
D, d	boyut.
$d(.)$	($d(x)$ noktasal boyut) Parametre alan boyut fonksiyonu.
d_C	Kapasite (kutu) boyutu.
$\psi(x, \varepsilon_i)$	x noktası civarında ε_i kanar uzunluğuna sahip alandaki nokta sayısı.
$\tilde{\psi}_x(\varepsilon)$	x noktası civarında ε yarıçaplı küre içindeki nokta sayısını veren fonksiyon.
$C(\varepsilon)$	Korelasyon toplamı.
d_G	Korelasyon boyutu.
$w_{m,n}(\varepsilon)$	BDS istatistiği
$C_{m,n}(\varepsilon)$	BDS istatistiği için, m gömme boyutunda n noktadan hesaplanan korelasyon toplamı.
D_{KY}	Kaplan-Yorke boyutu.

$E(x)$	x 'in beklenen değeri.
$I_\varepsilon(x, y)$	ε için $ x - y < \varepsilon$ olan değerlerde 1, aksi halde 0 değerini veren fonksiyon.
$f^t(s_0)$	faz uzayında s_0 noktasından başlayıp t süre sonunda s_t noktasını veren fonksiyon.
Q	f dinamiği tarafından üretilen çekerin noktalar kümesi.
M	$Q \subset M$ şeklinde çekerin tamamını kapsayan küme.
A	$A \subset R^p$ olan ($p = d_g$) ve $Q \subset M$ gerçek çekerinin bir tahmini olarak, gözlem serinden üretililebilecek kümesi.
Φ	Gerçek çeker ile gözlenen çeker arasında dönüşümü sağlayan fonksiyon.
$\Phi_{f,h}(s)$	Gecikmeli koordinat haritasını veren vektör fonksiyonu.
τ	Gecikme zamanı (time lag)
d_{doyma}	$d_G - d_g$ grafiğindeki yatay seviyeye ait boyut değeri.
$s^{yk}(t)$	$s(t)$ ye en yakın komşu nokta (yk yakın komşuyu simgelemektedir).
d_E	yanlış yakın komşular metodu için araştırılan $d_E \rightarrow d_g$ niceliği.
$R_m(t)$	m boyutlu gömme uzayında komşu iki nokta arasındaki uzaklık.
R_T	Yanlış yakın komşular metodu için tanımlanan en büyük uzaklık oranının değeri.
$\langle \bullet \rangle_n$	n adet durumun ortalaması.
$\langle a_{d_E} \rangle$	Artan boyuta karşılık, komşu noktalar arasındaki artan uzaklığın ortalama değeri
$E_{d_E}^{-1}$	Artan boyuta karşılık, $\langle a_{d_E} \rangle$ değerindeki büyüme oranı.
AC	Otokorelasyon fonksiyonu
H	Gömme uzayındaki yörünge vektörü
u_i	Rastsal gürültü terimi.
$\hat{q}$	Gürültüsüz gömme uzayı vektörünün tahmini bir görüntüsü.
d_{Gauss}	Yerel korelasyon boyutlarından hesaplanan gürültü genliğinin teorik dağılımı.
W_i^l	l uzunluğunda ve çakışmayan parçalara ayrılmış zaman serisinin i . parçası.
$\gamma_{i,j}$	i . parça kullanılarak j . parçanın tahmin edilmesinden elde edilen çapraz tahmin hatası.
$v_{k,j}$	Parçalara ayrılmış faz uzayında j . parçadan geçen k . vektör.
V_j	Parçalara ayrılmış faz uzayında j . parçadan geçen k adet vektörün ortalama

	değeri.
$\bar{R}_n^d$	d boyutlu uzayda birim uzunluğa sahip n adımdan oluşan rastsal yürüyüşünde her bir adımdaki ortalama yer değiştirme.
$\bar{\Lambda}$	Rastsal yürüyüşe göre sistemin izlediği yörüngenin determinizm seviyesini veren katsayı.
c_n	Fourier dönüşümünde parametre simgesi.
fr	Frekans
Spc	Güç spektrumu
ϕ_k	k indisli faz.
$\tilde{x}$	Fourier dönüşümü yapılan gözlem serisi.
$\tilde{x}'$	Rastsal fazlarla çarpılan $\tilde{x}$ değerleri.
x'	Ters Fourier dönüşümü yapılan $\tilde{x}'$ değerleri.
e_{nom}	nominal döviz kuru
P_f	yabancı ülkedeki malın o ülkenin para cinsinden değeri.
P	yerli malın yerli para cinsinden değeri.
π	enflasyon
π_f	yabancı ülkedeki enflasyon.

KISALTMA LİSTESİ

d.d.	diferansiyel denklem
AC	Otokorelasyon Fonksiyonu
GYİ	Gecikmeli Yeniden İnşa
BDHB	Başlangıç Durumuna Hassas Bağlılık
FUYİ	Faz Uzayının Yeniden İnşası
K-S	Kolmogorov-Sinai Entropisi
GDP	Gayri Safi Yurtiçi İktisadi Hasıla (Gross Domestic Product)
ARMA	Otoregresif tahmin modeli (Autoregressive Moving Average)

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1	D alt bölgesi için denklem (2.3)'in eğim alanı	7
Şekil 2.2	D alt bölgesi için denklem 2.5'in iki farklı Cauchy çözümü.	8
Şekil 2.3	Denge noktası türleri	13
Şekil 2.4	Özdeğerlerine göre lineer bir sistemin denge noktaları ve faz yörüngeleri.	13
Şekil 2.5	$x' = -x - y^2 \cos(x + y)$, $y' = y + x^2 \cos(x - y)$ sisteminin faz portresi	14
Şekil 2.6	Bir limit çevrim örneği.	15
Şekil 2.7	Bir diferansiyel denklem sistemine ait çeker noktalar ve çekim havuzu.	16
Şekil 2.8	Korunumlu ve korunumsuz sistemlerin çeker tasvirleri.....	17
Şekil 2.9	Yarı periyodik çekerin faz uzayındaki görünümü.....	17
Şekil 2.10	Çadır Haritasının $[0,1]$ aralığındaki esnetme-katlama mekanizması.	21
Şekil 2.11	$(\mu > 3)$ lojistik denklemin x_0 başlangıç koşuluna uygun çözümleri.....	22
Şekil 2.12	Lojistik denklemin $\mu = 0.8$ için yörüngesi.	23
Şekil 2.13	Lojistik denklemin $\mu = 1.5$ için yörüngesi.....	23
Şekil 2.14	$\mu = 2.8$ için sistemin yörüngesi.	24
Şekil 2.15	Lojistik denklem için kararlılığın değişimi.	25
Şekil 2.16	$\mu = 3.2$ için lojistik denklemin periyot-2 çevrimi	25
Şekil 2.17	Periyot-2 için kararlılık grafiği.	26
Şekil 2.18	Periyot-4 yörüngesi.	27
Şekil 2.19	a)Çatallaşma olgusu ve kaos'a geçiş, b) periyot-3 sonrası kaotik rejim	28
Şekil 3.1	Lorenz çekerinin başlangıç şartı $= (-1, 0, 1)$ ve $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$ için, (x, y, z) üç boyutlu uzayındaki iki farklı perspektiften saçılım grafikleri.	31
Şekil 3.2	Lorenz sisteminin iki ayrı başlangıç şartı, $= (-1, 0, 1)$; $x(t)$ ve başlangıç şartı $= (-2, 0, 1)$; $x_1(t)$, için çözümleri ve bu çözümlerin farklarını içeren serinin grafiği.....	32
Şekil 3.3	Faz uzayında bir $s(t)$ yörüngesinin h fonksiyonu vasıtası ile $x(t)$ çıktısını üretmesinin şematik gösterimi $x(t) = h(s(t))$	34
Şekil 3.4	Sonsuz küçük bir alanın n iterasyon sonucunda uzayda aldığı şekil. İki farklı üstel birbirine dik olan ana eksenlerdeki (principal axis) ayrılmanın düzeyini ölçmektedir.	37
Şekil 3.5	Lojistik ve Gauss ($b=7,18$) haritalarının $(x(0)=0,15)$ başlangıç koşulu ile oluşturulmuş çatallaşma diyagramları ve aynı diyagramdan elde edilen Lyapunov üstellerinin saçılım grafiği.	38
Şekil 3.6	Faz uzayında yörüngeler tarafından sınırlanan hacmin gelecekte aldığı durum	40
Şekil 3.7	Wolf algoritmasında yakın yörüngelerin seçilmesi	42
Şekil 3.8	Henon haritasından elde edilen ortalama Lyapunov üstelli, $\lambda_{\max} = 0.42$	43
Şekil 3.9	Lorenz sisteminden elde edilen ortalama Lyapunov üstelleri, $\lambda_{\max} = 1.5$	43
Şekil 3.10	Düzenli ve düzensiz durumlar.....	46
Şekil 3.11	Bilgi üretimi açısından farklı davranıştaki iki sistem.....	48
Şekil 3.12	Cantor kümesinin oluşturulması.....	51
Şekil 3.13	İki boyutlu düzlem tarafından sınırlanan detaylı bir G^* geometrik şekli	52
Şekil 3.14	Koch eğrisi.	54
Şekil 3.15	(I)Çeker üzerinde homojen dağılım, (II) fraktal yapıdaki çeker	55
Şekil 3.16	Korelasyon boyutunun geometrik anlamı	56
Şekil 3.17	İki farklı gecikme değeri için Lorenz sisteminden, normal ve ki-kare dağılımları	

için geri-dönüş haritaları.	62
Şekil 3.18 Φ dönüşümünün görsel manası.	63
Şekil 3.19 Gömme teoreminin geometrik manası.	64
Şekil 3.20 Lorenz serisinden elde edilen $d_G - d_g$ değerleri	66
Şekil 3.21 Henon haritasından elde edilen yanlış yakın komşu yüzdesi.	68
Şekil 3.22 gecikme zamanları (τ) için gömme uzayı vektörlerinin temsili konumları	70
Şekil 3.23 Henon ve Lorenz sistemlerinden elde edilen ortak bilgi fonksiyonu.	70
Şekil 3.24 Lorenz çekerinden elde edilen tahmini faz uzayı vektörleri.	80
Şekil 4.1 Dolar alış fiyatlarına ait zaman serisi (1990-2007)	92
Şekil 4.2 Doğal logaritması alınan dolar alış fiyatlarına ait verilerin zaman serisi.	92
Şekil 4.3 1990-2007 Logaritmik ilk farkları alınmış zaman serisi: logusd9007.	93
Şekil 4.4 Logusd9007 serisinden elde edilen ortak bilgi- τ grafiği	94
Şekil 4.5 Logusd9007 serisinden elde edilen otokorelasyon fonksiyonu grafiği	95
Şekil 4.6 Logusd9007 serisine ait yanlış yakın komşu yüzdesi-gömme boyutu (d_g) grafiği.	95
Şekil 4.7 Logusd9007 serisinden elde edilen $E_d^1 - d_g$ grafiği.	96
Şekil 4.8 Logusd9007 serisinden elde edilen gömme uzayı çekerinin üç boyutlu alt uzayı.	97
Şekil 4.9 Logusd9007 serisinden stationary.exe programı yardımıyla elde edilen çapraz-tahmin hataları grafiği.	98
Şekil 4.10 Logusd9007 gömme uzayından hesaplanan uzay-zaman ayırım çizimleri.	100
Şekil 4.11 Logusd0107 gömme uzayından hesaplanan uzay-zaman ayırım çizimleri.	100
Şekil 4.12 Logusd0107 serisinden elde edilen ortak bilgi- τ grafiği	101
Şekil 4.13 Logusd0107 serisine ait yanlış yakın komşu yüzdesi-gömme boyutu (d_g) grafiği.	101
Şekil 4.14 Logusd9007 serisinden elde edilen $d_{Gürültü}(\epsilon) - \epsilon$ grafiği ve hesaplanan teorik gürültü düzeyi	102
Şekil 4.15 Logusd9007 serisinde gürültü başlangıcı.	103
Şekil 4.16 Logusd0107 serisinden elde edilen $d_{Gürültü}(\epsilon) - \epsilon$ grafiği	103
Şekil 4.17 Logusd0107 serisinden elde edilen $d_{Gürültü}(\epsilon) - \epsilon$ grafiği ve hesaplanan teorik gürültü düzeyi	104
Şekil 4.18 Gürültülü ve gürültüsü azaltılmış logusd9007 serisi.	105
Şekil 4.19 Gürültülü ve gürültüsü azaltılmış logusd0107 serisi.	105
Şekil 4.20 Gürültülü logusd9007 serisinden hesaplanan korelasyon toplamaları ve yerel eğimler.	106
Şekil 4.21 Gürültüsüz azaltılmış logusd9007 serisinden hesaplanan korelasyon toplamaları ve yerel eğimler.	106
Şekil 4.22 Gürültüsü azaltılan logusd9007 serisinin tahmini ölçek aralığı.	107
Şekil 4.23 Gürültüsü azaltılan logusd9007 serisinin ölçek aralığına ait hesaplanan korelasyon boyutu.	107
Şekil 4.24 Gürültülü logusd0107 serisinden hesaplanan korelasyon toplamaları ve yerel eğimler.	108
Şekil 4.25 Gürültüsüz azaltılmış logusd0107 serisinden hesaplanan korelasyon toplamaları ve yerel eğimler.	108
Şekil 4.26 Gürültüsü azaltılan logusd0107 serisinin tahmini ölçek aralığı.	109
Şekil 4.27 Gürültüsü azaltılan logusd0107 serisinin ölçek aralığına ait hesaplanan korelasyon boyutu.	109
Şekil 4.28 Logusd9007 serisinden Rosenstein yaklaşımı ile hesaplanan $Z(\epsilon, d_g, t) - t$ grafiği.	110
Şekil 4.29 Logusd0107 serisinden Rosenstein yaklaşımı ile hesaplanan $Z(\epsilon, d_g, t) - t$ grafiği.	111
Şekil 4.30 Çizelge 4.6'deki istatistiklere sahip Logusd9007 serisinin faz uzayı vektörleri.	115

Şekil 4.31 Çizelge 4.6'deki istatistiklere sahip Logusd0107 serisinin faz uzayı vektörleri..	115
Şekil 4.32 Logusd9007 serisinden $d_g=7$ için elde edilen özdeğerler.	118
Şekil 4.33 Logusd9007 serisinin faz uzayını temsil eden en büyük üç ana bileşenin oluşturduğu çeker.	119
Şekil 4.34 Logusd9007 serisinin faz uzayını temsil eden en büyük iki ana bileşenin oluşturduğu çeker.	120
Şekil 4.35 Çeker üzerinde birbirlerine çok yakın ilerleyen 1994 ve 2001 kriz dönemine ait yörüngeler.	120
Şekil 4.36 1994 krizi öncesinde faz uzayı yörüngelerinin Ocak-Mart aylarındaki seyri.	121
Şekil 4.37 Mart-Mayıs 1994 arasında faz uzayı yörüngelerinin seyri.	121
Şekil 4.38 1994 ekonomik krizinin faz uzayı yörüngelerinde yarattığı değişim.	122
Şekil 4.39 2001 ekonomik krizinin etkilerinin başlaması faz uzayındaki seyri.	122
Şekil 4.40 2001 kriz dönemi sonrası Şubat-Mayıs arasında faz uzayı yörüngeleri.	123
Şekil 4.41 Kriz öncesi faz uzayı yörüngeleri: 0,005 birim yarıçapındaki dolanım hareketleri.	123
Şekil Ek 3.1 Wolf algoritması modülü.	137

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 1.1	Kaos konusundaki çalışmalarda tarihsel dönüm noktaları	4
Çizelge 2.1	Lojistik denklemde çatallaşma noktaları ve periyot sayıları	28
Çizelge 3.1	Dört boyutlu bir faz akışında çekerlerin özellikleri	39
Çizelge 4.1	Literatür taraması: finansal serilerde kaostun tespiti konusunda yapılmış olan çeşitli çalışmalar ve kullanılan başlıca teknikler.	86
Çizelge 4.2	Merkez Bankasından alınan veriye ait tanımlayıcı istatistikler.....	89
Çizelge 4.2	1990-2007 Logaritmik fark serisine ait tanımlayıcı istatistikler.	91
Çizelge 4.3	2001-2007 Logaritmik fark serisine ait tanımlayıcı istatistikler.	99
Çizelge 4.4	Logusd9007 serisinden Wolf algoritmasıyla 6,7 ve 8 gömme boyutunda hesaplanan en büyük Lyapunov üstelleri ve katışık verilerle karşılaştırılması.112	
Çizelge 4.5	Logusd0107 serisindenWolf algoritmasıyla 4,5 ve 6 gömme boyutunda hesaplanan en büyük Lyapunov üstelleri ve katışık verilerle karşılaştırılması.113	
Çizelge 4.6	Logusd9007 ve Logusd0107 serilerinin faz uzayından elde edilen yörünge istatistikleri ve $\bar{V}$, $\bar{\Lambda}$ değerleri.....	115
Çizelge 4.7	Logusd9007 serisine ait BDS istatistikleri.	117
Çizelge 4.8	Logusd0107 serisine ait BDS istatistikleri.	117
Çizelge Ek 2.1	Logusd9007 serisi için kurulan otoregresif model.....	134
Çizelge Ek 2.2	Logusd9007 serisinin BDS test istatistikleri.....	134
Çizelge Ek 2.3	Logusd0107 serisi için kurulan otoregresif model.....	135
Çizelge Ek 2.4	Logusd0107 serisinin BDS test istatistikleri.....	135
Çizelge Ek 3.1	TSTOOLS programında kullanılan komutların açıklamaları	136
Çizelge Ek 3.2	TSTOOLS programında kullanılan katışık veri türetilmesinde kullanılan komutların açıklamaları	137
Çizelge Ek 3.3	TISEAN 2.1 ‘d2’ komutu parametreleri.	138
Çizelge Ek 3.4	lyap_r komutununparametreleri.....	139
Çizelge Ek 3.5	Ortak bilgi fonksiyonu değerleri için kullanılan ‘mutual’ komutu parametreleri	140
Çizelge Ek 3.6	Yanlış yakın komşu yüzdesi değerleri için kullanılan ‘false_nearest’ komutu parametreleri	140
Çizelge Ek 3.7	Basit gürültü azaltımı için kullanılan ‘lazy’ komutu parametreleri.	141
Çizelge Ek 3.8	Uzay-zaman ayırım çizimleri için kullanılan ‘stp’ komutu parametreleri....	141

ÖNSÖZ

“Biliyorum, bütünüün açıklanması, her şeyin asıl kaynağı gibi sonsuza dek gizli kalmalıdır ama ben kaçınılmaz bir şekilde açıklanamaz olana dayanana kadar kavramak istiyorum.” (Tolstoy, ‘İtiraflarım’ adlı eserinden).

Sevgilerinin değerini her an hisseden bir insan olarak; babama, anneme, kardeşime. Büyükbaba ve büyükannelerime: masallarının kahramanı topal eşekle aya yolculuğun anısına...

Bu tezin yazılması sırasında değerli görüşlerini eksik etmeyen ve tezin her anında manevi desteğini hissettiğim bitirme tezi danışmanım Sayın Ali H. BÜYÜKLÜ’ye ve Sayın Abbas AZİMLİ’ye teşekkürlerimi sunarım. Bilimsel eleştirilerinden yararlandığım İTÜ öğretim üyesi Sayın Kasım KOÇAK’a da ayrıca teşekkür ederim. Tüm öğrenim hayatım boyunca bana destek veren değerli hocalarıma teşekkürü borç bilirim. Saygılarımla,

Mayıs 2007

Gürsan ÇOBAN

ÖZET

Bu çalışmada kaos teorisinin matematiksel kökenlerinden, zaman serileri analizinde uygulanmasına dek geniş bir yelpazede bir çok konuya değinilmiş, uygulama kısmında ise matematiksel niteliklerinden çok pratik tespitlere yer verilmiştir. Bu amaçla uygulama alanı olarak döviz kurları seçilmiştir. Öncelikle incelenen sistemle ilgili eldeki tek bilginin, analiz edilecek zaman serisinin kendisi olduğu varsayılmış ve süreci ilerletecek tüm bilgi yine zaman serisinden elde edilmiştir. Faz uzayını temsil edecek gömme uzayının oluşturulması amacıyla seriden elde edilen ortak bilgi fonksiyonları (mutual information) incelenmiş, yanlış yakın komşular metodu (false nearest neighbors) ve Cao yaklaşımı ile gömme boyutu uygun gecikme değeri için yeniden inşa edilmiştir. Elde edilen uzaydaki çekerin korelasyon boyutu incelenmiş ve en büyük Lyapunov üsteli elde edilerek sistemin kaotik olup olmadığı tespit edilmeye çalışılmıştır. Katışık seri (surrogate data), Kaplan ve BDS yaklaşımlarından Türk-Lirası Dolar kurunun lineer olmayan deterministik bir sistemden geldiği kanıtlanmıştır. Çalışmanın son kısımlarında elde edilen gömme uzayından gürültünün etkinliğinin azaltılması için Tekil Spektrum Analizi yaklaşımı izlenmiş ve görsel analiz gürültü düzeyi görece düşük olan bir alt uzayda sürdürülmüştür. 1994 ve 2001 krizlerinin faz uzayında benzer özellikler sergilediği grafikler vasıtasıyla gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Kaos, gömme uzayı, fraktallık, Lyapunov üsteli, döviz kurları.

ABSTRACT

In this study a broad area of chaos theory from mathematical roots to the experimental data analysis was mentioned, in the application part not the mathematical concepts but some practical issues were investigated. For this purpose the exchange rates are chosen to apply the methods. Firstly it is assumed that the only information is the observed time series and all the information required to evolve the analysis again gathered from the time series itself. To reconstruct the phase space auto mutual information was investigated. To determine the number of dimensions for the embedding space, the false nearest neighbors and the Cao approach with suitable delay time was used. The new space gathered from the embedding space was used in order to determine the correlation dimension and maximum Lyapunov exponent of the original attractor to determine whether the observed system chaotic or not. Surrogate data, Kaplan and BDS test approaches showed that the logarithmic Turkish Lira-Dolar exchange rate returns come from a nonlinear deterministic system. At the end of the study, to reduce the noise level the Singular Spectrum Analysis approach was used and the noisy space transformed in to a less noisy new space with lower dimension. The visual properties of embedding space have shown that the 1994 and 2001 economical crises both have similar trajectories.

Keywords: Chaos, embedding space, fractals, Lyapunov exponent, exchange rates.

1. GİRİŞ

Yeni bir bilim alanı olan kaos, ele alındığı ilk günlerden bu güne dikkat çekmiş ve birçok araştırmacı bu alanda çalışmalar yürütmüşlerdir. Gerek büyük veri setlerine olan ihtiyaç, gerekse bilgisayar programlarının yetersizliği uygulamalı olarak bu alanda çalışma yapma konusunda zorluklar çıkarmaktadır. Bu çalışmada konuyla ilgili kavramlar ele alındıktan sonra Türk lirası –Dolar alış fiyatlarını içeren verilerle ilgili uygulamalar ele alınmış, kaos teorisi ve ona bağlı konularla ilgili sorunlar irdelenmiştir. Kavramların bu bölümde verilmesinin amacı, konunun anlaşılabilirliğinin artırılmasıdır. Giriş kapsamında determinizm kavramı, kaos teorisinin tarihsel açılımı ve neleri vurgulamak istediğinden söz edilmiştir.

1.1 Klasik Determinizm

Geçmiş zamanlarda insanoğlu geleceğin tahmin edilmesinde geleneksel ve birtakım dinsel inanışların etkisi altında idi. Yüzyıllar boyunca insanlar verilerden ziyade görülen şekiller ve bunların o insanlara anımsattığı duyguların arayışı içinde olmuştur. Genel karakteri daha çok olasılık kavramı üzerinde odaklanan bu tarz yaklaşımlar sistemlerin doğasına teolojik yaklaşımların, doğaüstü güçlerin etkisini hissettirmiştir. Yıldız falları, kutsal günler ve etkili doğa olayları buna örnek olarak verilebilir. Elbette bu inanışların hepsinde aynı merak duygusunun izleri görülmektedir, ‘gelecekte ne olacak’. Peki, insanoğlunun sarıldığı bu araçlar ve inanışlar gerçekten de sonuç vermiş midir? Muhtemelen insanlar bu süreçlerde neyi görmek istiyorlarsa binlerce yıl boyunca onu gördüler. Bunları kuşaklar boyunca aktardılar ve ortaya kırılması çok zor olan kültürel bir zincir çıktı. Aslında herhangi bir kişinin aslan burcunda doğması ile başarısı arasındaki korelasyon muhtemelen çok düşüktür. Böyle bir durum varsa da kaynağını farklı yerlerde aramak gerekir. Diğer bir deyişle bu gün yağmur yağması ile Venüs gezegeninin konumu birbirinden bağımsız olaylardır. İnsanın kendi beyninde oluşturduğu gelecek öngörüsü, aslında fiziksel hiçbir dayanağı bulunmayan, gerçek üstü durumları işaret etmektedir (Ruelle, 2000).

Bu durumun ortaçağın sonuna kadar bu şekilde devam ettiği söylenebilir. Aydınlanma çağı

ise insanlığa bambaşka bir bakış açısı kazandırmıştır. İnsan artık kendi zihnini bağlayan gerçeküstü inanışları aşmış, bir başka ölçülebilir niceliği, ‘zamanı’ kendi hayatında yoğun şekilde kullanmaya başlamıştır. Zamanın akışı insanın doğaya attığı anlamın önemli bir bölümünü oluşturmaktadır. Artık ölçme, veriye dayalı tahminler ve analizler diğer basmakalıp inanışların yerini almıştır. Bu anlamda mekaniğin zamanın evrimini irdeleyen temel bir yaklaşım olduğu söylenebilir. “Mekaniğin amacı evrenin zaman içindeki değişiminin incelemektir” (Ruelle, 2000). Mekaniksel süreçlerin analizi bir sistemin zaman içerisindeki davranışı hakkında bilgi vermelidir. Buna yönelik olarak ilk açıklamalar Isac Newton tarafından 17. yüzyılda verilmiştir. Ona göre bir fiziksel sistemin zaman içindeki durumu, o sistemin kütle merkezinin konumu ve hızı tarafından belirlenmektedir. Newton’a göre bir sistemin belirli bir referans noktasına göre başlangıç durumu (konumu ve hızı), sistemin gelecekte sahip olacağı durumun kesin olarak belirlenmesini sağlamaktadır. Buna ‘deterministik’ bakış açısı denilmektedir. Fakat başlangıç durumunda bir determinizm bulunmayabilir, yani başlangıçta var olan durum stokastik (olasılıklı) bir durumu da barındırabilir. Bu durumda sistemin gelecekteki durumu da belirli bir oranda stokastik olacaktır. Her şeyin bir saat hassaslığında çalıştığı bir evrende çok güçlü bir bilgisayar gerekli verileri alarak, bir sistemin evrimini çok düşük bir hata yüzdesi ile gözler önüne serebilecektir. Yine aynı bakış açısından hareketle tahmin kavramı, yüksek hassaslıkta ölçülmüş veriler ve sistemin doğasına yönelik çeşitli geçerli varsayımlar olduğu müddetçe, rahatlıkla ve tam bir kesinlik ile devam etmesi gereken bir süreç olacaktır. Asıl önemli nokta bu stokastik payın da deterministik yasalar ile ölçülebilir olduğudur. Başlangıç durumu sonsuz kesinlikte tespit edilemeyeceğinden sonuçlar daima olasılıklı bir sürecin uzantısı olacaktır. Peki ama bunun önemi nedir? Bunun cevabı: başlangıç durumuna hassas bağlı sistemlerin var olduğu ve başlangıç durumundaki çok küçük bir ölçüm hatasının, sonuçlar üzerinde çok büyük etkilerde bulunabileceğidir.

Bu bakış açısı, Newton mekaniği yaklaşımından geçen yüzyıl başına kadar devam etmiştir. Evren belirlenimcidir ve önceden tahmin edilemeyecek karmaşık sonuçlara yol açmamaktadır. Önemli olan sistemde kesin bir biçimde tanımlanmış determinist bir zamansal evrimin bulunmasıdır ki bu durumda dinamik bir sistemin varlığından söz edilir. Ancak 19. yy.’ın sonunda gezegenlerin yörüngeleri konusunda yapılan bir çalışma her şeyi değiştirmiştir. Uzayda kütleyle sahip iki ayrı gezegenin izleyeceği yörüngeler matematiksel hesaplar vasıtasıyla kesin olarak belirlenebilmektedir. Ancak üç gezegen olması durumunda,

üç cisim problemi (three-body problem), gezegenlerin izlediği yörüngeler öylesine karmaşık ve beklenmediktir ki, bu sistemi yöneten denklemler çok iyi bilinmesine rağmen sistemin gelecekte alacağı bir konumun tespiti neredeyse imkânsız hale gelmektedir. Üç-cisim problemini çözen Jules Henri Poincaré (1854–1912) Fransız bir matematikçidir. Kendisi iyi bilinen matematiksel sistemlerin, bilinmeyen ve tahmin edilemez fiziksel sonuçlarının var olabileceğini, üç cisim probleminde cisimlerin başlangıç durumlarında meydana gelen 1 dakikalık bir değişimin, sistemin geleceği üzerinde muazzam etkileri olduğunu keşfetmiştir.

1.2 Kaos

1960'lı yıllara dek çeşitli bilim adamları tarafından sürdürülen çalışmaların başlangıç durumuna hassas bağlı sistemlerin doğası ile ilgili görünür bir çalışma ortaya koyamadığı gözlenir. Ancak literatürde deneysel sonuçlardan elde edilen beklenmedik sonuçlara yönelik olarak bu kapalı kutu, Edward Lorenz adında Amerikalı bir bilim adamı tarafından tekrar açılır. Bazı atmosferik süreçler, ne kadar basit yapıda olursa olsun tahmin süresini büyük oranlarda düşürür. Başlangıçta Lorenz bunun bir bilgisayar hatasından kaynaklandığını düşündü, belki de bu arayış beklediğinden çok daha büyük bir meyve vermiştir. Lorenz çok düşük boyuta (low-dimensional) sahip diferansiyel sistemlerin kararsız yörüngeler izleyebileceğine dikkat çekmiştir. Ondan sonra gelenler de bu tip yapıların, topoloji adı verilen ve matematiğin derin analiz gerektiren dallarından birinin uzantısı olabileceğini belirtmiştir (Smale Nale). Ayrıca bu tarz sistemleri tanımlayacak sözcük olan 'kaos', 1975 yılında aralarında Jim Yorke'nin de bulunduğu bilim adamları tarafından literatüre kazandırılmıştır. Kaos araştırmalarındaki tarihsel dönüm noktalarını içeren bilgiler Çizelge 1.1'de gösterilmiştir.

'Kaos' kelimesinin kullanımı M.Ö. 800 yılına dek uzanır ve kökeni eski Yunancadaki $\chi\alpha\omicron\varsigma$ sözcüğüne dayanır. Anlamı 'tamamen düzensiz olandır' (Sprott, 2003). Kaosun henüz üzerinde fikir birliğine varılmış tam bir tanımı bulunmamaktadır, sadece belirli kavramlar ile direkt ilişkili olduğu düşünülür. (1)Örneğin sistem mutlaka lineer olmayan süreçlerin uzantısıdır. Lineer sistemler kaotik süreçleri meydana getiremez. (2)Benzer şekilde olasılıklı yapılardan çok deterministik süreçler söz konusudur. Sistemin gelecekteki durumu bu deterministik yapı tarafından belirlenir. (3)Sistem başlangıç durumuna hassas bağlıdır.

(4)Sistemin izlediği yörünge birçok kararsız patikadan geçmektedir, sisteme genel bir düzensizlik egemendir. (5)Tüm bu nedenlerden ötürü kaotik süreçlerde uzun-dönem tahmin mümkün değildir (Ditto ve Munakata, 1995). Bu bağlamda deterministik kaosu ana özellikleri şu şekilde verilebilir (Sprott, 2003).

- Aperiyoiktirler, kendilerini hiçbir zaman tekrar etmezler.
- Sistemin başlangıç şartları gelecekte alacağı konumu bütünüyle değiştirebilir, başlangıç durumuna hassas bağıllık mevcuttur.
- Bazı kontrol parametreleri tarafından yönetilmektedirler, parametredeki ufak değişimler kaos sürecine yol açabilir veya ortadan kaldırabilir.
- Sistemi yöneten yasalar lineer değildir (nonlinear).

Çizelge 1.1 Kaos konusundaki çalışmalarda tarihsel dönüm noktaları (Ditto ve Munakata, 1995).

1890	Henri Poincaré n -cisim problemi ile gezegenlerin izleyeceği yörüngelerin karmaşık ve tahmin edilemez olabileceğini ilk vurgulayan kişi oldu. (Kaos terimi henüz kullanılmamaktaydı)
1963	Edward Lorenz atmosferik olaylara yönelik basit bir dinamik sistemde ilk kaotik veya garip çeker elde etti.
1975	Biyolojik popülasyon artışlarında kaosu tespit edilmesi (Robert May)
1976	Tien-Yien Li ve James Yorke “Periyot Three İmplies Chaos” aslı makaleleri ile kaos kelimesini literatüre kazandırdı.
1978	Mitchell Feigenbaum kaosa geçişteki evrensel bir sabiti keşfetti.
1980	Benoit Mandelbrot fraktal geometrinin bilgisayar grafikleri ile ilgili çalışmalarda bulundu.
1990	Kaos kontrolü teorisinin başlangıcı.
1990	Kaotik sistemlerin senkronizasyonu.

Doğası gereği deterministik kaos içeren sistemler klasik matematiksel yöntemlerle anlaşılamamaktadır. Bunun yerine garip çeker, fraktal gibi alışılmamış yapılarla karşılaşılır ve

analizler bu yapıların doğasını anlamaya indirgenir. Kaotik sistemlerin ürettiği zaman serileri dışarıdan bakıldığında neredeyse gürültüden ibarettir. Çünkü bu tip serileri üreten gerçek sistemde bilgi hızla yok olmaktadır. Yani yan yana duran iki verinin istatistiksel davranışı, sanki birbiri ile ilişkisizmiş gibidir. Oysaki bu serinin perde arkasında, sistemi yöneten ve zamandan bağımsız* bir ‘faz uzayı’ tam bir deterministik kural izleyebilmektedir. Ancak sistem kaotik olduğunda bu faz uzayının genel görünümü ve elde edilen zaman serisindeki yansıması karmaşık ve içinden çıkılmaz bir hal alır. Bu durumda serinin belirli bir parçasının değil tümünün bazı evrensel niceliklere sahip olduğu görülmektedir. Başlangıç durumuna hassas bağlılığın ölçütü olan yörüngelerin üstel olarak ayrılması ve bunun yarattığı geometrik etki olarak fraktallık ön plana çıkar. Şu ana kadar sistemlerin kaotik olup olmadıklarının tespiti için genel olarak bu nicelikler kullanılmaktadır.

1.3 Çalışmanın Kapsamı

Bu çalışma kapsamında yukarıda maddeler halinde sıralanmış olan tüm başlıklara değinilmiştir. Temel amaç gözlenen bir sistemin kaotik özellikler sergileyip sergilemediğinin belirlenmesi de dahil olmak üzere, lineer olmayan determinizmin araştırılmasıdır. Uygulama aşamasında direkt olarak kullanılmasa da kaosu matematiksel kökenleri üzerinde durulmuştur. Bu kısımda kaotik yapıların var olma nedenleri konusuna da değinilmiştir. Bu amaçla tezin 2. kısmında temel noktalardan, değişimin matematiksel ifadeleri olan diferansiyel sistemler ve sistemlerin lineerden lineer olmayana dek geçirdiği aşmalar araştırılmıştır. Sistemlerin kaotik durumlara hangi şekillerde geçiş yaptığını açıklamaya çalışmış, kaosa geçiş nedeni olarak çatallaşma kavramına geniş yer ayrılmıştır. 3. kısım ise uygulamaya dönük olarak gözlenen bir zaman serisindeki kaosa işaret eden niceliklerin ne şekilde elde edileceği ve hangi manaya geldikleri tartışılmıştır. 4. ve son kısım ise, döviz kurlarına yönelik olarak 3. kısımda aktarılanlara dayanan çeşitli uygulamaları kapsamaktadır.

* otonom ise.

2. SÜREKLİ DİNAMİK DENKLEM SİSTEMLERİ

Diferansiyel denklemler, özellikle tanımlanmış bir zaman aralığında belirli yasalara uyan durumların matematiksel olarak modellenmesinde kullanılan güçlü araçlardır. Buradaki ana unsur hareket halindeki (dinamik) sistemlerin incelenmesidir. Bazı doğa sistemleri, altlarında her ne kadar karmaşık ve çözümlenmesi imkânsız sistemler bütünü barındırsa da, oldukça basit matematiksel modeller ile modellenenmektedir. Burada temel sorun varsayımların gerçeği çözümlemedeki etkisi veya sonucudur. Oluşturulan bazı diferansiyel denklem modelleri durumu tam olarak açıklayamayabilir, ancak asıl önemli olan, sistemin çözümü hakkındaki genel bir fikir verebilmesidir (Ross, 1984). Aynı bakış açısından diferansiyel denklemler gerçek dünyada da, özel şartlar altında, son derece karmaşık çözüm uzaylarına sahip olmakta ve nicelden çok nitel* analizler ile açıklanmaktadır. Bu nitel analizler aynı zamanda doğada gözlenebilen ancak kesin çözümlere ulaştırılamayacak sistemlerin analizine de ışık tutmakta ve kaosun neden var olduğu ve matematiksel olarak nasıl tanımlanacağı gibi sorulara yanıt vermektedir. Bu ve takip eden bölümlerde genel hatları ile diferansiyel denklem sistemlerinden bahsedilmiş, lineer ve lineer olmayan sistem ayrımı irdelenerek, basit yapıya sahip kesikli dinamik sistemlerin (discrete dynamical system) hangi şartlar altında kaosu ortaya çıkardığı açıklanmıştır.

“Bir veya birden fazla bağımlı değişkenin, bir veya birden fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denkleme diferansiyel denklem denir” (Ross, 1984). Genel olarak diferansiyel denklemler lineer ve lineer olmayan olmak üzere iki ana başlığa ayrılır. Bir diferansiyel denklemin lineer olması için y ’nin (bağımlı değişken) ve tüm türevlerinin lineer olması gerekir, o halde sistem (2.1)’deki gibi gösterilebilir.

$$P_n(x) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n y = r(x) \quad (2.1)$$

Bu çalışmada teorik özelliklerin aktarımında Adi tipte bir diferansiyel denklem $x \in R = (-\infty, \infty)$ koşuluna uyan tek bir reel değişken ile y gibi, türevleri bu değişkene bağlı, $y, y'', y''', \dots, y^{(n)}$, sistemini tek bir yapıda açıklar ve aşağıdaki kapalı form ile gösterilebilir:

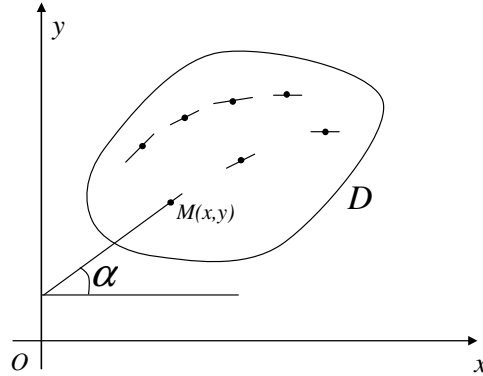
* Diferansiyel denklemleri çözmeden, onların çözüm özelliklerinin incelenmesine diferansiyel denklemlerin nitel teorisi denir.

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (2.2)$$

Bağımsız değişken y ve bağımlı değişken x arasında var olan ve verilen diferansiyel denklemi bir J aralığında sağlayan fonksiyonel ilişkiye, bu denklemin çözümü denir. Örneğin $\forall x \in (\alpha, \beta)$ için $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ özdeşliğini sağlayan $y = \varphi(x)$ fonksiyonuna denklemin (α, β) aralığındaki çözümü denir.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.3)$$

(2.3) denklemini göz önüne alındığında, (x, y) düzleminin bir D alt bölgesinde tanımlı olan $f(x, y)$ fonksiyonu x, y 'nin değişen değerlerine karşılık bir değer kümesi oluşturacaktır. Burada f in alacağı her değer aslında ulaşılması istenen çözüm fonksiyonunun üzerindeki noktaların eğiminden ibarettir. Yani herhangi bir durum için $f(x_i, y_i) = m_i$ dir. Değişen tanım kümesi değerlerine karşılık gelen değer kümesi değerleri (2.3) için iki boyutlu koordinat düzleminde bir eğim ($\tan(\alpha) = m_i$) alanı oluşturur.



Şekil 2.1 D alt bölgesi için denklem (2.3)'ün eğim alanı (Hasanov vd., 2002)

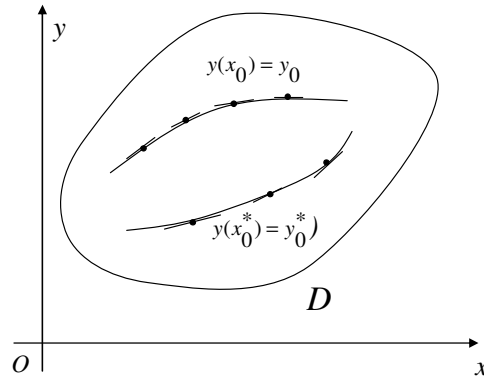
Bir diferansiyel denklemin çözümü genel halde sonsuz sayıdadır. Keyfi sabitlerin sisteme dahil olmasından dolayı d.d.'ler tek bir durumu değil, bir durumlar kümesini tek bir yapıda içinde gösterir. Adi tipteki bir d.d, başlangıç koşullarını veren

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ şartları birlikte başlangıç değer problemini oluşturur (2.6) (2.7).

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.4)$$

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.5)$$

Başlangıç değer problemi, $f(x, y)$ 'nin tanımlı olduğu bir Oxy 'nin bir D alt bölgesindeki $\exists(x_0, y_0) \in D$ başlangıç değerini sağlayan, $y(x_0) = y_0$ çözümünün bulunması problemidir, yani problem (x_0, y_0) den geçen çözümün bulunmasına dayanır. Burada (x_0, y_0) ikilisi başlangıç olarak adlandırılır. (x_0, y_0) noktasında $y' = f(x, y)$ yalnızca bir yön tanımlayacağı için, eğer bu noktada birden fazla integral eğrisi geçiyor ise, bu eğriler birbirlerine teğettir (Şekil 2.2). Varlık ve Teklik Teoremleri (Cauchy-Peano ve Liptschitz şartları) gereğince $y' = f(x, y)$ denkleminde $f(x, y)$ x, y düzleminin herhangi bir alt bölgesinde sürekli ve sınırlı ise, bu halde keyfi (x_0, y_0) için bu denklemin $y(x_0) = y_0$ koşulunu sağlayan çözümü mevcuttur ve $y(x_0) = y_0$ koşulunu sağlayan çözümleri (varsa) tektir. Aktarılanlar çok boyutlu sistemler için de geçerlidir.



Şekil 2.2 D alt bölgesi için denklem 2.5'in iki farklı Cauchy çözümü.

2.1 Denklem Sistemleri

Bir denklemin analizi için neden sistemlere gereksinim duyulmaktadır? 'Doğadaki süreçlerin yapısı karmaşık ve karşılıklı olarak ilişkilidir. Çok az dinamik sistemin doğası çevreden yalıtılmış şekildedir ve kendi içinde tamdır' (Borrelli ve Coleman, 1996). Bu nedenle sorunun

cevabı, analizlerin daha kolay yapılabilmesi ve denklem sistemlerinin fiziksel doğa olaylarına çok daha kolay uyum sağlaması olarak verilebilir. Durumu açıklamak için n . mertebeden bir denklem ele alındığında, denklem daha açık şekilde (2.6)'daki gibi yazılır,

$$y^{(n)} = F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2.6)$$

Ancak bu sistem, eldeki durum değişkenleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ olmak üzere aşağıdaki eşitliklerle çok boyutlu birinci mertebeden bir denklem sistemi haline getirilebilir (Arnold, 1998).

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \dots, \quad x_{n-1} = y^{(n-2)}, \dots, \quad x_n = y^{(n-1)} \quad (2.7)$$

(2.7)'da eşitliklerin her iki yanı t 'ye göre türevlenirse, (2.6) ve (2.7)'den , (2.8)'e ulaşılır.

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = x_3, \quad \dots, \quad x'_{n-1} = x_n, \quad x'_n = g(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.8)$$

Bu açılım sadece lineer değil lineer olmayan denklem sistemlerini de kapsamaktadır. Bu durum oldukça kullanışlıdır, zira herhangi bir detaylı işleme gerek kalmaksızın, yüksek mertebeden bir d.d. sistemi birinci mertebeden bir sisteme indirgenmektedir. Burada, sistem başlangıç koşullarının sayısı, (2.7) denklemindeki eşitlik sayısı kadardır. Sonuçta mertebenin düşürülmesi ile elde edilen avantaj, başlangıç şartlarının tespit edilmesi zorunluluğunu getirir. Genel halde sistem (2.9)'daki gibi yazılır ve birinci mertebeden **diferansiyel normal denklem** sistemi adını alır.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (2.9)$$

Eğer (2.9) sisteminde F_i fonksiyonları bağımsız değişkeni açık şekilde içermiyor ise (fiziksel sistemlerin matematiksel modellerinde sıkça kullanılan) '**otonom sistem**' adını alır (2.10).

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (2.10)$$

(2.11) gibi bir sistem $x_0 = t$ alınmak suretiyle bir otonom sisteme dönüştürmek mümkündür.

$$\begin{aligned}\frac{dx_0}{dt} &= 1, \\ \frac{dx_1}{dt} &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{2.11}$$

Uygulamada karşılaşılan birçok denklem sistemi (2.10) şeklindeki otonom sistemlerdir. Bunun nedeni genel olarak F_i fonksiyonlarının fiziksel yasalara karşı gelen matematiksel ifadeler olarak yorumlanabilmesidir. (Hasanov vd., 2002).. Zaman kavramı fiziksel sistemlerden elde edilen veriler için temel belirleyici olduğundan, otonom sistemlerden zamana bağlı süreçlerin, zamandan bağımsız şekilde incelenebilmesi için sistem fonksiyonu F 'in zamanı (t) açık şekilde içermemesi istenir. Bu şekilde zamansal değişimden çok, değişkenlerin birbirleri ile olan uzaysal ilişkilerinin dikkate alındığı bir **faz uzayı** elde edilir. Bu uzayın koordinatlarının her biri sistem değişkenlerini simgeler. Her bir koordinattaki zamansal değişim ise dx_i/dt , ögelerin uzaydaki ilişkileri, F_i , tarafından belirlenmektedir, $dx_i/dt = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Oluşan bu faz uzayındaki yörüngeler, dinamik sistemin belirli bir başlangıç koşuluna göre izlediği çözümleri içerir.

Sistemin başlangıç koşullarını veren vektör $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ bilindiğinde, başlangıç değer probleminin $\mathbf{x}=(t_0, t, \mathbf{x}_0)$ şeklinde bir çözümü vardır (varlık) ve bu çözüm tektir (teklik). Ayrıca elde edilen çözümler t_0, t ve $\mathbf{x}_0$ 'ın sürekli bir fonksiyonudur (Borrelli ve Coleman, 1996).

$$\begin{aligned}dx/dt &= f(x, y) \\ dy/dt &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.12}$$

(2.12)'deki gibi bir denklem için, t_0 verildiğinde, herhangi bir (x_0, y_0) için $f(t_0) = x_0$ şartlarını sağlayan bir $x = f(t)$, $y = g(t)$ çözümü mevcuttur. Eğer f, g sabit değerli fonksiyonlar değilse, x, y düzleminde **yörünge** (trajectory, orbit, path) adı verilen eğrileri meydana getirirler. Otonom sistemleri yöneten yasalar zamandan bağımsız olduğu için, sistemin faz uzaylarında yörünge hareketine zamanın hiçbir etkisi bulunmaz.

Bir denklem sisteminin kontrolü parametreleri vasıtasıyla yapılır, sistemdeki asıl değişkenlerin sayısı sistemin doğası gereği değişmeyecektir. Parametrelerin değişimi sistemin izleyeceği çözümleri de köklü şekilde değiştirebilir, bu durum parametre değişimine hassas bağıllık içeren sistemlerde meydana gelir. Bu nedenle herhangi bir denklem sistemi kurulduğunda çıktıları tanımlayacak asıl yapı sistemin parametre uzayı olacaktır. (2.10) gibi bir sistemde içsel olarak bu parametre yapısını tanımlayacak olan F fonksiyonunun kendisidir. Ancak bu fonksiyonun yapısı ne olursa olsun değişmeyecek bir özellik bulunur, eğer F_i ve $\partial F_i / \partial x_j$ ($i, j = 1, \dots, n$) durum uzayının bir S alanında sürekli iseler, yörüngeleri bu alanda olan $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ $x' = F(x)$ sistemin iki çözümü ise bu yörüngeler asla kesişmez ve birbirlerine değmezler (Borrelli ve Coleman, 1996).

Literatürde basitliği nedeni ile kaotik sistemlerin araştırılmasında oldukça sık kullanılan, sönümlü zorlanmış sarkacın fiziksel (Damped-Driven Pendulum) davranışı, dinamik sistemler için temel bir örnek oluşturur. Örneğin sönümlü ve sinüzoidal zorlamalı sarkacın hareket denklemi (2.13)'de verilmiştir (Baker ve Gollup, 1996).

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left(\frac{1}{q}\right) \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta = g \cos(\omega_d t). \quad (2.13)$$

Sistemde g kuvvet amplitüdü ve ω_d zorlama frekansı olarak verilir. Bu sistem, eklenen bir ϕ değişkeni yardımıyla (2.14)'deki gibi gösterilebilmektedir.

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{1}{q} \omega - \sin(\theta) + g \cos(\phi) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega_d \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.2 Lineer Sistemler

Lineer sistemler, lineer olmayan sistemlerin nitel analizi için çok önemli ipuçları sağlamaktadır. Bunun nedeni lineer sistemlerin lineer olmayanlara göre matematiksel

özellikleri bakımından daha kolay tasvir edilebilmeleri ve lineer olmayan sistemlerin bazı durumlarda lineer sistem gibi davranmalarındır.

$y(x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevlerine göre lineer ise lineer diferansiyel denklem adını alır ve,

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x) \quad (2.15)$$

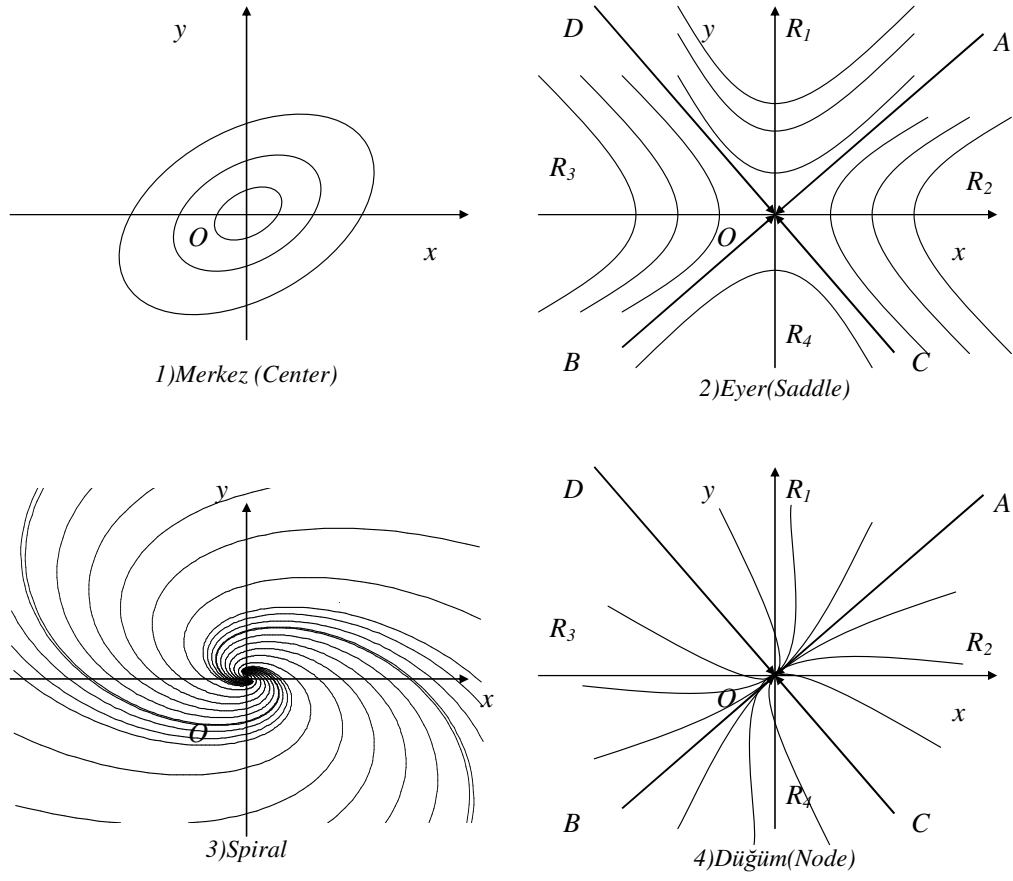
şeklinde gösterilebilir. (2.15) sisteminde $n > 1$ için genel çözümün bulunması mümkün değildir. Burada L , $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$ ve $L(Cy) = cL(y)$ şartlarını sağlayan lineer diferansiyel operatördür. (2.23)'den oluşturulan denklem de lineer özellikler gösterir.

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \dots + a_{1n}(t)y(t) + b_1(t) \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \dots + a_{2n}(t)y(t) + b_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \dots + a_{nn}(t)y(t) + b_n(t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

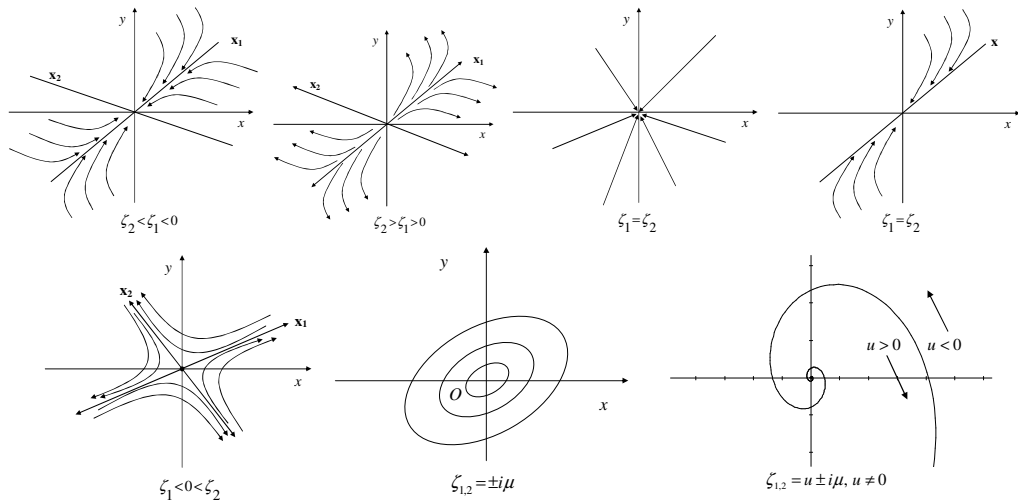
(2.16) sistemi $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$, $\mathbf{A} = [a]_{i,j}$ ve $\mathbf{b}(t) = [b]_{i,1}(t)$ olmak üzere, lineer sistem aşağıdaki gibi gösterilebilir,

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}(t).\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \quad (2.17)$$

Örneğin (2.17)'dekine benzer sabit katsayılı lineer d.d'in matris şeklinde gösterimi $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}(t).\mathbf{y}$ şeklide olsun. Burada $\mathbf{A} \mathbf{x} = \zeta \mathbf{x}$ eşitliğini sağlayan ζ sayılarına $\mathbf{A}$ 'nın özdeğerleri, özdeğerlere karşılık gelen $\mathbf{x}$ vektörlerine, özvektörler denir. Sistemin genel çözümlerinin şekli tamamen bu özdeğerlere bağlıdır. $\mathbf{A}(t).\mathbf{y} = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlayan noktalar sistemin kritik noktalarını oluşturur. Bu noktalarda sistemin çözümleri sabit olacağından denge çözümlerini oluşturmaktadır. Bu nedenle $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t).\mathbf{y}$ denkleminin çözüm kümesi faz uzayındaki yön alanının geometrik şeklini belirler. Özdeğerlerin farklı kombinasyonlarına göre farklı genel çözüm elde edilmektedir. İki boyutlu sistemin özdeğerlerine göre elde edilen denge noktası türleri Şekil 2.3'de, iki boyutlu bir sistemin farklı özdeğerlerine göre sahip olabileceği tüm denge noktası türleri ise Şekil 2.4'de gösterilmiştir.



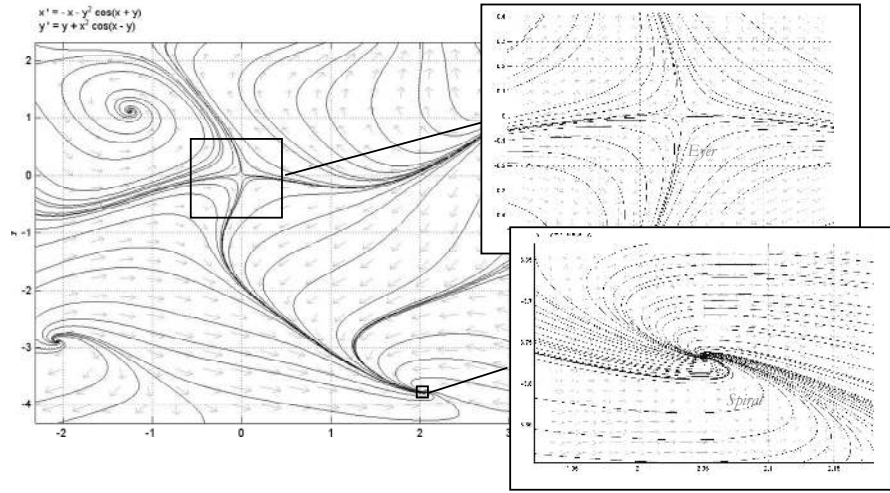
Şekil 2.3 Denge noktası türleri (Ross, 1984).



Şekil 2.4 Özdeğerlerine göre lineer bir sistemin denge noktaları ve faz yörüngeleri.

Burada, basit bir yaklaşımla, yörüngeler denge noktasına doğru yaklaşıyor ise sistem kararlı, uzaklaşıyor ise kararsızdır. Kararlı ve kararsız durumlar da sistemin parametreleri tarafından kontrol edilir.

Lineer olmayan sistemlerin faz uzayında hangi davranışı sergilediği ile ilgili olarak lineer sistemlerden faydalanılabilir. Lineer ve lineer olmayan d.d. denklem sistemleri arasındaki fark, denge noktalarının dışında oluşmaktadır. Sistemlerin faz akımları denge noktaları civarında lineer özellik gösterirken, denge noktalarından uzaklaşıldıkça doğrusallık kaybolur ve faz portresine eğrisel akımlar hakim olmaya başlar (Şekil 2.5).



Şekil 2.5 $x' = -x - y^2 \cos(x+y)$, $y' = y + x^2 \cos(x-y)$ sisteminin faz portresi, lineer ve lineer olmayan özellikler birbirleri ile iç içe bulunmaktadır.

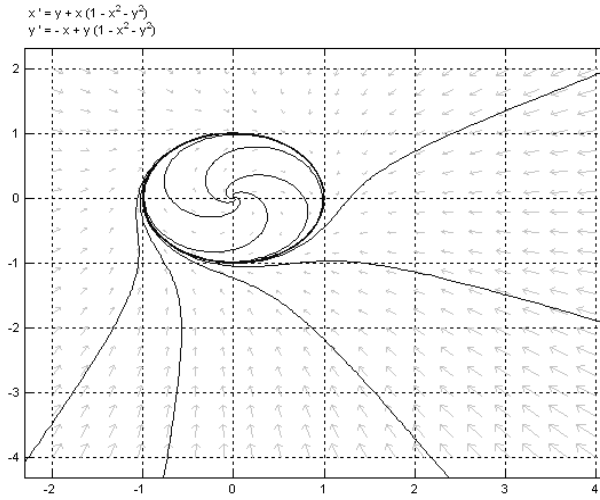
2.3 Farklı Denge Noktası Türleri

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x, y) \\ dy/dt &= g(x, y) \end{aligned} \tag{2.18}$$

(2.18) denklem sisteminin çözüm kümesi üç farklı şekilde olabilir:

- Çözüm periyodiktir, yani $(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t))$, $-\infty < t < \infty$ sağlayan bir T sayısı vardır. Yörünge kapalı bir periyodik eğri ise **çevrim** adını alır.
- Çözüm periyodik değildir; yani $t \neq t_0$ ise, $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_0), y(t_0))$ dir.
- Çözüm sistemin denge noktasıdır, diğer bir deyişle $x(t) = x_0, y(t) = y_0$ sağlanır.

C , (2.18) sisteminin kapalı faz eğrisi (çevrim) olsun. Eğer bu kapalı eğriye içeriden ve dışarıdan $t \rightarrow \infty (t \rightarrow -\infty)$ olduğunda, spiral şeklinde dolanarak sonsuz olarak yaklaşan ve kapalı olmayan bir faz eğrisi C_1 varsa, bu eğriye **limit çevrimi** adı verilir (Ross, 1984; Borrelli ve Coleman, 1996; Hasanov vd., 2002). Bir limit çevrim izole edilmiş kapalı bir faz eğrisidir. Burada izole kavramı, kapalı faz eğrisinin yakın çevresinde başka kapalı faz eğrisi bulunmadığını belirtmek için kullanılır. Limit olsun olmasın bir çevrimin iki önemli özelliği bulunmaktadır: (1) çevrimler (x, y) düzlemini sınırlı bir iç bölge ve sınırsız bir dış bölgeye ayırırlar, (2) Çevrimin iç bölgesi en az bir eyer tipinde olmayan denge noktası içerir (Şekil 2.6). Birinci mertebeden lineer sistemler izole edilmiş limit çevrimlere sahip olamazlar (Borrelli ve Coleman, 1996).



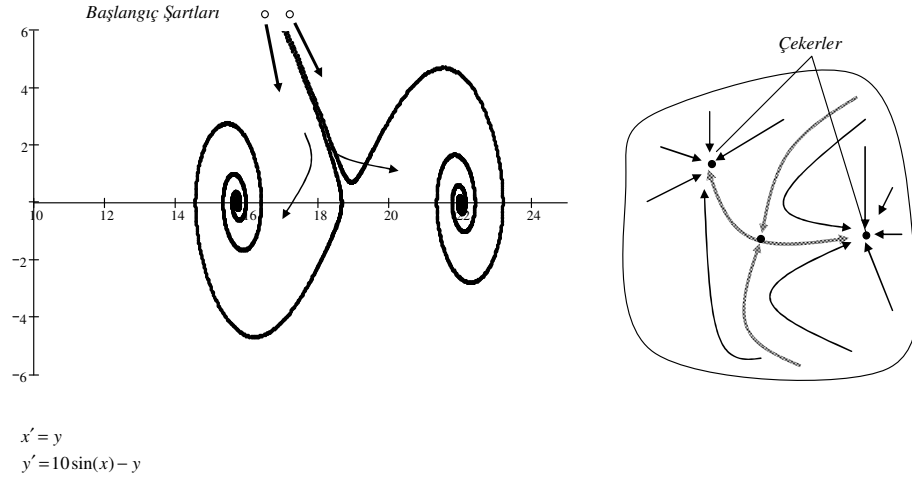
Şekil 2.6 Bir limit çevrim örneği.

2.3.1 Çekerler (Attractors)

Sistemlerin eninde sonunda evrilip tek bir noktada dengeye ulaşacakları yönündeki klasik inancın geçerli olması ancak belirli şartlar altında mümkündür, yani dengenin kararlılığı ve

tipi tamamen durumu yöneten yasaların egemenliğindedir.

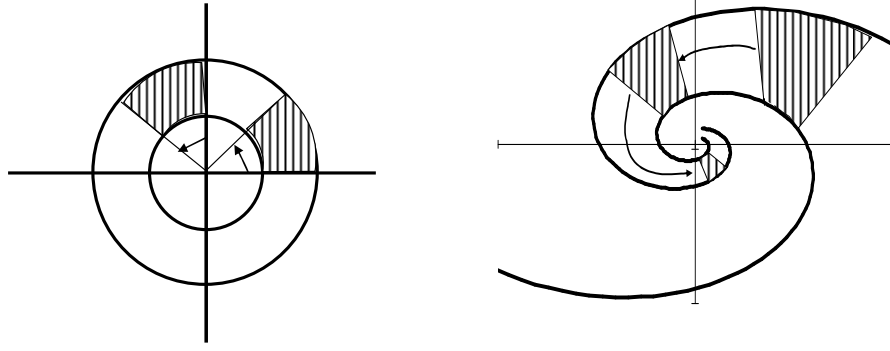
$x' = F(x)$ şeklindeki bir denklemin bir denge noktası p olsun. Bir S alanında p 'yi içeren her x_0 için $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = p$ şartı sağlanıyor ise, p bir **çekerdir**. Sonuç olarak, kararlı bir p çekeri, yakın çevresindeki tüm faz eğrilerini uzun dönemde kendine doğru çekmektedir (Borrelli ve Coleman, 1996). Çeker kararlı veya kararsız olabilir. Kararsız olduğu durumda, çeker noktada zaman geçtikçe bütün faz eğrileri denge noktasından uzaklaşır, bu tip çekerele **iter** (repeller) denir. Belirli bir çekerde sonlanan tüm faz eğrilerinin başlangıç noktaları kümesine **çekim havuzu** (basin of attraction) adı verilir (Urbach, 2000).



Şekil 2.7 Bir diferansiyel denklem sistemine ait çeker noktalar ve çekim havuzu.

Her sistemin bir çekere sahip olması mümkün değildir. $t \rightarrow \infty$ çekim havuzundaki eğrilerin tek bir çeker noktada sonlanması bu eğrilerin birbirlerine sonsuz yoğun şekilde yaklaşmalarını gerektirir. Genelde faz portresi üzerindeki bu eğrisel akımlar için dinamik sistemleri tanımlayan iki kavram, korunumlu (conservative) ve korunumsuz (dissipative), bir çekerin varlığı konusundaki sorulara yanıt verir. Şekil 2,8'de korunumlu ve korunumsuz sistemler ile neyin vurgulanmak istenildiği gösterilmektedir.

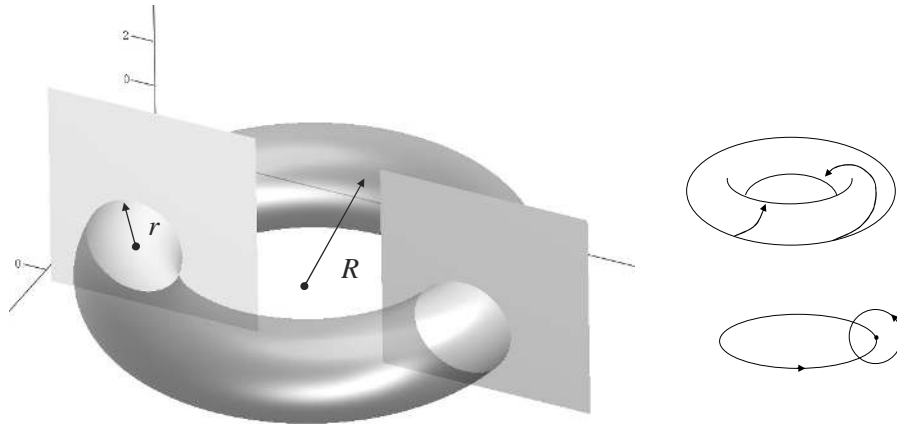
Eğer faz eğrileri birbirlerine çeker nokta çevresinde yaklaşıyorlar ise, aynı t anına denk gelen noktalarda her iki faz eğrisi içinde kalan alan azalır, eğer çok boyutlu bir sistem inceleniyor ise aynı şey faz eğrilerinin oluşturduğu hacim için de geçerlidir.



Şekil 2.8 Korunumlu ve korunumsuz sistemlerin çeker tasvirleri (Baker ve Gollup,1996)

2.3.2 Yarı-Periyodik Hareket (Quasi-periodicity)

Dinamik sistemlerde denge noktaları ve çekerler, sistemin faz grafiğini biçimlendirmektedir.. Yarı-periyodiklik olarak adlandırılan durum genellikle korunumsuz sistemlerde ortaya çıkmaktadır. Limit çevrimlerden farklı olarak bu çekerler faz eğrilerinin iç içe geçmiş iki periyodik hareketini (Şekil 2.9), **torus** adı verilen üç (veya daha fazla boyutlu) bir cismin yüzeyinde sınırlı tutarlar (Hilborn, 2000).



Şekil 2.9 Yarı periyodik çekerin faz uzayındaki görünümü.

Faz ‘düzleminde’ dinamik süreçlerin ortaya çıkarabileceği yapılar oldukça sınırlıdır, bu nedenle kaos durumuna yol açacak bir garip çekerin karmaşık yapısına zemin hazırlayamamaktadır. Urbach (2000) bu durumu; iki veya daha az boyutlu diferansiyellenebilir sürekli bir dinamik bir sistemin ancak denge noktası veya limit çevrim çekerleri olabileceğini, düzlemin asimptotik özelliklerinin daha karmaşık yapılanmalar için yetersiz kaldığı şeklinde açıklamaktadır. Ancak daha yüksek boyutlu uzaylarda bu teorem geçerliliğini yitirir. Artık yörüngelerin uzayda birbirleri ile kesişmeden hareket edebilecekleri oldukça geniş bir parametre kombinasyonu mevcuttur. Sonuç olarak sürekli sistemlerde kaosun var olması için $R^n, n \geq 3$ olması şarttır.

2.4 Kaos Nasıl Ortaya Çıkar?

Kaos’a yönelik çalışmalar iki ilginç sonucu günışığına çıkarmıştır: (1) kaos’a her yerde ve sıkça rastlanabilmektedir ve (2) kaos’a geçişte evrensel yollar (routes to chaos) bulunmaktadır. Bu alandaki ilk çalışmalarda Poincaré şu an kaos olarak nitelendirilen sürecin var olabileceğini tahmin etmiştir, ancak yakın zamana dek genel kanı bu süreçlerin ender rastlanan süreçler olduğu ve ortaya çıkan yapıların tamamen tanımlayıcı lineer olmayan sürece bağlı olduğu yönündedir. Mekanik sistemlerin lineer yapıları rahatlıkla çözülsede, bu yöntemler lineer olmayan sistemlerin incelenmesinde faydalı olmamaktadır. Bu durum bahsedilen genel kanının kuvvetlenmesine neden olmuştur. Sadece birkaç lineer olmayan denklem sisteminin genel çözümleri elde edilebildiğinden, bu yapıların birbirlerine benzeyen ortak özelliklerinin analiz edilmesi ihtiyacını getirmiştir. Bu tip matematiksel modellerin, fiziksel, biyolojik ve kimyasal sistemlerin gözlenmesi yoluyla evrensel olarak nitelendirilebilecek ortak davranışlara sahip olduğu gözlenmiştir. Sözü edilen evrensel davranışlar kaos’a geçiş olarak adlandırılır. Lineer olmayan bir sistemin parametrelerinin değişimi, hangi şartlar altında düzenli veya periyodik bir davranıştan kaotik bir yapılanmayı oluşturacaktır? Önemli olan parametrenin değişimi sonrasındaki, kaotik davranışa çok yakın konumdaki yörüngelerin, uzun dönem değişimlerinin yani asimptotik özelliklerin incelenmesidir. Son yirmi yıldaki deneysel çalışmalar ve bunları tanımlayan denklemlerin kaos’a geçiş bağlamında belirli kategoriler altında incelenebileceğini göstermiştir. Eğer hangi tipte geçişin var olduğu bilinirse, bu geçişten sonra sistemin nasıl davranacağı nitel ve nicel olarak analiz edilebilecektir (Medio, 1993, 149). Ancak geçişler ile ilgili iki gerçek önemlidir:

öncelikle bir denklem sistemi parametrenin farklı aralıkları için farklı geçiş özellikleri gösterebilir, ikinci olarak şu belirtilmelidir ki lineer olmayan denklem sistemleri için parametrenin hangi aralıkları için hangi geçiş şekillerinin bulunacağına yönelik matematiksel yöntemler henüz geliştirilememiştir. Daha yüksek mertebeden denklemler farklı geçiş şekillerini gün yüzüne çıkarabilir, ancak günümüze kadar incelenen sistemlerde keşfedilen geçiş şekilleri yerel ve global çatallaşmalar olmak üzere iki ana başlık altında toplanmıştır. Yerel çatallaşmalar başlığında belirli bir parametre aralığında denge noktalarını oluşturan, ortadan kaldıran veya kararsız kılan çatallaşmalar olur. Süreç içerisinde sistemde bir limit çevrim oluşur, kontrol parametresi değiştiğinde bu çevrim ortadan kalkar ve sisteme kaotik davranış hakim olur. İkinci kategoride ise sistemin uzun-dönem davranışı kararsız denge noktalarının, çevrimlerin ve çekerlerin konumlarından ve özelliklerinden etkilenmektedir ve analizi zordur (Hilborn, 2000).

Hem kesikli, hem de sürekli sistemler çatallaşmalara sahiptir ve türleri iki düzineden fazladır. Bazı çatallaşma türleri her iki sistemde de görülebilir ve aynı adı alırlar, ancak bazı tür çatallaşmalar sistemin dinamik yapısına bağlıdır. Çatallaşma olgusu sistemin boyutu (sistemi tanımlayan değişken sayısı) ile de ilişkilidir, öyle ki bazı çatallaşma türleri sistem sadece belirli bir boyut sınırını geçtiğinde gözlenir.

2.5 Kesikli Haritalarda Kaotik Süreçler: Periyot Eşleşme Kavramı

Literatürde kaotik süreçlerin nedenlerinin aktarımı genellikle kesikli haritalar vasıtasıyla yapılmaktadır. Birçok kaynak öğretilebilirlik özelliklerinin daha geniş olmasından dolayı bu sistemlerdeki kaotik süreçlere yer ayırmaktadırlar. Bu çalışmada da aynı yol takip edilmiştir. Kaos'un basit örneklerini içerdiğinden sürecin aktarımında lojistik denklem kullanılmıştır.

Tek boyutlu tersinmez (noninvertible) dönüşümler* (veya fark denklemleri) kaotik hareketi

* Burada dönüşüm kavramından ziyade 'harita' kavramı daha yerindedir, çünkü bu yapılar kendine has özelliklere sahip dönüşümlerdir ve farklı literatürde farklı bir 'map' kavramı olarak benimsenir.

ortaya çıkarabilen en basit sistemlerdir (Ott, 2002). Dinamik sistemlerden söz edilince süreklilik kavramı durumun faz uzayı, faz akımları kararlılıkları çeker yapılar gibi kavramları ön plana çıkarmaktadır. Kesikli sistemler bu kavramların daha kolay anlaşılabilmesi için oldukça önemli bir özelliğe sahiptir, öyle ki bu sistemler iteratif süreçlerdir. Sonuç olarak süreklilik varsayımının ağır varsayımlarından ziyade, iterasyonun sonuçları çevresinde odaklanılmaktadır. İterasyon yapıları sistem parametrelerinin etkilerini sürekli sistemlerden çok daha hızlı şekilde açığa çıkarırlar. Strogatz (1994) bu durumu şu şekilde özetlemektedir: “Dinamik sistemlerin tüm aşikarlığı içerisinde, tek boyutlu sistemleri ilginç kılan nedir? Cevap: Parametre bağımlılığıdır”.

Bir tek boyutlu haritanın (veya fark denkleminin) genel bir formu (2.19)’daki gibidir.

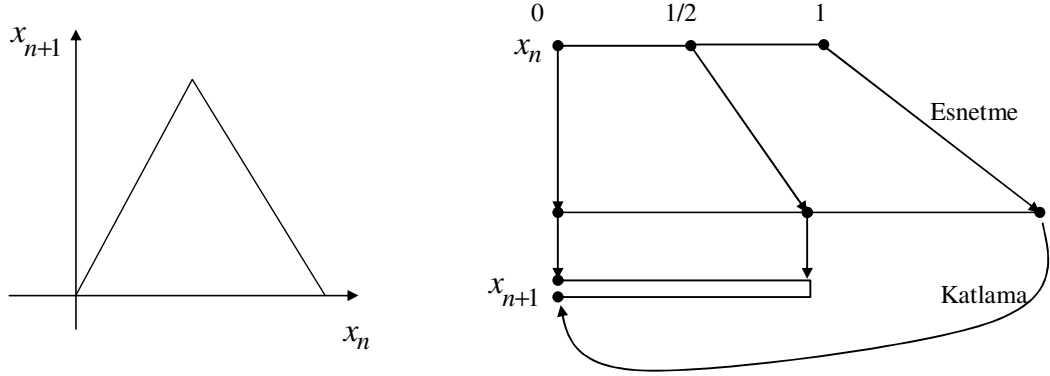
$$x_{n+1} = f(\mu, x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.19)$$

Burada x_n , $[0,1]$ birim aralığındaki x ’in n . değerini gösterir, μ ise sistem parametresidir. Bu sistem için nt zamanı gösterirken, t birim zaman olarak da alınabilir. f , $[0,1]$ aralığındaki x_n değerini yine $[0,1]$ aralığındaki x_{n+1} değerine dönüştüren lineer veya lineer olmayan bir fonksiyondur. Burada fonksiyonun iterasyonu sonucunda ortaya çıkan $x_0, x_1, x_2, \dots$ serisine yörünge (orbit) adı verilir. (2.19) denkleminde örnek olarak aşağıdaki çadır haritası (tent map) verilebilir (Ott, 2002).

$$x_{n+1} = 1 - 2 \left| x_n - \frac{1}{2} \right| \quad (2.20)$$

$x_n < 1/2$ için sistem $x_{n+1} = 2x_n$ şeklini alır. Başlangıç koşullarının negatif olması durumunda sistemin her iterasyonunda değer ikiye katlanarak küçülür ve $-\infty$ ’a yaklaşır. $x_n > 1/2$ için sistem $x_{n+1} = 2(1 - x_n)$ halini alır ve $x_0 > 1$ için $x_1 < 0$ olur, sistemde negatif değerler aynı şekilde $-\infty$ ’a gider. $x_n > [0,1]$ için sistem $0 \leq 1 - 2|x_n - 1/2| \leq 1$ şekline gelir. $0 \leq x_0 \leq 1$ olması durumunda $\forall n$ için iterasyonun sonucu yörüngeler $[0,1]$ aralığında sınırlı kalır. Sistemin ilk başlangıç durumunda tanım kümesi $[0,1]$ aralığında sabitken, örneğin $x_0 = 0.05$ olsun, sistemin değeri $1 - 2|0.05 - 0.5|$ olur. Buna benzer her durum için sistemin mutlak değer çıktısı ikiye katlanacak ancak başlangıç şartları nedeni ile bu değer daima 1’den küçük kalacaktır. Sonuç olarak mekanizma, tanım aralığının iki katına **esnetilmesi** (stretch) ve 1’den

çıkarılarak tekrar aynı aralığa **katlanması** (fold) mantığı ile çalışır (Şekil 2.10).



Şekil 2.10 Çadır Haritasının $[0,1]$ aralığındaki esnetme-katlama mekanizması (Ott, 2002).

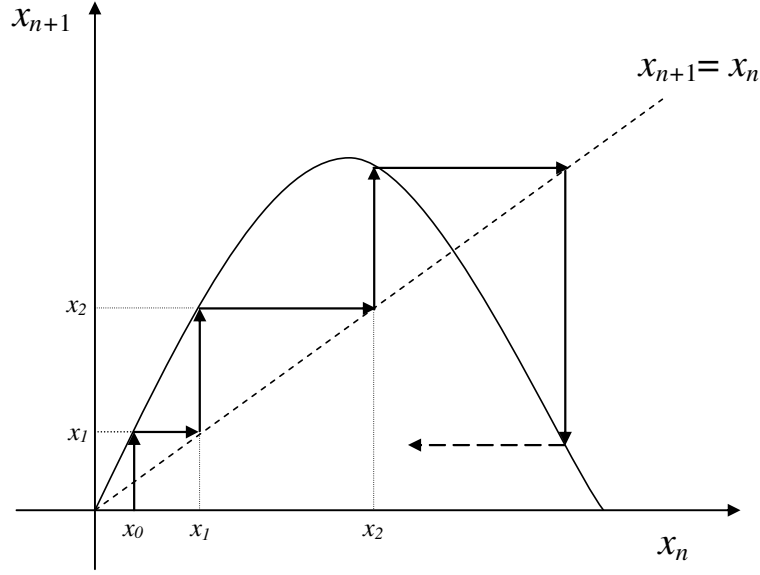
Peki bu mekanizmanın önemi nedir? Öncelikle eğer yörüngeler sonsuza gidiyor ise, bu mekanizmanın katlama kısmı gerçekleşmemektedir. Katlama aşamasında x_n 'in iki farklı değerine karşılık tek bir x_{n+1} elde edilir. Sonuç olarak dönüşüm tersinmezdir. Bu örnek iki önemli özelliği göz önüne serer: Kaos'un gerçekleşebilmesi için yörüngeler birbirinden hızla ayrılmalı ancak sınırlı bir alanda kalmalıdır. Esnetme mekanizması da yaklaşık olan yörüngeleri birbirinden üstel hızla ayırır. Katlama süreci ise noktaları sınırlı bir alanda tutar. Sonuç olarak tek boyutlu haritalarda Kaos'un ortaya çıkabilmesi için, haritanın tersinmez olması şarttır (Ott, 2002).

2.5.1 Lojistik Denklemden Kaos

Denklemlerin lineer olmaması durumunda çözümlerin kararlılığı garanti edilemez. Bunu örneklendirmek için literatürde sıkça kullanılan ve deterministik dinamik denklemler için tipik olan şu denklemi ele alalım:

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n). \quad (2.21)$$

P.F. Verhulst'un 1845'te kısıtlı çevrede nüfus gelişimini modellemek için kullandığı $dx/dt = \mu x(1-x)$ 'e atfen bu kesikli modele lojistik model adı verilmiştir (Baker ve Gollup, 1996). Bu tip modellerde grafik üzerinde analitik anlaşılabilirliğin sağlanması için oldukça basit bir çözüm yöntemi Şekil 2.11'deki gibi gösterilebilir.



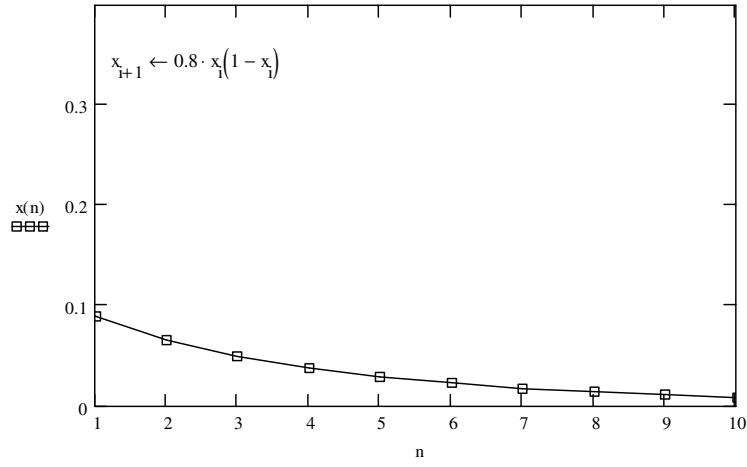
Şekil 2.11 ($\mu > 3$) lojistik denklemin x_0 başlangıç koşuluna uygun çözümleri.

Çözüm kümesini bulmak için başlangıç noktasının görüntüsü bulunur ($f(x_0)$). İkinci olarak bu görüntünün $x_{n+1} = x_n$ doğrusuna izdüşümü alınır (x_1) ve tekrar bu nokta bir başlangıç noktasıymış gibi iterasyona devam edilir. $x_{n+1} = x_n$ doğrusundan alınan izdüşümleri yardımı ile x_{n+1} değer kümesi x_n tanım kümesinin üzerine katlanmakta ve yeni tanım kümesini oluşturmaktadır. Bu şekilde iki boyutlu koordinat düzleminde birbirini takip eden kesikli doğrular aynı zamanda sistemin nitel yapısı hakkında da geniş bilgi verir.

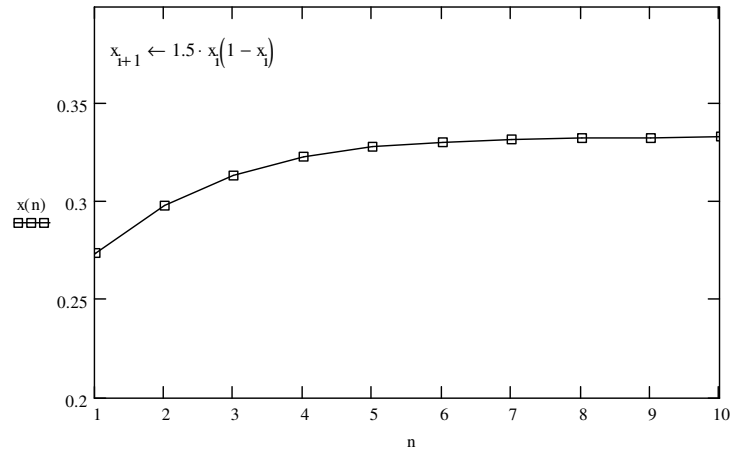
Öncelikle lojistik denklemin nicel olarak göz önüne alındığında (2.21) için uzun dönem dengesi, $x_n = \mu x_n - \mu x_n^2$ şeklindedir. Sonuç olarak denklemin denge çözümleri $(0, \frac{\mu-1}{\mu})$ dır.

Bundan sonraki mesele bu denge çözümlerinin kararlılık veya kararsızlık durumlarının incelenmesidir. Yani denge noktalarından birine çok yakın konumda bulunan bir başlangıç çözümüne karşılık gelen sonuç çözüm bu noktaya yaklaşmaya veya uzaklaşmaya meyilli olup olmadığı tespit edilebilir. $x_n = 0$ denge çözümüne yakın durumlar için x_n^2 terimi sıfır kabul edilebilir. Bu halde genel denklem bu yakın çevrede $x_{n+1} = \mu x_n$ olarak ele alınır. Lineer haritaların $0 < \mu < 1$ durumunda kararlı çözümleri vardır. Parametrenin 1'den büyük

değerleri için denge noktasına yaklaşma monoton bir şekilde ve sönümlenerek gerçekleşir (Şekil 2.12 ve Şekil 2.13).



Şekil 2.12 Lojistik denklemin $\mu = 0.8$ için yörüngesi.



Şekil 2.13 Lojistik denklemin $\mu = 1.5$ için yörüngesi.

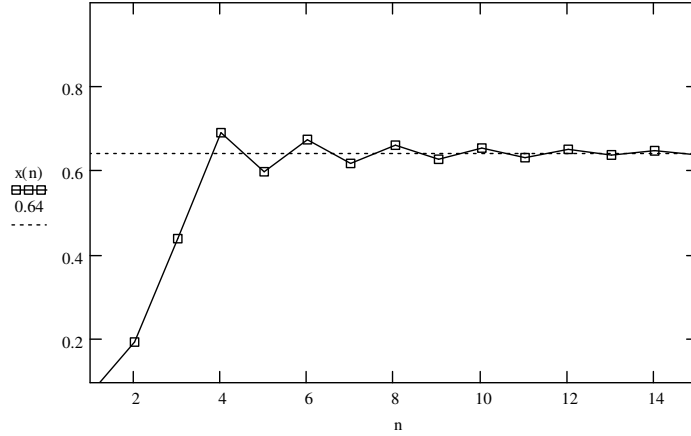
Diğer denge çözümü için de aynı yaklaşım geçerlidir. İkinci denge noktası civarında denklemin davranışı çok küçük v_n için $x_n = 1 - 1/\mu + v_n$ dir. İfade (2.21)'de yazılırsa (2.22) elde edilir.

$$v_{n+1} = (2 - \mu)v_n - \mu v_n^2 \quad (2.22)$$

Eğer kareli ifadenin v_n 'e göre oldukça küçük değerli olacağı varsayılırsa (2.22), (2.23)şekline dönüşür.

$$v_{n+1} = (2 - \mu)v_n \quad (2.23)$$

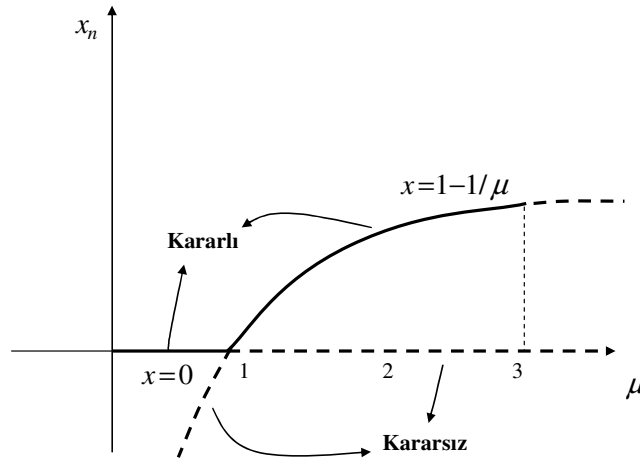
Burada yeni sabit terim $2 - \mu$ dır ve asimptotik kararlı çözümler için bu ifadenin mutlaka $|2 - \mu| < 1$ şartını sağlaması gerekir. O halde sistemin $x_n = 1 - 1/\mu$ çözümü $1 < \mu < 3$ için yine karardır. Uzun dönemde yörüngeler $\mu = 0.8$ ve $\mu = 1.5$ için monoton iken $\mu = 2.8$ için salınımlar yaparak tek bir denge noktasına yaklaşılarak evrilirler (Şekil 2.14).



Şekil 2.14 $\mu = 2.8$ için sistemin yörüngesi.

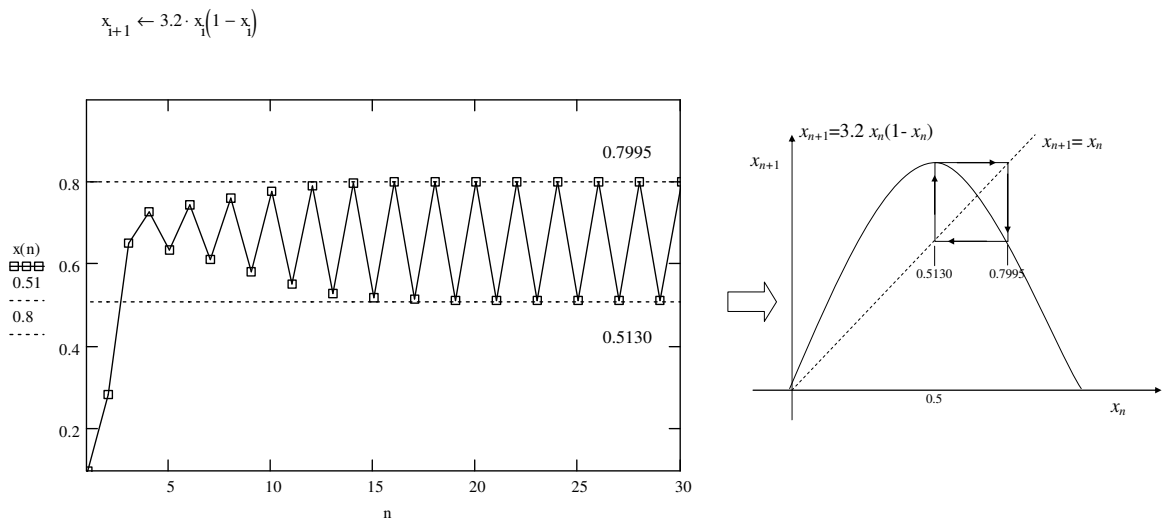
2.5.1.1 Periyot Eşleşme

(2.21) sisteminin kararlılığı kendi parametre uzayı ile ilişkilidir. Denge çözümleri sistem parametrelerini içerdiğinden, kararlılık durumu bu denge çözümlerindeki parametre değişimlerinin analizleri ile ortaya çıkarılabilir. Örneğin (Şekil 2.15)'de (2.21) denkleminin denge noktalarının parametreye bağımlılığı incelenmektedir. Görüldüğü üzere iki farklı denge noktası μ 'nın belirli bir değeri için kesişmektedir. Kararlılığın bir denge noktasından diğerine geçişi (exchange of stability) bu şekilde gerçekleşmektedir.



Şekil 2.15 Lojistik denklem için kararlılığın değişimi.

Lojistik denklem için kararsızlık durumu $\mu > 3$ için geçerlidir, çünkü parametrenin bu değerine kadar her iki denge noktası da karardır. Bu noktada denklemin çözümleri bir süre sonra periyodu 2 olan ve aynı iki değer arasında salınım yapan bir dalgalanma sürecine girer (Şekil 3.9). Bu dalgalanmaya **periyot-2 çevrimi** (period-2 cycle) adı verilir (Sprott, 2003). Sonuç olarak aralıkta bir periyodik çeker bulunmaktadır.



Şekil 2.16 $\mu = 3.2$ için lojistik denklemin periyot-2 çevrimi

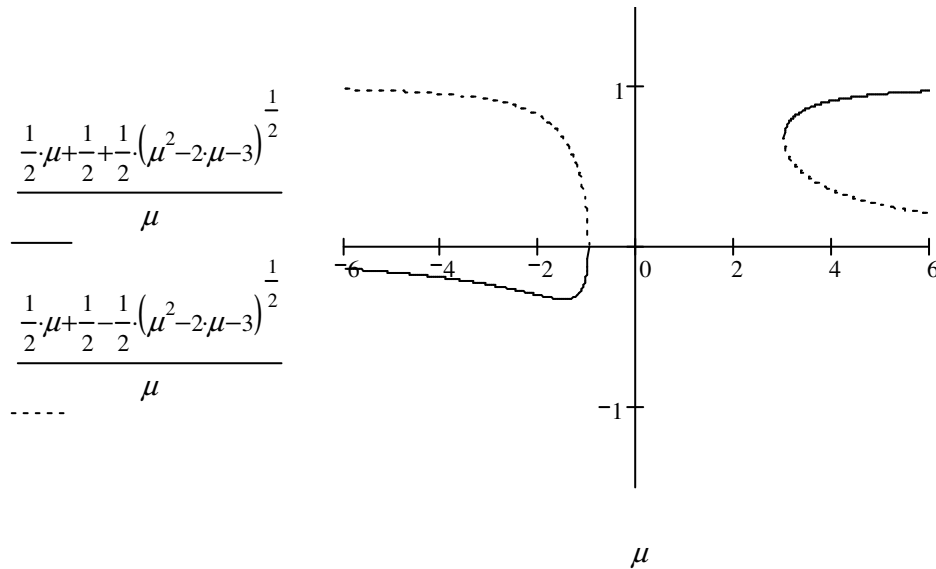
Hangi noktadan sonra periyot-2 çevriminin sonlanacağı sistemin uzun dönem x_n değerinin periyodik çözümü sağlayacak x_{n+2} değerine eşitlenmesi yardımıyla bulunabilir. $x = f^2(x, \mu)$ denkleminin çözüm kümesi şu (2.24)'teki gibidir.

$$0, \frac{-1 + \mu}{\mu}, \frac{\frac{1}{2} \cdot \mu + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (\mu^2 - 2 \cdot \mu - 3)^{\frac{1}{2}}}{\mu}, \frac{\frac{1}{2} \cdot \mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (\mu^2 - 2 \cdot \mu - 3)^{\frac{1}{2}}}{\mu} \quad (2.24)$$

$x_n = f^n(x, \mu)$ denkleminin çözüm kümesi, periyodik hareket yapacak olan yörüngeler için gerekli parametre aralığını verir. Son iki kökün özellikleri incelendiğinde, çözümün özelliklerinin (2,25) ifadesine bağlı olduğu görülür.

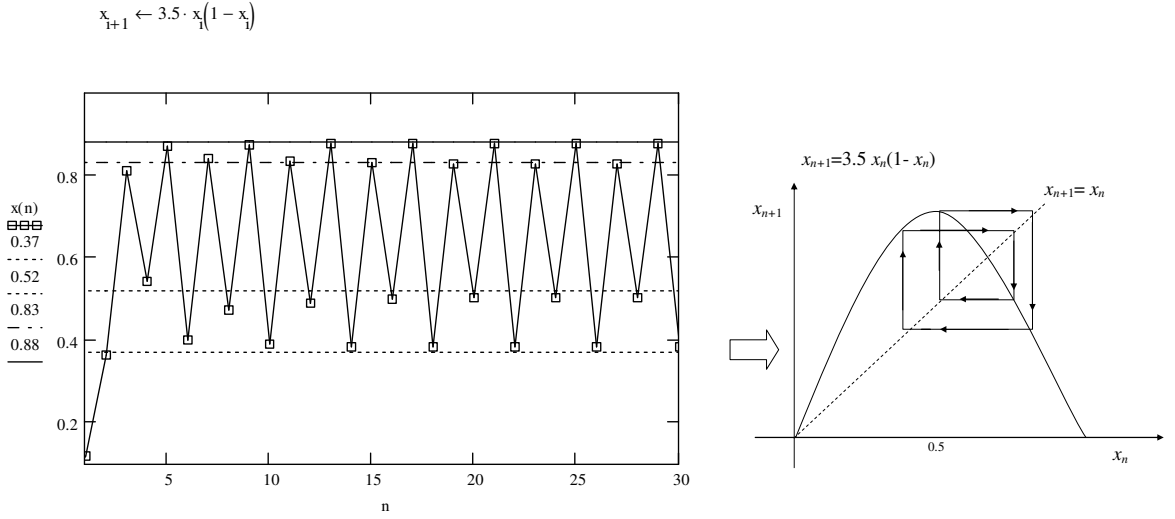
$$\sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3} \quad (2.25)$$

$-1 < \mu < 3$ aralığında ifadenin reel çözümü olmadığından (ve $\mu > 0$), $\mu > 3$ için denklemin iki ayrı kökü bulunur. Bu nedenle sistemin yörüngesi periyodik olarak iki farklı kök arasında dalgalanır.



Şekil 2.17 Periyod-2 için kararlılık grafiği.

Periyot-2 çevrimi belirli bir parametre aralığında varlığını korur ancak kritik değer olan $x = x^*$ noktasında eğrinin eğiminin -1 olduğu durumda için sistem ikinci bir kırılma yaşar. Bu şekilde periyot-2 çevrimi kendi içinde ikinci bir periyodik hareket yapan periyot-4 çevrimine dönüşür.



Şekil 2.18 Periyot-4 yörüngesi.

Bu kırılmalar sistemin tüm geleceği boyunca devam etmektedir. Yörüngeler önce 4'e daha sonra 8'e bölünerek simetrik görünümlü bir yapı sergiler. Yörüngelerin farklı denge noktalarının aynı anda kararlılığını kaybetmesi süreçlerin simetrik olduğunun bir kanıtıdır ve **periyot eşleşme** olarak adlandırılır. Örneğin i. çatallaşma noktası μ_i olmak üzere diğer çatallaşmalar Çizelge 2.1'de gösterilmiştir (Sprott, 2003).

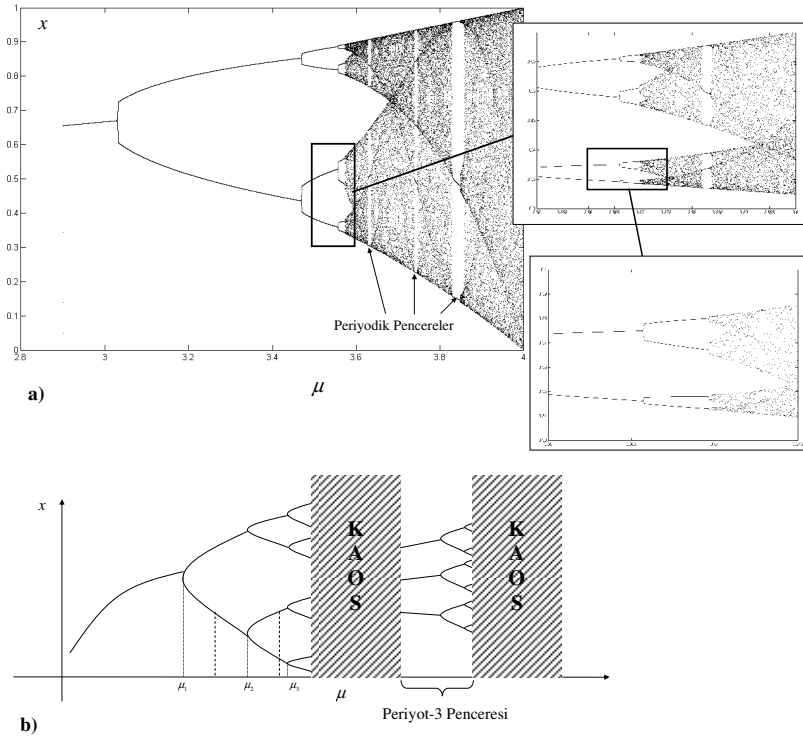
Çizelge 2.1'in son satırında periyot eşleşmesinin bir limiti olduğu görülür, $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i = 3,5699\dots$.

Sürecin analizinde eksik kalan nokta ise sistem parametresinin değişim aralığının $\mu \in [0, 4]$ olmasıdır. Sonuç olarak sistemin $\mu = \mu_\infty$ için davranışı aperiyoiktir (hiçbir zaman kendini tekrarlamaz) ancak kaotik olarak kabul edilmez. $\mu > \mu_\infty$ için ise sistemin **kaotik rejime** girdiği söylenir (Medio, 1993). Örneğin sistemde parametrenin bu değerleri için birbiri ile iç

içe geçmiş nokta bulutları (Şekil 2.19) daha sonra tekrar düzenli bir forma geçerler. Bir süre bu şekilde devam eden noktalar kümesi, bir an sonra tekrar çatallaşarak kaotik bir yapılanma sergiler.

Çizelge 2.1 Lojistik denklemde çatallaşma noktaları ve periyot sayıları (Sprott, 2003).

μ_i	Sınır Değer	Periyot sayısı
μ_3	3,544090	Periyot-8
μ_4	3,564407	Periyot-16
μ_5	3,568759	Periyot-32
μ_6	3,569692	Periyot-64
μ_7	3,569891	Periyot-128
μ_8	3,569934	Periyot-256
μ_9	3,569943	Periyot-512
μ_{10}	3,569945	Periyot-1024
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
μ_∞	3,5699456718	Periyot- ∞



Şekil 2.19 a)Çatallaşma olgusu ve kaos'a geçiş, b) periyot-3 sonrası kaotik rejim (Medio, 1993)

Kaotik süreci takip eden bu düzenli aralıklara **periyodik pencereler** (periodic windows) adı verilir. Bu aralıklarda daha önceki iki periyotlu çatallaşmaların yerini daha yüksek periyotlu çatallaşma bölgeleri yer alır. Lojistik denklem için bu aralıkların en geniş bölgesi $\mu \approx 3.83...$ noktası civarında yer alır. Periyot-3 eşleşmesine sahip bu aralık, $x_{n+3} = f(f(f(x_n, \mu)))$ fonksiyonel eşitliğini sağlayan noktalar kümesinden oluşmaktadır (Baker ve Gollub, 1996, s.81). Benzer şekilde $\mu > 3.569...$ için iki periyot-4, üç periyot-5, beş periyot-6 penceresi bulunur.

3. ZAMAN SERİLERİNDE GÖMME UZAYININ OLUŞTURULMASI VE KAOS'UN TESPİTİ

Çalışmanın uygulama aşamasını destekleyici nitelikteki bu kısım, kaos veya lineer olmayan determinizm içermesi olası zaman serilerinden faz uzayının temsil edecek bir yapay uzayın (gömme uzayı) elde edilmesini ve kaotik süreçlerin temel tanımlayıcı nicelikleri olan Lyapunov üstelleri ile fraktal boyut gibi kavramlarının incelemesini kapsamaktadır.

3.1 Kaotik Çekerler

Karmaşık/kompleks sistemlerin kaotik yapı içermesi muhtemel bir durumdur. Bu bağlamda kaotik sistemler tarafından üretilen zaman serilerinin uzaydaki geometrik özellikleri de son derece detaylı ve ölçülebilir bir kompleks yapıyı bünyesinde barındırmaktadır. Kaotik çeker olarak adlandırılan kavram bu karmaşık sürecin tam merkezinde yer alır ve sistemin gelecekteki bilinmezliğini *deterministik* süreçler vasıtasıyla ortaya serer. Genel olarak tamsayı olmayan boyuta sahiptirler ve '*garip çeker*' olarak adlandırılırlar (Baker ve Gollub, 1996).

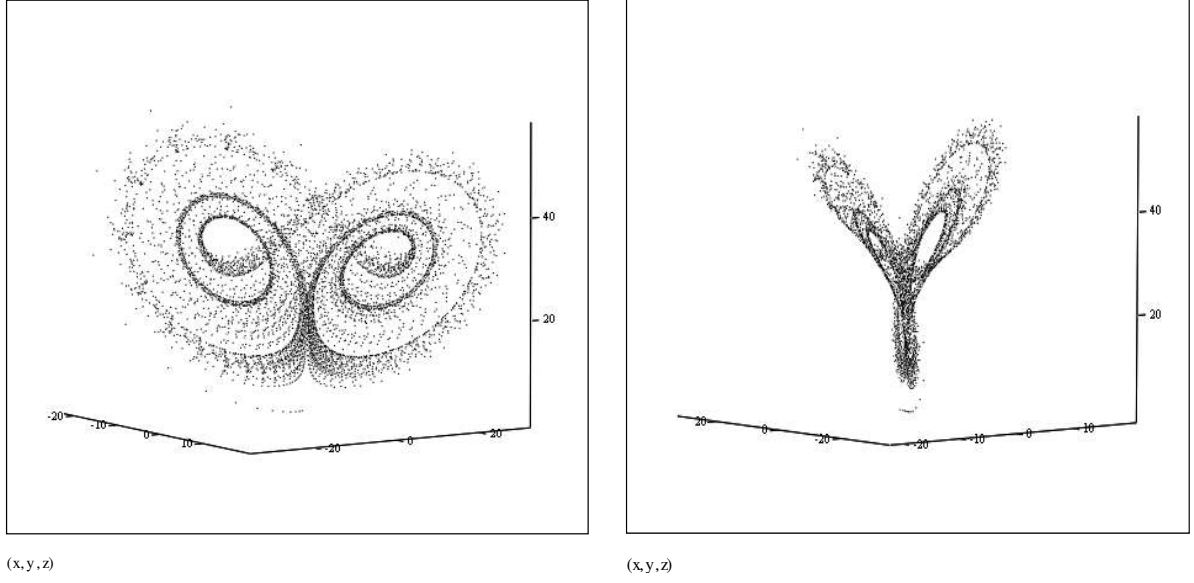
3.2 Lorenz Çekeri

Kaos teorisinin başlangıcı olarak kabul edilen ve 1963 yılında Edward Lorenz tarafından kullanılan ve atmosferik konveksiyon olayının kaotik yapısını basit bir model ile ortaya koyan 'Lorenz denklemi', örnek olarak incelenmiştir. Bu lineer olmayan denklem vasıtasıyla ilk defa, çok basit (eşitliğin sağ tarafı) ve düşük boyutlu (low-dimensional) deterministik sistemlerin, parametrelerinin belirli değerleri için karmaşık dinamik süreçler yaratabileceği anlaşılmıştır (3.1).

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y - x) \\ y' &= rx - y - xz \\ z' &= xy - bz \end{aligned} \quad (3.1)$$

Denklem (3.1)'de $\sigma, r, b > 0$ sistemi yöneten parametrelerdir, σ 'ya *Prandtl*, r 'ye ise *Rayleigh sayısı* adı verilir. Sistem korunumsuzdur, yani zaman içerisinde faz eğrileri arasında

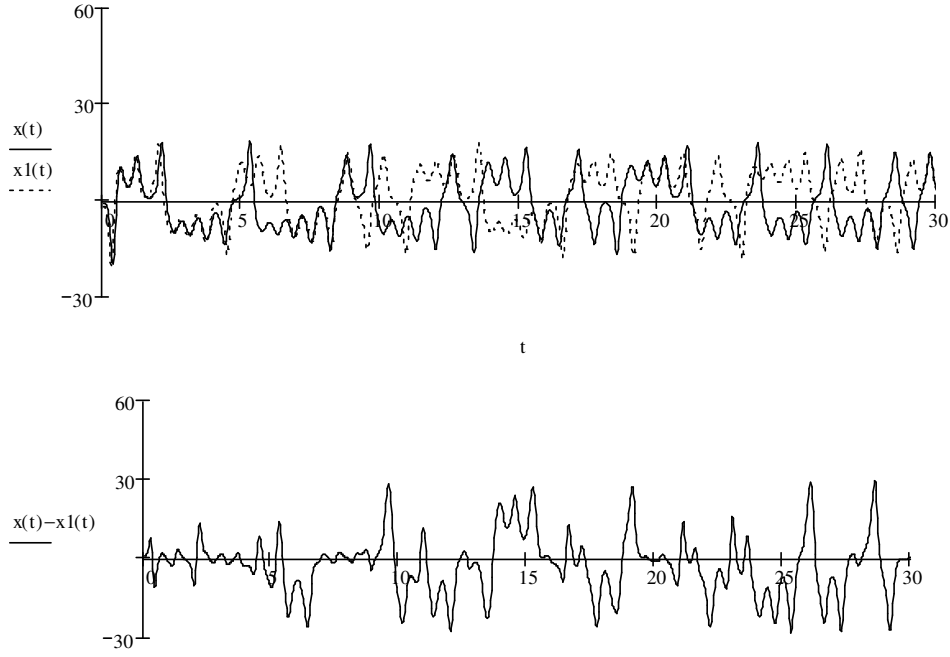
kalan hacim azalır. Ancak sistemde çatallaşma olayına etki eden parametre r 'dir.



Şekil 3.1 Lorenz çekeri için başlangıç şartı $(-1, 0, 1)$ ve $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$ için, (x, y, z) üç boyutlu uzayındaki iki farklı perspektiften saçılım grafikleri.

Şekil 3.1'deki parametre değerleri için denklem sisteminin faz eğrileri denge noktasından uzaklaşma eğilimi içerisinde olurlar. Ancak bu eğriler belirli bir sınırlı alanın dışına çıkamadıkları için tekrar denge noktaları çevresindeki kararsız dönüşlerini sürdürürerek, parametrelerin bazı değerleri için kaotik davranışa sahip olurlar. İşte faz eğrilerinin bu karmaşık hareketi zaman serileri analizindeki temel noktayı oluşturmaktadır. Sistemin yörüngelerine yakından göz atıldığında belirli bir başlangıç şartı için sistem kısa sürede ilk çeker noktaya ulaşmaktadır. Daha sonra yörüngenin bu nokta çevresinde kararsız dönüşler yaparak, diğer çeker noktaya doğru sıçradığı görülür. Uzun bir gözlem sonucunda ortaya, oldukça detaylı geometrik yapıya sahip kaotik bir çeker çıkar.

Bu çalışmanın giriş kısmında ve ilerleyen aşamalarda değinilen başlangıç durumuna hassas bağıllık (BDHB) kavramı, Lorenz denklemleri vasıtasıyla rahatlıkla incelenebilir. Öyle ki üç boyutlu uzayda meydana gelen akış, her üç boyut için ayrı ayrı zaman serileri meydana getirmektedir (örneğin y_0, y_1, y_2). Sistemde verilen herhangi iki ayrı başlangıç şartı için seride bir süre sonra büyük bir değişim gözlenmektedir (Şekil 3.2).



Şekil 3.2 Lorenz sisteminin iki ayrı başlangıç şartı, $(-1, 0, 1)$; $x(t)$ ve başlangıç şartı $(-2, 0, 1)$; $x1(t)$, için çözümleri ve bu çözümlerin farklarını içeren serinin grafiği. Artan uyumsuzluk açıkça görülmektedir.

Eğer korunumsuz bir çeker BDHB sergiliyor ise **garip çeker** adını alır ve kaotik sistemlerin geometrik bir açıklaması olarak değerlendirilir (Strogatz, 1994). Garip terimi bu tip yapıların ayrıntılı geometrik özellikler sergilemesinden (fraktal) dolayı kullanılmaktadır, ancak günümüzde, bu tip çekerlerin geometrik özelliklerinin dinamik özelliklerine (BDHB) göre daha az önem arz ettiği belirtilmektedir (Strogatz, 1994). Garip çekerlerin bazı özellikleri şu şekilde sıralanabilir (Sprott, 2003):

- Zamanın sonsuza gittiği bir durum için limit kümesidir.
- Değişmez (invariant) bir kümedir, garip çeker içinde başlayan herhangi bir yörünge tüm hareketi boyunca kümenin içinde kalır.
- Genellikle sınırlı bir hacim içindedir, çekim havuzu tarafından sınırlandırılmaktadır.
- Fraktaldırlar, kendine-benzerlik yapıları sergilerler.
- Yörüngeler oldukça yoğundur ve uzayı her bir nokta bir yörüngeye çok yakın olacak şekilde kaplarlar.
- Ergodiktir (bkz: Ek 1).
- Genellikle kaotiktir.

Yukarıda belirtilmiş bulunan maddelerin çoğu kaos'un oluşabilmesi için gerekli olan üç temel özelliği vurgulamaktadır. Bunlar (1) yörüngelerin birbirinden hızla ayrılması, (2) dinamik değişkenlerin yarattığı faz eğrilerinin faz uzayının sonlu bir hacminde sınırlı olarak hareket etmesi ve (3) yörüngelerin tekilliğidir (Baker ve Gollup, 1996).

3.3 Kaotik Çekerler ve Zaman Serileri Arasındaki İlişki

Bir deterministik sistem, uzun dönem davranışı tahmin edilemeyen ve rastsal bir süreçle karıştırılabilecek bir sürece yol açabilir mi? Veya doğada, analistin rastsal olarak nitelendirdiği bir yapı, aslında denklemleri kesin olarak tanımlanmış bir deterministik sürecin uzantısı olabilir mi? Kaos içerdiğinden şüphelenilen zaman serilerinin analizindeki temel itici güç buradan kaynaklanmaktadır. Önceki bölümlerde dinamik sistemlerin matematiksel modellerinden, denklem sistemlerinin matematiksel arka planından (faz uzayı, yörüngeler, nitel özellikler) ve bu sistemlerin hangi evrensel koşullar altında (çatallaşmalar) kaos'a sürüklendiğinden kısaca söz edilmiştir. Bu ve bundan sonraki bölümlerde ise, önceden kısımlarda değinilmeyen, kaotik çeker tanımlayıcı özelliklerden ve kaotik zaman serisi verilerinin ne şekilde analiz edilmesi gerektiğinden bahsedilmiştir.

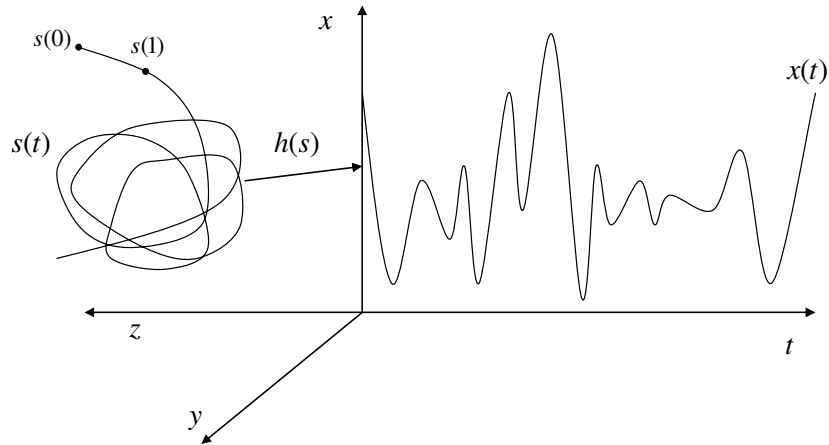
Sistemler çatallaşma denilen ve belirli sınıflara ayrılabilen olaylar ile kaotik rejime geçmektedir. Değişkenlerin parametreye bağlı grafikleri çizildiğinde, örneğin lojistik denklemin çatallaşma diyagramı gibi, sistem periyodik durumlardan kararsız ve iç içe geçmiş periyodik pencereler ile dolu, dışarıdan bakan bir gözlemci için neredeyse 'rastsal' bir sürece geçiş yapmıştır. Bununla beraber bu diyagramı oluşturan ve dışarıdan bakıldığında sürecin rastsal olduğu izlenimini veren yapı tamamen deterministik bir denklemin uzantısıdır. Denklemin dinamik mekanizmasını kesin olarak bilen bir kişi kusursuz bir gelecek öngörüsüne sahip olurken, sistemi yöneten yasaları tam olarak bilmeyen bir kişi için süreç olasılıklıdır ve tahmin hatası çok yüksek olur.

3.3.1 Deneysel Durum (Experimental Situation)

Abarbanel (1993) bir sistemden elde edilen sinyallerin incelenmesi sırasında üç farklı

durumun olabileceğini belirtmektedir. (1) Sistem dinamikleri tam olarak bilinmektedir yani $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(n))$ dir, (2) sistemden daha önce de sinyaller elde edilmiştir böylece iki sinyalin birbirleri ile olan ilişkileri incelenebilir veya (3) elde bulunan sadece belirli bir zaman aralığını kapsayan bir sinyaldir ve elde bulunan tek bilgi budur. Son olarak açıklanan duruma uygun olarak Urbach (2000), deterministik kaos içerdiği düşünülen zaman serilerini incelerken deneysel durum olarak adlandırılan ve analizin temel varsayımlarını içeren şu ilkeleri ele almıştır:

- Ele alınan sistem uzak bir geçmişte bilinmeyen şartlar altında var olmuş ve şu anda bu sistemin başlangıç şartlarının tanımlamış olduğu değişmez bir yörünge üzerinde seyretmektedir,
- Sistemin hareketini belirleyen yasalar (denklemler) bilinmemektedir,
- Sistemin gerçek faz uzayı ve yörüngeleri gözlenememektedir,
- Eldeki tek bilgi, zaman serisi ölçümünün kendisidir.



Şekil 3.3 Üç boyutlu faz uzayında bir $s(t)$ yörüngesi h fonksiyonu vasıtasıyla $x(t)$ çıktısını üretmektedir $x(t) = h(s(t))$ (Urbach, 2000). Kaosun varlığı durumunda, faz uzayının varlığından habersiz bir gözlemci seriyi, rastsal olarak algılayabilir.

Bu şartlar altında dinamik sistemlere zaman serileri üreteçleri olarak bakılabilir. Burada

deterministik sistemi tanımlayan denklemler durumun bir konumdan diğerine geçişini formüle etmektedir. Sonuç olarak sistem durum uzayında bir konumdan diğerine geçerken, sürekli olarak kendi yörüngesini birbirine bağlayan noktalara uğramaktadır. Eğer durum geçişleri zaman içinde sürekli ise bu şemayı en iyi yansıtabilecek model ‘otonom d.d.’dir.

$$\frac{d s(t)}{dt} = F_{\mu}(s(t)) \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

Denklem (3.2)’de $s(t)$ t anındaki durum (veya faz) vektörü ve μ sistem parametresidir. Ortada eğer bir faz uzayı ve yörünge var ise, o halde başlangıç şartı $s(0)$ için $s(t) = f_{\mu}(s(0), t)$ şeklinde bir çözüm mevcuttur. Ancak bu tipteki bir ilişkiyi tanımlayabilmek için eldeki tek veri zaman serisinin kendisidir ($\{x_{t_0}, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}\}$, $t_0 < t_1 < \dots < t_n$). Bu nedenle eşit aralıklarla ölçülmüş olan değerler kümesi sisteminin, eğer var ise, faz uzayındaki akışının bir uzantısı olduğu varsayılabilir (Şekil 3.3). O halde elde bulunan zaman serisi içinde ‘gömülü’ halde bulunan bu faz uzayının evrensel özelliklerinin bilinmesi analiz açısından önem taşımaktadır. Bu gömülü uzayın tekrar ortaya çıkarılması sürecine ‘faz uzayının yeniden inşası’ (FUYİ) adı verilir ve muhtemelen kaotik zaman serileri analizinin temel dayanak noktasıdır.

Faz uzayının var olması halinde bile yapılan ölçümlerin aşırı gürültülü olması, veri eksikliği veya sistemin faz eğrilerinin çok boyutta birbirinden istatistiksel yöntemler ile ayırt edilemez olması bir diğer sorunu, serinin deterministik veya stokastik (olasılıklı) olup olmaması sorununu ortaya çıkarır. Serinin deterministik mi, yoksa stokastik bir sürecin uzantısı olarak mı değerlendirmenin daha doğru olacağı analizin gidişatını belirler, zira zaman serisi olasılıklı/deterministik bir model tarafından çok daha doğru sonuçlara ulaşılıyor olabilir (Kostelich, 1997). Ancak belirtildiği üzere çekerlerin bu tip bir yapının habercisi olan özelliklerinin (Lyapunov üsteli, korelasyon boyutu) eksik veri ve gürültü olması durumundaki güvenilirliği tartışmalıdır (Kim vd., 2001).

3.4 Kaotik Çekerlerin Nicel Belirleyicileri (Quantifiers)

Kaotik bir sistemi tanımlayan nitel özellikler, örneğin faz uzayının yapısı, çeker noktaların kararlılığı ve kararsızlığı vs. sistemin genel davranışı hakkında herhangi bir bilgi vermez. Bu nedenle sistemleri tanımlayacak değişmez nitelikteki evrensel oranlara veya niceliklere gereksinim bulunmaktadır. Bu tip global değerlerin elde edilmesindeki gereklilik birkaç nedene bağlanabilir (Hilborn, 2000):

- Nicel tanımlayıcılar gürültü davranışını kaotik davranıştan ayırmaya yardımcı olur
- Nicel tanımlayıcılar sistemin dinamiklerini modellemek kaç değişkene gereksinim duyulacağını belirlemeye yardımcı olur,
- Kaos'a geçiş şekillerinden hangisinin gözlemlendiğine yönelik bir öngörü verir,
- Tanımlayıcılardaki önemli değişimlerin sistemlerin davranışlarındaki önemli değişimler ile ilişkilidir.

Sonuç olarak sistemin global davranışını tam olarak kavramak için bazı sayısal niceliklerin elde edilmesi gerekmektedir. Kaos'un analiz edilmesi ile ilgili pek çok kaynak farklı başlıklar altında bu niceliklere değinmektedir. Genel olarak bu nicelikler (1) Lyapunov üstelleri, (2) Kolmogorov entropisi, (3) fraktal boyut ve (4) korelasyon boyutu olarak dört farklı başlık altında incelenebilir (Hilborn, 2000). Ayrıca bu niceliklerin birbirleri ile olan matematiksel ilişkileri kaotik sistemlerin evrensel birtakım özelliklerinin anlaşılmasında yararlıdır. Nicelikler anlatılırken (5)-FUYİ sürecinin tamamlandığı varsayılmıştır. Sürecin içeriğinin evrensel niceliklerin yapısına bağlı olması nedeni ile (örneğin fraktal boyut), FUYİ'ye daha ileri aşamalarda değinilmiştir.

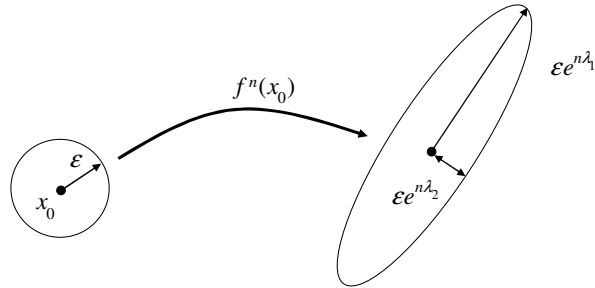
3.4.1 Lyapunov Üstelleri

Kaotik bir sistemin temel özelliklerinden biri olan BDHB, sistemin faz uzayındaki yörüngelerin birbirlerinden üstel hızla ayrılmasına yol açmaktadır. Bu durum sistemin geleceğinin tahmin edilebilirliğini sınırlar, uzun dönem tahminler teorik olarak da imkânsızdır. Uzaydaki yörüngelerin birbirlerinden uzaklaşmalarının matematiksel bir ifadesi olarak Lyapunov üsteli adı verilen nicel bir ölçüt kullanılır. n boyutlu bir sistem için n adet Lyapunov üsteli bulunmaktadır ve her biri faz uzayının bir ana eksenindeki (doğrultusundaki)

üstel ayrılmayı ölçer. Ancak bunlardan en önemlisi en büyük üsteldir ve pozitif karakteri kaotik yapının varlığı için güçlü bir kanıttır.

Dinamik bir sistemin faz eğrilerinde eğer BDHB gözleniyor ise, başlangıç şartları $x, x + \varepsilon$ için iki sistemin faz eğrileri birbirlerinden üstel olarak ayrılmaktadır. Ayrılmanın üstel olduğu bir durumda, örneğin $x_{n+1} = f(x_n)$ şeklindeki tek boyutlu bir durum göz önüne alınırsa, n iterasyonun sonunda bu ıraksama yaklaşık olarak $\varepsilon(n) = \varepsilon e^{\lambda n}$ ile karakterize edilir. Burada λ **Lyapunov üsteli** olarak adlandırılır ve ortalama ıraksamanın bir ölçütüdür. Tek boyutlu harita için n . iterasyondan sonra iki yörünge arasındaki fark $f^n(x + \varepsilon) - f^n(x) = \varepsilon e^{n\lambda}$ veya (3.3)'deki gibi gösterilebilir.

$$\ln \left[\frac{f^n(x + \varepsilon) - f^n(x)}{\varepsilon} \right] = n\lambda \quad (3.3)$$



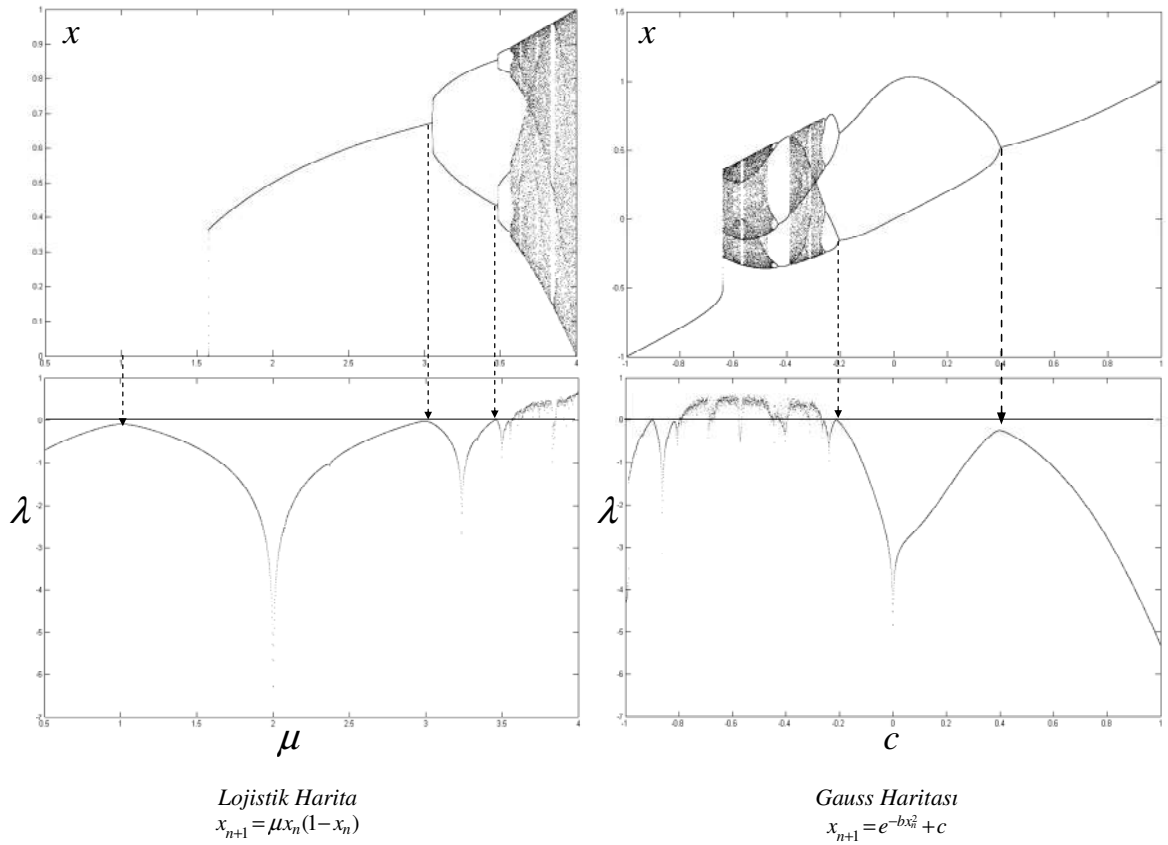
Şekil 3.4 Sonsuz küçük bir alanın n iterasyon sonucunda uzayda aldığı şekil. İki farklı üstel birbirine dik olan ana eksenlerdeki (principal axis) ayrılmanın düzeyini ölçmektedir.

Son denklemde $\varepsilon \rightarrow \infty$ olduğunda, yerel Lyapunov üsteli $\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n}{dx} \right|$ olarak elde edilir.

Global bir Lyapunov üsteli için ise $f' = df/dx$ olmak üzere (3.4)'daki yaklaşım geçerlidir.

$$(f^n(x))' = (f^{n-1})' \cdot [f' \circ f^{n-1}(x)] \rightarrow \lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)| \quad (3.4)$$

(Sprott, 2000; Baker ve Gollup, 1996). Bu tek boyutta Lyapunov üstelinin her bir noktadaki türevlerin doğal logaritmalarının ortalaması olduğu bilgisini verir. Burada λ değeri üstel fonksiyon parametresi olduğundan, yörüngelerin birbirlerinden üstel hızla uzaklaştığını söylemek için $\lambda > 0$ olmalıdır. Örneğin lojistik ve gauss haritaları için (3.4) eşitliği yardımıyla hesaplanan λ değerleri Şekil 3.5’de verilmiştir.



Şekil 3.5 Lojistik ve Gauss ($b=7,18$) haritalarının ($x(0)=0,15$) başlangıç koşulu ile oluşturulmuş çatallaşma diyagramları ve aynı diyagramdan elde edilen Lyapunov üstellerinin saçılım grafiği.

Şekil 3.5’den de anlaşılacağı üzere, sistemlerde ilk çatallaşma noktaları civarında yörüngelerin birbirlerinden hızla ayrılması söz konusu olduğundan üsteller sıfıra oldukça yaklaşımaktadır. Çatallaşmaların kaotik rejime geçişinden sonraki ilk noktada $\lambda > 0$

olmaktadır. Kaotik rejimdeki periyodik pencereler civarında üstelin değerinde ani düşüşler meydana gelmekte ve tekrar negatif değer almaktadır, fakat bu rejim boyunca üstelin genellikle sıfırdan büyük olduğu söylenebilir. Eğer kesikli bir dinamik sistemde tüm Lyapunov üstelleri negatif değerli ise, o halde sistemde ya bir periyodik yörünge ya da denge noktası vardır.

3.4.1.1 En Büyük Lyapunov Üstelinin Elde Edilmesi

Sistemlerin sürekli olması ve boyut sayısının artması durumunda ($n > 3$) analizlerde basit varsayımlar yetersiz kalmaktadır. Sistemlerin sürekli olması durumunda yörüngelerin R^n 'in alt kümesi olan bir cismin üzerinde (manifold) tanjant uzayı oluşturduğu varsayılır. Bu durumda çok boyutlu faz uzayında sistemin dinamiklerinin kaotik olması halinde, yörüngeler tarafından sınırlanmış olan bir sonsuz küçük yarıçapa sahip bir küre ele alınır. Küre, pozitif üstellerin olduğu ana eksenlerde genişleme, negatif üstellerin bulunduğu ana eksenlerde ise büzülme hareketi sergilemektedir. Seçilen hacmin deformasyonu sonucunda ortaya çıkan elipsoidin en uzun ekseni, faz akışının en kararsız yönünü gösterir ve maksimum değerli Lyapunov üsteli tarafından tanımlanır. Sistemdeki üsteller, sistemdeki kaotik veya dengeli hareketin kesin bir kanıtını oluşturmaktadır. Buna göre örneğin dört boyutlu bir sistemden elde edilen üstellerin işaretleri ve sistemin karakteri arasındaki ilişki Çizelge 3.1'deki gibi olur.

Çizelge 3.1 Dört boyutlu bir faz akışında çekerlerin özellikleri (Sprott, 2003)

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	Çeker	Boyut
-	-	-	-	Denge Noktası	0
0	-	-	-	Limit Çevrim	1
0	0	-	-	T^2 -Torus	2
0	0	0	-	T^3 -Torus	3
+	0	-	-	Garip (Kaotik)	>2
+	+	0	-	Garip (Hiper Kaotik)	>3

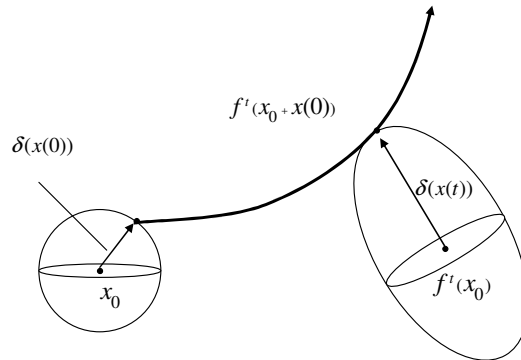
Eğer seçilen kürenin ilk yarıçapı $l(0)$ ise, bir t anı sonunda i . ana eksenin uzunluğu $l_i(t)$ olmak üzere eksene ait i . üstel (3.5)'deki gibi hesaplanır

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{l_i(t)}{l(0)}. \quad (3.5)$$

Bu üsteller kendi aralarında $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \dots$ şeklinde bir sıralamaya sahiptir. Üstellerin tanımladığı hacim V_0 gibi çok küçük bir yarıçapın hareketini belirleyeceğinden, örneğin seçilen n boyutlu hacim $V_t = V_0 e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} \dots e^{\lambda_n t}$ ile orantılı olur. Bu durumda üstellerin toplamı $\sum_{i=0}^n \lambda_i$ seçilen hacimdeki değişmeyi tanımlar (Abarbanel vd., 1993; Baker ve Gollup, 1996).

Sistem korunumsuz ise hacim sıfıra yaklaşacağından, $\sum_{i=0}^n \lambda_i < 0$ koşulu sağlanır. Korunumsuz sistemler için eğer bir üstel pozitif ise bunu dengelemek için kalan üstellerden en az biri mutlaka negatif olur. Sistemde noktasal bir çeker yok ise en büyük üstel $\lambda_{\max} \geq 0$ dır.

n boyutlu bir faz uzayında her bir λ_i değerinin bulunması için sistemde yukarıda sözü edilen başlangıç merkez noktası x_0 olan n -boyutlu bir küre $B(x_0)$ ele alınır. Burada kürenin ilk yarıçapı için bir vektör $\delta x(0)$ bulunmaktadır ve t anı sonunda merkez $B(f^t(x_0))$ konumuna gelirken, bu vektör $\delta x(t)$ şekline dönüşür (Şekil 3.6).



Şekil 3.6: Faz uzayında yörüngeler tarafından sınırlanan hacmin gelecekte aldığı durum (Urbach, 2000).

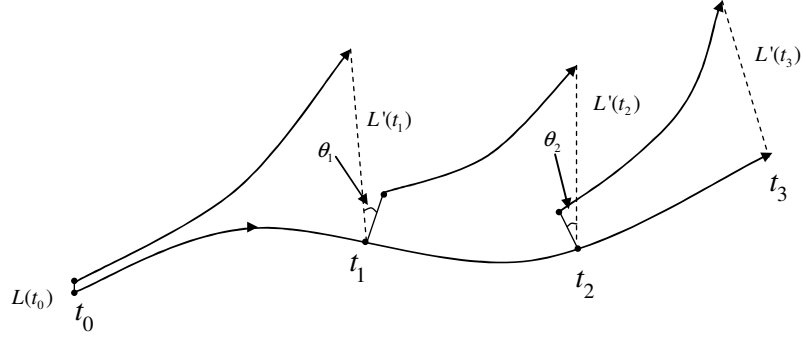
Yüzey üzerindeki noktaların merkeze çok yakın olması nedeni ile yörüngeler lineerleştirilmiş denklem (3.6) vasıtasıyla teğet uzayından yararlanarak tanımlanır. Burada $D_{x_0} f^t$, f^t 'nin x_0 noktasında hesaplanan Jakobyen matrisidir.

$$\delta x(t) = f^t[x_0 + \delta x(0)] - f^t[x_0] = D_{x_0} f^t \cdot \delta x(0); \quad D_{x_0} f^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^t_{(1)}}{\partial x_{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f^t_{(1)}}{\partial x_{(n)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^t_{(n)}}{\partial x_{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f^t_{(n)}}{\partial x_{(n)}} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Buradan sistemdeki ana eksenlerdeki değişimin Jakobyen matrisi tarafından yönetildiği sonucuna varılabilir, yani üsteller ile tanjant vektörlerinin değişim düzeyi arasında bir ilişki söz konusudur (Urbach, 2000).

3.4.1.2 Algoritmalar

Lyapunov üstellerinin bulunmasındaki asıl sorun FUYİ sürecinin tamamlanması ve Jakobyen $D_x F$ 'in her bir yörünge noktası yakınında nümerik olarak hesaplanmasıdır. İncelenen sistem *deneyisel durum* şartlarını sağlayacağından, eldeki zaman serisini üretmiş sistemin lineer olmayan denklemleri bilinmemektedir. Literatürdeki yaklaşımlardan ilkinde (1) faz uzayındaki kısmi türevlerin tahmin edilebilmesi için çeker üzerindeki her yörünge noktasının komşuları ile olan ilişkileri dikkate alınır. Bu tip bir yaklaşımda temel amaç seçilen $x(k)$ değerlerine çok yakın komşuluktaki noktalar kümesinin $x(k+1)$ civarındaki konumlarının görüntüsünü sağlayabilecek tahmini bir dönüşüm bulmaktır. Buna örnek olarak Sano ve Sawada'nın (1985) çalışması verilebilir. Jakobyen değerlerinin bulunmasına yönelik olarak ikinci yaklaşım (2) iki yörünge arasındaki ufak farkların ve bu yörüngeler arasındaki alanın belirli bir süre izlenmesidir. Bu yolla seçilen yörüngelerin sınırladığı ufak alt hacimler Lyapunov üstellerini vermektedir. Yöntemlerin $\lambda_{\max}$ için sağlıklı sonuç verdiği belirtilmektedir Örnek olarak Wolf algoritması verilebilir (Abarbanel,1993; Kostelich,1997). Ancak FUYİ süreci sonunda başarılı bir modelleme yapılsa bile, elde edilen Jakobyen değerlerinin gerçek dinamikler ile örtüştüğü kesin olarak söylenemez (Urbach,2000,s.191).



Şekil 3.7 Wolf algoritmasında yakın yörüngelerin seçilmesi (Urbach, 2000).

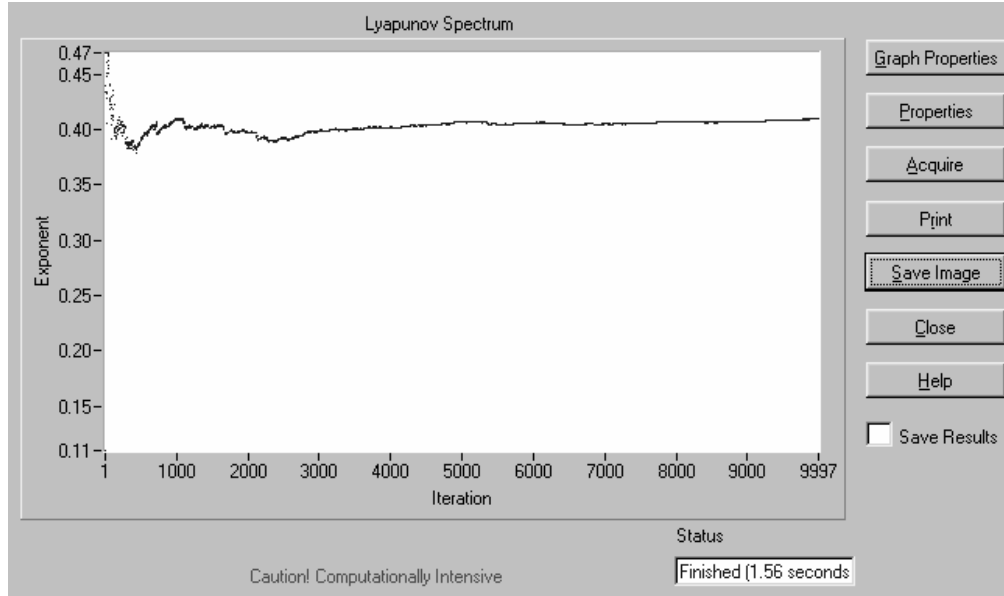
İkinci tip yaklaşıma Wolf algoritması örnek verilebilir. Ancak yöntem veri sayısının az olduğu zaman serilerinde negatif ve küçük değerli pozitif üsteller için güvenilir değildir (Kantz ve Schreiber, 1997). Yöntem, yakın bir yörüngelerin zaman ilerledikçe ayrılma düzeyinin izlenmesi mantığına dayanmaktadır. En büyük Lyapunov üsteli δ_i tanjant vektörlerindeki büyümenin ölçülmesi ile elde edilir.

İki nokta arasındaki bir noktada başlangıç tanjant vektörü uzunluğunun $L(t_{i-1}) = \delta_i(t_{i-1})$ çok büyük olduğu, örneğin $L'(t_{i-1}) = \delta_i^*(t_{i-1})$ 'de, referans olan yörüngeden hem $L(t_i) = \delta_{i+1}(t_i)$ uzunluğunu hem de faz uzayında gerçek ve yer değiştirme vektörleri arasındaki açığı minimum kılacak yeni bir nokta seçilir. Sistemdeki ayrılmanın bir ölçütü olarak $\ln(\|L'(t_1)\|/\|L(t_0)\|)/(t_1 - t_0)$ niceliği kullanılabilir. Nokta seçilimi sürecinin n kez tekrar edilmesi sonucunda sisteme ait en büyük Lyapunov üsteli (3.7) şeklinde verilir.

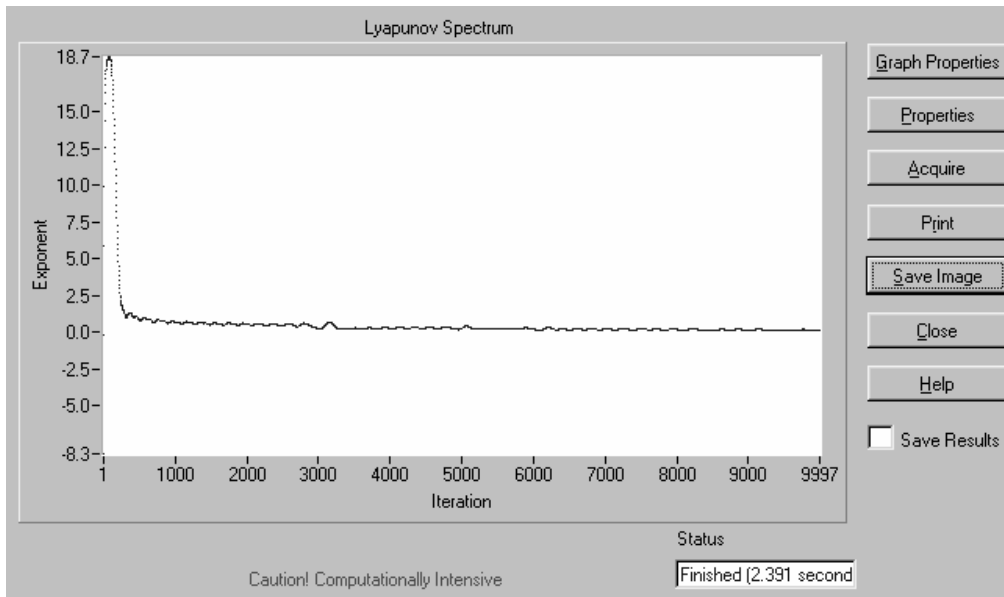
$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \left[\frac{(t_{i+1} - t_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)} \right] \left[\frac{\ln(\|L'(t_{i+1})\|/\|L(t_i)\|)}{(t_{i+1} - t_i)} \right] \right\} \quad (3.7)$$

(3.7)'de $\sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = t_n - t_1$ olduğundan, $\lambda_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \ln(\|L'(t_{i+1})\| / \|L(t_i)\|)}{(t_n - t_1)}$ dir (Baker ve

Gollup,1996). NDT programı kullanılarak (Wolf algoritması) Henon haritasından ve Lorenz sisteminden elde edilen en büyük üsteller Şekil 3.8 ve Şekil 3.9'de gösterilmiştir.



Şekil 3.8 Henon haritasından ($x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + by_n$; $y_{n+1} = x_n$) elde edilen ortalama Lyapunov üstelli, $\lambda_{\max} = 0.42$



Şekil 3.9 Lorenz sisteminden elde edilen ortalama Lyapunov üstelleri, $\lambda_{\max} = 1.5$

En büyük üstelin hesaplanmasına yönelik olan diğer bir yaklaşım ‘Rosenstein’ metodudur. Metod uzaydaki yakın yörüngelerdeki üstel ayrılmayı direkt olarak ölçer. Uzaydaki yörüngelerin bir dolanım hareketi yaptığı düşünülürse gömme uzayı vektörü $\mathbf{s}_n$ ’e çok yakın daha önce ziyaret edilen bir $\mathbf{s}_n$ noktasının olduğu düşünülebilir. Böyle bir durumda her iki vektör arasındaki direkt uzaklık $\Delta_0 = \mathbf{s}_n - \mathbf{s}_{n'}$, başlangıç şartlarındaki çok ufak bir değişim veya hata olarak alınır. Bu hatanın gelecek durumlar için üstel olarak büyümesi beklenir. O halde zaman serisinin gelecekteki bir durumuna yönelik olarak $\Delta_t = \mathbf{s}_{n+t} - \mathbf{s}_{n'+t}$ uzaklığının başlangıçta seçilen uzaklığa göre üstel büyümesi $|\Delta_t| = \Delta_0 e^{\lambda t}$ şeklinde gösterilir. Sonuç olarak burada λ en büyük Lyapunov üstelidir. Gözleme dayalı serilerde birçok etki nedeniyle bu hesaplamalarda dalgalanmalar yaşanır. Bunun nedeni çekerin her yerinde aynı üstel ayrılmanın yaşanmamasıdır. Bu nedenle üstelin değeri, yerel ayrılma düzeylerinin bir ortalaması alınarak hesaplanır (3.8).

$$Z(\varepsilon, d_g, t) = \left\langle \ln \left(\frac{1}{|U_n|} \right) \sum_{\mathbf{s}_n \in U_n} \|\mathbf{s}_{n+t} - \mathbf{s}_{n'+t}\| \right\rangle_n \quad (3.8)$$

U_n kümesi $\mathbf{s}_n$ ’in ε komşuluğundaki noktaları kapsar. Rosenstein algoritması seçilen referans noktaya en yakın noktanın hareketlerini izlemektedir. Mantıklı bir ε değeri için elde edilen $Z(\varepsilon, d_g, t) - t$ değerleri gömme boyutunun belirli bir değerinden sonra, $d_g > m$, lineer bir artış gösterir. Bu lineer aralıktan ölçülen eğim Lyapunov üstelinin tahmini bir değeri olarak alınır. ε değerinin küçük alınması Z ’e ait lineer aralığı genişletir. Ancak düşük değerler için komşu nokta sayılarındaki azalmanın izlenmesi gerekir. Yakın komşuluğun en düşük değerinin 10 olarak alınması uygundur (Kantz ve Schreiber, 1997). Hesaplama için alınacak referans nokta sayısı 500 civarında olması yeterlidir. Ancak bu çalışmanın uygulama kısmında kullanılan programın girdi değeri olarak bu parametreye ihtiyaç duyulmamaktadır.

3.4.2 Entropi

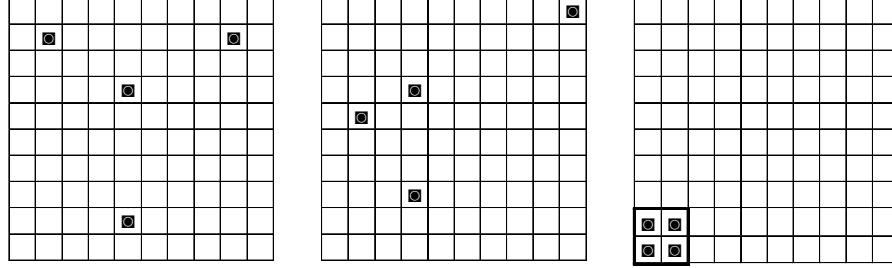
Entropinin temel tanımı olarak “gözlenen bir sistemdeki erişilebilir durumların sayısı”

verilmektedir (Hilborn, 2000). Herhangi bir sistemdeki hareket (dinamikler), sisteme ait olan ögelerin (veya cisimlerin) uzaydaki konumlarını ve belirli alanlarda bulunma olasılıklarını etkilemektedir. Örneğin bir kap içine eşit sayıda siyah ve beyaz renkli parçacıklar atılsın ve bir cihaz bu parçacıkların konumunu rasgele olarak ve hızlı bir biçimde değiştirsin. Dışarıdan bakan bir gözlemci bu kaptaki başlangıçta altta beyaz üstte siyah olarak düzenli bir formda bulunan parçacıkları izlemeye başlar. Bir zaman sonra, beyaz renkli alanların içinde siyah ve siyah renkli alanların içinde beyaz öbekleri bulunduğu, ancak ilk duruma nazaran daha homojen bir durum gözlenir. Makinenin hızına bağlı olarak belirli bir süre sonra artık siyah ve beyaz alanlar diye tabir edilecek öbeklenmeler ortadan kalkar ve sistem siyah ve beyazın tekdüze dağılımına sahip bir ‘denge’ durumuna erişir. Parçacıkların uzaydaki konumu makine tarafından hala değiştirilmektedir, ancak dışarıdan bakıldığında sistem hala durağan gözükmemektedir (dağılım aynı). Sistemde tüm konum değişimleri olasılığa bağlı olduğundan, çok küçük bir ihtimal de olsa parçacıklar başlangıç konfigürasyonuna, yani iki ayrı renk tabakasına sahip olabilirler. Fakat bu durum oluştuğundan hemen sonra parçacık konumları tekrar değişir ve makine yeterince hızlı ise sistem kısa sürede dengeye ulaşır. Parçacık sayısı çok fazla ise olası durumların sayısı kombinasyonlardan dolayı büyür ve sistemin düzenli başlangıç formuna ulaşma olasılığı neredeyse imkansızdır, ve olağanüstü uzunlukta olayların sırasıyla oluşmasına bağlıdır. Sonuç olarak sistemde gözlenmesi beklenen ortalama durum tekdüze bir dağılımdır (homojen bir karışım).

Yukarıda açıklanan olaydan anlaşılacağı üzere parçacıkların konumları ve hangi hızla sistemin dengeye geleceği makinenin hızından daha çok, parçacıkların uzayda alabilecekleri olası konumların sayısı ile ilişkilidir. Parçacıkların hareket edebilecekleri alanların sayısı az yani düşük olasılıklı bir durumda organize olmuşlar ise sistem düşük entropili, tersinde ise yüksek entropili olarak adlandırılır. Eğer sistem düzensiz durumların yüksek olasılıklı bir birleşiminde ise yine yüksek entropili olarak düşünülür. Termodinamiğin ikinci kanunu gereğince fiziksel entropi sürekli artmaktadır. Fiziksel sistemler erişilebilir durum sayısının daha fazla olduğu süreçlere doğru evrilirler. Sonuç olarak sistemler sürekli bir düzensizleşme (bozulma) süreci içindedir.

Düzen ve *düzensizlik* kavramları ele alındığında, düzenli olma (olmama) durumunun matematiksel olarak açıklanması önem kazanır. ‘Sıcaklık’ denildiğinde ölçülebilir ve karşılaştırılabilir bir durumdan söz edilmesine rağmen, ‘düzen’ kavramı sözel bir söylemi

bünyesinde barındırmaktadır. Durumu örneklendirmek için kapalı bir yüzey üzerinde dört adet parçacığın alabileceği konumların olasılığı incelenmiştir (Şekil 3.10).



Şekil 3.10: Düzenli ve düzensiz durumlar.

Şekildeki ilk iki gösterimde parçacıklar, birbirlerinden bağımsız olarak, sırasıyla 100 adet hücreye rastsal şekilde dağıtılmaktadır. Her iki durumda da ilk parçacık konumlandıktan sonra 99 olasılık kalmakta ve dört parçacığın aynı yolla konumlandırmak için $T=100.99.98.97$ olası durum söz konusu olmaktadır. Ancak başlangıç için bir koşul konduğunda, örneğin daha düzenli bir form için dört parçacığın daha önceden belirlenmiş bir alt alanda sınırlanmış olması gibi, olası durumların sayısı $T=4.3.2.1=24$ olmaktadır. Sonuç olarak küme içerisinde bir alt alan tanımlamak, yani olabilecek durumların sayısını azaltarak düzenli bir form yaratmak olası durumların sayısını azaltacağından, entropi azalır.

Shannon (1948) belirli bir durumun sahip olduğu bilgi miktarının ölçülmesine yönelik olarak bir S niceliğinin bulunduğunu belirtmektedir. Buna göre gerçekleşme olasılıkları $p_1, \dots, p_n$ olan bir küme için sonuçların ne ‘miktarda’ belirsiz olduğuna yönelik bir nicelik vardır. Eğer $S(p_1, \dots, p_n)$ şeklinde bir nicelik var ise, değişik S niceliklerinin ağırlıklı toplamalarının ortalaması şeklinde verilebilmektedir. S entropiyi simgelemek üzere, eşit olasılıklı olaylar göz önüne alınsın ve $S\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = A(n)$ olsun. Bu halde s^m adet eşit olasılıklı olaylardan birinin seçilmesi durumundaki bilgi niceliği, s eşit olasılıklı durumdan m tanesinin seçilmesi şeklindeki niceliğe denktir, $A(s^m) = mA(s)$ (Shannon, 1948). $A(t^m) = mA(t)$ şeklinde, (3.9)’u sağlayacak t seçilebilir.

$$s^m \leq t^n \leq s^{m+1} \rightarrow \frac{m}{n} \leq \frac{\log t}{\log s} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \quad (3.9)$$

Bu durumda tanımdan ve (3.9)'dan (3.10) elde edilir.

$$mA(s) \leq nA(t) \leq (m+1)A(s) \rightarrow \frac{m}{n} \leq \frac{A(t)}{A(s)} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \quad (3.10)$$

.(3.9) ve (3.10)'dan (3.11) genel entropi formülü elde edilir (Ω sabit).

$$\left| \frac{A(t)}{A(s)} - \frac{\log t}{\log s} \right| \leq \varepsilon \rightarrow A(t) = \Omega \log t \quad (3.11)$$

Shannon (1948), olası durumların her seçimde farklı olması durumunda $p_i = n_i / \sum n_i$, entropinin (3.12) şeklinde ifade edilebileceğini belirtmektedir (π sabit).

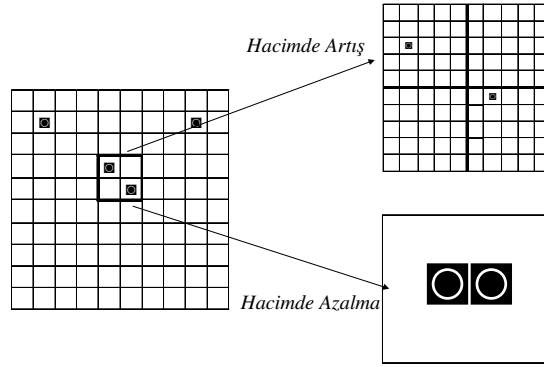
$$S = -\pi \sum p_i \log p_i \text{ (Shannon Entropisi)} \quad (3.12)$$

Bu eşitlik bir sistemdeki düzensizliğin miktarını veya sistemin o andaki durumunu tanımlayabilmek için gerekli olan minimum bilgi miktarını veren bir sayısal niceliktir. Doğal logaritma alındığında, sistemdeki durumların meydana gelme olasılıkları aynı ise ($p_i = (1/n)$), $S = \sum_{i=1}^N (1/n) \ln(1/n)$, bu durumda entropi maksimum değeri $S = \ln n$ alır. Eğer durum, tüm uzayın her hangi bir bölgesinde kesinlikle gerçekleşecekse, olasılık $p_i = (1)$ olacağından sistemi tanımlamak için tüm bilgi elde olacaktır bu nedenle $S = 0$ 'dır .

3.4.3 Kaotik Sistemler Açısından Entropinin Önemi: Kolmogorov-Sinai Entropisi

Entropinin kaotik sistemler açısından önemi bilgi kavramına dayanmaktadır. Şekil 3.11'deki ilk karenin bir fiziksel sistem olduğu varsayılın ve çok güçlü bir mikroskop ile bu olası durumların sayısı tespit edilmeye çalışılsın. Bu durumda teknik imkânların elverdiği büyütme düzeyi seviyesinde yeni olası hücreler belirlenecektir. Olası durumların sayısının artması entropiyi de arttırır $S_{ilk} > S_{son}$, yani sistemi tanımlamak için gereken minimum bilgi miktarı artmıştır. Sonuç olarak bilgi üretilmiştir. Sistemin daha ayrıntılı bir fotoğrafının alınması ve daha önceden tanımlanmış olan olabilecek tüm olası durum hücrelerinin boyutlarındaki daralma (Şekil 3.11) çözünürlük artışı olarak adlandırılır.

Açıklamalar faz uzayının yorumunda da kullanılabilir. Eğer sistem korunumsuz ise, seçilen bir ilk hacim uzayda büzülüp ölçümü sıfıra yaklaşacağından önceki durumun tersine bilgi yok olmaktadır. Burada sistemin iterasyonu sonucunda, son durumdan başlangıç bilgisine erişmenin zorlaştığı sonucuna varılır.



Şekil 3.11 Farklı davranışlardaki iki sistem: bilgi yaratılmakta veya yok olmaktadır.

Bu noktada vurgulanması gereken entropinin sayısal değerinin tek başına bir anlam ifade etmeyeceğidir. Önemli olan iki durum arasındaki entropi değişiminin sistemde yaratacağı etkilerin anlaşılmasıdır. $X = X(t) = \{x_i\}$, t anında bir sistemin ölçülebilir olası durumlarını versin ve $X(t)$ 'nin olasılık dağılımı $P_X(x_i)$ olsun. Aynı şekilde $Y = Y(t) = \{y_i\} = X(t+T)$

benzer şekilde tanımlansın. $OB(X, Y)$ 'ye $(Y, X) = (X(t+T), X(t)) = \{[y_j, x_i]\}$ 'deki **ortak bilgi fonksiyonu** adı verilir (mutual information) ve (4.23)'deki gibi gösterilir (X, Y bağımsız) (Urbach, 2000).

$$OB(X, Y) = \sum_{i,j} P_{XY}(y_j, x_i) \log \frac{P_{XY}(y_j, x_i)}{P_{XY}(y_j) P_{XY}(x_i)} \quad (3.13)$$

(3.13) fonksiyonel eşitliği, $X(t+T)$ 'nin $X(t)$ 'ye olan bağıllığının bir ölçütüdür. Örneğin periyodik veya yarı-periyodik sistemde iki başlangıç durumu seçildiğinde entropi sıfır olmaz, ancak her noktada ölçüm sabit sonuç verir, yani entropi farkı sıfırdır (Hilborn, 2000).

Sistemin hareketi sonucunda meydana gelen entropi değişimi, 1958 yılında Kolmogorov tarafından verilen ve 1959'da Sinai tarafından geliştirilen K-S entropisi (Kolmogorov-Sinai) tarafından karakterize edilir. K-S entropisi, n adet zaman dilimi sonrasında sistem $t = n\tau$ 'dan $t = (n+1)\tau$ 'ya ulaştığında entropide meydana gelen değişimi gösterir ve $K_n = \frac{1}{\tau}(S_{n+1} - S_n)$ olarak tanımlanır. Tüm bir çeker karakterize eden bir nicelik olarak ortalama değeri ve genel formülü (3.14)'deki gibi verilir (Hilborn, 2000).

$$\begin{aligned} K &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{n=0}^{N-1} (S_{n+1} - S_n) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} (S_N - S_0) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} (S_N - S_0) \end{aligned} \quad (3.14)$$

(3.14)'deki L değeri uzayın parçalara ayrılması sonucunda oluşan birim hacimlerin boyutlarını sıfıra yaklaştırmak için kullanılmaktadır. Bir sistemin entropisi ile Lyapunov üstelleri birbirine fonksiyonel olarak bağlıdır (Urbach, 2000). Benzer şekilde, bir sistemin K-S entropisinin pozitif değerli Lyapunov üstellerinin toplamı şeklinde yazılabileceği kanıtlanmıştır (Abarbanel, 1993; Baker ve Gollup, 1996).

$$K \leq \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i. \quad (3.15)$$

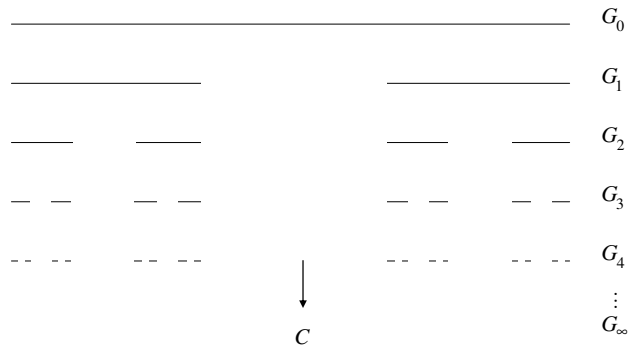
Bu şekilde sistemin K-S entropisi hesaplanarak bir sistemin davranışı hakkında genel bir kanıya varılabilmektedir. Eğer $K = 0$ ise sistem düzenli hareket etmektedir (denge noktası, limit çevrim, torus), faz uzayında seçilen birim hücrelerden geçen yörüngeler bir süre sonra birbirlerini yakalar ve sistemin bilgi üretemeyeceği bir tekrar süreci başlar. Eğer $K > 0$ ise sistem kaotiktir ve eğer $K = \infty$ ise sistem raststaldır. Rastsal bir sistemde yörünge kümesi uzayda seçilen herhangi bir hacime çok düşük olasılıkla uğrarlar, örneğin $p_i = 1/N$ gibi. Bu durumda $S_n = \ln N$ değeri N ile birlikte artar. Bu tanımlamada rastsallığın doğasıyla ilgili temel bir öngörü sağlamaktadır. Görüleceği üzere sistemin kaotik olması için mutlaka bir üstelin pozitif değerli olması gerekmektedir. Sistemin tek bir pozitif λ_+ tarafından karakterize edilmesi durumunda L ana eksen yönündeki bir genişleme ise, $L = \varepsilon e^{\lambda_+ t} = \varepsilon e^{Kt}$ yazılabilir. Buradan $t \sim (1/K) \ln(L/\varepsilon)$ olduğu bulunur. ε hatasındaki bir iyileşme $\varepsilon' < \varepsilon$, tahmin zamanında logaritmik bir artma yaratmaktadır, $t' - t = (1/K) \log(\varepsilon'/\varepsilon)$. Bu nedenle kaotik zaman serileri sadece kısa-dönem tahminlere izin vermektedir (Baker ve Gollup, 1996; Hilborn, 2000). Tüm pozitif üsteller elde edilmediği takdirde $1/\lambda_{\max}$ tahmin zamanı için bir üst sınır oluşturur.

3.4.4 Fraktallar

‘Fraktallar sonsuz küçük ayrıntıya sahip karmaşık geometrik yapılardır’ (Strogatz, 1994). Fraktal terimi ilk kez Benoit B. Mandelbrot tarafından telaffuz edilmiştir ve kökeni düzensiz anlamına gelen Latince *fractus* kelimesidir. Bu yapılar kendine-benzerlik özellikleri sergilerler, öyle ki fraktalın herhangi bir ufak parçası ana yapının kendisini anımsatmaktadır. Sıradan geometrik şekillerden (kare, prizmalar vs.) farklı olarak ‘Fraktal boyutları’ kesirli ifadelerdir. Deneyisel verilerde kaos aramak, genellikle fraktal özelliğe sahip bir garip çekerin varlığını araştırmakla aynı anlama gelir. Böyle bir çekerin bulunması sonucunda sistem dinamiklerini modellemek için bilinmesi gereken aktif değişken sayısı fraktal boyut tahmini ile elde edilebilir.

Fraktalların elde edilebilmesi ancak dinamik sistemler vasıtası ile mümkündür. Kaynağında değişim içermeyen bir süreç fraktal yaratamaz. Bunun nedeni fraktalların mutlaka tanımlanmış bir kuralı izlemek zorunda olmalarıdır. Deterministik bir kurala göre oluşturulan fraktalar geometrik kendine-benzerlik, rastsal bir kurala göre oluşturulanlar ise istatistiksel kendine benzerlik gösterirler.

Literatürdeki çoğu kaynakta fraktalların en temel örneği olarak Cantor kümesi verilmektedir. Cantor kümesi, $G_0 = [0,1]$ kapalı aralığının ortadaki üçte birlik kısmın kümeden çıkarılması sürecinin iteratif şekilde tekrar edilmesiyle elde edilir. Birinci üçte birlik kısmın sistemden çıkarılması ile ikinci bir ara küme G_1 , bu kümeden üçte birlik kısmın çıkarılması ile üçüncü ara küme G_2 oluşturulur. Limit kümesi $C = G_\infty$, Cantor kümesi olarak isimlendirilir (Şekil 3.12).

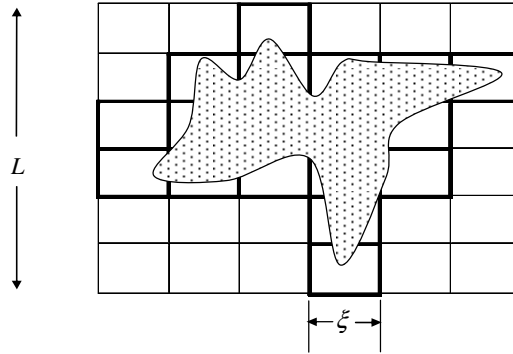


Şekil 3.12 Cantor kümesinin oluşturulması.

Cantor kümesi fraktalların en temel özelliklerini göstermektedir. Sonsuz küçük boyutlarda geometrik özelliklere sahiptir, çok büyük bir n için G_n kümesinin yine üçte birlik kısmı boşluk içerir. Aynı kümenin en uç noktasına yakın bir konumuna göz atıldığında ana yapı ile aynı özelliği gösterir (kendine-benzerlik). Boyutu tamsayı değildir.

3.4.4.1 Fraktal Boyut

Boyutun tamsayı olmaması fraktalların belirli bir *kuralı* izlemesi ile ilişkili bir kavramdır. Fraktalların belirli bir kuralı izleyerek uzayda geometrik yapılarını oluşturmaları, onların hareket özgürlüklerini bir nebze de olsa sınırlamaktadır. Örneğin Cantor kümesi için ortadaki üçte birlik kısmın çıkarılması kuralı, ara kümelerin (prefractal) bir önceki kümelerden çıkarılmış olan aralıklarda elemanın bulunmamasını garanti eder. Her küme bir öncekinin alt kümesi olduğundan, kuralı izleyen sistem, $G=[0,1]$ aralığının ancak çok küçük bir kısmını kaplar. Uzayın boyutu, kapasitesi olan bir kutu şeklinde düşünülürse, fraktal izlediği kural neticesinde bu kutunun tüm kapasitesini kullanamaz (veya fazlasıyla kullanır). Bu nedenle fraktal sistemlerin bu kapasite bağlamındaki boyutu kesirli şekilde normalden az (veya fazla) çıkar. Fraktalların boyutuna ilişkin basit bir yaklaşım olarak *bezerlik* boyutu verilmektedir. Kendine-benzerliğin var olması nedeni ile fraktalın küçük bir kısmının büyütülmesi ile ana yapı elde edilir. Bir karenin kendine benzeyen daha küçük kareler vasıtasıyla tanımlanması için, küçültme oranının belirlenmesi yeterlidir. Örneğin kenar uzunluğu $r/2$ olan 2^2 dört adet kare, kenar uzunluğu r olan kareyi tamamen yaratabilmektedir. Benzer şekilde kenar uzunluğu r olan bir küp $r/2$ kenar uzunluğuna sahip 2^3 ufak küp tarafından tamamen doldurulabilmektedir. Burada kullanılan ufak ölçekli yapıların sayısı, ana geometrik şeklin boyutunu verir (d). İhtiyaç duyulan n küçük kopya ile ε küçültme faktörü arasındaki ilişki $n = \varepsilon^d$ şeklindedir, sonuç olarak $d = \ln(n)/\ln(\varepsilon)$ dir. Cantor kümesinin benzerlik boyutu, küçültme oranı $\varepsilon = 3$ ve oluşan benzer alt birimler $n = 2$ olduğundan 0.63'dür. Kendine-benzerliğin açıkça görülemediği karmaşık bir geometrik saçılımın bulunması durumunda benzerlik boyutu kullanılamaz.



Şekil 3.13 İki boyutlu düzlem tarafından sınırlanan detaylı bir G^* geometrik şekli kenar uzunluğu ξ olan kareler tarafından çevrelenmektedir (Bountis,1997).

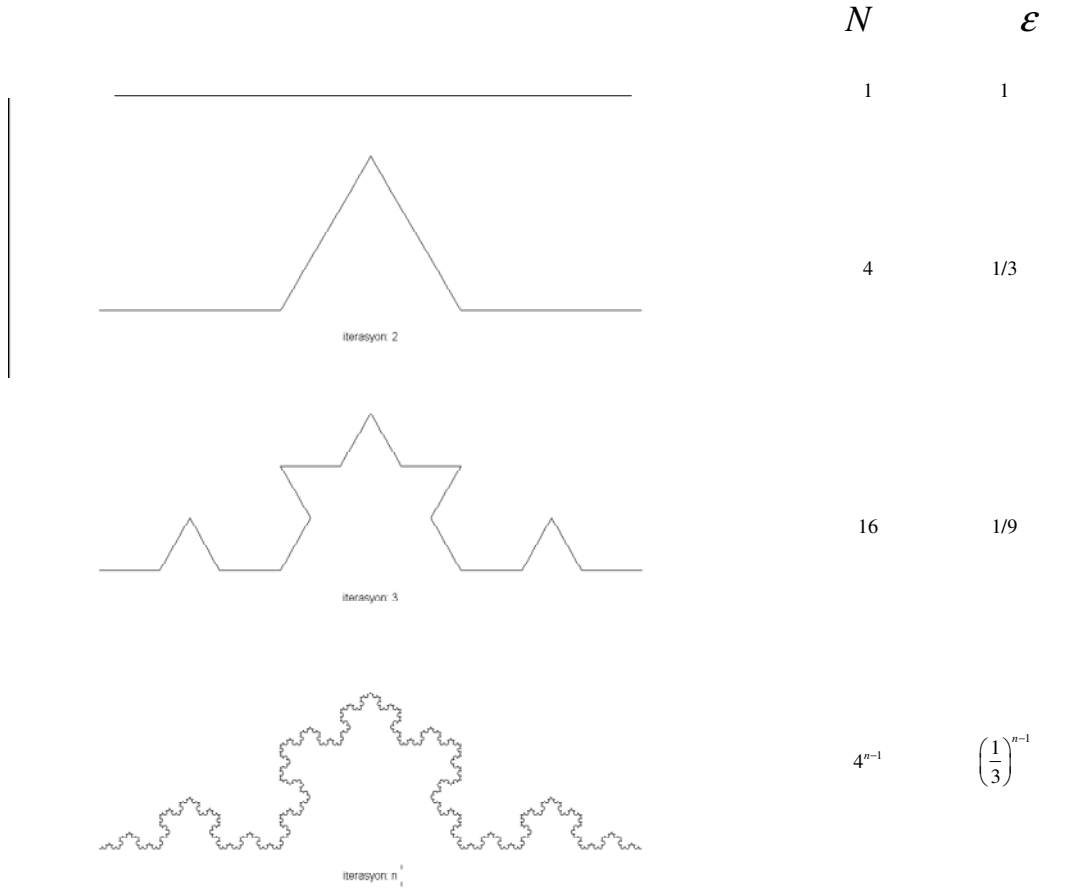
Eldeki geometrik yapıyı tam anlamıyla açıklayabilecek boyut sayısı (d) elde edilmesi için şu şekilde bir yaklaşım izlenebilir. Oldukça detaylı bir G^* şeklinin bütünüyle iki boyutlu bir düzlem tarafından sınırlandırıldığı varsayılın (Şekil 3.13). Bir geometrik şeklin (veya saçılımın) boyutunu anlayabilmek için öncelikle tüm şekil, minimum d -boyutlu bir küpün içine hapsedilir. Daha sonra kenar uzunluğu L olan bu hacim, kenar uzunluğu ξ olan d -boyutlu birim hacimlere ayrılır. Bu noktada $N(L, \xi)$ fonksiyonu, G^* şeklini en ufak bir boşluk bırakmadan kaplayabilecek minimum birim hacim sayısını verir, Şekil’de $N(L, \xi) = 18$ ’dir. ξ uzunluğunun görece büyük olması, geometrik şeklin tüm ξ ’dan daha ayrıntılarının elde edilemesini engeller. Sistemden tam bir bilginin elde edilmesi $\xi \rightarrow 0$ ve $N(L, \xi) \rightarrow \infty$ ile mümkündür. Bu durumda şekli tam olarak kaplayan birim hacimlerin sayısı asıl alandan daha küçük olacağından, $N(L, \xi) \leq (L/\xi)^d$ dir. Eğer $\varepsilon = \xi/L$ varsayılırsa, (3.16) gerçekleşir (k sbt) (Bountis,1997).

$$N(1, \varepsilon) = N(\varepsilon) \propto k\varepsilon^{-d_c} \quad (3.16)$$

Denklem (4.26)’dan d_c fraktal boyutu (3.17)’deki gibi elde edilir.

$$d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log(1/\varepsilon)}, \quad (3.17)$$

d_c kesirli niceliğine kapasite veya kutu (box) boyutu adı verilir. Fraktal boyut hesaplamasına örnek olarak Koch eğrisi verilebilir. Eğri tek boyutlu bir aralığın üçte birlik bir kısmına eklenen üçte birlik uzunluk ile büyüyen bir fraktaldır.



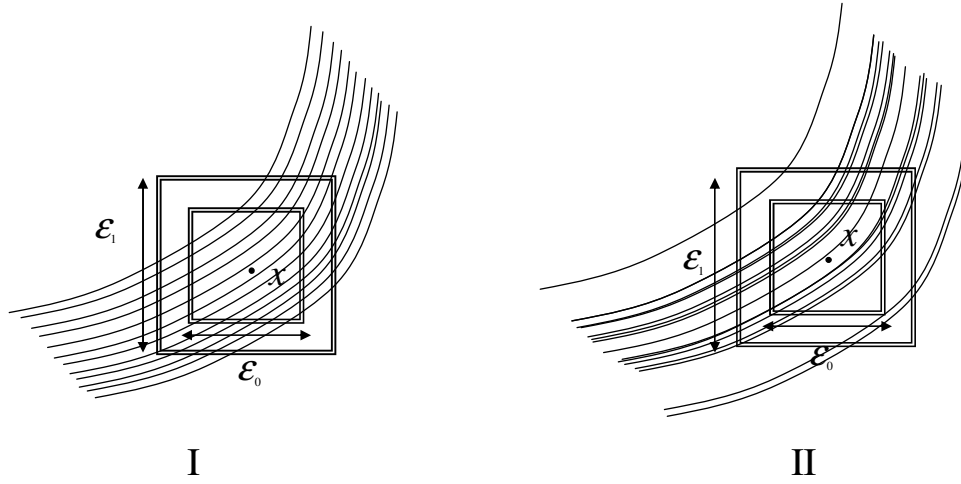
Şekil 3.14 Koch eğrisi (kapasite boyutu, $d_c = \ln(4)/\ln(3)=1.2618$).

3.4.4.2 Korelasyon Boyutu

Kaotik sistemlerde fraktal boyutlu garip çekerin varlığı beklendiğinden, sistemden elde edilecek boyut bir karar aracı olarak kullanılır. Faz eğrilerinin uzayda birbirleri ile kesişmemeleri (teklik varsayımı), bu eğrilerin uzayda çekerler etrafında sürekli olarak varolan boşlukları doldurmalarına neden olur. Bu tip bir süreç sistemde fraktallığın varlığı faz eğrilerinin uzaydaki konumları analiz edilerek elde edilebilir. Eğer sistemin faz eğrileri uzayda rastsal bir şekilde hareket ediyor ise, o halde faz uzayında seçilen bir noktanın çevresindeki ϵ_1 kenar uzunluğuna sahip bir alandaki noktaların yoğunluğu (veya olasılık dağılımları) ile, $\epsilon_0 < \epsilon_1$ kenar uzunluğuna sahip ikinci bir alandaki noktaların yoğunluğunun aynı olması beklenir.

$$\frac{\Psi(x, \varepsilon_1)}{\varepsilon_1^2} \approx \frac{\Psi(x, \varepsilon_0)}{\varepsilon_0^2}. \quad (3.18)$$

Çeker üzerindeki bir x noktasının çevresinde tekdüze bir yoğunluk var ise, alandaki noktaların sayısı, dağılımın ölçüldüğü alan ile orantılı olmaktadır. Sonuç olarak $\Psi(x, \varepsilon_i)/\varepsilon_i^2$ niceliği $\varepsilon_i \rightarrow 0$ ile değişmez (3.18).



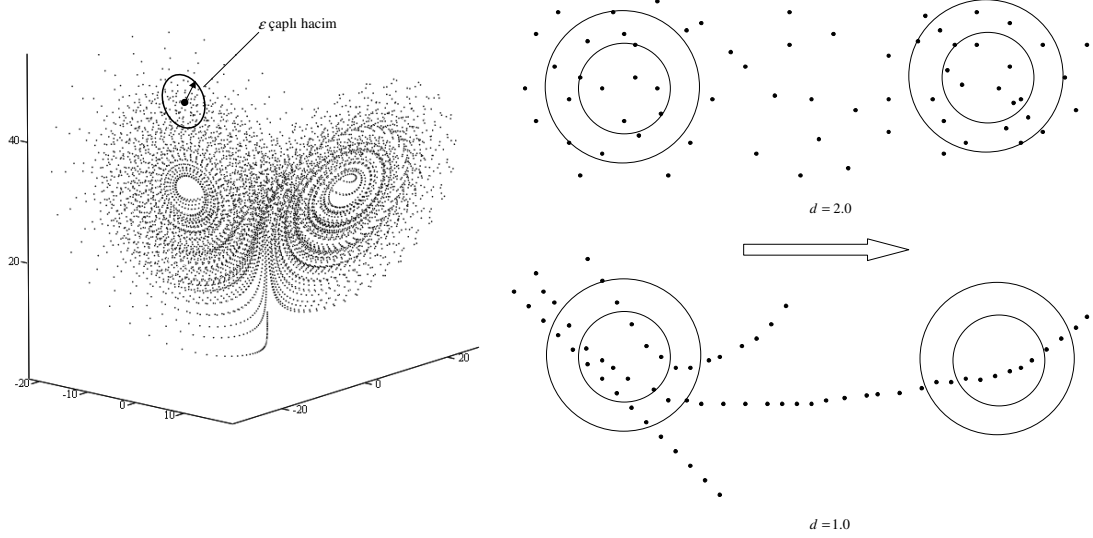
Şekil 3.15 (I)Çeker üzerinde homojen dağılım, (II) fraktal yapıdaki çeker (Urbach,2000).

Çeker üzerinden fraktal boyutun hesaplanması için yaygın olarak Grassberger- Procaccia algoritması kullanılır. Çeker üzerindeki bir x noktası civarında ε yarıçapında bir küre alınır. Kürenin içindeki nokta sayısı ε çapı ile değişeceğinden, nokta sayısı $\tilde{\Psi}_x(\varepsilon)$ fonksiyonu tarafından gösterilir. ε arttığında $\tilde{\Psi}_x(\varepsilon)$ 'nin artışı boyutun kuvvetleri şeklinde gerçekleşir, $\Psi(\varepsilon) \propto \varepsilon^d$. ε yarıçapı değiştirildiğinde eğer noktaların uzaysal dağılımının da homojen olmayan Cantor benzeri bir yapı var ise, (3.19) şeklindedir ve boyut kesirlidir (Strogatz,1994).

$$\tilde{\Psi}_x(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon^{d(x)}, \quad d(x) \notin \mathbb{Z}^+ \quad (3.19)$$

Burada $d(x)$ 'e **noktasal** (pointwise) boyut denir. Ancak hesaplanan boyut seçilen x

noktasına bağlı olacağından, ortalama bir boyut için çeker üzerindeki birçok noktadan hesaplanan boyutlar değerlendirilir.



Şekil 3.16 Korelasyon boyutunun geometrik anlamı (Urbach (2000)’dan uyarlama).

Pratikte ise noktasal boyutun açılımı korelasyon boyutu şeklinde gerçekleşmektedir. Bu algorithmada çeker üzerinde ε çapında bir birim hacim seçilir ve seçilen hacmin içindeki noktalar ($\tilde{\Psi}_x(\varepsilon_i)$) sayılır. Pek çok farklı çap alınarak hacim içine düşen noktaların sayısı hesaplandığında, çaptaki artışın nokta sayısında ne düzeyde bir artış yarattığına bakılır. Eğer noktalar bir boyutlu bir sistemden gelmekte ise çap artarken nokta sayısı ε^1 ile orantılı olarak lineer şekilde artar. Eğer noktalar uzaydaki bir düzlemde tekdüze dağılıyor ise, sayıları $\pi\varepsilon^2$ ile orantılı olacağından, nokta sayısı artışı ε^2 ile orantılıdır. $\mathbf{s}_n$ vektör uzayının bir elemanı ise, aralarındaki öklidyen uzaklığın ε ’dan küçük olduğu tüm iki elemanlı $(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)$ kombinasyonların sayısı veren korelasyon toplamı formülü (3.20)’deki gibi verilir.

$$C(\varepsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=j+1}^N \Theta(\varepsilon - \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|). \quad (3.20)$$

(3.20)’de Θ Heaviside basamak fonksiyonudur ($\Theta(x) = 0, x \leq 0$; $\Theta(x) = 1, x > 0$). Sonsuz

sayıda elemanın bulunduğu bir durum için ($N \rightarrow \infty$), $C(\varepsilon) \propto \varepsilon^d$ beklenmektedir. Son durumda korelasyon boyutu (3.21)'deki hale dönüşür (Kantz ve Schreiber,1997).

$$d(N, \varepsilon) = \frac{d(\ln C(\varepsilon, N))}{d(\ln(\varepsilon))} \quad (3.21)$$

$$d_G = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} d(N, \varepsilon)$$

3.4.5 Determinizmin Test Edilmesi

Korelasyon toplamı determinizmin test edilmesinde de kullanılmaktadır. Gerçekten elde bulunan zaman serisinde bir deterministik bir ilişki bulunmakta mıdır? Buna yönelik olarak, bir serideki zamana bağıllığı sınamak için BDS (Brock, Dechert, Scheinkman) testi yaygın olarak kullanılmaktadır. Test aynı zamanda lineer bağıllık, lineer olmayan bağıllık, ve de kaos durumlarının tespit edilmesinde de kullanılabilmektedir. Örneğin ARMA modeli ile tahmin edilmiş bir zaman serisinden ele edilen kalıntılarda, lineer olmayan bağıllığın testi için BDS istatistiği kullanılabilmektedir. Scarlat vd. (2006), testi seriyi en iyi karakterize eden polinomların kalıntıları üzerinde uygulamıştır.

$X_t = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, uzunluğu n olan rastsal bir seri olsun. Ayrıca X_t tek değişkenli olsun ve (iid) şeklinde olan bir dağılımdan gelsin. Burada A durumunun olasılığı olarak X_t 'de birbirlerinden ε kadar uzakta olan iki noktanın beklenen değeri (3.22)'deki gibi verilmektedir (LeBaron,1997).

$$I_\varepsilon(x, y) = 1, \quad |x - y| < \varepsilon$$

$$= 0, \text{ aksi halde} \quad (3.22)$$

$$p_A = E(I_\varepsilon(X_t, X_s))$$

B durumunun ise, hem birbirlerine ε yakınlığında bulunan hem de seri içerisindeki öncüllerinin de ε yakınlığına sahip olduğu durumları simgeler. Bu halde B 'nin olasılığı (3.23)'deki gibi verilir.

$$p_B = E(I_\varepsilon(X_t, X_s)I_\varepsilon(X_t, X_s)) \quad (3.23)$$

X_t 'nin bağımsızlığı varsayımı altında, eğer B durumunu oluşturan iki olay bağımsız ise, $p_B = p_A p_A = p_A^2$ dir. $p_B - p_A^2 = 0$ hipotezinin sınanması BDS testi temelini oluşturur. Bu durumda BDS test istatistiği (3.24)'deki gibi verilir (LeBaron, 1997; Sprott, 2003).

$$w_{m,n}(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{C_{m,n}(\varepsilon) - C_{1,n}^m(\varepsilon)}{\sigma_{m,n}(\varepsilon)} \quad (3.24)$$

Burada $m = d_g$ ve $C_{m,n}(\varepsilon)$, (3.25) şeklinde verilen korelasyon toplamıdır.

$$C_{m,n}(\varepsilon) = \frac{2}{n(n-2)} \sum_{s=1}^n \sum_{t=s+1}^n \prod_{j=0}^{m-1} I_\varepsilon(X_{s-j}, X_{t-j}) \quad (3.25)$$

(3.25) açılımında sıfır hipotezinin doğruluğu durumunda $E(C_{m,n}(\varepsilon)) = E(C_{1,n}(\varepsilon))^m$ olarak alınabilmektedir. Bunun nedeni gömme boyutu artarken noktaların uzaydaki dağılımlarının ε^m ile orantılı olarak azalmasıdır. $w_{m,n}(\varepsilon)$ istatistiğinin sıfırdan anlamlı şekilde farklı olması seride lineer veya lineer olmayan determinizmin kanıtıdır.

Sprott (2003), $C_{m,n}(\varepsilon) = C_{1,n}(\varepsilon)^m$ olması dolayısıyla $\left(\log \frac{C_{m,n}(\varepsilon)}{C_{1,n}(\varepsilon)}, m \right)$ ikililerinin grafiğinde

çizilen eğrinin 45° doğrusunun altında kalmasının, determinizmin kanıtı olduğunu vurgulamış ve bunu BDS test istatistiğine benzer şekilde kullanmıştır.

3.4.5.1 Diğer Boyut Türleri

Boyutlar sistemlerin uzaysal dağılımı ile karakteristik özellikleri arasındaki bağı simgeler. Bu nedenle kaotik sistemlerin karakteristik nicelikleri ile boyutları arasında bir bağ kurulması çok doğaldır. Yörüngelerin faz uzayında birbirlerinden hızla ayrılması (BDHB) ile yörünge noktalarının uzaydaki dağılımı arasındaki ilişki Kaplan-Yorke boyutu ile tasvir edilir. Lyapunov üstelleri yörüngelerin uzaydaki hızlı yön değişikliklerinden kaynaklanan hacimdeki deformasyonun bir ölçüsü olduğundan, sıralı haldeki spektrumlar ($\lambda_i > \lambda_{i+1}$) için ilk D elemanın toplamının sıfıra eşit olması halinde ilk hacim değişmeden kalır. Ortada sıfırdan farklı bir hacim olacağından bu hacmin uzayda ilerleyebilmesini sağlayacak yörüngeler D boyutlu olmalıdır. $\sum_{i=1}^D \lambda_i \geq 0$ 'ı sağlan en büyük D sayısı elde edildiğinde (3.26) geçerli olur.

$$\lambda_i > \lambda_{i+1}, \lambda_{D+1} < 0, \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_D}{|\lambda_{D+1}|} < 1 \quad (3.26)$$

Çekerin içinde bulunabileceği minimum boyut boyut sayısı ise $D+1$ olmaktadır, çünkü ancak bu takdirde hacim korunumsuz olur. Pozitif üstelin varlığı durumunda $D < D_{KY} < D+1$ olan *Kaplan-Yorke boyutu* (3.27)'deki gibi verilir (Medio,1993; Sprott, 2003).

$$D_{KY} = D + \frac{1}{|\lambda_{D+1}|} \sum_{i=1}^D \lambda_i \quad (3.27)$$

Örneğin Lorenz çekeri için spektrumlar yaklaşık: (1.5;0;-22.5)dır. $\sum \lambda_i \geq 0$ için $\max D$ 'yi veren ilk iki spektrumdur ($\lambda_{D+1} = -22.5$): $D_{KY} = 2 + \frac{1}{|-22.5|} (1.5 + 0) \approx 2.06$ olarak bulunur.

3.5 Faz Uzayının Yeniden İnşası (FUYİ) (Phase Space Reconstruction)

Bir zaman serisinde determinizm olgusu, seride bulunan verilerin birbirleri ile sıkı ilişkisi halinde olmalarını gerektirir. Çünkü bu seride bulunan tüm elemanlar aynı deterministik

kural tarafından üretilmiştir ve bu üretilen noktalar varsayımsal olarak fonksiyonlarla ifade edilebilen bir vektör uzayının öğeleridir. Eğer elde belirli zaman aralıkları ile ölçülmüş tek bir zaman serisi var ise $(\{x_{t_0}, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}\}, t_0 < t_1 < \dots < t_n)$, o halde bu serideki bazı noktalar diğer değişkenlerdeki değişime yönelik izler (kanıtlar) taşımalıdır. İşte faz uzayının yeniden inşası (FUYİ) süreci bu kanıtların elde edilmesini amaçlamaktadır.

FUYİ süreci muhtemelen kaotik zaman serileri analizinin temelini oluşturur. Amaç lineer olmayan süreçleri içermesi muhtemel bir zaman serisini incelemek olduğundan, faz uzayı ile bu zaman serisi arasında ne şekilde bir ilişki olduğunun belirlenmesi temel problemidir. Evrensel nicelikler çekerlerin kaotik olup olmadığını belirlemektedir. Ancak gerçek çeker ile bu zaman serisi arasındaki ilişki bu niceliklerin sağlanması açısından önemlidir. Ayrıca deneysel durum dolayısıyla bu uzayı yaratacak deterministik sistemin dinamik denklemleri, yani faz uzayının özellikleri bilinmemektedir. Bu durumu somut bir bakış açısıyla aktarmak için Strogatz (1994) ve Kostelich (1997), kimyada garip çekerlerin görüldüğü ilk olay olarak kayda geçen Belousov-Zhabotinsky (BZ) kimyasal reaksiyonları üzerinde yapılan araştırmayı aktarmışlardır. Araştırma kapsamında BZ reaksiyonlarını incelemek için sürekli olarak karıştırılan bir tanka sistemin dengeden uzak hareket etmesini sağlayacak miktarda kimyasal madde aktarılır. Burada aktarılma hızı sistem parametresidir ve parametrenin belirli değerleri için sistemi yöneten en az 20 dd.'in ürettiği zaman serileri incelenir. Bu 20 denklem tankın içindeki madde konsantrasyonlarının, ard arda gerçekleşen kimyasal reaksiyonlar ile, zamanla ne şekilde değişeceğini belirlemektedir. Araştırma sonucunda sık aralıklarla ölçülen Bromide iyon konsantrasyonlarının zaman serisinin, sistemin tüm kaotik yapısını açıklayabildiği ortaya konulmuştur. Sadece tek bir zaman serisinin sistemdeki 20 farklı d.d.'i açıklayabilmesinin nedeni ne olabilir? Kaos'un matematiksel arka planını açıklanırken, n . mertebeden tek değişkenli bir d.d.'in, birinci mertebeden n adet d.d.'den oluşan bir sisteme indirgenebileceği vurgulanmıştı. Benzer bir mantık ile elde bulunan tek bir zaman serisi (yani tek değişken), eğer yeterince uzun ve ölçümler hassas ise, sistemdeki diğer değişkenler ile etkileşim halinde bulunacağından tüm dinamik yapıyı bünyesinde barındırır (Strogatz, 1994; Hilborn, 2000).

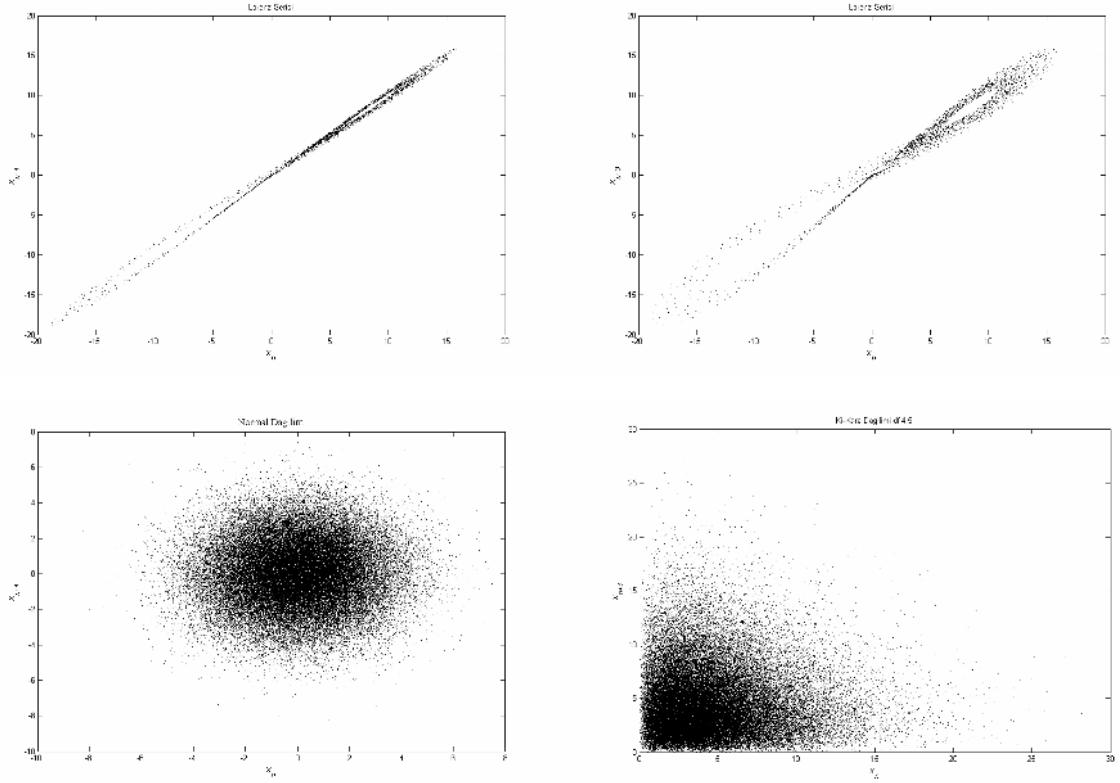
Deterministik bir sürecin var olması durumunda, zaman serisindeki herhangi bir değeri diğer değerlere bağlayacak bir $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots)$ kuralı mevcuttur. Eğer ölçümler çok sık yapılmış ise $(\Delta t \rightarrow 0)$, bu değerler f fonksiyonunun diferansiyellerini elde etmekte

kullanılabilir (Sprott, 2003).

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dt} &= \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} \\
 \frac{d^2 f}{dt^2} &= \frac{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}}{(\Delta t)^2} \\
 \frac{d^3 f}{dt^3} &= \frac{x_n - 3x_{n-1} + 3x_{n-2} - x_{n-3}}{(\Delta t)^3} \\
 \frac{d^4 f}{dt^4} &= \frac{x_n - 4x_{n-1} + 6x_{n-2} - 4x_{n-3} + x_{n-4}}{(\Delta t)^4} \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

O halde araştırılması gereken, gerçek seri $(1)\{x_{t_0}, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}\}$ iken, $(2) x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots)$ şeklindeki elemanların bu seri içinden ne şekilde elde edileceğidir. Burada (2) şartını sağlayan veriler bir şekilde (1) serisinin içinde ‘gömülü’ halde bulunmaktadır. İşte bu gömülü yapının seri içerisinde tespit edilip, bunun yardımıyla ‘yeterli’ bir faz uzayının elde edilmesi sürecine *gömme*, ortaya çıkan faz uzayına ise ***gömme uzayı*** (embedding space) adı verilir.

Lorenz serisinde deterministik bir kuralın ne şekillerde bulunabileceğine iyi bir örnek olarak geri-dönüş haritaları (return map) verilebilir. Serinin kendisinin belirli gecikme değerlerine karşılık çizdirilmesi faz uzayının tahmini bir ‘örüntüsünü’ sergileyebilmektedir. Eğer serinin kendisinin gecikmeleri ile saçılımı incelenecek olursa, gecikmenin artması ile, ortaya bir yapının çıktığı görülür (Şekil 3.17). Gecikmeli çizimlerde bir form bulunması, nitel anlamda gecikmeli değerlerin birbirleri ile ilişkili olduğunu gösterebilmektedir. Ancak istatistiksel durumlar için bu tip yapılardan söz etmek zordur, eğer serideki ardışık iki veri arasında istatistiksel bağımlılık düşükse veya sıfırsa (örneğin normal dağılım gibi), süreçte artan gecikmeler ile elde edilmiş grafiklerde birbirini takip eden bir yapıdan söz etmek zordur. Şekil 3.17’den anlaşılacağı üzere Lorenz sistemi gibi deterministik sistemlerden elde edilen zaman serilerinde gecikmeli çizimler asıl sistemin faz uzayının izdüşümüne benzer bir görüntü ortaya çıkarmaktadır. Bunun nedeni, FUYİ sürecinin temel taşlarından olan bir teoremin uzantısıdır.

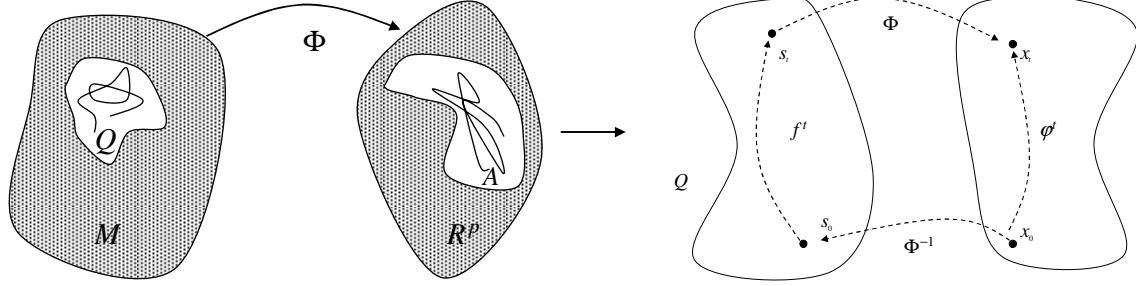


Şekil 3.17 İki farklı gecikme değeri için Lorenz sisteminden, normal ve ki-kare dağılımları için geri-dönüş haritaları.

3.5.1 Gömme Uzayı (Embedding Space)

Bir f dinamiği Q çakeri üzerinde, $s_t = f^t(s_0)$ şeklindeki yörünge noktalarını $Q \subset M$ 'de üretmekte olsun ($s_0 \in M$). Bu durumda ihtiyaç duyulan şey, tek bir zaman serisi ölçümünden sistemin tüm değişmez niceliklerinin elde edilebilmesini sağlayacak bir $A \subset R^p$ çakerini oluşturmaktır. Oluşturulacak bu 'yapay' çaker, asıl sistemin tüm önemli geometrik özelliklerine sahip olmalıdır (denge noktaları, boyutları, üsteller vs.). Burada A üzerindeki yörünge noktalarının uzaysal ve zamansal ilişkileri gerçek çakerin özelliklerinden fazlasına sahip olmamalıdır. Ancak bu takdirde yapay olarak üretilen gömme uzayı ve bu yapay çaker, gerçek çakerin bir temsili fotoğrafını oluşturabilir (Şekil 3.18). Burada $A = \Phi(Q)$ ve $x_u \in A \subset R^p, u \geq 0$ dır. Dönüşümden dolayı Q 'daki bir yörünge hareketi ile A 'daki değişim arasında (3.29) mevcut olduğu belirtilmektedir (Urbach, 2000). ,

$$x_t = \varphi'[x_0] \equiv \Phi \left(f' \left(\Phi^{-1}[x_0] \right) \right) \quad (3.29)$$



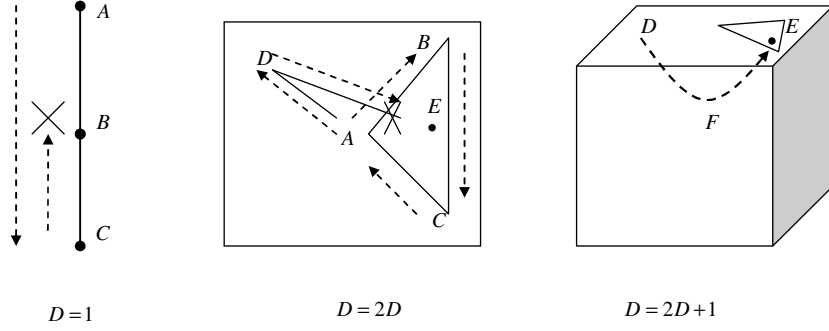
Şekil 3.18 Φ dönüşümü gerçekte çeker Q 'yu, tüm geometrik özelliklerinin korunacağı bir A çekerine dönüştürmektedir (Urbach,2000).

3.5.1.1 Gömme Teoremi

Whitney'in 1936'da kanıtladığı gömme teoremine göre, *keyfi* bir D boyutlu eğrisel uzay, $2D+1$ boyutlu kartezyen uzaya (R^{2D+1}) kendi ile kesişmeden dönüştürülebilir. Uzayın kendisi ile kesişmemesi, ilk kısımlarda değinilen teklik (uniqueness) ilkesini sağlaması açısından önem taşır. Eğer D boyutlu bir geometrik cisim (manifold anlamında) ele alınırsa, cismin tekrar D boyutlu bir uzayda tasvir edilmesi durumunda kesişim kümesi yine D boyutludur. Eğer $D+1$ boyut içinde tasvir edilirse, kesişim kümesi boyutu $D-1$ olan bir alt uzayda varlığını sürdürür. Eğer $D+2$ boyut seçilir ise, kesişimler boyutu $D-2$ olan bir alt uzayda noktalar (sıfır boyutlu) şeklindedir. Ancak boyut $2D+1$ olarak seçildiğinde, belirlenen 'tersinir' dönüşüm yardımıyla kesişme olmaması garantilenir (Sprott,2003). Buna basit bir örnek olarak $D=1$ olan bir çizgi verilebilir (Şekil 3.19). Eğer çizgi $D=1$ olan bir

düzlemde ise, çizgi üzerinde $A \rightarrow C$ 'ye gidildiğinde tekrar A noktasına B ile kesişmeden varılamaz, böyle bir serbestlik yoktur. Eğer çizgi $D^*=2D$ olan bir alanda tasvir edilirse, $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ şeklinde B ile kesişmeden hareket edebileceği bir serbestlik vardır. Ancak bu seferde $A \rightarrow B \rightarrow C$ uzayda iki boyutlu bir kapalı alan yaratmıştır ve önceden belirlenen $A \rightarrow D \rightarrow E$ hiçbir şekilde mümkün olmaz. Fakat $D^*=2D+1$ şeklinde bir hacim seçildiğinde, tek boyutlu bir çizginin uzayda kapalı bir *hacim* yaratması mümkün olamayacağından, her

zaman bir $D \rightarrow F \rightarrow E$ vardır. Anlaşılacağı üzere burada problem, ilk boyutun gömme uzayının hangi boyutunda (D^*) kapalı ve sınırlı bir hacim yaratamayacağıdır. Sonuç olarak kesişmeme ilkesi, diğer bir deyişle tersinir bir Φ olabilmesi için D ancak $D^* = 2D+1$ içine gömülmelidir.



Şekil 3.19 Gömme teoreminin geometrik manası.

1981 yılında Floris Takens, bilinmeyen gerçek faz uzayının boyutunun n olması durumunda, bu uzayın tüm özelliklerinin elde edilebilmesi için gömme uzayı boyutunun en az $d_g \geq 2n+1$ ($d_{gömmе} \rightarrow d_g$) olması gerektiğini kanıtlamıştır. Buna göre eldeki zaman serisi ile gerçek sistemin faz uzayı arasında birebir ilişki kurulabilmektedir. Eğer n boyutlu faz uzayı için $F: M \rightarrow M$ ve $h: M \rightarrow R$ doğada gözlenen zaman serilerini üretiyor ise (Şekil 3.3), gerçek sistemdeki akış $s_t = f^t(s_0)$, $s_t \in M$ için, genel bir özellik olarak $\Phi_{f,h}(s): M \rightarrow R^{d_g}$ (burada $p = d_g$) (3.30)'daki gibi tanımlanır (Urbach, 2000).

$$\Phi_{f,h}(s) = \left(h(s), h(f^\tau(s)), h(f^{2\tau}(s)), \dots, h(f^{(d_g-1)\tau}(s)) \right)^T, \tau \in Z - \{0\}. \quad (3.30)$$

Eğer $f^t(s)$ tarafından tanımlanan bir Q çakeri var ise, o halde Q 'yu açıklayan ve $\varphi^t(s)$ ile tanımlanan bir A çakeri vardır. Bu halde A R^{d_g} 'de Q için bir gömmedir. Bu teoremden vektör fonksiyonu $\Phi_{f,h}$ 'a **gecikmeli koordinat haritası** da (delay coordinate map) denir,

çünkü fonksiyonun elemanları zaman serisi ölçümünün gecikmeli yapısı ile ifade edilebildiği belirtilmiştir (3.31).

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_t &= [x_t, x_{t+\tau}, x_{t+2\tau}, \dots, x_{t+(d_g-1)\tau}]^T \\ &= \Phi_{f,h}(s) = \left(h(s), h(f^\tau(s)), h(f^{2\tau}(s)), \dots, h(f^{(d_g-1)\tau}(s)) \right)^T. \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.5.1.2 Gömme Uzayı Parametreleri (d_g, τ)

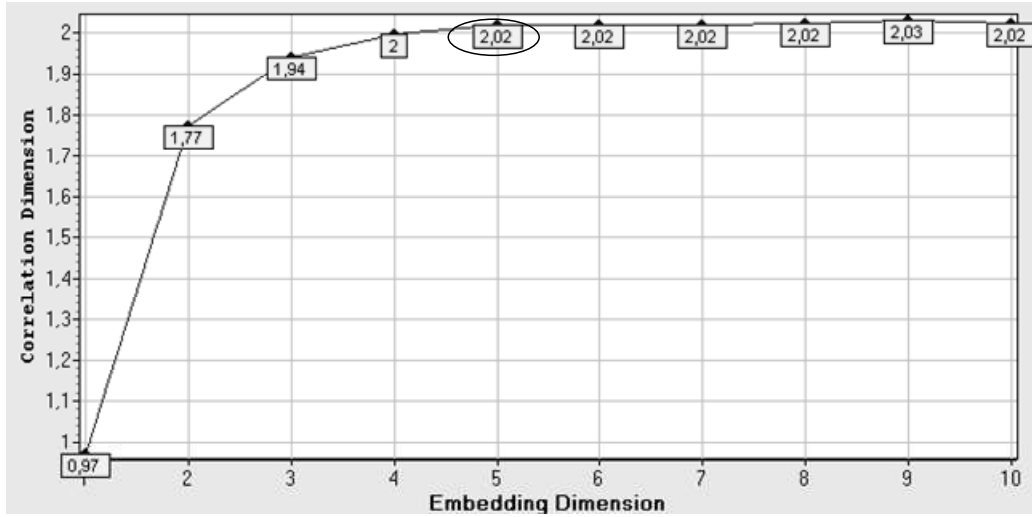
Eldeki zaman serisiyle sürekli bir sistemin arasındaki bağlantı, zaman serisinin kendisinden elde edilen doğru gecikme parametreleri ile detaylı bir süreç sonunda elde edilir. Uygulamada sürekli bir zaman serisi elde edilemeyeceğinden, zaman serisinde iki ardışık ölçüm arasında geçen süre $t_i = t_0 + i\tau_{\text{örn}}$ ile ilişkilidir. Burada $\tau_{\text{örn}}$ değerine örnekleme zamanı (sampling time) denir. Eğer $t_0 = 0$ varsayılırsa, $t_i = i\tau_{\text{örn}}$ olarak yazılabilir. Eğer $k \in \mathbb{Z}^+$ ‘belirli’ bir gecikme aralığı (time lag: τ) $\tau = \nu\tau_s$ olduğu varsayılırsa $t_i + k\tau = (i + k\nu)\tau_s$ şeklinde yazılabilmektedir. FUYİ sürecinde amaç, vektörleri oluşturan doğru τ (veya ν) gecikme değeridir. Son durumda, gecikme aralığı τ ve gömme boyutu d_g olan iki parametrelili (d_g, τ) bir sistem için **gecikmeli yeniden inşa** (GYİ) (3.32)’deki gibi tanımlanır (Urbach, 2000).

$$\begin{aligned} x_i &= x(i) = x(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_D \\ \mathbf{s}_j &= \mathbf{s}(j) = \mathbf{s}(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, N_{d_g} \\ &= [x(t_j), x(t_j + \tau), \dots, x(t_j + (d_g - 1)\tau)]^T. \\ &= [x(j), x(j + \nu), \dots, x(j + (d_g - 1)\nu)]^T \end{aligned} \quad (3.32)$$

Burada $(d_g - 1)\tau$ değerine yeniden inşa penceresi adı verilir. Bu pencerenin bulunmasına yönelik genel bir yaklaşım olarak korelasyon boyutu kullanılır. Gömme uzayında çeker yörüngesini tasvir edecek vektörler GYİ süreci ile üretildikten sonra, bu vektörler üzerinden korelasyon boyutu hesaplanabilir (3.33).

$$C^{(d_g)}(\epsilon) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \Theta(\epsilon - \|s_i - s_j\|); \quad (3.33)$$

Birçok d_g değeri denendiğinde $C^{d_g}(\epsilon) = k\epsilon^{-d_G(d_g)}$ şeklinde bir fonksiyonel açılımı olacaktır. Eğer sistemin farklı gömme boyutları $d_G - d_g$ grafiği çizilirse, yaklaşık $d_g \geq 2d_G$ civarında doyma noktası olarak adlandırılan bir $d_g = d_{doyma}$ değerine ulaşır. Bu noktadan sonra d_G değeri d_g 'nin artışından bağımsız olarak sabit kalır ve d_G (ve d_{doyma}) noktası faz uzayındaki çekerin boyutunu verir (Hilborn, 2000). $\tau = 16$ için elde edilen $d_G - d_g$ grafiği Şekil 4.20'de verilmiştir.



Şekil 3.20 Lorenz serisinden elde edilen $d_G - d_g$ değerleri, fraktal boyut 2.02 dir ve gömme boyutu $d_g \geq 2d_G + 1$ koşulunu sağlar.

d_g 'nin bulunmasına yönelik diğer yaklaşım *yanlış en yakın komşular* (false nearest neighbors) yöntemidir. Bu yöntem aynı zamanda gürültüden veya diğer deterministik sistemlerden kaynaklanan ek sinyallerden çok az etkilendiğinden, robust sonuçlar elde edilebilmektedir. Faz uzayında yeterli bir boyut büyüklüğü sağlanamaz ise, yörüngelerin tekilliği ilkesi ile bağdaşmayan kesişmeler meydana gelir. Örneğin üç boyutlu bir gömme uzayında çakışmadan hareket edebilen bir yörüngenin iki boyutlu bir izdüşümünde çakışma

meydana gelebilir. d_g boyutlu gömme uzayında yörüngenin herhangi bir noktası d_g adet vektör elemanı içereceğinden, $\mathbf{s}(t) = [x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+(d_g-1)\tau)]^T$ dir. Bu nokta ile çok ‘yakın komşu’ olan bir nokta $\mathbf{s}^{yk}(t)$ arasındaki uzaklık (3.34) gibi yazılabilir.

$$R_{d_E}(t)^2 = \sum_{d=1}^{d_E-1} \left(x(t+(d-1)\tau) - x^{yk}(t+(d-1)\tau) \right)^2 \quad (3.34)$$

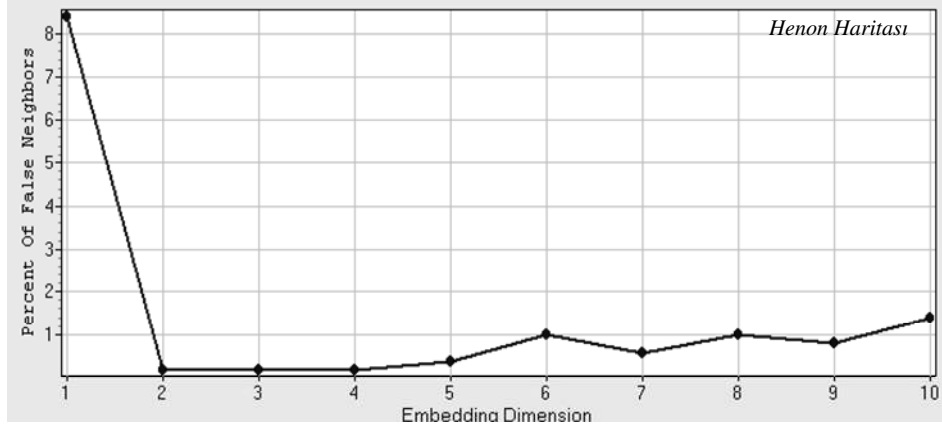
Burada $d_E \rightarrow d_g$ aranan niceliktir. Eğer boyut sayısı arttırılırsa ölçülen uzaklık farkına (d_E+1) ’inci boyuttan dolayı ek bir terim eklenir (3.35).

$$R_{d_E+1}(t)^2 = R_{d_E}(t)^2 + \left(x(t+d_E\tau) - x^{yk}(t+d_E\tau) \right)^2 \quad (3.35)$$

Eğer eklenen bu terim uzaklıkta gerçekten anlamlı bir artış yaratıyorsa, o halde gömme uzayında noktaların konumuna ilişkin eksik bir bilgi bulunmaktadır ve boyutun arttırması bu bilgiyi sağlamıştır. Sonuç olarak belirli bir t anında ilk uzaklık ile boyut artışından kaynaklanan uzaklık arasındaki bir oran eşik değer R_T ’den büyük ise, ölçülen noktanın yanlış komşu olduğu söylenir (3.36).

$$\frac{\|x(t+d\tau) - x^{yk}(t+d\tau)\|}{R_{d_E}(t)} > R_T \quad (3.36)$$

Eğer her d_E değeri için yanlış komşuların sayısı bir grafik yardımıyla incelenirse, yanlış komşuların tamamını ortadan kaldıran bir d_E değerinin d_g için yeterli olduğu söylenir (Abarbanel vd., 1993).



Şekil 3.21 Henon haritasından elde edilen yanlış yakın komşu yüzdesi.

Minimum gömme boyutuna yönelik bir yaklaşım Cao metodu olarak adlandırılır ve yanlış yakın komşular yöntemi ile aynı teorik temele sahiptir. Bu yöntemde $a_{d_E}(n) = \frac{R_{d_E+1}(t)}{R_{d_E}(t)}$

şeklinde tanımlanır. $\langle a_{d_E} \rangle = \frac{1}{N - d_E \tau} \sum_{n=1}^{N - d_E \tau} a_{d_E}(n)$ eşitliği için $E_{d_E}^1 = \frac{\langle a_{d_E+1} \rangle}{\langle a_{d_E} \rangle}$ şeklinde verilir.

Burada $E_{d_E}^1$ 'nin değeri gömme boyutu arttıkça değişir ve bir dirsek noktasından sonra artışı sonlanarak $d_E > d_g$ için yatay bir seyir izler. Bu dirsek noktası minimum gömme boyutunu vermektedir (Por ve Puthusserypady, 2005).

Zamandaki gecikme aralığı τ 'nin hesaplanması bir diğer GYİ süreci problemidir ve doğru τ 'nin seçilmesi FUYİ'nin başarısını etkiler. Ardışık koordinatların bağımsızlığını sağlayacak yeterli bir τ değerinin bulunması temel amaçtır. Eğer çok küçük τ değeri seçilirse, ardışık gömme yörüngesi koordinatları, $x(t_j), x(t_j + \tau), \dots, x(t_j + (d_g - 1)\tau)$, birbirlerine çok yakın olur. Bu durumda koordinatların birbirlerinden ayrılması zorlaşır. Tersine eğer τ değeri büyük seçilirse, koordinatlar birbirlerinden istatistiksel manada tam bağımsız olurlar. Gömme uzayında noktalar arasındaki bağlantı zayıflayacağından, bir sürekli fonksiyonun izinin bulunması zorlaşır. Ardışık koordinatların, bulunması istenen gömme yörüngesi için verebileceği 'tüm bilginin' alınması için birtakım yaklaşımlardan yararlanılması gerekmektedir. İki nokta arasındaki ilişkiyi irdeleyen bir yaklaşım olarak, nokta çiftleri arasındaki bağılılığı ölçen *otokorelasyon* (AC) fonksiyonu kullanılabilmektedir. AC

fonksiyonu (3.37) şeklinde verilir (Abarbanel vd.,1993).

$$AC(\tau) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x(i+\tau) - \bar{x})(x(i) - \bar{x})}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x(i) - \bar{x})^2}; \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i) \quad (3.37)$$

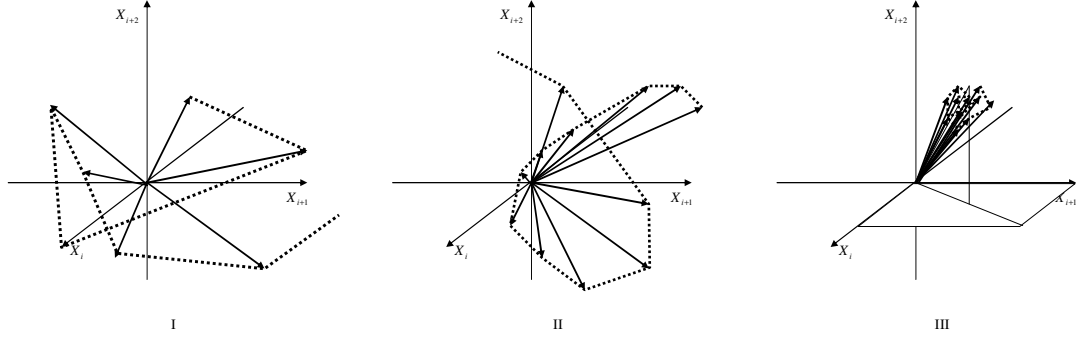
Eğer sistem stokastik veya kaotik ise, AC fonksiyonunun zamanla üstel şekilde azalması beklenir. Elde edilen bir AC grafiğinde, AC değerinin ilk kez sıfır değerini aldığı noktanın τ değerinin hesaplanması için uygun bir yaklaşım olabileceği belirtilmiştir. Ancak lineer bağımlılığın sistem dinamiklerinde varolabilecek lineer olmayan bağımlılığı ne düzeyde açıklayabileceği şüphelidir (Abarbanel vd.,1993; Baker ve Gollup,1996).

Zaman gecikmesine yönelik daha derin bir yaklaşım, ortak bilgi fonksiyonlarının (3.13), $OB(\bullet)$, incelenmesidir. Fraser ve Swinney (1986), birbirlerine komşu olan veri noktalarının $x(t_j), x(t_j + \tau)$, istatistiksel olarak bağlı olup olmadıklarının bir ölçütü olarak ortak bilgi fonksiyonu yaklaşımı önermişlerdir. Ortak bilgi fonksiyonu lineer AC ilişkisinin lineer olmayan bir açılımı olarak düşünülebilir (Abarbanel vd.,1993). Eğer $P(x(t_j))$ ve $P(x(t_j + \tau))$ ardışık koordinatların iki ayrı olasılık dağılımı ise, ve $P(x(t_j), x(t_j + \tau))$ ortak olasılık dağılımı iken, gecikme değerine bağlı (τ) ortak bilgi $OB(\tau)$ (3.38)'deki gibi verilir.

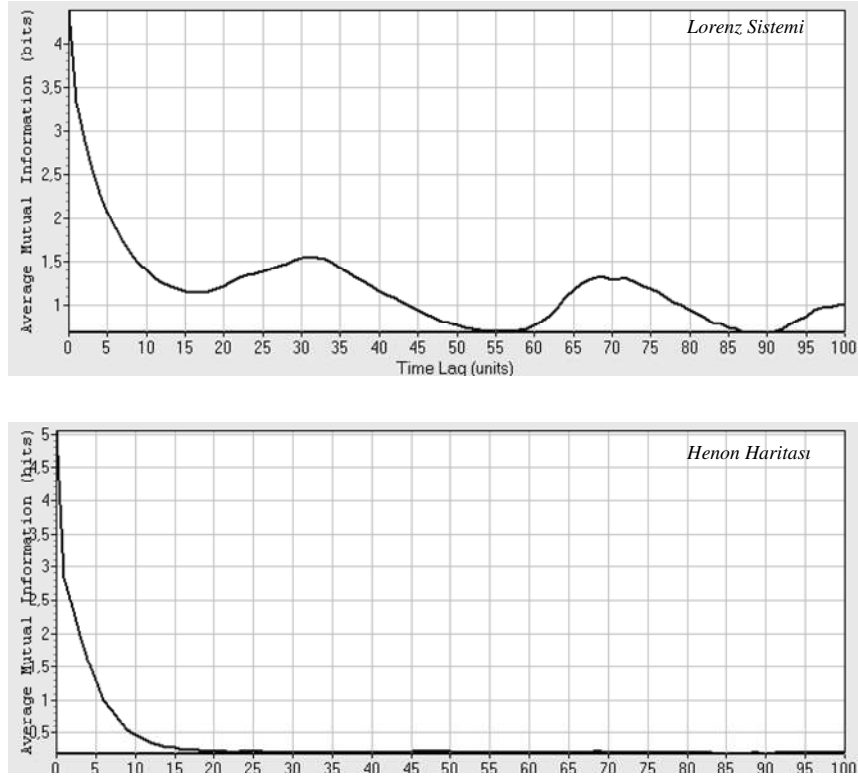
$$OB(\tau) = \sum_i P(x(t), x(t + \tau)) \log \left(\frac{P(x(t), x(t + \tau))}{P(x(t)) \cdot P(x(t + \tau))} \right) \quad (3.38)$$

Eğer τ çok büyük seçilirse ortak dağılım iki olasılığın çarpımı olacağından ortak bilgi sıfır olur. Fraser ve Swinney (1986), $OB(\tau)$ 'nın ilk minimum değerinin, τ 'nın (veya ν) seçimi için uygun bir araç olduğunu belirtmişlerdir. Ancak Henon haritası gibi bazı dinamik sistemlerde monoton azalan $OB(\tau) - \tau$ ikilileri bulunduğundan bu tip bir yaklaşım kullanılmaz. Bunun yerine örneğin dinamik haritalarda $\tau=1$ veya 2 seçilir, veya

$OB(\tau)/OB(0) \approx 1/5$ değerini veren τ değeri iyi bir yaklaşım olarak değerlendirilmektedir (Abarbanel vd.,1993). Eğer τ çok küçük seçilirse, gömme uzayında tüm vektörler 45° çizgisi üzerinde yoğunlaşır (Şekil 3.21) ve oluşturulan çeker gerçek çekerin geometrik özelliklerini tam olarak açıklayamaz (Hilborn, 2000).



Şekil 3.22 Değişik gecikme zamanları (τ) için gömme uzayı vektörlerinin temsili konumları. (I) τ çok büyük, (II) yeterli bir τ , (III) çok küçük τ .



Şekil 3.23 Henon ve Lorenz sistemlerinden elde edilen ortak bilgi fonksiyonu.

3.6 Gömme Uzayında Gürültünün Azaltılması

Gürültü azaltımı konusunda probleme yaklaşım yine üç şekilde meydana gelmektedir. Sistem dinamikleri oluşturan yasaların bilindiği durumlarda ve daha önceden aynı sisteme ait bir gözlem serisinin bulunması halinde analiz daha karmaşıktır ve bu çalışma kapsamında incelenmemiştir. Burada gürültü azaltımında esas alınan varsayım yine sistem dinamiklerine ilişkin bilgi sahibi olunmadığıdır. FUYİ sürecinde gürültü azaltımı amacıyla, istatistikte ana bileşenler analizi olarak bilinen *tekil spektrum analizi* (SSA) ve basit gürültü azaltımı (simple noise reduction) yöntemleri incelenmiştir.

3.6.1 Faz Uzayının Görsel Özellikleri: Tekil Spektrum Analizi (Ana Bileşenler)

Abarbanel vd. (1993) ve Medio (1993), Tekil Spektrum Analizi (Singular Spectrum Analysis) yöntemini sistem dinamiklerinin bilinmediği durumlarda hem gömme boyutu sayısının düşürülmesi, hem de gürültü içeren boyutların analizden çıkarılması için iyi bir araç olduğunu belirtmektedir. Metodun temel girdisi gömme uzayındaki yörüngelerin çok değişkenli veri setleri oluşturduğudur. Dinamik sistem zaman içindeki davranışına her bir boyutun belirli etkileri bulunmaktadır. Ana bileşenler yaklaşımı bu davranışları, toplam değişkenliği açıklama oranlarına göre sıralanmış yeni veri setleri oluşturarak sınıflar. Bu sayede gömme uzayında değişkenliğin çoğunu açıklayan asıl dinamik süreç ile, sürecin açıklanmasına katkısı olmayan gürültü etkileri belirli bir düzeyde birbirinden ayrılmış olur. Medio (1993), $N \times n$ boyutlu yörünge matrisini (3.39)'daki gibi vermektedir.

$$H = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{s}_N^T \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

(3.39)'da verilen $\mathbf{s}_i$ değerleri gömme uzayı vektörleridir. $H_{N \times n}$ matrisinin (3.40) ana bileşenlerini verecek lineer denklem sistemi (3.41)'de verilmiştir.

$$H^T = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{s}_N^T \end{pmatrix}^T \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} x_{(1)} & x_{(1+\tau)} & \dots & x_{(1+(d_g-1)\tau)} \\ & & \ddots & \\ x_{(N)} & x_{(N+\tau)} & \dots & x_{(N+(d_g-1)\tau)} \end{pmatrix}^T \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= \mathbf{a}_1^T H^T = a_{11}\mathbf{x}_1 + a_{12}\mathbf{x}_2 + \dots + a_{1n}\mathbf{x}_n \\ &\vdots \\ Y_n &= \mathbf{a}_n^T H^T = a_{n1}\mathbf{x}_1 + a_{n2}\mathbf{x}_2 + \dots + a_{nn}\mathbf{x}_n \end{aligned} \quad (3.41)$$

Burada $Cov(H^T) = \Sigma$, $Var(Y_i) = \mathbf{a}_i^T \Sigma \mathbf{a}_i$ ve $Cov(Y_i, Y_k) = \mathbf{a}_i^T \Sigma \mathbf{a}_k$ şeklinde gösterilir ($i, k = 1, 2, \dots, n$). Elde edilecek ana bileşenler $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ gömme uzayı vektörlerinin koordinatlarının lineer bileşiminden oluşur ve birbirleri ile korelâsyonsuzdur. Buna göre ilk ana bileşen Y_1 , $Var(\mathbf{a}_1^T H^T)$ değerini $\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 = 1$ göre maksimum yapacak şekilde lineer kombinasyona sahiptir. İkinci ana bileşen ise $Var(\mathbf{a}_2^T H^T)$ değerini $\mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 = 1$ 'e göre ve $Cov(\mathbf{a}_1^T H^T, \mathbf{a}_2^T H^T) = 0$ olacak şekilde maksimum yapan değerdir. Süreç bu şekilde devam eder. $Cov(H^T) = \Sigma$ matrisinin özdeğer-özvektörleri $(\zeta_i, \mathbf{e}_i)$ ve $\zeta_1 \geq \zeta_2 \geq \dots \geq \zeta_p \geq 0$ ise, i . ana bileşen $Y_i = \mathbf{e}_i^T H^T$ şeklinde elde edilmektedir. Toplam varyansın her bir bileşen tarafından açıklanma oranını özdeğerler vasıtasıyla hesaplanır (3.42).

$$\sigma_{11} + \sigma_{11} + \dots + \sigma_{nn} = \sum_{i=1}^n Var(\mathbf{x}_i) = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_p = \sum_{i=1}^n Var(Y_i) \quad (3.42)$$

Bu şekilde k . ana bileşenin toplam değişkenliği açıklamadaki katkısı (3.43) deki gibi hesaplanır.

$$\frac{\zeta_k}{\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n} \quad (3.43)$$

Toplam varyansın yüksek bir oranını açıklayacak olan ilk bileşenler seçilerek, aslında asıl

yapıya katkısı olmayan gürültü azaltılabilmektedir. Yeni değişkenler örneğin ilk %95'lik açıklama oranına sahip değişkenlerin ele alınması ile elde edilebilir (Johnson ve Wichern, 2002). Bu sayede gürültü yaratan vektörler tek bir alt uzaya gömülüp, topluca analizden çıkarılır. Bu süreç aynen tekrar edilerek uygun bir gürültü seviyesine ulaşılır. İlk gömme boyutunun yüksek seçilmesi gürültünün azaltılması açısından avantajlıdır. Sonuç olarak görsel etkinliği yüksek bir temsili gömme uzayı elde edilebilir. Medio (1993), bu şekilde elde edilen gömme uzayının, Takens kriterlerine dayanan gömme uzayına göre daha iyi görsel sonuçlar verdiğini göstermiştir.

3.6.2 Gürültünün Azaltılması

Serideki deterministik öge, yani sinyal ile rastsal dalgalanmaların birbirinden ayrılmaya çalışılması gürültü azaltımı olarak adlandırılmaktadır. Gürültünün varlığı gömme boyutunu arttırması nedeniyle analizler için sorun teşkil eder.

Lineer bir yaklaşım olarak, zamansal komşuluklardan yararlanılarak hesaplanan hareketli ortalamalar, $\bar{x}_n = (1/(2m+1)) \sum_{j=-m}^m x_{n+j}$, gürültüyü azaltmak için kullanılabilir. Benzer şekilde ağırlıklandırılmış ortalamalar da kullanılabilir, $\bar{x}_n = (x_{n-1} + 2x_n + x_{n+1})/4$. Daha yumuşatılmış bir seri için yöntem birkaç kez tekrarlanabilir. Ancak gürültüyü azaltmak için lineer metotların kullanılmasının deterministik sinyali önemli ölçüde bozabileceği belirtilmektedir (Sprott, 2003).

Lineer olmayan gürültü azaltımı metotları faz uzayının geometrik özelliklerini ve mümkün kaotik yapılanmaları da dikkate aldığı için daha uygun sonuçlar vermektedir. “Basit lineer olmayan gürültü azaltımı ” (simple nonlinear noise reduction) metodu buna örnek olarak verilebilir. Schreiber (1993) tarafından önerilen yaklaşım her bir gömme uzayı vektörünün merkez koordinatını yerel koordinatların ortalaması ile değiştirilmesini temel alır. Bu durum dinamiklerin sürekli olduğu varsayımından yola çıkarak (3.45), dinamiğe yönelik yerel tahmini içermektedir.

$$s_n = q_n + u_n, \quad q_n = f(q_{n-m}, \dots, q_{n-1}) \quad (3.44)$$

Burada u_n , q_n ile ilişkisiz olan rastsal gürültü, f ise dinamiği oluşturan deterministik kuraldır. Yöntem gereği her bir vektör $\{s_n\}$ için, $\|s_n - s_{n'}\| < \varepsilon$ şartını sağlayan ve tüm $\{s_{n'}\}$ 'leri içeren $U_\varepsilon^{(n)}$ tespit edilir. Burada ε uzaklığı gürültü yayılımını içerecek kadar geniş olmalıdır. Gürültü seviyesinin 2 veya 3 katı kadar bir mesafenin deneysel verilerde iyi sonuç verdiği belirtilmiştir (Kantz ve Schreiber, 1997). Ayrıca gömme boyutunun hesaplananlardan büyük seçilmesi ve kısa gecikme zamanının kullanılması yararlıdır. Her bir vektör için , $s_n = (s_{n-(m-1)}, \dots, s_n)$, $U_\varepsilon^{(n)}$ 'de ortalaması alınarak hesaplanan düzeltilmiş bir orta nokta koordinatı (3.45) deki gibi hesaplanır.

$$\hat{q}_{n-m/2} = \frac{1}{|U_\varepsilon^n|} \sum_{s_{n'} \in U_\varepsilon^n} s_{n'-m/2} \quad (3.45)$$

Sonuç olarak seride $s_{n'-m/2}$ 'in ortalama değeri $\hat{q}_{n-m/2}$ yerine kullanılır.

Korelasyon boyutu kavramının bir diğer uygulama alanı ise gürültü düzeyinin tespitidir. Ölçek aralığı dikkate alındığında deterministik sinyallere ait çekerlerin boyutu, yeterli gömme uzayı boyut sayısına ulaşıldıktan sonra, artan boyuta karşı duyarsızdır. Zaten bu şekilde uygun boyut sayısı bulunabilmektedir. Rastsal bir seriden üretilen gecikmeli vektörler ise boyut sayısı ne kadar artarsa artsın uzayın her yönünü tekdüze şekilde doldurur. Deterministik ve rastsal sinyaller arasındaki bu davranış farkı, gürültü seviyesinin belirlenmesinde kullanılmaktadır.

Zaman serisi için yeterli gömme boyutu sayısı $d_g = m$ olsun. Bu durumda $C_m(\varepsilon)$ ve $C_{m+1}(\varepsilon)$ toplamaları, eğer seri tamamen gürültüsüz ise, iki eğrinin birbirlerinden farkı sabit katsayının çarpımı şeklinde olur. Ancak seride gürültü var ise, bu durumda serideki gürültü boyut m 'den $m+1$ 'e geçerken, boyut artışına duyarsız kalmamaktadır. Bu durum iki farklı toplam arasında sabit değil, (3.46)'daki gibi bir ilişkinin doğmasına yol açar (Kantz ve Schreiber, 1997).

$$C_{m+1}(\varepsilon) \propto C_m(\varepsilon) \cdot C_{gürültü}(\varepsilon) \quad (3.46)$$

$d(m+1, \varepsilon) = d \ln C(m+1, \varepsilon) / d \ln(\varepsilon)$ olduğundan (3.47) sonucuna ulaşılır.

$$d(m+1, \varepsilon) = d(m, \varepsilon) + d_{gürültü}(\varepsilon) \quad (3.47)$$

(3.47)'den anlaşılacağı üzere var olan gürültü, vektörlerin uzayı rasgele doldurmasından dolayı artan boyutta etkisini hissettirmektedir. Bu halde yapılması gereken $d(m+1, \varepsilon) - d(m, \varepsilon)$ farkını tespit ederek, elde edilen değerlerin teorik bir gürültü dağılımı ile ne şekilde uyduğuna gözlemlemektir. Örneğin bu gürültünün dağılımı için Kantz ve Schreiber (1997), (3.48)'deki dağılımın geçerli olduğunu belirtmiştir.

$$d_{Gauss}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon e^{\left(\frac{\varepsilon}{4\sigma^2}\right)}}{\sigma \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\varepsilon/2\sigma)} \quad (3.48)$$

Burada çözülecek σ değeri gürültü seviyesini gösterir.

3.7 Durağanlığın Tespiti

Hemen hemen tüm zaman serisi metotları, geleneksel lineer veya lineer olmayan, bir çeşit durağanlık (nonstationarity) kavramına ihtiyaç duymaktadır (Schreiber, 1997). Durağanlık, veriye değil, sürece ait bir özelliktir ve bu veriyi üreten mekanizmanın zamanla değiştiğini vurgulamaktadır (Sprott, 2003). Durağanlığın en zayıf formu (weak stationarity), üzerinde çalışılan sistemi üreten dinamik sürece ait tüm parametrelerin ölçüm süresince sabit kalmasını gerektirir. Örneğin lineer zaman serisi analizinde ortalama $\langle x \rangle = 1/N \sum_{n=1}^N x_N$ ve standart sapma

, $\sigma = \sqrt{1/(N-1) \sum_{n=1}^N (x_n - \langle x \rangle)^2}$, gibi en fazla ikinci momentlerin sabitliğine ihtiyaç duymaktadır.

Bu durumda eğer serinin ilk yarısından elde edilen değerler ikinci yarısında değişmekte ise, durağanlık bir problem halini alır. Zaten bu olgu, durağanlık kavramının sorgulanması için temel bir yaklaşım teşkil etmektedir. Serinin herhangi bir yerinden veya aralığından elde edilen parametrelerin serinin diğer yerlerinde değişip değişmediğini kontrol etmek yararlı olacaktır. Bu kontroller istatistiksel nicelikler açısından üçüncü veya dördüncü momentlere değin yapılabilir ancak bu tip yaklaşımlar faz uzayındaki uzay-zaman etkileşimini açıklamakta yetersiz kalır. Bunun nedeni zamanda birbirine çok yakın konumda bulunan iki noktanın, gömme uzayında birbirlerinden oldukça uzak yerlerde bulunabileceği gerçeğidir. Sprot (2003), durağan olmama etkilerinin, seriden trendin ayıklanması ile azaltılabileceğini belirtmiştir. Bu amaçla seriden yüksek mertebeden bir polinom geçirilebilir ve kalıntıları ele alınır veya serinin ilk farkları üzerinde çalışılır. Benzer şekilde tümü pozitif değerler içeren hisse fiyatı gibi verilerde logaritmik ilk farklar, $\ln(x_{n+1}) - \ln(x_n) = \ln(x_{n+1} / x_n)$, kullanılabilir. Ancak uzay-zaman anlamında aranan durağan bir süreç için zamansal ilişkileri dikkate alan ve yukarıda açıklananlardan çok daha fazlasına ihtiyaç duyulmaktadır. Aslında Kantz ve Schreiber (1997), durağanlığın tam olarak sağlanamayacak bir özellik olduğunu vurgular.

Eğer dinamikleri yöneten deterministik kurallar mevcut ise, bu kurallar üretilen zaman serisi boyunca değişmeden kalmalıdır. Eğer seri durağan değilse bu durum ölçek aralığının kısalması ve boyutun artması gibi sorunlara yol açabilmektedir (Sprot, 2003). Bu amaca yönelik olarak serinin belirli parçalarından elde edilen istatistiksel değerlerin birbirleri ile karşılaştırılması yoluna gidilebilir.

Zayıf durağanlığın araştırılmasında durağanlık testleri yaygın olarak kullanılır. Zaman serisi için oluşturulan, $y_t = \rho y_{t-1} + u_t$ istatistiksel modeli için, eğer $\rho = 1$ özdeşliği geçerli ise, serinin birim kökü olduğu söylenir ve bu halde seri durağan değildir (Dickey Fuller testi). Kurulan model y 'nin gecikmeli değerlerinin bir bileşimi olarak kullanıldığında daha doğru sonuçlara ulaşılmaktadır ve ADF (Augmented Dickey Fuller) testi olarak adlandırılır. Örneğin

$$\Delta y_t = \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta y_{t-i} + u_t \text{ şeklinde bir } AR(p) \text{ modeli kurulduğunda } (\Delta y_{t-i} = y_{t-i} - y_{t-i-1}),$$

serideki uzun dönemli korelasyon ilişkilerinin de etkileri modele dahil edilmiş olur. Bu durumda $\alpha = 0$ şeklindeki sıfır hipotezinin kabul edilmesi seride birim kökün var olduğu ve

‘durağanlığın olmadığı’ şeklinde yorumlanır. Standart t istatistiğinden farklı olarak buradaki katsayıların test değerlerinin olasılıkları Dickey-Fuller tablo değerlerinden belirlenmektedir.

Zayıf durağanlık kapsamında ortalama, varyans veya birim kökün incelenmesi yeterli olsa da, aslında lineer olmayan bir inceleme için boyutlar ve Lyapunov üstelleri de bu başlıklara katılabilir. Örnek vermek gerekirse (Sprott, 2003), serinin ilk yarısından elde edilen korelasyon boyutu ile ikinci yarıdan elde edilen boyutun karşılaştırılması bir yöntem olarak kullanılabilir.

Bu çalışmada durağanlığın tespiti amacıyla kullanılan yaklaşım “çapraz-tahmin hatası” (cross-prediction error) metodudur. Schreiber (1997), bir zaman serisinin belirli bölgelerinden elde edilen parametrelerin karşılaştırılmasından ziyade, bu bölgelerin kendi benzerliklerinin karşılaştırılmasının daha güçlü bir durağanlık tespit yaklaşımı olduğunu belirtmiştir. Bu amaçla zaman serisinin bir bölümü ile diğer bölümü basitçe tahmin edilmeye çalışılır ve elde edilen tahmin hataları bir veritabanı oluşturur.

$\{x_n; n = 1, \dots, N\}$ bir zaman serisi olsun ve l uzunluğunda parçalara ayrılsın. Bu durumda i . parça $W_i^l = \{x_{(i-1)l+1}, \dots, x_{il}\}$ olur. Bu durumda karşılaştırmalarda kullanmak üzere parçadan elde edilecek bir γ_i değerine ihtiyaç duyulmaktadır. Schreiber (1997) bu değeri parçaların karşılıklı ilişkilerinin tespiti amacıyla çapraz olarak kullanmıştır, yani $\gamma_{ij} = \gamma(W_i^l, W_j^l)$. Burada γ_{ij} çapraz-tahmin hatası olarak tanımlanmaktadır. Bu durumda iki farklı seriden, $X \equiv \{x_n, n = 1, N_X\}$ ve $Y \equiv \{y_n, n = 1, N_Y\}$, m gömme boyutu olmak üzere elde edilecek gömme uzayı vektörleri sırasıyla $x_n = \{x_{n-m+1}, \dots, x_n\}$ ve $y_n = \{y_{n-m+1}, \dots, y_n\}$ şeklinde olur. Bu aşamada sabitlenmiş bir ε için y_{n+1} değeri X ’deki vektörler alınarak tahmin edilmeye çalışılır. y_{n+1} için X kullanılarak elde edilen yerel sabit tahmini (3.49)’deki gibi verilir.

$$\hat{y}_{n+1}^X = \frac{1}{|U_\varepsilon^X(\bar{y}_n)|} \sum_{\bar{x}_{n'} \in U_\varepsilon^X(\bar{y}_n)} x_{n'+1}; \quad U_\varepsilon^X(\bar{y}_n) = \{\bar{x}_{n'} : \|\bar{x}_{n'} - \bar{y}_n\| < \varepsilon\} \quad (3.49)$$

Burada $U_{\varepsilon}^X(\bar{y}_n)$, X kümesinde $\bar{y}_n$ 'nin ε komşuluğunu, $|U_{\varepsilon}^X(\bar{y}_n)|$ bu komşuluktaki eleman sayısını göstermektedir. İki parçayı birbirleri ile karşılaştırmak için, benzer şekilde $U_{\varepsilon}^Y(\bar{y}_n)$ 'den $\hat{y}_{n+1}^Y$ elde edilerek y_{n+1} yerine kullanılmaktadır. Sonuç olarak çapraz tahmin hatası (3.50) 'deki gibi verilir

$$\gamma(X,Y) = \sqrt{\frac{1}{N_Y - m} \sum_{n=m}^{N_Y-1} (\hat{y}_{n+1}^X - y_{n+1})^2} \quad (3.50)$$

$\gamma(X,Y)$ değeri X kümesindeki dinamik özelliklerin Y kümesine ait değerleri ne hassaslıkta tahmin edebildiğinin bir ölçütüdür. Bu bağlamda çekerin özellikle geometrik özelliğindeki bir değişimi, evrensel sabitler değişmese de, algılayabilmektedir. Durağan bir zaman serisi için temel olarak $\gamma(W_i^l, W_j^l)$ değeri, i, j 'den bağımsız olmalıdır.

Durağanlıkla yakından ilgili diğer bir konu ise zamansal ilişkinin, uzaysal ilişkileri etkileyip etkilemediğidir. Korelasyon boyutu uzaydaki noktaların birbirleri ile olan geometrik ilişkilerinin bir ölçütü olduğundan, bu durum, hesaplanan korelasyon toplamları $\log(C(\varepsilon))$ ile $\log(\varepsilon)$ 'a ait ölçek aralığında rastlanan S biçimli nokta saçılımına yol açabilmekte, bu aralıktan boyutun hesaplanabilmesi için gerekli düz regresyon doğrusunun geçirilmesini engellemektedir (Kantz ve Sreiber, 1997). Bu ve benzeri sorunları engellemek için önerilen yöntem uzay-zaman ayırım çizimleridir (space-time separation plot). Zaman serisinde verilen iki nokta arasındaki zamansal mesafenin, uzaydaki konumlarını etkilediği şeklindeki varsayımın reddedilmesi bir yaklaşım olarak kullanılabilir. Bu amaçla, zaman uzaklığı Δt 'ye karşılık, aralarında ε 'dan daha küçük mesafe bulunan gömme uzayı noktalarının sayısı bir grafik olarak çizdirilir. Eğer grafikte artan Δt 'ye karşılık ε mesafedeki nokta sayısında da bir artış varsa, bu durumda evrensel sabitlerden ziyade zamansal ilişkinin, uzaydaki konumları etkilediği sonucuna varılır ve uygun gecikme değeri grafikten belirlenir.

3.7.1 Determinizmin Test Edilmesi

Determinizmin tespit edilmesine yönelik diğer bir yöntem ise Kaplan ve Glass'a (1992) aittir.

Direkt olarak faz uzayı vektörlerini kullanan yaklaşım, gömme uzayında gerçekten bir faz akımı olup olmadığını belirlemeye çalışmaktadır. Bu amaçla yeniden oluşturulan faz uzayında vektörlerin yaklaşık olarak hesaplanması gerekir. Yöntem, deterministik bir sistem tarafından üretilen ve faz uzayı yörüngelerine teğet olan gözlem vektörlerinin, faz uzayındaki konumların bir fonksiyonu olması gerektiği, dolayısıyla verilen bir bölgedeki (region) tüm teğet vektörlerin benzer yönlere sahip olduğu kabulüne dayanır. Eşit büyüklükte j adet bölgeye ayrılan faz uzayında, her bir bölgeden geçen k adet vektör ($k = 1, n_j$) bu alanda birim uzunluğa sahip yörünge vektörlerini $v_{k,j}$ oluşturmaktadır. Vektörlerin yönünü bölgeye girdikleri nokta ve bölgeden çıktıkları nokta belirler. j bölgeden elde edilecek vektör ise tüm

geçişlerin ortalaması olarak, $V_j = \sum_{k=1}^{n_j} v_{k,j} / n_j$ olarak verilebilir. Elde edilen vektörler

deterministik bir yapı sergilemesi halinde sürekli bir akış oluşturması beklenir. Aksi halde eğer vektörlerin bir sonraki yönleri rastsal şekilde belirleniyorsa bu durum uzayda bir rastsal yürüyüş (random walk) örneği oluşturur. Kaplan ve Glass (1992) rastsal yürüyüşü, d boyutlu uzayda birim uzunluğa sahip n adımdan oluşan, ve bir sonraki adıma geçiş açısının rastsal şekilde belirlendiği bir hareket olarak tanımlamaktadır. Bu halde her bir adımdaki ortalama yer değiştirme formülü (3.51) şeklinde verilmektedir.

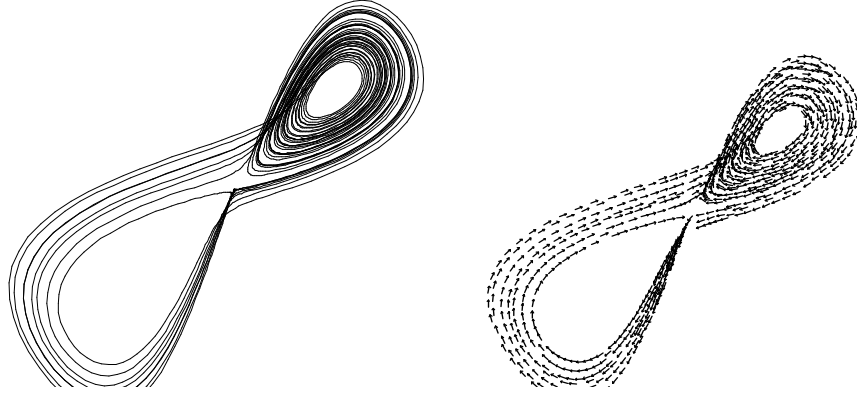
$$\bar{R}_n^d = \left(\frac{2}{nd} \right)^{1/2} \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\Gamma(d/2)} \quad (3.51)$$

Elde edilen vektörler ile rastsal yürüyüş arasındaki bağlantı, V_j 'lerin tüm bölgelerdeki ağırlıklandırılmış ortalamaları ile (3.52)'deki gibi verilir (Abarbanel, 1993).

$$\bar{\Lambda} = \left\langle \frac{(V_j)^2 - (R_{n_j}^d)^2}{1 - (R_{n_j}^d)^2} \right\rangle \quad (3.52)$$

Burada eğer $\bar{\Lambda} = 1$ ise sistem deterministik yapı, $\bar{\Lambda} = 0$ ise rastsal yürüyüş sergilemektedir. Eğer sistem deterministik ise tüm bölgelerdeki hesaplanan V_j 'lerin ortalamasının 1 olması

beklenir. Bu durum aynı bölgede bulunan vektörlerin yönleri ile yakından ilgilidir. Örneğin vektörler arasında dik bir kesişme var ise bu o bölgeden hesaplanan vektörün uzunluğunu azaltır. Böylece ortalama değer, faz uzayında aynı bölgede kesişerek teklik ilkesini ihlal eden durumların yoğunluğu için bir nicelik belirtmektedir.



Şekil 3.24 Lorenz çekerinden elde edilen tahmini faz uzayı vektörleri.

3.7.2 Analizlerin Tutarlılığı (Surrogate Data Method)

Kaotik olduğundan şüphelenilen zaman serilerinden elde edilen evrensel sabitler genellikle kullanılan bilgisayar programlarının ve istatistiksel hataların gölgesinde kalmaktadır. Seriden elde edilen değerler gerçekten deterministik kaosu bir varlığına kanıt mıdır, yoksa tesadüfen gerçekleşmiş durumlardan mı ibarettir? Tamamen rastsal sistemler de kaos tanısı ile neticelenecek değerler vermektedir. Analizlerin tutarlılığı açısından seriden elde edilen değerler, istatistiksel olarak seri ile aynı özellikte olan, fakat determinizmi ayıklanmış serilerden elde edilen değerler ile karşılaştırılması özellikle önerilmektedir (Sprott, 2003; Kantz ve Schreiber, 1997). Bu amaçla eldeki seri kullanılarak seri ile aynı dağılım özelliklerine sahip seriler üretilerek aynı evrensel değerler elde edilir. Seri rastsal olarak karıştırılarak asıl seri ile toplamda aynı ampirik dağılıma sahip veriler üretilir. Buradaki asıl amaç altta yatabilecek tüm dinamik yapıyı ortadan kaldırmaktır. Oluşturulan yeter sayıda ‘katışık seriden’ (surrogate data) elde edilen boyutlar ve üsteller nicelikler için örneklem oluşturur. Bu örneklem asıl zaman serisinden elde edilen nicelikler için bir ölçüttür. %95

güven düzeyinde elde edilen niceliklerin katışık seridekilerle aynı ana kütteden geldiği hipotezi reddedilmesi durumunda eldeki seriyi üreten dinamiklerin rastsal bir yapı tarafından meydana getirilemeyeceği sonucuna varılır. Bu tip bir katıştırma da korunan tek özellik dağılımın parametreleri olduğundan görece güçsüz bir yaklaşımdır.

Zaman serisindeki istatistiksel ve lineer ilişki özelliklerin tamamının korunduğu bir katışık seri daha güçlü bir test aracıdır. Bu başlıklara ortalama, varyans, otokorelasyon ve güç spektrumu verilebilir. Burada sıfır hipotezi, düşük boyutlu bir kaosa ait niceliklerin lineer dinamikler (otokorelasyonlar) tarafından meydana getirildiğidir. Oluşturulan katışık seri sadece lineer ilişkileri koruyacağından, üretilmeleri sırasında asıl seri üzerinde sadece lineer olmayan ilişkileri bozar.

Bir zaman serisinin güç spektrumu seriye ait periyodik özelliklerle ilgilidir. Herhangi bir fonksiyon periyodik terimlerin toplamı şeklinde yazılabilmektedir. Bu toplam Fourier seri açılımının bir uzantısıdır (3.55). $\omega(t)$ fonksiyonunun sürekli Fourier dönüşümü (3.53)'deki gibidir.

$$\tilde{\omega}(fr) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{2\pi i \cdot fr \cdot t} dt, \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (3.53)$$

Benzer şekilde sonlu ve kesikli bir serinin dönüşümü ise (3.54)'deki gibi yazılır.

$$\tilde{\omega}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N s_n e^{2\pi i k n / N} \quad (3.54)$$

Burada frekanslar, Δt gözlemler arasındaki süre olmak üzere $fr_k = k / N\Delta t$ şeklindedir ($k = -N/2, \dots, N/2$). Fourier dönüşümleri sinyalin zamandaki konumu ile, sinyale ait belirli frekanslar salınımların (oscillation) fazları ve diğer salınımlarla olan faz ilişkileri arasında bire-bir eşleşme sağlar (Kantz ve Schreiber, 1997). Dönüşümün temeli Fourier serilerine

dayanmaktadır ve seri açılımındaki her bir periyodik terime ait katsayılar (c_n) genlik (amplitude) adını alır. Örneğin $\omega(t)$ 'ye ait Fourier serisi kompleks notasyonda (3.55)'deki gibi yazılır.

$$\omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i.n.t} \quad (3.55)$$

Genlikle yakından ilişkili olarak güç spektrumu $Spc_k = |\omega_k|^2$ şeklinde tanımlanmaktadır. Güç spektrumunun zaman serisinin lineer yapısı ile ilişkisi otokorelasyon fonksiyonuna dayandırılabilir. Otokorelasyon fonksiyonunun Fourier dönüşümü serinin güç spektrumunu verir (Kantz ve Schreiber,1997). Bu nedenle güç spektrumunu koruyan bir rastsal dönüşüm serinin sahip olduğu lineer ilişkileri bozmaz. Spektrum özellikle bir sistemin salınımları üzerinde çalışırken yararlıdır. Tamamen periyodik veya yarı-peiyodik hareketler keskin ve sonlu sayıda zirve yapan spektral çizgilere yol açar. Kaotik zaman serileri açısından güç spektrumunun önemi, sistemin gürültüden ayırt edilememesinde yatmaktadır. Kaotik bir sinyal geniş band aralığında (sürekli) ve bazen zirve yapan spektruma sahiptir. Benzer şekilde deterministik olmayan gürültü de geniş band spektruma sahiptir.

Katışık seriyi kesikli Fourier dönüşümü kullanarak elde etmek için izlenecek yol şu şekildedir (Kantz ve Schreiber,1997): Öncelikle serideki ($\{x_i\}_{i=1}^N$) verilerin Fourier dönüşümü

gerçekleştirilir, $\tilde{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N x_n e^{2\pi i k n / N}$. Buradaki $\tilde{x}_k$ kompleks terimi, $0 < k < N$, $[0, 2\pi]$

aralığında tekdüze olarak dağılan rastsal fazlar (ϕ_k) ile çarpılır $\tilde{x}_k' = \tilde{x}_k e^{i\phi_k}$. Ters Fourier

dönüşümü ile, $x_n' = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \tilde{x}_k' e^{-2\pi i k n / N}$, istenen spektrumdaki katışık seri elde edilmiş olur.

4. UYGULAMA: TÜRK LİRASI-DOLAR ALIŞ FİYATLARI VERİLERİNİN GÖMME UZAYININ OLUŞTURULMASI VE KAOS'UN VARLIĞININ ARAŞTIRILMASI

Çalışmanın uygulama safhasını içeren bu kısımda, 3. bölümde aktarılan konuların gerçek sistemler üzerindeki analiz süreçleri irdelenmiş, 3. kısımda değinilmeyen ama uygulama da kullanılan durumlara ek olarak yer verilmiştir. Bu başlık altında öncelikle çalışma alanı tespit edilmiş, alanda yapılan geçmiş çalışmalar ve sonuçları irdelenmiştir. Çalışma konusunda detay bilgi içermeyen bazı teorik açıklamalar yapılarak, çalışma alanı tanıtılmaya çalışılmıştır. Bu kısmın sonunda ise uygulama safhasında açık şekilde anlatılmayan bazı analizler ile asıl uygulama konusu analiz sonuçları çizelgeler vasıtasıyla karşılaştırılmış ve elde edilen bulguların değerlendirilmesi ve tartışmalar bir sonraki kısma bırakılmıştır.

4.1 Literatür Araştırması ve Uygulama Alanının Seçilmesi

Düşük boyutlu faz uzayına sahip lineer olmayan deterministik sistemlerde, zaman serisi verilerinin tahmin süreci iyi sonuçlar vermektedir. Özellikle fiziksel özellikleri iyi bilinen durumların bu tip yapılara yol açması ve bunların tespit edilmesi doğaldır. Gezegen hareketleri, elektriksel bazı devreler, akarsularda biriken tortullar veya değişen debiler vb. bunlara örnek olarak verilebilmektedir. Özellikler literatür araştırması sırasında sıklıkla karşılaşılan bir durum olarak, hidrolojik zaman serisi verilerinin kaotik analizlere konu olduğu görülmektedir. Örneğin Park vd. (2005), güney Kaliforniya bölgesindeki bir su depolama alanından elde edilen ve 35 yılı kapsayan günlük su seviyesi verilerini analiz etmişlerdir. Analiz sonucunda pozitif Lyapunov üsteline sahip 4 boyutlu kaotik bir çeker varlığı tespit edilmiştir. Öte yandan Kim vd. (2001), ABD'nin Kolorado eyaletinde yürüttükleri atık su miktarını içeren zaman serilerinin analizi çalışmalarında uyguladıkları BDS istatistiği, korelasyon boyutu ve CRP (Close Return Plot) analizleri sonucunda, kaotik dinamiklerin varlığına ilişkin yeterli kanıtın bulunmadığını belirtmişlerdir.

Ekonomi veya atmosferik sistemler gibi daha kompleks yapılarda tahmin süreci görece daha zordur. Aihara ve Katayamu (1995), bilimsel araştırmalarda yen/\$ kuru ve hisse getirileri üzerinden yapılan lineer olmayan deterministik analizler sonucunda düşük boyutlu kaos'a rastlanmadığını belirtmişlerdir. Medio (1993), makroekonomik serilerin aylık veriler içermesi

ve gürültü düzeyinin yüksek olması nedeni ile kaos içerip içermediğinin tespitinin zor olduğunu söylemektedir. Fakat finansal seriler için durum farklıdır. Serilerin en azından günlük olarak elde edilebilmesi, evrensel niceliklerin hesaplanmasında ve güvenilirliğinde artış sağlamaktadır.

Bu çalışmada uygulama alanı olarak finansal bir zaman serisi olan çapraz döviz kurları (cross rates) seçilmiştir. Geçen 20 yıl içerisinde finansal ve ekonomik alanlarda kaotik yapıların tespit edilmesine yönelik kayda değer sayıda araştırma gerçekleştirilmiştir. Moosa (2000), bu çalışmalardan elde edilen sonuçları şu şekilde özetlemektedir:

- Korelasyon boyutu ve diğer testleri baz alan araştırmalar döviz kurunda lineer olmayan yapıların varlığını doğrulamaktadır
- Kaosun varlığına ilişkin çok az kanıt bulunmuştur
- Uygun ARCH ve GARCH modellerinin kalıntıları lineer olmayan durumlar için kanıt taşımamaktadır. Sonuç olarak bu yaklaşımlar döviz kurlarının davranışlarını modellemekte uygun ve yeterlidir.

Yukarıda maddeler halinde aktarılan gözlemlerin geçerliliği doğrulamak amacı ile, bilimsel literatürdeki çeşitli yayınlar incelenmiştir. Bulgular şu şekildedir: Panas ve Ninni (2000), Rotterdam ve Akdeniz petrol piyasalarındaki ürünlerin günlük petrol fiyatları zaman serileri üzerinde yapmış oldukları çalışmalarda, birçok ürünün fiyat seyrinin kaotik olduğunu tespit etmişlerdir. Chatrath vd. (2001), altın ve gümüşe ait vadeli işlem sözleşme fiyatlarını 1975-1995 arasındaki günlük zaman serilerini incelemişlerdir. Ancak araştırmacılar mevsimsel olarak düzeltilmiş verilerin analizi sonucunda, kaosun varlığına ilişkin yeterli kanıt bulamamıştır.

Döviz kurlarında kaos'un varlığına ilişkin çarpıcı bir tespit Scarlat vd.'ne (2006) aittir. Araştırmacılar Romanya ulusal parası-dolar kurunu (ROL/USD), son 16 yıllık periyodu iki ayrı döneme ayırarak incelemişlerdir. Sovyetler Birliğinin dağılması sonrasında doğu bloğu ülkelerinin serbest piyasa ekonomisine geçişi, verilerin zaman aralıklarına bölünerek incelenmesini gerektirmiştir. Örneğin araştırmacılar 1997 yılında gerçekleşen ani kur artışının, yeni politik rejimin yapısal dönüşümleri sağlamaya yönelik bir politikayı kabul etmesinden kaynaklandığını belirtmektedir. Bu nedenle 1997 yılı araştırmacılar tarafından bir

dönüm noktası olarak değerlendirilmiş ve analizler iki ayrı zaman aralığına, 1990-1997 pasif geçiş ve 1997-2005 aktif geçiş olarak değerlendirmişlerdir. Aktif geçiş döneminin analizlere ve tahmin sürecine daha uygun olduğunu belirtmektedirler. Analiz için günlük 4002 adet veri kullanılmış, serilerdeki ani sıçramalar kur artış oranları dikkate alınarak değerlendirilmiştir. Seriden trendin ayıklanması fark alınarak değil, zamana bağlı 13. dereceden bir polinomdan elde edilen kalıntıları üzerinden gerçekleştirilmiştir. Analizler sonucunda pasif geçiş döneminde pozitif Lyapunov üsteline sahip gömme boyutu 4 olan bir yapı, aktif geçiş döneminde ise pozitif Lyapunov üsteline sahip gömme boyutu 6 olan bir yapı bulunmuştur. Her iki dönemin korelasyon boyutları kesirli değerlerdir. Sonuç olarak ROL/\$ kuru kaotik bir yapı sergilemektedir. Alsaleh (2002) Kuveyt -Amerika Birleşik Devletleri (Kuwait-US) ve Kuveyt-Britanya (Kuwait-GBP) para birimleri arasındaki döviz kuru değerlerine ilişkin 1150 veriyi kapsayan bir analiz gerçekleştirmiştir. Fraktal boyut, Lyapunov üstelleri ve Hurst üsteli* değerlerini karşılaştırdığı bu çalışmada Alsaleh, Kuwait-US kurunun Kuwait-GBP kuruna göre daha tahmin edilebilir bir yapı içerdiğini göstermiştir.

Brooks (1998), Scarlat vd. (2006) ve Alsaleh'e (2002) göre daha önce yayımlanmış olan çalışmasında çok önemli bir gerçeğe dikkatleri çekmektedir. Brooks, bazılarında bu tez kapsamında da değinilen, çeşitli analizler vasıtasıyla Sterling'e endeksli 10 farklı döviz kuru* verisinin 20 yılı içeren günlük zaman serileri incelenmiştir. Verilerin analizi sırasın logaritmik getiri oranları dikkate alınmıştır. Araştırmacı, birim köke yakın duran lineer serilerin daha düşük gömme boyutu sergileyebileceğine dikkati çekmektedir. Analiz kapsamında korelasyon boyutları ve Lyapunov üstelleri farklı boyutlar için ayrı ayrı değerlendirilmiştir. Analizler sonucunda pozitif Lyapunov üsteli elde edilememiştir. Elbette belirli bir hatapayı mümkün olduğundan araştırmacı sonucu, "kaosun varlığına yönelik yüksek olasılığın pek mümkün gözükmediği" şeklinde değerlendirmiştir. Brooks (1998) elde edilen sonuçlardan daha çok kaos konusunda yapılan araştırmalara dikkat çekmiştir. Kendisi ekonomik serilerde ortaya çıkan kaotik sonuçların robust olmayan durumları yansıttığını ve aşırı gürültünün çoğunlukla analiz sonuçlarına etki edebileceğini vurgulamıştır. Sonuç olarak genel geçer bir tartışma olan 'kaos mu gürültü mü' sorusu hala varlığını korumaktadır. Brooks (1998) oldukça

* Hurst üsteli, tez kapsamında incelenmemiştir.

* Avusturya Şilini, Kanada Doları, Danimarka Kronu, Fransız Frangı, Alman Markı, Hong-Kong Doları, İtalyan Lireti, Japon Yeni, İsviçre Frangı, Amerikan doları.

düşündürücü bir savı da ortaya atmıştır: “Tüm bu kanıtlar ile, ve literatürün yeniden gözden geçirilmesi sonucunda robust teknikler kullanarak ekonomik serilerde kaosu varlığını tespit eden bir çalışma bulunmamaktadır. Öyle görünüyor ki, ekonomik serilerde kaosu bulunmaması eğilimi ile karşı karşıya kalmış bulunmaktayız veya en azından bu gün geçerli olan en iyi teknikler ile tespit mümkün değildir.”

Literatür araştırması kapsamında değinilen ekonomik çalışmalar ve kullanılan başlıca analiz yöntemleri Çizelge 5.1’de verilmiştir.

Çizelge 4.1 Literatür taraması: finansal serilerde kaosu tespiti konusunda yapılmış olan çeşitli çalışmalar ve kullanılan başlıca teknikler.

Yazarlar	Uygulama Alanı	Veri	Kullanılan Başlıca Teknikler	Bulgular
Panas ve Ninni (2000)	Petrol Ürün Fiyatları	Haziran 1994 - Ağustos.1998 (1161 adet günlük veri)	Korelasyon boyutu, Lyapunov Üsteli, Entropi, BDS, Brock Yaklaşımı *	Pek çok fiyatta Kaos kanıtı, bazı fiyatlarda GARCH yapısı bulunmaktadır.
Chatrath vd. (2001)	Kıymetli Maden Piyasası: Altın ve Gümüş	1975-1995 (günlük veriler)	BDS, Kolmogorov Entropisi, Korelasyon Boyutu,	ARCH etkisi bulunmaktadır (Kaos kanıtı yoktur).
Scarlat vd. (2006)	Döviz Kurları (Romanya Lionu-Dolar)	Haziran 1990 – Temmuz2005 (4002 adet günlük veri)	BDS, Korelasyon Boyutu, Lyapunov Üsteli, Hurst Üsteli	Farklı zaman dilimleri için Kaos kanıtı bulunmaktadır.
Alsaleh (2002)	Döviz kuru (Kuwait-Dolar, Kuwait-Sterlin)	1150 adet veri	Hurst üsteli, Fratal boyut, Lyapunov üsteli, CRP çizimleri **	Dolar kuru Sterlin kuruna göre daha tahmin edilebilirdir.
Brooks (1998)	Döviz Kuru (10 farklı para biriminin Sterlin cinsinden fiyatı)	Haziran 1974 – Temmuz 1994 (5191 adet veri)	Farklı gömme boyutları için Korelasyon Boyutu ve Lyapunov üsteli	Lineer olmayan ilişki mevcuttur, Kaosun kesin kanıtı bulunmamaktadır.

* Bu çalışma kapsamında incelenmemiştir.

** Bu çalışma kapsamında incelenmemiştir.

4.1.1 Döviz Kurları Hakkında Genel Bilgiler (Exchange Rate)

Nominal döviz fiyatlarına genel olarak döviz kuru adı verilir (Abel ve Bernanke, 1995). Bir para biriminin bir başka para birimi cinsinden ifade edilen karşılığına yönelik oransal bir niceliktir. Bu nicelik, her ne kadar sabit kur rejimi uygulamış ülkeler varsa da, değişkendir ve örneğin ülkeler arasında mal alımı veya direkt para transferi dolayısıyla döviz fiyatlarındaki değişikliklere bağlıdır. Buna göre döviz kuru yabancı para biriminin değiştirilebildiği ulusal para miktarıdır. Örneğin 1\$= 1.45 TL eşitliği bir kur değeridir. Benzer şekilde reel döviz kuru nominal döviz kuruna ve iki ülke arasındaki mal fiyatlarına bağlıdır. e_{nom} nominal döviz kurunu, P_f yabancı ülkedeki malın o ülkenin para cinsinden değeri, P yerli malın yerli para cinsinden değerini göstermek üzere reel kur (4.1)'deki gibi verilebilir.

$$e = \frac{e_{nom} P}{P_f} \quad (4.1)$$

Bir ülkede tek bir malın değerinin tüm değişim oranını belirleyemeyeceği aşîkârdır. Bu nedenle bir mal sepetine ödenen fiyatın, örneğin deflatörlerde kullanılan, diğer ülkeler ile karşılaştırılması gerekir. Döviz kurundaki değişim oranı incelendiğinde, fiyatlar genel düzeyindeki değişim enflasyonu vereceğinden (π, π_f) döviz kuru değişimlerinin enflasyon ile ilişkili olduğu görülmektedir (4.2).

$$\left. \frac{\Delta e}{e} = \frac{\Delta e_{nom}}{e_{nom}} + \frac{\Delta P}{P} - \frac{\Delta P_f}{P_f} \right\} \frac{\Delta e_{nom}}{e_{nom}} = \frac{\Delta e}{e} + \pi_f - \pi \quad (4.2)$$

Yerli ülkenin para biriminin görelî değerinin artması (kurun değerlenmesi), o ülkenin diğer ülke mallarına olan talebini arttırmaktadır. Bunun nedeni içerde üretilen aynı cins malların belirtilen dış ülkede üretilen mala göre nispi olarak daha pahalı olmasından kaynaklanmaktadır.

Ülkenin genel çıktı düzeyindeki (GDP) artışa karşılık diğer değişkenlerin (reel faiz) sabit kaldığı varsayılınsın. Bu durum kişilerin gelir düzeyini arttıracığından kişilerin yerli ve yabancı

mallara olan talebi artar. Yabancı mallara olan talebi karşılamak için kişiler ellerinde yerli para bulundururlar ve bu para yabancı paranın satın alınmasında kullanılır. Sonuç olarak yabancı paranın fiyatı artan talep yüzünden yükselir ve döviz kuru değeri düşer.

Döviz kurlarını etkileyen bir diğer faktör reel faiz düzeyidir. Yerli ülkenin reel faiz düzeyi yükseldiğinde, diğer değişkenler sabit kalmak şartıyla, ülkenin reel ve finansal varlıkları cazip hale gelmektedir. Bu varlıklardan yüksek oranda getiri elde etmek isteyen yabancı yatırımcılar ellerinde daha fazla yerli para bulundurmak isterler ve artan yerli para talebinden dolayı kur değerlenir. Faiz oranlarındaki yükselmenin dış ticarete etkisi döviz kurları üzerinden dolaylı olarak gerçekleşmektedir. Faiz artışı kuru değerli hale getirdiğinden, dış mallara olan talebi arttırmaktadır. Sonuç olarak reel veya nominal döviz kuruna etki eden başlıca makroekonomik değişkenler: çıktı düzeyi, dış çıktı düzeyi, iç faiz oranı, dış faiz oranı ve yerli mala olan dış taleptir (Abel ve Bernanke, 1995).

Bir makroekonomik politika aracı olarak döviz kurları ülkeler, iş dünyası ve bireyler için önem taşımaktadır. Avrupa Birliğinde ortak para konusundaki politikaların bazen çok şiddetli döviz kuru dalgalanmalarına yol açtığı görülmüştür. Esnek döviz kuru politikalarında ise merkez bankaları kur dalgalanmalarının yumuşatılması ve düzenli bir yapı için piyasaya müdahale etmektedir. Bu bağlamda merkez bankalarının piyasaya müdahaleleri üç başlık altında tartışılabilir:

- Döviz kuru dalgalanmalarının aşırı fazla olması
- Döviz kuru dalgalanmalarının ekonomik aktiviteler üzerinde büyük engelleyici etkileri
- Merkez bankasının döviz piyasasına müdahalesi ile döviz kurundaki dalgalamaları yumuşatması.

Buradaki ilk madde döviz kurları tahmininin önemine işaret etmektedir. İkinci madde ise kurların belirsizlik yaratarak iç yatırımlar ve ticareti olumsuz etkileyebileceğini belirtir. Döviz kuru belirsizliği kaynakların dağıtımı ve ihracat üzerinde de olumsuz etkilere sahiptir. Belirsizliğin iş dünyasına etkileri ise ticari kayıpların (örneğin devalüasyon kaynaklı) yaşanması ve gereksiz borçlanmanın meydana gelmesidir. Benzer durum faiz oranlarını dikkate alarak yatırımlarını değerlendirmek isteyen bireysel karar vericiler için de geçerlidir (Moosa, 2000).

4.2 Veri Seti: Araştırmaya Konu Olan Serinin Seçilmesi

Bu çalışma kapsamında Türk Lirası Dolar kuru alış fiyatlarının detaylı analizine çalışılmıştır. Doların Türk Lirası cinsinden alış fiyatlarını içeren veriler, Türkiye Cumhuriyeti Merkez Bankasının resmi web sitesinde yayınlanmaktadır (<http://tcmbf40.tcmb.gov.tr/cbt.html>). Türk Lirası Dolar kuru (alış) doların Türk Lirası cinsinden nominal değerlerini içeren veri setini kapsamaktadır. Türk Lirasından altı sıfır atılmasını takiben veriler 10^6 ile çarpılarak iki dönem aynı düzeye getirilmiştir. Alınan serilerde işlem yapılmayan günler (tatil günleri, doğal afetler vs.) seriden çıkarılmıştır. Scarlat vd. (2006) çalışmalarını benzer şekilde gerçekleştirmiştir. Kurumun web sitesinden alınan veriler, 02.01.1981–20.02.2007 aralığını kapsayan ve eksik veri içermeyen 6849 adet günlük nominal gözlemden oluşmaktadır. Dolar alış fiyatları verilerine ait tanımlayıcı istatistikler Çizelge 4.2’de verilmiştir.

Çizelge 4.2 Merkez Bankasından alınan veriye ait tanımlayıcı istatistikler

Ortalama	Standart Hata	Standart Sapma	Basıklık	Çarpıklık
376981,0517	6979,73861	577633,9914	-0,31868361	1,203
Aralık	En Küçük	En Büyük	N	
1746355	35	1746390	6849	

4.3 Türkiye’de Döviz Kurlarını Etkileyen Tarihi Olaylar

Zaman serisinin herhangi bir yerinde karşılaşılmaması muhtemel kaotik bir yapının tespit edilebilmesi için, serideki durağanlık yapısı analiz edilmiştir. Döviz kuru rejimleriyle ilgili tarihsel bir takım bilgilere ihtiyaç duyulmaktadır. Krizlerin doğasında ve derinleşmesindeki en önemli faktörlerden birinin döviz kuru rejimleri olduğunun altını çizen İnan (2002), Türk ekonomisini derinden etkileyen döviz kuru politikalarını şu şekilde özetlemiştir.

“24 Ocak 1980 tarihi Türkiye döviz kuru politikası açısından bir başlangıç dönemi gibidir. Bu tarihe kadar kontrollü ve katlı kur politikası uygulayan Türkiye, bu tarihte aldığı kararlar çerçevesinde, ‘daha gerçekçi ve esnek’ bir kur rejimine geçmeye karar vermiştir.”

“1984 yılında kur rejiminde çok önemli bir değişiklik yapılarak yerleşiklere, ticari faaliyetler

karşılığında edinilmiş dövizlerin bankalarda mevduat olarak tutulması imkânı getirilmiştir.”

“1989 Ağustos ayında kabul edilen 32 Sayılı Karar’la döviz ve efektif hareketleri üzerindeki kısıtlamaların hemen hepsi kaldırılmıştır. Yerleşik olmayanlara da döviz mevduat hesabı açma hakkı tanınmış ve TL için konvertibiliteye geçilmiştir.”

“1990-1992 yılları arasında uygulanabilen para programları hazırlanmış ve bu para programlarında döviz piyasası genellikle TCMB’nin açık pozisyonunu küçültme veya kontrol altında tutma çabalarının sonucu olan müdahalelere uğramıştır. Fakat bu müdahaleler kur rejimini etkileyecek ölçüde yoğun olmamıştır.”

“1999 yılı sonuna kadar etkileri itibarıyla esnek çipa, uygulamada da kontrollü serbest bir kur rejimi uygulanmıştır. Kur, piyasada serbestçe belirleniyor, fakat Merkez Bankası yoğun bir şekilde müdahale ediyordu. Bu dönemde, kur artışları genelde enflasyon düzeyinde veya bu düzeyin biraz altında tutulmuştur.”

“2000 yılbaşından 2001 Şubat’ına kadar bir kur temelli stabilizasyon programı uygulanmıştır. Bu kapsamda kur rejimi de esnek bir çipa olarak belirlenmiştir.”

“2001 Şubat’ından sonra, program başarısız olmuş ve Türkiye tamamen serbest bir kur rejimine geçmiştir. Halen de bu kur rejimi uygulanmaktadır.”

İnan Türkiye’nin serbest piyasaya (2002) bu süreci şu şekilde özetlemektedir: “Son yirmi yılda kur rejimlerindeki önemli değişiklikleri bir cümle ile ele aldığımız zaman iki özellik dikkat çekicidir. Birincisi, genel gelişim kontrollü bir çizgiden serbest bir çizgiye doğrudur. İkincisi, son yirmi yılda hemen hemen her tür kur rejimi uygulanmıştır.” Bu kısa başlıklardan da anlaşılacağı üzere ekonomideki döviz kuru müdahalelerden uzak ve piyasa dinamiklerinin hakim olduğu bir sisteme doğru ilerlemiştir. Sonuç olarak yakın zaman verilerinin bu dinamik yapıya daha uygun hareket etmesi gerektiği gibi bir yorum yapılabilir. Verilen bilgiler ışığında Türkiye ekonomisinin döviz kurları bağlamındaki önemli tarih aralıkları 1980-1984,

1984-1989, 1990-1992, 1990-1999, 1999-2001, 2001-2007 şeklindedir. Açıklamalardan çıkarılan diğer bir sonuç kurun tam bir serbestliğe kavuşmasının ancak 1989'dan sonra gerçekleştiğidir.

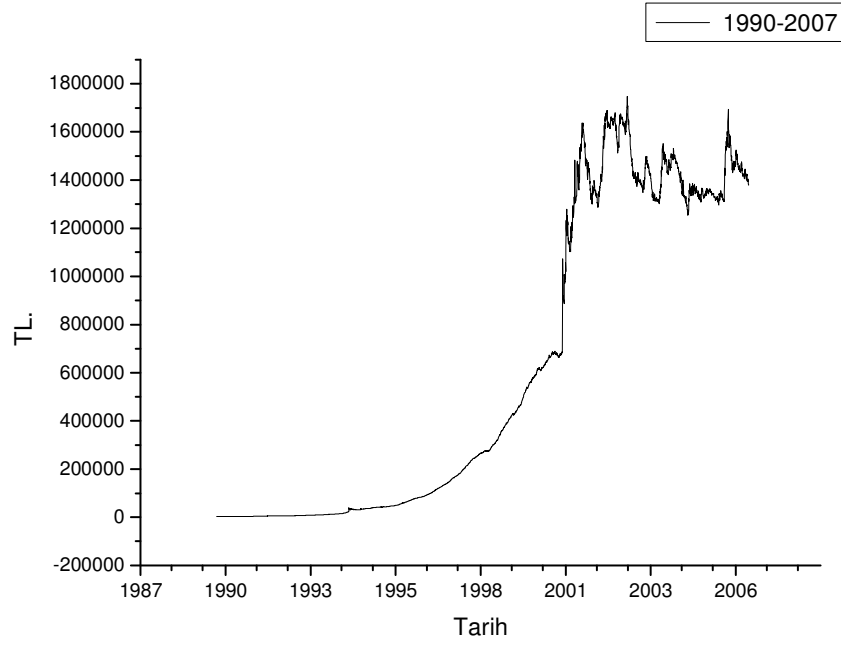
4.4 1990-2007 ve 2001-2007 Zaman Aralıklarında TL-Dolar Kuru Alış Fiyatlarının Analizi

Yukarıdaki açıklamaların ışığında, serinin analizi için 1981–1989 ve 1990-2007 dönemleri iki ayrı konjonktür olarak ele alınmıştır. Burada yapılan temel varsayım 90'dan sonra piyasa dinamiklerinin asıl yapısının ortaya çıkmasıdır. Scarlat vd. (2006) yaptığı açılıma benzer olarak 1981–1989 zaman aralığı Türkiye ekonomisi için pasif dönem, 1990–2007 aralığı ise aktif dönem bir dönemi yansıtmaktadır. Bu nedenle çalışma kapsamında sadece 1990 sonrası döviz kurları alınmıştır.

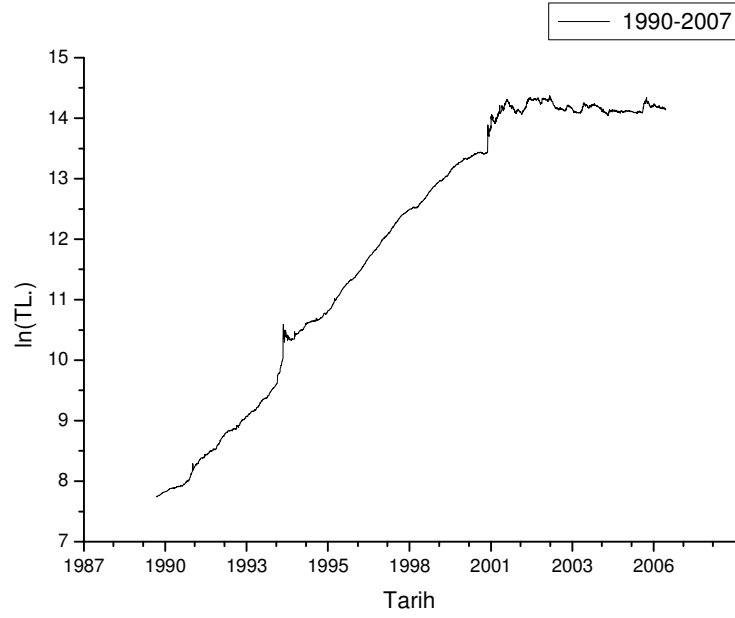
Çizelge 4.2 1990-2007 Logaritmik fark serisine ait tanımlayıcı istatistikler.

Zaman Aralığı	Seri Adı	Veri Sayısı (N)	Ortalama	Std. Sapma	Basıklık	Çarpıklık
03.01.1990-20.02.2007	Logusd9007	4317	0,001480456	0,012156846	291,6387	10,7529
Aralık	En Büyük	En Küçük	ADF istatistiği	ADF (sabit)	ADF (sabit+trend)	
0,460369	0,334731987	-0,125637	-8,47 $p < 0.01$	-52.84 $p < 0.01$	-53.13 $p < 0.01$	

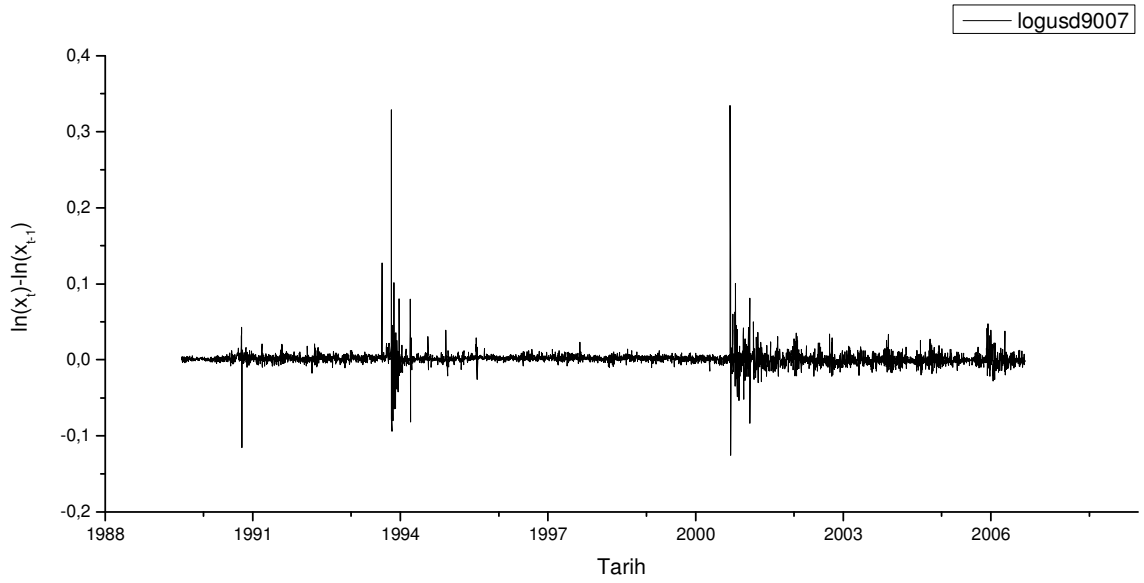
Bu başlık altında alış fiyatlarının ilgili zaman aralıklarında herhangi bir kaotik süreç izleyip izlemediği araştırılmıştır. Bu amaçla öncelikle serilerin mümkün olan mertebede durağan olmasına çalışılmış, doğal logaritması alınmış seri değerlerinin ilk farkları ile seride zayıf durağanlık sağlanmıştır (Şekil 4.3). Doğal logaritması alınan seriye ait tanımlayıcı istatistikler ve değişken adı Çizelge 4.2'de verilmiştir.



Şekil 4.1 Dolar alış fiyatlarına ait zaman serisi (1990-2007)



Şekil 4.2 Doğal logaritması alınan dolar alış fiyatlarına ait verilerin zaman serisi



Şekil 4.3 1990-2007 Logaritmik ilk farkları alınmış zaman serisi: logusd9007.

4.4.1 Uygulamada Kullanılan Bilgisayar Programları

Çalışma kapsamında 5 temel bilgisayar programı kullanılmıştır. Bunlar;

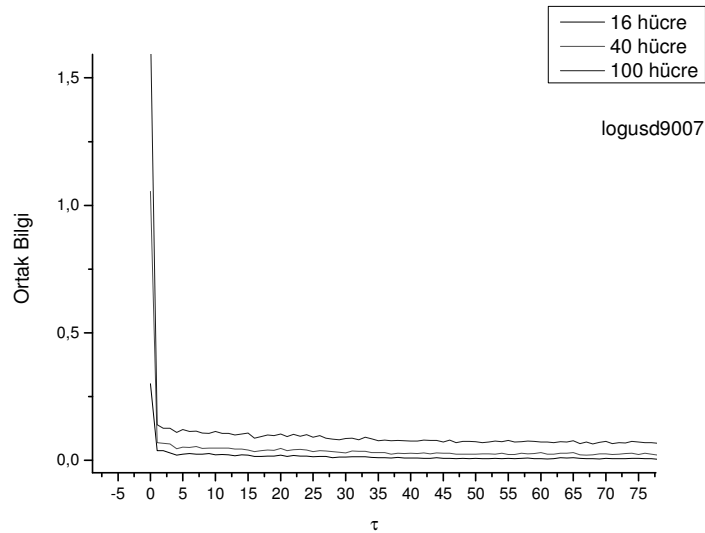
- TSTOOLS 1.11
- NDT (Nonlinear Dynamic Toolbox)
- TISEAN 2.1
- Matjaž Perc tarafından yazılmış determinism.exe ve stationarity.exe program parçacıkları (Perc, 2005).
- Eviews 4.1

şeklindedir. Kullanılan programlar ile ilgili bilgiler geniş yer kapsamaktadır. Bu nedenle programların alındığı yerler ve detaylı açıklamaları, kullanılan komutların tamamı ve ayrıntılı bilgiler Ek 3’de verilmiştir.

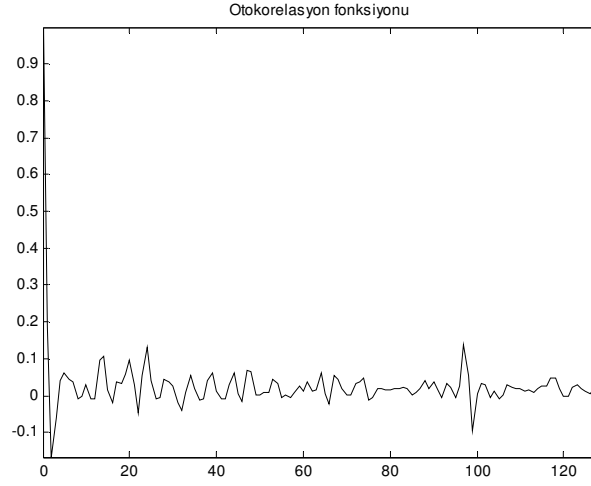
4.4.2 Faz Uzaı Parametrelerinin Tespiti

Bir serinin faz uzaının oluşturulması için gereken ilk bilgi zaman serisinden gömme uzaı vektörlerini oluştururken kullanılacak pencere aralıının değeridir. Eğer uygun bir faz uzaı oluşturulamaz ise, vektörlerin birbirinden çok uzak veya çok yakın olması gibi u durumlar ortaya çıkar. Aynı zamanda Takens'in belirttiği üzere uygun bir faz uzaı, deterministik yaklaşım uyarınca, yörüngelerin birbirleri ile keşişmemesini garanti altın almalıdır (Urbach,2000).

Faz uzaını oluşturmak için belirlenen ilk parametre gecikme zamanıdır. Gecikme zamanının tespiti amacıyla TSTOOLS ve TISEAN programları eşanlı olarak kullanılmıştır. TSTOOLS programı ortak bilgi fonksiyonu ve otokorelasyon fonksiyonu grafiklerini herhangi bir parametre ayarı olmadan otomatik olarak vermektedir. TISEAN programında ise ortak bilgi fonksiyonu değerleri mutual.exe program parçacığı kullanılarak hesaplanmıştır. Programın hesaplanmasında parametre olarak girilen hücre sayısı, koşullu entropinin belirtilen hücelere ait nokta dağılımlarının kullanılarak hesaplanması anlamına gelmektedir. Farklı hücre sayılarına göre hesaplanan ortak bilgi fonksiyonları ile tahmini ve yeterli bir gecikme zamanı elde edilebilir. Logusd9007 serisi için otokorelasyon ve ortak bilgi fonksiyonları elde edilmiş ve uygun gecikme değeri ortak bilgi fonksiyonunun minimuma ulaştığı ilk nokta olarak alınmıştır. Bu şekilde hesaplanan minimum nokta ve gecikme zamanı 1-5 arasıdır. Bilginin çoğu ilk gecikmede zaten kaybedildiğinden, gecikme değeri olarak 1 alınmıştır.

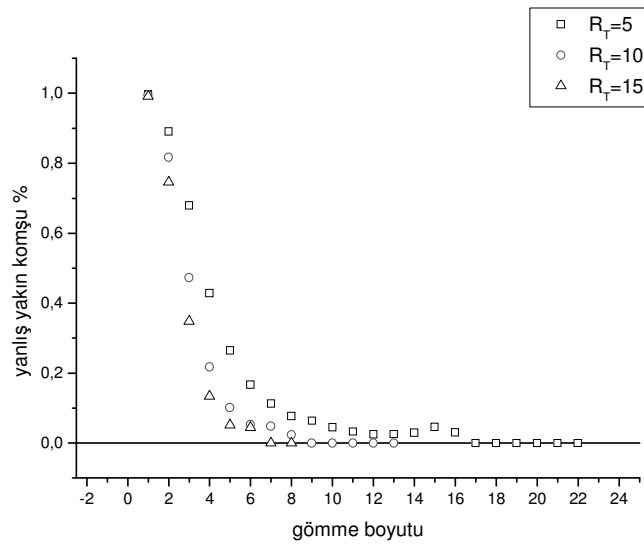


şekil 4.4 Logusd9007 serisinden elde edilen ortak bilgi- τ grafiği

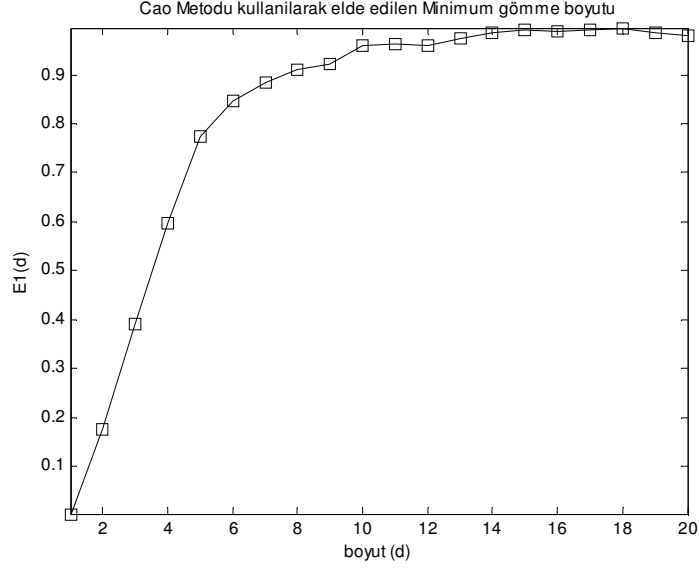


Şekil 4.5 Logusd9007 serisinden elde edilen otokorelasyon fonksiyonu grafiği

Benzer şekilde bu gecikme zamanı kullanılarak elde edilecek yanlış yakın komşular yüzdesi de faz uzayı yörüngelerini birbirinden ayırmak için kullanılması gereken minimum boyut sayısını sağlamaktadır. Boyut sayısının etkin olarak tespit edilebilmesi için Cao yaklaşımının uygun olarak $E_d^1 - d$ grafiğindeki dirsek noktaları belirlenmiş ve boyutun hesaplanmasında dikkate alınmıştır. Bu amaçla TSTOOLS programı yardımıyla uygun gecikme sayıları (τ), en yakın komşuların sayısı (1) ve referans nokta sayısı (tüm noktalar) programa girilmektedir. Elde edilen grafiksel sonuçlar Şekil 4.6'da verilmiştir.



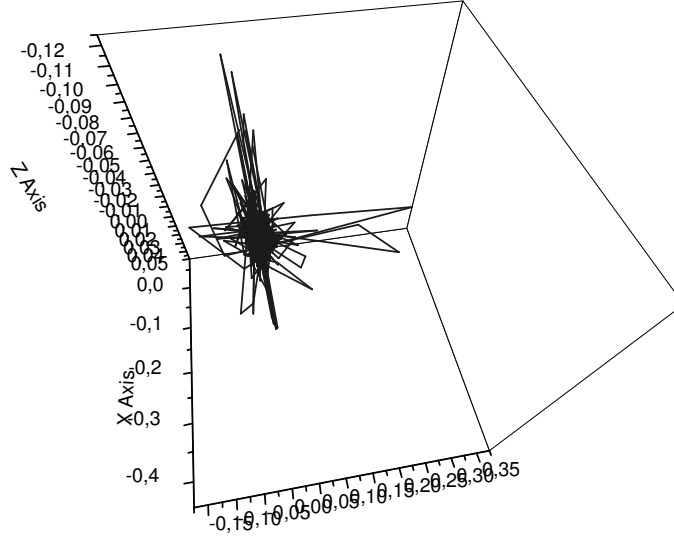
Şekil 4.6 Logusd9007 serisine ait yanlış yakın komşu yüzdesi-gömme boyutu (d_g) grafiği



Şekil 4.7 Logusd9007 serisinden elde edilen $E_d^1 - d_g$ grafiği

Şekil 4.6'dan da anlaşılacağı üzere farklı R_T değerleri için hesaplanan gömme boyutları $R_T=10, 15$ için yaklaşık olarak aynıdır. $R_T=5$ için sıfır yanlış komşuluk durumu 7-8 gömme boyutu için %5'in altındadır. Abarbanel (1993), bu değer 10 ile 50 arasında seyretmesinin analiz açısından uygun bir durum oluşturacağını belirtmektedir. Bu nedenle yaklaşık bir tahminle gömme boyutu 7 olarak alınmasının yeterli olacağı kanaatine varılmıştır. Benzer yoruma Cao yaklaşımıyla, eğrinin dirsek yaptığı ilk nokta olan $d>6$ olarak alınması uygundur.

Sonuç olarak logaritması alınmış serinin ilk farklarından elde edilecek bir gömme uzayı 7 boyutlu bir uzayda seriden 1 gecikme ile elde edilebilir. Bu şekilde oluşturulan uzaya ait rastgele seçilen üç vektörün oluşturduğu çekerin görünümü Şekil 4.8'de verilmiştir.

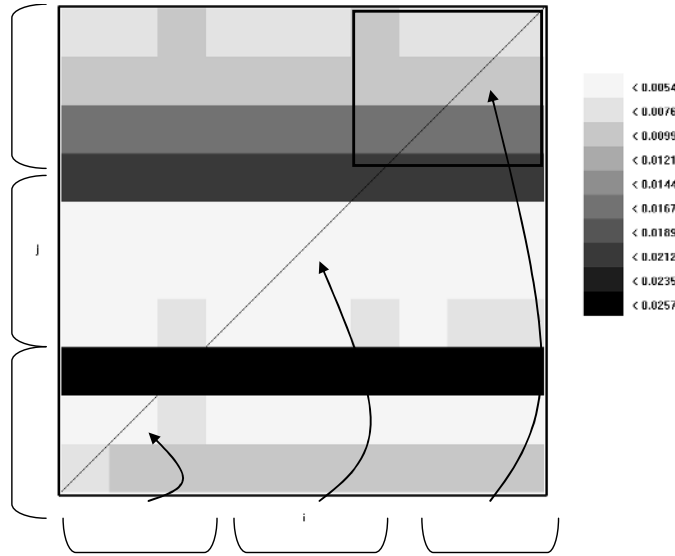


Şekil 4.8 Logusd9007 serisinden elde edilen gömme uzayı çekerinin üç boyutlu alt uzayı.

Oluşturulan faz uzayı incelendiğinde yörüngelerin (eğer var ise) tek nokta çevresinde oldukça karmaşık bir seyir izledikleri görülür. Noktalar belirli zamanlarda çekerin dışına sıçrayan ani hareketlerde bulunmuştur. Bu noktalar zaman serisinden de kolaylıkla belirlenebilir. Serinin kendisindeki ani sıçramalar, faz uzayına da yansımıştır. Yine de durum kaotik sitemlerde karşılaşılan faz uzayı perspektifine uymaktadır ancak yeterli kanıt için tahmini faz uzayı yörüngelerin ve evrensel sabitlerin varlığı gereklidir.

4.4.3 Durağanlığın Araştırılması

Analiz öncesinde doğal logaritması alınmış serinin ilk farkları alınmıştır. Sonuç olarak analiz büyüme oranları ($\ln(y_t) - \ln(y_{t-1}) = \ln(y_t / y_{t-1})$) üzerinden yürütülmüştür. Bu şekilde serideki trend etkisi yok edilmiştir. ADF istatistikleri bu durumu doğrulamaktadır. Bu şekilde oluşturulan serilerin tanımlayıcı istatistikleri ve ADF (Dickey Fuller birim kök testi) durağanlık test istatistikleri sonuçları Çizelge 4.2'den izlenebilir.



Şekil 4.9 Logusd9007 serisinden stationary.exe programı yardımıyla elde edilen çapraz-tahmin hataları grafiği.

Serilerdeki zayıf durağanlık sadece zamansal ilişkilerdedir. Aslında faz uzayını kapsayan bir durağanlık yaklaşımı analizi daha sağlıklı hale getirir. Durağanlığın faz uzayı ile ilgili kısmını incelemek için Schreiber'in (1997) çapraz tahmin hataları, stationary.exe program parçacığı tarafından hesaplanmıştır. Bu sayede serilerin birbirleri ile olan geometrik uyumu için bir nitel ve nicel bir analiz süreci gerçekleştirilebilmiştir. Elde edilen boyut ve gecikme değerleri kullanılarak faz uzayı çekerinde gerçekleşmesi muhtemel geometrik değişimler için her bir çapraz tahmin hata düzeyine bir renk atanarak, en az hata beyaz, en yüksek tahmin hatası siyah olmak üzere faz uzayı çekerinin durağanlık yapısı analiz edilmiştir. Bu şekilde elde edilen grafik aşağıda verilmiştir. Burada seri on parçaya ayrılmış her bir parçadaki noktalardan elde edilen γ değerleri birbirleri ile karşılaştırılmıştır. Seride her bir parçada 413 gözlem yer almaktadır. Tahmin için yaklaşık 500 gözlemin yeterli olduğu vurgulanmaktadır. Aynı zamanda tahmin için ele alınan komşuluk yarıçapının, gürültü genliğinin 2 veya 3 katı olması önerilmektedir (Kantz ve Schreiber). Diğer parametreler için 'default' değerleri alınmıştır.

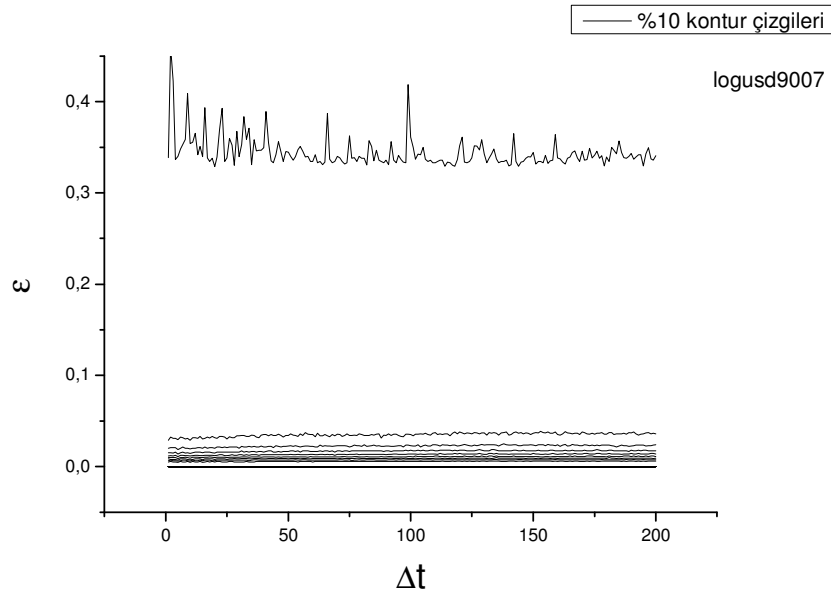
Grafikten de görüleceği üzere serinin ilk üçte birlik, orta üçte birlik ve son kısımlarının serinin genelini tahmin ederken gösterdikleri davranışlar farklıdır. Serinin ilk üçte birlik kısmı kendini ve ikinci üçte birlik kısmı tahmin ederken elde edilen hatalar daha düşük iken, serinin son kısmının tahmin hataları diğer kısımlardan daha büyüktür bu durum durağanlık şartı olan

$\gamma(W_i^l, W_j^l)$ 'nin i, j 'den bağımsız olması ile çelişmektedir. Hatta serinin son üçte birlik kısmı kendine denk gelen kısmı bile daha yüksek hata ile tahmin edebilmektedir. Ancak son üçte birlik kısım, kendinden önceki kısımları daha düşük hata payı ile tahmin etmektedir. O halde son kısma ait faz uzayında geometrik bir değişim yaşanmaktadır. Schreiber (1993), birbirinin içine gömülü halde bulunan iki çekerden yapısı daha karmaşık olan çekerin yapısı daha basit olana yönelik daha iyi tahmin yapabileceğini vurgulamaktadır. Eğer kaotik bir çeker periyodik veya yarı-periyodik bir çeker içinde ise, o halde bu yapıları diğerlerinin onu tahmin ettiğinden daha iyi tahmin eder, çünkü sistem hakkında bu yapılardan çok daha fazla bilgiye sahiptir. Bu nedenle üretilen kare grafik çapraz olarak simetrik değildir. Analiz kapsamında bu durum araştırılmış ve iki dönem arasında temel bir fark olup olmadığı sonuç kısmında tartışılmıştır. Bu nedenle 4317 veriden oluşan serinin 14.11.2001'den sonraki kısmı (indisi 3000-4317) ayrıca analiz edilmiştir. Bu seriye ait tanımlayıcı istatistikler Çizelge 4.3'de verilmiştir.

Çizelge 4.3 2001-2007 Logaritmik fark serisine ait tanımlayıcı istatistikler.

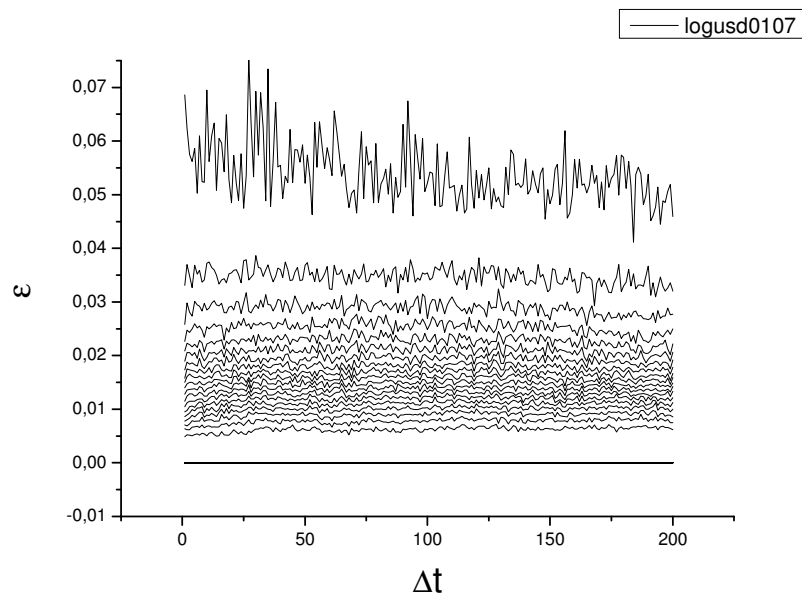
Zaman Aralığı	Seri Adı	Veri Sayısı (N)	Ortalama	Std. Sapma	Basıklık	Çarpıklık
14.11.2001-20.02.2007	Logusd0107	1318	-6,005E-05	0,008172196	3,398701139	0,890488445
Aralık	En Büyük	En Küçük	ADF istatistiği	ADF (sabit)	ADF (sabit+trend)	
0,075462213	0,047698544	-0,027763669	-34,53 $p < 0.01$	-34,52 $p < 0.01$	-34,5 $p < 0.01$	

Uzay-zaman çizimleri serinin faz uzayı ile zamansal ayırım arasındaki ilişkiyi sorgulamaktadır. Logusd9007 ve logusd0107 serilerinden elde edilen uzay-zaman ayırım çizimi aşağıda verilmiştir.

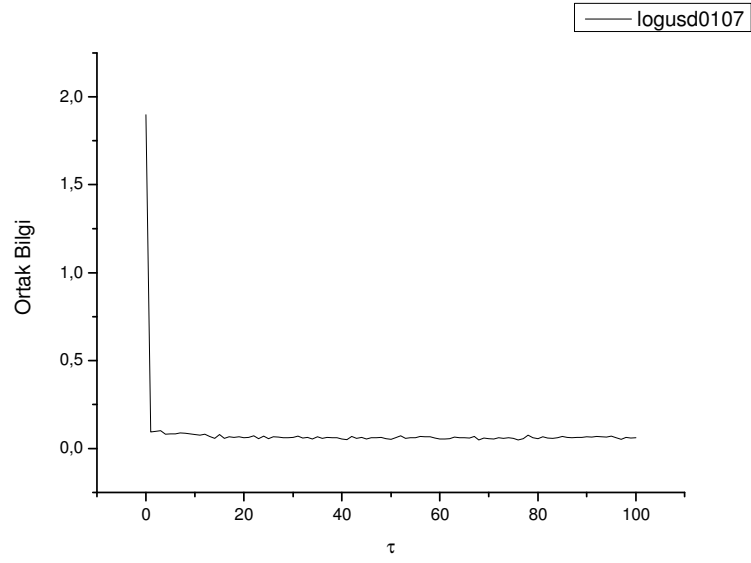


Şekil 4.10 Logusd9007 gömme uzayından hesaplanan uzay-zaman ayırım çizimleri

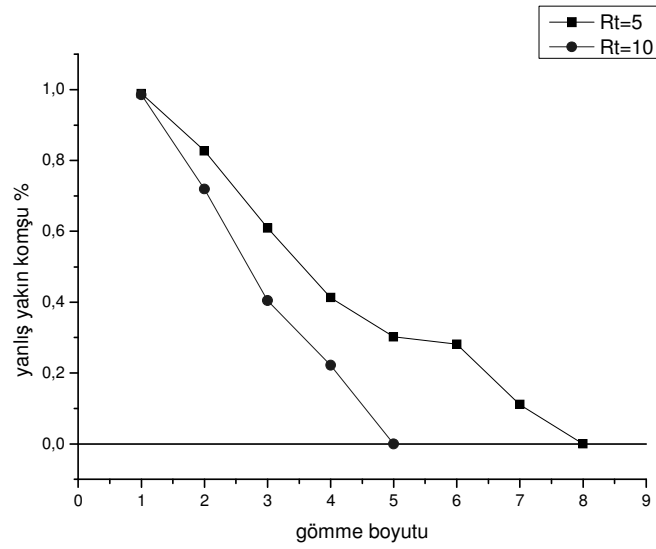
Uzay zaman ayırım çizimlerinde herhangi bir trende rastlanmamıştır. Ancak grafikten rahatlıkla anlaşılacağı üzere zamanda birbirinden çok uzak noktalar, faz uzayında birbirine çok yakındır. Bu durum tüm zaman aralıkları için geçerlidir. Benzer şekilde 2001-2007 arasındaki seri için hesaplanan faz uzayı parametreleri ($\tau=1$ ve $d_g=5$) için aynı durum gözlenmektedir.



Şekil 4.11 Logusd0107 gömme uzayından hesaplanan uzay-zaman ayırım çizimleri



Şekil 4.12 Logusd0107 serisinden elde edilen ortak bilgi- τ grafiği

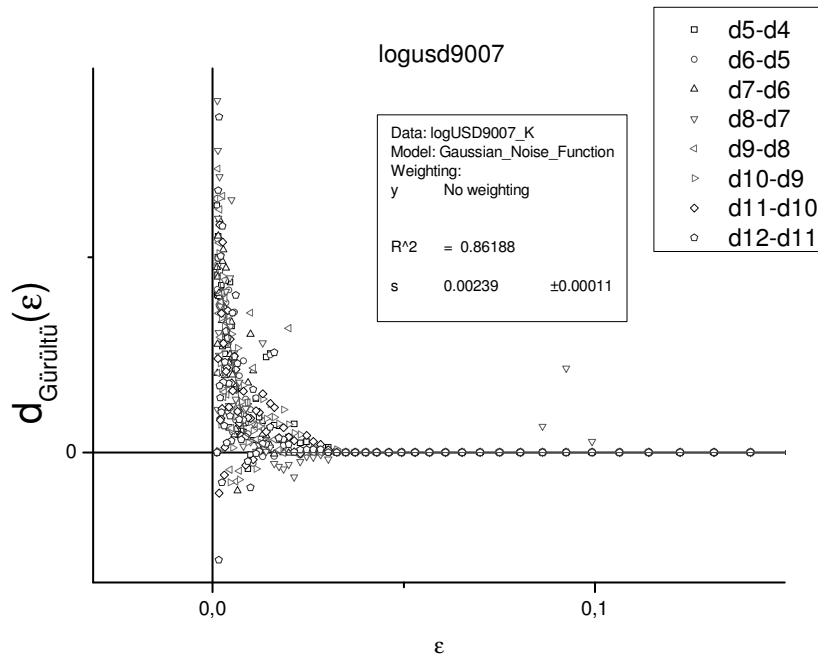


Şekil 4.13 Logusd0107 serisine ait yanlış yakın komşu yüzdesi-gömme boyutu (d_g) grafiği

2001-2007 arasından elde edilen çizimlerde herhangi bir belirgin trend görülmemektedir. Bu durum zamanın uzayı etkilemediği ve durağanlığın hakim olduğu bir yapının var olduğu şeklinde yorumlanabilir.

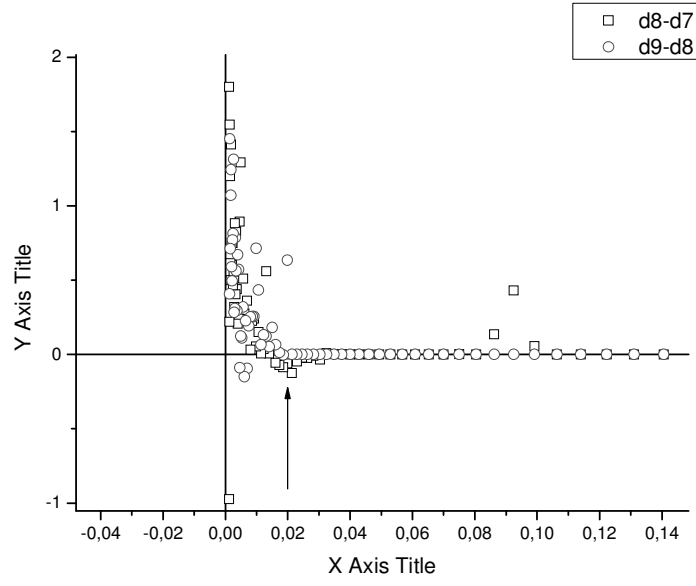
4.4.4 Serilerin Korelasyon Boyutları ve Gürültü Azaltımı Uygulaması

Gürültü düzeyinin belirlenmesi amacıyla $d(m, \varepsilon)$ grafiğinde $d(m+1, \varepsilon) - d(\varepsilon)$ değerleri tüm ε değerleri karşılık getirilerek bir saçılım grafiği elde edilmiştir. Korelasyon boyutunun bir uygulaması olarak gürültünün boyut artırıcı ve eklenen yeni boyutta tekdüze olarak dağılması nedeniyle artış, gürültü düzeyini yansıtan bir niceliktir. Grafiklerde $d(m+1, \varepsilon) - d(\varepsilon) = d_{Gürültü}(\varepsilon)$ verilerine teorik $d_{Gauss}(\varepsilon)$ dağılım eğrisi uydurularak gürültü amplitütünün (genlik) alt ve üst limitleri tespit edilmiştir.

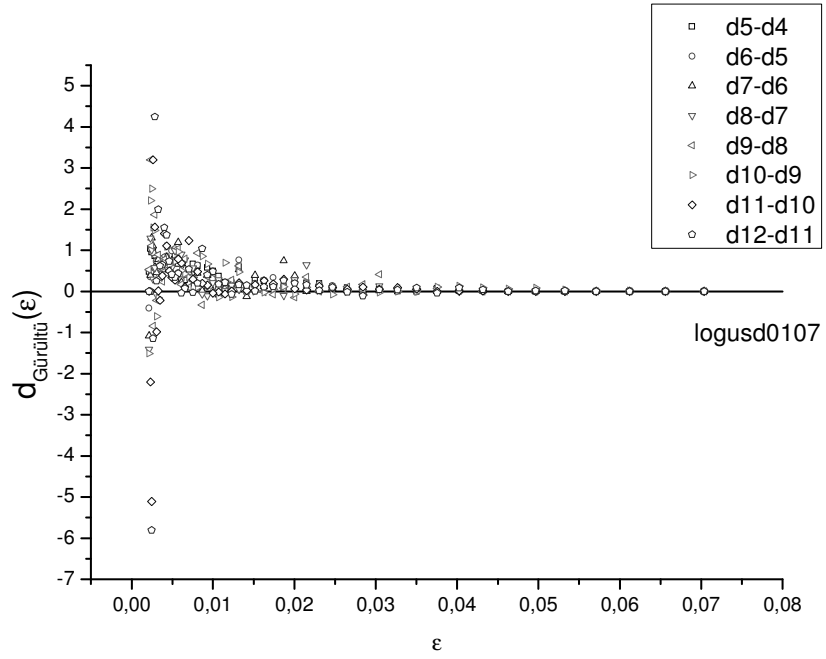


Şekil 4.14 Logusd9007 serisinden elde edilen $d_{Gürültü}(\varepsilon) - \varepsilon$ grafiği ve hesaplanan teorik gürültü düzeyi

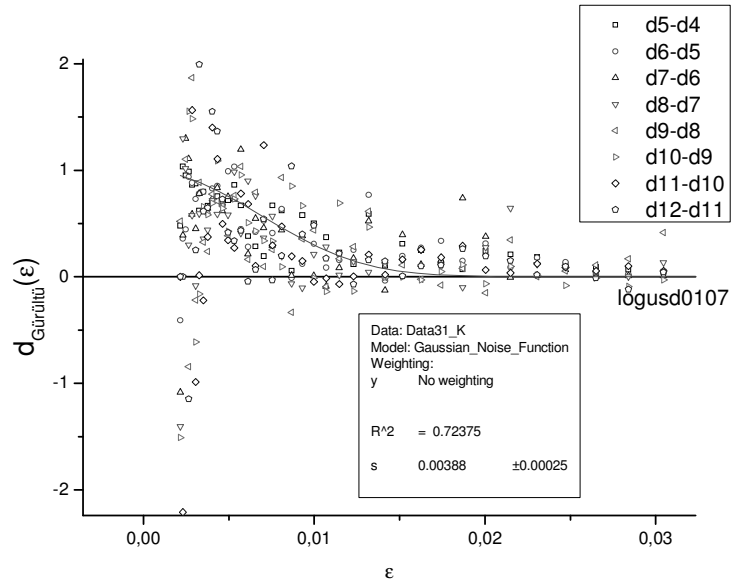
Grafiklerden (Şekil 4.12-Şekil 4.17) görüldüğü üzere, 1990-2007 arasındaki verilerin gürültü genliği σ yaklaşık olarak 0,0025 dir. Gürültü azaltımı için önerilen 3σ boyutu 0,0075 değerine eşittir. Benzer şekilde 2001-2007 yılları arasındaki verinin gürültü genliğinin üst sınırı 0.004 tür ve 3σ değeri 0,012 olarak gerçekleşir. Sonuç olarak iyi bir gürültü azaltımı için bu değerler kullanılabilir. Buradan çıkarılan önemli bir sonuç logusd0107 serisinin daha gürültülü olduğudur.



Şekil 4.15 Logusd9007 serisinde gürültü başlangıcı. $\varepsilon = 0,02$ civarında gürültü düzeyi yükselme göstermektedir.



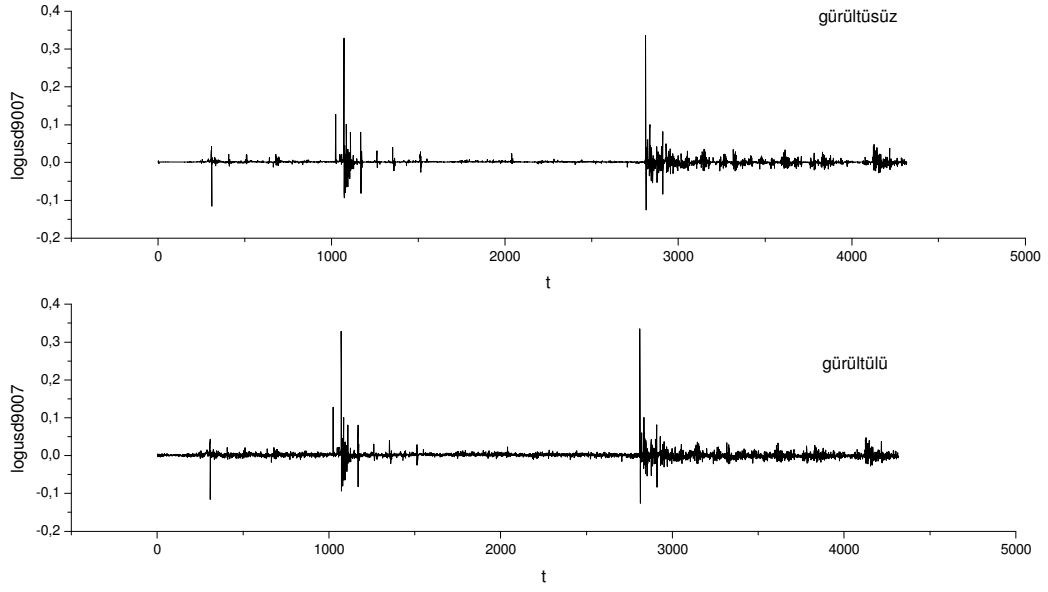
Şekil 4.16 Logusd0107 serisinden elde edilen $d_{\text{Gürültü}}(\varepsilon) - \varepsilon$ grafiği



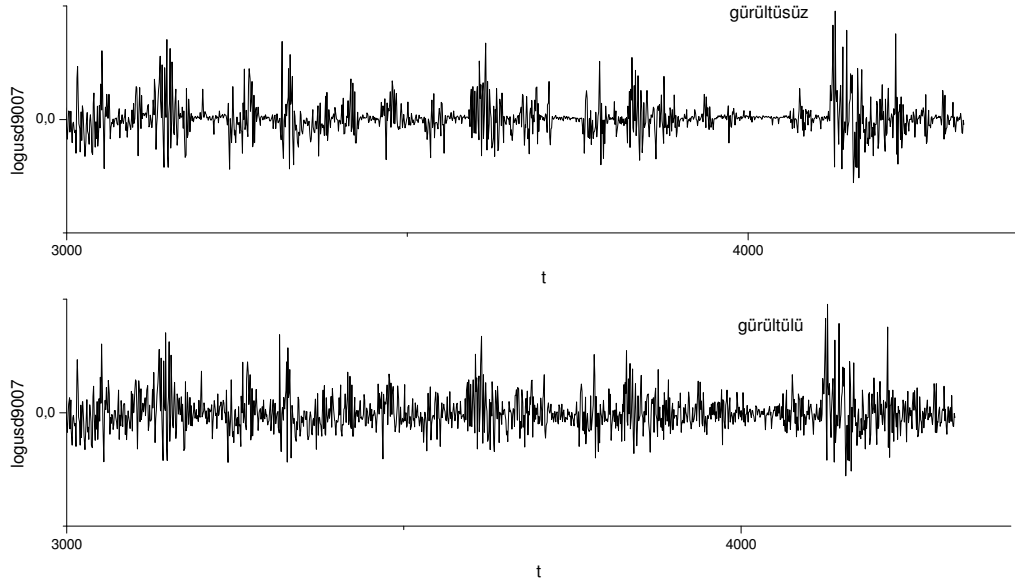
Şekil 4.17 Logusd0107 serisinden elde edilen $d_{\text{Gürültü}}(\epsilon) - \epsilon$ grafiği ve hesaplanan teorik gürültü düzeyi

Elde edilen yarıçap değeri basit gürültü azaltımı için kullanılarak, korelasyon toplamları incelenmiştir. Basit gürültü azaltımı tekniği faz uzayındaki hareketli ortalama gibi algılanabilir. Bu durumda eğer gürültü yarıçapı eğrisellik yarıçapından az ise, kararsız yörüngelerin dinamik yapısı bozulmadan tatmin edici bir gürültü azaltımı varsayım olarak mümkün olabilmektedir. Hesaplanan gürültü genlikleri dikkate alınarak uygulanan basit gürültü azaltımının etkileri Şekil 4.18 ve 4.19'dan rahatlıkla görülebilir.

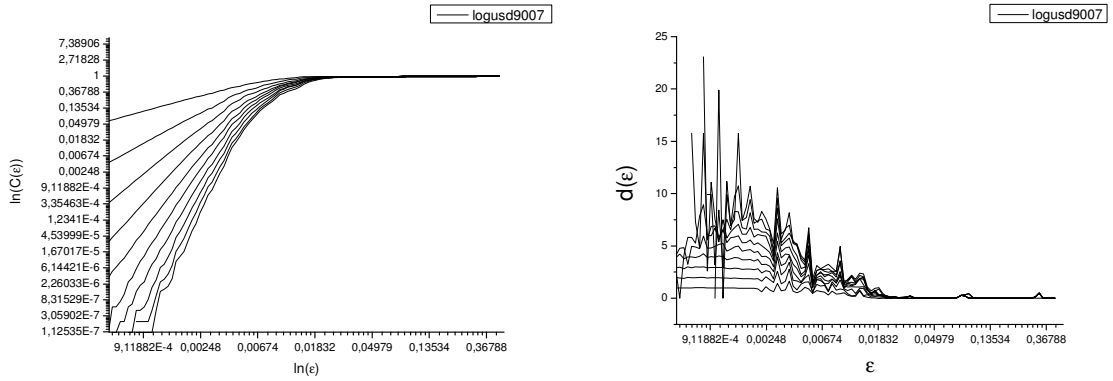
Gürültülü ve gürültüsüz serilerden TISEAN programı 'd2' komutu ile uygun faz parametreleri girilerek elde edilen korelasyon toplamları ve yerel eğimler Şekil 4.20-4.21 ve Şekil 4.23-4.24'de verilmiştir. Logusd9007 seri için uygulanan azaltım sonucunda korelasyon toplamlarında göze çarpan 'belirgin' bir ölçek aralığı belirlenememiştir. $d(\epsilon) - \epsilon$ grafiğindeki bazı bölgeler için tahminler yapılabilir, fakat tüm serinin geneline hakim, fraktal yapıyı gösterebilecek bir ölçek aralığı yoktur. Gürültülü logusd9007 serisi için program tarafından her bir gömme boyutunda (1-12 boyut) hesaplanan $d(\epsilon)$ değerleri aşırı dalgalanmakta, grafiğin hiçbir bölgesinde boyutlar yakınsama göstermemektedir.



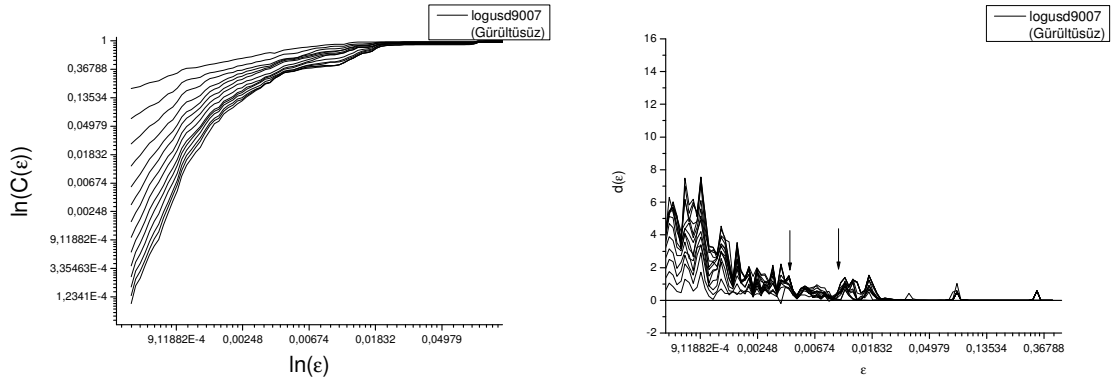
Şekil 4.18 Gürültülü ve gürültüsü azaltılmış logusd9007 serisi.



Şekil 4.19 Gürültülü ve gürültüsü azaltılmış logusd0107 serisi.



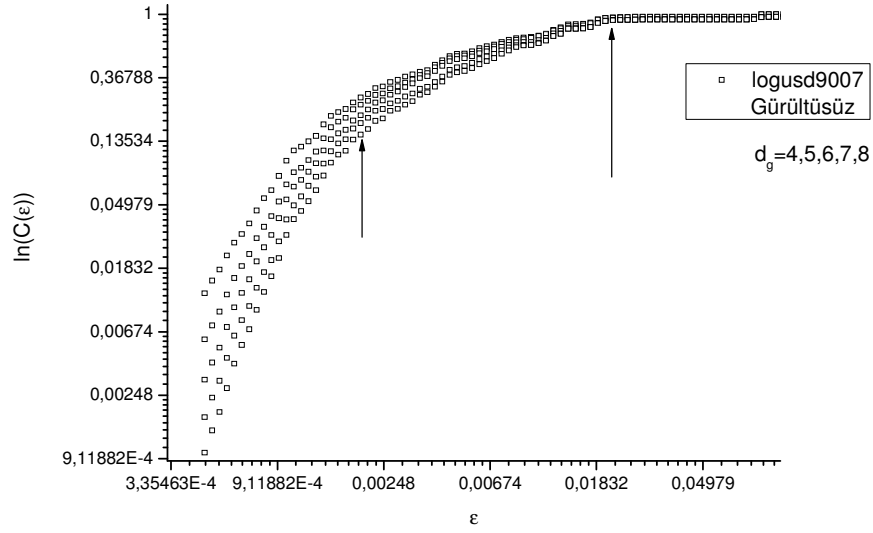
Şekil 4.20 Gürültülü logusd9007 serisinden hesaplanan korelasyon toplamları ve yerel eğimler.



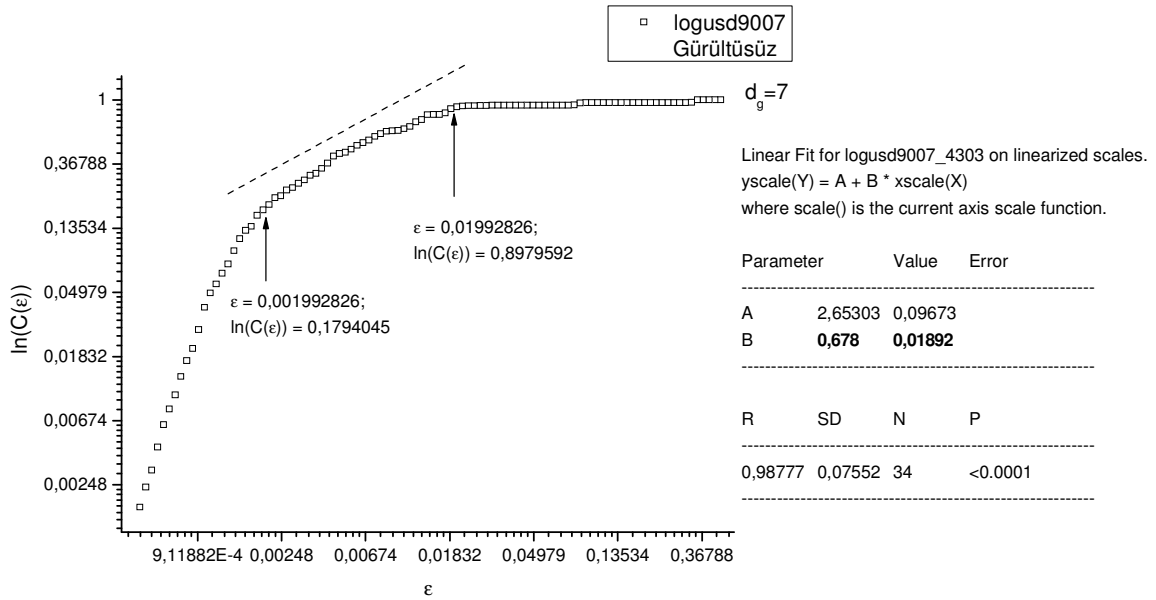
Şekil 4.21 Gürültüsü azaltılmış logusd9007 serisinden hesaplanan korelasyon toplamları ve yerel eğimler.

Logusd9007'nin gürültüsü azaltıldığında ise, seride küçük yarıçap değerlerinden hesaplanmış gömme boyutlarında azalma yaşanmıştır. Bu durum artan boyutlarda uzayı homojen şekilde dolduran gürültünün azaltıldığına bir kanıttır. Ölçek aralığı Şekil 4.21'de $d(\varepsilon) - \varepsilon$ grafiğinde görülen oklar arasındaki ve yakın çevresinde araştırılmıştır. Bu aralıkta farklı gömme boyutlarında hesaplanan yerel boyutlar yakınsama göstermektedir. Boyutun hesaplanması için uygun bir doğrusal rejim aralığı olarak, $0,0019 < \varepsilon < 0,019$ değerleri tespit edilmiştir. Ancak

bu bölgedeki istatistiksel dalgalanmaların yoğun olduğu belirtilmelidir (Şekil 4.22). İlgili aralıktan korelasyon boyutu, $d_G = 0,678 \pm 0,019$ olarak hesaplanmıştır (Şekil 4.24).

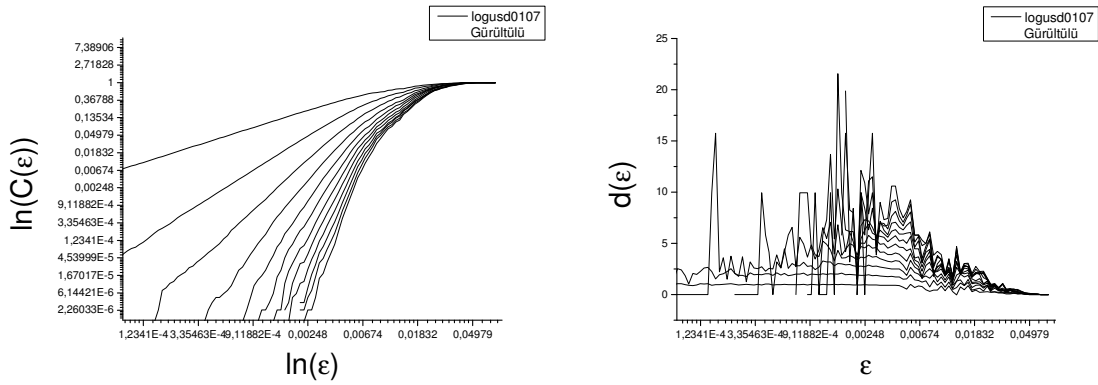


Şekil 4.22 Gürültüsü azaltılan logusd9007 serisinin tahmini ölçek aralığı.

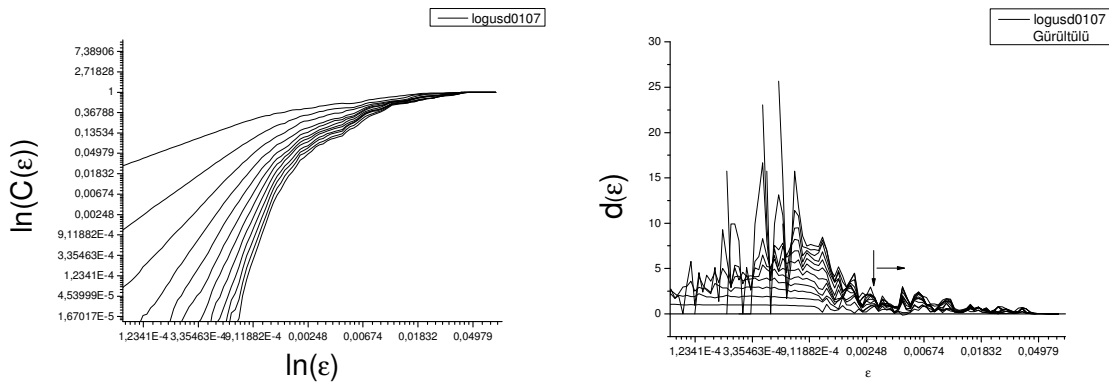


Şekil 4.23 Gürültüsü azaltılan logusd9007 serisinin ölçek aralığına ait hesaplanan korelasyon boyutu.

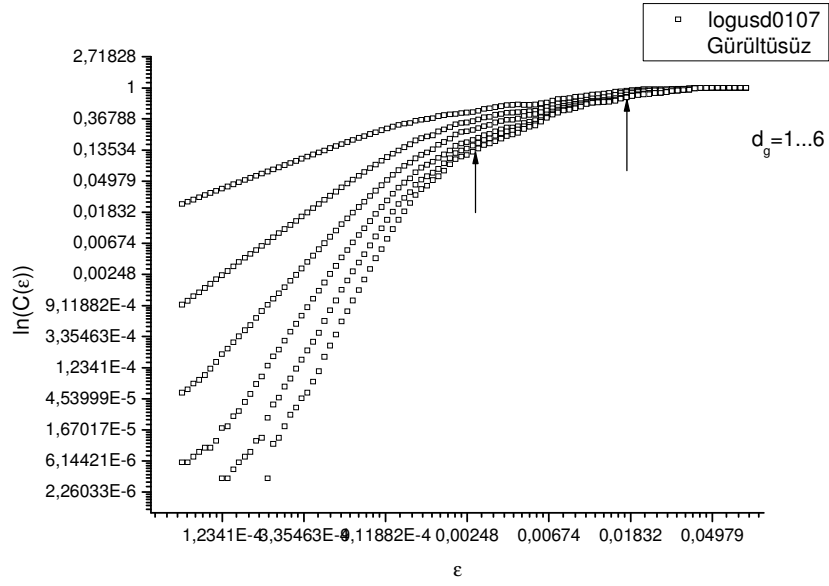
Logusd0107 serisine ait korelasyon toplamı ve yerel eğimleri Şekil 4.24’de verilmiştir. Gürültülü serilerin yerel boyutlarını gösteren grafikten ölçek aralığına dair bir bilgi bulunmamaktadır. Gürültü $\varepsilon < 0,006$ değerine kadar oldukça etkindir ve boyutu olabildiğince arttırmaktadır. Gürültü azaltıldığında ise (Şekil 4.25), yerel eğimler $\varepsilon \approx 0,002$ değerinden sonra tüm gömme boyutları için birlikte hareket etme eğilimindedirler. Sonuç olarak ölçek aralığının makul bir değeri için bu rakam bir göstergedir. Gürültüsü azaltılan seriden ilgili ölçek aralığında (Şekil 4.26), $0,0021 < \varepsilon < 0,015$, hesaplanan boyut tahmini (Şekil4.27) $d_G = 0,91 \pm 0,022$ ’dir.



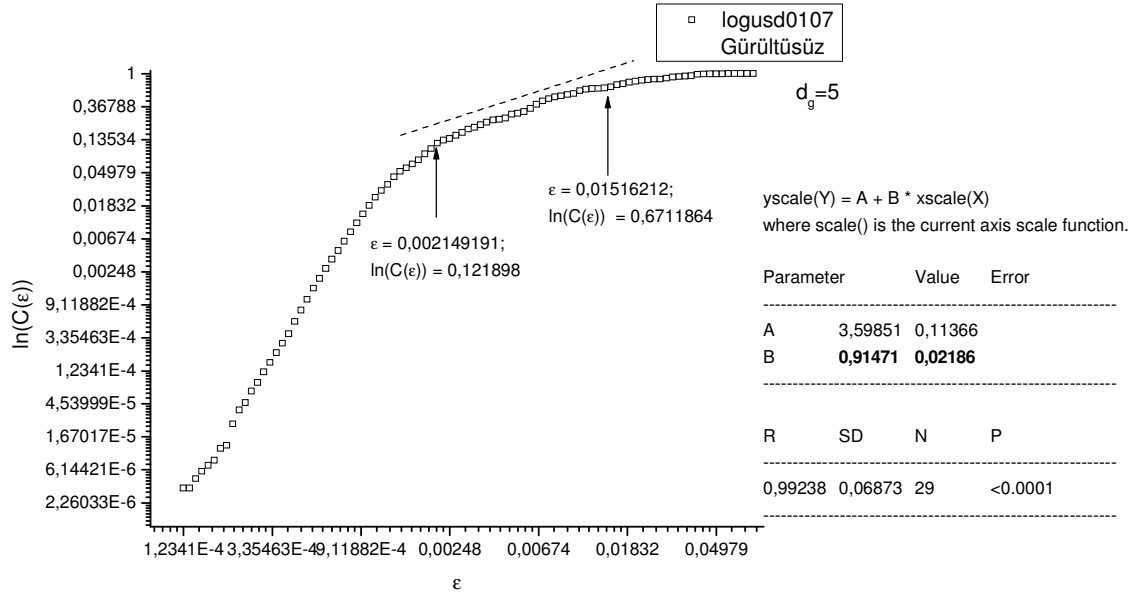
Şekil 4.24 Gürültülü logusd0107 serisinden hesaplanan korelasyon toplamaları ve yerel eğimler.



Şekil 4.25 Gürültüsü azaltılmış logusd0107 serisinden hesaplanan korelasyon toplamaları ve yerel eğimler.



Şekil 4.26 Gürültüsü azaltılan logusd0107 serisinin tahmini ölçek aralığı.

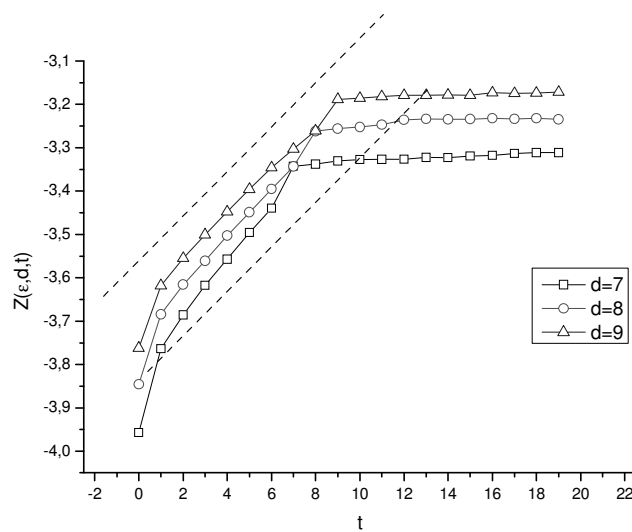


Şekil 4.27 Gürültüsü azaltılan logusd0107 serisinin ölçek aralığına ait hesaplanan korelasyon boyutu.

Gürültü azaltımı sonucunda hesaplanan korelasyon toplamaları grafiğinin yumuşak (smooth) yapısında bazı değişimlerin meydana geldiği görülmüştür. Sistem dinamiklerinin gürültü azaltımı sırasında bozulmaya uğrayabileceği göz önünde bulundurularak hesaplanan boyutlara şüpheyile bakılması yerindedir. Buna rağmen hesaplanan boyutlar kesirli sayılardır ve fraktal özelliği göstermektedir. Sonuç olarak bu zaman serilerinin faz uzayının ‘belirli ölçek aralıkları için Cantor tozuna benzeyen fraktal bir yapısı vardır.

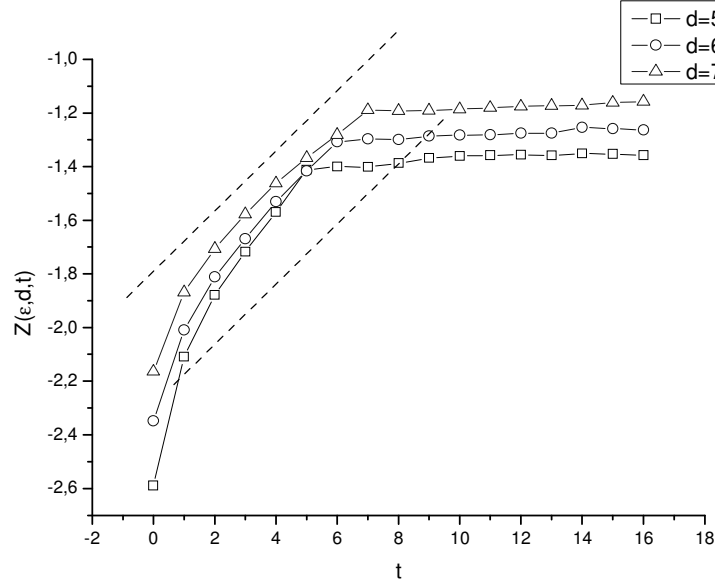
4.4.5 Lyapunov Üsteli ve Tahmin Zamanı

Üsteller gürültülü serilerden elde edilmiştir. Bunun nedeni olarak, gürültü azaltımının dinamik sürece zarar verip vermediği konusundaki bilgi yetersizliği öne sürülebilir. Logusd9007 ve logusd0107 serilerine ait verilerin farklı gömme boyutlarında tespit edilen en büyük Lyapunov üsteli için TISEAN programındaki ‘lyap_r’ komutu kullanılarak Şekil 4.28 ve 4.29 elde edilmiştir. Bu modül Wolf algoritmasına çok benzer şekilde yörüngelerin uzaydaki üstel ayrımlarını ölçmektedir. Analiz sonucunda, başlangıçtan itibaren k iterasyon sonraki değerle ilk değer arasındaki ayrılmanın logaritmik bir ölçeği olarak $Z(\varepsilon, d_g, t)$ değeri elde edilir. Pratikte hangi ε değerinin kullanılması gerektiği zor bir analizdir. Çalışmanın arkaplanında pek çok değer denenmiş, ancak değişen ε değerlerinin gürültü yarıçapının altında veya üstünde olmasının sonucu değiştirmedeği gözlenmiştir.



Şekil 4.28 Logusd9007 serisinden Rosenstein yaklaşımı ile hesaplanan $Z(\varepsilon, d_g, t)$ - t grafiği

Farklı gömme boyutları için elde edilen üstel ayrılma ölçütleri için 7. boyuttan hesaplanan doğrusal artış aralığının eğimi yaklaşık $\lambda_{\max} \approx 0,064 \pm 0,002$ 'dır (Şekil 4.28). Sonuç olarak bu sistemde başlangıç durumuna hassas bağlılık olduğu söylenebilir. Yörüngeler ilk 6 iterasyonda oldukça yüksek bir ayrılma gösterir. Daha sonra ayrılma yaklaşık 200. iterasyona kadar az bir eğimle ($\approx 0,001$) doğrusal rejimi takip eder.



Şekil 4.29 Logusd0107 serisinden Rosenstein yaklaşımı ile hesaplanan $Z(\epsilon, d_g, t)$ - t grafiği

Lousd0107 serisine ait grafik ise Şekil 4.29'te verilmiştir. Burada 5. boyutun doğrusal aralığından hesaplanan en büyük üstel $\lambda_{\max} \approx 0,17 \pm 0,009$ 'dur. İterasyon sayısı altıyı geçtiğinde üstel oranda uzaklaşma doyuma seviyesine gelmekte ve daha sonraki hareketini sıfıra çok yakın bir eğimle 200. iterasyona kadar sürdürmektedir. Wolf motoduyla hesaplanan üstel ise, komşu 9 nokta kullanılarak ve bir iterasyon ilerisi için 0,35'dir. Değişik parametre kombinasyonları kullanıldığında sonucun sürekli pozitif kaldığı tespit edilmiştir. Sonuç olarak serinin bu parçası da pozitif üstele sahiptir. Her iki serinin de pozitif değer taşıması önemli bir bulgudur. Bu değerlerin gerçekten sistemin sahip olduğu lineer olmayan bir dinamikten mi kaynaklandığını tespit etmek için katışık seriler üretilmiş ve sonuçlar değerlendirilmiştir. Katışık verilerin üretilmesinde TSTOOLS programı kullanılmıştır. Program otomatik olarak rastsal (RK) ve Fourier dönüşümüne dayalı katışık (FK) verileri üretmektedir. Logusd0107 ve logusd9007 serilerinin her biri için üretilen 10 adet FK ve RK serisi için elde edilen üsteller çeşitli parametre kombinasyonları için karşılaştırılmıştır. NDT programının yardımcı

dosyaları tarafından yapay sistemler üzerinde kullanılmış parametreler, 12 komşu noktanın 3 iterasyon boyunca takip edilmesine dayanmaktadır. Bu çalışmada da aynı parametreler kullanılarak rastsal ve asıl seri arasındaki fark belirlenmeye çalışılmıştır. Asıl amaç pozitif bir üstelin varlığının doğrulanmasından çok, faz uzayı dinamiklerinin rastsallıktan farklı olup olmadığını vurgulamaktır. Çünkü Wolf algoritması rastsal sistemler için de genelde pozitif değerler vermektedir.

Çizelge 4.4 Logusd9007 serisinden Wolf algoritmasıyla 6,7 ve 8 gömme boyutunda hesaplanan en büyük Lyapunov üstelleri ve katışık verilerle karşılaştırılması.

[illegible]

Logusd9007 ve logusd0107 serilerinden, seçilen bir noktaya yakın 12 komşu yörüngenin 3 iterasyon boyunca takip edilmesine dayanan, asıl seri, RK ve FK serileri için farklı gömme boyutlarında ($\tau=1$) hesaplanan en büyük Lyapunov üstelleri Çizelge 4.4 ve Çizelge 4.5’de verilmiştir. Üstelin rastsal sistemler için güven aralığı, örneğin ortalama ve standart sapması ele alınarak, t dağılımı kullanılarak hesaplanmıştır.

Çizelge 4.5 Logusd0107 serisinden Wolf algoritmasıyla 4,5 ve 6 gömme boyutunda hesaplanan en büyük Lyapunov üstelleri ve katışık verilerle karşılaştırılması.

	Boyut					
	4		5		6	
Logusd0107	0.358221		0.244719		0.189096	
	RK	FK	RK	FK	RK	FK
1	0.381135	0.377069	0.283514	0.285692	0.228441	0.225839
2	0.384026	0.365215	0.284782	0.274180	0.229147	0.216116
3	0.385677	0.379547	0.289943	0.276291	0.221807	0.219193
4	0.377871	0.385567	0.283327	0.285746	0.222747	0.226806
5	0.384015	0.380993	0.296996	0.280154	0.218115	0.215967
6	0.391653	0.388850	0.306655	0.278134	0.234290	0.221843
7	0.370194	0.370194	0.277581	0.277581	0.221282	0.221282
8	0.378975	0.377891	0.279655	0.274565	0.230006	0.218749
9	0.384593	0.373409	0.298999	0.282935	0.225549	0.222647
10	0.381184	0.379312	0.288561	0.289708	0.219172	0.221364
Ortalama	0,381932	0,377805	0,289001	0,280499	0,225056	0,220981
Std. sapma	0,005662	0,006944	0,009277	0,005295	0,005282	0,003625
Olasılık ($\alpha = 0,001$)	$p < 0,001$	$p < 0,001$	$p < 0,001$	$p < 0,001$	$p < 0,001$	$p < 0,001$

Hem rastsal katıştırılmış, hem de Fourier dönüşümü ile katıştırılmış veriler için elde edilen

üsteller gerçek seriden çok farklıdır. Katıştırılmış veriler asıl seri ile benzer özellikler göstermesine rağmen (dağılım, lineer özellikler), serinin içerdiği tüm lineer olmayan dinamik yapıları ortadan kaldırdığından, bu farklılık üstelin pozitif karakterinin lineer olmayan dinamiklerden kaynaklandığı şeklinde yorumlanabilir. Çizelgelerdeki verilere ek olarak, gerçek gözlem serilerinin faz uzayındaki davranışının rastsal olarak elde edilmiş bir sistemden elde edilenlerle aynı olma olasılığı, seçilen gömme boyutları için on binde birden daha azdır.

Sonuç olarak büyüme oranlarının logaritmik ölçekteki serilerine ait pozitif Lyapunov üsteli, serinin lineer olmayan dinamik karakterinden kaynaklanmaktadır ve bu seriler yüksek ihtimalle kaotik davranış sergiler. Bu çalışmanın arka planında, çok sayıda yakın yörünge ve iterasyon sayısı kombinasyonları kullanılarak sistem test edilmiş ve aynı sonuçlara ulaşılmıştır.

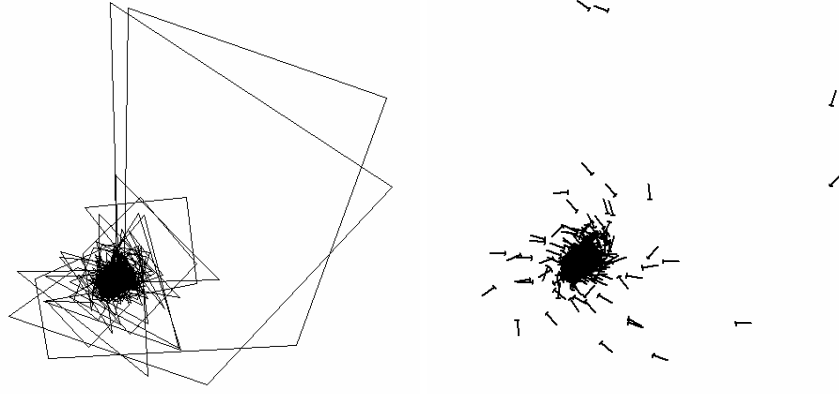
Üstelin değeri konusunda Wolf algoritmasından çok Rosenstein metodunun çıktılarına güvenilmesi yerinde olacaktır. Çalışmada Wolf algoritmasının Alan Wolf tarafından tasarlanan ilk hali değil, NDT programında bulunan ve daha az parametre ile çalışan diğer bir formu bulunmaktadır. Bu nedenle Rosenstein algoritmasından elde edilen üsteller dikkate alınmıştır. K-S entropisi nedeniyle tahmin zamanlarının üst sınırı $1/\sum \lambda_+$ ile ilişkili olduğundan, yapılacak tahminlerin geçerliliği logusd9007 serisi için en fazla 16 gün, logusd0107 serisi için ise 6 gündür. Teorik olarak bu zaman sınırlarının ötesinde yapılacak herhangi bir tahminin dayanağı yoktur çünkü sistemdeki tüm bilgi kaybedilmektedir.

4.4.6 Determinizmin Tespiti

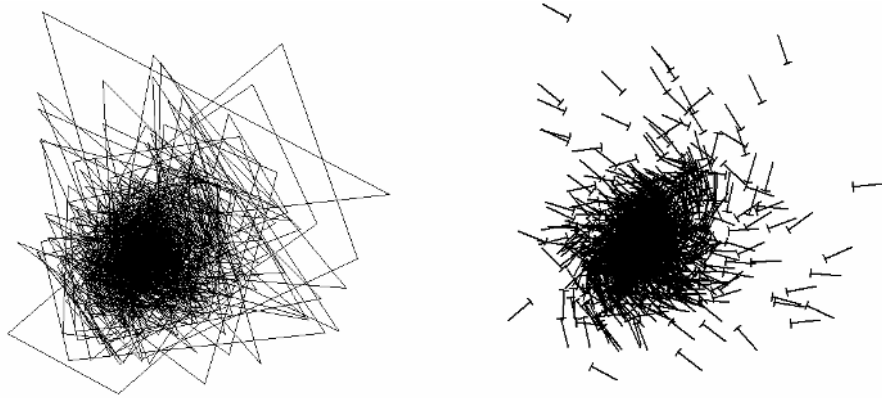
Faz uzayındaki determinizmin Kaplan yöntemiyle sayısal olarak tespit edilmesi amacıyla determinizm.exe program parçacığı kullanılmıştır. Maksimum 42 hücreye ayrılan her bir eksen, ölçümün yapılabilmesi için 42^d adet birim hacim yaratır. Belirlenen gömme boyutlarında ve gecikme zamanlarında program tarafından yörüngeler için hesaplanan değerler Çizelge 4.6'da verilmiştir.

Çizelge 4.6 Logusd9007 ve Logusd0107 serilerinin faz uzayından elde edilen yörünge istatistikleri ve $\bar{V}$, $\bar{\Lambda}$ değerleri.

	Gömme Boyutu	Gecikme	Yörüngelerin Uğradığı Hücre Sayısı	Yörüngenin Birden Fazla Uğradığı Hücre Sayısı	$\bar{V}$	$\bar{\Lambda}$
Logusd9007	7	1	521	85	0,846857	0,635266
Logusd0107	5	1	1264	38	0,893988	0,696472



Şekil 4.30 Çizelge 4.6'deki istatistiklere sahip Logusd9007 serisinin faz uzayı vektörleri



Şekil 4.31 Çizelge 4.6'deki istatistiklere sahip Logusd0107 serisinin faz uzayı vektörleri

Kaplan test istatistikleri sonucunda faz uzayı vektörlerinin rastsal hareketten farklı davranış

sergilediği açıklık kazanmıştır. Bu test istatistiği için Kaplan ve Glass'ın (1992) makalelerinde hangi aralıkta ne gibi bir sonuca varılması gerektiği belirtilmemiştir. Ancak 1'e yakın (örneğin 0,9) $\bar{A}$ değerleri tam determinizm anlamına gelir. Burada elde edilen sonuç, faz uzayındaki akışların rastsal özellikler içermesi ancak deterministik bir yapıya daha yakın olduğudur. Vektör ortalamalarının 1'e yakın olması yörüngelerin birbirleri ile çapraz kesişme yapmadan ayrı birim hücrelerde hareket ettiğini göstermektedir. Yani gömme boyutları her iki sistem için de yeterlidir.

BDS testi determinizmin belirlenmesine yönelik olan diğer bir yaklaşımdır. Hipotez testine dayandığı için daha objektif bir kriter olduğu söylenebilir. Test sonucunda determinizm tespit edilse dahi, bunun kaynağı lineer veya lineer olmayan bir yapı olabilir. Önceki kısımlarda gösterildiği üzere katışık seriler gözlem serisinden farklı bir faz uzayı geometrisine sahiptir. O halde BDS testi bu noktada lineer olmayan determinizm için bir kanıt teşkil eder. Testi uygulamak için Eviews 4.1 programındaki modül kullanılmıştır. Modülde test için seçilmesi gereken ε değeri 4 farklı metotla belirlenmektedir. Bu çalışmada program tarafından önerilen 'fraction of pairs' yaklaşımı izlenmiştir. Bu yöntemde örneklem üzerindeki olası tüm nokta çiftlerinin belirli bir oranının hesaplama sürecine katılmasını sağlayacak bir ε değeri seçilir. Düşük boyutlar için %70 değerinin yeterli olacağı belirtilmektedir, fakat oranın yükseltilmesi hassaslığı arttırmaktadır.

Test kalıntıları üzerinden yapılmaktadır. Seçilen bir gecikmeli model için elde edilen kalıntıların bağımsız benzer yapıda bir dağılım sergileyip sergilemediğinin belirlenmesi için ARMA(p,q) modeli kullanılmıştır. Bu tip bir model için otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarından teorik yapıya uyduğu varsayılan gecikme değerleri elde edilir. Bu şekilde Inusd9007 serisi için ARMA(2,3) modeli Schwartz bilgi kriteri dikkate alınarak tahmin edilmiştir (bkz: Ek 2).

Bu modelin kalıntılarından elde edilen ve Eviews programı tarafından farklı gömme boyutları için hesaplanan BDS istatistiği Çizelge 4.7 ve Çizelge 4.8'de görülebilir.

Çizelge 4.7 Logusd9007 serisine ait BDS istatistikleri.

BDS Testi LOGUSD9007

Boyut	BDS İstatistiği	Std Hata	z-İstatistiği	Olasılık.
2	0.045335	0.001668	27.17681	0.0000
3	0.088506	0.002659	33.28928	0.0000
4	0.120498	0.003176	37.93600	0.0000
5	0.140153	0.003322	42.18783	0.0000
6	0.150945	0.003215	46.94590	0.0000
7	0.154159	0.002957	52.12823	0.0000

Benzer şekilde Inusd0107 serisinden elde edilen tüm otokorelasyon değerleri anlamsız olduğundan gecikmeli bir modelin teorik herhangi bir sürece uydurulması mümkün değildir. Kurulan modellerde artan gecikme değerleri t istatistiklerinin anlamsız olmasına yol açmaktadır. Bu nedenle burada anlamlı katsayıya sahip ve bilgi kriterini en küçük yapan ARMA(3,1) model kalıntıları incelenmiştir (Ek 2) (Gözlem serisinden elde edilen BDS test istatistikleri kalıntılardan elde edilenler ile neredeyse aynıdır).

Çizelge 4.8 Logusd0107 serisine ait BDS istatistikleri.

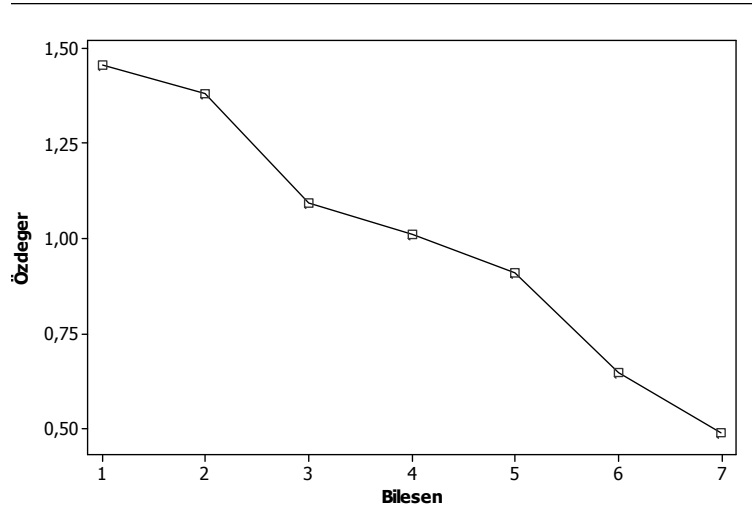
BDS Testi LOGUSD0107

Boyut	BDS İstatistiği	Std Hata	z-İstatistiği	Olasılık.
2	0.021880	0.002458	8.899622	0.0000
3	0.044759	0.003910	11.44777	0.0000
4	0.064603	0.004660	13.86475	0.0000
5	0.075133	0.004860	15.45803	0.0000
6	0.079796	0.004691	17.00979	0.0000

4.4.7 1990-2007 Arasında Faz Uzayı Yörüngelerinin Üç Boyutlu Alt Uzayda İncelenmesi: 1994 ve 2001 Krizlerinin Faz Uzayındaki Görsel Analizi

Bu kısımdaki uygulamaların tamamı Medio'nun (1993) aktarımlarına dayanmaktadır. Faz uzayındaki dinamiklerin daha iyi anlaşılabilmesi için gömme uzayını oluşturan zaman serilerinin ana bileşenleri TSTOOLS programı vasıtasıyla elde edilmiştir. En büyük üç ana bileşen, faz uzayının görsel olarak tasvir edilmesi ve incelenmesi için kullanılmıştır. Bu sayede uzayda gürültüyü ve dinamik süreci oluşturan süreçlerin birbirinden bir nebze ayrılması sağlanmıştır. Farklı zaman aralıklarının birbiriyle karşılaştırılabilmesi için sadece Lnusd9007

serisi incelenmiştir. Lnusd9007 zaman serisine ait 7 boyutlu gömme uzayına ait ana bileşenlerin özdeğer sıralaması Şekil 4.32'deki gibidir.



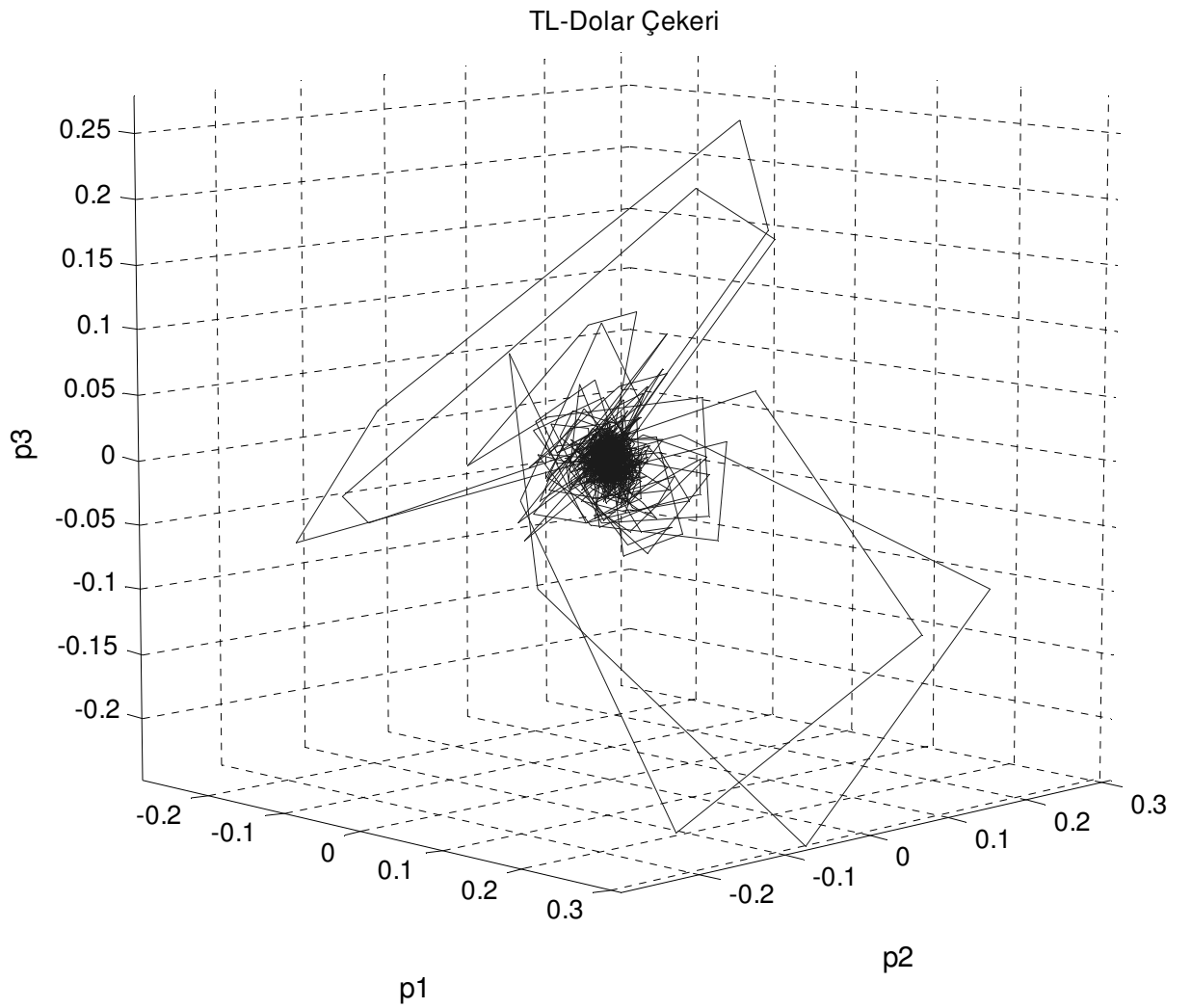
Şekil 4.32 Logusd9007 serisinden $d_g=7$ için elde edilen özdeğerler.

Burada ilk üç ana bileşen değişkenliğin %56,3'ünü, ilk dört ana bileşen ise %70'ini açıklayabilmektedir. Burada ele alınan ilk üç anabileşendir ve toplam değişkenliğin yaklaşık %60'ını açıklayarak faz uzayı dinamiği için iyi bir gösterge niteliğindedir. İlk üç anabileşenin oluşturduğu TL-Dolar kuruna ait çeker Şekil 4.32'de verilmiştir.

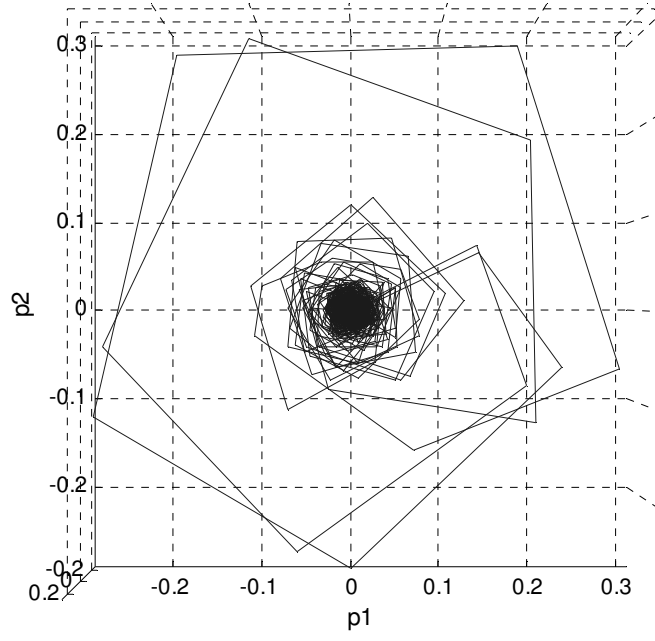
Çekerin görsel analizleri şu sonuçları sağlar. Çekerin çapı yaklaşık olarak 0,6 birimdir. Geniş dış yörüngelerin yanı sıra çekerin merkezine yakın ve çapı yaklaşık olarak 0,2 birim olan ikinci bir örüntü bulunmaktadır. Dış yörüngelerin bu kadar çok sapma göstermesinin nedeni Şekil 4.35'de yatmaktadır. Dış yörüngelere ait birbirine çok yakın iki nokta incelendiğinde noktalardan birinin 1994 yılı Nisan aylarına denk geldiği, diğerinin ise Şubat 2001 yılına ait olduğu görülür. Her iki tarih de Türkiye ekonomisinde döviz kuru rejimlerini etkileyen iki ayrı kriz dönemine aittir. 5 Nisan 1994 ve 21 Şubat 2001 yıllarında yaşanan iki ayrı kriz (bu krizler logusd9007 serisinden de rahatlıkla görülebilir) çekerin çevresinde diğer olaylara nazaran (Körfez Savaşları vs.) çok daha büyük bir yörüngede hareket ederek sönümlenmiştir.

Şekil 4.35 ve 4.40'de dikkati çeken bir diğer nokta, her iki kriz döneminin geometrik olarak çok benzer hareketler yaparak çekerin içine dönmeleridir. İki kriz dönemi de neredeyse aynı patikayı izlemiştir. Kriz etkisinin başlamasıyla beraber yörünge hızla çekerden

uzaklaşmaktadır. Daha sonra yaklaşık 10 iterasyon sonucunda yörünge tekrar çekere döner. Çeker çevresindeki ikinci dönme hareketi bir öncekine çok benzeyen fakat çapı daha ufak bir harekettir. Bu büyük ve küçük yarıçapa sahip -kendine benzerlik- özelliğini anımsatan geometrik hareketler her iki kriz döneminde de rahatlıkla görülmektedir. 1994 ve 2001 krizlerinde yörüngelerin çekere tekrar ulaştıkları zaman aralıkları birbirine çok benzemektedir. Yörüngelerin uzaydaki hareketleri birbirine benzese de açısal değişimleri birbirinden farklıdır. 1994 dönemine ait kriz öncesi ve kriz sonrası faz uzayları Şekil 4.37'deki gibidir.

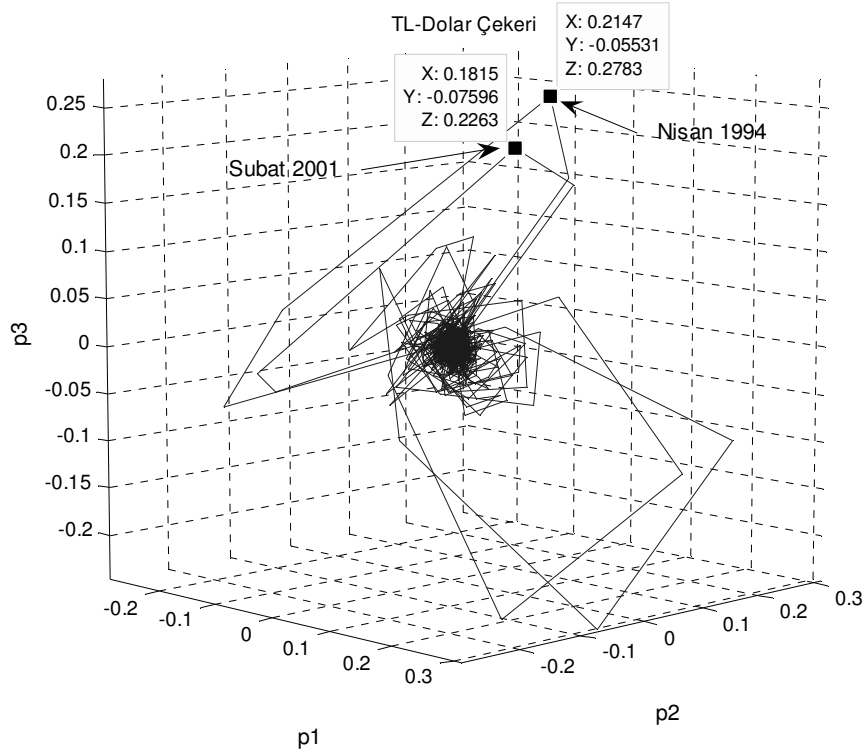


Şekil 4.33 Logusd9007 serisinin faz uzayını temsil eden en büyük üç ana bileşenin oluşturduğu çeker.

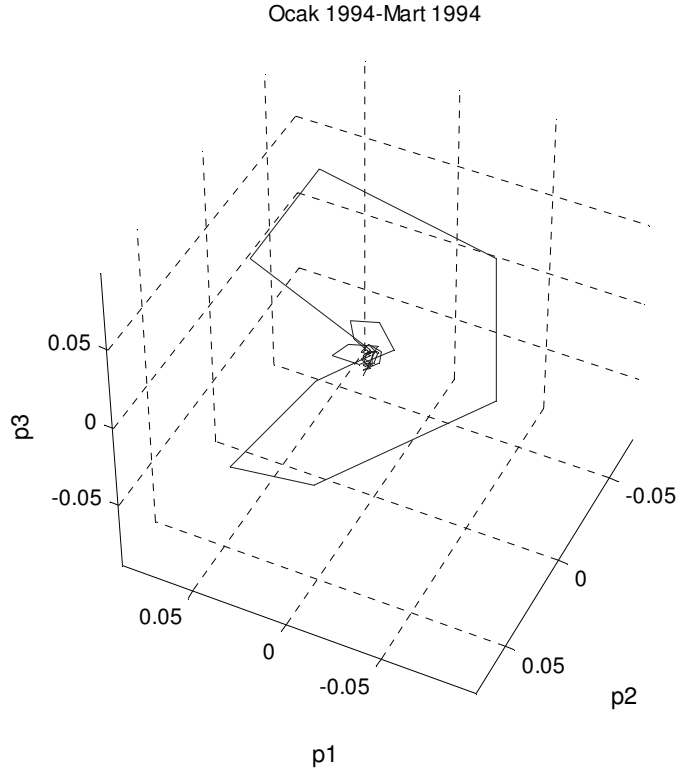


Şekil 4.34 Logusd9007 serisinin faz uzayını temsil eden en büyük iki ana bileşenin oluşturduğu çeker.

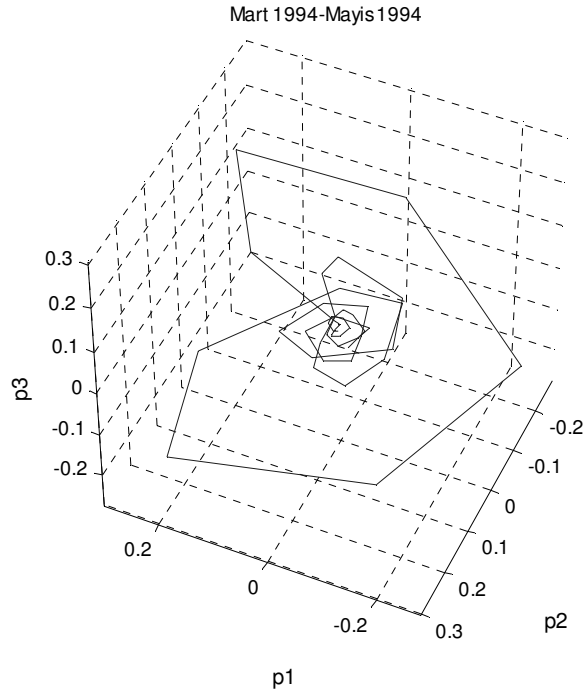
Şekilde 4.33 ve 4.34’de $p_{1,2,3}$ en büyük üç vektörü temsil eden koordinat eksenleridir.



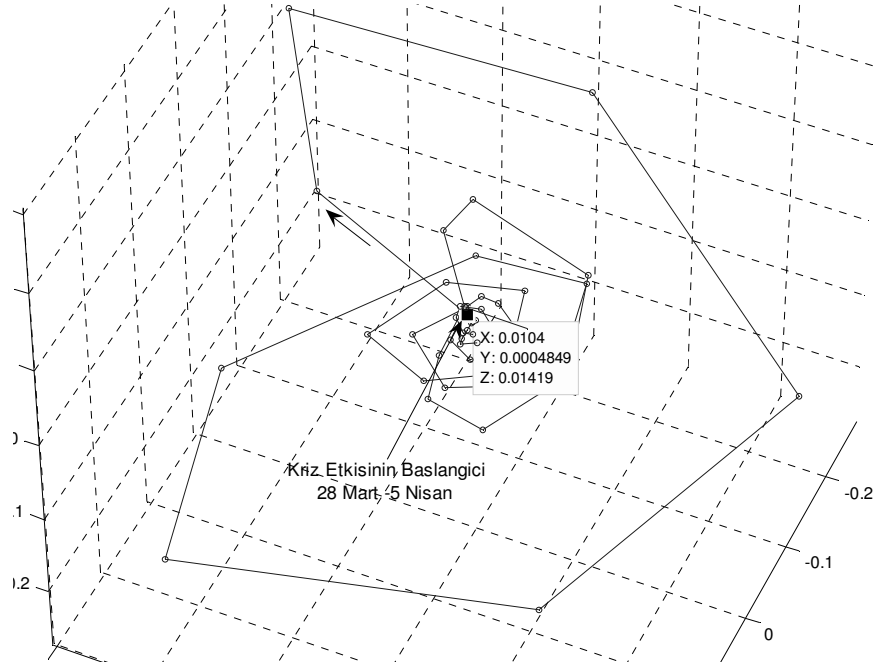
Şekil 4.35 Çeker üzerinde birbirlerine çok yakın ilerleyen 1994 ve 2001 kriz dönemine ait yörüngeler.



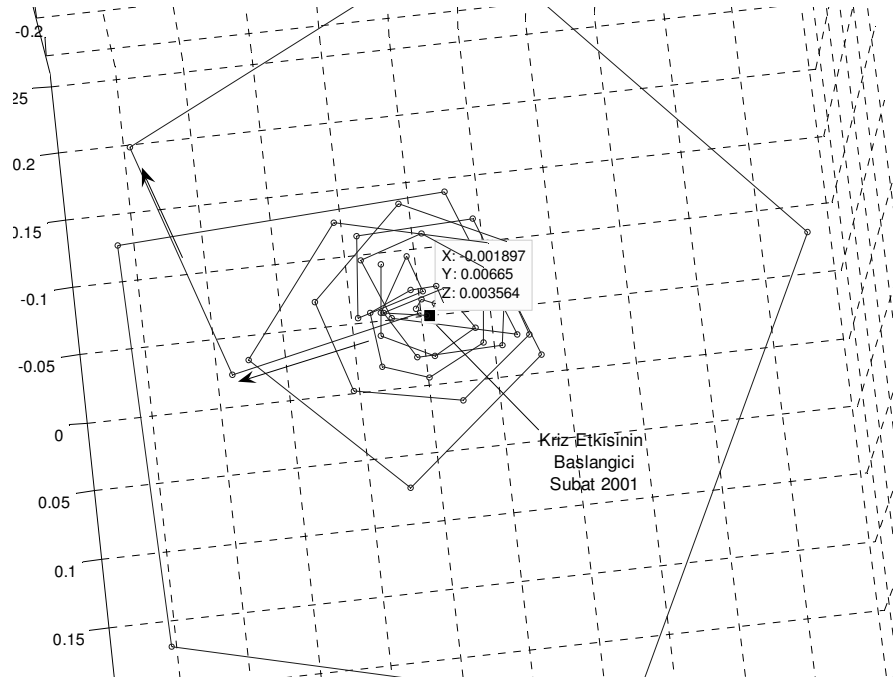
Şekil 4.36 1994 krizi öncesinde faz uzayı yörüngelerinin Ocak-Mart aylarındaki seyri.



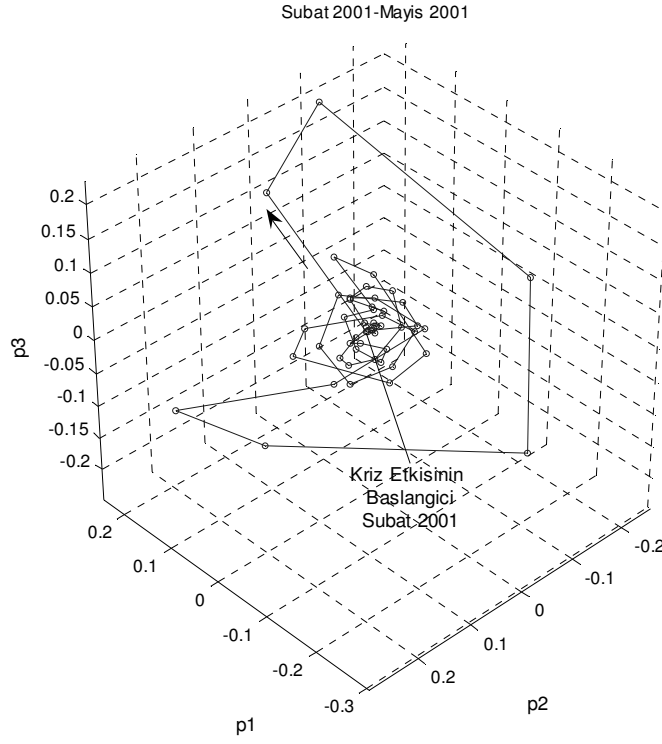
Şekil 4.37 Mart-Mayıs 1994 arasında faz uzayı yörüngelerinin seyri.



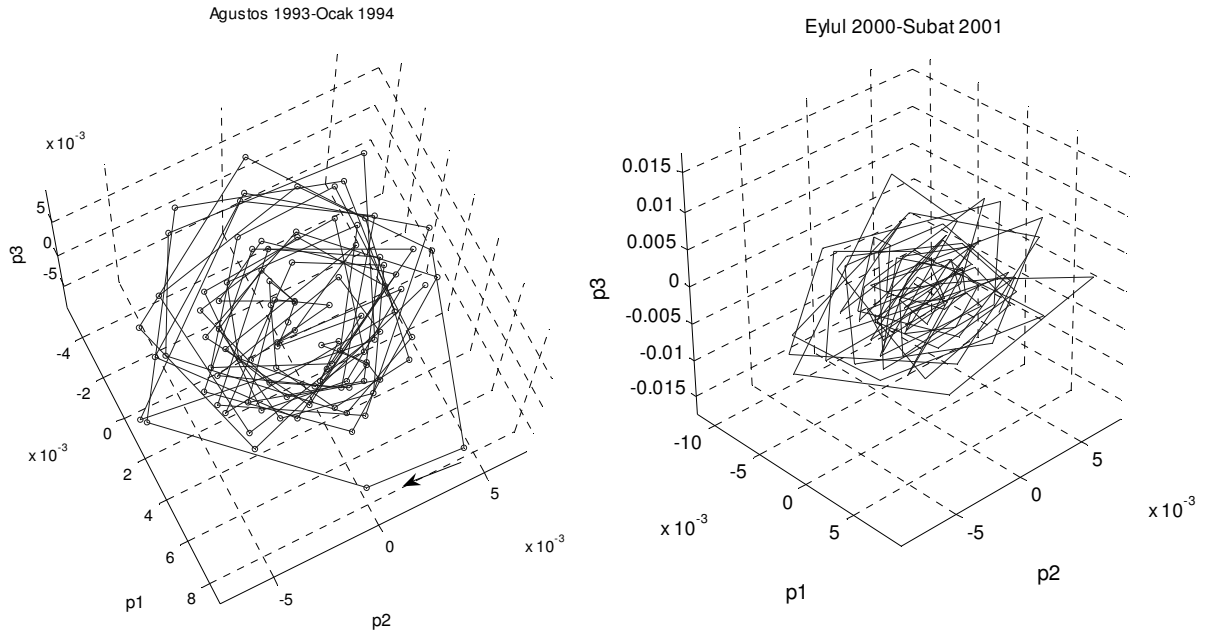
Şekil 4.38 1994 ekonomik krizinin faz uzayı yörüngelerinde yarattığı değişim



Şekil 4.39 2001 ekonomik krizinin etkilerinin başlaması faz uzayındaki seyri.



Şekil 4.40 2001 kriz dönemi sonrası Şubat-Mayıs arasında faz uzayı yörüngeleri.



Şekil 4.41 Kriz öncesi faz uzayı yörüngeleri: 0,005 birim yarıçapındaki dolanım hareketleri.

Araştırma sırasında, ekonomik zaman serilerinin görsel analizlerine çok az yer verildiği tespit edilmiştir. Özellikle faz uzayında var olduğu düşünülen bir çekerin görsel özellikleri, sayısal çıktılar kadar önem taşıyabilir. Örneğin Logusd9007 serisinden elde edilen çekerin ana bileşenleri kriz dönemlerindeki yörüngelerin ekerden ayrılırken ve ekere dönerken benzer şekillerde davrandığını nicel olarak göstermektedir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışma, kaos teorisinin temel matematiksel açıklamalarından, ekonomik zaman serileri analizinin uygulanmasına dek bir çok konuyu kapsamıştır. Uygulama kısmında ise matematiksel niteliklerinden çok pratik tespitlere yer verilmiştir. Bu amaçla uygulama alanı olarak döviz kurları seçilmiştir. Çalışma literatürdeki çoğu benzerine göre, faz uzayının istatistiksel özelliklerinden çok geometrik perspektifi üzerinde durmuştur. Burada araştırılan konu, gerçekten belirgin bir faz akışı olup olmadığı ve yörünge dinamiklerinin ne gibi özellikler sergilediğidir. Öncelikle incelenen sistemle ilgili eldeki tek bilginin, analiz edilecek zaman serisinin kendisi olduğu varsayılmış ve süreci ilerletecek tüm bilgi yine zaman serisinden elde edilmiştir. Faz uzayını temsil edecek gömme uzayının oluşturulması amacıyla seriden elde edilen ve ortak bilgi fonksiyonları (mutual information) incelenmiş, yanlış yakın komşular metodu (false nearest neighbors) ve Cao yaklaşımı ile gömme boyutu uygun gecikme değeri için tespit edilmiştir. 1990-2007 yılları arasındaki TL- Dolar döviz kurunun logaritmik büyüme verilerini içeren Logusd9007 serisi, 2001-2007 yılları arasındaki verileri içeren logusd0107 serisine göre daha yüksek boyuta sahiptir. Sonuç olarak logusd9007 sistemini açıklayabilecek dinamik sistemin değişken sayısı daha fazladır.

Logusd9007 zaman serisi çapraz-tahmin hataları (nonlinear cross predictions) 2001-2007 yılının 1990-2001 sürecinden farklı davranış sergilediği gözlemlenmiştir. Her iki döneme ilişkin gömme boyutunda ve hesaplanan Lyapunov üstellerinde ve hesaplanan tahmini korelasyon boyutlarında farklılıklar ortaya çıkmıştır. Logusd serisi uzay-zaman anlamında kırılmalar yaşamıştır ve durağan değildir. Fakat finansal serilerde durağanlığın gözlemlenebilmesinin ne derece mümkün olduğu akıllardaki bir soru işaretidir. Faz uzayında gürültü azaltımı uygulaması korelasyon boyutu bağlamında incelenmiş, belirgin bir ölçek aralığına sahip olmayan $\ln(C(\epsilon)) - \ln(\epsilon)$ ve $d(\epsilon) - \ln(\epsilon)$ grafikleri için gürültü azaltımının performansı incelenmiştir. Önemle belirtilmelidir ki, gürültü içeren veriler korelasyon toplamlarından elde edilen ölçek aralığını (scale region) düşürdükleri için, boyut tahminleri çoğunlukla tutarsız olmaktadır (Baker ve Gollup, 1996). Basit gürültü azaltımı metodunun logusd9007 serisinde ϵ 'nin yüksek değerleri için $d(\epsilon) - \ln(\epsilon)$ grafiğinde yatay plato bölgesini oluşturduğu tespit edilmiştir. Bu aralıktan elde edilen boyut 0 ve 1 arasında (0,67) düşük boyutlu bir kendine benzerlik yapısı sergilemektedir. Logusd0107 serisinin korelasyon boyutu 1'e oldukça yakın bir değerdir. Elde edilen boyutun kesirli değeri yerel

dalgalanmalardan dolayı sapmalar göstermektedir. Bu durumun nedeni gürültünün $\varepsilon < 0.002$ aralığında etkin olarak varlığını sürdürmesine bağlanabilir. Hesaplanan korelasyon boyutlarının geçerliliklerine şüpheyile yaklaşılmıştır. Şekil 4.41'den de görüleceği üzere çekerin çevresinde gerçekleşen dönüş hareketinin çapı yaklaşık 0,01'dir. Bu ise gürültü yarıçapına yakın bir değerdir. Gürültü azaltımı sırasında yörünge noktasındaki düzeltmenin kararlı ve kararsız yörüngeleri dikkate alarak doğru şekilde gerçekleştiği tam olarak söylenemez. Bu durumun karşılaşılabilecek bir durum olduğuna Schreiber (1993), Kantz ve Schreiber (1997)'de dikkat çekmiştir. Basit gürültü azaltımının etkinliği şüpheyile karşılandığından, Lyapunov üsteli tahminleri gürültüsü azaltılmayan seriden elde edilmiştir. Bu şekilde öncelikle Rosenstein ve Wolf metotlarından bilgisayar programıyla elde edilen üsteller sunulmuştur. Wolf algortması ile üç farklı gömme boyutu için hesaplanan üsteller, serinin kendisinden elde edilen katışık veriler ile sınanmıştır. Sınama sonucunda %99,9999 güven düzeyinde serilerin kendi gömme boyutlarında rastsal bir sistemden çok farklı faz uzayı davranışlarına sahip olduğu belirlenmiştir. Sonuç olarak elde edilen pozitif üstelin anlamlı olduğu kanısına varılmış olup, lineer olmayan dinamik bir sisteme ait kesin kanıtlar, kaotik harekete yönelik ise belirgin göstergeler elde edilmiştir

Deterministik yapının doğrulanması amacıyla Kaplan yaklaşımı ve BDS testine başvurulmuştur. Kaplan yaklaşımı faz uzayı yörüngelerinin rastsal yürüyüşten farklı davranış sergilediğini doğrulamıştır, ancak değer 1'e çok yakın değildir. Bu durumun nedeni olarak küçük ölçeklerdeki rastsallık verilebilir. BDS test istatistikleri belirlenen model kalıntılarına uygulanmıştır. Hipotez testi sonucunda lineer veya lineer olmayan determinizm kanıtı elde edilmiştir. Katışık veriler lineer olmayan süreçlerin etkin olduğunu ortaya koyduğundan, BDS testinin sonucu 'lineer olmayan deterministik yapı vardır' şeklinde değerlendirilmiştir.

Logusd9007 ve onun üçte birlik bir parçası olan logusd0107 serileri gürültü düzeyi ve evrensel nicelikler açısından birbirinden farklıdır. Bu bağlamda ilerideki çalışmalar serideki uzay zaman durağanlığına yönelik kanıtlara önem vermelidir.

Elde edilen gömme uzayından gürültünün azaltılması ve dinamiklerin daha belirgin hale getirilmesi için Tekil Spektum Analizi yaklaşımı uygulanmış ve gürültülü uzay, gürültü

düzeyi görece düşük olan bir alt uzayda incelenmiştir. Toplam değişkenliğin yaklaşık %60'ını açıklayan 3 boyutlu alt uzayda 1994 ve 2001 yıllarındaki finansal krizlere dair çeşitli tespitlerde bulunulmuştur. Buna göre kriz dönemlerinde faz uzayındaki yörünge hareketleri birbirlerine çok benzerdir. Bu görsel tespit araştırmacılara, faz uzayı tahmin modellerinin kriz dönemlerinde ne şekilde uygulanması gerektiğine yönelik bir öngörü sağlayabilir.

5.1 Gelecek Çalışmalar için Öneriler ve Değerlendirmeler

Elde bulunan bir haritanın izlenmesinden ziyade çoğu konu, uygulama sürecinde karşılaşılan sorunların çözümüne yönelik araştırmaların neticesinde tez sürecine katılmıştır. Uygulama alanı ise genelde kaotik serilerin gözlendiği döviz kurlarının araştırılmasını kapsamıştır. Birçok noktada farklı bir zaman serisi seçerek analize devam etmek ikileminde kalınmasına rağmen, çalışma döviz kurları üzerinden devam ettirilmiştir. İlgili serilerin en azından lineer olmayan deterministik bir yapıdan geldiğini çeşitli analizlerle gösterilmiştir. Ancak kullanılan algoritmaların gürültüye ve parametreye karşı çok hassas olması bazı şüpheleri beraberinde getirmektedir. Lyapunov üstellerinin hesaplanması bağlamında, gelecek çalışmalar için en önemli tavsiye, daha güvenilir bir algoritma olan Gençay-Dechert yaklaşımının kullanılmasıdır. Nöral ağlar yaklaşımını kullanan bu yapı, tezin kapsamını genişletmemek için incelenmemiştir.

1990-2001 ve 2001-2007 yılları arasındaki serilerin korelasyon boyutu hesaplarındaki şüphelere rağmen, yine de olumlu bir bakış açısıyla çok düşük boyutlu bir çekerin ($0 < d_G < 1$) varlığı olasıdır. Muhtemelen Cantor tozuna benzeyen ve ufak ölçeklerde varlığına kaybeden bir kendine benzerlik durumu söz konusudur. Ancak sürecin daha ileri gürültü azaltımı teknikleri kullanılarak incelenmesi gerekmektedir.

Literatürde kaosu varlığını gereğinden fazla bir rahatlık içinde kabul eden bilimsel yayınları eleştiren Brooks (1998) şuna dikkat çekmiştir: özellikle ekonomik ve finansal serilerde var olan yüksek gürültü düzeyi, incelenen sistemde gerçekten kaotik bir yapı varsa da bunun eldeki robust olmayan teknikler ile tespitini imkânsız hale getirmektedir. Bu durumda eldeki veri sayısının ne kadar fazla olduğu önem taşımaz. Brooks, testlerin robustluğuna yönelik olarak sofistike tekniklerin bulunmasına kadar var olan bu olgunun devam edeceğini belirtmektedir.

Gelecekteki alışmalar için belki de en önemli öneri, incelenen serilerin doğası ile ilgilidir. Eğer fiziksel bir sürecin ıktıları inceleniyorsa (hava olayları, depremler vs.) kaos'un tespitine yönelik çalışmalar çok daha net sonuçlar verecektir. Çünkü tanım itibariyle bu analizler belirli deterministik kuralları izleyen sistemlerden yola çıkılarak üretilmiştir. Ancak eğer finansal bir seri inceleniyorsa, kaos'un tespitinden ziyade, ileri tahmin tekniklerinin araştırılması daha net sonuçlar sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

- Abarbanel, H. D., Brown, R., Sidorowich, J. J., Tsimring, L. S., (1993), "The Analysis of Observed Chaotic Data in Physical Systems", *Reviews of Modern Physics*, 64(4):1331-1392.
- Abel, A. B., Bernanke, B. S., (1995), *Macroeconomics*, Addison-Wesley, USA.
- Aihara, K. ve Katayama, Ryu., (1995), "Chaos Engineering in Japan", *Communication of the ACM*, 38(11):103-107.
- Alsaleh, M. A., (2002), "Detecting Chaos in Kuwait Exchange Rate Data", *Journal of Mathematical Science*, 111(6):3814-3819.
- Arnold, V.I., (1998), *Ordinary Differential Equations*, The MIT Press, Massachusetts.
- Baker, G.L. ve Gollub, J.P., (1996), *Chaotic Dynamics: An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Borrelli, R.L. ve Coleman C.S., (1996), *Differential Equations: A Modelling Perspective*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Bountis, T., (1997), "Fundamental Concepts of Classical Chaos. Part II: Fractals and Chaotic Dynamics", *Open Sys. & Information Dyn.*, 4: 281-322.
- Brooks, C., (1998), "Chaos in Foreign Exchange Markets: A Sceptical View", *Computational Economics*, 11: 265-281.
- Chatrath, A., Adrangi, B., Shank, T., (2001), "Nonlinear Dependence in Gold and Silver Futures: Is It Chaos?", *American Economist*, 45(2):25-32.
- Ditto, W., Munakata, T., (1995), "Principles and Applications of Chaotic Systems", *Communications of the ACM*, 38 (11): 96-102.
- Fraser, A. M., Swinney, H., (1986), "Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information", *Physical Review A*, 33(2):1134-1140.
- Hasanov, E., Uzgören, G., Büyükaksoy, A., (2002), *Diferansiyel Denklemler Teorisi*, Papatya Yayıncılık, İstanbul.
- Hegger, R., Kantz H., and T. Schreiber, (1999), "Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package", *CHAOS* 9, 413.
- Hilborn, R. C. , (2000), *Chaos and Nonlinear Dynamics An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press, New York.
- İnan, E. A., (2002), "Kur Rejimi Tercihi ve Türkiye", *Bankacılar Dergisi*, Sayı 40.
- Johnson, R. A. ve Wichern, D. W., (2002), "Applied Multivariate Statistical Analysis", Prentice Hall, USA.
- Kaplan, D. T., Glass, L., (1992), "Direct Test for Determinism in a Time Series", *Physical Review Letters*, 68: 4.
- Kantz, H., Schreiber, T., (1997), *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kim, H. S., Yoon Y. N., Kim J. H., Kim J. H., "Searching for Strange Attractor in Wastewater

- Flow”, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 15: 399-413.
- Kostelich, E. J., (1997), “The Analysis of Chaotic Time-Series Data”, *System&Control Letters*, 31: 313-319.
- LeBaron, B., (1997), “A Fast Algorithm for BDS Statistics”, *Studies in Nonlinear Dynamics and Economics*, 2(2):53-59.
- Medio, A., (1993), *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*, Cambridge University Press, Great Britain.
- Moosa, I. A., (2000), *Exchange Rate Forecasting: Techniques and Applications*, Macmillan Press, London.
- Ott, E., (2002), *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, United Kingdom.
- Panas, E. ve Ninni, V., (2000), “Are Oil Markets Chaotic? A Non-linear Dynamic Analysis”, *Energy Economics*, 22: 549-568.
- Park, J., Obeysekara, J., Vanzee, R., (2005), “Prediction Boundaries and Forecasting of Non Linear Hydrologic Stage Data”, *Journal of Hydrology*, 1-16.
- Perc, M., (2005), “Nonlinear Time Series Analysis of Human Electrocardiogram”, *European Journal of Physics*, 26:757-768.
- Por, L. T., Puthusserypady, S., (2005), “Postprocessing Methods for Finding the Embedding Dimension of Chaotic Time Series”, *Physical Review E*, 72: 027204,1-027204,4.
- Ross, S.L. (1984), *Differential Equations*, 13th Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Ruelle, D., (2000), *Rastlantı ve Kaos*, TÜBİTAK Yayınları, Ankara.
- Sano, M. ve Sawada, Y., (1985), “Measurement of the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series” *Physical Review Letters*, 55(10):1082-1085.
- Scarlat, E. I., Stan, C., Cristescu, C. P., (2006), “Chaotic Features in Romanian Transition Economy as Reflected onto Currency Exchange Rate”, *Chaos Solitons&Fractals*, basım aşamasında.
- Schreiber, T., (1993), “Extremely Simple Nonlinear Noise-Reduction Method”, *Physical Review E*, 47:2401-2404.
- Schreiber, T., (1997), “Detecting and Analyzing Nonstationarity in a Time Series Using Nonlinear Cross Predictions”, *Physical Review Letters*, 78: 5.
- Shannon, C. E., (1948), “A Mathematical Theory of Communication”, *The Bell System Technical Journal*, 27: 379-423; 623-656.
- Sprott, J. C., (2003), *Analysis of Chaotic Time Series*, Cambridge University Press, USA.
- Strogatz, S.H., (1994), *Nonlinear Dynamics and Chaos, With Applications to Physics, Biology and Engineering*, Perseus Books Publishing, USA.
- Urbach, R.M.A., (2000), *Footprints of Chaos in the Markets: Analyzing Non-Linear Time Series in Financial Markets and Other Real Systems*, Prentice Hall, Great Britain.

EKLER

- Ek 1 Ergodiklik Kavramı
- Ek 2 Logusd9007 ve logusd0107 için kurulan modeller ve BDS test istatistikleri
- Ek 3 Kullanılan bilgisayar programları, komutlar ve ek açıklamalar

Ek 1 Ergodiklik Kavramı

Ergodiklik temelini ‘değişmez ölçüm’ (invariant measure) kavramından alır. Bir çeker karakterize eden diğer bir özellik olarak olasılık fonksiyonları ele alınır. Bu durum özellikle faz uzayının boyutunun artması durumunda yararlıdır çünkü boyut sayısı arttığında faz eğrilerinin uzayda hareket edebilecekleri olası alanların sayısı da artar. Bu durumda sistemi tanımlayan geometrik özelliklerden çok soyut kuramlar daha kullanışlı hale gelmektedir. Örneğin ele alınacak duruma göre faz uzayındaki yörüngeleri oluşturacak noktaların uzayın daha önceden belirlenen sınırlı bir alanına düşme olasılığı yararlı olmaktadır. Burada olasılık olarak kullanılan kavram göreceli sıklıktır ve toplam M denemedeki i . başarılı sonucun sayısı m_i olmak üzere göreceli sıklık basitçe $p_i = m_i / M$ dir. Burada bir yörüngenin tanımlı tek bir nokta ile çakışma ihtimali ele alınmaz, bu durumda noktanın uzaydaki herhangi bir noktada bulunma olasılığı sıfırdır. Çünkü toplam deneme sayısı sonsuza giderken başarı sayısı sıfır olacaktır! Bu bağlamda göreceli sıklık kavramı anlamlı şekilde büyük parçalara ayrılmış faz uzayını temel almaktadır. Eğer tüm faz uzayı, örneğin üç boyutlu bir sistem ufak küplere ayrılırsa, dinamik sistem tarafından üretilen faz eğrilerinin herhangi bir i . küpün içinden geçme sayısı m_i bir göreceli sıklık yaratacaktır. Burada p_i ’ler *doğal olasılık ölçümleridir*. Herhangi bir küp ne kadar fazla ziyaret edilirse, küp o kadar büyük ölçüme sahip olur. Eğer ele alınan tek boyutlu bir harita ise ve olasılık ölçümü $\mu(x) = f(\mu(x))$ ise, o halde $\mu(x)$ değişmez bir olasılık ölçümüdür, çünkü sistemin dinamikleri dağılımı etkilememektedir. Eğer bir faz uzayının sadece x eksenini ele alınırsa, yörüngelerin parçalara ayrılmış bu x ekseninde i . parça içinden geçme olasılığı, $p(x)$ herhangi bir olasılık dağılım fonksiyonu olmak üzere $p_i = \mu(x_i) = \int_{i.parça} p(x)dx$ şeklinde verilmektedir.

Sistemin değişmez dağılıma sahip olduğu durumlarda, tüm sistemin genel özelliklerini yansıtan ortalama değerlere ulaşılabilir. Burada ana fikir, yörüngelerin üzerindeki noktaların birbirleri ile olan geometrik ilişkilerinin, bu noktaların uzaysal (spatial) dağılımı tarafından yansıtılabilecek olmasıdır. Sistemin faz uzayı değişkeni x ’e bağlı belirli bir özelliği, B (örneğin Lyapunov üsteli) için, zaman ortalaması şu şekilde verilir:

$$\langle B \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T B(x(t))dt, \quad (\text{Kesikli zaman serileri için } \langle B \rangle_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B(x(t_i))). \quad (4.5)$$

Global eğilimi olabildiğince gerçeğe yakın şekilde belirlemek için B özelliğinin ortalaması hesaplanırken $T \rightarrow \infty$ dikkate alınır. Benzer şekilde B özelliğinin ortalaması (olasılık dağılım

fonksiyonu $p(x)$ 'in bilinmesi durumunda) sistemin yörüngesinin uzayın belirli bir parçasına giriş olasılığı ile x 'e bağlı B özelliğinin çarpılması ile de bulunabilir:

$$\langle B \rangle_p = \int B(x)p(x)dt, \text{ (Kesikli zaman serileri için } \langle B \rangle_p = \sum_{i=1}^M B(x_i)p_i \text{)}. \quad (4.6)$$

Burada uzaysal dağılım özellikleri kullanıldığından ortalama uzay ortalaması adını alır. Eğer bir sistemde zaman ortalaması ile uzay ortalaması birbirine eşit ise sistemin **ergodik** olduğu söylenir ve kaotik çekerlerin ergodik olduğu düşünülmektedir (Hilborn, 2000). Bu özellik nicel belirleyicilerin ortalama değerleri elde edilirken önemlidir. Uzayın herhangi bir bölgesinde hesaplanan evrensel nicelikler, diğer bir bölgesinde hesaplanan değerler ile aynıdır.

Ek 2 Logusd9007 ve logusd0107 için kurulan modeller ve BDS test istatistikleri

Çizelge Ek 2.1 Logusd9007 serisi için kurulana otoregresif model.

Dependent Variable: LOGUSD9007

Method: Least Squares

Date: 03/09/07 Time: 11:46

Sample(adjusted): 4 4318

Included observations: 4315 after adjusting endpoints

Convergence achieved after 35 iterations

Backcast: 1 3

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.001480	0.000191	7.760978	0.0000
AR(1)	0.947948	0.103339	9.173150	0.0000
AR(2)	-0.538441	0.059967	-8.979029	0.0000
MA(1)	-0.736621	0.103773	-7.098405	0.0000
MA(2)	0.165787	0.059418	2.790183	0.0053
MA(3)	0.204501	0.028846	7.089473	0.0000
R-squared	0.079378	Mean dependent var	0.001480	
Adjusted R-squared	0.078310	S.D. dependent var	0.012160	
S.E. of regression	0.011674	Akaike info criterion	-6.061556	
Sum squared resid	0.587217	Schwarz criterion	-6.052699	

Çizelge Ek 2.2 Logusd9007 serisinin BDS test istatistikleri

BDS Test for Logusd9007

Date: 03/09/07 Time: 11:47

Sample: 1 4318

Included observations: 4318

<u>Dimension</u>	<u>BDS Statistic</u>	<u>Std. Error</u>	<u>z-Statistic</u>	<u>Prob.</u>	
2	0.045335	0.001668	27.17681	0.0000	
3	0.088506	0.002659	33.28928	0.0000	
4	0.120498	0.003176	37.93600	0.0000	
5	0.140153	0.003322	42.18783	0.0000	
6	0.150945	0.003215	46.94590	0.0000	
7	0.154159	0.002957	52.12823	0.0000	
Raw epsilon		0.0081861			
Pairs within epsilon		13125781.	V-statistic	0.7049585	
Triples within epsilon		4.433E+10	V-statistic	0.5517491	
<u>Dimension</u>	<u>C(m,n)</u>	<u>c(m,n)</u>	<u>C(1,n-(m-1))</u>	<u>c(1,n-(m-1))</u>	<u>c(1,n-(m-1))^k</u>
2	5043916.0	0.542173	6557485.0	0.704868	0.496839
3	4078594.0	0.438614	6553836.0	0.704802	0.350108
4	3414131.0	0.367327	6551278.0	0.704854	0.246829
5	2918172.0	0.314113	6548095.0	0.704839	0.173960
6	2540502.0	0.273587	6545313.0	0.704866	0.122642
7	2233890.0	0.240680	6543083.0	0.704953	0.086521

Çizelge Ek 2.3 Logusd0107 serisi için kurulana otoregresif model.

Dependent Variable: ILFARKLNUSD9007

Method: Least Squares

Date: 03/09/07 Time: 13:09

Sample: 3000 4318

Included observations: 1319

Convergence achieved after 15 iterations

Backcast: 2999

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.929333	0.070764	13.13287	0.0000
AR(2)	-0.100573	0.037470	-2.684118	0.0074
AR(3)	0.086044	0.028366	3.033319	0.0025
MA(1)	-0.879466	0.065684	-13.38945	0.0000
R-squared	0.012138	Mean dependent var	-5.61E-05	
Adjusted R-squared	0.009885	S.D. dependent var	0.008170	
S.E. of regression	0.008130	Akaike info criterion	-6.783520	
Sum squared resid	0.086914	Schwarz criterion	-6.767797	

Çizelge Ek 2.4 Logusd0107 serisinin BDS test istatistikleri

BDS Test for Logusd0107

Date: 03/09/07 Time: 13:12

Sample: 3000 4318

Included observations: 1319

Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
2	0.021880	0.002458	8.899622	0.0000
3	0.044759	0.003910	11.44777	0.0000
4	0.064603	0.004660	13.86475	0.0000
5	0.075133	0.004860	15.45803	0.0000
6	0.079796	0.004691	17.00979	0.0000

Raw epsilon 0.0107674

Pairs within epsilon 1225929.0 V-statistic 0.7046537

Triples within epsilon 1.242E+09 V-statistic 0.5411635

Dimension	C(m,n)	c(m,n)	C(1,n-(m-1))	c(1,n-(m-1))	c(1,n-(m-1))^k
2	449418.00	0.517821	611204.00	0.704231	0.495941
3	341158.00	0.393680	610081.00	0.704005	0.348921
4	268328.00	0.310109	609070.00	0.703907	0.245506
5	214078.00	0.247788	608033.00	0.703779	0.172655
6	173494.00	0.201120	606952.00	0.703597	0.121324

Ek 3 Kullanılan bilgisayar programları, komutlar ve ek açıklamalar

TSTOOLS 1.11 programı Matlab altında çalışan ve Christian Merkwirth, Ulrich Parlitz, Immo Wedekind, Werner Lauterborn tarafından yazılmış rutin kodlardan oluşmaktadır. Bu program 3 Mayıs 2006 tarihinde, “<http://www.physik3.gwdg.de/tstool/index.html>” adresinden alınmıştır. Programa ait kullanılan modüller, (1) gömme boyutu için Cao yaklaşımı, (2) katışık verilerin oluşturulması ve (3) ana bileşenlerin tespit edilmesidir. Bu modüllerin programın yardımcı dosyalarından verilen tanımları Çizelge Ek 3.1 Çizelge Ek 3.2’de verilmiştir.

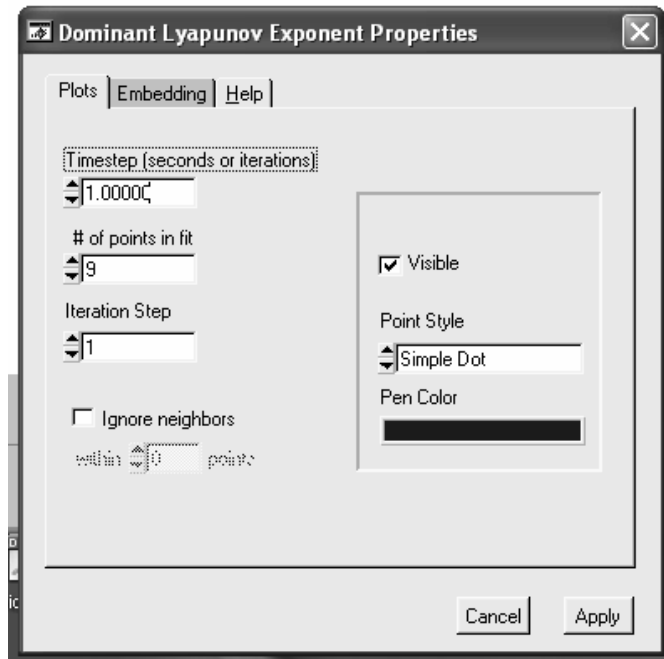
Çizelge Ek 3.1 TSTOOLS programında kullanılan komutların açıklamaları

tstoolbox/@signal/cao Syntax: * [E1, E2] = cao(s, maxdim, tau, NNR, Nref) Input arguments: * s - scalar input signal * maxdim - maximal dimension * tau - delay time * NNR - number of nearest neighbor to use * Nref - number of reference points (-1 means: use all points) Estimate minimum embedding dimension using Cao's method. The second output argument, E2, can be used to distinguish between deterministic and random data.	tstoolbox/@signal/pca Syntax: * [rs, eigvals, eigvecs] = pca(s) => mode='normalized', maxpercent = 95 * [rs, eigvals, eigvecs] = pca(s, mode) => maxpercent = 95 * [rs, eigvals, eigvecs] = pca(s, mode, maxpercent) Input arguments: * each row of data is one 'observation', e.g. the sample values of all channels in a multichannel measurement at one point in time * mode can be one of the following : 'normalized' (default), 'mean', 'raw' + in mode 'normalized' each column of data is centered by removing its mean and then normalized by dividing through its standard deviation before the covariance matrix is calculated + in mode 'mean' only the mean of every column of data is removed + in mode 'raw' no preprocessing is applied to data * maxpercent gives the limit of the accumulated percentage of the resulting eigenvalues, default is 95 % Principal component analysis of column orientated data set.
---	--

Çizelge Ek 3.2 TSTOOLS programında kullanılan katışık veri türetilmesinde kullanılan komutların açıklamaları

tstoolbox/@signal/surrogate3 Syntax: * rs = surrogate3(s) create surrogate data for a scalar time series by permuting samples randomly	tstoolbox/@signal/surrogate1 Syntax: * rs = surrogate1(s) create surrogate data for a scalar time series by randomizing phases of fourier spectrum see : James Theiler et al.'Using Surrogate Data to Detect Nonlinearity in Time Series', APPENDIX : ALGORITHM
--	---

NDT (Nonlinear Dynamic Toolbox) programı John Riess'in 'Chaotic Time Series Analysis' adlı doktora tezi kapsamında tasarlamış olduğu programdır. İlgili teze "<http://www.elec.qmul.ac.uk/people/josh/documents/Reiss-PhDThesis.pdf>" adresinden ulaşılabilir. Program "<http://www.elec.qmul.ac.uk/people/josh/documents/>" adresinden 20 Ocak 2007 tarihinde alınmıştır. Programın sadece Wolf algoritmasını esas alan en büyük Lyapunov üstelini veren modülü kullanılmıştır.



Şekil Ek 3.1 Wolf algoritması modülü.

TISEAN 2.1 Hegger vd. (1999) tarafından ayrıntılarıyla açıklanan program parçacıklarını içeren komut dosyalarıdır. İlgili dosyalar “<http://www.mpipks-dresden.mpg.de/~tisean/>” adresinden Mart 2006 tarihinde indirilmiştir. Bu programda kullanılan komutlar ve açıklamaları Çizelge 3.3-Çizelge 3.8’den görülebilir. Burada belirli parametre değerleri literatür taramasında ilgili bilgilere ulaşılmadığından ‘default’ değerleri alınarak kullanılmıştır.

Çizelge Ek 3.3 TISEAN 2.1 ‘d2’ komutu parametreleri.

Option	Description	Default
-l#	number of data points to be used	whole file
-x#	number of lines to be ignored	0
-d#	delay for the delay vectors	1
-M#	# of components,maximal embedding dimension	1,10
-c#	<u>columns to be read</u>	1,...,# of components
-t#	theiler window	0
-R#	maximal length scale	(max data interval)
-r#	minimal length scale	(max data interval)/1000
-##	number of epsilon values	100
-N#	maximal number of pairs to be used (0 means all possible pairs)	1000
-E	use data that is normalized to [0,1] for all components	not set (use natural units of the data)
-o[#]	<u>output file name</u> (without extensions)	'datafile'[,c2][.d2][.h2][.stat] (or if data were read from stdin: stdin[,c2][.d2][.h2][.stat])
-V#	<u>verbosity level</u> 0: only panic messages 1: add input/output messages 2: add input/output messages each time output file is opened	1

Programın kullanılması sonucunda elde edilen çıktı doasyları şu şekildedir:

- **.c2 uzantısı:** Korelasyon toplamaları ve karşılık gelen ε değerleri,
- **.d2 uzantısı:** .c2 uzantılı dosyadan hesaplanan yerel eğimler.
- **.h2 uzantısı:** Bu dosya korelasyon entropisini içerir.
- **.stat uzantısı:** Süreçle ilgili bilgi veren dosya.

Lyapunov üstelinin hesaplanması amacıyla kullanılan lyap_r komutu için açıklamalar Çizelge Ek 3.4’de verilmiştir. Gömme uzayı parametrelerinin tespit edilmesi amacıyla

Çizelge Ek 3.4 lyap_r komutunun parametreleri

Option	Description	Default
-l#	number of data to be used	whole file
-x#	number of lines to be ignored	0
-c#	<u>column to be read</u>	1
-m#	embedding dimension to use	2
-d#	delay to use	1
-t#	window around the reference point which should be omitted	0
-r#	minimal length scale for the neighborhood search	(data interval)/1000
-s#	number of iterations in time	50
-o#	<u>output file name</u>	'datafile'.ros (or stdin.ros if data was read from stdin)
-V#	<u>verbosity level</u> 0: only panic messages 1: add input/output messages 2: add statistics for each iteration	3
-h	show these options	none

Çizelge Ek 3.5 Ortak bilgi fonksiyonu değerleri için kullanılan ‘mutual’ komutu parametreleri

Option	Description	Default
-l#	number of data to use	whole file
-x#	number of lines to be ignored	0
-c#	<u>column to be read</u>	1
-b#	number of boxes for the partition	16
-D#	maximal time delay	20
-o[#]	<u>output file name</u>	without name given: 'datafile'.mut (or stdin.mut if data were read from stdin) without -o results are written to stdout.
-V#	<u>verbosity level</u> 0: only panic messages 1: add input/output messages	1
-h	show these options	none

Çizelge Ek 3.6 Yanlış yakın komşu yüzdesi değerleri için kullanılan ‘false_nearest’ komutu parametreleri

Option	Description	Default
-l#	number of data to use	whole file
-x#	ignore the first # rows	0
-c#	<u>column to be read</u>	1
-m#	minimal dimension of the delay vectors	1
-M#	maximal dimension of the delay vectors	5
-d#	delay of the vectors	1
-f#	ratio factor	10.0
-t#	theiler window	0
-o[#]	<u>output file name</u>	without file name: 'datafile'.fnn (or stdin.del if stdin was read) If no -o is given stdout is used
-V#	<u>verbosity level</u> 0: only panic messages 1: add input/output messages 2: add information about the current state of the program	3
-h	show these options	none

Çizelge Ek 3.7 Basit gürültü azaltımı için kullanılan ‘lazy’ komutu parametreleri.

Simple nonlinear noise reduction

```
lazy -m# [-r# | -v#] [-i# -o outfile -l# -x# -c# -V# -h] file
```

- m embedding dimension
 - r absolut radius of neighbourhoods
 - v same as fraction of standard deviation
 - i number of iterations (1)
 - l number of values to be read (all)
 - x number of values to be skipped (0)
 - c column to be read (1 or *file*,#)
 - o output file name, just -o means *file_1c*, *file_1cc* (etc.)
 - V verbosity level (0 = only fatal errors)
 - h show this message
-

Çizelge Ek 3.8 Uzay-zaman ayırım çizimleri için kullanılan ‘stp’ komutu parametreleri.

Space-time separation plot

```
stp -d# -m# [-## -t# -%# -o outfile -l# -x# -c# -V# -h] file
```

- d delay
 - m embedding dimension
 - # time resolution (1)
 - t time steps (100, at most 500)
 - % fraction at wich to create levels (0.05, at least 0.01)
 - l number of values to be read (all)
 - x number of values to be skipped (0)
 - c column to be read (1 or *file*,#)
 - o output file name, just -o means *file_stp*
 - V verbosity level (0 = only fatal errors)
 - h show this message
-

Matjaž Perc tarafından tasarlanan ve kendi bilimsel yayınlarında kullandığı çeşitli program parçacıkları, yazarın kendi web sitesinden, <http://www.perc.biz/ejp/time.html>, 6 Şubat 2007’de alınmıştır. Determinizmin test edilmesinde (Kaplan testi) ve durağanlığın belirlenmesinde, sırasıyla determinism.exe ve stationarity.exe program parçacıkları kullanılmıştır. Teorik açıklamalar ve uygulamada kullanılan parametreler hakkında özet bilgi için ‘Perc (2005)’ incelenebilir.

Eviews 4.1 programı otoregresif modellerin tahmininde, Dickey Fuller (ADF) ve BDS test istatistiklerinin elde edilmesinde kullanılmıştır. İlgili test sonuçları EK2’de görülebilir.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 04.07.1981

Doğum yeri İstanbul

Lise 1996-1998 Edirne Fen Lisesi
1998-1999 Özel Kültür Fen Lisesi

Lisans 1999-2004 İstanbul Teknik Üniversitesi İşletme Fakültesi
İşletme Mühendisliği

Çalıştığı Kurumlar :

2005- Devam ediyor Yıldız Teknik Üniversitesi İstatistik Bölümü
Araştırma Görevlisi