



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ZAMAN SERİLERİNİN TAHMİNİ İÇİN
GRİ MODELLEME METODU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Levent AKYÜZ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Halis BİLGİL

AKSARAY, 2022

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 202342405 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Levent AKYÜZ tarafından hazırlanan “**ZAMAN SERİLERİNİN TAHMİNİ İÇİN GRİ MODELLEME METODU**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Halis BİLGİL

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Doç. Dr. Alper ODABAŞ

Eskişehir Osman Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Tez Savunma Tarihi: 09/05/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Levent AKYÜZ

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım boyunca geniş bilgi ve deneyimleri ile her konuda yol gösterici olan, bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan, yardımlarını ve desteğini esirgemeyen danışman hocam Aksaray Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı öğretim üyesi Sayın Prof. Dr. Halis BİLGİL' e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hiçbir zaman desteğini esirgemeyen, varlığıyla bana güç veren, her zaman yanımda olan sevgili eşim Lalehan AKYÜZ' e ve çocuklarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Levent AKYÜZ
AKSARAY, 2022



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN BİLGİLER.....	7
2.1 Standard Gri Model (GM (1,1)).....	7
2.2 Modifiye Edilmiş Gri Model (NGM (1,1)).....	9
2.3 NGM modelin optimizasyonu.....	13
2.4 Üstel Gri Model (EXGM (1,1))	15
3. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	19
3.1 Standart GM (1,1) Modeli Uygulamaları.....	19
3.2 NGM (1,1) Modeli Uygulamaları	26
3.3 EXGM (1,1) Modeli Uygulamaları.....	33
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	40
KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ.....	49

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMAN SERİLERİNİN TAHMİNİ İÇİN GRİ MODELLEME METODU

Levent AKYÜZ

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Halis BİLGİL

ÖZET

Gri sistem teorisi bilinmeyen sistemlerin davranışını az sayıda veri ile tahmin etmektedir. Gri tahmin teorisi disiplinler arası bir bilimsel alandır ve son otuz yılda kısmen bilinmeyen parametrelere sahip birçok sisteme uygulanmıştır.

Bu çalışmada ise Türkiye' nin 2011-2020 yılları arasındaki Ar-Ge ve eğitim harcamaları verileri ve 2010-2019 yılları arasındaki elektrik üretimi verileri Türkiye İstatistik Kurumu' ndan alınmıştır. Ar-Ge ve eğitim harcamaları 2021-2030 yılları için ve elektrik üretimi 2020-2029 yılları için Standart Gri Model (GM (1,1)), Yeni Gri Model (NGM (1,1)) ve Üstel Gri Model (EXGM (1,1)) kullanılarak tahmin edilmiştir. Her üç modelin sonuçları karşılaştırılmıştır. Gerçek ve tahmin değeri arasındaki yüzde bağıl hata (RPE) ve ortalama yüzde bağıl hata (MAPE) belirlenmiştir. Gerçek değer ve tahmin değerleri arasındaki korelasyon incelenmiştir.

MAPE değeri Ar-Ge harcamaları için GM (1,1) ile %2.95, NGM (1,1) ile %14,01 ve EXGM (1,1) ile % 1.48 olarak hesaplanmıştır. Eğitim harcamaları için GM (1,1) ile %3.32, NGM (1,1) ile %8.66 ve EXGM (1,1) ile % 3.09 olarak hesaplanmıştır. Elektrik üretimi için GM (1,1) ile %1.58, NGM (1,1) ile %6,67 ve EXGM (1,1) ile % 1.36 olarak hesaplanmıştır. Gerçek değer ve tahmini değerin arasındaki korelasyonu gösteren R^2 değerleri sıra ile Ar-Ge harcamaları için GM(1,1) ile 0.9974, NGM (1,1) ile 0.9821 ve EXGM (1,1) ile 0,9985 olarak hesaplanmıştır. Eğitim harcamaları için GM(1,1) ile 0.9845, NGM (1,1) ile 0.9619 ve EXGM (1,1) ile 0,9846 olarak hesaplanmıştır. Elektrik üretimi için GM(1,1) ile 0.9734, NGM (1,1) ile 0.6462 ve EXGM (1,1) ile 0,9753 olarak hesaplanmıştır.

Sonuç olarak GM (1,1), NGM (1,1) ve EXGM (1,1) yöntemleri ile yapılan tahmin değerlerinin hata ve korelasyon sonuçları incelendiğinde tüm uygulamalarda EXGM (1,1) yönteminin daha iyi sonuç verdiği görülmektedir. Önümüzdeki 10 yıl içerisinde Ülkemizin Ar-Ge ve eğitim harcamalarının ve elektrik üretiminin üstel bir şekilde artacağı öngörülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Gri Modelleme, En Küçük Kareler, Veri Tahmini, Diferansiyel Denklemler, Hata Analizi.

Mayıs, 2022; 49 sayfa

M.Sc. THESIS

GREY MODELING METHOD FOR ESTIMATING TIME SERIES

Levent AKYÜZ

Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Halis BİLGİL

ABSTRACT

Grey system theory predicts the behavior of unknown systems with little data. Grey prediction theory is an interdisciplinary scientific field and has been applied to many systems with partially unknown parameters over the past three decades.

In this study, Turkey's R&D and education expenditures data between 2011-2020 and electricity production data between 2010-2019 were taken from the Turkish Statistical Institute. R&D and education expenditures for the years 2021-2030 and electricity production for the years 2020-2029 were estimated by using Standard Grey Model (GM (1,1)), Novel Grey Model (NGM(1,1)) and Exponential Grey Model (EXGM (1,1)). The results of all three models were compared. The percentage relative error (RPE) between the actual and predicted values and mean absolute percentage error (MAPE) were determined. The correlation between the actual value and the predicted value was examined.

The MAPE value for R&D expenditures was calculated as 2.95% with GM (1,1), 14.01% with NGM (1,1) and 1.48% with EXGM (1,1), respectively. It was calculated as 3.32% with GM (1,1), 8.66% with NGM (1,1) and 3.09% with EXGM (1,1) for education expenditures. It was calculated as 1.58% with GM (1,1), 8.66% with NGM (1,1) and 1.36% with EXGM (1,1) for electricity production. R^2 values, which show the correlation between actual value and estimated value were calculated as 0,9974 with GM (1,1), 0,9821 with NGM (1,1) and 0,9985 with EXGM (1,1) for R&D expenditures. It was calculated as 0,9845 with GM(1,1), 0,9619 with NGM (1,1) and 0,9846 with EXGM (1,1) for education expenditures. For electricity production, it was calculated as 0,9734 with GM (1,1), 0,9619 with NGM (1,1) and 0,9753 with EXGM (1,1).

As a result, when the error and correlation results of the estimation values obtained from GM (1,1), NGM (1,1) and EXGM (1,1) methods are examined, it was seen that the EXGM (1.1) method gives better results in all applications. It was predicted that our country's R&D and education expenditures and electricity production will increase exponentially in the next 10 years.

Keywords: Grey Modelling, Least Squares, Data Estimation, Differential Equations, Error Analysis

May, 2022; 49 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. EXGM (1,1) modelinin akış şeması	18
Şekil 3.1. 2011-2030 yılları arasında Türkiye Ar-Ge harcamalarının GM (1,1) yöntemi ile tahmini değerleri.....	20
Şekil 3.2. 2011-2020 yılları arasında Ar-Ge harcamalarının GM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişkisi.....	21
Şekil 3.3. 2011-2030 yılları arasında Türkiye eğitim harcamalarının GM (1,1) yöntemi ile tahmin değerleri.....	22
Şekil 3.4. 2011-2020 yılları arasında eğitim harcamalarının GM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişkisi.....	23
Şekil 3.5. 2010-2029 yılları arasında Türkiye elektrik üretiminin GM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri.....	25
Şekil 3.6. 2010-2019 yılları arasında elektrik üretiminin GM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişkisi	25
Şekil 3.7. 2011-2030 yılları arasında Türkiye Ar-Ge harcamalarının NGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri	27
Şekil 3.8. 2011-2020 yılları arasında Ar-Ge harcamalarının NGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişki	28
Şekil 3.9. 2011-2030 yılları arasında Türkiye eğitim harcamalarının NGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri	29
Şekil 3.10. 2011-2020 yılları arasında eğitim harcamalarının NGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişki.....	30
Şekil 3.11. 2010-2029 yılları arasında Türkiye elektrik üretiminin NGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri.....	32
Şekil 3.12. 2010-2019 yılları arasında elektrik üretiminin NGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişkisi.....	32
Şekil 3.13. 2011-2030 yılları arasında Türkiye Ar-Ge harcamalarının EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri	34
Şekil 3.14. 2011-2020 yılları arasında Ar-Ge harcamalarının EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişki.....	35
Şekil 3.15. 2011-2030 yılları arasında Türkiye eğitim harcamalarının EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri	36
Şekil 3.16. 2011-2020 yılları arasında eğitim harcamalarının EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişki.....	37
Şekil 3.17. 2010-2029 yılları arasında Türkiye elektrik üretiminin EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri.....	38
Şekil 3.18. 2010-2019 yılları arasında elektrik üretiminin EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişkisi.....	39
Şekil 4.1. Ar-Ge harcamalarının GM (1,1), NGM (1,1) ve EXGM (1,1) yöntemleri ile tahmin değerlerinin karşılaştırılması	41
Şekil 4.2. Eğitim harcamalarının GM (1,1), NGM (1,1) ve EXGM (1,1) yöntemleri ile tahmin değerlerinin karşılaştırılması	43
Şekil 4.3. Elektrik üretiminin GM (1,1), NGM (1,1) ve EXGM (1,1) yöntemleri ile tahmin değerlerinin karşılaştırılması.....	44

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Türkiye’ nin Ar-Ge harcamaları gerçek değerleri, GM (1,1) yöntemi ile elde edilen tahmin değerleri ve hata değerleri	19
Çizelge 3.2. Türkiye’ nin eğitim harcamalarının gerçek değerleri, GM (1,1) yöntemi ile tahmin değerleri ve hata değerleri	21
Çizelge 3.3. Türkiye’ nin elektrik üretimi gerçek değerleri, GM (1,1) yöntemi ile tahmin değerleri ve hata değerleri	24
Çizelge 3.4. Türkiye’ nin Ar-Ge harcamaları gerçek değerleri, NGM (1,1) yöntemi kullanılarak elde edilen tahmin değerleri ve hata değerleri	26
Çizelge 3.5. Türkiye’ nin eğitim harcamaları gerçek değerleri, NGM (1,1) yöntemi ile tahmin değerleri ve hata değerleri.....	28
Çizelge 3.6. Türkiye’ nin elektrik üretiminin gerçek değerleri, NGM (1,1) yöntemi ile elde edilen tahmin değerleri ve hata değerleri	30
Çizelge 3.7. Türkiye’ nin Ar-Ge harcamaları gerçek değerleri, EXGM (1,1) yöntemi kullanılarak elde edilen tahmin değerleri ve hata değerleri....	33
Çizelge 3.8. Türkiye’ nin eğitim harcamaları gerçek değerleri, EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin değerleri ve hata değerleri	35
Çizelge 3.9. Türkiye’ nin elektrik üretiminin gerçek değerleri, EXGM (1,1) yöntemi ile elde edilen tahmin değerleri ve hata değerleri	37

SİMGELER VE KISALTMALAR

AGO	Birikimli Üretim Operatörü
ANDGM	Homojen Olmayan Ayrık Gri Model
APL-SFGM(1,1)	Uyarlanabilir Parametre Öğrenme Mekanizması Tabanlı Mevsimsel Dalgalanma
AR	Otomatik Gerilemeli
ARCH	Otoregresif Koşullu Değişen Varyans
ARGM	Otoregresif Gri Model
ARIMA	Otomatik Gerilemeli Entegre Hareketli Ortalama
ARMA	Otomatik Gerilemeli Hareketli Ortalama
BNGM(1,1,t²)	Arka Plan Değeri Optimizasyonu Doğrusal Olmayan Gri Model
CFDGM	Uyumlu Kesirli Ayrık Gri Model
DGM (1,1)	Ayrık Gri Model
EOGM	Üstel Optimizasyon Gri Modeli
EXGM (1,1)	Üstel Gri Model
FANGBM(1,1)	Kesirli Doğrusal Olmayan Gri Bernoulli Modeli
FGM	Kesirli Gri Model
GAIGM(1,1)	Genetik Algoritma Tabanlı Gri Model
GDPM	Gri Dinamik Tahmin Modeli
GGM(1,1)	Genelleştirilmiş Gri Model
GM(1,1)	Standart Gri Model
GMCG(1,3)	Gauss Formüllü Gri Model
GMCT(1,3)	Yamuk Formüllü Gri Model
IAGO	Ters Birikimli Üretim Operatörü
LSSVM	En Küçük Kareler Destekli Vektör Makine
MA	Hareketli Ortalama
MAPE	Ortalama Mutlak Yüzde Hata
NDGM	Homojen Olmayan Ayrık Gri Modeli
NGBM(1,1)	Doğrusal Olmayan Gri Bernoulli Modeli
NGBMC(1, n)	Doğrusal Olmayan Gri Bernoulli Çok Değişkenli Model
NGM	Yeni Gri Model
PSO-GM(1,1)	Parçacık Sürüsü Optimizasyon Algoritması Gri Model
RBF	Radyal Temel Fonksiyon
RDGM(1,3)	Özyinelemeli Ayrık Çok Değişkenli Gri Model
RMSE	Ortalama Karekök Hata
RMSPE	Ortalama Karekökün Yüzde Hatası
RPE	Yüzde Bağlı Hata
SGM(1,1)	Mevsimsel Gri Model
SVM	Destek Vektör Makineleri
TAR	Eşik Otoregresif Model
TDPGM(1,1)	Zaman Gecikmeli Polinomal Gri Tahmin Modeli

1. GİRİŞ

Zaman serisi tahmini, geçmiş ve mevcut veri noktalarından elde edilen bilgilere dayanarak bir sistemin gelecekteki değerlerinin tahmin edildiği süreci ifade etmektedir [1]. Borsa tahmini [2], döviz kuru tahmini [3], trafik durumu tahmini [4-6], rüzgar santrali gücü tahmini [7], güç yükü tahmini [8] ve benzeri birçok alanda başarıyla kullanılmıştır. Üstel Yumuşatma, Otomatik Gerilemeli (AR), Hareketli Ortalama (MA), Otomatik Gerilemeli Hareketli Ortalama (ARMA), Otomatik Gerilemeli Entegre Hareketli Ortalama (ARIMA) gibi modelleri içeren geleneksel istatistiksel modeller doğrusaldır ve geçmiş gözlemlerin doğrusal fonksiyonları olarak gelecekteki değerlerin tahminleri sınırlıdır. Zaman serisi modellerinin diğer kategorisi, eşik otoregresif (TAR) modeli [9], Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (ARCH) [10], Çift Doğrusal Model [11] dâhil olmak üzere zaman serisi modellerinin [12], kaotik tahmin yöntemleri [13, 14], Bulanık Sistemler [15], Destek Vektör Makineleri (SVM) [16] vb. gibi modeller doğrusal sınırlamanın üstesinden gelebilecek doğrusal olmayan modellerdir. Ayrıca literatürde her bir modelin sınırlamalarını gidermek ve tahmin performanslarını iyileştirmek için bazı hibrit modeller de önerilmektedir [2, 12, 17].

Doğru tahmin, bilimsel karar vermenin öncülü ve temelidir. Çoğu geleneksel tahmin modeli çok sayıda örnek veriye ihtiyaç duymaktadır. Ancak bazen sistem çalışmalarında büyük örnekleri toplamak zordur ve bu durum geleneksel tahmin yaklaşımlarının uygulamalarını kısıtlamaktadır. Gri sistem teorisi ilk olarak 1980' li yılların başlarında geliştirilmiştir [18,19]. Gri tahmin teorisi, bilinmeyen sistemlerin davranışını tahmin etmek için sınırlı miktarda veriye ihtiyaç duymaktadır. Araştırmalar, gri modellemede tahmin yapabilmek için en az dört verinin yeterli olduğunu göstermiştir [20]. Bu nedenle diğer tahmin modellerinin kısıtlamalarının üstesinden gelebilmek için sınırlı sayıda veri yardımı ile tahmin etmek gri modelin ortaya çıkışındaki temel düşünce olarak verilebilir [21]. Gri tahmin teorisi disiplinler arası bir bilimsel alandır ve son otuz yılda kısmen bilinmeyen parametrelere sahip sistemlere uygulanmak için hızla gelişen mükemmel bir araç haline gelmiştir. Gri sistem teorisinde belirsizliğin olmadığı sistem beyaz renk ile tanımlanmıştır. Tam zıt özelliklere sahip olan ve tamamen belirsiz olan sistem ise siyah olarak açıklanmıştır. Kısmi bilgiye sahip olunan sistemler ise “Gri Sistemler” olarak adlandırılmıştır [22]. Gri tahmin modelleri endüstri, bilim ve teknoloji, ekonomi, enerji tüketimi ve diğer

alanlar gibi çeşitli alanlara yaygın ve başarılı bir şekilde uygulanmıştır [23-30].

Wu vd. (2014), geliştirdikleri FGM (1,1) modeli ile kömür madeni gaz emisyon durumlarını tahmin etmişlerdir [23]. Yeni gri modelin tahmin performansını gerçek durumlarla karşılaştırarak kanıtlamışlardır. Başka bir çalışmada Lorentz kaotik sisteminin gri tahmini çalışılmıştır [24]. Lorentz veri dizilerini tahmin etmek için GM(1,1) modeli kullanmış ve tahmin kesinliği % 90' ının üzerinde bulunmuştur. Ancak Lorentz kaotik sisteminin tahmininde, veri dizisinin uzunluğu arttıkça gri tahminin kesinliğinin azaldığı belirlenmiştir

Zhou ve He (2013) GM (1,1) ve DGM (1,1) modellerine dayanan, Genelleştirilmiş GM (1,1) (GGM(1,1)) Modeli olarak adlandırılan yeni bir gri model önermiştir [25]. Ardından, geliştirmiş oldukları GGM(1,1) Modelini kullanarak 2003-2010 döneminde Çin'deki yakıt üretimini simüle etmişlerdir. Ampirik sonuçların, GGM (1,1) modelinin GM (1,1) ve DGM (1,1) modellerinden daha yüksek tahmin doğruluğuna sahip olduğunu açıklamışlardır. Bu çalışma ile gri tahmin teorisini geliştirmeye önemli ölçüde katkıda bulunmuşlardır.

Javed ve Liu (2018), Even Model GM (1,1) ve Homojen Olmayan Ayrık Gri Modeli (NDGM) olmak üzere iki Gri Sistem Teorisi modelini kullanarak ABD, Çin, Hindistan ve Pakistan'ın araştırma çıktısını ve makale sayısını tahmin etmeyi amaçlamıştır [26]. 2005-2016 yılları arasında dört ülke tarafından yayınlanan makale verileri SJR/Scopus web sitesinden toplanmıştır. Performans kriteri olarak ortalama mutlak yüzde hata kullanmışlardır. Çalışmada, NDGM modelinin araştırma sonuçlarını tahmin etmede doğruluk düzeyinin, Even Model GM (1,1) ve istatistiksel regresyon modellerinden daha yüksek olduğu ve bu nedenle daha iyi bir model olduğu belirlenmiştir.

Başka bir çalışmada Ou (2012) tarafından tahmin modeli olarak optimal parametreleri genetik algoritma aramasını kullanarak hesaplayan modeli geliştirmiştir [27]. Geliştirilen Genetik Algoritma Tabanlı Gri Model (GAIGM (1,1)) ile klasik GM (1,1) modelini 1998-2010 yılları arasında Tayvan'ın tarımsal verilerini tahmin etmek için kullanılmıştır. GAIGM (1,1) modelinin klasik GM (1,1) modelinden daha küçük ortalama mutlak yüzde hata (MAPE) ve ortalama karekökün yüzde hatası (RMSPE) değerlerine sahip olduğu belirlenmiştir. Buna göre GAIGM (1,1) modelinin tahmin doğruluğunun klasik GM (1,1) modelinin tahmin doğruluğuna göre daha iyi ve

tarımsal çıktının modellenmesi ve tahmininde kullanım için daha uygun olduğu açıklanmıştır.

Zeng vd. (2018) tarafından Hong Kong' daki ticari sektörün elektrik tüketimini tahmin etmek için yeni bir gri dinamik tahmin modeli (GDPM) önerilmiştir [28]. 1997-2008 yılları arasında Hong Kong'daki ticari sektörün elektrik tüketimini simüle etmek ve 2009-2015 yılları boyunca tüketimi tahmin etmek için sırasıyla GDPM, GM (1,1), GM (1,5), ARIMA, En Küçük Kareler Destekli Vektör Makine (LSSVM) ve Radyal Temel Fonksiyon (RBF) modelleri kullanılmıştır. Sonuçlar, önerilen GDPM' nin diğer beş modelden daha iyi tahmin performansına sahip olduğunu göstermiştir.

Ene ve Öztürk (2017) tarafından yapılan bir çalışmada ömrünü tamamlamış araçların dönüş akışı için bir tahmin sistemi geliştirilmiş ve sistem Türk Otomotiv Endüstrisi örneğine uygulanmıştır [29]. Tahmin sistemini oluşturmak gri sistem teorisi kullanılmıştır. Gri Modelin doğruluğu parametre optimizasyonu, Fourier Serisi ve Markov Zincir Düzeltmesi ile iyileştirilmiştir. Önerilen modeller Türk Otomotiv Endüstrisi örneğine uygulanmış ve Türkiye'deki on iki bölgenin veri setleri dikkate alınmıştır. Elde edilen sonuçlar, önerilen tahmin sisteminin veri setlerindeki olguları başarılı bir şekilde yönetebildiğini ve Türkiye'deki her bölge için yüksek doğruluk sağlanabileceğini göstermiştir.

Başka bir çalışmada İtalya, Birleşik Krallık (İngiltere) ve Amerika Birleşik Devletleri'nde (ABD) doğrulanmış COVID-19 vakalarının sayısının tahmin edilmesi amaçlanmıştır [30]. Tahmin için Gri Model (GM(1,1)), Doğrusal Olmayan Gri Bernoulli Modeli (NGBM (1,1)) ve Kesirli Doğrusal Olmayan Gri Bernoulli Modeli (FANGBM (1,1)) kullanılmış ve sonuçları karşılaştırılmıştır. Modellerin tahmin performansı, Ortalama Karekök Hata (RMSE), MAPE ve Regresyon Katsayısı (R^2) değerlerinin hesaplanmasıyla ölçülmüştür. FANGBM (1,1)' in bu ülkeler için en düşük RMSE ve MAPE değerlerine ve en yüksek R^2 değerlerine sahip olduğu, bu nedenle en yüksek tahmin performansına sahip olduğu belirlenmiştir [30].

Ma ve Liu (2017) Çin' in doğal gaz tüketimini tahmin etmek için gri sistem teorisine dayanan, TDPGM (1,1) olarak adlandırılan yeni bir Zaman Gecikmeli Polinom Gri Tahmin Modeli önermişlerdir [31]. 1995-2004 yılları arasında olan verileri, tahmin modellerini oluşturmak için kullanmışlardır. 2005-2013 yılları arasında olan verileri,

modelleme doğruluğunu değerlendirmek için kullanmışlardır. Zaman Gecikmeli Polinomal Gri Tahmin Modelinin (TDPGM (1,1)) diğer modellerden daha iyi performans gösterdiğini açıklamışlardır. Son olarak, 2014-2020 yılları arasında Çin'in doğal gaz tüketimini tahmin etmek için TDPGM (1,1) modeli kullanılmıştır. Sayısal sonuçlar, Optimize Yeni Gri Model (ONGM), Yeni Gri Model (NGM), Polinomal Model, DGM (1,1) ve Otoregresif Gri Model (ARGM (1,1)), dâhil olmak üzere enerji tüketimi tahmini için yaygın olarak kullanılan diğer mevcut modellere kıyasla TDPGM (1,1) doğal gaz tüketimini tahmin etmede daha verimli olduğunu göstermiştir.

Ma vd. (2019) tarafından yapılan bir çalışmada doğrusal olmayan gri Bernoulli Çok Değişkenli Modeli olarak adlandırılan, NGBMC (1,n) olarak kısaltılan, GMC (1,n) modelleme prosedürlerine dayanan genel bir Doğrusal Olmayan Gri Tahmin Modeli önermişlerdir [32]. NGBMC (1,n) modelinin etkinliğini doğrulamak için GMC (1,n), DGM (1,n), RDGM (1,n) ve klasik ARIMA modeli ile karşılaştırmışlardır. NGBMC (1,n) modelinin doğrusal olmayan zaman serileri tahmininde mevcut doğrusal modellere göre avantajları sayısal sonuçlarda gösterilmiştir. NGBMC (1,n) modeli, mevcut doğrusal çok değişkenli gri tahmin modelleriyle karşılaştırıldığında, zaman serisi tahminindeki etkinliğini değerlendirmek için Çin turizm endüstrisinin yurtiçi gelirini ve döviz kazancını tahmin etmede uygulanmıştır. NGBMC (1,n)' in en düşük MAPE değerine sahip olduğu, bu nedenle en yüksek tahmin performansına sahip olduğu belirlenmiştir.

Wang vd. (2018) tarafından yapılan bir çalışmada mevsimsel faktörler tarafından oluşturulan birikim operatörlerine dayalı bir Mevsimsel Gri Model (SGM (1,1) modeli) önerilmiştir [33]. Önerilen modeli, 2010' dan 2016' ya kadar Çin' deki birincil endüstrilerin mevsimsel elektrik tüketimi verilerine dayanan ampirik bir analiz yapmak için kullanmışlardır. SGM (1,1) modelinden elde edilen sonuçlar, gri model kullanılarak elde edilenlerle karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmanın sonuçları, SGM (1,1) modelinin birincil endüstrilerin elektrik tüketimindeki mevsimsel dalgalanmaları etkin bir şekilde tanımlayabildiğini ve tahmin doğruluğunun GM(1,1), Parçacık Sürüsü Optimizasyon Algoritması Gri Model (PSO-GM (1,1)) ve Uyarlanabilir Parametre Öğrenme Mekanizması Tabanlı Mevsimsel Dalgalanma (APL-SFGM (1,1)) modellerinden önemli ölçüde daha yüksek olduğunu göstermiştir.

Wu vd. (2020), heyelan durumunu tahmin etmek için Arka Plan Değeri Optimizasyonu Doğrusal Olmayan Gri Model (BNGM (1,1,t²)) tabanlı bir tahmin yöntemi önerilmiştir [34]. BNGM (1,1,t²), arka plan değerlerinin ve zaman etkisi fonksiyonlarının hesaplanmasında geleneksel gri tahmin modellerinin eksikliklerinin üstesinden gelebilen tek değişkenli bir tahmin modelidir. BNGM (1,1,t²) modeli, Özyinelemeli Ayırık Çok Değişkenli Gri Model (RDGM (1,3)), Gauss Formüllü Gri Model (GMCG (1,3)) ve Yamuk Formüllü Gri Model (GMCT (1,3)) modelleri gibi çok değişkenli tahmin modellerinin performansı ile karşılaştırılmıştır. Heyelan örneğine dayalı olarak, tahmin yöntemlerinin bir karşılaştırması, BNGM (1,1,t²)' nin en iyi tahmin etkisini elde ettiğini göstermiştir.

Liu ve Wu (2021), tarafından yapılan bir çalışmada Avrupa ülkelerinde yıllık yenilenebilir enerji tüketimini tahmin etmek için Homojen Olmayan Ayırık Gri Model (ANDGM) önerilmiştir [35]. Daha sonra, Geleneksel Gri Model uyumlu Kesirli Ayırık Gri Model (CFDGM), Kesirli Gri Model (FGM) ve Holt-Winters üstel yumuşatma modeli dahil olmak üzere dört farklı model kullanılarak önerilen yöntemin geçerliliği doğrulanmıştır. ANDGM modelinin en iyi tahmin performansına sahip olduğu belirlenmiştir.

Başka bir çalışmada GM (1,1) modelleme yöntemi kullanılarak, Aksaray İlindeki 2004-2017 yılları arasında bilinen vergi gelirleri alınarak 2024 yılına kadar Aksaray'dan elde edilebilecek vergi gelirleri miktarları tahmin edilmiştir [36]. Öztürk ve Bilgil (2019) GM (1,1) modelleme yöntemini kullanarak Türkiye'de 2004-2017 yılları arasındaki verileri kullanarak önümüzdeki yıllarda sağlanacak sağlık harcamalarını tahmin etmiştir [37].

Genel olarak literatürdeki tüm modeller, verilen veri dizisi üstel büyümeyi sağladığında uygundur. Ancak verilen verilerdeki anormal azalma tahmin doğruluğu üzerinde olumsuz etkiler oluşturmaktadır. Buna göre, beyazlatma diferansiyel denkleminde, azalan bir terim olan (e^{-t}) gibi terimler ekleyerek tahmin doğruluğunu geliştirmek mümkündür. Bu nedenle, monoton azalan terim (e^{-t}) eklenmesi, tahmin hatasının büyümesini bastıracaktır. Gri modelleme mekanizması üzerine yapılan çalışmaların çoğunda beyazlatma denklemi lineer bir zaman denklemi olarak alınmaktadır. Ancak, bu modeller genellikle denklemin sağ tarafında ikinci dereceden Taylor açılımını ihmal etmektedir. Dolayısıyla modelin ürettiği hatalar zamanla

artacak ve değişkenlerin yapısal ilişkileri doğru temsil edilmeyecektir. Bu nedenle standart GM (1,1) modeli Kedong vd. (2018) tarafından geliştirilmiş ve yeni bir Üstel Optimizasyon Gri Model (EOGM (1,1)) modeli önerilmiştir [38].

EOGM (1,1) in sağ tarafı, verilerdeki anormal değişim dengesine bir parametre eklenerek değiştirilerek model geliştirilmiş ve daha iyi bir tahmin performansı sağlanmıştır [36]. Burada, EOGM (1,1) de a parametresinin $a = 1$ olarak alınması ile doğrusal en küçük kareler tahmini kullanılarak parametreler tahmin edilmektedir.



2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN BİLGİLER

2.1 Standard Gri Model (GM (1,1))

Gri Model GM (1,1) en sık kullanılan gri tahmin modellerinden biridir ve en az dört gözlem gerektirmektedir [18,19]. Burada (1,1) sırasıyla modeli yöneten denklemin derecesini ve değişken sayısını temsil eder. İlk olarak, verilere bir birikimli üretim operatörü (AGO) uygulanmakta ve daha sonra sistemin tahmin edilen değerini elde etmek için modelin yönetici diferansiyel denklemi çözülmektedir. Son olarak, ters birikimli üretim operatörü (IAGO) kullanılarak orijinal verilerin tahmin edilen değeri elde edilmektedir. Geleneksel GM (1,1) modelleme süreci aşağıdaki gibidir.

Adım 1. Başlangıç verileri ile $X^{(0)}$ veri dizisi oluşturulur,

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)). \quad (2.1)$$

Burada n sayısı eldeki toplam ham veri sayısını temsil eder.

Adım 2. $X^{(1)}$ birikimli toplam dizisi aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)) \quad (2.2)$$

olup burada

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i) \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (2.3)$$

şeklindedir.

Adım 3. Birinci dereceden ortalama değer operatörü $Z^{(1)}$ oluşturulur.

$$Z^{(1)} = \{z^{(1)}(1), z^{(2)}(2), \dots, z^{(n)}(n)\} \quad (2.4)$$

$$z^{(1)}(k) = \frac{x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)}{2}, \quad k = 2, \dots, n. \quad (2.5)$$

Adım 4. Beyazlatma denklemi aşağıdaki şekilde kurulmaktadır.

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b. \quad (2.6)$$

Birinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklem olan beyazlatma denklemi çözülür ve $X^{(1)}$ tahmin değeri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır. Bu denklemin genel çözümü,

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right) e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a} \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (2.7)$$

şeklinde elde edilir. Başlangıç koşulu olarak (2.3) denkleminde

$$\hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1) \quad (2.8)$$

olacağı açıktır. (2.7) denkleminde göre $\hat{x}^{(1)}(k)$ değerleri elde edilmiştir. Ancak asıl amaç $\hat{x}^{(0)}(k)$ ham veri dizisinin kalan terimlerini tahmin etmek olduğundan, $\hat{x}^{(1)}(k)$ dan $\hat{x}^{(0)}(k)$ ya geçiş formülizasyonunun tanımlanması gerekir ki bu da (2.7) denkleminde kolayca aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (2.9)$$

Adım 5. (2.6) denkleminin her teriminin k dan $k-1$ e integrali alınarak

$$\int_{k-1}^k \frac{dx^{(1)}}{dt} dt + a \int_{k-1}^k x^{(1)} dt = \int_{k-1}^k b dt \quad (2.10)$$

elde edilerek basit bir hesaplamayla,

$$x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) + \frac{a}{2} \left(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1) \right) = b \quad (2.11)$$

olacağı görülebilir. Burada ortadaki integralde iki noktalı yamuklar yöntemi kullanılmıştır. (2.5) denklemi kullanılarak (2.10) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b. \quad (2.12)$$

(2.12) denklemi standart GM (1,1) modelinin temel formu olarak bilinmektedir. Burada amaç (2.7) denkleminde faydalanılarak $\hat{x}^{(0)}(k)$ ham veri dizisinin tahminlerini oluşturmaktır. Ancak a ve b parametreleri belirlenmeden bu hesaplamaların yapılamayacağı açıktır. Bu parametreleri belirlemek için (2.12) fark denkleminde ulaşıldı ve aslında bir denklem sistemi ifade eden (2.12) eşitliği açılarak matrisel gösterimi elde edilecektir. Daha sonra en küçük kareler metodu ile parametreler belirlenecektir. Burada k bir zaman noktasını a ve b ise sırasıyla geliştirme ve ilerletme katsayısıdır [39]. $k = 2, 3, \dots, n$ için (2.12) denklemi genişletilerek,

$$\begin{aligned}
x^{(0)}(2) + az^{(1)}(2) &= b \\
x^{(0)}(3) + az^{(1)}(3) &= b \\
&\vdots \\
x^{(0)}(n) + az^{(1)}(n) &= b
\end{aligned} \tag{2.13}$$

sistemi oluşturulur. Bu sistem,

$$B = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

$$Y = \begin{pmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(1)}(n) \end{pmatrix}, \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

olmak üzere, $Y = B\hat{a}$ şeklinde yazılabilir. Burada amaç a ve b katsayılarını belirlemektir. En küçük kareler yöntemine göre $Y = B\hat{a}$ eşitliğinin her iki tarafı B^T ile çarpılırsa,

$$B^T Y = B^T B \hat{a} \tag{2.16}$$

elde edilir. Buradan,

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y \tag{2.17}$$

denklemini bulunur. Bu modelin parametrelerini hesaplamak için matris çarpma algoritması ve en küçük kareler yöntemi kullanılmaktadır.

2.2 Modifiye Edilmiş Gri Model (NGM (1,1))

Cui vd. (2013) [40] tarafından standart gri modelde, beyazlatma denkleminin sağ tarafında yapılan bir optimizasyonla yeni bir model geliştirilmiştir. NGM (1,1) olarak önerilen bu modelin temel tanım ve teoremleri aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.2.1:

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = kb \tag{2.18}$$

Eşitliği homojen olmayan ayrık üstel yeni gri model olarak adlandırılır ve NGM olarak kısaltılır. Birinci dereceden diferansiyel denklem

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = tb \quad (2.19)$$

NGM(1,1) modelin beyazlatma denklemi olarak adlandırılır.

Teorem 2.2.2: $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ dizisinin negatif olmayan ardışık bir dizi olduğunu varsayalım. $X^{(1)}, X^{(0)}$ ' in ters birikimli operatörüdür ve $Z^{(1)}$ ise $X^{(1)}$ ' in ardışık komşularından üretilen dizi ortalamasıdır. $\hat{a} = [a, b]^T$ ise bir parametre dizisidir.

$$B = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 2 \\ -z^{(1)}(3) & 3 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Daha sonra gri diferansiyel denkleminin en küçük kareler tahmin dizisi,

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = kb \quad (2.21)$$

eşitliği

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (2.22)$$

eşitliğine karşılık gelir.

İspat 2.2.2: Tüm veri değerlerini gri diferansiyel denklemde değiştirildiğinde

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = kb \quad (2.23)$$

eşitliği

$$\begin{aligned} x^{(0)}(2) + az^{(1)}(2) &= 2b \\ x^{(0)}(3) + az^{(1)}(3) &= 3b \\ &\vdots \\ x^{(0)}(n) + az^{(1)}(n) &= nb \end{aligned} \quad (2.24)$$

şeklinde yazılır. Yani, $Y = B\hat{a}$, a , b , substitue $x^{(0)}(k)$ nın $k = 1, 2, \dots, n$ için hesaplanan değerleri $-az^{(1)}(k) + bk$ hata dizisini veren $\varepsilon = Y - B\hat{a}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$S = \varepsilon^T \varepsilon = (Y - B\hat{a})^T (Y - B\hat{a}) = \sum_{k=2}^n (x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) - bk)^2 \quad (2.25)$$

a , b değerleri S yi minimum yapar ve şunları sağlamalıdır.

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{k=2}^n (x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) - bk) z^{(1)}(k) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{k=2}^n (x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) - bk) = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

eşitlik çözüldüğünde

$$\begin{cases} a = \frac{\sum_{k=2}^n kz^{(1)}(k) \sum_{k=2}^n kx^{(0)}(k) - \sum_{k=2}^n k^2 \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k)z^{(1)}(k)}{\sum_{k=2}^n k^2 \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^2 - (\sum_{k=2}^n (k)z^{(1)}(k))^2} \\ b = \frac{1}{\sum_{k=2}^n k^2} [\sum_{k=2}^n kx^{(0)}(k) + a \sum_{k=2}^n (k)z^{(1)}(k)] \end{cases} \quad (2.27)$$

elde ederiz.

$Y = B\hat{a}$ dan, aşağıdaki şekilde takip edilir.

$$B^T B \hat{a} = B^T Y, \quad \hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (2.28)$$

$$B = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 2 \\ -z^{(1)}(3) & 3 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

böylece

$$B^T B = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 2 \\ -z^{(1)}(3) & 3 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 2 \\ -z^{(1)}(3) & 3 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^2 & -\sum_{k=2}^n kz^{(1)}(k) \\ -\sum_{k=2}^n kz^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^n k^2 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned}
& (B^T B)^{-1} \\
&= \frac{1}{\sum_{k=2}^n k^2 \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^2 - (\sum_{k=2}^n (k) z^{(1)}(k))^2} \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^n k^2 & \sum_{k=2}^n k z^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^n k z^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^2 \end{bmatrix} \\
& B^T Y = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 2 \\ -z^{(1)}(3) & 3 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{k=2}^n x^{(0)} k z^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^n k x^{(0)}(k) \end{bmatrix} \quad (2.31)
\end{aligned}$$

olup buradan,

$$\begin{aligned}
& \hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y \\
&= \frac{1}{\sum_{k=2}^n k^2 \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^2 - (\sum_{k=2}^n (k) z^{(1)}(k))^2} \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^n k^2 & \sum_{k=2}^n k z^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^n k z^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^2 \end{bmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix} -\sum_{k=2}^n x^{(0)} k z^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^n k x^{(0)}(k) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sum_{k=2}^n k z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^n k x^{(0)}(k) - \sum_{k=2}^n k^2 \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) z^{(1)}(k)}{\sum_{k=2}^n k^2 \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^2 - (\sum_{k=2}^n (k) z^{(1)}(k))^2} \\ \frac{1}{\sum_{k=2}^n k^2} [\sum_{k=2}^n k x^{(0)}(k) + a \sum_{k=2}^n k z^{(1)}(k)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (2.32)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.3: B, Y ve $\hat{a}$ 'nın Teorem 2.2.2 ile aynı olduğunu varsayalım.

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (2.33)$$

bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerli olur.

1. $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir.

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} \right) e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a} k - \frac{b}{a^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.34)$$

1. $x^{(0)}(k)$ nın değerleri aşağıdaki gibi verilir.

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1); \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (2.35)$$

İspat 2.2.3: $x^{(1)}(t) = y, t = x, u = -ay + bx$ olduğundan Eşitlik (2.19) aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{du}{dx} = -au + b \quad (2.36)$$

Buradan

$$\frac{d(-au+b)}{-au+b} = -adx \quad (2.37)$$

yazılır.

Eşitlik (2.37) üzerinde belirsiz integral yapmak ve onu azaltmak için,

$$-au + b = C_1 e^{-ax} \quad (C_1 = e^c, c \text{ bir sabittir}) \quad (2.38)$$

$x^{(1)}(t) = y, t = x, u = -ay + bx$ değerlerini Eşitlik (2.38) de yerine yazarsak

$$x^{(1)}(t) = \frac{C_1}{a^2} e^{-at} + \frac{b}{a} t - \frac{b}{a^2} \quad (2.39)$$

elde edilir.

1. $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ olduğundan,

$$C_1 = a^2 \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} \right) e^a \quad (2.40)$$

Eşitlik (2.39) da C_1 yer değiştirilip ve onu azaltmak için,

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} \right) e^{-a(t-1)} + \frac{b}{a} t - \frac{b}{a^2}, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (2.41)$$

Buradan,

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} \right) e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a} k - \frac{b}{a^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.42)$$

olur.

$$2. \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) = \sum_{i=1}^k \hat{x}^{(0)}(i) - \sum_{i=1}^{k-1} \hat{x}^{(0)}(i) = \hat{x}^{(0)}(k); \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (2.43)$$

2.3 NGM (1,1) Modelin Optimizasyonu

NGM (1,1) modeli, dizinin ilk verisinin değişmez olduğu hipotezine dayanmaktadır.

Değişmez veriye yinelemeli veri denir. Aslında, ilk veri bir dizideki en eski bilgidir.

Yani, hipotez gerçeği ihlal etmektedir. Gri modelde ilk verinin $\hat{x}^{(1)}(k)$ simülatif değeri

ile hiçbir ilişkisi olmadığı yapılan çalışmalar göstermektedir [18, 19]. Bu nedenle, gri modelin performansı hala geliştirilebilir. Bu sorunu çözmek için, aşağıdaki gibi ONGM olarak kısaltılan optimize edilmiş bir NGM modeli oluşturulmuştur.

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} + \frac{b}{a^2}\right)e^{-ak} + \frac{b}{a}(k+1) - \frac{b}{a^2} \\ \hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) + c \end{cases} \quad (2.44)$$

ONGM modelinde üç parametre vardır. a ve b 'nin çözümleri genel NGM modeli ile aynıdır.

$$\begin{cases} a = \frac{\sum_{k=2}^n k z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^n k x^{(0)}(k) - \sum_{k=2}^n k^2 \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) z^{(1)}(k)}{\sum_{k=2}^n k^2 \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^2 - (\sum_{k=2}^n (k) z^{(1)}(k))^2} \\ b = \frac{1}{\sum_{k=2}^n k^2} [\sum_{k=2}^n k x^{(0)}(k) + a \sum_{k=2}^n k z^{(1)}(k)] \end{cases} \quad (2.45)$$

c yi elde etmek için, değerini en küçük kareler yöntemiyle çözüyoruz ve kısıtlamasız optimize edilmiş bir model oluşturuyoruz. Bunun için,

$$\min_c \sum_{k=1}^n [\hat{x}^{(1)}(k) - x^{(1)}(k)]^2 \quad (2.46)$$

buradan,

$$S = \sum_{k=1}^n [\hat{x}^{(1)}(k) - x^{(1)}(k)]^2 \quad (2.47)$$

S denkleminde $x^{(1)}(k)$ ve $\hat{x}^{(1)}(k)$ yer değiştirirse,

$$S = \sum_{k=1}^n [\hat{x}^{(1)}(k) - x^{(1)}(k)]^2 \quad (2.48)$$

$$S = c^2 + \sum_{k=2}^n \left[\left(x^{(1)}(1) + c - \frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} \right) e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a}k - \frac{b}{a^2} - x^{(1)}(k) \right]^2 \quad (2.49)$$

$$\frac{dS}{dc} = 2c + 2 \sum_{k=2}^n \left[\left(x^{(1)}(1) + c - \frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} \right) e^{-a(k-1)} + \left(\frac{b}{a}k - \frac{b}{a^2} - x^{(1)}(k) \right) \right] e^{-a(k-1)} = 0 \quad (2.50)$$

buradan,

$$c = \frac{\sum_{k=2}^n \left[\left(\frac{b}{a} - \frac{b}{a^2} + x^{(1)}(1) \right) e^{-2a(k-1)} + \left(x^{(1)}(k) - \frac{b}{a}k + \frac{b}{a^2} \right) e^{-a(k-1)} \right]}{1 + \sum_{k=2}^n e^{-2a(k-1)}} \quad (2.51)$$

Eşitlik (2.45) ile Eşitlik (2.51)' i birleştirerek aşağıdaki eşzamanlı denklemi elde edebiliriz.

$$\begin{cases} a = \frac{\sum_{k=2}^n k z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^n k x^{(0)}(k) - \sum_{k=2}^n k^2 \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) z^{(1)}(k)}{\sum_{k=2}^n k^2 \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^2 - (\sum_{k=2}^n (k) z^{(1)}(k))^2} \\ b = \frac{1}{\sum_{k=2}^n k^2} \left[\sum_{k=2}^n k x^{(0)}(k) + a \sum_{k=2}^n k z^{(1)}(k) \right] \\ c = \frac{\sum_{k=2}^n \left[\left(\frac{b}{a} - \frac{b}{a^2} + x^{(1)}(1) \right) e^{-2a(k-1)} + \left(x^{(1)}(k) - \frac{b}{a}k + \frac{b}{a^2} \right) \right] e^{-a(k-1)}}{1 + \sum_{k=2}^n e^{-2a(k-1)}} \end{cases} \quad (2.52)$$

2.4 Üstel Gri Model (EXGM (1,1))

EXGM (1, 1) modeli yeni bir üstel gri tahmin modeli olarak geliştirilmiştir [34]. Ham verilerin üstel değişimi, gri tahmin modelinin önemli bir özelliğidir. Ham veri dizisinin üstel varyasyonu ayrılırsa, gri eylem miktarının zamana bağlı olduğu ve bu değişimin zamanla üstel olduğu görülebilir. Standart GM (1, 1) gri eylem miktarını bir sabit olarak ele alır ve etkisi tahmin doğruluğu için yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle, model tarafından üretilen tahmini hata zamanla artmaktadır. EXGM (1,1) modeli, gri etki miktarını zamanın üstel bir fonksiyonu ve bir sabit olarak ele almaktadır.

Tanım 2.4.1: Lineer diferansiyel eşitliği,

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b + ce^{-t} \quad (2.53)$$

şeklindedir.

EXGM (1,1) modelinin beyazlatma denklemi olarak adlandırılır. Doğrusal bir denklem seçilmesinin nedenlerinden biri, Eşitlik (2.1) dizisinin monoton olarak artması ve doğrusal denklemlerin çözümünün artan üstel fonksiyonları içermesidir. Diğer bir neden ise lineer denklemdeki birinci mertebeden türevin diferansiyel denklem formu olarak yazılabilesidir.

Birinci dereceden gri diferansiyel denklemin gri türevi Eşitlik 2.54 ile temsil edilir:

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x^{(1)}(t+\Delta t) - x^{(1)}(t)}{\Delta t} \quad (2.54)$$

burada t zaman, konum veya diğer kullanılabilir parametre olabilen ve sabit olarak kabul edilen t parametresinin artışını temsil eder [41]. Dolayısıyla, bunu birim miktar

olarak yapabiliriz, $x^{(1)}(t + \Delta t) - x^{(1)}(t)$ ise veri dizisindeki ardışık noktalar arasındaki veri farkıdır. Dolayısıyla,

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} \approx x^{(1)}(k + 1) - x^{(1)}(k) = x^{(0)}(k) \quad (2.55)$$

yazılabilir.

Teorem 2.4.1: $x^{(0)}(k) + az^{(1)}k = b + c(e - 1)e^{-k}$ (2.56)

Eşitliği EXGM (1,1) modelinin temel fark eşitliği olarak adlandırılır. Burada $z^{(1)}k$ Eşitlik (2.5) den verilir.

İspat 2.4.1: $[k - 1, k]$ aralığında beyazlatma diferansiyel denklemi (2.53) ün her iki tarafının integrali alınırsa,

$$\int_{k-1}^k \frac{dx^{(1)}(t)}{dt} dt + a \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt = \int_{k-1}^k (b + ce^{-t}) dt. \quad (2.57)$$

Buradan,

$$x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k - 1) + a \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt = b + c(e - 1)e^{-k} \quad (2.58)$$

$\int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt = 0.5(x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k - 1)) = z^{(1)}(k)$ koşulu kullanılarak Denklem (2.55) ve Denklem (2.58)

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}k = b + c(e - 1)e^{-k} \quad (2.59)$$

şeklinde yazılabilir.

Denklem 2.53 ün lineer çözümü aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$x^{(1)}(k) = \frac{b}{a} + \frac{c}{a-1}e^{-1} + de^{-at} \quad (2.60)$$

Burada d integral sabitidir. $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ başlangıç koşulu kullanılarak d sabiti aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$d = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} - \frac{c}{a-1}e^{-1} \right) e^a \quad (2.61)$$

Bu nedenle gri tahmin modeli Denklem (2.60) tan aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} - \frac{c}{a-1}e^{-1} \right) e^{a(1-t)} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a-1}e^{-t} \quad (2.62)$$

Denklem (2.62) kullanılarak, $\hat{x}^{(1)}(k)$ serisinin değerleri hesaplanır ve orijinal seri $\hat{x}^{(0)}(k)$ nın tahmini değerleri Denklem (2.63) deki gibi elde edilebilir.

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (2.63)$$

Lineer denklem sistemi (2.56) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} x^{(0)}(2) &= -az^{(1)}(2) + b + c(e-1)e^{-2} \\ x^{(0)}(3) &= -az^{(1)}(3) + b + c(e-1)e^{-3} \\ &\vdots \\ x^{(0)}(n) &= -az^{(1)}(n) + b + c(e-1)e^{-n} \end{aligned} \quad (2.64)$$

ya da

$$Y = B\hat{a} \quad (2.65)$$

burada,

$$B = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 & (e-1)e^{-2} \\ -z^{(1)}(3) & 1 & (e-1)e^{-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 & (e-1)e^{-n} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{pmatrix}, \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

dir.

Burada n modeli oluşturmak için kullanılan örnek sayısıdır. (a, b ve c) parametreleri GM (1,1) modelinde olduğu gibi EXGM (1,1) modeli ile kolaylıkla aşağıdaki şekilde belirlenebilir.

$$[a, b, c]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (2.67)$$

EXGM (1,1) modelinin akış şeması Şekil 2.1 de verilmiştir.



Şekil 2.1 EXGM (1,1) modelinin akış şeması.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Standart GM (1,1) Modeli Uygulamaları

Bu bölümde Standart GM (1,1) modeli kullanılarak uygulama yapılmıştır. Türkiye’ nin 2011-2020 yılları arasındaki Ar-Ge harcamaları, eğitim harcamaları ve elektrik üretimi resmi verileri Türkiye İstatistik Kurumu’ ndan alınarak 2021-2030 yıllarının tahmini Standart GM Modeli kullanılarak tahmin edilmiştir. Gerçek ve tahmin değeri arasındaki hata oranları Eşitlik 3.1 verilen yüzde bağıl hata (RPE) ve Eşitlik 3.2 de verilen ortalama yüzde bağıl hata (MAPE) formülleri kullanılarak yapılmıştır. Ortalama yüzde bağıl hatanın sayısal değerinin 10 dan küçük olması mükemmel bir tahmin gücünü göstermektedir [29]. Hata analizi aşağıdaki denklem ile hesaplanır,

$$RPE(k) = \left| \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \times 100 \quad (3.1)$$

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n RPE(k) \quad (3.2)$$

Türkiye’ nin 2011-2020 yılları arasındaki Ar-Ge harcamalarına ait gerçek değerler, tahmin değerleri, RPE ve MAPE değerleri Çizelge 3.1. de verilmiştir.

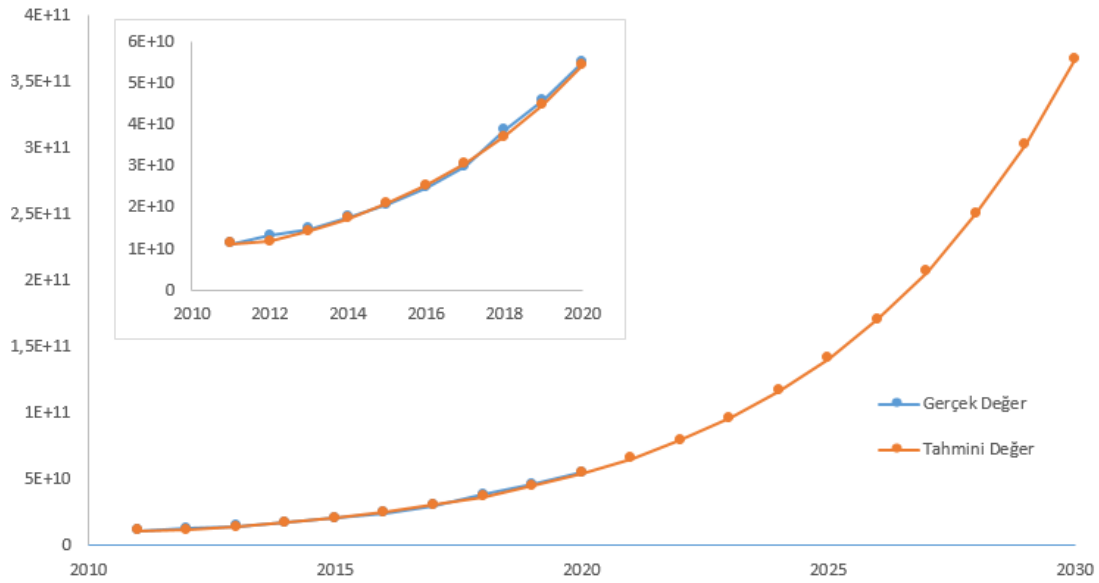
Çizelge 3.1. Türkiye’ nin Ar-Ge harcamaları gerçek değerleri, GM (1,1) yöntemi ile elde edilen tahmin değerleri ve hata değerleri.

Yıllar	Gerçek Değer (TL)	Tahmin Değeri (TL)	RPE
2011	11154149797	11154149797	0
2012	13062263394	11776466820	9,84
2013	14807321926	14254258290	3,74
2014	17598117442	17253381860	1,96
2015	20615247954	20883526810	1,30
2016	24641251935	25277461320	2,58
2017	29855477805	30595888300	2,48
2018	38533672884	37033322500	3,89
2019	45953691096	44825205000	2,46
2020	54956827217	54256515300	1,27
		MAPE	% 2.95
2021		65672191300	
2022		79489747600	
2023		96214544700	

Çizelge 3.1 (devam). Türkiye’ nin Ar-Ge harcamaları gerçek değerleri, GM (1,1) yöntemi ile elde edilen tahmin değerleri ve hata değerleri.

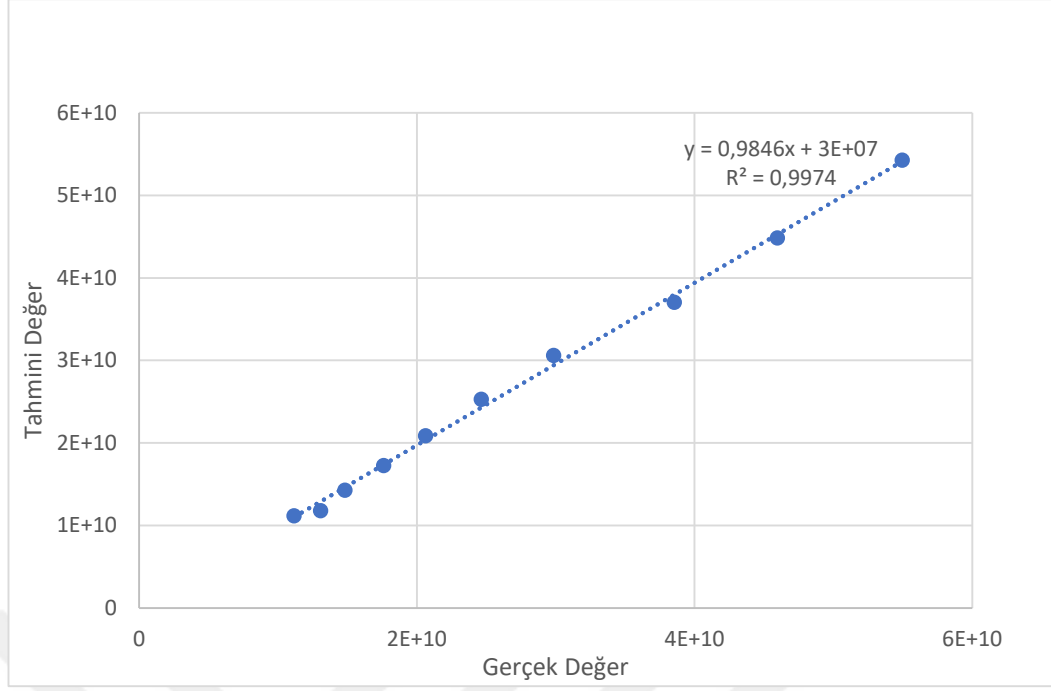
Yıllar	Gerçek Değer (TL)	Tahmin Değeri (TL)	RPE
2024		116458000000	
2025		140961000000	
2026		170620000000	
2027		206519000000	
2028		249971000000	
2029		302565000000	
2030		366225000000	

Yapılan çalışmada Türkiye’ nin 2011-2020 yılları arasındaki Ar-Ge harcama verileri kullanılarak sonraki yıllar için tahminler üretilmiştir. Oluşturulan model ile eldeki veriler karşılaştırılmıştır. Ortalama hata, yaklaşık olarak %2.95 şeklinde hesaplanmıştır. Tahmin sonucuna ait grafik Şekil 3.1 de verilmiştir.



Şekil 3.1. 2011-2030 yılları arasında Türkiye Ar-Ge harcamalarının GM (1,1) yöntemi ile tahmini değerleri.

Şekil 3.1 den görüldüğü gibi 2011-2020 yılları arasında Ar-Ge harcamaları için gerçek değer ve tahmini değerlerin birbirine uyumlu olduğu görülmektedir. Buradan GM (1,1) yönteminin tahmin gücünün yüksek olduğu söylenebilir. 2020-2030 yılları arasında yapılan tahmin değerleri ise üstel bir şekilde artmaktadır. Şekil 3.2’ de ise GM (1,1) yöntemi ile 2011-2020 yılları arasında Ar-Ge harcamalarının tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişkisini gösteren grafik verilmiştir.



Şekil 3.2. 2011-2020 yılları arasında Ar-Ge harcamalarının GM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişkisi.

Şekil 3.2 den görüldüğü gibi 2011-2020 yılları arasında Ar-Ge harcamalarının gerçek değerleri ve tahmin edilen değerleri arasında iyi bir korelasyon vardır. Regresyon katsayısı $R^2=0.9974$ olarak hesaplanmıştır.

Türkiye’ nin 2011-2020 yılları arasındaki eğitim harcamalarına ait gerçek değerler, tahmin değerleri, RPE ve MAPE değerleri Çizelge 3.2’ de verilmiştir.

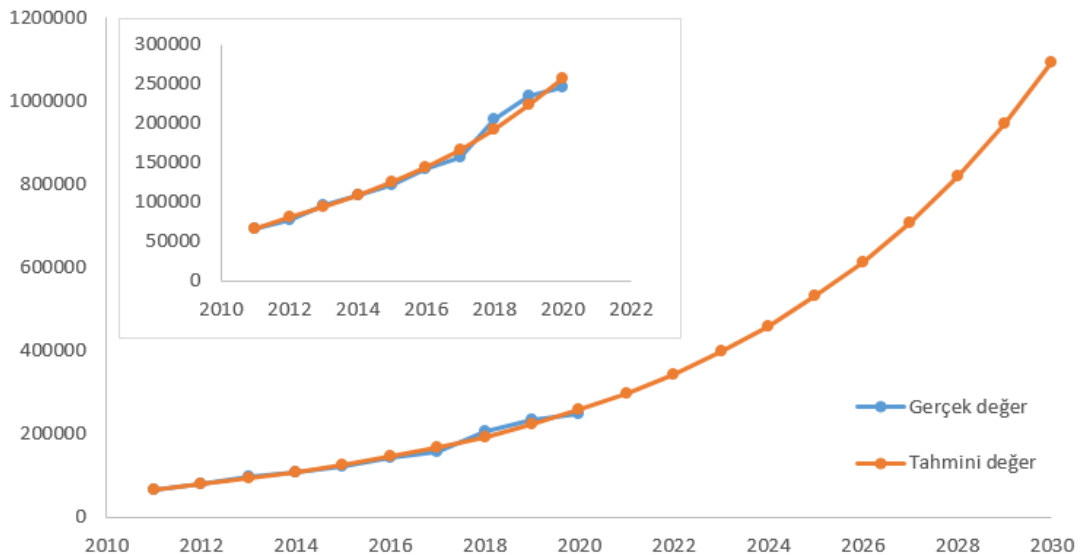
Çizelge 3.2. Türkiye’ nin eğitim harcamalarının gerçek değerleri, GM (1,1) yöntemi ile tahmin değerleri ve hata değerleri.

Yıllar	Gerçek Değer (milyon TL)	Tahmin Değeri (milyon TL)	RPE
2011	65807	65807	0
2012	78046	81093	3,90
2013	96706	93697	3,11
2014	108811	108260	0,51
2015	122496	125087	2,12
2016	143039	144528	1,04
2017	157120	166991	6,28
2018	206120	192946	6,39

Çizelge 3.2 (devam). Türkiye’ nin eğitim harcamalarının gerçek değerleri, GM (1,1) yöntemi ile tahmin değerleri ve hata değerleri.

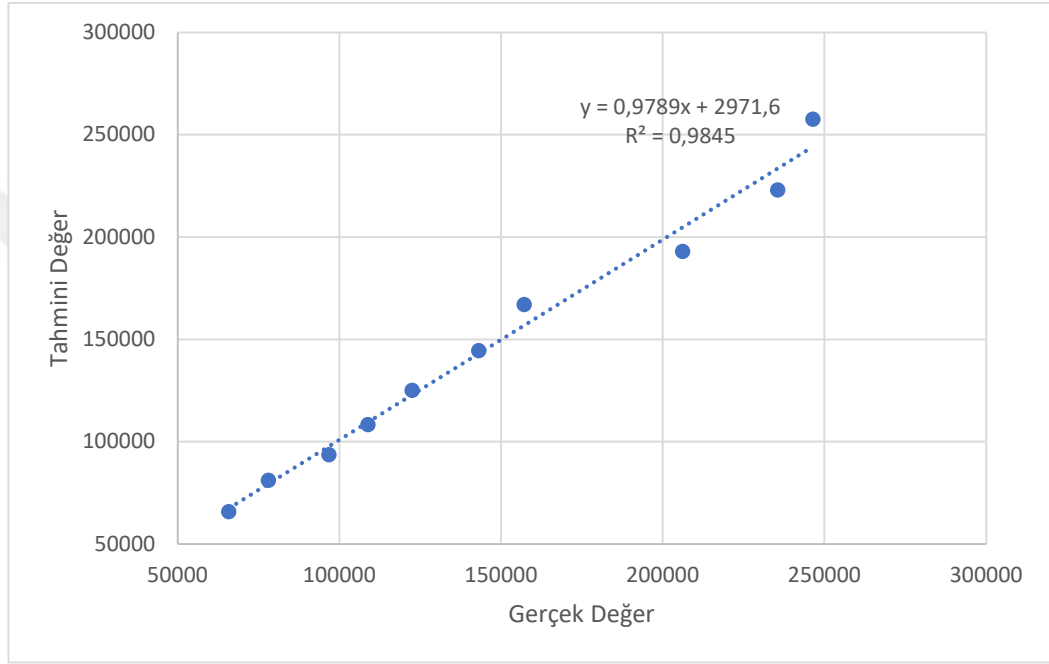
Yıllar	Gerçek Değer (milyon TL)	Tahmin Değeri (milyon TL)	RPE
2019	235473	222935	5,32
2020	246419	257584	4,53
		MAPE	% 3,32
2021		297619	
2022		343876	
2023		397323	
2024		459076	
2025		530428	
2026		612869	
2027		708124	
2028		818184	
2029		945350	
2030		1092280	

GM (1,1) yöntemi ile yapılan çalışmada Türkiye’ nin 2011-2020 yılları arasındaki eğitim harcama verileri kullanılarak sonraki yıllar için tahminler üretilmiştir. Oluşturulan model ile eldeki veriler karşılaştırılmıştır. MAPE, yaklaşık olarak % 3.32 şeklinde hesaplanmıştır. Tahmin sonucuna ait grafik Şekil 3.3’ de verilmiştir.



Şekil 3.3. 2011-2030 yılları arasında Türkiye eğitim harcamalarının GM (1,1) yöntemi ile tahmin değerleri.

Şekil 3.3’ den görüldüğü gibi 2011-2020 yılları arasında eğitim harcamaları için gerçek değer ve tahmini değerlerin birbiri ile uyumlu olduğu görülmektedir. Buradan GM (1,1) yönteminin eğitim harcamaları için tahmin gücünün yüksek olduğu söylenebilir. 2020-2030 yılları arasında yapılan tahmin değerleri ise üstel bir şekilde artmaktadır. Şekil 3.4. de ise GM (1,1) yöntemi ile 2011-2020 yılları arasında eğitim harcamalarının tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişkisini gösteren grafik verilmiştir.



Şekil 3.4. 2011-2020 yılları arasında eğitim harcamalarının GM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişkisi.

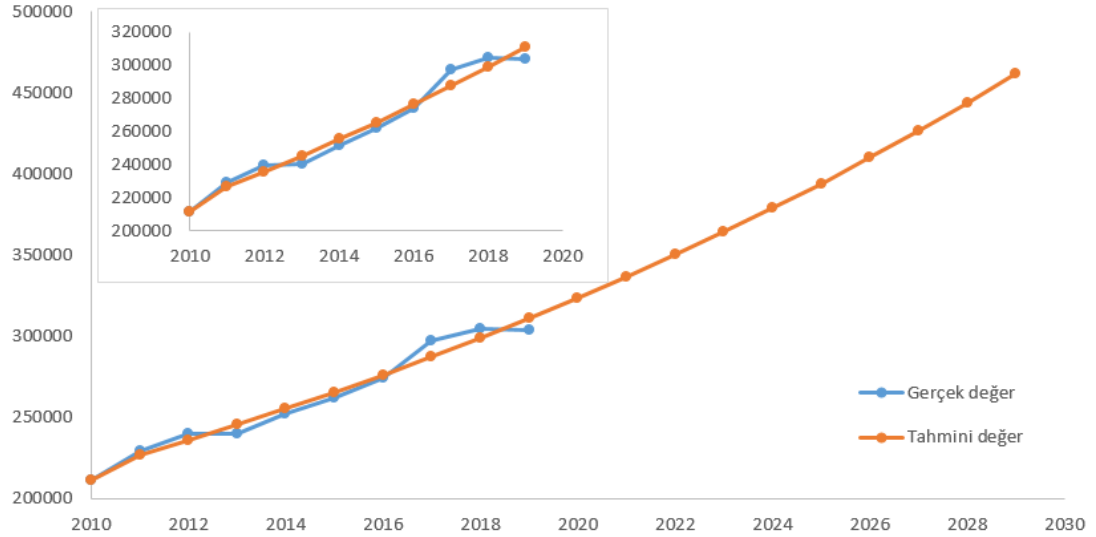
Şekil 3.4’ den görüldüğü gibi 2011-2020 yılları arasında eğitim harcamalarının gerçek değerleri ve tahmin edilen değerleri arasında bir miktar sapma vardır. Regresyon katsayısı $R^2=0.9845$ olarak hesaplanmıştır. Ar-Ge harcamaları için hesaplanan değerden daha düşüktür.

Türkiye’ nin 2010-2019 yılları arasındaki elektrik üretimine ait gerçek değerler, GM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri, RPE ve MAPE değerleri Çizelge 3.3’ de verilmiştir.

Çizelge 3.3. Türkiye’ nin elektrik üretimi gerçek değerleri, GM (1,1) yöntemi ile tahmin değerleri ve hata değerleri.

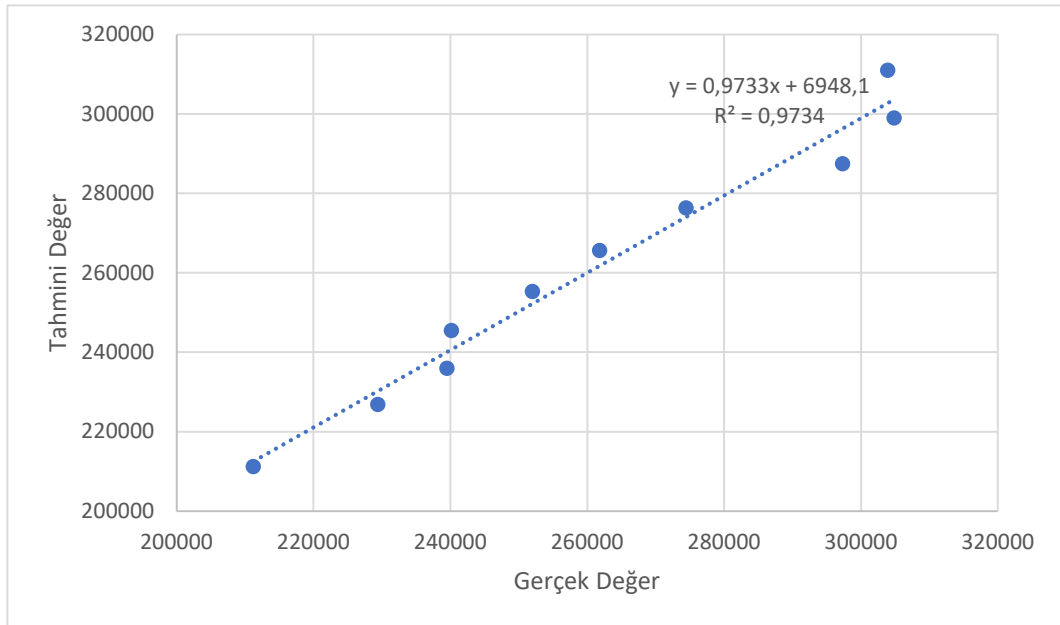
Yıllar	Gerçek Değer (GWh)	Tahmin Değeri (GWh)	RPE
2010	211208	211208	0
2011	229395	226795	1,13
2012	239497	235927	1,49
2013	240154	245428	2,19
2014	251963	255311	1,33
2015	261783	265592	1,46
2016	274407	276288	0,69
2017	297277	287413	3,32
2018	304802	298987	1,91
2019	303897	311027	2,35
		MAPE	% 1,58
2020		323.552	
2021		336.581	
2022		350.135	
2023		364.235	
2024		378.902	
2025		394.160	
2026		410.033	
2027		426.545	
2028		443.721	
2029		461.590	

Yapılan çalışmada Türkiye’ nin 2010-2019 yılları arasındaki elektrik üretimi verileri kullanılarak sonraki yıllar için tahminler üretilmiştir. Oluşturulan model ile eldeki veriler karşılaştırılmıştır. Ortalama hata, yaklaşık olarak %1.58 şeklinde hesaplanmıştır. Tahmin sonucuna ait grafik Şekil 3.3’ de verilmiştir.



Şekil 3.5. 2010-2029 yılları arasında Türkiye elektrik üretiminin GM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri.

Şekil 3.5’ ten görüldüğü gibi 2010-2019 yılları arasında elektrik üretimi için gerçek değer ve tahmini değer birbirini ile uyumlu olduğu görülmektedir. Buradan GM (1,1) yönteminin elektrik üretimi için tahmin gücünün yüksek olduğu söylenebilir. 2019-2029 yılları arasında yapılan tahmin değerleri ise üstel bir şekilde artmaktadır. Şekil 3.6’ da ise GM (1,1) yöntemi ile 2010-2019 yılları arasında elektrik üretiminin tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki korelasyonunu gösteren grafik verilmiştir.



Şekil 3.6. 2010-2019 yılları arasında elektrik üretiminin GM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişkisi.

Şekil 3.6’ dan görüldüğü gibi 2010-2019 yılları arasında elektrik üretiminin gerçek değerleri ve tahmin edilen değerleri arasında bir miktar sapma vardır. Regresyon katsayısı $R^2=0.9734$ olarak hesaplanmıştır. Ar-Ge harcamaları için hesaplanan değerden daha düşüktür.

3.2 NGM (1,1) Modeli Uygulamaları

Bu bölümde NGM (1,1) modeli kullanılarak uygulamalar yapılmıştır. Türkiye’ nin 2011-2020 yılları arasındaki Ar-Ge harcamaları ve eğitim harcamaları ve 2010-2019 yılları arasındaki elektrik üretimi resmi verileri Türkiye İstatistik Kurumu’ ndan alınmıştır. Ar-Ge ve eğitim harcamaları için 2021-2030 yıllarının ve elektrik üretimi için 2020-2029 yıllarının tahmini NGM (1,1) yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Gerçek ve tahmin değeri arasındaki hata oranları Eşitlik 2.1 ve Eşitlik 2.2 kullanılarak yapılmıştır. Ar-Ge harcamaları için tahmin ve hata değerleri Çizelge 3.4’ de verilmiştir.

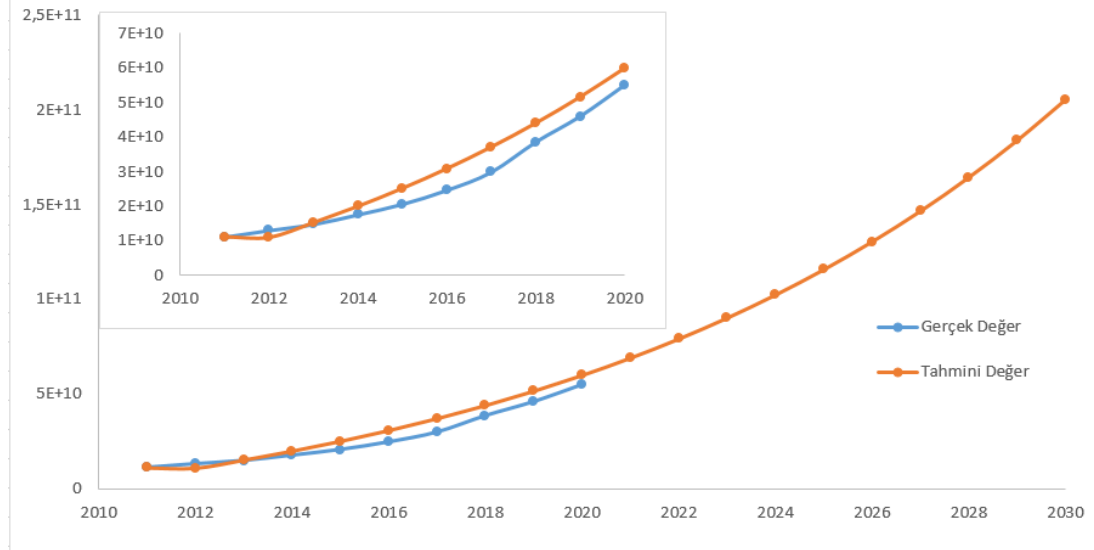
Çizelge 3.4. Türkiye’ nin Ar-Ge harcamaları gerçek değerleri, NGM (1,1) yöntemi kullanılarak elde edilen tahmin değerleri ve hata değerleri.

Yıllar	Gerçek Değer (TL)	Tahmin Değeri (TL)	RPE
2011	11154149797	11154149797	0
2012	13062263394	10977104461	15,96
2013	14807321926	15268494172	3,11
2014	17598117442	19986171910	13,57
2015	20615247954	25172483278	22,11
2016	24641251935	30873980305	25,29
2017	29855477805	37141839299	24,40
2018	38533672884	44032320200	14,27
2019	45953691096	51607271565	12,30
2020	54956827217	59934685719	9,06
		MAPE	%14,01
2021		69089309050	
2022		79153312927	
2023		90217031265	
2024		102380000000	
2025		115751000000	
2026		130450000000	
2027		146609000000	

Çizelge 3.4 (devam). Türkiye’ nin Ar-Ge harcamaları gerçek değerleri, NGM (1,1) yöntemi kullanılarak elde edilen tahmin değerleri ve hata değerleri.

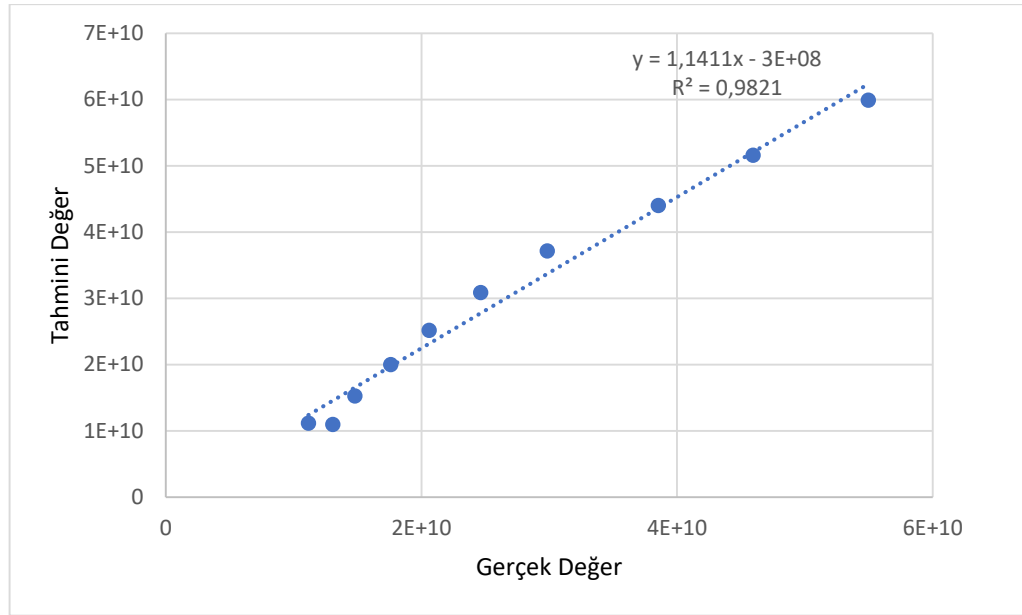
Yıllar	Gerçek Değer (TL)	Tahmin Değeri (TL)	RPE
2028		164374000000	
2029		183903000000	
2030		205372000000	

NGM (1,1) yöntemi ile yapılan çalışmada Türkiye’ nin 2011-2020 yılları arasındaki Ar-Ge harcama verileri kullanılarak sonraki yıllar için tahminler üretilmiştir. Oluşturulan model ile eldeki veriler karşılaştırılmıştır. Ortalama hata, yaklaşık olarak %14,01 olarak hesaplanmıştır. Ortalama hatanın yüksek olduğu anlaşılmaktadır. Tahmin sonucuna ait grafik Şekil 3.7’ de verilmiştir.



Şekil 3.7. 2011-2030 yılları arasında Türkiye Ar-Ge harcamalarının NGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri.

Şekil 3.7’ den görüldüğü gibi 2011-2020 yılları arasında Ar-Ge harcamaları için gerçek değer ve NGM (1,1) yöntemi kullanılarak elde edilen tahmini değerlerin birbiri ile uyumu düşüktür. Buradan NGM (1,1) yönteminin tahmin gücünün düşük olduğu anlaşılmaktadır. 2020-2030 yılları arasında yapılan tahmin değerleri ise üstel bir şekilde artmaktadır. Şekil 3.8’ de ise 2011-2020 yılları arasında Ar-Ge harcamalarının NGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişkisini gösteren grafik verilmiştir.



Şekil 3.8. 2011-2020 yılları arasında Ar-Ge harcamalarının NGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişki.

Şekil 3.8’ de görüldüğü gibi 2011-2020 yılları arasında Ar-Ge harcamalarının gerçek değerleri ve NGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri arasındaki korelasyon yeterince yüksek değildir. Regresyon katsayısı $R^2=0.9821$ olarak hesaplanmıştır.

Türkiye’ nin eğitim harcamaları, NGM (1,1) yöntemi ile tahmin değerleri ve hata değerleri Çizelge 3.5’ te verilmiştir.

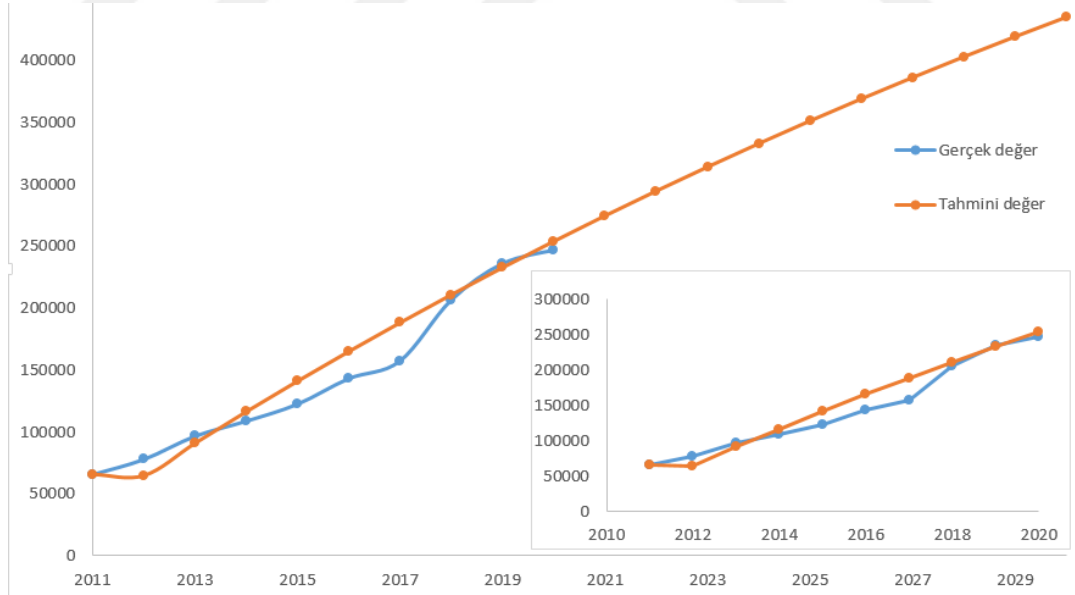
Çizelge 3.5. Türkiye’ nin eğitim harcamaları gerçek değerleri, NGM (1,1) yöntemi ile tahmin değerleri ve hata değerleri.

Yıllar	Gerçek Değer (milyon TL)	Tahmin Değeri (milyon TL)	RPE
2011	65807	65807	0
2012	78046	64778	17,00
2013	96706	90966	5,94
2014	108811	116383	6,96
2015	122496	141051	15,15
2016	143039	164993	15,35
2017	157120	188229	19,79
2018	206120	210781	2,26
2019	235473	232670	1,19
2020	246419	253913	3,04
		MAPE	% 8,66
2021		274531	

Çizelge 3.5 (devam). Türkiye’ nin eğitim harcamaları gerçek değerleri, NGM (1,1) yöntemi ile tahmin değerleri ve hata değerleri.

Yıllar	Gerçek Değer (milyon TL)	Tahmin Değeri (milyon TL)	RPE
2022		294541	
2023		313963	
2024		332812	
2025		351106	
2026		368861	
2027		386094	
2028		402819	
2029		419051	
2030		434805	

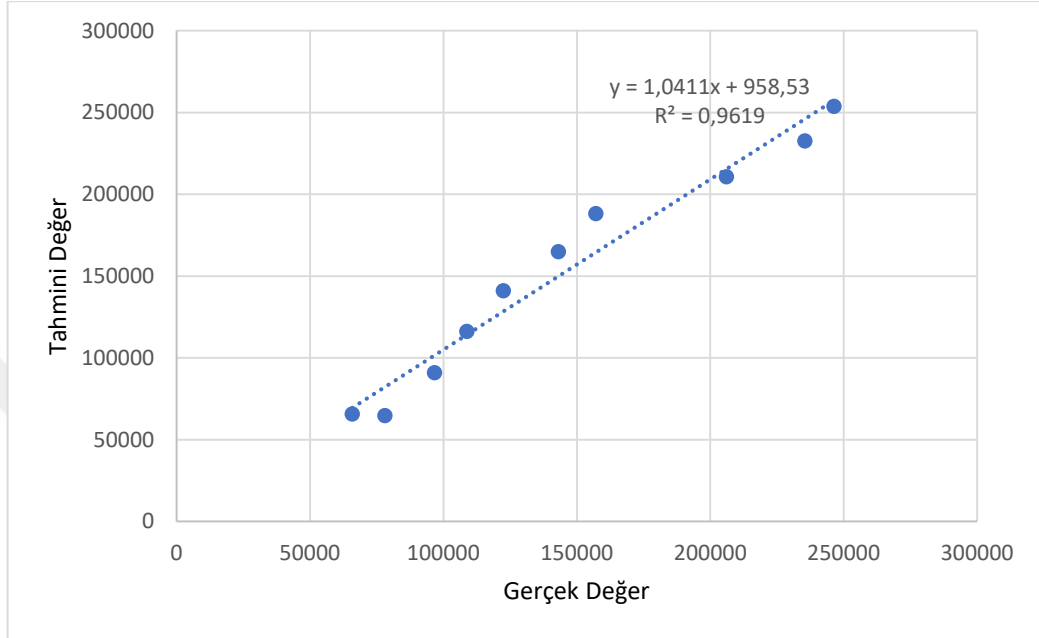
NGM (1,1) yöntemi ile yapılan çalışmada Türkiye’ nin 2011-2020 yılları arasındaki eğitim harcama verileri kullanılarak sonraki yıllar için tahminler üretilmiştir. Oluşturulan model ile eldeki veriler karşılaştırılmıştır. Ortalama hata, yaklaşık olarak % 8,66 olarak hesaplanmıştır. Ortalama hatanın yüksek olduğu anlaşılmaktadır. Tahmin sonucuna ait grafik Şekil 3.9’ da verilmiştir.



Şekil 3.9. 2011-2030 yılları arasında Türkiye eğitim harcamalarının NGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri.

Şekil 3.9’ da görüldüğü gibi 2011-2020 yılları arasında eğitim harcamaları için gerçek değer ve NGM (1,1) yöntemi kullanılarak elde edilen tahmini değerlerin birbiri ile uyumu düşüktür. Buradan NGM (1,1) yönteminin tahmin gücünün düşük olduğu

anlaşılmaktadır. 2020-2030 yılları arasında yapılan tahmin değerleri ise doğrusal bir şekilde artmaktadır. Şekil 3.10’ da ise 2011-2020 yılları arasında eğitim harcamalarının NGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişkisini gösteren grafik verilmiştir.



Şekil 3.10. 2011-2020 yılları arasında eğitim harcamalarının NGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişki.

Şekil 3.10’ dan görüldüğü gibi 2011-2020 yılları arasında eğitim harcamalarının gerçek değerleri ve NGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri arasındaki korelasyon yeterince yüksek değildir. Regresyon katsayısı $R^2=0.9619$ olarak hesaplanmıştır.

Türkiye’ nin elektrik üretiminin gerçek değerleri, NGM (1,1) yöntemi ile elde edilen tahmin değerleri ve hata değerleri Çizelge 3.6’ da verilmiştir.

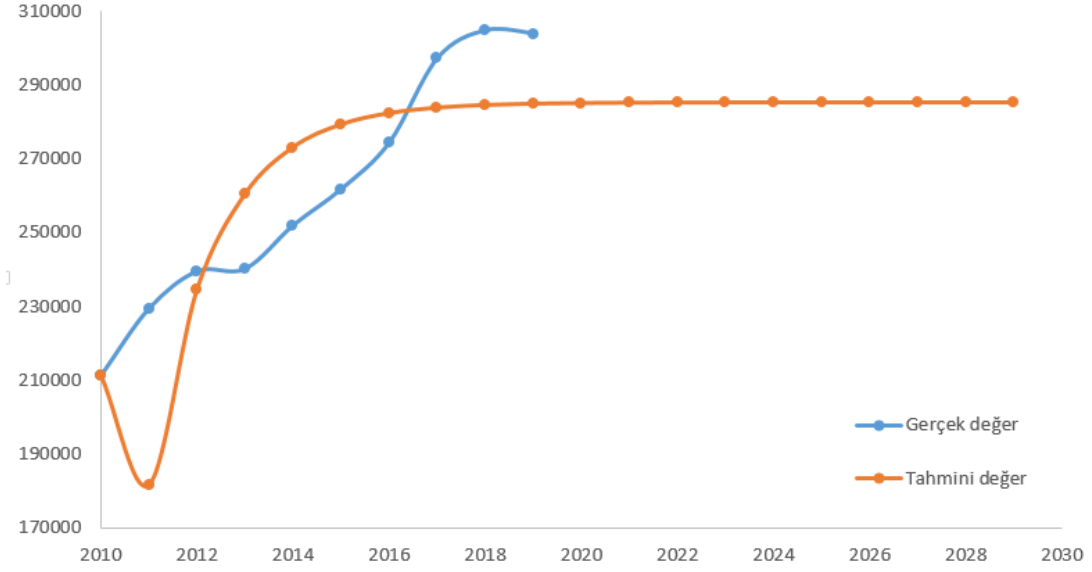
Çizelge 3.6. Türkiye’ nin elektrik üretiminin gerçek değerleri, NGM (1,1) yöntemi ile elde edilen tahmin değerleri ve hata değerleri.

Yıllar	Gerçek Değer (GWh)	Tahmin Değeri (GWh)	RPE
2010	211208	211208	0
2011	229395	181527	20,87
2012	239497	234505	2,08
2013	240154	260424	8,44

Çizelge 3.6 (devam). Türkiye’ nin elektrik üretiminin gerçek değerleri, NGM (1,1) yöntemi ile elde edilen tahmin değerleri ve hata değerleri.

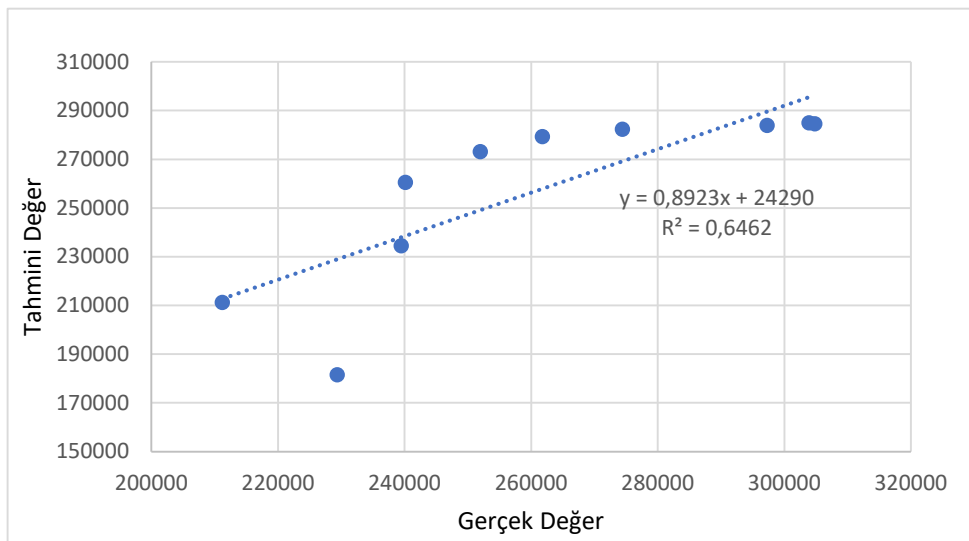
Yıllar	Gerçek Değer (GWh)	Tahmin Değeri (GWh)	RPE
2014	251963	273104	8,39
2015	261783	279307	6,69
2016	274407	282342	2,89
2017	297277	283826	4,52
2018	304802	284553	6,64
2019	303897	284908	6,25
		MAPE	% 6,67
2020		285082	
2021		285167	
2022		285209	
2023		285229	
2024		285239	
2025		285244	
2026		285246	
2027		285247	
2028		285248	
2029		285248	

NGM (1,1) ile yapılan çalışmada Türkiye’ nin 2010-2019 yılları arasındaki elektrik üretimi verileri kullanılarak sonraki yıllar için tahminler üretilmiştir. Oluşturulan model ile eldeki veriler karşılaştırılmıştır. Ortalama hata, yaklaşık olarak %6,67 şeklinde hesaplanmıştır. Tahmin sonucuna ait grafik Şekil 3.11’ de verilmiştir.



Şekil 3.11. 2010-2029 yılları arasında Türkiye elektrik üretiminin NGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri.

Şekil 3.11’ de görüldüğü gibi 2010-2019 yılları arasında elektrik üretimi için gerçek değer ve tahmini değerlerin birbiri ile uyumu oldukça düşüktür. Buradan NGM (1,1) yönteminin elektrik üretimi için tahmin gücünün düşük olduğu söylenebilir. 2019-2029 yılları arasında yapılan tahmin değerlerinde artış gözlenmediği ve değerlerin sabit kaldığı görülmektedir. Şekil 3.12’ de ise NGM (1,1) yöntemi ile 2010-2019 yılları arasında elektrik üretiminin tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki korelasyonu gösteren grafik verilmiştir.



Şekil 3.12. 2010-2019 yılları arasında elektrik üretiminin NGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişkisi.

Şekil 3.12' den görüldüğü gibi 2010-2019 yılları arasında elektrik üretiminin gerçek değerleri ve tahmin edilen değerleri arasında yüksek miktarda sapma vardır. Regresyon katsayısı $R^2=0.6462$ olarak hesaplanmıştır. Regresyon katsayısının düşük olması modelin tahmin gücünün düşük olduğunun kanıtıdır.

3.3. EXGM (1,1) Modeli Uygulamaları

Bu bölümde EXGM (1,1) modeli kullanılarak uygulamalar yapılmıştır. Türkiye' nin 2011-2020 yılları arasındaki Ar-Ge harcamaları ve eğitim harcamaları ve 2010-2019 yılları arasındaki elektrik üretimi resmi verileri Türkiye İstatistik Kurumu' ndan alınmıştır. Ar-Ge ve eğitim harcamaları için 2021-2030 yıllarının ve elektrik üretimi için 2020-2029 yıllarının tahmini EXGM (1,1) yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Gerçek ve tahmin değeri arasındaki hata oranları Eşitlik 3.1 ve Eşitlik 3.2 kullanılarak yapılmıştır. Ar-Ge harcamaları için tahmin ve hata değerleri Çizelge 3.7' de verilmiştir.

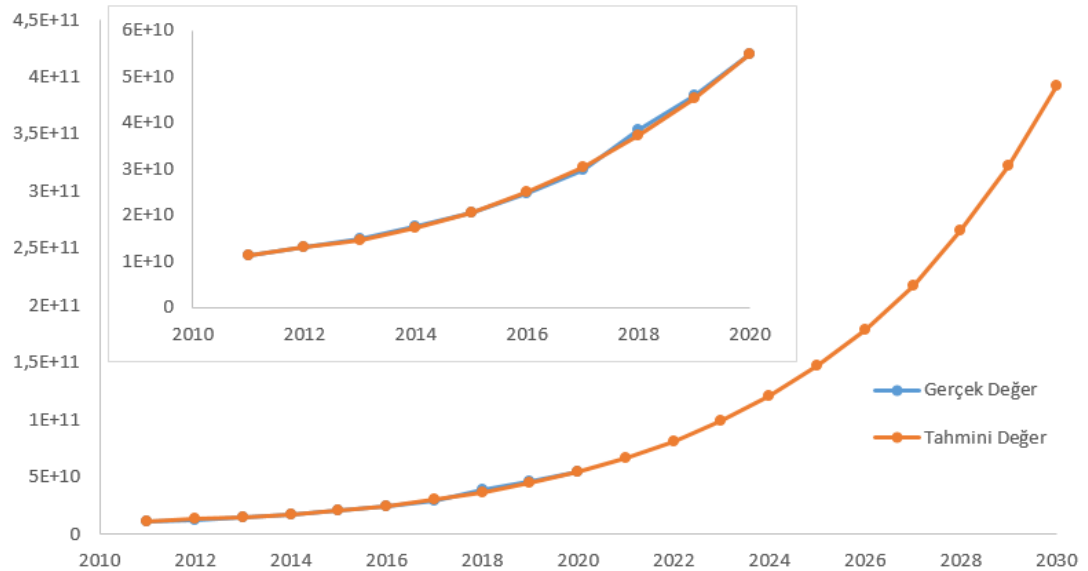
Çizelge 3.7. Türkiye' nin Ar-Ge harcamaları gerçek değerleri, EXGM (1,1) yöntemi kullanılarak elde edilen tahmin değerleri ve hata değerleri.

Yıllar	Gerçek Değer (TL)	Tahmin Değeri (TL)	RPE
2011	11154149797	11154149797	0
2012	13062263394	13167480230	0,81
2013	14807321926	14539055780	1,81
2014	17598117442	17149452610	2,55
2015	20615247954	20672985360	0,28
2016	24641251935	25089191320	1,82
2017	29855477805	30511472100	2,19
2018	38533672884	37128742700	3,65
2019	45953691096	45189669300	1,66
2020	54956827217	55003816500	0,09
		MAPE	%1,48
2021		66950521600	
2022		81492448000	
2023		99193096000	
2024		120738000000	
2025		146964000000	
2026		178885000000	
2027		217740000000	

Çizelge 3.7 (devam). Türkiye’ nin Ar-Ge harcamaları gerçek değerleri, EXGM (1,1) yöntemi kullanılarak elde edilen tahmin değerleri ve hata değerleri.

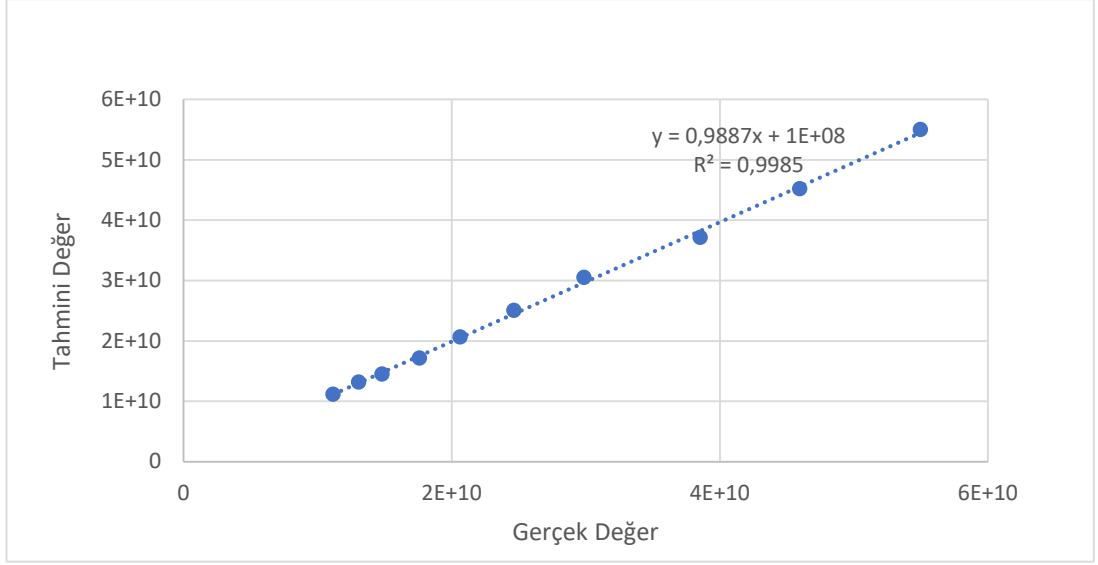
Yıllar	Gerçek Değer (TL)	Tahmin Değeri (TL)	RPE
2028		265035000000	
2029		322602000000	
2030		392674000000	

EXGM (1,1) yöntemi ile yapılan çalışmada Türkiye’ nin 2011-2020 yılları arasındaki Ar-Ge harcama verileri kullanılarak sonraki yıllar için tahminler üretilmiştir. Oluşturulan model ile eldeki veriler karşılaştırılmıştır. Ortalama hata, yaklaşık olarak %1.48 şeklinde hesaplanmıştır. Tahmin sonucuna ait grafik Şekil 3.13’te verilmiştir.



Şekil 3.13. 2011-2030 yılları arasında Türkiye Ar-Ge harcamalarının EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri.

Şekil 3.13’ te görüldüğü gibi 2011-2020 yılları arasında Ar-Ge harcamaları için gerçek değer ve EXGM (1,1) yöntemi kullanılarak elde edilen tahmini değerlerin birbiri ile uyumlu olduğu görülmektedir. Buradan EXGM (1,1) yönteminin tahmin gücünün yüksek olduğu söylenebilir. 2020-2030 yılları arasında yapılan tahmin değerleri ise üstel bir şekilde artmaktadır. Şekil 3.14’ de ise 2011-2020 yılları arasında Ar-Ge harcamalarının EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişkisini gösteren grafik verilmiştir.



Şekil 3.14. 2011-2020 yılları arasında Ar-Ge harcamalarının EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişki.

Şekil 3.14’ de görüldüğü gibi 2011-2020 yılları arasında Ar-Ge harcamalarının gerçek değerleri ve EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri arasında iyi bir korelasyon vardır. Regresyon katsayısı $R^2=0.9985$ olarak hesaplanmıştır.

Türkiye’ nin eğitim harcamaları, EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin değerleri ve hata değerleri Çizelge 3.8’ de verilmiştir.

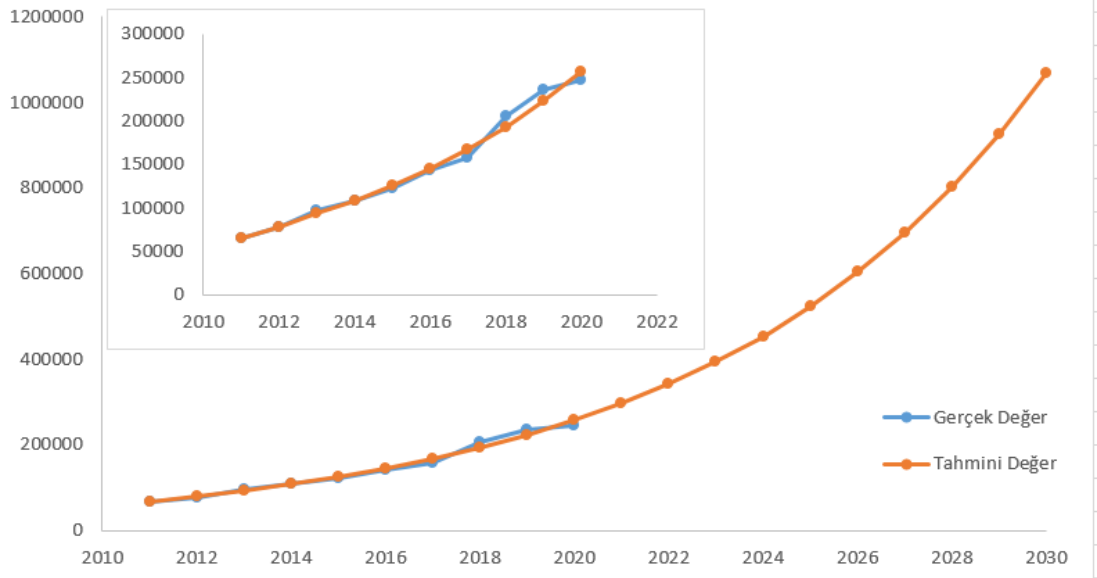
Çizelge 3.8. Türkiye’ nin eğitim harcamaları gerçek değerleri, EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin değerleri ve hata değerleri.

Yıllar	Gerçek Değer (milyon TL)	Tahmin Değeri (milyon TL)	RPE
2011	65807	65807	0
2012	78046	78708	0,85
2013	96706	93415	3,40
2014	108811	108698	0,10
2015	122496	125705	2,62
2016	143039	145089	1,43
2017	157120	167359	6,52
2018	206120	193008	6,36
2019	235473	222575	5,48
2020	246419	256666	4,19
		MAPE	% 3,09
2021		295976	

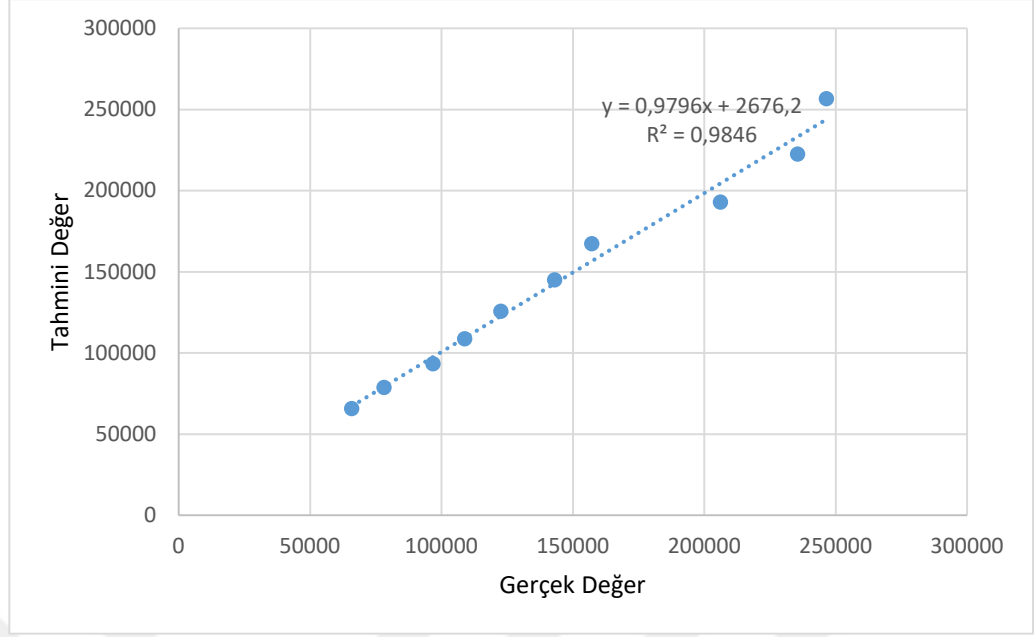
Çizelge 3.8 (devam). Türkiye’ nin eğitim harcamaları gerçek değerleri, EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin değerleri ve hata değerleri.

Yıllar	Gerçek Değer (milyon TL)	Tahmin Değeri (milyon TL)	RPE
2022		341306	
2023		393578	
2024		453856	
2025		523366	
2026		603522	
2027		695953	
2028		802541	
2029		925453	
2030		1067189	

EXGM (1,1) yöntemi ile yapılan çalışmada Türkiye’ nin 2011-2020 yılları arasındaki eğitim harcama verileri kullanılarak sonraki yıllar için tahminler üretilmiştir. Oluşturulan model ile eldeki veriler karşılaştırılmıştır. Ortalama hata, yaklaşık olarak %3.09 şeklinde hesaplanmıştır. Tahmin sonucuna ait grafik Şekil 3.15’ te verilmiştir.



Şekil 3.15. 2011-2030 yılları arasında Türkiye eğitim harcamalarının EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri.



Şekil 3.16. 2011-2020 yılları arasında eğitim harcamalarının EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişki.

Şekil 3.10' da görüldüğü gibi 2011-2020 yılları arasında eğitim harcamalarının gerçek değerleri ve EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri arasında iyi bir korelasyon vardır. Regresyon katsayısı $R^2=0.9846$ olarak hesaplanmıştır.

Türkiye' nin elektrik üretiminin gerçek değerleri, EXGM (1,1) yöntemi ile elde edilen tahmin değerleri ve hata değerleri Çizelge 3.9' da verilmiştir.

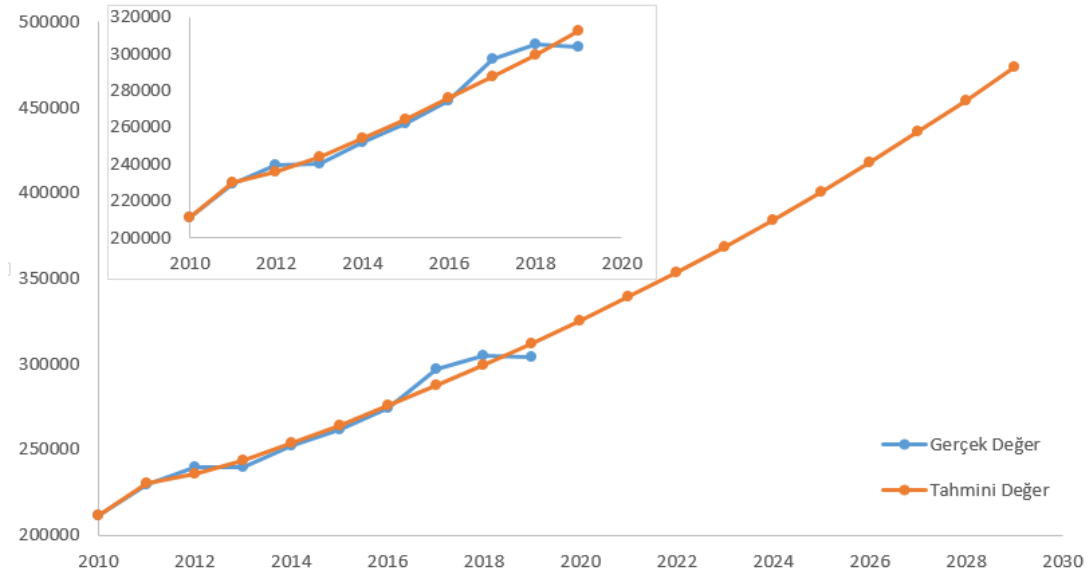
Çizelge 3.9. Türkiye' nin elektrik üretiminin gerçek değerleri, EXGM (1,1) yöntemi ile elde edilen tahmin değerleri ve hata değerleri.

Yıllar	Gerçek Değer (GWh)	Tahmin Değeri (GWh)	RPE
2010	211208	211208	0
2011	229395	230124	0,32
2012	239497	235642	1,61
2013	240154	244090	1,64
2014	251963	253887	0,76
2015	261783	264466	1,02
2016	274407	275628	0,44
2017	297277	287314	3,35
2018	304802	299515	1,73
2019	303897	312241	2,75
		MAPE	% 1,36

Çizelge 3.9 (devam). Türkiye' nin elektrik üretiminin gerçek değerleri, EXGM (1,1) yöntemi ile elde edilen tahmin değerleri ve hata değerleri.

Yıllar	Gerçek Değer (GWh)	Tahmin Değeri (GWh)	RPE
2020		325511	
2021		339345	
2022		353768	
2023		368804	
2024		384479	
2025		400820	
2026		417856	
2027		435616	
2028		454131	
2029		473432	

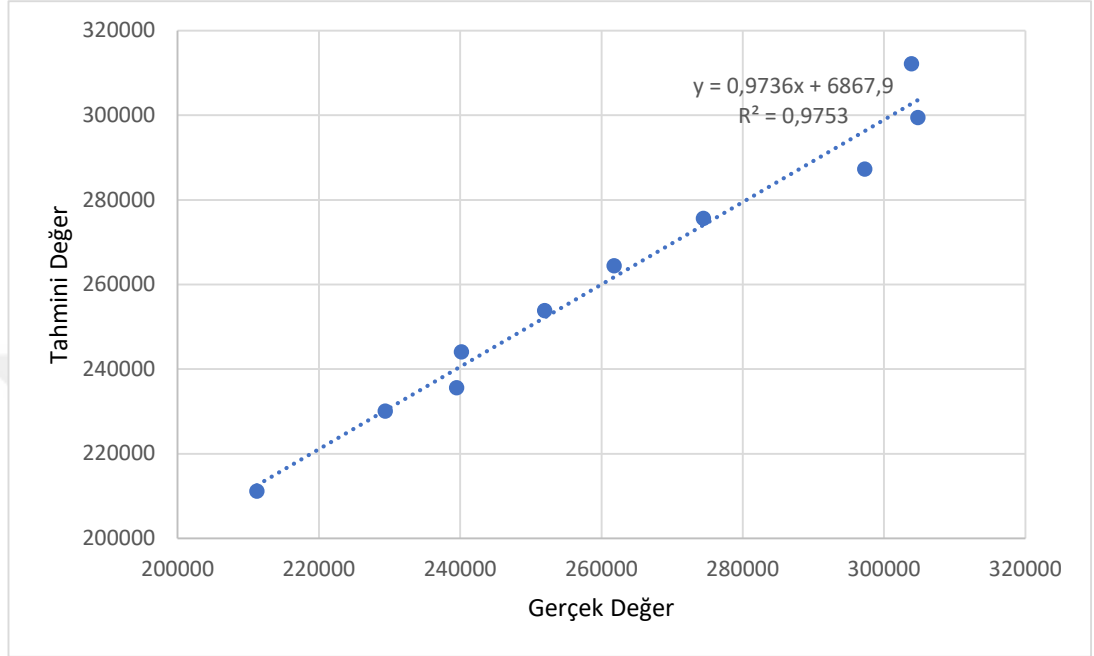
EXGM (1,1) ile yapılan çalışmada Türkiye' nin 2010-2019 yılları arasındaki elektrik üretimi verileri kullanılarak sonraki yıllar için tahminler üretilmiştir. Oluşturulan model ile eldeki veriler karşılaştırılmıştır. Ortalama hata, yaklaşık olarak %1.36 şeklinde hesaplanmıştır. Tahmin sonucuna ait grafik Şekil 3.17' de verilmiştir.



Şekil 3.17. 2010-2029 yılları arasında Türkiye elektrik üretiminin EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri.

Şekil 3.17' de görüldüğü gibi 2010-2019 yılları arasında elektrik üretimi için gerçek değer ve tahmini değer birbirini ile uyumlu olduğu görülmektedir. Buradan EXGM (1,1) yönteminin elektrik üretimi için tahmin gücünün yüksek olduğu söylenebilir.

2019-2029 yılları arasında yapılan tahmin değerleri ise üstel bir şekilde artmaktadır. Şekil 3.18’ de ise EXGM (1,1) yöntemi ile 2010-2019 yılları arasında elektrik üretiminin tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki korelasyonunu gösteren grafik verilmiştir.



Şekil 3.18. 2010-2019 yılları arasında elektrik üretiminin EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişkisi.

Şekil 3.18’ de görüldüğü gibi 2010-2019 yılları arasında elektrik üretiminin gerçek değerleri ve tahmin edilen değerleri arasında bir miktar sapma vardır. Regresyon katsayısı $R^2=0.9753$ olarak hesaplanmıştır. Ar-Ge harcamaları için hesaplanan değerden daha düşüktür.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

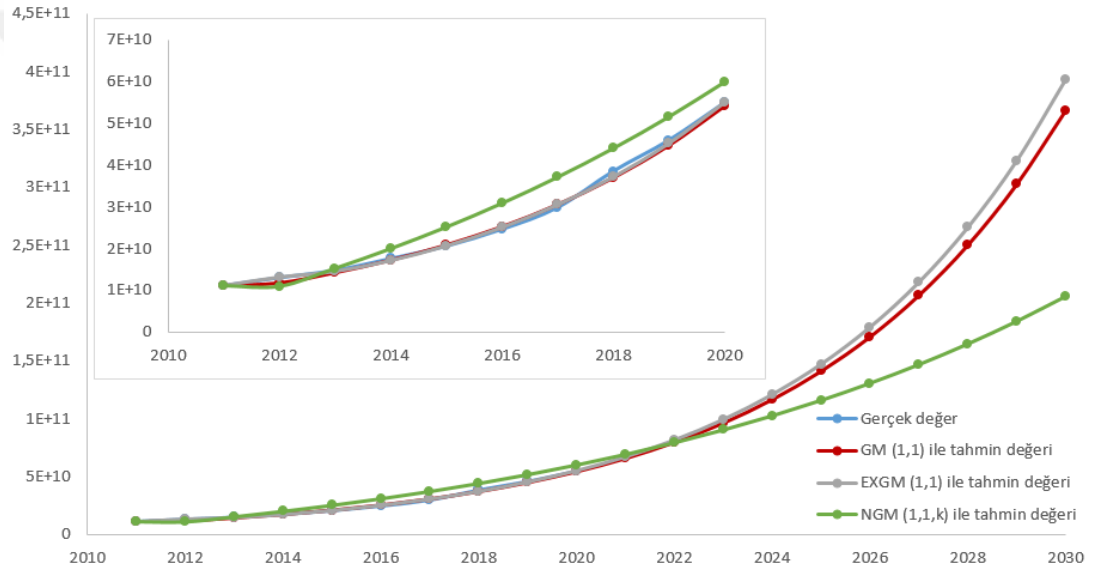
Geleneksel tahmin modellerinde, çok sayıda örnek veriye ihtiyaç duyulmaktadır. Ancak bazı durumlarda maliyet ve zaman dikkate alındığında büyük veri setlerini toplamak zordur ve bu durum geleneksel tahmin yaklaşımlarının uygulamalarını kısıtlamaktadır. Gri sistem teorisinde ise, az sayıda veriden faydalanarak gelecek zamanlar için etkin ve oldukça yaklaşık tahminler oluşturulabilmektedir. Gri sistem teorisinin bir alt dalı olan Gri modelleme yönteminde modelleme işlemi ilgili fark denklemleri ve diferansiyel denklemler kullanılarak yapılmaktadır. Günümüze kadar çok sayıda Gri model yöntemi geliştirilmiş ve birçok alana uygulanmıştır.

Bu çalışmada ise Türkiye' nin 2011-2020 yılları arasındaki Ar-Ge ve eğitim harcamaları verileri Türkiye İstatistik Kurumu' ndan alınarak 2021-2030 yıllarının Ar-Ge ve eğitim harcamaları değerleri GM (1,1), NGM (1,1) ve tarafımızca geliştirilen EXGM (1,1) yöntemleri kullanılarak tahmin edilmiştir. Ayrıca Türkiye' nin 2010-2019 yılları arasındaki elektrik üretimi verileri Türkiye İstatistik Kurumu' ndan alınarak 2020-2029 yıllarının elektrik üretimi değerleri GM (1,1), NGM (1,1) ve EXGM (1,1) yöntemleri kullanılarak tahmin edilmiştir. Her üç modelin sonuçları karşılaştırılmıştır. 2011-2020 yılları arasındaki verileri kullanarak, gerçek ve tahmin değeri arasındaki RPE ve MAPE belirlenmiştir. Gerçek değer ve tahmin değerleri arasındaki korelasyon incelenmiştir.

Bir ülkenin Ar-Ge harcaması, bilim ve teknolojiye verilen önemin bir göstergesi olup uluslararası rekabet avantajını sağlamak için özel sektör ve kamu sektörünün yapmış olduğu araştırma faaliyetleri için yapılan harcamaları içermektedir. Ar-Ge' ye yapılan harcamalar toplamının gayri safi yurtiçi hasıla içerisindeki payı uluslararası düzeyde ülkelerin bilim ve teknolojiye verdikleri önemi göstermektedir. Ar-Ge harcamaları; özel sektör, üniversiteleri ve araştırma enstitüleri gibi yerlerde yapılan toplam araştırma harcamalarından oluşmaktadır.

Şekil 4.1 de Ar-Ge harcamalarına ait gerçek değer, GM (1,1), NGM (1,1) ve EXGM (1,1) yöntemleri kullanılarak elde edilen tahmin değerleri görülmektedir. Her iki yöntemden elde edilen tahmin değerlerinin gerçek değere olan yakınlığı dikkat çekmektedir. Sonuç olarak MAPE değeri GM (1,1) için %2.95, NGM (1,1) için %14.01 ve EXGM (1,1) için % 1.48 olarak hesaplanmıştır. Literatürde %10 altında

kalan hata değerlerinin mükemmel tahmin gücünde olduğu belirtilmektedir. Gerçek değer ve tahmini değer arasındaki korelasyonu gösteren R^2 değerleri sıra ile GM (1,1) için 0.9974, NGM (1,1) için 0.9821 ve EXGM (1,1) için 0.9985 olarak belirlenmiştir. Hesaplanan hata ve R^2 değerleri ile GM (1,1) ve EXGM (1,1) modellerinin tahmin kesinliği ortaya konmuştur. Buradan EXGM (1,1) yönteminin tahmin kesinliğinin en yüksek olduğu söylenilebilir. 2011-2020 yılları arasındaki tahmin kesinliği yüksek olduğundan 2021-2030 yılları için Ar-Ge harcamaları tahmin edilmiştir. 2021-2030 yılları arasında EXGM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen Ar-Ge harcamalarının GM (1,1) ve NGM (1,1) ile tahmin edilen değerlerden daha yüksek olduğu anlaşılmaktadır.



Şekil 4.1. Ar-Ge harcamalarının GM (1,1), NGM (1,1) ve EXGM (1,1) yöntemleri ile tahmin değerlerinin karşılaştırılması.

Şekil 4.1’ de ki grafikten 2020 yılına kadar olan Ar-Ge harcamalarındaki artış hızının düşük olduğu ancak 2021 yılı itibari ile artış hızının daha yüksek olacağı ve üstel bir şekilde artacağı öngörülebilir. Bunun nedeni devlet politikalarında gidilen değişikliğin bir yansıması olabilir. Bakanlıklar tarafından hazırlanan stratejik planlar ve 11. Kalkınma Planı incelendiğinde Ülkemizin katma değerli ürün üretimi ve uluslararası platformda kalkınmasının sağlanması için Ar-Ge çalışmalarının hızlanması gerekliliği vurgulanmaktadır. Bu nedenle hem kamu hem de özel sektör bazında çeşitli teşvik mekanizmaları geliştirilmektedir. Örneğin 5746 sayılı kanun ile özel sektör Ar-Ge merkezlerinin sayısı artırılmış ve böylece özel sektörün Ar-Ge yatırımlarının artırılması sağlanmıştır. Kamu kurumlarında ise son dönemlerdeki vizyon

incelendiğinde öncelikli alanlardaki Ar-Ge projelerinin desteklendiği görülmektedir. Buna göre önümüzdeki yıllarda Ar-Ge yatırımların daha da artacağı öngörülmektedir. Bu çalışmada elde edilen önümüzdeki 10 yıla ait üstel şekilde artan tahmin değerlerinin bu açıklamalarla örtüşür nitelikte olduğu söylenilebilir.

Eğitime yapılan harcama günümüzde gelişmişliğin göstergesidir. Eğitim düzeyi ve eğitim harcamaları arasında paralellik bulunmaktadır ve eğitim düzeyinin artması ise ekonomik büyüme, kişisel gelir düzeyi ve gelir dağılımının artmasını sağlamaktadır. Bu nedenle hem gelişmiş hem de gelişmekte olan ülkelerde eğitime yapılan harcamalar artmaktadır. Ülkemizde ise eğitim harcamaları Milli Eğitim Bakanlığı, Yüksek Öğretim Kurumu, Üniversitelerin ve özel sektörde yer alan eğitim kurumlarının yaptığı harcamaların bütünüdür.

Şekil 4.2' de Ülkemizin eğitim harcamalarına ait gerçek değer, GM (1,1), NGM (1,1) ve EXGM (1,1) yöntemleri kullanılarak elde edilen tahmin değerleri görülmektedir. Her üç yöntemden elde edilen tahmin değerlerinin gerçek değere olan yakınlığı dikkat çekmektedir. Sonuç olarak MAPE değeri GM (1,1) için %3,32, NGM (1,1) için %8,66 ve EXGM (1,1) için % 3,09 olarak hesaplanmıştır. Gerçek değer ve tahmini değer arasındaki korelasyonu gösteren R^2 değerleri sıra ile GM (1,1) için 0,9845, NGM (1,1) için 0,9621 ve EXGM (1,1) için 0,9846 olarak belirlenmiştir. Hesaplanan hata ve R^2 değerleri ile tahminin kesinliği ortaya konmuştur. Buradan eğitim harcamaları için de EXGM (1,1) yönteminin tahmin kesinliğinin en yüksek olduğu anlaşılmaktadır. 2011-2020 yılları arasındaki tahmin kesinliği yüksek olduğundan 2021-2030 yılları için eğitim harcamaları tahmin edilmiştir.



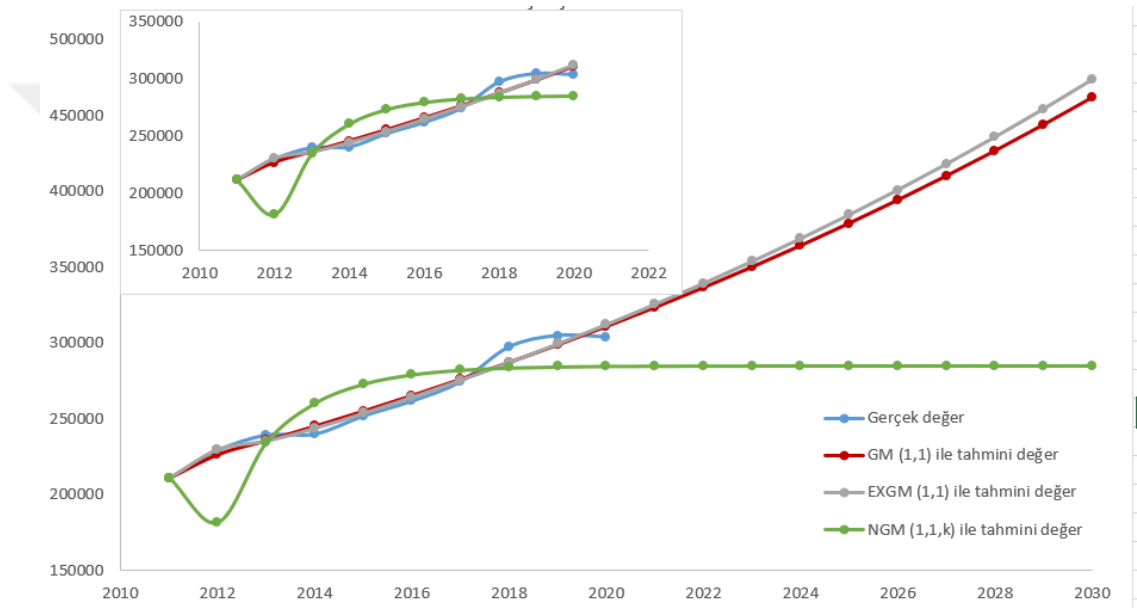
Şekil 4.2. Eğitim harcamalarının GM (1,1), NGM (1,1) ve EXGM (1,1) yöntemleri ile tahmin değerlerinin karşılaştırılması.

Şekil 4.2’ de ki grafikten 2020 yılına kadar olan eğitim harcamalarındaki artış hızının düşük olduğu ancak 2020 yılı itibari ile artış hızının daha yüksek olacağı ve üstel bir şekilde artacağı öngörülebilir. Milli Eğitim Bakanlığına ait Stratejik Plan incelendiğinde eğitimin ve okulların niteliğini artıracak yenilikçi uygulamalar geliştirilmekte, teknolojiye yatırım yapılmakta, mesleki ve teknik eğitim okullarının yapısı güçlendirilmekte ve özel yetenekli öğrencilerin yetiştirilmesi için uygun ortamlar sağlanmaktadır. Bu yatırımların artırılması gerektiği vurgulanmaktadır. Bu durumda eğitim hizmetlerine ayrılan kaynakların da gün geçtikçe artacağı anlaşılmaktadır. Bu çalışmada elde edilen önümüzdeki 10 yıla ait üstel şekilde artan tahmin değerlerinin bu açıklamalarla örtüşür nitelikte olduğu söylenilebilir.

Günümüzde enerji, gelişmiş ülkelerde olduğu kadar, gelişmekte olan ülkeler için de büyük önem taşımaktadır. Gelişmeye paralel ve hatta daha hızlı bir şekilde artan bir enerji talebi bulunmaktadır. Bu nedenle tüm ülkeler enerji üretimlerini artırmaya çalışmaktadırlar. Çünkü ülkelerin güçlü bir ekonomik ve siyasi yapıya sahip olmasında en önemli faktörlerin başında enerji gelmektedir. Enerji kaynaklarının ise en önemlisi elektriktir. Elektrik üretimi termik santraller, hidroelektrik santraller, güneş enerjisi santralleri, rüzgâr enerjisi santralleri gibi merkezlerden yapılabilmektedir.

Şekil 4.3’ te Ülkemizin elektrik üretimine ait gerçek değer, GM (1,1), NGM (1,1) ve EXGM (1,1) yöntemleri kullanılarak elde edilen tahmin değerleri görülmektedir. Her

iki yöntemden elde edilen tahmin değerlerinin gerçek değere olan yakınlığı dikkat çekmektedir. Sonuç olarak MAPE değeri GM (1,1) için %1,58, NGM (1,1) için %6,67 ve EXGM (1,1) için % 1,36 olarak hesaplanmıştır. Gerçek değer ve tahmini değerin arasındaki korelasyonu gösteren R^2 değerleri sıra ile GM (1,1) için 0.9734, NGM (1,1) için 0,6462 ve EXGM (1,1) için 0,9754 olarak belirlenmiştir. Hesaplanan hata ve R^2 değerleri ile GM (1,1) ve EXGM (1,1) modellerinin tahmin kesinliği ortaya konmuştur. Buradan elektrik üretimi için de EXGM (1,1) yönteminin tahmin kesinliğinin daha yüksek olduğu söylenilebilir. 2011-2020 yılları arasındaki tahmin kesinliği yüksek olduğundan 2021-2030 yılları için elektrik üretimi tahmin edilmiştir.



Şekil 4.3. Elektrik üretiminin GM (1,1), NGM (1,1) ve EXGM (1,1) yöntemleri ile tahmin değerlerinin karşılaştırılması.

Şekil 4.3' de ki grafikten elektrik üretimindeki artış hızının tüm yıllarda yüksek olduğu görülmektedir. Bunun temel nedeni son yıllarda güneş ve rüzgâr enerjisi santrallerine yapılan yatırımın artması olarak gösterilebileceği gibi artan talebe karşılık termik santraller ve hidroelektrik santrallere olan yatırımın artması olarak da verilebilir. Özellikle son dönemlerde çevresel zararlı etkileri minimum düzeyde olan yenilenebilir enerji kaynaklarından elektrik üretimi desteklenmekte ve bu santrallerin sayısı giderek artırılmaktadır. Kanun ve yönetmelikler buna göre düzenlenmekte ve bu alana yönelik olarak teşvik mekanizmaları geliştirilmektedir. Buradan elektrik üretiminin gün geçtikçe artacağı anlaşılmaktadır. Bu çalışmada elde edilen önümüzdeki 10 yıla ait tahmin değerlerinin bu açıklamalarla örtüşür nitelikte olduğu söylenilebilir.

Sonuç olarak bu çalışmada GM (1,1), NGM (1,1) ve EXGM (1,1) yöntemleri ile yapılan tahmin değerlerinin hata ve korelasyon sonuçları incelendiğinde tüm uygulamalarda EXGM (1,1) yönteminin daha iyi sonuç verdiği görülmektedir. Bu çalışmada yapılan uygulamalarda tahmin kesinliği yüksek olan EXGM (1,1) farklı alanlardaki uygulamalar için de kullanılabilecektir.



KAYNAKLAR

1. Kayacan, E., Ulutas, B. ve Kaynak, O., 2010. Grey system theory-based models in time series prediction, *Expert systems with applications*, 37, 2, 1784-1789.
2. Huang, K.Y. ve Jane, C.J., 2009. A hybrid model for stock market forecasting and portfolio selection based on ARX, grey system and RS theories, *Expert systems with applications*, 36, 3, 5387-5392.
3. Huang, S.C., Chuang, P.J., Wu, C.F. ve Lai, H.J., 2010. Chaos-based support vector regressions for exchange rate forecasting, *Expert Systems with Applications*, 37, 12, 8590-8598.
4. Abdi, J., Moshiri, B., Abdulhai, B. ve Sedigh, A.K., 2012. Forecasting of short-term traffic-flow based on improved neurofuzzy models via emotional temporal difference learning algorithm, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 25, 5, 1022-1042.
5. Wang, J. ve Shi, Q., 2013. Short-term traffic speed forecasting hybrid model based on chaos-wavelet analysis-support vector machine theory, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 27, 219-232.
6. Antoniou, C., Koutsopoulos, H.N. ve Yannis, G., 2013. Dynamic data-driven local traffic state estimation and prediction, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 34, 89-107.
7. An, X., Jiang, D., Liu, C. ve Zhao, M., 2011. Wind farm power prediction based on wavelet decomposition and chaotic time series, *Expert Systems with Applications*, 38, 9, 11280-11285.
8. Jin, M., Zhou, X., Zhang, Z.M. ve Tentzeris, M.M., 2012. Short-term power load forecasting using grey correlation contest modeling, *Expert Systems with Applications*, 39, 1, 773-779.
9. Coakley, J., Fuertes, A.M.A. ve Pérez, M.A.T., 2003. Numerical issues in threshold autoregressive modeling of time series, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27, 11-12, 2219-2242.
10. Engle, R.F., 1982. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica: Journal of the econometric society*, 987-1007.
11. Feng, H., Peng, L. ve Zhu, F., 2013. Interval estimation for a simple bilinear model, *Statistics & Probability Letters*, 83, 10, 2152-2159.
12. Khashei, M. ve Bijari, M., 2012. A new class of hybrid models for time series forecasting, *Expert Systems with Applications*, 39, 4, 4344-4357.
13. Jianshan, L., Changming, W., Aijun, Z. ve Xiaomin, X., 2012. Residual GM (1, 1) Model-Based Prediction Method for Chaotic Time Series, *Journal of Grey System*, 24, 4.
14. Lu, J., Xie, W., Zhang, A. ve Wang, C., 2014. Chaos-based Modified GM (1, 1) Power Model in Time Series Prediction, *Journal of Grey System*, 26, 4.
15. Dimitriou, L., Tsekeris, T. ve Stathopoulos, A., 2008. Adaptive hybrid fuzzy rule-based system approach for modeling and predicting urban traffic flow, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 16, 5, 554-573.

16. Kim, K.J., 2003. Financial time series forecasting using support vector machines, *Neurocomputing*, 55, 1-2, 307-319.
17. Peng, Y. ve Dong, M., 2011. A hybrid approach of HMM and grey model for age-dependent health prediction of engineering assets, *Expert Systems with Applications*, 38, 10, 12946-12953.
18. Deng, J.L., 2002. Grey prediction and grey decision, Press of Huazhong University of Science & Technology, Wuhan, 100-190.
19. Deng, J., 2002. The basis of grey theory, Press of Huazhong University of Science & Technology, Wuhan, 1-2.
20. Ju Long, D., 1982. Control problems of grey systems, *Systems & control letters*, 1, 5, 288-294.
21. Liu, S. ve Lin, Y., 2003. An introduction to grey systems: foundations, methodology and applications, *Kybernetes*.
22. Lin, Y., Chen, M.Y. ve Liu, S., 2004. Theory of grey systems: capturing uncertainties of grey information, *Kybernetes*.
23. Wu, L., Liu, S., Chen, D., Yao, L. ve Cui, W., 2014. Using gray model with fractional order accumulation to predict gas emission, *Natural hazards*, 71, 3, 2231-2236.
24. Zhang, Y., Xu, Y. ve Wang, Z., 2009. GM (1, 1) grey prediction of Lorenz chaotic system, *Chaos, Solitons & Fractals*, 42, 2, 1003-1009.
25. Zhou, W. ve He, J.M., 2013. Generalized GM (1, 1) model and its application in forecasting of fuel production, *Applied Mathematical Modelling*, 37, 9, 6234-6243.
26. Javed, S.A. ve Liu, S., 2018. Predicting the research output/growth of selected countries: application of Even GM (1, 1) and NDGM models, *Scientometrics*, 115, 1, 395-413.
27. Ou, S.L., 2012. Forecasting agricultural output with an improved grey forecasting model based on the genetic algorithm, *Computers and electronics in agriculture*, 85, 33-39.
28. Zeng, B., Tan, Y., Xu, H., Quan, J., Wang, L. ve Zhou, X., 2018. Forecasting the Electricity Consumption of Commercial Sector in Hong Kong Using a Novel Grey Dynamic Prediction Model, *Journal of grey system*, 30, 1.
29. Ene, S. ve Öztürk, N., 2017. Grey modelling based forecasting system for return flow of end-of-life vehicles, *Technological Forecasting and Social Change*, 115, 155-166.
30. Şahin, U. ve Şahin, T., 2020. Forecasting the cumulative number of confirmed cases of COVID-19 in Italy, UK and USA using fractional nonlinear grey Bernoulli model, *Chaos, Solitons & Fractals*, 138, 109948.
31. Ma, X. ve Liu, Z., 2017. Application of a novel time-delayed polynomial grey model to predict the natural gas consumption in China, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 324, 17-24.

32. Ma, X., Liu, Z. ve Wang, Y., 2019. Application of a novel nonlinear multivariate grey Bernoulli model to predict the tourist income of China, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 347, 84-94.
33. Wang, Z.X., Li, Q. ve Pei, L.L., 2018. A seasonal GM (1, 1) model for forecasting the electricity consumption of the primary economic sectors, *Energy*, 154, 522-534.
34. Wu, L., Li, S., Huang, R. ve Xu, Q., 2020. A new grey prediction model and its application to predicting landslide displacement, *Applied Soft Computing*, 95, 106543.
35. Liu, L. ve Wu, L., 2021. Forecasting the renewable energy consumption of the european countries by an adjacent non-homogeneous grey model, *Applied Mathematical Modelling*, 89, 1932-1948.
36. Bilgil, H., 2021. New grey forecasting model with its application and computer code, *AIMS Mathematics*, 6, 2, 1497-1514.
37. Öztürk, Z. ve Bilgil, H., 2019. Mathematical estimation of expenditures in the health sector in turkey with grey modeling, *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Bilimleri Dergisi*, 35, 3, 52-58.
38. Kedong, Y., Yan, G. ve Xuemei, L., 2018. Improved grey prediction model based on exponential grey action quantity, *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 29, 3, 560-570.
39. Akay, D. ve Atak, M., 2007. Grey prediction with rolling mechanism for electricity demand forecasting of Turkey, *Energy*, 32, 9, 1670-1675.
40. Cui, J., Liu, S., Zeng, B., Xie, N., 2013. A novel grey forecasting model and its optimization, *Applied Mathematical Modelling*, 37, 4399-4406.
41. Chiang, J.Y., 2008. Application of grey prediction to inverse nonlinear heat conduction problem, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51, 3-4, 576-585.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Levent AKYÜZ

EĞİTİM BİLGİLERİ

Lisans : Erciyes Üniversitesi, Matematik Bölümü, 1999-2003

Tezsiz Yüksek Lisans : Erciyes Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı 2003-2005

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2021-2022

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Kayseri Bil Dershaneleri, Matematik Öğretmeni, 2003-2007
2. Kayseri Olimpik Fen Dershaneleri, Matematik Öğretmeni, 2007-2014
3. Aksaray Final Dershaneleri, Matematik Öğretmeni, 2014-2016
4. Özel Selçuklu Temel Lisesi, Matematik Öğretmeni, 2016-2019
5. Vizyon Akademi Fen ve Anadolu Lisesi, Matematik Öğretmeni, 2019-Devam Ediyor

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Application Of GM (1.1) and EXGM (1.1) Forecasting Models to Turkey's R&D Expenditures/ Euroasia International Congress on Scientific Researches and Recent Trends, 18-20 February 2022.