

**T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI
EKONOMETRİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ZAMAN SERİSİ MODELLERİNİN
BELİRLENMESİNDE ARTIKLARA UYGULANAN
TANI TEKNİKLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

Eda BÖLÜK

**Danışman
Prof. Dr. Levent ŞENYAY**

İZMİR - 2012

YÜKSEK LİSANS
TEZ/ PROJE ONAY SAYFASI

2009800209

Üniversite : Dokuz Eylül Üniversitesi
Enstitü : Sosyal Bilimler Enstitüsü
Adı ve Soyadı : Eda BÖLÜK
Tez Başlığı : Zaman Serisi Modellerinin Belirlenmesinde Artıklara Uygulanan Tanı Teknikleri Üzerine Bir Çalışma

Savunma Tarihi : 18.06.2012
Danışmanı : Prof.Dr.Levent ŞENYAY

JÜRİ ÜYELERİ

Ünvanı, Adı, Soyadı

Üniversitesi

Prof.Dr.Levent ŞENYAY

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ

Doç.Dr.Cenk ÖZLER

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ

Doç.Dr.Onur ÖZVERİ

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ

Oybirliği (X)

Oy Çokluğu ()

İmza

Eda BÖLÜK tarafından hazırlanmış ve sunulmuş "Zaman Serisi Modellerinin Belirlenmesinde Artıklara Uygulanan Tanı Teknikleri Üzerine Bir Çalışma" başlıklı Tezi (X) / Projesi () kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Utku UTKULU
Enstitü Müdürü

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Zaman Serisi Modellerinin Belirlenmesinde Artıklara Uygulanan Tanı Teknikleri Üzerine Bir Çalışma” adlı çalışmanın, tarafımdan, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Tarih

.../.../2012

Eda BÖLÜK

İmza

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

**Zaman Serisi Modellerinin Belirlenmesinde Artıklara Uygulanan Tanı
Teknikleri Üzerine Bir Çalışma
Eda BÖLÜK**

**Dokuz Eylül Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü
Ekonometri Anabilim Dalı
Ekonometri Programı**

Bu tez çalışmasında öncelikle zaman serisi veri türleri ve özellikleri, zaman serisi analizinin amaçları ve bu analizlerde kullanılan temel teknikler tanıtılmış ve zaman serisi verileri ve modellerinin yapısal sınıflandırmaları yapılmıştır. Durağan zaman serisi modellerinden AR, MA ve ARMA, durağan olmayan modellerden ARIMA, SARIMA modellerinin teorik özellikleri ele alınmıştır. Bir zaman serisi verisine uygun zaman serisi modellerinden hangisinin seçileceği sorunu ve model seçiminde bu amaçla kullanılan temel bazı teknikler tanıtılmıştır. Seçilen modelin uygunluğunu kontrol etmek için artıklara uygulanan tanı kontrol yöntemleri ele alınmış ve uygulamalarının nasıl yapılacağı gösterilmiştir. Örnek bir uygulama olarak Avrupa Merkez Bankası verilerinden alınan Euro bölgesi için petrol varil fiyatları kullanılmıştır. Bu uygulamada petrol serisine uygun bir zaman serisi modeli uydurulmuş, bu modelin uygunluğu için artıkların otokorelasyonunun kontrolü, artıkların karelerinin kontrolü, Portmanto İyi-Uyum Testi, Durbin-Watson Testi, Lagrange Çarpımı Testleri ile kontrol edilerek sonuçların yorumlanmasına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Zaman Serisi Modelleri, Model Seçim Kriterleri, Model Tanı Kontrolü.

ABSTRACT

Master's Thesis

A Study on Diagnostic Techniques Applied to The Residuals at Identification of The Time Series Models

Eda BÖLÜK

Dokuz Eylül University

Graduate School of Social Sciences

Department of Econometrics

Econometrics Program

In this thesis study, it is firstly presented the features and types of the time series data, the aims of the time series analysis and the techniques used in this analysis and is made the consructional classification of the time series data and its models. It is discussed the abstract properties of ARIMA and SARIMA from the nonstationary models, and AR, MA and ARMA from the stationary time series models. It is presented the problem of which one can be chosen among the proper time series models for a time series data and some basic tecniques used for this purpose in the selection of the model. To check the suitability of the chosen model, it is discussed the diagnostic check methods carried out the residuals and it is shown how to do the applications. As a model application, it has been used the price per barrel of oil for EURO region taken from European Central Bank data. In this applicalitons, it has been fitted a time series model which is suitable for oil series and in order to test to fit the model it has been given place checking of the residual autocorrelation, checking of the square of the residuals, Portmanto lack-of-fit test, Durbin-Watson test, Lagranges multiplier tests , and the results of these tests has been interpreted.

Keywords: Time Series Models, Model Selection Criteria, Model Diagnostic Checking.

**ZAMAN SERİSİ MODELLERİNİN BELİRLENMESİNDE ARTIKLARA
UYGULANAN TANI TEKNİKLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	ii
YEMİN METNİ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
KISALTMALAR	x
TABLolar LİSTESİ	xi
ŞEKİLLER LİSTESİ	xii
EK LİSTESİ	xiii
 GİRİŞ	 1

BİRİNCİ BÖLÜM

ZAMAN SERİSİ VERİLERİ VE BETİMLEYİCİ FONKSİYONLARI

1.1.	ZAMAN SERİSİ VERİLERİ	2
1.2.	ZAMAN SERİSİ ANALİZİ	5
	1.2.1. Zaman Serisinin Bileşenleri	6
	1.2.2. Zaman Serisi Analizinin Amaçları	10
1.3.	ZAMAN SERİLERİNİN SINIFLANDIRILMASI	12
	1.3.1. Sürekli ve Kesikli Zaman Serisi	12
	1.3.2. Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Zaman serileri	12
	1.3.3. Durağan ve Durağan Olmayan Zaman Serisi	13
	1.3.3.1. Durağan Zaman Serisi	13
	1.3.3.1.1. Tam (Güçlü) Durağanlık	14
	1.3.3.1.2. Zayıf (Kovaryans) Durağanlık	14

1.3.3.2.	Durağan Olmayan Zaman Serisi	15
1.4.	ZAMAN SERİSİNDE KULLANILAN TEMEL TEKNİKLER	15
1.4.1.	Otokovaryans Katsayısı ve Fonksiyonu	15
1.4.2.	Otokorelasyon Katsayısı ve Fonksiyonu	15
1.4.3.	Korelogram ve Korelogramın Yorumlanması	18
1.4.4.	Kısmi Otokorelasyon Katsayısı ve Fonksiyonu	20

İKİNCİ BÖLÜM

ZAMAN SERİSİ OLASILIK MODELLERİ

2.1.	DURAĞAN STOKASTİK SÜREÇLER	23
2.1.1.	Pür Rassal (White-Noise) Süreç	26
2.1.2.	Otoregresif (AR) Süreçler	28
2.1.2.1.	AR süreçlerinde Durağanlık Göstergesi	29
2.1.2.2.	AR(p) Sürecinin ACF, PACF ve Otokovaryans Fonksiyonu	31
2.1.2.3.	AR Sürecinin Derecesinin Belirlenmesi	35
2.1.2.4.	AR Sürecinin Parametrelerinin Tahmini	39
2.1.3.	Hareketli Ortalama (MA) Süreçleri	40
2.1.3.1.	MA Süreçlerinde Çevirebilirlik Göstergesi	40
2.1.3.2.	MA(q) Sürecinin ACF, PACF ve Otokovaryans Fonksiyonu	41
2.1.3.3.	MA Sürecinin Derecesinin Belirlenmesi	44
2.1.3.4.	MA Sürecinin Parametrelerinin Tahmini	46
2.1.3.5.	AR ile MA Süreçleri Arasındaki Çift Yönlü İlişki	49
2.1.4.	ARMA Süreçleri	51
2.1.4.1.	ARMA Süreçlerinin Durağanlık ve Çevirebilirlik Özelliği	52
2.1.4.2.	ARMA(p,q) Sürecinin ACF, PACF ve Otokovaryans Fonksiyonu	53
2.2.	DURAĞAN OLMAYAN STOKASTİK SÜREÇLER	55

2.2.1. Rassal Yürüyüş (Random Walk) Süreci	55
2.2.1. ARIMA Süreçleri	56
2.2.2. SARIMA Süreçleri	58

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

MODEL BELİRLEME VE TANI KONTROLÜ

3.1. MODEL SEÇİM KRİTERLERİ	60
3.1.1. Akaike Bilgi Kriteri	60
3.1.2. Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri	61
3.1.3. Bayesian Bilgi Kriteri	62
3.1.4. Son Kestirim Hatası	63
3.1.5. Schwartz Bilgi Kriteri	63
3.1.6. Hannan-Rissanen Kriteri	64
3.1.7. Hannan-Quinn Bilgi Kriteri	64
3.1.8. Parzen'nin CAT Kriteri	65
3.2. MODEL TANI KONTROLÜ	65
3.2.1. Artıklara Uygulanan Tanı Kontrol Yöntemleri	66
3.2.1.1. Artıkların Otokorelasyonunun Kontrolü	66
3.2.1.2. Portmanto İyi-Uyum Testi	69
3.2.1.3. Artıkların Karelerinin Kontrolü	70
3.2.1.4. Kümülatif Periodogram Testi	71
3.2.1.5. Durbin-Watson Testi	75
3.2.1.6. Lagrange Çarpanı Testi	76

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

PETROL FİYATLARI İÇİN MODEL KONTROLÜ

4.1. ANALİZİ YAPILACAK VERİLER	80
4.2. VERİLERİN DURAĞANLIĞININ SAĞLANMASI	80

4.3.	UYGUN MODELİN BELİRLENMESİ	87
4.4.	MODEL SEÇİMİ	97
4.5.	SEÇİLEN MODELİN DOĞRULUĞUNUN KONTROLÜ	97
4.5.1.	Artıkların Otokorelasyonunun Kontrolü	98
4.5.2.	Portmanto İyi-Uyum Testi	100
4.5.3.	Artıkların Karelerinin Kontrolü	102
4.5.4.	Durbin-Watson Testi	105
4.5.5.	Lagrange Çarpanı Testi	105
	SONUÇ	109
	KAYNAKÇA	112
	EK	116

KISALTMALAR

AR	Otoregresif Süreç
MA	Hareketli Ortalama Süreci
ARMA	Otoregresif - Hareketli Ortalama Süreci
IMA	Farkı Alınmış Hareketli Ortalama Süreci
ARI	Farkı Alınmış Otoregresif Süreç
ARIMA	Farkı Alınan Otoregresif- Hareketli Ortalama Süreci
SARIMA	Farkı Alınan Mevsimsel Otoregresif- Hareketli Ortalama Süreci
ACF	Otokorelasyon Fonksiyonu
ACVF	Otokovaryans Fonksiyonu
PACF	Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu
IDD	Bağımsız Özdeşçe Dağılım
EKK	En Küçük Kareler
AIC	Akaike Bilgi Kriteri
AICC	Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri
BIC	Bayesian Bilgi Kriteri
FPE	Son Kestirim Hatası
SIC	Schwartz Bilgi Kriteri
HRC	Hannan-Rissanen Kriteri
HIC	Hannan-Quinn Bilgi Kriteri
CAT	Otoregresif Transfer Fonksiyonu Kriteri
DW	Durbin Watson İstatistiği
LM	Lagrange Çarpanı İstatistiği
ML	En Yüksek Olabilirlik

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1 : AR, MA, ARMA Süreçlerinin Otokorelasyon ve Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonlarının Yapısı	s. 36
Tablo 2 : Kümülatif Periyodogram Testi İçin Yaklaşık Olasılık Sınırlarının Hesaplanması İçin Katsayılar	s. 73
Tablo 3 : Petrol Fiyatları Serisinin Korelogramı	s. 82
Tablo 4 : dx Serisinin Korelogramı	s. 84
Tablo 5 : lx Serisinin ADF Testi Sonuçları	s. 86
Tablo 6 : dlx Serisinin ADF Testi Sonuçları	s. 87
Tablo 7 : dlx Serisinin Korelogramı	s. 89
Tablo 8 : lx Serisi için Sabit Terimli ARIMA(1,1,0) Modelinin Sonuçları	s. 90
Tablo 9 : lx Serisi için Sabit Terimsiz ARIMA(1,1,0) Modelinin Sonuçları	s. 91
Tablo 10 : lx Serisi için Sabit Terimsiz ARIMA(1,1,0) Modelinin Korelogramı	s. 92
Tablo 11 : lx Serisi için Tahminlenmiş ARIMA(0,1,1) Modelinin Sonuçları	s. 93
Tablo 12 : lx Serisi için Tahminlenmiş ARIMA(0,1,1) Modelinin Korelogramı	s. 94
Tablo 13 : lx Serisi İçin Tahminlenmiş ARIMA(2,1,1) Modelinin Sonuçları	s. 95
Tablo 14 : lx Serisi İçin Tahminlenmiş ARIMA(2,1,1) Modelinin Korelogramı	s. 96
Tablo 15 : ARIMA(0,1,1) Modelinin Artıklarının (zsapka) Korelogramı	s. 100
Tablo 16 : ARIMA(0,1,1) Modelinin Artıklarının Karelerinin (zsapkakare) Korelogramı	s. 103

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1 : Türkiye Geneli Aylara Göre 25-29 Yaşları Arası İşsizlik Oranı (%)	s. 3
Şekil 2 : Türkiye Geneli Aylara Göre Doğum Sayısı Grafiği	s. 4
Şekil 3 : Süreç Kontrol Grafiği	s. 4
Şekil 4 : İkili Süreç Grafiği	s. 5
Şekil 5 : Nokta Süreci	s. 5
Şekil 6 : Türkiye'nin 1969-2011 Yılları Arasında Aylık Olarak Ölçülmüş Dolar Cinsinden İthalat Değerlerinin Grafiği	s. 7
Şekil 7 : Mevsimsel Etkilerden Arındırılmış Temel İşgücü Göstergeleri	s. 8
Şekil 8 : 1992-2008 Yılları Arasında Aylık Olarak Ölçeklendirilmiş Türkiye'nin Sanayi Üretim Endeksi Grafiği	s. 9
Şekil 9 : Doğrusal Bir Sistemin Şematik Gösterimi	s. 11
Şekil 10 : Farklı Serilerde Korelogram Örnekleri	s. 20
Şekil 11 : X_t ile X_{t+k} Arasındaki Korelasyon ve X_t ile X_{t-k} Arasındaki Korelasyon	s. 26
Şekil 12 : Beyaz Gürültü (White-Noise) Süreci	s. 27
Şekil 13 : White-Noise Sürecinin ACF ve PACF Grafikleri	s. 28
Şekil 14 : AR(1) Sürecinin ACF ve PACF Grafikleri	s. 37
Şekil 15 : AR(2) Sürecinin ACF ve PACF Grafikleri	s. 38
Şekil 16 : MA(1) Sürecinin ACF ve PACF Grafikleri	s. 44
Şekil 17 : MA(2) Sürecinin ACF ve PACF Grafikleri	s. 45
Şekil 18 : C serisi: (0,2,2) Dereceli (b) ve (0,1,1) Dereceli (a) En İyi Uydurulmuş Süreçlerin Artıklarının Kümülatif Periyodogramları	s. 74
Şekil 19 : Petrol Fiyatları	s. 81
Şekil 20 : 1. Farkı Alınmış x Serisi	s. 83

EK LİSTESİ

EK 1 Çalışmada Kullanılan Örnek Veriler	ek s.1
Ek 1.1 : 2005-2010 Yılları Arası Aylık Olarak Ölçülmüş, 25- 29 Yaşları Arası Türkiye Geneli İşsizlik Oranları Verileri (%)	ek s.1
Ek 1.2 : 2001-2010 Yılları Arasında Aylık Olarak Ölçülmüş Doğum Verileri	ek s.2
Ek 1.3 : 150 Rastgele Çekime Dayalı Bir Serinin Verileri	ek s.3
Ek 1.4 : Türkiye'nin 1969-2011 Yılları Arasında Aylık Olarak Ölçülmüş Dolar Cinsinden İthalat Değerleri	ek s.4
Ek 1.5 : Türkiye'nin 1992-2008 Yılları Arasında Aylık Olarak Ölçülmüş Sanayi Üretim Endeksi Verileri	ek s.6
Ek 1.6 : Bir Kimyasal Sürecin Sıcaklık Değerleri	ek s.7
Ek 1.7 : Euro Bölgesi 1985-2012 Yılları Arasında Aylık Olarak Ölçülmüş Ham Brent Petrol Varil Fiyatları	ek s.9
Ek 1.8 : Ki-Kare Kritik Değerler Tablosu	ek s.10

GİRİŞ

Zaman serisi analizinde ileriye yönelik tahmin, en önemli aşamalardan biridir. Doğru bir tahmin yapılması için veriyi en iyi şekilde temsil edecek modelin doğru bir şekilde belirlenmesi gerekir. İstatistiksel modele uygun derecelerin seçilmemesi durumunda modelden elde edilecek sonuçlar güvenilir olmayacaktır. Modelin derecesi olması gerektiğinden daha küçük seçildiğinde parametrelerin tahmini tutarlı olmamakta, olması gerektiğinden daha büyük seçildiğinde ise parametrelerinin tahminin varyansı büyük çıkmaktadır (Kadılar, 2000:51). İstatistiksel modelin uygun derecelerinin bulunması aşamasında seriyi en iyi temsil edecek modelin seçimi için en çok kullanılan bilgi kriterleri, Akaike, Schwarz, Hannan-Quinn, Bayesian Bilgi kriterleridir.

Bir seriye istatistiksel modelin uydurulmasının en iyi tarafı, uygun olan modelden elde edilecek olan tahminlenmiş değerlerle gözlemlenen değerleri karşılaştırabilmektir. Uydurulan model uygunsa artıklar model ile birlikte tutarlı hareket etmelidir (Brockwell ve Davis, 1991:306). Bu nedenle modelin uygunluğu araştırılırken artıklara uygulanan kontrol yöntemleri incelenir.

Çalışmanın birinci bölümünde zaman serisi analizinde genellikle karşılaşılan veriler, bu verilerin özellikleri, analizin amaçları ve kullanılan temel teknikler anlatılmıştır. İkinci bölümünde, zaman serisini durağan ve durağan olmama durumuna göre sınıflandırılarak, modellerinin çeşitleri ve özellikleri, üçüncü bölüm de ise, zaman serisinin modelini belirlemede kullanılan tanı kontrol testleri anlatılmıştır. Dördüncü bölümde uygulama verisi olarak Avrupa Merkez Bankasından alınan Euro bölgesi için petrol varil fiyatları kullanılmıştır. Petrol serisine uygun zaman serisi modeli uydurulmuş, bu modelin uygunluğu artıkların otokorelasyonunun ve artıkların karelerinin kontrolü yöntemleri ve Portmanto iyi-uyum Testi, Durbin-Watson Testi, Lagrange Çarpanı Testi ile kontrol edilerek sonuçlar yorumlanmıştır.

BİRİNCİ BÖLÜM

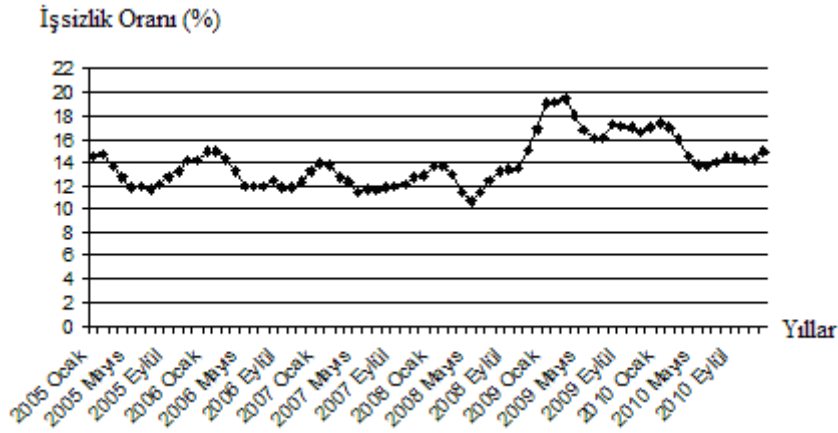
ZAMAN SERİSİ VERİLERİ VE BETİMLEYİCİ FONKSİYONLARI

1.1. ZAMAN SERİSİ VERİLERİ

Bir zaman serisi, yıllık, aylık, haftalık, günlük, saatlik gibi eşit aralıklı zaman dilimleri içerisinde toplanan gözlemlerin sıralanmasıyla oluşur. Zaman serileri ekonomi, mühendislik, meteoroloji, deniz bilimi, sağlık, eğitim vb gibi alanlarda; firmaların harcamaları, satış ve alış rakamları, ihracat, ithalat miktarları, hisse senedi fiyatları, nüfus ölçümleri, hava sıcaklığı değerleri gibi farklı yapılarda, bir çok zaman serisi türleri ortaya çıkar. Mühendislikte ve ekonomide çok karşılaşılmakla beraber özellikle istatistik alanında zaman serisi analiz yöntemleri önemli bir alanı oluşturmaktadır. Uygulamada karşımıza çıkan zaman serileri; ekonomik zaman serisi, fiziksel zaman serisi, pazarlama zaman serisi, demografik zaman serisi, süreç kontrolü, ikili süreçler ve nokta süreçler olarak adlandırılabilir.

Ekonomik Zaman Serisi Verileri: Ekonomik zaman serisi ekonomik bir değişim için eşit aralıklı zaman noktalarındaki veya zamanın farklı noktalarındaki gözlemleri içeren veriler topluluğu olarak tanımlanabilir. Aylık ihracat ve ithalat miktarları, ortalama gelirler, günlük hisse senedi fiyatları, yıllık şirket karları, işsizlik oranı, faiz oranları gibi veriler, ekonomik zaman serilerine örnek olarak gösterilebilir. Şekil 1, 2005-2010 yılları arası aylık olarak ölçülmüş, 25- 29 yaşları arası yüzde ile ifade edilmiş, Türkiye geneli işsizlik oranının grafiğini göstermektedir.

Şekil 1: Türkiye Geneli Aylara Göre 25-29 Yaş Arası İşsizlik Oranı (%)

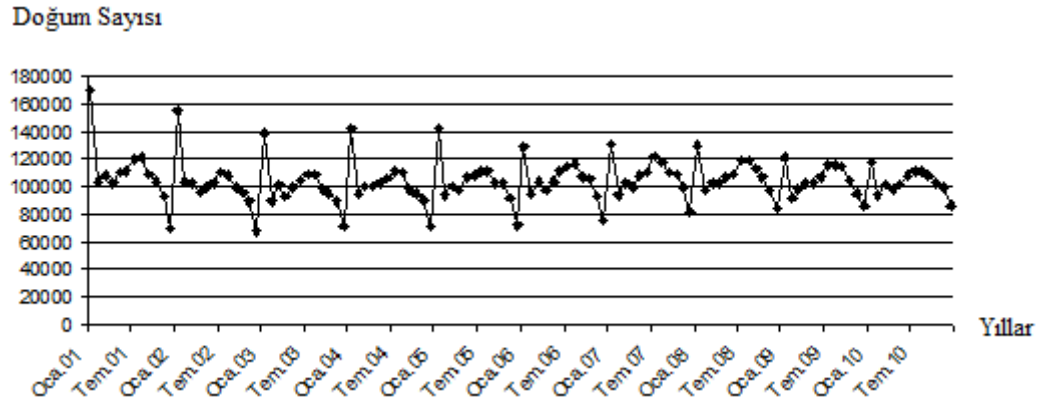


Fiziksel Zaman Serisi: Fiziksel bilimlerde özellikle meteoroloji, deniz bilimi ve jeofizik alanlarında bir çok zaman serisi türleri ortaya çıkar. Eşit aralıklarla yağış miktarları ve saatlik, günlük ve aylık olarak ölçülen hava sıcaklıkları örnek olarak verilebilir.

İşletme Zaman Serileri: Haftalık, aylık, yıllık gibi zaman aralıklarındaki satış rakamlarının analizi, gelecekteki satış rakamlarını öngörebilmeleri açısından şirketler için son derece önemlidir. Bu nedenle şirketlerin analizcileri bu verileri zamana bağlı olarak inceler ve o yıl için tahmin edilen satış rakamları ile gerçekleşen satışın yakınlığını karşılaştırabilir ve buna göre tedbir alabilir. Ayrıca reklam harcamalarını incelemek de satış açısından önemli olabilir.

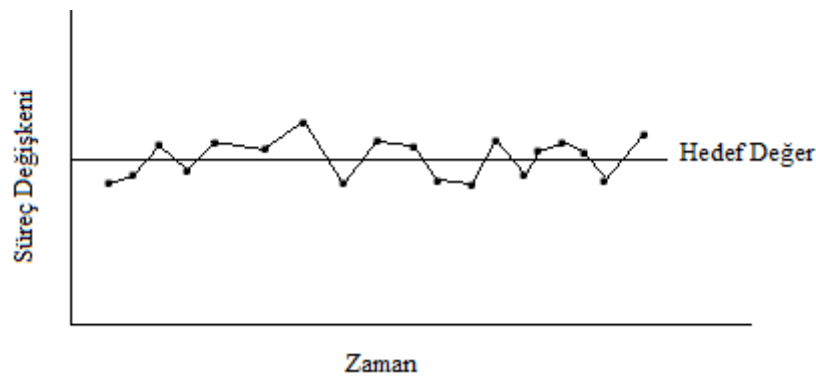
Demografik Zaman Serisi: Bir ülke nüfusunun yapısal durumunun incelenmesi ve verilerin zamana bağlı olarak kaydedilmesi ile oluşan zaman serileri demografik zaman serilerini oluşturur. Belirli zaman aralıklarında doğum ve ölüm ölçümlerinin oluşturduğu seriler örnek olarak verilebilir. Nüfusla ilgili değişimleri kendi analizlerine katarak bu değişimlerden gelecek yıllara ait tahminler sağlamak ve bundan faydalanabilmek için hükümet ve firmalar nüfustaki değişimleri öngörmek isterler. Şekil 2, 2001-2010 yılları arasında aylık olarak ölçülmüş doğum sayılarının zaman grafiğini göstermektedir.

Şekil 2: Türkiye Geneli Aylara Göre Doğum Sayısı Grafiği



Süreç Kontrolü serisi: Süreç kontrolünde ele alınan bir problem, sürecin kalitesini gösteren bir değişkenin ölçülmesi ile üretim sürecinin performansındaki değişikliklerin tespit edilmesi ve incelenmesidir. Bu ölçüm daha çok, belirlenen bir hedeften ne kadar ve hangi yönde sapmanın olduğunu ve hedefe yönelik nasıl bir yöntem ile düzeltileceğini anlamaya yöneliktir. Şekil 3 'deki gibi ölçümler zamana karşı çizilerek grafik oluşturulmuştur. Belirlenen hedeften sapmalar incelenerek uygun olan düzeltmeler yapılmaya çalışılmıştır (Chatfield, 1989: 3).

Şekil 3: Süreç Kontrol Grafiği

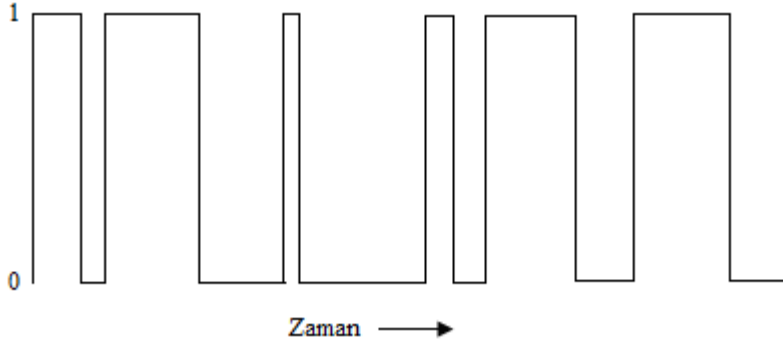


Kaynak: Chatfield, 1989, s.3

İkili Süreçler: Gözlemler 0 veya 1 gibi yalnızca iki değerden birisini alabildiğinde zaman serisinin özel bir biçimi ortaya çıkar. Bu tür zaman serisi verileri ikili süreç olarak adlandırılır. Bu tür verilere genellikle iletişim sektöründe rastlanır.

Örneğin bir elektrik düğmesinin açık ve kapalı olmak üzere iki durumu söz konusudur ve kapalı ise 0, açık ise 1 olarak kaydedilerek Şekil 4 ‘deki gibi bir grafik oluşturulur.

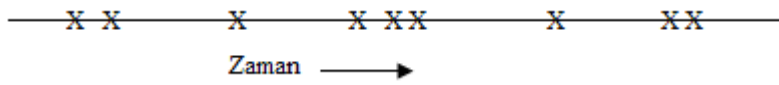
Şekil 4: İkili Süreç Grafı



Kaynak: Chatfield, 1989, s.4

Nokta Süreçler: Bir dönem içerisinde rastgele meydana gelen olayların serileri nokta süreçlerini oluşturur. Örneğin belirli bir dönem içerisinde depremler, sel felaketleri gibi doğal afetler, bir yolcu uçağının bir yıllık dönem içerisinde arızalandığı aylar, uçak kazalarının demir yolu felaketlerinin gerçekleştiği zamanlar, Şekil 5’ deki gibi nokta süreci olarak gösterilebilir.

Şekil 5: Nokta Süreci



Kaynak: Chatfield, 1989, s.4

1.2. ZAMAN SERİSİ ANALİZİ

Zaman serileri analizi, zaman içinde düzenli aralıklarla gözlemlenen verilerin istatistiksel olarak incelenmesini ve gelecek dönemlerde elde edilecek verilerin öngörüsünün güvenilir bir şekilde yapılabilmesini sağlamaktadır.

Zaman serileri analizindeki ilk ve en önemli adım zamana karşı çizilen verilerin grafiğini oluşturmaktır. Grafiği incelemek, veriyi tanımak ve uygun bir model oluşturmak için son derece önemlidir. Ayrıca grafik seride trend, mevsimsel dalgalanmalar ve sapan değerler gibi önemli özelliklerin görülmesini sağlayacaktır. Ancak grafiğin oluşturulması aşamasında ölçek seçimleri, veri uzunluğunun belirlenmesi ve noktaların grafiğe işaretleme yöntemleri grafiğin görünümünü, yapılacak olan bir yanlış da analizi etkileyeceğinden dolayı analistin dikkatli olması gerekmektedir. Ayrıca grafiği tam olarak ifade eden bir başlığın seçilmesi ve açıkça etiketlenen eksenlerin ölçüm birimlerinin de belirtilmesi gerekmektedir.

1.2.1. Zaman Serisinin Bileşenleri

Zaman serisi analizinin geleneksel yöntemleri temel olarak serideki trend, mevsimsel varyasyon, konjonktürel değişimler ve düzensiz dalgalanmalarla ilgilendir. Bu yaklaşım her zaman en iyisi olmasa bile varyasyonun, eğilimden ya da mevsimsellikten etkilendiği durumlarda önemli olabilmektedir. Zaman serilerinin grafikleri incelendiğinde, serinin yapısında bazı düzensizliklerle karşılaşmaktadır. Bu düzensiz hareketler;

- Uzun dönem eğilimi (trend),
- Mevsimsel dalgalanmalar,
- Konjonktürel dalgalanmalar
- Düzensiz (random walk) hareketler

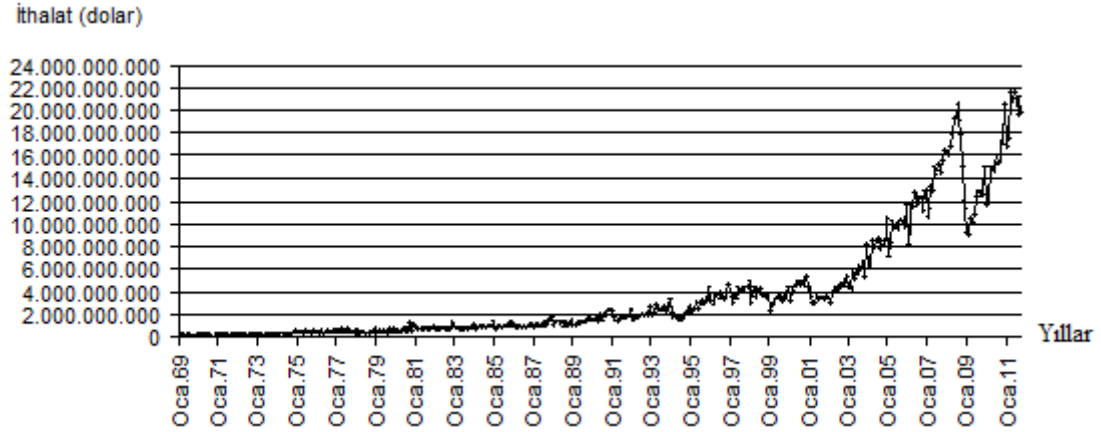
olmak üzere dört temel faktörden kaynaklandığı bilinmektedir (Enders, 2004: 3). Bu dört bileşen ayrıntılı bir şekilde aşağıda incelenmiştir.

Trend

Trend, seride yer alan değerlerin uzun bir zaman içinde artış ya da azalışlarını ifade eder (Akdeniz, 2007: 519). Genel bir kural olarak gerçek uzun dönem trendini göstermek için 20 yıl ya da daha uzun bir dönemdeki verilere ihtiyaç vardır. Örneğin, iklim değişiklikleri 50 yıl gibi zaman periyodunda bazen mevsimsel değişimler gösterebilir. Sadece 20 yılın verisine sahipsek uzun dönem dalgalanmalar trend gibi

görülebılır. Ancak birkaç yüzyıla ait veriler inceleniyorsa dönem dalgalanmaları rahatça görülebilir. Bu uzun dönem dalgalanmayı ‘trend’ olarak değerlendirmek daha anlamlı olacaktır (Chathield, 1989: 10). Şekil 6 da 1969-2011 yılları arasında, aylık olarak ölçülmüş dolar cinsinden ihracat fiyatlarının zamana karşı çizilmiş grafiğı gösterilmektedir. Zaman içinde ihracat değerleri genel bir artış eğilimindedir. Yani artan bir trend söz konusudur.

Şekil 6: Türkiye’nin 1969-2011 Yılları Arasında Aylık Olarak Ölçülmüş Dolar Cinsinden İthalat Değerlerinin Grafiğı.

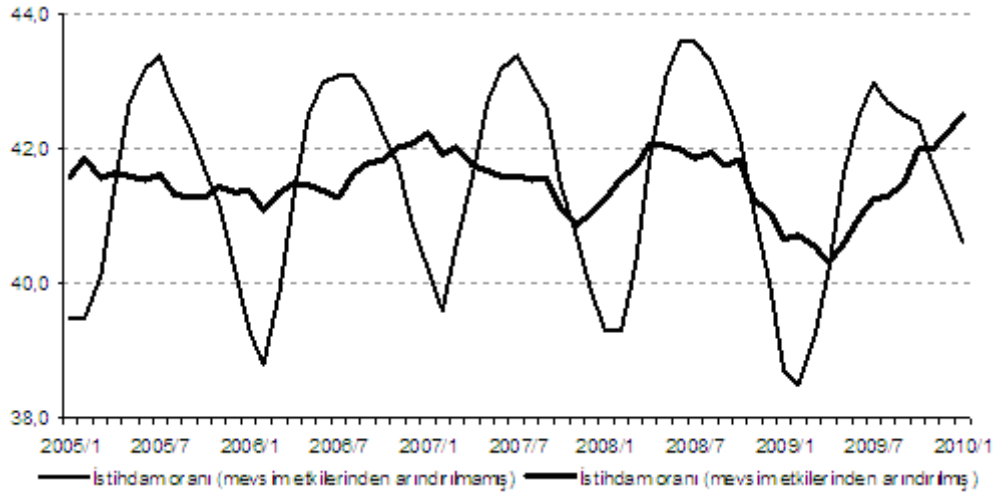


Mevsimsel Dalgalanmalar

Bir çok zaman serisi sabit bir süre ile kendini tekrar etme eğilimi gösteren döngüsel bir modeli takip eder. Bu tür bir eğilime mevsimsellik, süre olarak döngü uzunluğuna da mevsimsel süre (s ile gösterilir) denilmektedir. Örneğın yıllık seriler şablonu olan aylık seriler için mevsimsel süre $s=12$, çeyreklik seriler için ise $s=4$ olacaktır (Abraham ve Ledolter, 1983: 135).

Serilerde genel olarak mevsimsel dalgalanmalar, özellikle de ekonomide, iş dünyasında ya da hava sıcaklığı gibi doğa bilimlerinde karşımıza çıkmaktadır. Şekil 7’ de görülen istihdam oranlarının yıllık periyotlarındaki değişimine bakıldığında, kışın düşük yazın ise yüksek bir istihdam oranının gerçekleştiğı söylenebilir. Yıllık olarak mevsimsel varyasyon görülebilir, değişimler ölçülebilir ve verideki mevsimsel olmayan değişkenler incelemek için seriden çıkartılabilir.

Şekil 7: Mevsimsel Etkilerden Arındırılmış Temel İşgücü Göstergeleri



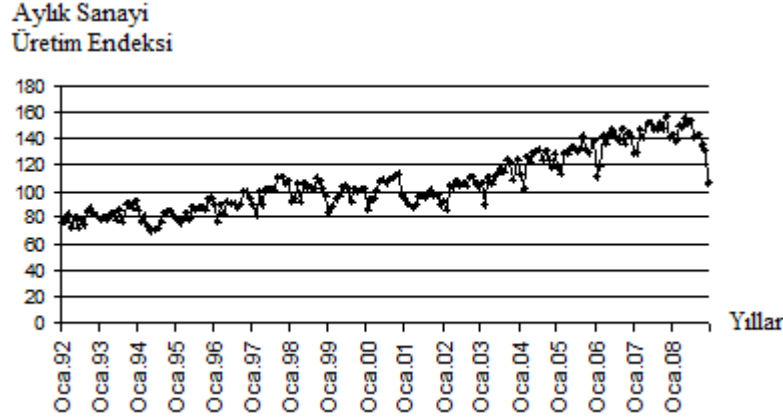
Kaynak: Türkiye İstatistik Kurumu Haber Bülteni, 2010: 1

Konjonktürel Dalgalanmalar

Mevsimsel etkilerden farklı olarak, bazı zaman serilerinde diğer fiziksel nedenlerden dolayı belirli bir zaman periyodunda varyasyonlar meydana gelebilir. Örnek olarak sıcaklıkta oluşan günlük değişimler verilebilir. Ayrıca, belirli bir zaman periyoduna sahip olmayan ama bazı nedenlerle tahmin edilebilir olan zaman serileri de konjonktürel dalgalanmalar gösterebilir (Chatfield, 1989: 9-10).

Konjonktürel dalgalanmalar ile mevsimsel dalgalanmalar arasında benzerlikler vardır ancak konjonktürel dalgalanmalar mevsimsel dalgalanmalara göre daha düzensizdir ve periyodik değildir. Periyodik özelliği gösterebilirler bile dalga boylarının ve sürelerin uzunluğu her periyot da aynı olmamaktadır. Daha çok ekonomide ortaya çıkan konjonktür dalgalanmalar tepe, daralma, dip ve genişleme dönemlerinden oluşmaktadır. Bu dönemler arasındaki süreler mevsimsel dalgalanmaların periyotları arasındaki süreler gibi birbirlerine eşit olmamaktadır. Şekil 8'de Türkiye'nin 1992-2008 yılları arasında aylık olarak ölçülmüş sanayi üretim endeksleri gösterilmiştir. Görüldüğü gibi eşit, bir yıllık periyotlara bakıldığında dalga boylarının uzunluğu aynı değildir. Ayrıca artan bir trend eğrisi etrafında dalgalanmaktadır.

Şekil 8: 1992-2008 Yılları Arasında Aylık Olarak Ölçeklendirilmiş Türkiye'nin Sanayi Üretim Endeksi Grafiği



Düzensiz (Tesadüfi) Dalgalanmalar

Belirsiz zamanlarda geçici ve rastgele nedenlerle ortaya çıkan dalgalanmalar, düzensiz ya da rastgeledir (Akdeniz, 2007: 520). Bu dalgalanmaların ne zaman hangi şiddette çıkacağı önceden tahmin edilemez. Genelde sel, deprem gibi doğal afetlerde ve savaş, grev, toplu işten çıkarma gibi olaylarda düzensiz dalgalanmalara rastlanır. Elimizdeki seriyi trend ve konjonktürel dalgalanmalardan arındırdıktan sonra geriye rassal olan yada olmayan artık serisi kalacaktır. Düzensiz dalgalanmaları çeşitli modellerle, otoregresif ve hareketli ortalama gibi, açıklanabilmesi için bir çok tekniğin incelenmesi gerekir. Ayrıca trend ve konjonktürel dalgalanmaları çıkardıktan sonra artıklar arasında konjonktürel dalgalanmaların var olup olmadığının görülmesi içinde önemli olacaktır.

Yukarıda da bahsedildiği gibi zaman serisinden trendi, konjonktürel dalgalanmaları, mevsimsel dalgalanmaları ve diğer düzensiz dalgalanmaları arındırdıktan sonra, analizden elde edilecek sonuçlar daha iyi yorum yapılabilmesini sağlayacaktır. Ayrıca zaman serisi verilerin analiz edilmesinde kullanılan bazı istatistiksel testlerin de uygulanabilmesi için çeşitli varsayımlar karşımıza çıkmaktadır. Örneğin (1) verilerin normal dağılımlı olmamasına karşın uygulanacak bir çok istatistiksel testin normal dağılım varsayımı altında geçerli olması, (2) bazı testlerde parametre varsayımı olarak varyansların eşit olmasını gerektirmesi ve (3) mevsimsel etkinin yıldan yıla sabit tutulması gerektiğinde verilerin dönüştürülmesi

önerilir. Veri setindeki herhangi bir değişkene dönüşüm uygulanmak istenirse, o değişkenin tüm verilerine aynı matematiksel işlemin (logaritması, karesi ya da karekökleri gibi dönüşümler) uygulanması gerekmektedir.

Trend ve mevsimsel değişkenlikleri yapısında bulunduran serilerin, yukarıda bahsedilen üç nedenden dolayı dönüşümünü sağlayan bazı yöntemler mevcuttur. Bu yöntemlerden eğri uydurma, filtreleme ve fark alma, genellikle kullanılan yöntemlerdir. Bu çalışmada fark alma yöntemi kullanıldığından dolayı filtreleme ve eğri uydurma yöntemleri açıklanmamış ancak fark alma yöntemine aşağıda kısaca değinilmiştir.

Fark alma Yöntemi: Trendi ortadan kaldırmak için zaman serilerinde sabit varyans özelliğini sağlamak için, durağan hale gelinceye kadar, serinin farkı alınır. Mevsimsel olmayan seriler için birinci farkını almak, kolay anlaşılır bir durağanlığı gözlemleyebilmek için yeterlidir. X_t serisinin birinci farkı $\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$ formülü ile gösterilir. Birinci farkı almak daha yaygın olmakla birlikte, durağanlığın sağlanamadığı durumlarda serinin ikinci farkını almak gerekebilir ve aşağıdaki $\nabla^2 X_t$ formülü ile gösterilir.

$$\begin{aligned}\nabla^2 X_t &= \nabla (X_t - X_{t-1}) = \nabla X_t - \nabla X_{t-1} \\ &= (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2})\end{aligned}$$

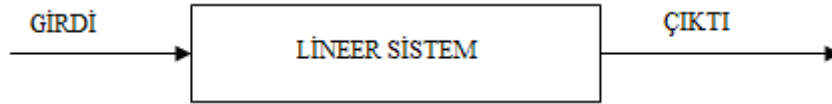
1.2.2. Zaman Serisi Analizinin Amaçları

Açıklama: Zaman serisi analizindeki ilk adım verilerin grafiğini çizerek serinin temel özelliklerini, tamamlayıcı ölçümlerini elde etmek olmalıdır. Elde edilen grafik trendin, mevsimsel değişimlerin, sapan değerlerin ve rastgele gözlemlerin görülmesini sağlayacaktır. Ayrıca karmaşık tekniklere geçmeden önce serinin grafiğinin incelenmesi ön değerlendirme yapılmasını sağlar. Örneğin sapanların olması serinin normal dağılmadığını ya da sıra dışı gözlemlerden, kayıt cihazının teknik bir hatası, bir grevin varlığı sonucunda seriden sapmaları gösterebilir. Aynı zamanda düşüş eğiliminin sonrasında aniden artış eğiliminin olması, yani dönüm

noktalarının olması, serinin iki parçası için farklı modellerin uygulanmış olduğunu söyleyebilir.

Tanımlama: Gözlemler iki ya da daha fazla değişkeni tanımlarsa diğer serilerin varyansını açıklamak için zaman serisinin varyansını kullanmak gerekebilir. Çoklu regresyon modeli bu konuda yarar sağlayacaktır. Lineer sistemin analizi dikkate alınacak olursa doğrusal bir sistem doğrusal bir operasyon ile bir girdi, bir çıktı üzerine gözlemler verildiğinde doğrusal sistemin özellikleri değerlendirilebilir. Örneğin deniz seviyesi nasıl sıcaklık ve basınçtan etkileniyorsa, satışlar da ekonomik koşullardan ve fiyatlardan etkilenir. Doğrusal bir sistemin şematik gösterimi Şekil 9 da gösterilmiştir (Chatfield, 1989: 6).

Şekil 9: Doğrusal Bir Sistemin Şematik Gösterimi



Kaynak: Chatfield, 1989, s.6

Tahmin: Zaman serilerinin en önemli amacı serilerin ileriye dönük tahmin amacıyla analiz edilmesidir. Zamana bağlı olan olayların geçmiş ve bugünkü dönem gözlem değerlerine dayanarak belirli varsayımlar altında bu olayların gelecek dönemlerde alabileceği değerlerin belirlenmesi işlemine tahmin denilmektedir (Harold, 1963: 449).

Tahmin aşması ekonomik ve endüstriyel zaman serilerinin analizinde ve firmanın gelecek dönemlerdeki satışlarının tahmin edilmesinde son derece önemlidir. Ayrıca belirli bir hedefe etkide bulunacak bir üretim süreci tahmin edilirse, uygun bir düzeltici etki alınabilmesi açısından kontrol problemlerinde genellikle tahminleme yapılır.

Kontrol: Serinin gelecek değerleri kestirilir ve elde edilen parametreler kullanılarak hedef sürecini ne kadar yakalayıp yakalayamadığı kontrol edilir. İstatistiksel kalite kontrolünde uygulanan çeşitli kontrol kartları kontrol sürecinde yardımcı olabilir.

1.3. ZAMAN SERİLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

1.3.1. Sürekli ve Kesikli Zaman Serisi

İncelenen zaman serilerinin gözlem değerleri zaman içinde devamlı olarak elde ediliyorsa, meydana gelen seri sürekli zaman serisidir. Bu tür seriler genellikle zaman içinde eşit olmayan aralıklarla elde edilen gözlem değerlerinden oluşur. Eğer gözlem sadece belirli zaman aralıkları ile yapılıyorsa, böyle serilere kesikli zaman serileri denir. Kesikli zaman serileri genellikle eşit zaman aralıklarıyla yapılan gözlem değerlerinden oluşur. Uygulamada en çok üzerinde çalışılan zaman serileri kesikli zaman serileridir (Kayım, 1985:12). Gözlemlerin sürekli olduğu durumlarda aşağıda verilen üç yolla sürekli zaman serisi, kesikli hale dönüştürülebilir.

(1) Sürekli zaman serisinden örnekleme yapılarak; Sürekli bir zaman serisi verildiğinde zamanın eşit aralıklarında meydana gelen değerler sayısallaştırılarak kesikli bir zaman serisi oluşturulabilir.

(2) Bir değişkenin değerini belli bir zaman diliminde gözleyerek; Bir zaman periyodu üzerindeki bir değişkenin değerlerinin kayda geçilerek, günlük ya da bir aylık oluşturulmuş yağış miktarları kesikli bir zaman serisini oluşturur (Box, Jenkins ve Reinsel, 1994: 22)

(3) Doğasında kesikli yapıya sahip zaman serileri; şirketlerin hissedarlarına ödediği yıllık kar payı örnek olarak verilebilir.

1.3.2. Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Zaman serileri

White-Noise, Otoregresif (AR), Hareketli Ortalama (MA), Otoregresif - Hareketli Ortalama (ARMA) ve Farkı Alınmış Otoregresif - Hareketli Ortalama (ARIMA) süreçleri doğrusal zaman serisi modelleridir. Bu modellerden AR, MA ve ARMA doğrusal durağan modeller, ARIMA ise doğrusal ancak durağan olmayan modellerdir. Modellerin oluşturulabilmesi için serinin durağan olması gerekir. Eğer seri durağan değilse serinin durağan hale getirilmesi gerekmektedir (durağanlığın tanımı 1.3.3 başlığı altında detaylı olarak incelenmiştir).

Doğrusal olmayan modeller ise Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (ARCH) Modeli, Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (GARCH) Modeli, Parametrik Olmayan Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (NARCH) Modeli, Eşik Otoregresif (Threshold Autoregressive = TAR) Modeli ve Parametrik Olmayan Otoregresif (NAR) Modeli' dir. Doğrusal olmayan bir seriye doğrusal bir model uyguladığımız zaman yanıltıcı sonuçlar elde edilecektir. Bu yüzden analizcinin çeşitli doğrusallık testleri uyguladıktan sonra modelin hangisine uyum sağladığını belirlemesi gerekmektedir. Doğrusal olmayan modeller bu çalışmanın konusu olmadığından bu konuyla ilgili detaylı açıklamalara yer verilmemiştir.

Bu çalışmanın ikinci bölümde doğrusal zaman serisi modellerinden AR, MA, ARMA, ARIMA süreçleri ele alınmıştır. Ancak konunun sınıflandırılması durağan ve durağan olmayan zaman serilerine göre yapıldığı için zaman serilerinin diğer bir sınıflandırma biçimi olan durağan ve durağan olmama kavramları detaylı bir şekilde aşağıda incelenmiştir.

1.3.3. Durağan ve Durağan Olmayan Zaman Serisi

1.3.3.1. Durağan Zaman Serisi

Bir zaman serisinin davranışları zamana bağlı olarak değişmiyorsa (serinin şimdiki, gelecekteki ve geçmişteki davranışları birbirine benzerse), serinin durağan olduğunu söyleriz. Daha açık biçimde ifade edersek, X_t serisinin aşağıdaki üç özelliği sağlıyor olması gerekir.

- Serinin sabit bir değer etrafında dağılması (ortalamanın sabit olması)

$$Ortalama = E(X_t) = \mu ,$$

- Sabit bir varyansa sahip olması

$$Varyans = Var(X_t - \mu)^2 = \sigma^2 ,$$

- Gecikmeli iki zaman periyodundaki değişkenlerin kovaryansının, değişkenler arasındaki gecikmeye bağlı olması

$$Kovaryans = E((X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)) = \gamma_k.$$

1.3.3.1.1. Tam (Güçlü) Durağanlık

Zaman serisinin tüm özellikleri (ortalaması, varyansı, kovaryansı ve yüksek dereceden momentleri), zamana göre değişmiyorsa bu serinin tam durağan bir seri olduğu söylenir.

X_t zaman serisinin $t_1, t_2, \dots, t_n$ anlarındaki $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ serisinin ortak dağılımı $(X_{t_1+j}, X_{t_2+j}, \dots, X_{t_n+j})$ serisinin ortak dağılımı ile aynı olduğunda X_t serisi tam durağandır (Chatfield, 1989:28).

1.3.3.1.2. Zayıf (Kovaryans) Durağanlık

X_t serinin ortalaması μ_t ve kovaryansı γ_{jt} , t zamanına bağlı değilse X_t süreci zayıf durağan ya da kovaryans durağan olarak adlandırılır. Ayrıca kovaryans durağanlık ikinci dereceden durağanlık olarak da bilinmektedir (Hamilton, 1994: 45).

$$E(X_t) = \mu$$

$$E(X_t - \mu)(X_{t-j} - \mu) = \gamma_j$$

Örneğin, $X_t = \mu + z_t$ sürecinin ortalaması ve kovaryansı aşağıdaki gibi gösterilmiştir ve bu serinin kovaryans durağan olduğu açıktır (Hamilton, 1994: 44-46).

$$E(X_t) = \mu$$

$$E(X_t - \mu)(X_{t-j} - \mu) = \begin{cases} \sigma^2 & j = 0 \\ 0 & j \neq 0 \end{cases}$$

1.3.3.2. Durağan Olmayan Zaman Serisi

Zaman serileri yukarıda tanımlanan özellikleri genellikle sağlamamaktadır. Seri azalan veya artan bir trendi, konjonktürel ve mevsimsel dalgalanmalar gibi etkileri barındırıyorsa, bütün bu etkiler serinin ortalamasının değişmesine neden olacaktır. Böyle bir durumda seri durağan değildir ve otokorelasyonlar önemli ölçüde sıfırdan sapar. Zaman serilerini uygun bir modelle ifade edebilmemiz için ise bu serinin önce durağan hale getirilmesi gerekir. Ayrıca zaman serilerinin, olasılık teorilerinin büyük bir kısmı durağan zaman serileri ile ilgilidir ve bu nedenle zaman serisi analizinde bu teorileri kullanabilmek için durağan olmayan serilerin durağan hale dönüştürülmesi gerekir.

1.4. ZAMAN SERİSİNDE KULLANILAN TEMEL TEKNİKLER

1.4.1. Otokovaryans Katsayısı ve Fonksiyonu

Bir zaman serisinin X_t ile X_{t+k} gibi belirli bir k gecikmesiyle birbirinden bağımsız iki değer arasındaki ilişkiye “otokovaryans”, bu ilişkinin derecesini ölçen ve c_k ile gösterilen katsayıya da “otokovaryans katsayısı” denir ve 1.1 formülü ile gösterilir. Otokovaryans katsayılarının k gecikmesine bağlı olduğu fonksiyona “otokovaryans fonksiyonu” denir.

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}) \quad (1.1)$$

1.4.2. Otokorelasyon Katsayısı ve Fonksiyonu

Zamana göre elde edilen ardışık gözlemler kümesinde farklı zaman aralıklarına sahip gözlemler arasındaki ilişkinin derecesini ölçmek için kullanılan katsayıya “otokorelasyon katsayısı” denir.

Zaman serilerinin özelliklerini anlamada kullanılan önemli bir kılavuz, tahminler ile farklı mesafeler arasındaki korelasyonu ölçen örnek otokorelasyon

bileşenleridir. Bu bileşenler genelde veriyi oluşturan olasılık modelleri için bir öngörü sağlar. N tane çift gözlemleri verilen x ve y gibi iki değişkenin korelasyon bileşeni 1.2 formülünde gösterilmiştir (Chatfield, 1989: 18-20).

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left[\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2 \right]}} \quad (1.2)$$

Bu formül örneğin bir ürünün satışı ve fiyatı arasında bir ilişki olup olmadığını ya da ilişki (korelasyon) varsa ne yönde olduğunu görebilmek için uygulanabilir. Ancak zaman serilerinde ardışık gözlemlerin korelasyonunun bulunabilmesi için 1.3 denklemi uygun olacaktır. Serinin $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ şeklinde gösterilen N tane gözlemden oluştuğu varsayılırsa, ardışık gözlemler ile $(N-1)$ çift gözlem, $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{N-1}, x_N)$ şeklinde sıralanır. İlk çifte göre (x_t, x_{t+1}) arasındaki korelasyon bileşeni 1.3 eşitliğindeki gibi olur.

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{N-1} (x_t - \bar{x}_{(1)})(x_{t+1} - \bar{x}_{(2)})}{\sqrt{\left[\sum_{t=1}^{N-1} (x_t - \bar{x}_{(1)})^2 \sum_{t=1}^{N-1} (x_{t+1} - \bar{x}_{(2)})^2 \right]}} \quad (1.3)$$

$$\bar{x}_{(1)} = \sum_{t=1}^{N-1} x_t / (N-1) \quad (\text{ilk } (N-1) \text{ gözlemin ortalaması})$$

$$\bar{x}_{(2)} = \sum_{t=2}^N x_t / (N-1) \quad (\text{son } (N-1) \text{ gözlemin ortalaması})$$

$$\bar{x}_{(1)} \simeq \bar{x}_{(2)} \text{ ve } \bar{x} = \sum_{t=1}^N x_t / N \text{ olan genel ortalamaya yakınsadığından dolayı 1.3}$$

eşitliği daha basit hale dönüştürülebilir.

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{N-1} (x_t - \bar{x})(x_{t+1} - \bar{x})}{(N-1) \sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x})^2 / N} \quad (1.4)$$

Örnek hacmi büyük olduğunda ise 1.4 formülünü daha basit hale getirilebilir ve bu çalışmanın devamında kullanılmış olan eşitlik 1.6 da gösterilmiştir.

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{N-1} (x_t - \bar{x})(x_{t+1} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x})^2} \quad (1.5)$$

Bu formül ilk fark çiftleri (x_t, x_{t+1}) arasındaki otokorelasyon değerini verir. Formülü k farklı mesafedeki gözlemler arasındaki korelasyonu bulmak için genelleştirilirse, k aralığındaki otokorelasyon, 1.6 formülündeki gibi gösterilmiştir.

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x})^2} \quad (1.6)$$

Uygulamada ise genellikle otokorelasyon bileşenleri otokovaryans bileşenlerinin hesaplanması ile bulunur. k aralığındaki kovaryans bileşeni c_k gösterimi ile ifade edilmiştir.

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})$$

$k = 1, 2, \dots, m$ ve $m \ll N$ olmak üzere $r_k = c_k / c_0$ hesaplanarak otokorelasyon bileşenlerini hesaplanabilir. Ancak $k \gg N/4$ olduğu durumlarda kovaryans bileşenini hesaplamada aşağıdaki formülü kullanılır. N 'nin büyük değerleri için çok küçük farklar söz konusu olduğunda formüldeki değişim önemli olmayacaktır.

$$c_k = \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})$$

1.4.3. Korelogram ve Korelogramın Yorumlanması

Otokorelasyon değerlerinin (r_k), k aralığına karşı yerleştirilerek oluşturulan grafiğe korelogram adı verilir. Bir zaman serisinin yapısını görebilmek için analize başlamadan önce korelogramının incelenmesi önerilir. Korelogramın yorumlanmasının kolaylaştırılması için aşağıda açıklamalarda bulunulmuştur.

Rassal Serilerin Korelogramı: Bir zaman serisinin yapısında trend, mevsimsel dalgalanmalar ve konjonktürel dalgalanmalar bulunmuyorsa serinin rastgele dağıldığı söylenebilir. N hacmindeki bu rassal serinin otokorelasyonlarının sıfırdan farklı her k değeri için yaklaşık olarak sıfır ($r_k \approx 0$) olması beklenir. Ayrıca rassal bir zaman serisi için r_k yaklaşık olarak $N(0,1/N)$ dağılımı göstereceğinden dolayı r_k 'nın ilk 20 değerinden 19 'unun $\pm 2/\sqrt{N}$ sınırlarının arasında olması beklenir.

Kısa Dönem Korelasyonu: Uzun gecikmelerdeki r_k değerleri sıfıra yaklaştırmaya eğilimlidir. Buna örnek bir korelogram Şekil 10(a) da gösterilmektedir. Ortalamanın üzerinde gözlemi olan bu gibi korelograma bir yükselim veren zaman serisi, ortalamanın üzerinde yer alan gözlemler tarafından takip edilen bir ya da daha fazla gözlem tarafından takip edilmeye eğilimlidir. Benzer bir biçimde ortalamanın altındaki gözlemler için de durum aynıdır.

Alternatif Yönlü Dalgalanan Seriler: Bir zaman serisinin birbirini izlemeye eğilimi varsa, genel ortalamanın farklı taraflarındaki ardışık gözlemler ile birlikte, korelogramın da birbirini izlemeye eğilimi vardır. r_1 değeri negatif olmasına rağmen, iki gecikmedeki gözlemlerin ortalama ile aynı tarafta olma eğilimi olduğu için r_2 değeri pozitif olacaktır. Alternatif yönlü dalgalanan zaman serisinin korelogramı Şekil 10(b) de gösterilmektedir (Chatfield 1994: 22).

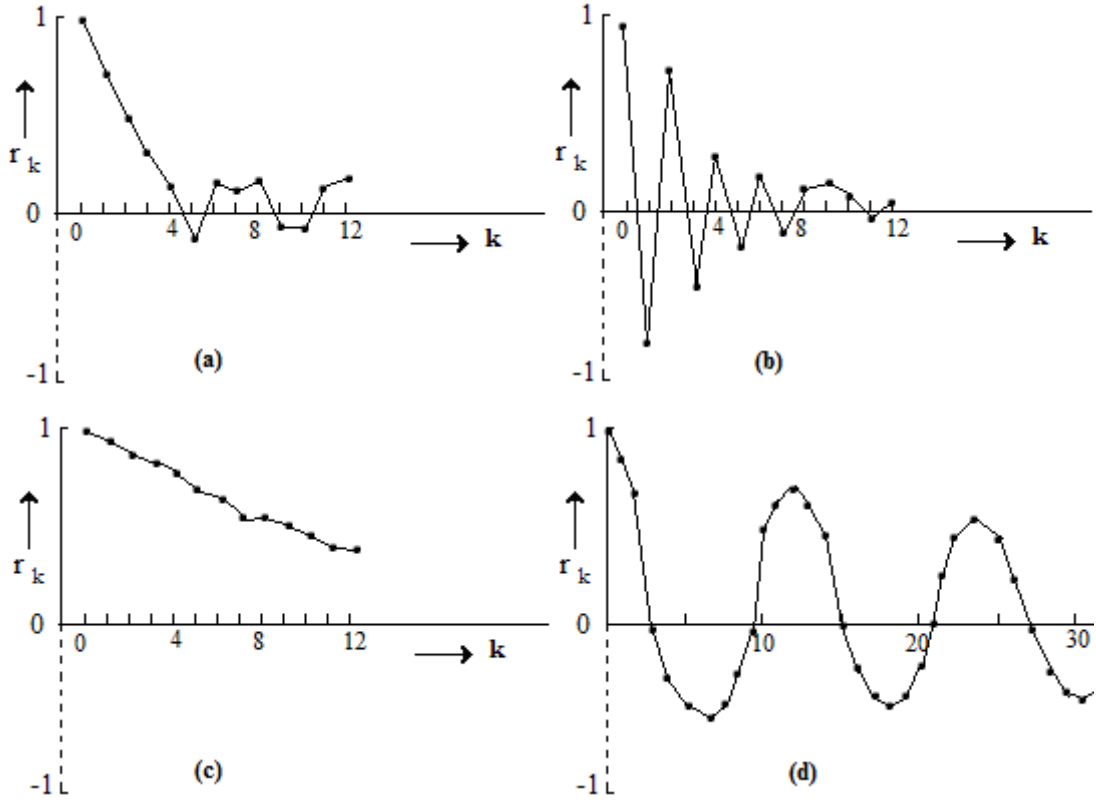
Durağan Olmayan Seriler: Eğer bir zaman serisi trend içeriyorsa r_k değerleri, aralığın çok geniş değerleri haricinde sıfırın altına düşmeyecektir. Bunun

nedeni, genel ortalamanın bir tarafındaki gözlemlerin, yüksek miktarda takip eden gözlemlerinin de, trend nedeniyle ortalama ile aynı tarafla bulunma eğilimindedir. Durağan olmayan zaman serisinin korelogramı Şekil 10(c) de gösterilmektedir. Eğer seri durağan hale getirilirse korelogram daha yararlı bilgiler sunacaktır.

Mevsimsel Dalgalanmalar: Bir zaman serisi mevsimsel dalgalanmalar içeriyorsa, korelogramı da aynı frekansta bir salınım ortaya koyacaktır. Örneğin, aylık bir veride r_{12} değeri büyük ve pozitifken, r_6 değeri büyük ve negatif olacaktır. Eğer seri sinüsodiyal bir şekli takip ediyorsa, r_k değerleri de aynı şekilde olacaktır. Şekil 10(d) mevsimsel dalgalanmalar içeren serilerin korelogramına örnektir. Korelogramın sinüsodiyal şekli görülmektedir ancak mevsimsel veriler için bu tür bir korelogram çok az bilgi sunar. Eğer mevsimsel varyasyonlar veriden çıkartılırsa, korelogramdan daha yararlı bilgiler elde edilir.

Sapan Değer: Bir kitleden çekilen örnekleme bir veya birkaç gözlemin beklenmedik şekilde diğer gözlemlerden farklı olması, sapan değerler olarak tanımlanır. Bu farklı gözlemler, ölçme ve kaydetme işlemindeki gibi kişi hatalarından kaynaklanmışsa, hataların ortadan kaldırılması için bazı işlemler yapılmalıdır. Eğer sapan değerler üzerinde bir ayarlama yapılmadıysa korelogramı bundan ciddi bir biçimde etkilenecektir. Örneğin zaman serisinin içinde sadece bir tane sapan değer varsa ve bir düzeltme yapılmadıysa, grafik iki adet uç nokta içerecektir ve bu noktalar örnek korelasyon bileşenini sıfıra doğru götürecektir. Eğer seride iki adet sapan değer varsa bu daha da belirgin olacaktır (aralığın, sapanlar arasında kalan mesafeyle eşit olduğu durumlar haricinde) (Chatfield, 1989: 24).

Şekil 10: Farklı Serilerde Korelogram Örnekleri: (a) Kısa Dönem Korelogramı, (b) Alternatif Yönlü dalgalanan Serilerin Korelogramı, (c) Durağan Olmayan Serilerin Korelogramı, (d) Mevsimsel Serilerin Korelogramı.



Kaynak: Chatfield, 1989, s. 21-24

1.4.4. Kısmi Otokorelasyon Katsayısı ve Fonksiyonu

Kısmi Otokorelasyon, diğer gecikmeli değişkenlerin etkisi sabit kalmak şartı ile x_t değişkeni ile bu değişkendeki gecikmeli olarak türetilen herhangi bir $x_{t+1}, x_{t+2}, x_{t+3}, \dots$ değişkeni arasındaki ilişkiyle ilgilidir. Kısmi Otokorelasyon katsayısı bu ilişkinin derecesini belirler ve ± 1 arasında bir değer alır ve otokorelasyon katsayısı gibi yorumlanır. $k = 1, 2, 3, \dots$ değerleri için otokorelasyon katsayıları $\phi_{11}, \phi_{22}, \dots, \phi_{kk}$ simgeleri ile gösterilir.

$$x_t = \phi_{k1} x_{t-1} + \dots + \phi_{kk} x_{t-k} + a_t$$

Bir gecikmeli kısmi otokorelasyon katsayısı ϕ_{11} ile gösterilmiştir

$$x_t = \phi_{11} x_{t-1} + a_t .$$

İki gecikmeli kısmi otokorelasyon katsayısı ise ϕ_{22} ile gösterilmiştir

$$x_t = \phi_{21} x_{t-1} + \phi_{22} x_{t-2} + a_t .$$

$k = 1, 2, \dots$ için sırasıyla kısmi otokorelasyon katsayıları $\phi_{11}, \phi_{22}, \dots, \phi_{kk}$ formülleri ile gösterilmiştir (Wie, 1994: 15).

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \rho_1 \\ \phi_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \\ \phi_{33} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_3 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \\ \phi_{kk} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Kısmi Otokorelasyon katsayıları, AR süreci için model parametrelerinin derecesinin belirlenmesinde kullanılır ve ayrıca uygun model belirlenmesinde kullanıldığından dolayı önemlidir. Ancak bu konu daha sonraki bölümde anlatılmıştır.

İKİNCİ BÖLÜM

ZAMAN SERİSİ OLASILIK MODELLERİ

2.1. DURAĞAN STOKASTİK SÜREÇLER

Bu bölümde zaman serilerinin bazı olasılık modelleri ele alınmaktadır. Bunlar stokastik süreç olarak adlandırılmış, durağan ve durağan olmama durumuna göre sınıflandırılmıştır. Öncelikle stokastik sürecin nasıl açıklandığından bahsedilmiş, durağanlığı tanımlanmış ve otokorelasyon fonksiyonunun genel özellikleri verilmiştir. Daha sonra durağan stokastik süreçlerden, *white noise süreci*, *hareketli ortalama (MA) süreçleri*, *otoregresif (AR) süreçleri* ve *otoregresif-hareketli ortalama (ARMA) süreçleri*, daha ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Stokastik süreç kesikli ya da sürekli olabilen rastgele değişkenler topluluğudur. ‘ t ’ zamanında rastgele değişkeni; eğer zaman sürekli ise t , $-\infty$ ile $+\infty$ arasında bir değer alır ve $X(t)$ ile gösterilir; eğer zaman kesikli ise $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ değerlerini alarak X_t ile gösterilir. İstatistiksel problemler genelde bir örnekten popülasyonun özelliklerini tahmin etme ile ilgili olduğundan, zaman serisinin sonsuz kümesinin sadece bir örneği olarak gözlemlenen zaman serisi hesaba katılacaktır. Bu zaman serisindeki gözlemler kesikli ise $t = 1, 2, \dots, N$ ‘e kadar olmak üzere x_t , sürekli ise $0 \leq t \leq T$ olmak üzere $x(t)$ olarak gösterilmektedir.

Bir stokastik süreci tahmin etmenin bir yolu $t_1, \dots, t_n$ gibi bir serinin $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ birleşik olasılık dağılımını tanımlamaktır. Stokastik süreci tanımlamanın daha basit bir yolu ise momentlerini oluşturmaktır. Bu momentler; ortalama, varyans ve otokovaryans fonksiyonları olarak adlandırılan birinci ve ikinci momentlerdir (Chatfield, 1989: 27).

Ortalama fonksiyonu; $\mu_t = E(X_t)$

Varyans fonksiyonu; $\sigma_t^2 = Var(X_t)$

Otokovaryans fonksiyonu; $Cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = \gamma(t_1, t_2) = E\{(X_{t_1} - \mu_{t_1})(X_{t_2} - \mu_{t_2})\}$

2.1 eşitlikleri, k gecikmeli otokovaryans fonksiyonu (ACVF), γ_k ile, otokovaryanstan elde edilen otokorelasyon fonksiyonu (ACF) da ρ_k ile gösterilmektedir.

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E\{(X_k - \mu)(X_{t+k} - \mu)\} \\ &= Cov(X_t, X_{t+k})\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$$

Birinci bölümde açıklanan durağanlık kavramı hatırlanacak olursa; Bir stokastik sürecin ortalamasının ve varyansının zaman içinde değişmediği ve iki dönem arasındaki kovaryansın, bu kovaryansın hesaplandığı döneme değil de yalnızca iki dönem arasındaki uzaklığa bağlı olduğu süreç durağan bir süreçtir. Durağan stokastik sürecin özelliklerini incelemeye önemli bir araç olan otokorelasyon fonksiyonunun belirgin özellikleri aşağıda incelenmektedir.

Ortalaması $E(X_t) = \mu$, varyansı $Var(X_t) = E(X_t - \mu)^2 = \sigma^2$ olan durağan bir stokastik süreç X_t 'nin, kovaryansının γ_k ve otokorelasyonunun ρ_k olduğunu varsayarak X_t ile X_{t+k} arasındaki kovaryans ve korelasyon aşağıda gösterilmiştir.

$$\gamma_k = Cov(X_t, X_{t+k}) = E\{(X_k - \mu)(X_{t+k} - \mu)\}\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\rho_k &= \frac{E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(X_t - \mu)^2]E[(X_{t+k} - \mu)^2]}} \\ &= \frac{Cov(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{Var(X_t)}\sqrt{Var(X_{t+k})}}\end{aligned}\tag{2.3}$$

Durağan bir stokastik sürecin t dönemindeki varyansı ile $t+k$ dönemindeki varyansı eşit olduğundan, $Var(X_t) = Var(X_{t+k})$, k gecikmeli otokorelasyon katsayısı ile ilgili aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t+k})}{Var(X_t)}$$

$Cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma_k$ ve $Var(X_t) = \gamma_0$ olduğundan $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$ olarak bulunur.

Ayrıca durağan bir stokastik sürecin otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonunun üç özelliği aşağıda görülmektedir (Wei, 1994: 10-11).

1. Özellik: $\gamma_0 = Var(X_t)$; $\rho_0 = 1$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \Rightarrow \rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$$

2. Özellik: $|\gamma_k| \leq \gamma_0$; $|\rho_k| \leq 1$ varyans negatif olmadığı için, λ_1 ve λ_2 sabitleri yardımıyla aşağıdaki gibi ispatlanır. $-1 \leq \rho_k \leq 1$;

$$\begin{aligned} Var[\lambda_1 X_t + \lambda_2 X_{t+k}] &\geq 0 \\ &= \lambda_1^2 Var(X_t) + \lambda_2^2 Var(X_{t+k}) + 2\lambda_1 \lambda_2 Cov(X_t, X_{t+k}) \geq 0 \\ &= (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sigma^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \gamma_k \end{aligned}$$

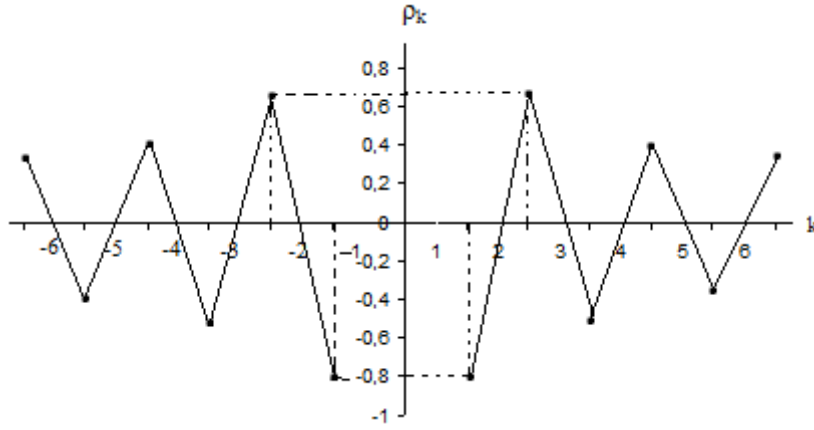
$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 = 1 &\Rightarrow 2\sigma^2 + 2\gamma_k \geq 0 \\ \sigma^2 + \gamma_k &\geq 0 \\ \gamma_k &\geq -\sigma^2 \Rightarrow (\gamma_k = \rho_k \sigma^2) \\ \rho_k \sigma^2 &\geq -\sigma^2 \\ \rho_k &\geq -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 &\Rightarrow 2\sigma^2 - 2\gamma_k \geq 0 \\ \sigma^2 &\geq \gamma_k \Rightarrow (\gamma_k = \rho_k \sigma^2) \\ \sigma^2 &\geq \rho_k \sigma^2 \\ \rho_k &\leq 1 \end{aligned}$$

3. Özellik: $\gamma_k = \gamma_{-k}$ ve $\rho_k = \rho_{-k}$

Bu özellik, X_t ile X_{t+k} arasındaki korelasyonun X_t ile X_{t-k} arasındaki korelasyonla aynı olduğunu belirtir. $\gamma_k = \gamma_{-k}$ ve $\rho_k = \rho_{-k}$, bütün k (gecikmeler) için γ_k ve ρ_k çift fonksiyondur. Bu yüzden Şekil 11 de olduğu gibi $k=0$ da (zaman orijini ile) simetriktir. Yani X_t ile X_{t+k} ve X_t ile X_{t-k} arasındaki farklar aynıdır.

Şekil 11: X_t ile X_{t+k} Arasındaki Korelasyon ve X_t ile X_{t-k} Arasındaki Korelasyon ($k=0$ ' da birbirinin simetriğidir).



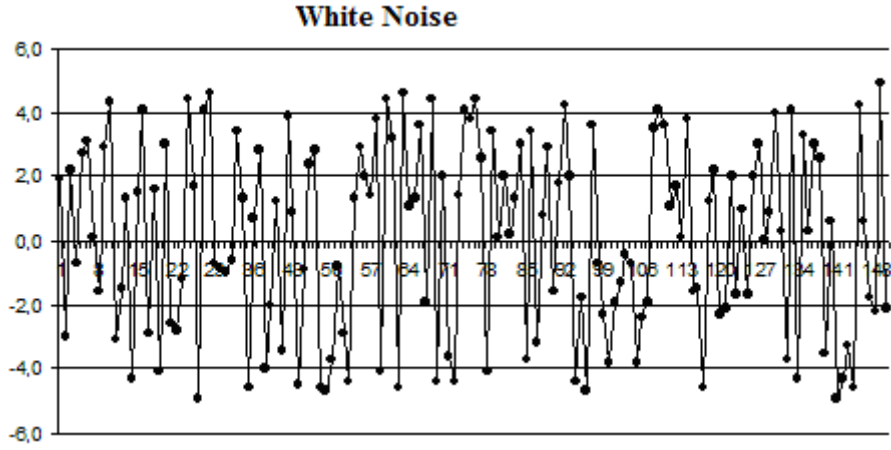
2.1.1. Pür Rassal (White-noise) Süreç

Pür rassal süreç birkaç farklı isimde kullanılsa da en çok bilinen ifadesi ile white-noise (beyaz gürültü) sürecidir. Uygulamalı zaman serisinde hemen hemen hiç karşılaşılmasa da daha karmaşık zaman serisi süreçleri için temel görev yapar. En basit durağan zaman serisi olan bu süreci belirtmek için $X_t = Z_t$, $Z_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$ gösterimi kullanılır.

Stokastik bir süreç $\{Z_t\}$, aşağıdaki üç özelliği sağlıyorsa bir white-noise sürecidir. Böyle bir sürecin grafiği Şekil 12 de gösterilmiştir.

- 1 $\rightarrow$ Sabit ortalama $E(Z_t) = \mu_Z$
 2 $\rightarrow$ Sabit var yans $Var(Z_t) = \sigma_Z^2$
 3 $\rightarrow \gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t+k}) = 0 \quad k = \mp 1, 2, \dots$

Şekil 12: Ortalaması Sıfır ve Varyansı σ^2 , N=81 Olan ve 150 Rastgele Çekime Dayalı Bir Serinin Beyaz Gürültü (White-Noise) Süreci.



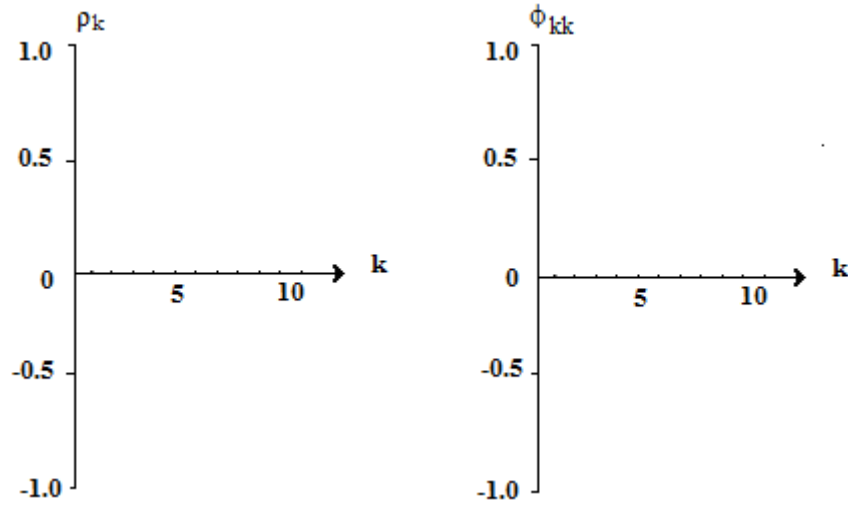
Beyaz gürültü süreci, otokovaryans fonksiyonu ve ortalaması zamana bağlı olmadığı için durağan süreçtir. Bu sürecin otokovaryans fonksiyonu, otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu (ACF ve PACF) aşağıda tanımlanmış ve Şekil 13 de grafikleri gösterilmiştir.

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_Z^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \text{otoko var yans fonksiyonu}$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \text{otokorelasyon fonksiyonu}$$

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \text{kismi otokorelasyon fonksiyonu}$$

Şekil 13: White-Noise Sürecinin ACF ve PACF Grafikleri



Kaynak: Wei, 1994, s.16

2.1.2. Otoregresif (AR) Süreçler

Otoregresif zaman serilerinde serinin şimdiki değerleri geçmiş değerlerinden ve beyaz gürültüden etkilenir. Birçok ekonomik veri otoregresif zaman serisi olarak modellenmektedir. Örneğin bu aya ait enflasyon artış oranı geçen aylarda meydana gelen artış oranları ile ilişkilidir (Akdi, 2003: 40). Otoregresif süreçler AR(p) ile gösterilir. Buradaki “p” otoregresif modelin derecesini göstermektedir. $\{X_t\}$ bir zaman serisi, Z_t de sıfır ortalamalı ve σ_Z^2 varyanslı hata terimlerini bir kümesi olsun. Bu varsayım altında 2.4 eşitliği ile gösterilen denklem birinci dereceden otoregresif AR(1) sürecidir. X_t yalnızca kendi bir önceki dönemdeki değeri olan X_{t-1} değerlerine ve rastsal hataya (Z_t) bağlıdır.

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (2.4)$$

AR(1) modeli p derece ile genellenirse 2.5 eşitliği ile AR(p) modeli gösterilmiş olur.

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t \quad (2.5)$$

2.1.2.1. AR süreçlerinde Durağanlık Göstergesi

AR modelleri 2.5 eşitliğinde görüldüğü şekilde serinin geçmiş değerleri ile yazılabildiği gibi, geriye öteleme operatörü “ B ” kullanılarak da yazılabilir. Aşağıda geriye öteleme operatörünün seriye nasıl etki ettiğini gösterdikten sonra AR(1) ve AR(p) için gerekli işlemler yapılmıştır.

$$BX_t = X_{t-1}$$

$$B^2 X_t = BX_{t-1} = X_{t-2}$$

$$B^3 X_t = BX_{t-2} = X_{t-3}$$

$$\vdots$$

$$B^p X_t = X_{t-p}$$

AR(1) süreci için: $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$$

$$(1 - \phi B) X_t = Z_t$$

$$X_t = Z_t / (1 - \phi B)$$

$$= (1 - \phi B)^{-1} Z_t$$

$$X_t = (1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \dots) Z_t \quad (2.6a)$$

$$X_t = Z_t + \phi Z_{t-1} + \phi^2 Z_{t-2} + \dots \quad (2.6b)$$

AR(p) süreci için: $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$

$$X_t = (\phi_1 BX_t + \phi_2 B^2 X_t + \dots + \phi_p B^p X_t) + Z_t$$

$$= (\phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p) X_t + Z_t$$

$$Z_t = X_t - (\phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p) X_t$$

$$Z_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) X_t \quad (2.7)$$

AR modelinin geriye kaydırma operatörü B kullanılarak ifade edilmesi modellerin durağan olup olmadığını anlamada yardımcı olan bir gösterimdir. 2.7 eşitliğindeki parantez içindeki $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)$ ifadesi, p ‘inci dereceden bir polinomdur. Bu polinomun sıfıra eşitlenmesi ile bulunacak olan köklerin birim çemberin dışına çıkması ile AR(p) sürecinin durağan olduğu söylenebilir. AR süreçlerinin durağanlığının daha iyi anlaşılması için AR(1) modelinin kökleri aşağıda incelenmiştir.

$X_t(1 - \phi_1 B) = Z_t$ olan AR(1) modelinin parantez içindeki ifadesi birinci dereceden bir polinomdur (yani tek bir kökü vardır). Bu polinomun kökü sıfıra eşitlenirse;

$$1 - \phi_1 B = 0$$

$$\phi_1 B = 1$$

$$B = \frac{1}{\phi_1} = \phi_1^{-1} \text{ olarak bulunur.}$$

ϕ_1^{-1} kökünün durağanlık koşulunu sağlaması için $|\phi_1| < 1$ olması gerekir.

AR(2) modelinin geri kaydırma operatörü kullanılarak yazılışı 2.8 eşitliği ile gösterilmiştir.

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t$$

$$X_t = (\phi_1 B + \phi_2 B^2) X_t + Z_t$$

$$X_t - X_t (\phi_1 B + \phi_2 B^2) = Z_t$$

$$X_t (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = Z_t \quad (2.8)$$

AR(2) süreci ikinci dereceden bir polinomdur ve sürecin durağanlığını sağlamak için köklerinin birim çemberin dışında kalması gerekir. Yani ϕ_1 ve ϕ_2 parametrelerinin aşağıdaki eşitliklerini sağlamalıdır (Wei, 1994: 39-40).

$$\phi_2 + \phi_1 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

$$-1 < \phi_2 < 1$$

Yukarıda AR(1) ve AR(2) süreçleri için durağanlığın anlaşılması için yapılan işlemi AR(p) süreci için genellersek, 2.7 eşitliği ile verilen sürecin durağan olabilmesi için sürecin p'inci dereceden polinomun bütün köklerinin mutlak değerce 1' den küçük olması gerekmektedir. Yani, sürecin köklerinden en az bir tanesi 1 veya 1' den büyük ise süreç durağan değildir. Polinomun köklerinden en az bir tanesinin mutlak değerce 1 olması durumu uygulamada çok karşılaşılan bir durumdur ve bu tür serilere birim köklü zaman serileri denir. Ancak köklerin mutlak değerce 1' den büyük olması uygulamada pek karşılaşılan bir durum değildir.

AR süreçlerini ifade ederken ψ ağırlık parametreleri kullanılırsa ϕ parametreleri ile ilişkisi aşağıdaki gibi gösterilmektedir.

$$\phi(B) X_t = Z_t$$

$$\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)$$

$$X_t = \phi^{-1}(B) Z_t = \psi(B) Z_t$$

$$\psi(B) = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots)$$

$$\psi(B) = \frac{1}{\phi(B)} \Rightarrow \phi(B) \psi(B) = 1$$

2.1.2.2. AR(p) Sürecinin ACF, PACF ve Otokovaryans Fonksiyonu

Zaman serisi analizinde, zaman değişkeni olan X_t nin ortalaması, varyansı ve kovaryansının hesaplanması önemli bir başlangıç olmaktadır. Bu üç özellik ile

durağanlığı belirtilmiş ve zaman serisi analizlerinin uygulanabilmesi için durağanlığın sağlanmasının gerekli olduğu birinci bölümde bahsedilmiştir. Otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu durağanlığın belirlenmesinde ve üçüncü bölümde anlatılacak olan model seçim ölçütlerinde sıklıkla değerlendirilecek bir değişken olacaktır.

Zaman serisi modelleri bir başlangıç noktası olmak üzere sonsuz bir geçmişte başlayıp sonsuz bir gelecekte devam edecek olan X_t 'nin ortaya çıkma süreci varsayımına dayanmaktadır. Geçmiş ve gelecekteki rastsal değişkenler örneklemin gözlemlerinde $X_1, X_2, \dots, X_N$ olduğu gibi aynı olasılık yoğunluk fonksiyonunu takip eder. Bu nedenle bütün rastsal değişkenlerin geçmiş, bugün ve gelecek değerlerine bakılmaksızın aynı ortalama ve varyansa sahip oldukları varsayılır. Ayrıca X_t ile X_{t+k} arasındaki kovaryansın zamana bağlı olmadığı ancak iki değişken arasındaki gecikmeye bağlı olduğu varsayılır (Griffiths, Hill ve Judge, 1993: 642-643). Bu açıklamalara göre AR(1) sürecinden başlanarak varyans, otokovaryans, otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonları incelenmiştir.

AR(1) süreci; $X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$ eşitliğinin her iki tarafının varyansı alınırsa 2.9 eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned}
 Var(X_t) &= \sigma_X^2 = Var(\phi_1 X_{t-1} + Z_t) \\
 &= \phi_1^2 Var(X_{t-1}) + Var(Z_t) \\
 \sigma_X^2 &= \phi_1^2 \sigma_X^2 + \sigma_Z^2 \\
 \sigma_Z^2 &= \sigma_X^2 - \phi_1^2 \sigma_X^2 \\
 \sigma_Z^2 &= \sigma_X^2 (1 - \phi_1^2) \\
 \sigma_X^2 &= \sigma_Z^2 / (1 - \phi_1^2)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Otokovaryans fonksiyonu; $\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} \quad k \geq 1$

$k = 0$ olduğunda $\gamma_0 = \sigma_X^2$, $\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 = \phi_1 \sigma_X^2$

Otokorelasyon fonksiyonu; $\rho_1 = \phi_1$ dir.

Kısmi otokorelasyon fonksiyonu; $\phi_{kk} = \begin{cases} \rho_1 = \phi_1, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$

AR(2) süreci; $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t$

$$Var(X_t) = \sigma_X^2 = Var(\phi_1 X_{t-1}) + Var(\phi_2 X_{t-2}) + Var(Z_t)$$

$$Var(X_t) = \phi_1^2 Var(X_{t-1}) + \phi_2^2 Var(X_{t-2}) + Var(Z_t)$$

$$\sigma_X^2 = \phi_1^2 \sigma_X^2 + \phi_2^2 \sigma_X^2 + \sigma_Z^2$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_X^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \sigma_Z^2$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 (1 - \phi_1^2 - \phi_2^2)$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_Z^2 / (1 - \phi_1^2 - \phi_2^2)$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_Z^2 (1 - \phi_1^2 - \phi_2^2)^{-1} \quad (2.10)$$

Otokovaryans fonksiyonu; $\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} \quad k \geq 1$

Otokorelasyon fonksiyonu; $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad k \geq 1$

Parametreler ve otokorelasyon katsayıları matris formunda 2.11 ile gösterilmiş, 2.12 eşitliği ile 2.13 deki Yule-Walker denklemleri elde edilmiş ve AR(2) süreci için ρ_1 ve ρ_2 hesaplanmıştır (Box, Jenkins ve Reinsel, 1994: 57).

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} \quad \rho_p = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix} \quad P_p = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\rho = P_p \phi \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \cdots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p \rho_{p-2} \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \cdots + \phi_p \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$k = 1 \text{ ve } 2 \text{ olduğu zaman; } \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \rho_1 \phi_2 \\ \rho_2 &= \rho_1 \phi_1 + \phi_2 \end{aligned}$$

Denklemler çözülürse aşağıdaki sonuçlar elde edilir;

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

$$\rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2 = \frac{\phi_1^2 + \phi_2 - \phi_2^2}{1 - \phi_2}$$

Kısmi otokorelasyon fonksiyonu; ϕ_{11} , ϕ_{22} ve ϕ_{33} kısmi otokorelasyon katsayıları aşağıda gösterilmiş ve 2.14 eşitliği ile bir genelleme yapılmıştır (Box, Jenkins ve Reinsel, 1994: 64-66; Wei, 1994: 41-43).

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

$$\begin{aligned} \phi_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{\left(\frac{\phi_1^2 + \phi_2 - \phi_2^2}{1 - \phi_2} \right) - \left(\frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \right)^2}{1 - \left(\frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \right)^2} \\ &= \frac{\phi_2 \left[(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2 \right]}{(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2} = \phi_2 \end{aligned}$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho_1 & k = 1 \\ \phi_2 & k = 2 \\ 0 & k \geq 3 \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\underline{AR(p) \text{ süreci: }} Z_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) X_t$$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t \quad (2.15)$$

2.15 denkleminin her iki tarafı X_{t-k} ile çarpılıp beklenen değeri alınmış ve otokovaryans ile otokorelasyon fonksiyonu bulunmuştur ($k > 0$ için $E(Z_t X_{t-k}) = 0$).

$$X_t X_{t-k} = \phi_1 X_{t-1} X_{t-k} + \phi_2 X_{t-2} X_{t-k} + \dots + \phi_p X_{t-p} X_{t-k} + Z_t X_{t-k}$$

$$E(X_t X_{t-k}) = \phi_1 E(X_{t-1} X_{t-k}) + \phi_2 E(X_{t-2} X_{t-k}) + \dots + \phi_p E(X_{t-p} X_{t-k}) + E(Z_t X_{t-k})$$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}, \quad k > 0$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k > 0$$

$k > p$ olduğunda 1.7 numaralı ϕ_{kk} matrisinin son sütunu, bir önceki sütunların doğrusal bileşimi olarak yazılabilir. Bu yüzden PACF (ϕ_{kk}), p gecikme sonra sıfır olacaktır. Bu özellik üçüncü bölümde ele alınacak olan zaman serisi modeli oluşturma aşamasında bir AR modelinin belirlenmesinde yarar sağlamıştır.

2.1.2.3. AR Sürecinin Derecesinin Belirlenmesi

Bir sürecin derecelerinin belirlenmesi için ilk önce oluşturulacak olan geçici modelin türünün belirlenmesi gereklidir. Yani AR, MA ve ARMA model türlerinden hangisinin veriye uygun olduğu belirlenmesi gerekir. Bunun için de otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonların yapısı incelenir. Otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonların bir korelogramı çizilir ve Tablo 1 'deki ölçütler ile karşılaştırılarak geçici modelin türü belirlenir.

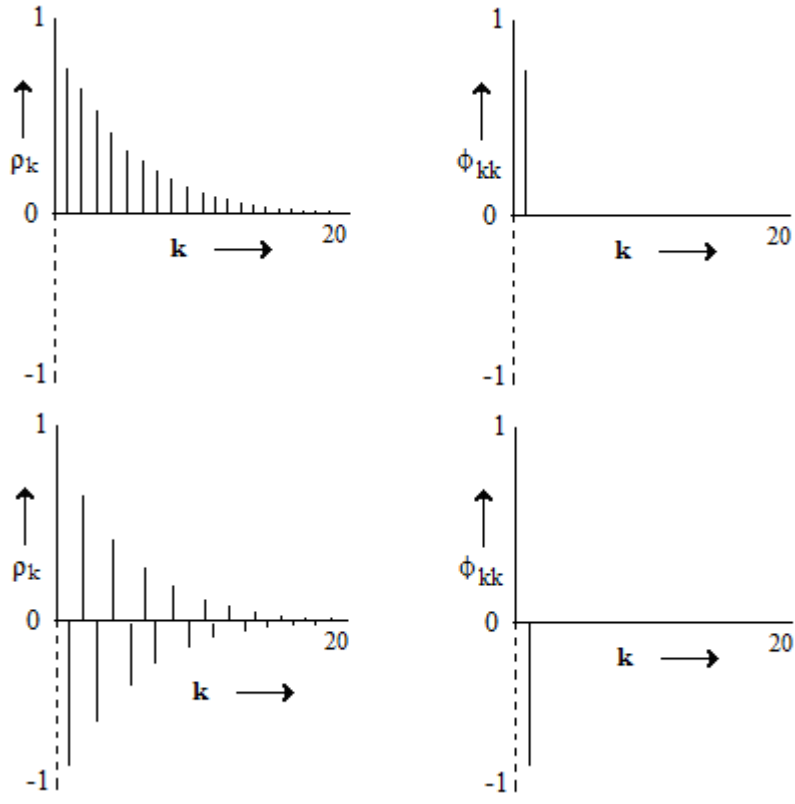
Tablo 1: AR, MA ve ARMA Süreçlerinin Otokorelasyon ve Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonlarının Yapısı

	AR süreçleri	MA süreçleri	ARMA süreçleri
Otokorelasyon Fonksiyonu	Sonsuz (üssel ve/veya sinüs eğrisi şeklinde azalır)	Sonlu (q gecikme sonra kesilir)	Sonsuz (q-p gecikmesinden sonra üssel ve/veya sinüs eğrisi şeklinde azalır)
Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu	Sonlu (p gecikme sonra kesilir)	Sonsuz (üssel ve/veya sinüs eğrisi şeklinde azalır)	Sonsuz (p-q gecikmesinden sonra üssel ve/veya sinüs eğrisi şeklinde azalır)

Kaynak: Box, Jenkins, Reinsel, 1994, s. 84

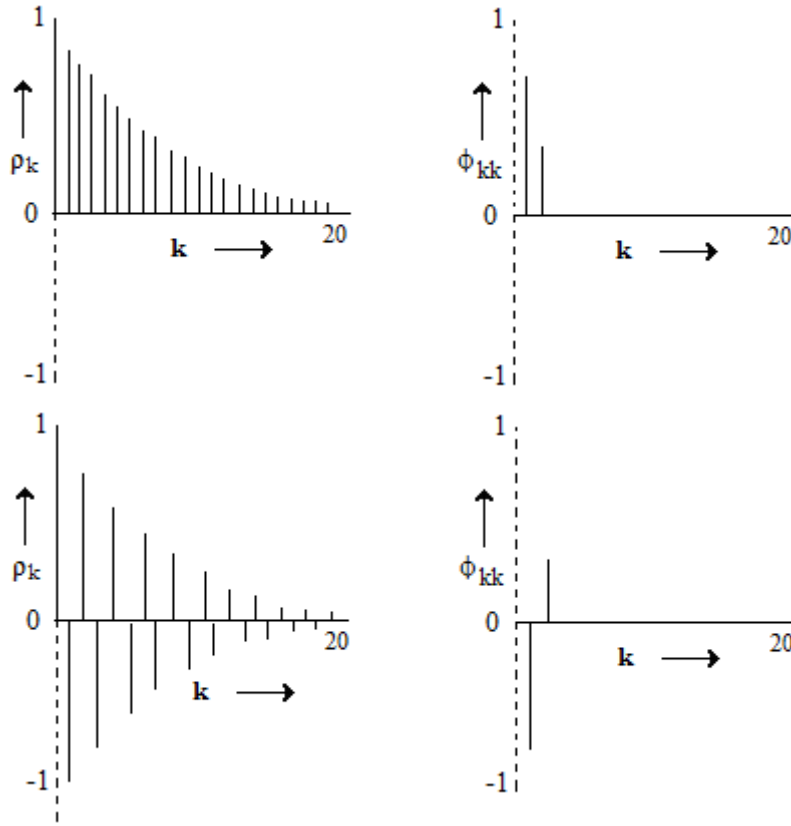
Otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon korelogramları ile ilgili bazı örnekler Şekil 14 ve Şekil 15 de verilmiştir. Buna göre örneklerdeki otokorelasyonlar, üssel veya sinüs eğrisi şeklinde azaldığı ve kısmi otokorelasyonlar da “ p ” gecikmesinden sonra kesildiği (sıfır olduğu) için bir AR süreci uygundur.

Şekil 14: AR(1) Sürecinin ACF ve PACF Grafikleri



Kaynak: Anderson, 1977, s. 17-23

Şekil 15: AR(2) Sürecinin ACF ve PACF Grafikleri



Kaynak: Anderson, 1977, s. 17-23

Verilerin ne tür bir modele uygun olduğu belirlendikten sonra, sürecin derecesinin belirlenmesi gerekir. Bunun için üç farklı değişken incelenebilir (Chatfield, 1989: 55-56).

- 1) AR sürecinin otokorelasyon fonksiyonu,
- 2) AR sürecindeki p değerinin her biri için hata kareler toplamları,
- 3) AR sürecinin kısmi otokorelasyon fonksiyonları.

AR sürecinin derecesinin belirlenmesinde kısmi otokorelasyon katsayıları kullanılırsa daha kesin sonuçlara varılabilir. Kısmi otokorelasyon katsayılarının gösterildiği korelogramın üzerinde $\pm 2/\sqrt{N}$ sınırları belirlenir ve %5-%10 anlamlılık düzeyinde test edilerek sınırların dışında kalan kısmi otokorelasyon katsayılarının (ϕ_{kk}) sayısı modelin derecesini verir. Örneğin, sınırların dışında kalan tek bir ϕ_{kk} değeri varsa model AR(1), iki tane ϕ_{kk} değeri varsa model AR(2) olacaktır.

2.1.2.4. AR Sürecinin Parametrelerinin Tahmini

AR süreçleri için derece belirlendikten sonra ρ_k değerlerinin tahmini olan r_k , 2.14 eşitliğinde gösterilen Yule-Walker denklemlerinin tahmini aşağıda gösterilmiştir. AR(1) için ϕ_1 parametresinin tahmini $\hat{\phi}_1 = r_1$ dir. AR(2) için ise 2.16 denkleminde gösterildiği gibi ϕ_1 ve ϕ_2 parametre tahminleri bulunmuştur.

$$r_k = \hat{\phi}_1 r_{k-1} + \hat{\phi}_2 r_{k-2} + \dots + \hat{\phi}_p r_{k-p}$$

$$\hat{\phi} = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} \quad r_p = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{bmatrix} \quad R_p = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \dots & r_{p-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \dots & r_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{p-1} & r_{p-2} & r_{p-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rclcl} r_1 & = & \hat{\phi}_1 & + & \hat{\phi}_2 r_1 + \dots + \hat{\phi}_p r_{p-1} \\ r_2 & = & \hat{\phi}_1 r_1 & + & \hat{\phi}_2 + \dots + \hat{\phi}_p r_{p-2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_p & = & \hat{\phi}_1 r_{p-1} & + & \hat{\phi}_2 r_{p-2} + \dots + \hat{\phi}_p \end{array}$$

$$\hat{\phi} = R_p^{-1} r_p$$

$$\begin{array}{lcl} r_1 = \hat{\phi}_1 + r_1 \hat{\phi}_2 & \Rightarrow & \hat{\phi}_1 = r_1 (1 - \hat{\phi}_2) \\ r_2 = r_1 \hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 & & \hat{\phi}_2 = r_2 - r_1 \hat{\phi}_1 \end{array}$$

$$\hat{\phi}_1 = r_1 (1 - r_2 + r_1 + \hat{\phi}_1)$$

$$\hat{\phi}_1 = r_1 - r_1 r_2 + r_1^2 + r_1 \hat{\phi}_1$$

$$\hat{\phi}_1 = r_1 (1 - r_2) + r_1^2 \hat{\phi}_1$$

$$\hat{\phi}_1 (1 - r_1^2) = r_1 (1 - r_2)$$

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1 (1 - r_2)}{(1 - r_1^2)} \quad (2.16)$$

$\hat{\phi}_1$ tahminini yukarıda elde ettiğimiz gibi, $\hat{\phi}_2 = r_2 - r_1\hat{\phi}_1$ denklemdeki $\hat{\phi}_1$ yerine, $\hat{\phi}_1 = r_1(1 - \hat{\phi}_2)$ değeri yerleştirilirse, ϕ_2 parametresinin tahmini içinde $\hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{(1 - r_1^2)}$ eşitliği elde edilecektir.

2.1.3. Hareketli Ortalama (MA) Süreçleri

Hareketli ortalama süreçleri bir zaman serisinin herhangi bir dönemindeki gözlem değerinin, aynı dönemin hata terimi ve belirli sayıda geçmiş dönemin hata terimlerinin doğrusal bir birleşimi olarak ifade edilir. Hareketli ortalama süreci eğer birinci dereceden ise MA(1), ikinci dereceden ise MA(2) ve “ q ” dereceden ise MA(q) olarak gösterilir. $\{X_t\}$ zaman serisi ve $\{Z_t\}$ de sıfır ortalamalı σ_Z^2 varyanslı hata terimlerinin bir serisi olsun. Bu varsayım altında 2.17 eşitliği ile gösterilen denklem birinci dereceden MA süreci olup 2.18 eşitliği ile gösterilen denklem ise q dereceden MA sürecidir.

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} \quad (2.17)$$

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \dots - \theta_q Z_{t-q} \quad (2.18)$$

2.1.3.1. MA Süreçlerinde Çevirebilirlik Göstergesi

AR sürecinin durağanlık göstergesini incelenildiği gibi MA süreçleri içinde çevirebilirlik göstergesinin incelenilmesi gerekir. MA(q) modelini B operatörü kullanarak yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) Z_t$$

$$X_t = \theta(B) Z_t$$

MA(1) modeli, $X_t = (1 - \theta_1 B)Z_t$, için denklemin kökü incelenmelidir. Yani $(1 - \theta_1 B)$ ifadesi sıfıra eşitlenerek $B = \theta_1^{-1}$ bulunur. Denklemin kökü birim çemberin dışındaysa yani $|\theta_1| < 1$ değerini alıyorsa çevirebilirlik koşulunu sağlıyor demektir. Aynı şekilde q dereceden bir MA sürecinin de çevirebilirlik koşulunu sağlaması için $\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)$ ifadesi sıfıra eşitlenir ve denklemin kökleri bulunur. Eğer kökler birim çemberin dışında kalıyorsa çevirebilirlik şartını sağlıyor demektir (Box, Jenkins ve Reinsel, 1994: 69-70).

Genel bir AR(p) süreci ψ ağırlık parametresi ile ifade edilmişti aynı şekilde genel bir MA(q) sürecini de π ağırlık parametreleri ile aşağıda gösterilmiştir. Bu gösterim AR ile MA süreçleri arasındaki ikiliği açıklamada kullanılmıştır.

$$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)Z_t = X_t$$

$$\theta(B)Z_t = X_t$$

$$Z_t = \theta^{-1}(B)X_t = \pi(B)X_t$$

$$\theta^{-1}(B) = \pi(B)$$

$$\pi(B)\theta(B) = 1$$

$$\pi(B) = (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots)$$

2.1.3.2. MA(q) Sürecinin ACF, PACF ve Otokovaryans Fonksiyonu

AR(p) sürecinde ayrı ayrı incelenmiş olan varyans, otokovaryans, otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonları, MA(q) süreci içinde aşağıda incelenmiştir (Abraham ve Ledolter, 1983: 213-218; Box, Jenkins ve Reinsel, 1994:70-74).

MA(1) süreci: $X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1}$

$$X_t = (1 - \theta_1 B)Z_t$$

$$(1 - \theta_1 B) = \theta(B)$$

Z_t sıfır ortalamalı ve σ_z^2 varyanslı White-noise sürecidir.

Varyans, $\gamma_0 = (1 + \theta_1^2) \sigma_z^2$

$$\text{Otokovaryans fonksiyonu; } \gamma_k = \begin{cases} (1 + \theta_1^2) \sigma_z^2, & k = 0 \\ -\theta_1 \sigma_z^2, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}$$

$$\text{Otokorelasyon fonksiyonu; } \rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$$

Kısmi otokorelasyon fonksiyonu; ϕ_{kk}

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} = \frac{-\theta_1(1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^4}$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{-\rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{-\theta_1^2}{1 + \theta^2 + \theta^4} = \frac{-\theta_1(1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^6}$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & 0 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ 0 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_1^3}{1 - 2\rho_1^2} = \frac{-\theta_1^3(1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^8}$$

$$\phi_{kk} = \frac{-\theta_1^k(1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^{2(k+1)}} \quad k > 0$$

MA(2) süreci: $X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2}$

$$X_t = Z_t (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)$$

$$\text{Varyans } \gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma_z^2$$

$$\text{Otokovaryans fonksiyonu; } \gamma_k = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma_z^2, & k = 0 \\ (-\theta_1 + \theta_1 \theta_2) \sigma_z^2, & k = 1 \\ -\theta_2 \sigma_z^2, & k = 2 \\ 0, & k > 2 \end{cases}$$

$$\text{Otokorelasyon fonksiyonu; } \rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_1(1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & k = 1 \\ \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & k = 2 \\ 0, & k \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{Kısmi otokorelasyon fonksiyonu; } \phi_{kk} = \begin{cases} \rho_1 & k = 1 \\ \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} & k = 2 \\ \frac{\rho_1^3 - \rho_1 \rho_2 (2 - \rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)} & k \geq 3 \end{cases}$$

$$\underline{MA(q) \text{ süreci; }} X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \dots - \theta_q Z_{t-q}$$

$$X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) Z_t$$

$$\text{Varyans; } \gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_z^2$$

$$\text{Otokovaryans fonksiyonu;}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q) \sigma_z^2 & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

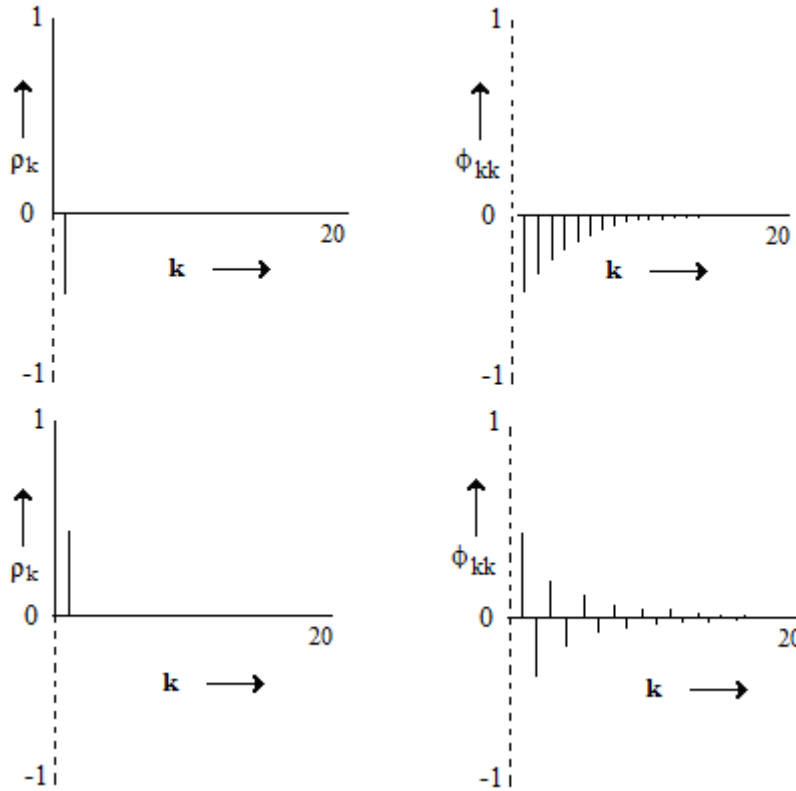
Otokorelasyon fonksiyonu;

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 - \dots - \theta_q^2} & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases} \quad (2.19)$$

2.1.3.3. MA Sürecinin Derecesinin Belirlenmesi

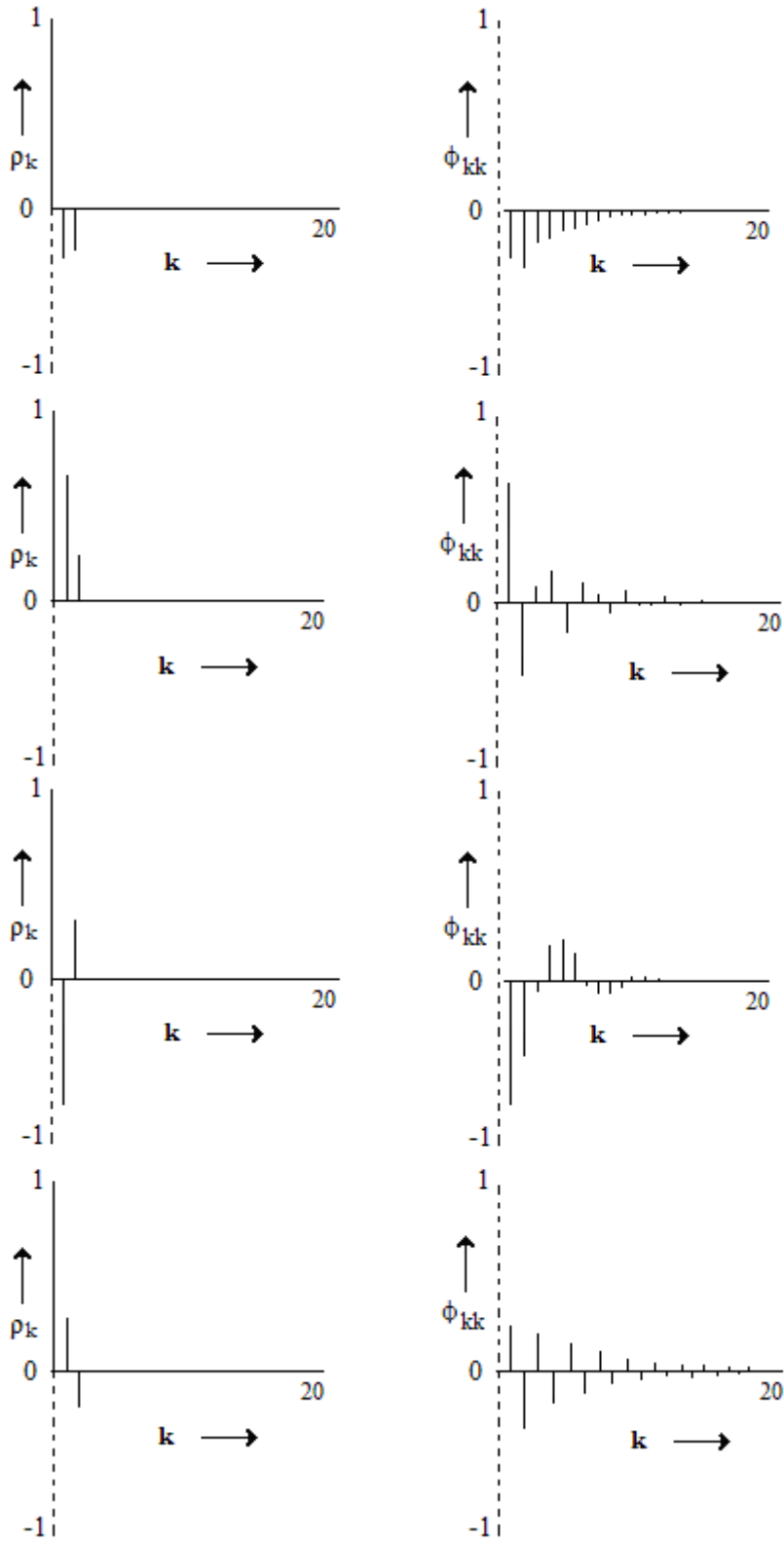
AR(p) sürecinde olduğu gibi ilk önce modelin türünün belirlenmesi gereklidir. Bunun için de Tablo 1 ‘deki bilgilere ihtiyaç vardır. Sürecin otokorelasyon fonksiyonu q gecikmeden sonra kesiliyorsa (q gecikmeden sonra otokorelasyon katsayıları sıfır ise) ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu üssel ve/veya sinüs eğrisi şeklinde azalıyorsa MA(q) modeli uygun olacaktır. Şekil 16 ve 17 uygulamada çoğunlukla karşılaşılabileceğimiz bazı MA örneklerini göstermektedir.

Şekil 16: MA(1) Sürecinin ACF ve PACF Grafikleri



Kaynak: Anderson, 1977, s. 34-35

Şekil 17: MA(2) Sürecinin ACF ve PACF Grafikleri



Kaynak: Anderson, 1977, s. 38-41

Modelin yapısının, MA modelinin yapısına uygun olduğu belirlendikten sonra sürecin derecesi, otokorelasyon katsayılarının korelogramı incelenerek belirlenir. Korelogramı üzerinde $\pm 2/\sqrt{N}$ sınırlarının çizilir ve bu sınırların dışında kalan otokorelasyon katsayılarının sayısı da modelin derecesini verir. Yani $\pm 2/\sqrt{N}$ sınırlarının dışında kalan tek bir ρ_k değeri varsa MA(1), iki değer varsa MA(2) modeli olacaktır.

2.1.3.4. MA Sürecinin Parametrelerinin Tahmini

MA sürecinin parametrelerini tahmin etmek AR sürecine göre daha zordur. Çünkü etkin tahmin ediciler bulunamamaktadır. Bunun yerine bazı sayısal yinelemelerin gerçekleştirilmesi gerekir. Parametre tahminlerinin bulunmasında ilk yöntem Chatfield 1989 4. bölümde ele alınan en küçük kareler (EKK) yöntemidir. EKK yönteminde rassal hataların karelerinin toplamı, $\sum Z_t$, minimize edilerek parametre tahminleri bulunur. Birinci dereceden MA modeli için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir (Chaltfield, 1989: 56-58).

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1}$$

$$Z_t = X_t + \theta_1 Z_{t-1}$$

θ_1 sabit ve Z_t white-noise sürecini ifade ettiğinde, MA(1) modelini Z_t değerlerine ve $Z_0 = 0$ 'a göre yazılabilir.

$$Z_1 = X_1$$

$$Z_2 = X_2 + \theta_1 Z_1$$

$$Z_3 = X_3 + \theta_1 Z_2$$

$$\vdots$$

$$Z_N = X_N + \theta_1 Z_{N-1}$$

Yukarıdaki denklemlere göre hata kareler toplamı, $\sum_{t=1}^N Z_t^2$, bulunarak bu değeri minimum yapan θ_1 değerinin EKK tahminleri belirlenir. Yani $\sum Z_t^2$ belirlendikten sonra bilinmeyen θ_1 parametresine göre kısmi türevi alınarak sıfıra eşitlenir ve böylece θ_1 parametresi tahmin edilir. EKK tahminleri aynı zamanda Z_t ve X_t nin normal dağılımlı olması ve $Z_0 = 0$ koşulunu sağlayan en yüksek olabilirlik tahmincileridir.

Daha yüksek dereceli süreçler için MA(1) modelindeki gibi yinelemeli (iteratif) yöntem kullanılabilir. Örneğin MA(2) modeli için θ_1 ve θ_2 değerleri tahmin edilir. Yani ilk önce aşağıda verilen denklem kullanılarak hata kareler toplamı hesaplanır ve bu değer minimum olmasını sağlayan θ_1 ve θ_2 değerleri için denenir.

MA sürecinin parametrelerinin belirlenmesinde kullanılan diğer yöntem ise Box ve Jenkins tarafından verilen; otokorelasyon katsayıları ile model parametrelerini ifade etmektir. Bir MA sürecinin otokorelasyon fonksiyonu 2.19 eşitliği ile verilmiştir. Bu eşitlik $q=1$ için çözüldüğü zaman ρ_1 bulunur ve denklemden θ_1 parametresi çekilerek aşağıdaki 2.20 eşitlikleri elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} \\ \theta_1 &= -\frac{1}{2\rho_1} + \left[\frac{1}{(2\rho_1)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \theta_1 &= -\frac{1}{2\rho_1} - \left[\frac{1}{(2\rho_1)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{2.20}$$

Görüldüğü gibi θ_1 in iki değeri vardır ve bunlardan hangisi çevirebilirlik koşuluna, $-1 < \theta_1 < 1$, uyuyorsa o değer θ_1 değeri olarak belirlenir. Otokorelasyon katsayılarının yerine tahmini otokorelasyon katsayıları kullanıldığında ise θ_1 değerinin tahmini değeri bulunur. Yani 2.19 denklemindeki ρ_k yerine r_k yazılarak

yukarıda elde edilen denklemler aşağıdaki gibi yazılabilir (Bowerman ve O'Connell, 1979: 367-368).

$$r_1 = \frac{-\hat{\theta}_1}{1 + \hat{\theta}_1^2}$$

$$\hat{\theta}_1 = -\frac{1}{2r_1} + \left[\frac{1}{(2r_1)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\hat{\theta}_1 = -\frac{1}{2r_1} - \left[\frac{1}{(2r_1)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Aynı şekilde $\hat{\theta}_1$ değerlerinden hangisi çevirebilirlik koşuluna, $-1 < \hat{\theta}_1 < 1$, uyuyorsa o değer, tahmini θ_1 değeri olarak belirlenir.

Daha yüksek dereceden modelin parametre tahminlerini elde etmek için de aynı şekilde örnek otokorelasyon katsayılarına ihtiyaç duyulur. Örneğin MA(2) modeli için aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur (Bowerman ve O'Connell, 1979: 370).

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2}$$

$$r_1 = \frac{-\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2}{1 + \hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2}$$

$$r_2 = \frac{-\hat{\theta}_2}{1 + \hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2}$$

$$r_3 = \dots = r_k = 0$$

r_1 ve r_2 denklemleri $\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_2$ parametreleri için çözülerek elde edilecek sonuçlardan, 2.21 eşitsizliğinde verilen MA(2) için çevirebilirlik koşuluna uyan değer, tahmini parametre değerleri olacaktır.

$$\begin{aligned}
\theta_1 + \theta_2 < 1, \quad \theta_2 - \theta_1 < 1, \quad |\theta_2| < 1 \\
\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 < 1, \quad \hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1 < 1, \quad |\hat{\theta}_2| < 1
\end{aligned} \tag{2.21}$$

2.1.3.5. AR ile MA Süreçleri Arasındaki Çift Yönlü İlişki

Durağan bir AR(p) süreci için aşağıdakiler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\phi(B)X_t &= Z_t \\
\phi(B) &= (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \\
X_t &= \phi^{-1}(B)Z_t = \psi(B)Z_t \\
\psi(B) &= \phi^{-1}(B)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
\psi(B) &= (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) \\
\psi(B) &= \frac{1}{\phi(B)} \\
\phi(B)\psi(B) &= 1
\end{aligned} \tag{2.23}$$

2.23 eşitliğinin her iki tarafındaki B^j katsayıları eşitlenirse ψ ağırlıkları bulunacaktır. AR(2) süreci için gerekli işlemler yapılır ve ψ ağırlıkları 2.24 denklemindeki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) &= 1 \\
1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \dots - \phi_1 B - \psi_1 \phi_1 B^2 - \psi_2 \phi_1 B^3 - \dots - \phi_2 B^2 - \psi_1 \phi_2 B^3 - \dots &= 1 \\
B^1: \quad \psi_1 - \phi_1 &= 0 \rightarrow \psi_1 = \phi_1 \\
B^2: \quad \psi_2 - \psi_1 \phi_1 - \phi_2 &= 0 \rightarrow \psi_2 = \phi_1^2 + \phi_2 \\
B^3: \quad \psi_3 - \psi_2 \phi_1 - \phi_1 \psi_2 &= 0 \rightarrow \psi_3 = \psi_2 \phi_1 + \psi_1 \phi_2 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$j \geq 2$ için $\psi_j = \psi_{j-1}\phi_1 + \psi_{j-2}\phi_2$ olur. Burada $\psi_0 = 1$ dir.

$\phi_2 = 0$ olduğu özel durumda ise $j \geq 0$ için $\psi_j = \phi_1^j$ eşitliği elde edilir. Bu yüzden sonlu bir AR süreci, sonsuz dereceden bir MA sürecine denktir.

$$X_t = \frac{1}{(1 - \phi_1 B)} Z_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots) Z_t$$

Çevirebilir MA(q) süreci için aşağıdakiler yazılabilir.

$$\begin{aligned} X_t &= \theta(B) Z_t \\ \theta(B) &= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) \\ Z_t &= \theta^{-1}(B) X_t = \pi(B) X_t \\ \theta^{-1}(B) &= \pi(B) \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} \pi(B) &= (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) \\ \pi(B)\theta(B) &= 1 \end{aligned} \tag{2.26}$$

2.26 eşitliğinin her iki tarafındaki B^j katsayıları eşitlenirse π ağırlıkları bulunacaktır. AR(2) süreci için gerekli işlemler yapılmış ve π ağırlıkları 2.27 denklemindeki gibi bulunmuştur.

$$(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) X_t = \frac{1}{(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)} X_t = Z_t$$

$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \dots) = 1$ denklemi çözülerek π ağırlıkları aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\begin{aligned}
B^1: & -\pi_1 - \theta_1 = 0 \rightarrow \pi_1 = -\theta_1 \\
B^2: & -\pi_2 + \pi_1\theta_1 - \theta_2 = 0 \rightarrow \pi_2 = -\theta_1^2 - \theta_2 \\
B^3: & -\pi_3 + \pi_2\theta_1 + \pi_1\theta_2 = 0 \rightarrow \pi_3 = \pi_2\theta_1 + \pi_1\theta_2 \\
& \vdots \\
\pi_j &= \pi_{j-1}\theta_1 + \pi_{j-2}\theta_2 \quad j \geq 3
\end{aligned} \tag{2.27}$$

MA(1) olduğunda, $\theta_2 = 0$; $j \geq 1$ için $\pi_j = -\theta_1^j$ eşitliği elde edilir. Bu yüzden sonlu dereceden çevirebilir bir MA süreci, sonsuz dereceden durağan bir AR sürecine denktir (Wei, 1994: 53-55).

2.1.4. ARMA Süreçleri

AR ve MA süreçlerinin derecelerini belirlerken otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarını dikkate alınmıştır. Model belirleme aşamasında eğer otokorelasyon katsayıları herhangi bir dereceden sonra kesiliyorsa (sıfır oluyorsa) ve kısmi otokorelasyon katsayıları üssel ve/veya sinüs eğrisi şeklinde azalıyor ise MA modelinin; eğer otokorelasyon katsayıları üssel ve /veya sinüs eğrisi şeklinde azalıyor ve kısmi otokorelasyon katsayıları herhangi bir dereceden sonra kesiliyorsa AR modelinin uygun olduğu belirtilmişti ancak ρ_k ve ϕ_{kk} değerleri belli gecikmeden sonra hemen sıfır olmayabilir. Yani katsayılardaki azalma çok yavaş olabilir. Böyle bir durumda ise bir ARMA modeli uygun olacaktır.

ARMA süreci, zaman serisi X_t 'nin, hem kendi geçmiş değerleriyle ($X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$) hem de hata terimi Z_t 'nin geçmiş değerleriyle ($Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots$) ifade edilir. Genel olarak p dereceden AR ve q dereceden MA ile ARMA(p,q), 2.28 eşitliği ile gösterilir. Bu eşitlik $\phi(B)$ ve $\theta(B)$ ifadelerinin açılmış şekli 2.29 ile verilmiştir.

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t \tag{2.28}$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)Z_t \tag{2.29}$$

2.1.4.1. ARMA Süreçlerinin Durağanlık ve Çevirebilirlik Özelliği

AR ve MA süreci için sırasıyla ϕ_p ve θ_q katsayılarının birim çemberin dışında kalması; AR süreci için durağanlığı, MA süreci için ise çevirebilirliği sağladığı sürece ARMA(p,q) sürecinin durağan ve çevirebilir olduğunu söyleriz. Aşağıda genel MA süreci verilmiş ve 2.30 eşitliği 2.28 denkleminde yerine konularak $\pi(B)$ ifadesi 2.31 eşitliği ile gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} X_t &= \theta(B)Z_t \\ Z_t &= X_t\theta^{-1}(B) \\ \phi(B)X_t &= X_t\theta(B)\phi^{-1}(B) \end{aligned} \tag{2.30}$$

2.25 eşitliğinden; $\phi(B) = \theta(B)\pi(B)$

$$\pi(B) = \frac{\phi(B)}{\theta(B)} \tag{2.31}$$

Aynı şekilde AR sürecinden başlanarak, 2.32 ile gösterilen eşitlik 2.28 denkleminde yerine konarak 2.33 eşitliği elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \phi(B)X_t &= Z_t \\ X_t &= \phi^{-1}(B)Z_t \\ X_t &= \psi(B)Z_t \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned} \phi(B)\psi(B)Z_t &= \theta(B)Z_t \\ \psi(B) &= \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Aşağıda verilen ARMA(1,1) süreci için π_i ve ψ_i ağırlıkları bulunarak sürecin durağan ve çevirebilir olduğu ispatlanmıştır (Chatfield, 1989: 42).

$$X_t = 0.5X_{t-1} + Z_t - 0.3Z_{t-1}$$

$$\phi(B) = (1 - 0.5B)$$

$$\theta(B) = (1 - 0.3B)$$

$$\begin{aligned}\psi(B) &= \frac{\theta(B)}{\phi(B)} = (1 - 0.3B)(1 - 0.5B)^{-1} \\ &= (1 - 0.3B)(1 + 0.5B + 0.5^2 B^2 + 0.5^3 B^3 + \dots) \\ &= 1 - 0.3B + 0.5B - 0.15B^2 - 0.075B^3 + 0.5^3 B^3 - 0.075B^4 \\ &= 1 + 0.2B + 0.1B^2 + 0.05B^3 + \dots\end{aligned}$$

Buradan da ψ_i ağırlığı aşağıdaki formül ile bulunur. Eğer $\pi(B) = \frac{\phi(B)}{\theta(B)}$ içinde denklem çözülürse π_i ağırlıkları elde edilecektir.

$$\psi_i = 0.2 \times 0.5^{i-1} \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\pi_i = 0.2 \times 0.3^{i-1} \quad i = 1, 2, \dots$$

Görüldüğü gibi hem ψ_i hem de π_i ağırlıkları hızlı bir şekilde azalmaktadır bu da sürecin durağan ve çevrilebilir olduğunu gösterir.

2.1.4.2. ARMA(p,q) Sürecinin ACF, PACF ve Otokovaryans Fonksiyonu

ARMA(p,q) sürecinin otokovaryans fonksiyonu 2.34 eşitliği ile, otokorelasyon fonksiyonu ise 2.35 eşitliği ile gösterilmiştir.

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad k \geq q+1 \quad (2.34)$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad k \geq q+1 \quad (2.35)$$

ARMA(1,1) modeli için otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonları 2.36 ve 2.37 eşitlikleri ile verilmiştir.

$$\gamma_k = \begin{cases} \phi_1 \gamma_1 + \sigma_z^2 (1 - \theta_1 \psi_1) & k = 0 \\ \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_z^2 & k = 1 \\ \phi_1 \gamma_{k-1} & k \geq 2 \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{(1 - \phi_1 \theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1} & k = 1 \\ \phi_1 \rho_{k-1} & k \geq 2 \end{cases} \quad (2.37)$$

ARMA(1,1) için otokorelasyon fonksiyonu ilk değerler olan $\phi_{11} = \rho_1$ den oluşur. MA(1) sürecinin kısmi otokorelasyon fonksiyonu gibi; üssel ve/veya sinüzoidal bir şekilde davranış gösterir.

Bir ARMA sürecinin derecelerinin belirlenme aşaması da sürecin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonları incelenerek karar verilir. Yani ARMA(p,q) sürecinin ACF değerleri “q- p” gecikmesinden sonra üssel ve/veya sinüs eğrisi şeklinde azalır; PACF değerleri ise “p-q” gecikmesinden sonra üssel ve/veya sinüs eğrisi şeklinde azalır. Bu bilgilere göre p ve q değerleri hesaplanabilir.

ARMA sürecinin parametrelerinin tahmin edilmesinde ise otokorelasyon katsayılarının tahmini olan r_k değerleri kullanılır. ARMA(1,1) süreci için parametre tahminleri aşağıda verilmiştir.

$$(1 - \phi_1 B) X_t = (1 - \theta_1 B) Z_t$$

$$r_1 = \frac{(1 - \hat{\phi}_1 \hat{\theta}_1)(\hat{\phi}_1 - \hat{\theta}_1)}{1 + \hat{\theta}_1^2 - 2\hat{\phi}_1 \hat{\theta}_1}$$

$$r_2 = \hat{\phi}_1 r_1$$

2.2. DURAĞAN OLMAYAN STOKASTİK SÜREÇLER

Buraya kadar olan bölümlerde süreçlerin durağan olduğunu varsayarak AR, MA ve ARMA modellerini inceledik. Ancak uygulamada çoğu zaman serisi durağan olmamaktadır. Seriyeye durağan bir model uygun olması içinde serinin birinci veya daha fazla dereceden farkını almak gerekebilir. Birinci farkı alınan seri durağan oluyorsa $I(1)$, d . farkını aldığımızda durağan oluyorsa $I(d)$ ile gösterilir. Serinin d . dereceden farkı alınarak durağan hale getirdikten sonra $ARMA(p,q)$ modeli uygulanır. Böyle bir seride genel durağan olmayan bir model tanımlanırsa, $ARIMA(p,d,q)$ modeli ile gösterilir. Bu bölümün başlığı altında ilk önce rassal yürüyüş modeli, ikinci olarak ARIMA modeli incelenmiş, son olarak da SARIMA modeli anlatılmıştır.

2.2.1. Rassal Yürüyüş (Random Walk) Süreci

Durağan olmayan stokastik zaman serilerinin en basit modeli rassal yürüyüş (random walk) sürecidir. Bu süreç $X_t = X_{t-1} + Z_t$ olarak gösterilir. X_{t-1} , X_t serisinin bir gecikmedeki değerini, Z_t ise sıfır ortalamaya sahip bağımsız dağılmış rastgele değişkenleri ifade eder ve $Z_t \sim IID(0, \sigma^2)$ ile gösterilir.

Süreç genel olarak sıfır noktasından başlıyor ise 2.38 deki eşitlikler yazılır. Bu eşitliklere göre de ortalama ve varyans aşağıda gösterildiği gibi elde edilir (Chatfield, 1989: 32)

$$X_1 = Z_1 \quad \text{ve} \quad X_t = \sum_{i=1}^t Z_i \quad (2.38)$$

$$E(X_t) = t\mu$$

$$Var(X_t) = t\sigma_Z^2$$

Rassal yürüyüş modelinin ortalama ve varyansı görüldüğü gibi t zaman sürecine bağlıdır. Bu yüzden sürecin durağan olmadığı rahatlıkla görülebilir. Sürecin birinci farkı alındığında ise durağan bir süreç elde edilir.

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = Z_t$$

Z_t serisinin sıfır ortalamalı ve σ^2 varyanslı birbirinden bağımsız normal dağılıma sahip olduğu belirtilmişti ve sürecin birinci farkını aldığımızda Z_t serisi elde edildiğinden sürecin birinci farkları durağandır.

2.2.1. ARIMA Süreçleri

$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$ genel dereceli ARMA sürecini, farkı alınmış ARMA süreci olarak göstermek için X_t serisi yerine $\nabla^d X_t$ ifadesi kullanılır. Böylece ARIMA(p,d,q) sürecini (2.39) eşitliği ile gösterilmiş olur ($\nabla^d X_t$, X_t serisinin d . dereceden farkını gösterir).

$$\phi(B)\nabla^d X_t = \theta(B)Z_t \quad (2.39)$$

$\nabla^d = (1-B)^d$ olduğundan 2.40 eşitliği yazılır.

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)Z_t \quad (2.40)$$

2.39 eşitliğindeki genel ARIMA sürecinden başlanarak uygulamada genellikle karşılaşılan bazı modeller aşağıda tanımlanmıştır.

$ARIMA(0,1,1)$ süreci; $IMA(1,1)$ süreci ile de gösterilebilir, $\phi(B)=1$,

$$\theta(B) = (1 - \theta_1 B).$$

$$\nabla X_t = (1 - \theta B)Z_t$$

$$(1-B)X_t = Z_t - Z_{t-1}$$

$ARIMA(0,2,2)$ süreci, $IMA(2,2)$; $p=0$, $d=2$, $q=2$, $\phi(B)=1$,

$$\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2).$$

$$\nabla^2 X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) Z_t$$

$$(1 - B)^2 X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2}$$

ARIMA(1,1,0) süreci, ARI(1,1); $p = 1, d = 1, q = 0, \theta(B) = 1, \phi(B) = (1 - \phi_1 B)$.

$$(1 - \phi_1 B) \nabla X_t = Z_t$$

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B) X_t = Z_t$$

ARIMA(2,2,0) süreci, ARI(2,2); $p = 2, d = 2, q = 0, \theta(B) = 1,$

$$\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) \nabla^2 X_t = Z_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 - B)^2 X_t = Z_t$$

ARIMA(1,1,1) süreci;

$$(1 - \phi_1 B) \nabla X_t = (1 - \theta_1 B) Z_t$$

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B) X_t = (1 - \theta_1 B) Z_t$$

ARIMA(1,1,0) modelinin otokorelasyon fonksiyonu üssel ve/veya sinüs eğrisi şeklinde azalır, kısmi otokorelasyon fonksiyonu ise birinci gecikmeden sonra istatistiksel olarak anlamlı değildir. Yani AR modelinin özelliğini gösterir. ARIMA(0,1,1) modelinin otokorelasyon fonksiyonu, birinci gecikmeden sonra istatistiksel olarak anlamlı değildir ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu da üssel ve/veya sinüs eğrisi şeklinde azalır, yani MA modelinin özelliğini gösterir (Wei, 1994: 77).

Bir ARIMA modelinin derecelerinin belirlenmesindeki koşullar, farkı alınarak durağan hale getirilmiş seri için AR ve MA modelinin parametrelerinin belirlenmesinde geçerli olan koşullarla aynıdır. Yani X_t serisinin birinci farkında durağan olduğu düşünülürse ∇X_t serisi elde edildikten sonra sürecin ACF ve PACF değerleri incelenir ve Tablo 1 'e göre modelin derecelerine karar verilir.

2.2.2. SARIMA Süreçleri

Uygulamada çoğu zaman serisi her s tane gözlem için tekrarlanan, mevsimsel periyodik bir bileşen içerir. Örneğin; aylık gözlemlerde, $s=12$, genellikle X_t 'nin $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ terimlerine bağlı olduğu kadar X_{t-12} ve belki de X_{t-24} terimlerine de bağlı olması beklenir (Chatfield, 1989: 60). Mevsimsellik ile ilgili genel bir ARIMA modeli (SARIMA), 2.41 eşitliği ile verilmiştir.

$$\phi_p(B)\Phi_p(B^s)W_t = \theta_q(B)\Theta_q(B^s)Z_t \quad (2.41)$$

$W_t = \nabla^d \nabla_s^D X_t$ olduğundan 2.41 eşitliğini, 2.42 eşitliği şeklinde yazılabilir.

$$\phi_p(B)\Phi_p(B^s)\nabla^d \nabla_s^D X_t = \theta_q(B)\Theta_q(B^s)Z_t \quad (2.42)$$

- ϕ_p : p dereceden mevsimsel otoregresyon parametresi
- θ_q : q dereceden mevsimsel hareketli ortalama parametresi
- $\Phi_p(B^s)$: P dereceden B 'nin polinomları
- $\Theta_q(B^s)$: Q dereceden B 'nin polinomları
- s : Mevsimsel dalgalanmaların dalga uzunluğu
- D : Mevsimsel fark alma derecesi
- ∇_s^D : Mevsimsel fark alma operatörü
- Z_t : White-Noise süreci

Genel mevsimsel modelin (SARIMA) derecesi $(p, d, q) \times (P, D, Q)$ olarak gösterilir. D ve d nin değerleri genelde 1'i aşmamalıdır.

Örnek olarak $(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$ dereceli SARIMA modeli dikkate alınırsa, 2.42 denklemi 2.43 şeklinde yazılır. Bu denklemin açık hali ise 2.44 ile gösterilmiştir.

$$\nabla \nabla_{12} X_t = (1 - \theta B)(1 + \Theta B^{12}) Z_t \quad (2.43)$$

$$X_t - X_{t-1} - X_{t-12} + X_{t-13} = Z_t - \theta Z_{t-1} - \Theta Z_{t-12} + \theta \Theta Z_{t-13} \quad (2.44)$$

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

MODEL TANI KONTROLÜ

3.1. MODEL SEÇİM KRİTERLERİ

İkinci bölümde süreçlerin yapısı ve dereceleri belirlenirken Tablo 1 'deki otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının yapısı dikkate alınarak otoregresif ve hareketli ortalama serileri ve bu modellere ilişkin model dereceleri sezgisel olarak belirlenmişti. Fakat ARMA serilerinde hem otokorelasyonlar hem de kısmi otokorelasyonlar azalan bir eğilim içinde olduklarından dolayı model derecelerini belirlemek kolay olmamaktadır (Akdi, 2003:182). Ayrıca ACF ve PACF 'nin tek bir modeli işaret etmediği durumlarda, ACF ve PACF grafiklerine göre p ve q derecelerini belirlemek bazen yeterli olmamaktadır. Uygun bir derecenin seçilmemesi durumunda da modelden elde edilecek sonuçlar güvenilir olmayacaktır. Yani modelin derecesi olması gerektiğinden daha küçük seçildiğinde parametrelerin tahmini tutarlı olmamakta, olması gerektiğinden daha büyük seçildiğinde ise parametrelerin tahmininin varyansı büyük çıkmaktadır (Kadılar, 2000:51). Bu gibi durumlarda seriyi en iyi temsil edecek modelin seçimi için bazı bilgi kriterleri kullanılır. Bu kriterler aşağıda ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

3.1.1. Akaike Bilgi Kriteri

Pratikte model bilinmez ve model dereceleri başlangıçta olabilecek en yüksek değerler alınarak uygun modele gidilmeye çalışılır. Ancak model dereceleri yüksek alındığında parametrelerin tahminleri istenildiği gibi çıkmayacaktır. Model derecesi yükseltildiği zaman ise ödenmesi gereken bir penaltı (ceza) vardır. Akaike Bilgi Kriteri (AIC) bu penaltıyı minimum yapacak model derecesini belirlemek için kullanılan bir kriterdir (Akdi, 2003:182).

AIC yönteminde farklı sayıda parametreye sahip olan birden fazla model arasından seçim yapılmaktadır. Her bir modelin ayrı ayrı en yüksek olabilirlik fonksiyonu bulunup olabilirlik fonksiyonun değerinin en büyük olduğu modeli en uygun model olarak belirler.

$$AIC = n \ln(\hat{\sigma}_a^2) + 2k \quad (3.1.1)$$

3.1.1 formülünde $\hat{\sigma}_a^2$, σ_a^2 parametresinin tahmincisi ve $k = p + q + 1$ 'dir. (Gujarati, 2003: 537).

Farklı şekillerde tanımlanmış birçok AIC istatistikleri vardır. Tek bir istatistik olmamasına rağmen aynı sonuçlar elde edilecektir. Çünkü hepsi de en yüksek olabilirlik tahmincileri ile elde edilen tahmini parametre değerlerine bağlıdır. Farklı sayıda parametreye sahip olan birden fazla model arasından seçim yapılacağı zaman, her bir model için AIC değeri hesaplanır ve aralarından en küçük değer alan seçilerek uygun olan model dereceleri belirlenmiş olur.

3.1.2. Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri

AIC kriteri büyük örnek hacmindeki seriler için kullanıldığında iyi sonuçlara ulaşılmaktadır. Ancak küçük örnek hacmine sahip seriler için uygulandığında çok iyi sonuçlar elde edilememektedir. Böyle durumda ise 3.1.2 formülü ile gösterilen ve Hurvich ve Tsai (1989) tarafından önerilmiş olan, Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri (AICC) kullanılabilir (Brockwell ve Davis, 1991: 304).

3.1.4 ile gösterilen AIC istatistiğinin penaltı faktörü $\frac{n}{(n-k-1)}$ ile genişletilerek Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri (AICC), 3.1.2 eşitliğinde gösterilmiştir. $\frac{n}{(p+q+1)} < 40$ olan ve farklı sayıda parametreye sahip birden fazla modeller arasından seçim yapılacağı zaman, her bir model için AIC değeri hesaplanır ve aralarından en küçük değeri alanı seçerek uygun olan model dereceleri belirlenmiş olur.

$$AICC = n \ln(\hat{\sigma}_a^2) + 2k \frac{n}{(n-k-1)} \quad (3.1.2)$$

$k = p + q + 1$ olduğuna göre formül, k değerinin yerine konmasıyla aşağıdaki gibi yazılır.

$$AICC = n \ln(\hat{\sigma}_a^2) + \frac{2(p + q + 1)n}{(n - p - q - 2)}$$

3.1.3. Bayesian Bilgi Kriteri

Akaike Bilgi Kriteri'nin p değerini fazla tahmin yönünde bir eğilim içinde olduğu söylenir. AICC ve AIC istatistikleri için penaltı faktörleri olan $2(p + q + 1)n / (n - p - q - 2)$ ve $2(p + q + 1)$ asimptotik olarak, $n \rightarrow \infty$ iken, birbirine denktir. Buna rağmen, yüksek dereceli modeller için, AICC istatistiği daha uçdeğerlerde penaltıya sahiptir. AIC'nin aşırı uyum eğilimi yönündeki doğasını düzenleyebilmek için, bir başka yöntem olan Bayesian Bilgi Kriteri (BIC) incelenmelidir (Brockwell ve Davis, 1991: 304).

Çevrilebilir bir ARMA(p,q) süreci için, $\hat{\sigma}^2$ 'nin white noise varyansının en yüksek olabilirlik tahminlerinin olduğu zamanda, Akaike (1978) tarafından tanımlanan durum 3.1.3 eşitliğinde gösterilmiştir (Brockwell ve Davis, 1991: 304, Wei, 1994: 156).

$$BIC = n \ln(\hat{\sigma}_z^2) - (n - k) \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) + k \ln n + k \ln \left[\left(\frac{\hat{\sigma}_x^2}{\hat{\sigma}_z^2} - 1 \right) / k \right] \quad (3.1.3)$$

Farklı sayıda parametreye sahip olan birden fazla model arasından seçim yapılacağı zaman her bir model için BIC değeri hesaplanır ve aralarından en küçük değere sahip olanı seçerek uygun olan model dereceleri belirlenmiş olur. Farklı kaynaklarda değişik tanımlanan BIC istatistikleri olsa da en yüksek olabilirlik tahminlerine dayandığı için hepsinin sonucu da aynı model derecelerinin seçilmesine neden olacaktır.

3.1.4. Son Kestirim Hatası

Model parametreleri belirlenirken kullanılan bir başka kriter ise Son Kestirim Hatası (FPE) istatistiğidir. Bu istatistik 3.1.4 eşitliğinde gösterilmiştir. Eşitlikten de görüldüğü gibi FPE istatistiği otoregresif süreçlerin derecesi olan p değerini belirlemek için kullanılır.

$$FPE = \hat{\sigma}^2 \frac{n+p}{n-p} \quad (3.1.4)$$

$\hat{\sigma}^2$, σ^2 'nin en yüksek olabilirlik tahmincisi ve n örnek hacmidir. FPE istatistiğini en küçük yapan değer modelin derecesi olarak belirlenir. Ayrıca $n\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ 'nin asimptotik dağılımı $(n-p)$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımı olduğundan dolayı FPE 'nin aldığı değer ki-kare tablo değeri ile karşılaştırıldığında modelin otoregresif sürece uygunluğu kontrol edilebilir (Brockwell ve Davis, 1991: 302; Akdi, 2003:185).

Akdi (2003), AIC, BIC ve FPE istatistikleri arasındaki ilişkiyi aşağıdaki şekilde tanımlamıştır. Burada $\hat{\sigma}_x^2$ serinin varyansı için bir tahminci, $\hat{\sigma}_z^2$ ise beyaz gürültü serisinin varyansı için bir tahmincidir.

$$AIC \cong n \ln(FPE)$$

$$BIC \cong AIC + k(\ln(n)-1) + k \ln \left[k^{-1} \left(\frac{\hat{\sigma}_x^2}{\hat{\sigma}_z^2} - 1 \right) \right]$$

3.1.5. Schwartz Bilgi Kriteri

Schwartz, uygun olduğu düşünülen farklı dereceli modeller arasından seçim yapılmasını bayes çözümü altında 3.1.5 formülü ile tanımlamıştır. $\hat{\sigma}_z^2$, σ_z^2 'nin en yüksek olabilirlik tahmini ve k modeldeki parametrelerin sayısıdır (Wei, 1994:153-154).

$$SIC = n \ln \hat{\sigma}_z^2 + k \ln n \quad (3.1.5)$$

İncelenecek olan zaman serisini yeterli bir şekilde temsil edeceği düşünülen farklı sayıdaki parametreye sahip olan modellerin SIC değerleri hesaplanarak aralarından en küçük değere sahip olan seçilir. Bu seçilmiş olan model ile uygun olan dereceleri de belirlenmiş olur.

3.1.6. Hannan-Rissanen Kriteri

Model seçimindeki bir diğer bir yöntem ise Hannan ve Rissanen (1982) tarafından uygulanmış bir yöntemdir. Sürecin durağan olduğu ya da durağan hale gelinceye kadar farkı alındığı ve n sayıda gözlemden oluştuğu varsayılmıştır. Uygulamada (p, q) değerlerinin kombinasyonları için model, en küçük kareler ile tahmin edilir ve $\hat{\sigma}_z^2$ değerinin en yüksek olabilirlik hata varyansının tahmini olduğunu kabul ederek 3.1.6 denklemini tanımlamışlardır.

$$HRC = \log \hat{\sigma}_z^2 + (p + q) \log n/n \quad (3.1.6)$$

Bu kriter otoregresif- hareketli ortalama süreçlerinin derecelerini belirlerken tutarlı tahminçiler sağlayacaktır. Bu yöntem uygulandığında genel olarak daha memnun edici sonuçlar alındığı görülmüş olsa da bazı süreçlerde her zaman Hannan ve Rissanen kriterinin seçmiş olduğu modelle çalışılması yerine örnek otokorelasyonu ve kısmi otokorelasyon çalışmalarıyla birleştirilerek kullanılması önerilir. En çok tercih edilen tek bir modelle sınırlandırılmasındansa, kritere göre en yüksek dereceli iki ya da üç modele bakılması daha faydalı olacaktır (Granger ve Newbold, 1986: 83).

3.1.7. Hannan-Quinn Bilgi Kriteri

Hannan ve Quinn ceza faktörünü tekrar eden bir logaritma ile düzelterek yeni bir model seçim kriteri tanımlamışlardır. Bu model seçim kriterinde ceza faktörünün

büyüme hızı azaldığı için tutarlı bir derece olarak görülebilir. Bu kriter aşağıdaki 3.1.7 formülü ile gösterilmiştir. Bu formüldeki n örnek hacmini, $\hat{\sigma}_z^2$, σ_z^2 'nin en yüksek olabilirlik tahmini ve k , modeldeki parametre sayısını göstermektedir (Beran, Bhansali ve Ocker, 1998:921-934; Hannan ve Quin, 1979:190-195).

$$HIC = n \log(\hat{\sigma}_z^2) + 2k \log \log(n) \quad (3.1.7)$$

3.1.9. Parzen'nin CAT Kriteri

Parzen 'nin önerdiği bir kriter olan CAT (criterion for autoregressive transfer functions), otoregresyon modelleri için model seçiminde kullanılan bir kriterdir. Bu kriter 3.1.8 eşitliğinde verilmiştir. Burada $\hat{\sigma}_j^2$, uydurulan modelin AR(j) olduğu zaman σ_z^2 'nin yansız bir tahminidir ve n gözlem sayısıdır. Modeller içerisinde CAT(p) değerinin en küçük olduğu p derecesi seçilir (Wei, 1994: 154).

$$CAT(p) = \begin{cases} -\left(1 + \frac{1}{n}\right), & p = 0 \\ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^p \frac{1}{\hat{\sigma}_j^2} - \frac{1}{\hat{\sigma}_p^2} & p = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.1.8)$$

3.2. MODEL TANI KONTROLÜ

Ekonomiden mühendislik, meteoroloji, sağlık, eğitim gibi bir çok alanda zaman serisi verileri ile karşılaşilmektedir. Bu serileri açıklamak, tanımlamak ve ileriye yönelik tahmin yapmak amacı ile analiz edebileceği gibi kontrol amaçlıda analiz edilebilir.

İleriye yönelik tahmin yapmak için gözlemlenen zaman serisine bir model uydurarak modelin parametreleri tahminlenir. Parametreler tahminlendikten sonra yapılması gereken model tanı kontrolleri yapılmazsa, bu model tahmin için kullanıldığında yanıltıcı sonuçlara neden olabilir. O halde gözlenen bir stokastik sürece uydurulacak olan model tipi tanımlanarak, modelin parametreleri tahmin

edildikten sonra, tanımlanacak modelin seriye uygunluğunun kontrol edilmesi gerekir.

Bu başlık altında model tanı kontrolünde kullanılan artıklara uygulanan bazı tanı kontrol yöntemleri açıklanmıştır.

3.2.1. Artıklara Uygulanan Tanı Kontrol Yöntemleri

Bir seriye istatistiksel modelin uydurulmasının en iyi tarafı, uygun olan modelden elde edilecek olan tahminlenmiş değerlerle gözlemlenen değerleri karşılaştırabilmektir. Uydurulan model uygunsa artıklar model ile birlikte tutarlı hareket etmelidir (Brockwell ve Davis, 1991:306). Yani iyi bir modele sahipsek artıkların rassal ve sıfıra yakın olması beklenir ve model, çeşitli yollardan artıkların grafiğine bağlı olarak doğrulanır (Chatfield, 1989:61).

Artıklara uygulanan tanı kontrollerinde artıkların otokorelasyonunun kontrolü, portmanto iyi-uyum testi, artıkların karelerinin kontrolü, kümülatif periodogram testi, Durbin-Watson testi ve lagrange çarpanı testi incelenmiştir.

3.2.1.1. Artıkların Otokorelasyonunun Kontrolü

Bir zaman serisi modeli doğru tanımlanmışsa artıkları (z_t) , white-noise sürecini oluşturacaktır. Gerçek artıkların korelogramı da her bir otokorelasyon katsayısı, N 'in yeterli büyüklükteki değeri için, $1/N$ varyans ve sıfır ortalama ile yaklaşık olarak normal dağılımlıdır. Doğru bir model ile tanımlanan bir sürecin gerçek artıkları (z_t) , bilinmediğinden kendi tahminleri yerine uydurulan modelin artıkları $(\hat{z}_t)$ ile çalışılacaktır (Granger ve Newbold, 1986:99, Chatfield, 1989:61).

Parametreleri için en yüksek olabilirlik tahminleri $(\hat{\phi}, \hat{\theta})$ için elde edilen model, 3.1.10 denklemindeki gibi tanımlanmış olsun.

$$\hat{\phi}(B)\nabla^d x_t = \hat{\theta}(B)\hat{z}_t \quad (3.1.9)$$

$$\hat{\phi}(B)(1-B)^d x_t = \hat{\theta}(B)\hat{z}_t$$

Yukarıdaki modelden artıkları $(\hat{z}_t)$ çekildiğinde model aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\hat{z}_t = \hat{\theta}^{-1}(B) \hat{\phi}(B) \nabla^d x_t$$

Eğer model yeterli ise $\hat{z}_t \simeq z_t$ olması beklenir. $\hat{\theta}(B) \hat{z}_t = \hat{\phi}(B) w_t$ ifadesinden tekrarlı olarak hesaplanarak artıkların 3.1.12 formülüne ulaşılmıştır. $\nabla^d x_t$ ifadesi w_t olarak gösterilmiştir. İkinci bölümde tanımlanan AR, MA, ARMA ve ARIMA süreçleri tekrar hatırlanacak olursa;

$$\begin{aligned} AR(p) \rightarrow \quad x_t &= \hat{\phi}_1 x_{t-1} + \hat{\phi}_2 x_{t-2} + \dots + \hat{\phi}_p x_{t-p} + \hat{z}_t \\ \hat{z}_t &= (1 - \hat{\phi}_1 B - \hat{\phi}_2 B^2 - \dots - \hat{\phi}_p B^p) x_t \\ \hat{z}_t &= \hat{\phi}(B) x_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MA(q) \rightarrow \quad x_t &= \hat{z}_t - \hat{\theta}_1 \hat{z}_{t-1} - \hat{\theta}_2 \hat{z}_{t-2} - \dots - \hat{\theta}_q \hat{z}_{t-q} \\ x_t &= (1 - \hat{\theta}_1 B - \hat{\theta}_2 B^2 - \dots - \hat{\theta}_q B^q) \hat{z}_t \\ x_t &= \hat{\theta}(B) \hat{z}_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ARMA(p, q) \rightarrow (1 - \hat{\phi}_1 B - \hat{\phi}_2 B^2 - \dots - \hat{\phi}_p B^p) x_t &= (1 - \hat{\theta}_1 B - \hat{\theta}_2 B^2 - \dots - \hat{\theta}_q B^q) \hat{z}_t \\ \hat{\phi}(B) x_t &= \hat{\theta}(B) \hat{z}_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ARIMA(p, d, q) \rightarrow (1 - \hat{\phi}_1 B - \hat{\phi}_2 B^2 - \dots - \hat{\phi}_p B^p) \nabla^d x_t &= (1 - \hat{\theta}_1 B - \hat{\theta}_2 B^2 - \dots - \hat{\theta}_q B^q) \hat{z}_t \\ \hat{\phi}(B) \nabla^d x_t &= \hat{\theta}(B) \hat{z}_t \\ \hat{\theta}(B) \hat{z}_t &= \hat{\phi}(B) \hat{w}_t \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

3.1.10 denkleminde ilk önce $\hat{\phi}(B)$ ifadesini açık halde gösterilerek ifade eder ve sonrasında aynı işlemleri $\hat{\theta}(B)$ ifadesi için de yapılırsa bu işlemlerin sonucunda

$\hat{z}_t$ değerlerini 3.1.11 denklemindeki gibi ifade edilir ve bu denklemden de değerler hesaplanır.

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(B)\hat{z}_t &= (1 - \hat{\phi}_1 B - \hat{\phi}_2 B^2 - \dots - \hat{\phi}_p B^p) \hat{w}_t \\
\hat{\theta}(B)\hat{z}_t &= \hat{w}_t - \hat{\phi}_1 \hat{w}_{t-1} - \hat{\phi}_2 \hat{w}_{t-2} - \dots - \hat{\phi}_p \hat{w}_{t-p} \\
\hat{\theta}(B)\hat{z}_t &= \hat{w}_t - \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j \hat{w}_{t-j} \\
(1 - \hat{\theta}_1 B - \hat{\theta}_2 B^2 - \dots - \hat{\theta}_q B^q) \hat{z}_t &= \hat{w}_t - \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j \hat{w}_{t-j} \\
\hat{z}_t - \hat{\theta}_1 \hat{z}_{t-1} - \hat{\theta}_2 \hat{z}_{t-2} - \dots - \hat{\theta}_q \hat{z}_{t-q} &= \hat{w}_t - \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j \hat{w}_{t-j} \\
\hat{z}_t - \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j \hat{z}_{t-j} &= \hat{w}_t - \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j \hat{w}_{t-j} \\
\hat{z}_t &= \hat{w}_t - \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j \hat{w}_{t-j} + \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j \hat{z}_{t-j}
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Serinin uzunluğu arttıkça tahmini artıkların $\hat{z}_t$ beyaz gürültüsü gerçek artıklara z_t yakın olacaktır. Bu özellikten de modelin yeterliliği hakkında yorum yapılabilecektir. Gerçek parametre değerleri bilmediği zaman 3.1.12 denkleminde gösterilen $\hat{\phi}$ ve $\hat{\theta}$ parametreleri ve tahmini artıklar olan $\hat{z}_t$ değerleri ile çalışılır. $\hat{z}_t$ 'nin otokorelasyon katsayıları $r_k(\hat{z}_t)$, model yetersizliği ile ilgili kanıtlar verebilir. $r_k(\hat{z}_t)$ değerleri 3.1.13 formülü ile bulunur.

$$\hat{z}_t = \hat{\theta}^{-1}(B) \hat{\phi}(B) \hat{w}_t \tag{3.1.12}$$

$$r_k(\hat{z}_t) = \frac{\sum_{t=k+1}^n \hat{z}_t \hat{z}_{t-k}}{\sum_{t=1}^n \hat{z}_t^2} \tag{3.1.13}$$

k gecikmesinin kısmen düşük değerleri için artıkların örnek otokorelasyonunun standart sapmasının $\pm n^{-1/2}$ sınırları aşmaması gerekir. Yüksek

gecikme değerlerinin standart sapmalarının $\pm 2n^{-1/2}$ aralığında olan artıkların örnek otokorelasyonlarının model yeterliliğinin test edilmesi için basit bir kontrol yöntemi olacaktır (Granger ve Newbold, 1986:99).

3.2.1.2. Portmanto İyi-Uyum Testi

Portmanto testi, modelin her bir artık otokorelasyonlarının güven sınırları içerisinde olup olmadığını kontrol etmek yerine, yeterli sayıdaki M tane otokorelasyonun incelenmesine dayanır. Yeterli sayıdan anlatılmak istenen en az 10-25 değerleridir. İlk M otokorelasyonu test etmek, bir bütün olarak alınan modelin yetersiz olduğunu gösterebilir.

Box, Jenkins ve Reinsel, ARIMA(p,d,q) sürecinin ilk M otokorelasyonlarına, $r_k(\hat{z})$ $k=1,2,\dots,M$, sahip olduğumuzu varsayarak Portmanto İstatistiğini 3.1.14 formülü ile tanımlamışlardır. Buradaki n , $n = N - d$ 'dir.

$$Q = n \sum_{k=1}^M r_k^2(\hat{z}) \quad (3.1.14)$$

Uydurulmuş modelin portmanto istatistiği hesaplanır. Eğer bu model uygun ise yaklaşık olarak $(M - p - q)$ serbestlik dereceli $\chi^2_{(M-p-q)}$ dağılımı gösterecektir. Model uygun değilse portmanto istatistiği değeri şişirilmiş olacaktır. Yani aşığıdaki hipotezlere göre modelin uygun olup olmadığı belirlenir.

H_0 : Uydurulan model uygundur.

H_A : Uydurulan model uygun değildir.

Hesaplanan Q istatistiği, $(M - p - q)$ serbestlik dereceli ve uygun anlamlılık düzeyi ile χ^2 tablo kritik değerinden büyük olduğunda ($Q > \chi^2_{(M-p-q)}$), H_0 hipotezi reddedilir. Bu durumda uydurulan model uygun değildir. Hesaplanan Q istatistiği, $(M - p - q)$ serbestlik dereceli ve uygun anlamlılık düzeyi ile χ^2 tablo kritik değerinden küçük olduğunda ($Q < \chi^2_{(M-p-q)}$) ise H_0 hipotezi reddedilemez, yani uydurulan modelin uygun olduğu söylenir.

Box ve Jenkins (1970) 'in Portmanto istatistiği tanımı, yetersiz örnek büyüklükleri ile çalışıldığı zaman χ^2 dağılımına yakınsaması konusunda zayıf kalmaktadır. Bu yüzden Ljung-Box buna bir alternatif olarak portmanto istatistiği tanımlamışlardır. Bu istatistik 3.1.15 formülü ile verilmiştir (Godfrey, 1979:67-68).

$$Q^* = n(n+2) \sum_{k=1}^M (n-k)^{-1} r_k^2(\hat{z}) \quad (3.1.15)$$

H_0 : Uydurulan model uygundur.

H_A : Uydurulan model uygun değildir.

n değerinin küçük olduğu durumlarda hesaplanan Q^* istatistiği, $(M - p - q)$ serbestlik dereceli ve uygun anlamlılık düzeyi ile χ^2 değerinden küçük olduğu durumlarda H_0 hipotezi reddedilemez (yani model uygundur), aksi durumda $(Q^* > \chi^2_{(M-p-q)})$ ise H_0 hipotezi reddedilir yani modelin uygun olmadığı söylenir.

3.2.2.3. Artıkların Karelerinin Kontrolü

Bir zaman serisinin artıklarının karesi incelenerek bu zaman serisine uydurulan modelin uygunluğu kontrol edilebilir. Hatırlanacağı gibi otokorelesyon katsayıları 3.1.13 formülü ile tanımlanmıştı ve bu formüle dayanarak portmanto istatistiği ile modelin uygun olup olmadığı belirlenmişti. Aynı şekilde portmanto istatistiğine dayanan ancak artıkların kendisi ile değil de kareleriyle hesaplanacak bir istatistik tanımlanabilir. Bu yöntem, ele alınan serinin artıklarının birbiriyle değil de karelerinin birbiriyle bağlantılı olduğu durumlarda kullanılmaktadır. Artıkların kareleri 3.1.17 formülü ile aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$r_k^*(\hat{z}_t) = \frac{\sum_{t=k+1}^n (\hat{z}_t^2 - \bar{z}^2)(\hat{z}_{t-k}^2 - \bar{z}^2)}{\sum_{t=k+1}^n (\hat{z}_t^2 - \bar{z}^2)} \quad (3.1.17)$$

Uydurulan modelin artıklarının karelerinin örnek otokorelasyon katsayıları bulunduğundan sonra 3.1.18 formülü ile tanımlanan portmanto istatistiği hesaplanır. Hesaplanan bu istatistik model yeterliliği testi varsayımı altında, yaklaşık olarak χ^2 dağılımı gösterecektir.

$$Q^{**} = n(n+2) \sum_{k=1}^M (n-k)^{-1} r_k^{*2}(\hat{z}) \quad (3.1.18)$$

Hesaplanan Q^{**} istatistiği $(M-p-q)$ serbestlik dereceli ve uygun anlamlılık düzeyi ile χ^2 tablo değerinden küçük olduğu durumda ($Q^{**} < \chi_{(M-p-q)}^2$), uydurulan modelin uygun olduğu söylenir. Aksi durumda ($Q^{**} > \chi_{(M-p-q)}^2$) ise model yeterliliği reddedilir (Brockwell ve Davis, 1986:311-312).

3.3.1.4. Kümülatif Periodogram Testi

Bir zaman serisinin uyumunda serinin periyodik özellikleri yeterince dikkate alındığı zaman artıkların otokorelasyon fonksiyonu periyodik değişimlere karşı duyarlı bir gösterge olmayacaktır. Bu yüzden artık otokorelasyonlarının incelenmesi yerine artıkların kümülatif periyodogram kontrolünün kullanılması Box, Jenkins ve Reinsel (1994) tarafından önerilmiştir.

n hacmindeki zaman serisinin artıklarının periyodogramı; $f_i = i/n$ frekansı, z_t de artıkları ifade ettiğinde 3.1.19 formülü ile gösterilecektir. f_i , farklı frekansların sinüs ve kosinüs dalgaları ile artıkların arasındaki ilişkiyi gösterme aracıdır. Artıkların frekanslarının verildiği bir model, aynı frekansta sinüs ve kosinüs dalgaları güçlendirilmiş olur ve böylece büyük değerler oluşturur.

$$I(f_i) = \frac{2}{n} \left[\left(\sum_{t=1}^n z_t \cos(2\pi f_i t) \right)^2 + \left(\sum_{t=1}^n z_t \sin(2\pi f_i t) \right)^2 \right] \quad (3.1.19)$$

Beyaz gürültü için güç spektrumu $p(f)$, 0 dan 0.5 bant frekansı üzerinden $2\sigma_z^2$ sabit bir değere sahiptir. Dolayısıyla da f 'e karşı çizilen white-noise için kümülatif spektrum (0,0) dan (0.5, σ_z^2) ye devamlı bir düz çizgi olur. Yani $p(f)/\sigma_z^2$, (0,0)' dan (0.5,1) 'e devamlı bir düz çizgi olur.

Artıkların kümülatif periyodogram kontrolünde standartlaştırılmış kümülatif periyodaogram olarak adlandırılan $C(f_j)$ değerleri kullanılır. 3.1.20 eşitliğinde gösterilen s^2 , σ_z^2 'nin tahminidir.

$$C(f_j) = \frac{\sum_{i=1}^j I(f_i)}{n s^2} \quad (3.1.20)$$

Eğer parametreler kesin olarak biliniyorsa ve model yeterliyse artıklar bir white-noise serisinin özelliklerine sahip olacaktır. Artıkların kümülatif periyodogram kontrolünde white-noise serisi için f_j 'ye karşı $C(f_j)$ 'nin grafiği (0,0) ve (0.5,1) noktalarını birleştiren düz bir çizgide dağılmış olacaktır. Eğer artıkların kümülatif periyodogramı bu çizgiden sistematik sapmalar gösteriyorsa, artıkların rastgele olmadığını ve modelin yetersiz olduğunu anlaşılmaması sağlayacaktır.

Artıkların dönemsellikleri $I(f_i)$ değerine yakın bir seriyi gösterme eğiliminde olacaktır. Bu değerler büyük olduğundan $C(f_j)$ de birbirini izleyerek düz çizgi üzerinde bir tümsek oluşturacaktır.

Uygulama parametrelerin kesin değerleri bilinmediğinden tahmini değerleri ile artıkların ($\hat{z}_t$) kümülatif periyodogram kontrolünün dikkatli bir şekilde yapılması ek tanı kontrolü sağlayacaktır.

Kümülatif periyodogram testi, Box, Jenkins ve Reinsel (1994) tarafından incelenen C serisi için uydurulan IMA(0,1,1) ve IMA(0,2,2) süreçlerinin Şekil 3.1'de gösterilen kümülatif periyodogram grafiğine bakarak daha iyi açıklanabilir. Şekil 3.1' in (a) 'daki şeklinde, (0,1,1) dereceli IMA modelinin artıklarının standartlaştırılmış kümülatif periyodogram noktaları, belirlenen doğrusal limit

çizgilerinden belirgin sapmaların olduğu rahatça görülebilir. Bu sapmalar düşük frekans değerlerinde oldukça belirgindir. Diyagramda periyodun yanı sıra frekanslarında belirlenmesi ard arda sapmaların oluşturduğu tümseğin dönemsellikten kaynaklanabileceğine işaret edebilir. Örneğin aylık bir satış verisinde 12, 24, 36 periyotlarına yakın tümsekler meydana gelmişse mevsimsel etkilerin yetersiz hesaplandığı düşünülebilir.

Şekil 18' in (b)' deki şekli ise iyi uyumlu (0,2,2) dereceli IMA modelinin standartlaştırılmış kümülatif periyodogram grafiğini göstermektedir. Kümülatif periyodogramın noktaları belirlenen çizgi etrafına daha yakın dağılım göstermiştir. Her iki grafikte %5 ve %25 Kolmogorov-Smirnov değerleri de gösterilmiştir.

$\mp K_e / \sqrt{q}$ değerleri %5 ve %25 için limit çizgilerini vermektedir. Buradaki q , n çift sayı olduğunda $q = (n-2)/2$, n tek sayı olduğunda ise $q = (n-1)/2$ değerini almaktadır. Buna göre de C serisinin $q = (224-2)/2 = 111$ olduğundaki %5 ve %25 sınırları sırasıyla $\pm 1.36 / \sqrt{111} = \pm 0.13$ ve $\pm 1.02 / \sqrt{111} = \pm 0.10$ olur ve standartlaştırılmış kümülatif periyodogram noktaları bu sınırlara göre sapma gösterir. K_e için yaklaşık değerler Tablo 2 de verilmiştir.

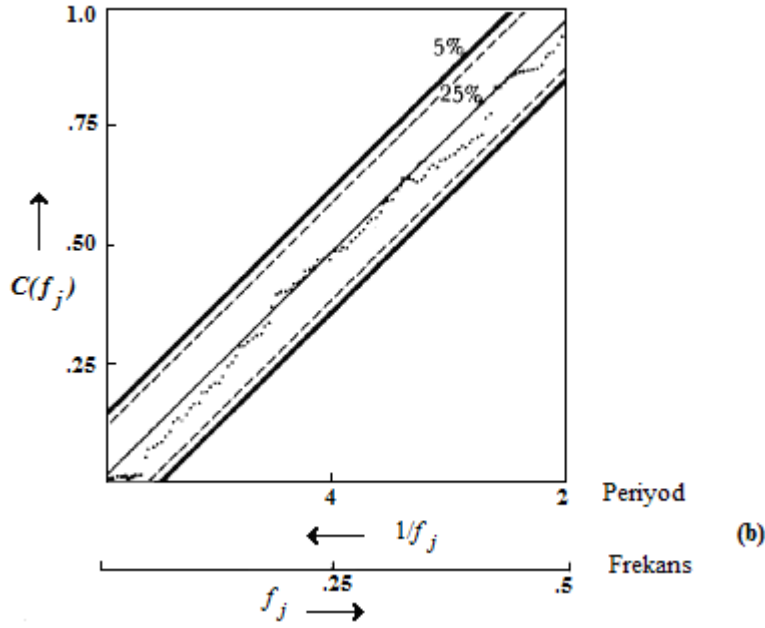
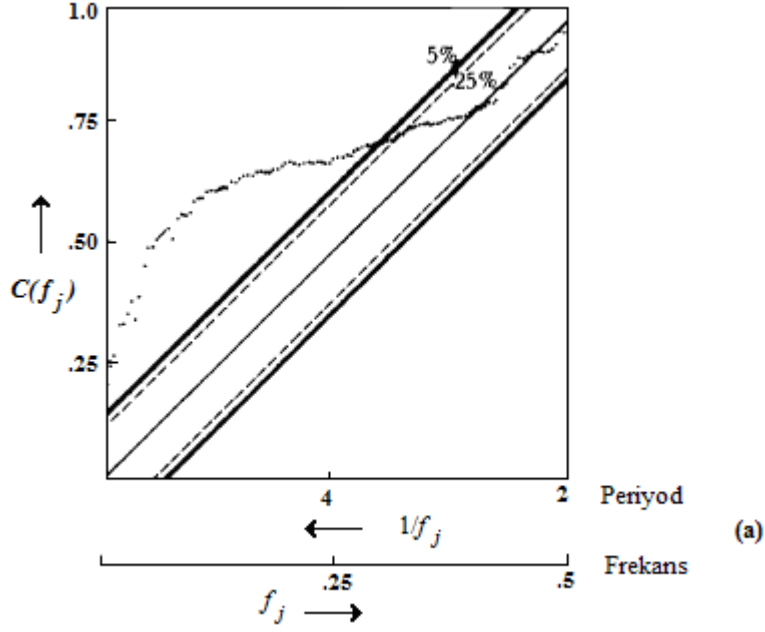
Tablo 2: Kümülatif Periyodogram Testi İçin Yaklaşık Olasılık Sınırlarının Hesaplanması İçin Katsayılar.

ε	0.01	0.05	0.10	0.25
K_ε	1.63	1.36	1.22	1.02

Kaynak: Box, Jenkins, Reinsel, s. 324

Artıkların kümülatif periyodogram testine göre C serisine uydurulan IMA(0,2,2) modeli uygun gözükse de bir başka kontrol testine göre bu modelin C serisinin özelliklerini tam olarak temsil edemediği sonucuna ulaşılabilir. Bu yüzden seriyi tek bir kontrol yöntemine göre test etmektense birkaç testin sonuçlarına göre modeli belirlemek daha uygun olacaktır.

Şekil 18: C Serisi: (0,2,2) Dereceli (b) ve (0,1,1) Dereceli (a) En İyi Uydurulmuş Süreçlerin Artıklarının Kümülatif Periyodogramları.



Kaynak: Box, Jenkins, Reinsel, s. 323

3.3.1.5. Durbin-Watson Testi

Artıkların test edilmesi için kullanılan diğer bir test de Durbin-Watson istatistiğidir. Bu test istatistiği DW sembolü ile 3.1.21 eşitliğinde, Granger ve Newbold, (1986) de tanımlandığı gibi verilmiştir.

$$DW = \sum_{t=2}^n (\hat{z}_t - \hat{z}_{t-1})^2 / \sum_{t=1}^n \hat{z}_t^2 \quad (3.1.21)$$

Bu denklemdeki $(\hat{z}_t - \hat{z}_{t-1})^2$ ifadesinin açık bir halde gösterilmesi ile aşağıdaki sonuçlar elde edilecektir.

$$DW = \sum_{t=2}^n (\hat{z}_t^2 - 2\hat{z}_t \hat{z}_{t-1} + \hat{z}_{t-1}^2) / \sum_{t=1}^n \hat{z}_t^2$$

$$DW = \sum_{t=2}^n \hat{z}_t^2 - 2 \sum_{t=2}^n \hat{z}_t \hat{z}_{t-1} + \sum_{t=2}^n \hat{z}_{t-1}^2 / \sum_{t=1}^n \hat{z}_t^2$$

$\sum_{t=1}^n \hat{z}_t^2 \approx \sum_{t=2}^n \hat{z}_t^2 \approx \sum_{t=2}^n \hat{z}_{t-1}^2$ ifadesine göre de Durbin-Watson istatistiği 3.1.22 eşitliğinde gösterilmiştir.

$$DW \approx \left(2 \sum_{t=1}^n \hat{z}_t^2 - 2 \sum_{t=2}^n \hat{z}_t \hat{z}_{t-1} \right) / \sum_{t=1}^n \hat{z}_t^2 \quad (3.1.22)$$

$$DW \approx 2(1 - r_1) \quad (3.1.23)$$

Bu eşitliğe göre de $DW \approx 2(1 - r_1)$ olur. Buradaki r_1 , $\hat{z}_t$ artıklarının birinci dereceden otokorelasyon katsayısıdır. r_1 sıfır olduğunda Durbin-Watson istatistiği 2'ye eşit olacaktır. r_1 'in pozitif değerleri $0 < DW < 2$ aralığını, negatif değerleri de $2 < DW < 4$ aralığını belirtir. $|r_1|$ değerleri ile de DW , 2'den büyük olacaktır (Granger ve Newbold, 1986: 193).

Yukarıda tanımlanan Durbin-Watson istatistiği, zaman serisi verilerine uydurulmuş olan modelin seriyi yeterli bir şekilde temsil edip etmediğinin araştırılması için kullanılacaktır. Uygunluğu araştırılan modelin tahmini artıkları bulunduktan sonra DW istatistiği hesaplanır. $r_1 \approx 0$ ve $DW \approx 2$ değerini aldığı anda seriye uydurulan modelin uygun olduğu söylenir.

3.2.1.6. Lagrange Çarpanı Testi

Bu çalışma kapsamındaki modelin uygunluğunun kontrol edilmesi için uygulanan testlerin sonuncusu olarak skor testi olarak da bilinen Lagrange Çarpanı Testi incelenmektedir. Bu testi; verilen x_t serisinin sıfır hipotezi olan $ARMA(p,q)$ modeline karşı iki alternatif hipotez ile test edilebilir. Bu hipotezler aşağıdaki gibidir (Godfrey, 1979:67).

$$H_0 = ARMA(p, q)$$

$$H_A = ARMA(p+m, q)$$

$$H_B = ARMA(p, q+m)$$

Verilen bu H_0 , H_A ve H_B hipotezlerinin zaman serisi modelleri sırası ile 3.1.24, 3.1.25 ve 3.1.26 ile gösterilmiştir.

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) x_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) z_t \quad (3.1.24)$$

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_{p+m} B^{p+m}) x_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) z_t \quad (3.1.25)$$

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) x_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_{q+m} B^{q+m}) z_t \quad (3.1.26)$$

Tanımlanan alternatif H_A ve H_B modelleri için test edilecek kısıtlar sırası ile $\phi_{p+1} = \dots = \phi_{p+m} = 0$ ve $\theta_{q+1} = \dots = \theta_{q+m} = 0$ dır.

Lagrange çarpanı testi, ekstra m parametresine de bağlı olarak, log en yüksek olabilirlik fonksiyonlarının parametrelere göre kısmi türevlerini baz alır. Bu türevler

asimptotik normal dağılıma sahiptir. Bu yöntemde parametrelerin en yüksek olabilirlik tahminleri ile çalışmak sayısal avantaj sağlamaktadır (Granger ve Newbold, 1986:96-97, Box, Jenkins ve Reinsel, 1994:318).

ARMA(p,q) süreci için z_t artıkları ile elde edilen log en yüksek olabilirlik fonksiyonu 3.1.27 denklemi ile gösterilmiştir (Newbold, 1980:463-465).

$$\begin{aligned}\log L &= \text{const} - \frac{n}{2} \log \sigma_z^2 - \frac{\sum_{t=1}^n z_t^2}{2\sigma_z^2} \\ &= \text{const} - \frac{n}{2} \log \sigma_z^2 \\ &\quad - \frac{\sum_{t=1}^n \left[\left(1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q \right)^{-1} \left(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p \right) X_t \right]^2}{2\sigma_z^2}\end{aligned}\quad (3.1.27)$$

Otoregresif ve hareketli ortalama parametrelerine (ϕ ve θ) bağlı olarak yukarıda tanımlanan log en yüksek olabilirlik fonksiyonunun kısmi türevleri 3.1.28 formülleri ile gösterilmiştir. Lagrange Çarpanı Testi bu türevleri temel almaktadır.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log L}{\partial \phi_i} &= \frac{\sum_{t=1}^n \left(1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q \right)^{-1} X_{t-i} z_t}{\sigma_z^2} \\ \frac{\partial \log L}{\partial \theta_j} &= \frac{\sum_{t=1}^n \left(1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q \right)^{-2} \left(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p \right) X_{t-j} z_t}{\sigma_\varepsilon^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n \left(1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q \right)^{-1} z_{t-j} z_t}{\sigma_z^2}\end{aligned}\quad (3.1.28)$$

n hacmindeki X_t serisinin sıfır ortalamalı durağan bir süreç olduğu varsayılır. Bu seri için ARMA(p,q) modeli tanımlarsak tahminlenecek olan model açık ve kapalı haliyle aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned}
(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) X_t &= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) z_t \\
(X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_p X_{t-p}) &= z_t - \theta_1 z_{t-1} - \theta_2 z_{t-2} - \dots - \theta_q z_{t-q} \\
\phi(B) X_t &= \theta(B) z_t
\end{aligned}$$

Tanımlanan bu modelin en yüksek olabilirlik tahminleri $\hat{\phi}_i$ ve $\hat{\theta}_j$ ile X_t sürecindeki gözlemlenen değerleri x_t olarak gösterildiğinde tahmini artıklar da aşağıdaki gibi gösterilecektir.

$$\hat{z}_t = \hat{\theta}^{-1}(B) \hat{\phi}(B) x_t$$

Bu modele göre de 3.1.29 ve 3.1.30 denklemlerinde gösterilen a_t ve b_t şeklinde iki yeni seri oluşturulmuş olur. Bu serilerden hesaplanacak olan artıklar ile Lagrange Çarpanı Test istatistiği tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(B) a_t &= x_t \\
(1 - \hat{\theta}_1 B - \dots - \hat{\theta}_q B^q) a_t &= x_t \\
a_t &= x_t + \hat{\theta}_1 a_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_q a_{t-q}
\end{aligned} \tag{3.1.29}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(B) b_t &= \hat{z}_t \\
(1 - \hat{\theta}_1 B - \dots - \hat{\theta}_q B^q) b_t &= \hat{z}_t \\
b_t &= \hat{z}_t + \hat{\theta}_1 b_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_q b_{t-q}
\end{aligned} \tag{3.1.30}$$

Örneğin; modeldeki problem m sayıda eklenmiş hareketli ortalama parametrelerine ihtiyaç duyulmasından kaynaklandığı durumda X_t serisi için ARMA(p,q) sıfır hipotezine karşı alternatif hipotez olan ARMA(p,q+m) test edilecektir. Lagrange Çarpanı testi α_i ve β_i parametreleri ile u_t 'nin hata terimi

olduğu, 3.1.31 denklemindeki model için log ML yöntemi (ya da en küçük kareler yöntemi) ile tahminlenerek uygulanabilir.

$$\hat{z}_t = \alpha_1 a_{t-1} + \dots + \alpha_p a_{t-p} + \beta_1 b_{t-1} + \dots + \beta_{q+m} b_{t-q-m} + u_t \quad (3.1.31)$$

u_t tahminlenen modelden gelen artıkları gösterdiğinde ARMA(p,q+m) modeli için lagrange çarpanı istatistiği LM gösterimi ile 3.1.32 denkleminde verilmiştir.

$$LM = \frac{n \left(\sum_{t=1}^n \hat{z}_t^2 - \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2 \right)}{\sum_{t=1}^n \hat{z}_t^2} = n \left(1 - \frac{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2}{\sum_{t=1}^n \hat{z}_t^2} \right) \quad (3.1.32)$$

Bu test istatistiği m serbestlik dereceli asimptotik χ^2 dağılımı gösterecektir. LM istatistiğinin büyük değerleri için alternatif bir modele karşı sıfır hipotezi reddedilecektir.

$$LM > \chi_m^2 \Rightarrow H_0 \text{ hipotezi reddedilir}$$

Ancak sıfır hipotezinin reddedilmesi belirlenmiş bir alternatif modeli kabul etmek için kanıt olarak değil de, uydurulmuş modelin yetersizliğine karşı bir kanıt olarak algılanmalıdır (Box, Jenkins ve Reinsel, 1994:320).

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

PETROL FİYATLARI İÇİN MODEL KONTROLÜ

4.1. ANALİZİ YAPILACAK VERİLER

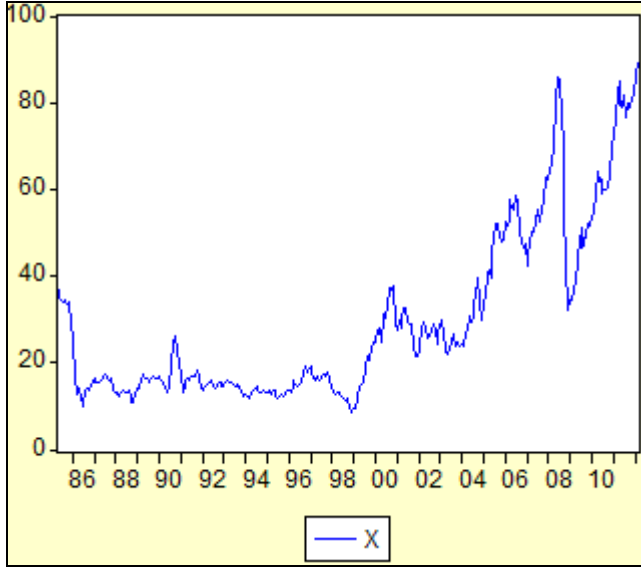
Analizi yapılacak olan veriler 1985:05 ve 2012:02 periyotları arasında Avrupa Merkez Bankasından elde edilmiş aylık petrol varil fiyatlarıdır. Bu veriler Ek kısmında 322 veriden oluşan Ek 1.7 tablosunda gösterilmiştir.

4.2. VERİLERİN DURAĞANLIĞININ SAĞLANMASI

Oluşturulan X serisine AR, MA, ARMA, ARIMA modellerinden hangisinin uygun olduğunun belirlenebilmesi ve 3. Bölümde anlatılmış olan testlerin uygulanabilmesi için öncelikle serisinin durağan olup olmadığına bakılmış ve serinin grafiği Şekil 19 da korelogramı ise Tablo 3 de gösterilmiştir. Grafiğine baktığımızda sabit bir değer etrafında dağılmadığı, korelogramı incelendiğinde ise otokorelasyon değerlerinin çok yavaş bir şekilde azaldığı görülmektedir. Bu yüzden serinin durağan olmadığı söylenir.

EViews: View/Graph/Line..

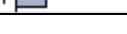
Şekil 19: Petrol Fiyatları



EViews programı aracılığıyla aşağıdaki işlem yapılarak petrol fiyatları serisinin korelogramının incelenmesi sağlanmıştır.

EViews: View/Correlogram..

Tablo 3: Petrol Fiyatları Serisinin Korelogramı

Correlogram of X						
Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.949	0.949	292.47	0.000
		2	0.898	-0.017	555.50	0.000
		3	0.848	-0.024	790.73	0.000
		4	0.797	-0.032	999.34	0.000
		5	0.749	-0.005	1184.0	0.000
		6	0.700	-0.037	1345.6	0.000
		7	0.662	0.091	1490.8	0.000
		8	0.632	0.050	1623.5	0.000
		9	0.609	0.055	1747.0	0.000
		10	0.587	-0.002	1862.1	0.000
		11	0.560	-0.059	1967.4	0.000
		12	0.533	-0.027	2063.1	0.000
		13	0.513	0.063	2151.8	0.000
		14	0.496	0.045	2235.3	0.000
		15	0.484	0.052	2315.0	0.000
		16	0.474	0.021	2391.6	0.000
		17	0.468	0.034	2466.5	0.000
		18	0.468	0.051	2541.6	0.000
		19	0.471	0.037	2618.0	0.000
		20	0.472	0.006	2695.1	0.000
		21	0.461	-0.103	2768.8	0.000
		22	0.440	-0.093	2836.1	0.000
		23	0.415	-0.040	2896.2	0.000
		24	0.398	0.088	2951.7	0.000
		25	0.384	0.051	3003.6	0.000
		26	0.368	-0.010	3051.3	0.000
		27	0.353	-0.014	3095.4	0.000
		28	0.339	-0.042	3136.2	0.000
		29	0.326	-0.028	3174.0	0.000
		30	0.315	0.025	3209.4	0.000
		31	0.305	0.048	3242.7	0.000
		32	0.296	0.036	3274.1	0.000
		33	0.287	-0.004	3303.8	0.000
		34	0.277	-0.048	3331.5	0.000
		35	0.268	-0.017	3357.6	0.000
		36	0.259	-0.004	3382.1	0.000

Seriye durağan hale getirmek için uygulanan işlemler, EViews programı aracılığıyla aşağıda gösterilmiştir.

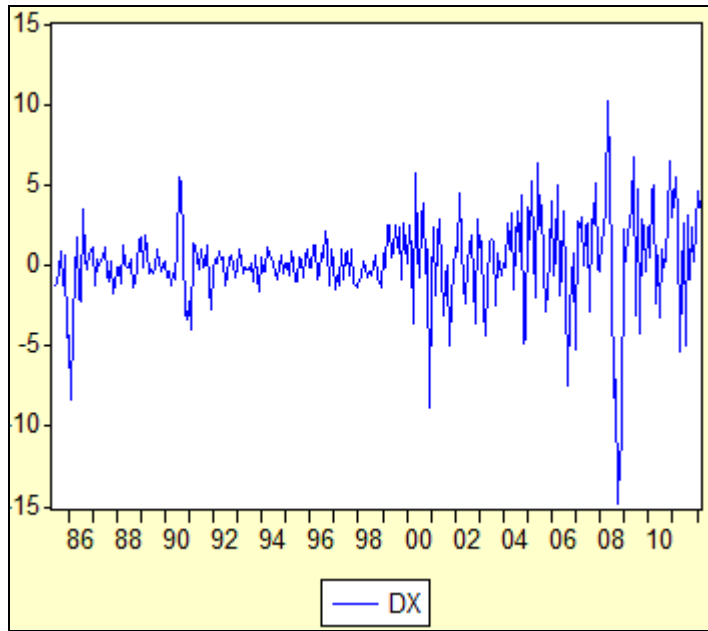
EViews:

*Komut satırı: series dx=d(x) veya
series dx=x-x(-1)*

Bu şekilde 1. farkları elde edilen serinin grafiği EViews programı aracılığıyla aşağıda gösterilmiştir.

EViews: View/Graph/Line..

Şekil 20: 1. Farkı Alınmış x Serisi



Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi trend ortadan kalkmış ve veriler sıfırın etrafında dağılım göstermiştir. Birinci dereceden farkı alınan serinin korelogramına (Tablo 4) bakıldığında, otokorelasyon değerlerinin hızlı bir şekilde azaldığı görülmektedir. Petrol serisinin durağanlığı birinci farkı alınarak sağlanmıştır.

EViews: View/Correlogram..

Tablo 4: dx Serisinin Korelogramı

Correlogram of DX						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.352	0.352	40.134	0.000
		2	0.184	0.069	51.134	0.000
		3	0.041	-0.050	51.671	0.000
		4	-0.089	-0.116	54.270	0.000
		5	-0.144	-0.089	61.077	0.000
		6	-0.206	-0.123	75.015	0.000
		7	-0.098	0.038	78.170	0.000
		8	-0.057	-0.003	79.240	0.000
		9	-0.037	-0.034	79.706	0.000
		10	0.073	0.074	81.488	0.000
		11	0.090	0.027	84.222	0.000
		12	0.009	-0.089	84.246	0.000
		13	-0.089	-0.118	86.916	0.000
		14	-0.071	-0.004	88.614	0.000
		15	-0.058	0.006	89.752	0.000
		16	-0.138	-0.101	96.211	0.000
		17	-0.112	-0.048	100.50	0.000
		18	-0.058	-0.017	101.66	0.000
		19	-0.010	-0.002	101.70	0.000
		20	-0.016	-0.047	101.78	0.000
		21	0.027	-0.006	102.03	0.000
		22	0.080	0.029	104.26	0.000
		23	0.075	0.033	106.20	0.000
		24	0.020	-0.033	106.33	0.000
		25	0.140	0.136	113.19	0.000
		26	0.066	-0.023	114.72	0.000
		27	0.027	0.001	114.97	0.000
		28	-0.005	-0.004	114.98	0.000
		29	-0.035	-0.036	115.42	0.000
		30	0.001	0.028	115.42	0.000
		31	-0.057	-0.020	116.59	0.000
		32	-0.065	-0.059	118.09	0.000
		33	0.003	0.024	118.09	0.000
		34	-0.013	-0.006	118.16	0.000
		35	0.046	0.048	118.93	0.000
		36	0.048	0.002	119.78	0.000

Serinin durağan olup olmadığı, grafiğinin incelenmesi ve korelogramının kontrol edilmesinin dışında birçok farklı test ile kontrol edilebilir. Birim kök testleri olarak adlandırılan bu testlerden Augmented-Dickey Fuller (ADF) Testine göre de

serisinin durağanlığı kontrol edilmiştir. ADF Testi ile durağanlığın tekrar kontrol edilmesinin nedeni, durağanlığın daha güçlü ve kesin bir sonuca dayandırılmasıdır.

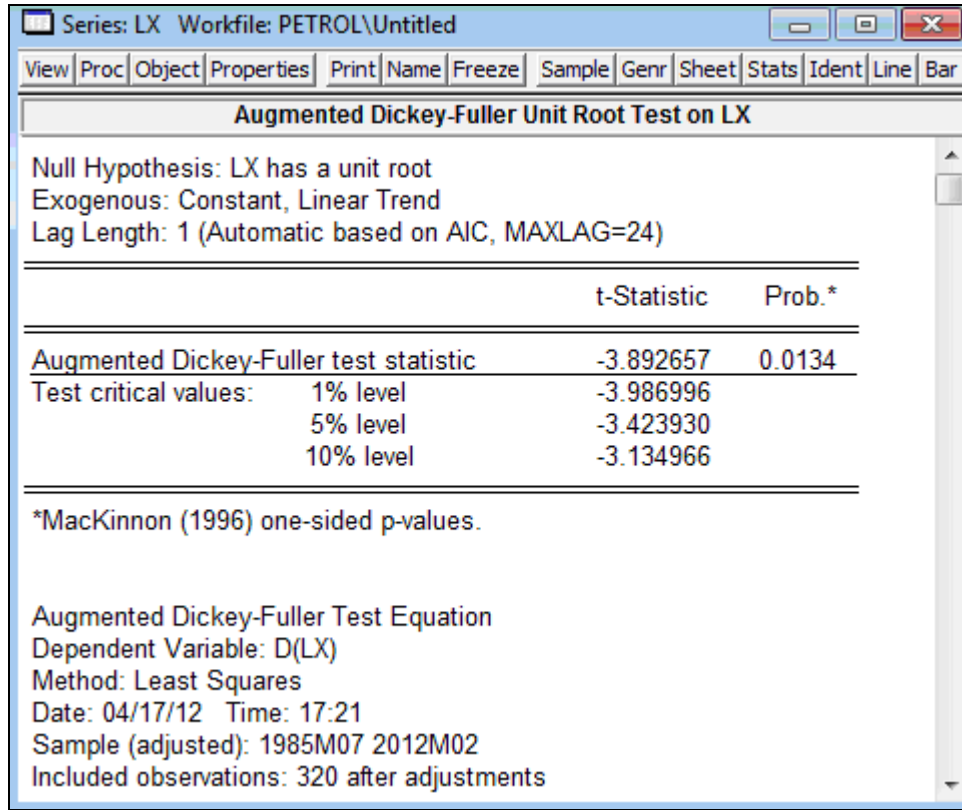
ADF testine göre serisinin logaritmasının alınması gerekli görülmektedir. Aşağıda yapılan işlemler sonucunda lx serisi, logaritması alınmış petrol serisi oluşturulmuş ve oluşturulan lx serisi için ADF Testi, seviyede (EViews programında level düzeyi) ve model yapısı, trend ve sabit terim kullanılarak uygulanmış ve modele dahil edilecek olan gecikme sayısının seçilmesini sağlayan Akaike Bilgi Kriteri seçilmiştir. ADF testinin sonuçları Tablo 5 de görüldüğü gibidir.

EViews:

*Komut satırı: series lx=log(x) veya
series lx=@log(x)*

EViews: View/Unit Root Test..

Tablo 5: *lx* Serisinin ADF Testi Sonuçları



Series: LX Workfile: PETROL\Untitled

View Proc Object Properties Print Name Freeze Sample Genr Sheet Stats Ident Line Bar

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on LX

Null Hypothesis: LX has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 1 (Automatic based on AIC, MAXLAG=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-3.892657	0.0134
Test critical values: 1% level	-3.986996	
5% level	-3.423930	
10% level	-3.134966	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LX)
Method: Least Squares
Date: 04/17/12 Time: 17:21
Sample (adjusted): 1985M07 2012M02
Included observations: 320 after adjustments

Bu bilgilere göre ADF test istatistiği -3,892657 olup %1, %5 ve %10 için tablo kritik değerleri sırasıyla -3,986996, -3,423930 ve -3,134966 olduğu görülmüştür. Test istatistiğinin mutlak değeri, %1 ve %5 tablo kritik değerinin mutlak değerinden küçük olduğu için *lx* serisi seviyesinde durağan değildir. Seri seviyesinde durağan çıkmadığı için birinci farkında durağan olup olmadığına bakılmıştır.

Seriye seviye testi yapıldıktan sonra, sonuç durağan çıkmaması nedeniyle 1. farkında test edilmiş ve sonuçları Tablo 6 de gösterilmiştir.

EViews: View/Unit Root Test..

Tablo 6: *dlx* Serisinin ADF Testi Sonuçları

Series: LX Workfile: PETROL\Untitled

View Proc Object Properties Print Name Freeze Sample Genr Sheet Stats Ident Line Bar

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on D(LX)

Null Hypothesis: D(LX) has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 3 (Automatic based on AIC, MAXLAG=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-8.972909	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.987273	
5% level	-3.424064	
10% level	-3.135045	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LX,2)
Method: Least Squares
Date: 04/17/12 Time: 17:30
Sample (adjusted): 1985M10 2012M02
Included observations: 317 after adjustments

Elde edilen sonuçlara göre ADF test istatistiği -8,972909 olup %1, %5 ve %10 için tablo kritik değerleri sırasıyla -3,987273, -3,424064 ve -3,135045 olduğu görülmüştür. ADF test istatistiğinin mutlak değeri, %1, %5 ve %10 tablo kritik değerinin mutlak değerinden büyük olduğu için *lx* serisi birinci farkında durağandır. Buna göre *lx* serisi birinci dereceden durağan I(1) zaman serisidir.

4.3. UYGUN MODELİN BELİRLENMESİ

Serinin durağanlığı ADF testi ile kontrol edildikten sonra seriye AR, MA, ARMA, ARIMA modellerinden hangisinin uygun olduğu belirlenmeye çalışılmıştır. Logaritması alınan petrol serileri birinci farkında durağan çıktığından, bu seriyi oluşturmak için aşağıdaki işlem yapılarak *dlx* serisi elde edilmiştir. Bu serinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon yapısı Tablo 7 de gösterilmiştir. ACF ve

PACF yapısı incelendiğinde net olarak modelin yapısını görmek mümkün olmamaktadır. Bu yüzden anlamlı olan modeller denenerek bulunmuştur.

EViews:

*Komut satırı: series dlx=d(lx) veya
series dlx=lx-lx(-1)*

EViews: View/Correlogram..

Tablo 7: *dlx* Serisinin Korelogramı

Correlogram of DLX						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.282	0.282	25.729	0.000
		2	0.045	-0.037	26.389	0.000
		3	0.022	0.021	26.547	0.000
		4	-0.068	-0.085	28.045	0.000
		5	-0.102	-0.064	31.434	0.000
		6	-0.122	-0.083	36.305	0.000
		7	-0.038	0.024	36.778	0.000
		8	-0.004	-0.001	36.783	0.000
		9	0.013	0.011	36.841	0.000
		10	0.104	0.089	40.467	0.000
		11	0.093	0.029	43.344	0.000
		12	-0.007	-0.055	43.360	0.000
		13	-0.099	-0.098	46.687	0.000
		14	-0.095	-0.039	49.723	0.000
		15	-0.144	-0.099	56.720	0.000
		16	-0.122	-0.036	61.814	0.000
		17	-0.029	0.017	62.109	0.000
		18	0.010	-0.001	62.144	0.000
		19	0.054	0.025	63.157	0.000
		20	0.092	0.038	66.046	0.000
		21	-0.026	-0.115	66.281	0.000
		22	-0.024	-0.010	66.480	0.000
		23	-0.048	-0.030	67.294	0.000
		24	-0.027	0.028	67.542	0.000
		25	0.067	0.108	69.103	0.000
		26	-0.001	-0.027	69.104	0.000
		27	0.020	0.008	69.247	0.000
		28	0.026	-0.027	69.478	0.000
		29	-0.024	-0.066	69.684	0.000
		30	0.015	0.006	69.765	0.000
		31	0.014	0.015	69.836	0.000
		32	-0.067	-0.062	71.450	0.000
		33	-0.049	0.012	72.325	0.000
		34	-0.048	-0.039	73.174	0.000
		35	0.009	0.023	73.201	0.000
		36	0.065	0.036	74.742	0.000

Modelin uygun olup olmadığını belirlerken parametrelerin olasılık değerlerinin %10 'dan küçük, katsayılarının mutlak değerce 1 den küçük ve uygunluğu denenen modelin korelogramının olasılık değerlerinin de %10 'dan büyük olmasına bakılmaktadır. Eğer bu üç şartı sağlamıyorsa modelin uygun olduğu söylenemez. Uygun olan modeller belirlenirken yapılan işlemler aşağıda verilmiştir.

EViews: Quick/Estimate Equation..

Equation specification: $dlx\ c\ ar(1)$

tahmin edilen ARIMA(1,1,0) modeli Tablo 8 de görüldüğü gibi sabit değerin (c) ve AR(1) 'in katsayısı mutlak değerce 1 'den; AR(1) in olasılık değeri de %10 dan küçüktür. Ancak c 'nin katsayısının olasılık değeri %10 dan büyük çıkmıştır. Bu durumda sabit değer anlamsız olduğu için modelden çıkartılması gerekmektedir.

Tablo 8: *lx* Serisi için Sabit Terimli ARIMA(1,1,0) Modelinin Sonuçları

Equation: UNTITLED Workfile: PETROL\Untitled

ViewProcObjectPrintNameFreezeEstimateForecastStatsResids

Dependent Variable: DLX
Method: Least Squares
Date: 04/17/12 Time: 21:25
Sample (adjusted): 1985M07 2012M02
Included observations: 320 after adjustments
Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.002996	0.006510	0.460267	0.6456
AR(1)	0.282753	0.053789	5.256671	0.0000

R-squared	0.079948	Mean dependent var	0.002905
Adjusted R-squared	0.077055	S.D. dependent var	0.086944
S.E. of regression	0.083527	Akaike info criterion	-2.121057
Sum squared resid	2.218624	Schwarz criterion	-2.097505
Log likelihood	341.3691	F-statistic	27.63259
Durbin-Watson stat	1.979413	Prob(F-statistic)	0.000000

Inverted AR Roots	.28
-------------------	-----

Tablo 4.6 'dan da görüldüğü gibi sabitin olasılık değeri anlamsız çıktığı için modelden c 'yi çıkartıp tekrar tahmin edilmiştir. Tablo 9 da görüldüğü gibi ARIMA(1,1,0) modeli olasılık ve katsayı değerine göre uygundur. Modelin Korelogramının olasılık değerlerinin %10 dan büyük olduğu Tablo 10 da görülmektedir.

EViews: Quick/Estimate Equation..

Equation specification: $dlx \ ar(1)$

Tablo 9: *lx* Serisi için Sabit Terimsiz ARIMA(1,1,0) Modelinin Sonuçları

Equation: EQ02 Workfile: PETROL\Untitled				
View	Proc	Object	Print	Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids
Dependent Variable: DLX				
Method: Least Squares				
Date: 03/03/12 Time: 00:45				
Sample (adjusted): 1985M07 2012M02				
Included observations: 320 after adjustments				
Convergence achieved after 2 iterations				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.283515	0.053697	5.279870	0.0000
R-squared	0.079336	Mean dependent var		0.002905
Adjusted R-squared	0.079336	S.D. dependent var		0.086944
S.E. of regression	0.083424	Akaike info criterion		-2.126641
Sum squared resid	2.220101	Schwarz criterion		-2.114865
Log likelihood	341.2626	Durbin-Watson stat		1.979565
Inverted AR Roots	.28			

EViews:

View/ Residual Test/Correlogram-Q-statistics

Tablo 10: *lx* Serisi için Sabit Terimsiz ARIMA(1,1,0) Modelinin Korelogramı

Correlogram of Residuals						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.009	0.009	0.0249	
		2	-0.041	-0.041	0.5648	0.452
		3	0.033	0.034	0.9277	0.629
		4	-0.056	-0.059	1.9545	0.582
		5	-0.061	-0.057	3.1808	0.528
		6	-0.102	-0.108	6.6188	0.251
		7	-0.008	-0.008	6.6412	0.355
		8	-0.003	-0.012	6.6438	0.467
		9	-0.018	-0.019	6.7496	0.564
		10	0.090	0.075	9.4248	0.399
		11	0.080	0.067	11.564	0.315
		12	-0.008	-0.012	11.587	0.395
		13	-0.088	-0.094	14.189	0.289
		14	-0.029	-0.031	14.480	0.341
		15	-0.102	-0.100	18.014	0.206
		16	-0.091	-0.068	20.796	0.143
		17	0.001	-0.002	20.797	0.186
		18	0.005	-0.007	20.805	0.235
		19	0.031	0.010	21.124	0.273
		20	0.099	0.074	24.511	0.177
		21	-0.051	-0.093	25.398	0.187
		22	-0.006	-0.030	25.412	0.230
		23	-0.039	-0.045	25.949	0.254
		24	-0.036	-0.016	26.403	0.282
		25	0.088	0.110	29.082	0.217
		26	-0.029	0.001	29.384	0.248
		27	0.015	0.016	29.468	0.290
		28	0.032	-0.005	29.823	0.322
		29	-0.042	-0.069	30.439	0.343
		30	0.021	-0.018	30.596	0.385
		31	0.034	0.029	31.016	0.415
		32	-0.066	-0.054	32.564	0.390
		33	-0.027	0.003	32.823	0.426
		34	-0.042	-0.043	33.456	0.445
		35	0.004	-0.001	33.462	0.494
		36	0.054	0.031	34.511	0.492

Yukarıda yapılan işlem sırasına göre; Tablo 9 ve Tablo 10 incelendiğinde, parametrelerin olasılık değerlerinin %10 ‘dan küçük, katsayılarının mutlak değerce 1 ‘den küçük ve uygunluğu denenen modelin korelogramının olasılık değerlerinin de %10 ‘dan büyük olması koşullarını sağladığı görülmektedir. Yani ARIMA(1,1,0) modeli, logaritması alınan petrol fiyatları serisi için uygun bir modeldir.

Uygunluğu denenen diğer modelimiz ise ARIMA(0,1,1) modelidir. EViews programı ile yapılan işlemler aşağıda verilmiştir. Tablo 11, ARIMA(0,1,1) modeli sonuçlarını göstermekte ve Tablo 12 de ARIMA(0,1,1) modelinin Korelogramını vermektedir.

EViews: Quick/Estimate Equation..

Equation specification: dlx ma(1)

Tablo 11: *lx* Serisi için Tahminlenmiş ARIMA(0,1,1) Modelinin Sonuçları

Equation: EQ03 Workfile: PETROL\Untitled				
View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids				
Dependent Variable: DLX				
Method: Least Squares				
Date: 03/03/12 Time: 00:46				
Sample (adjusted): 1985M06 2012M02				
Included observations: 321 after adjustments				
Convergence achieved after 4 iterations				
Backcast: 1985M05				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	0.289957	0.053498	5.419951	0.0000
R-squared	0.080095	Mean dependent var		0.002791
Adjusted R-squared	0.080095	S.D. dependent var		0.086832
S.E. of regression	0.083282	Akaike info criterion		-2.130047
Sum squared resid	2.219509	Schwarz criterion		-2.118298
Log likelihood	342.8726	Durbin-Watson stat		1.985244
Inverted MA Roots	-.29			

EViews:

View/ Residual Test/Correlogram-Q-statistics

Tablo 12: I_x Serisi için Tahminlenmiş ARIMA(0,1,1) Modelinin Korelogramı

Correlogram of Residuals						
Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.006	0.006	0.0109	
		2	0.036	0.036	0.4299	0.512
		3	0.029	0.028	0.7013	0.704
		4	-0.061	-0.062	1.9031	0.593
		5	-0.059	-0.061	3.0399	0.551
		6	-0.104	-0.101	6.5854	0.253
		7	-0.011	-0.003	6.6281	0.357
		8	0.002	0.010	6.6295	0.468
		9	-0.012	-0.012	6.6763	0.572
		10	0.089	0.075	9.3162	0.409
		11	0.069	0.058	10.910	0.365
		12	-0.001	-0.016	10.911	0.451
		13	-0.089	-0.104	13.565	0.329
		14	-0.041	-0.039	14.122	0.365
		15	-0.108	-0.091	18.054	0.204
		16	-0.092	-0.066	20.927	0.139
		17	-0.006	0.005	20.940	0.181
		18	0.005	0.003	20.948	0.229
		19	0.024	0.001	21.150	0.272
		20	0.101	0.074	24.657	0.172
		21	-0.053	-0.094	25.634	0.178
		22	-0.000	-0.035	25.634	0.221
		23	-0.037	-0.028	26.103	0.247
		24	-0.039	-0.014	26.640	0.272
		25	0.085	0.113	29.171	0.214
		26	-0.030	0.003	29.482	0.244
		27	0.020	0.002	29.621	0.284
		28	0.031	-0.005	29.955	0.316
		29	-0.037	-0.065	30.430	0.343
		30	0.019	-0.021	30.553	0.387
		31	0.030	0.036	30.876	0.422
		32	-0.068	-0.058	32.545	0.391
		33	-0.022	0.002	32.712	0.432
		34	-0.044	-0.036	33.420	0.447
		35	0.007	0.002	33.436	0.495
		36	0.050	0.035	34.351	0.499

Tablo 11 ve Tablo 12 incelendiğinde, parametrelerin olasılık değerlerinin %10 ‘dan küçük, katsayılarının mutlak değerce 1 ‘den küçük ve uygunluğu denenen modelin korelogramının olasılık değerlerinin de %10 ‘dan büyük olması koşullarını sağladığı görülmektedir. Böylece logaritması alınan petrol fiyatları serisi için ikinci uygun model, ARIMA(0,1,1) modeli olarak belirlenmiştir.

Uygun çıkan son modelimiz ise ARIMA(2,1,1) modelidir. EViews programı ile yapılan işlemler aşağıda verilmiştir. Tablo 13, ARIMA(2,1,1) modeli sonuçlarını göstermekte ve Tablo 14 de modelin Korelogramını vermektedir.

EViews: Quick/Estimate Equation..

Equation specification: dlx ar(1) ar(2) ma(1)

Tablo 13: *lx* Serisi İçin Tahminlenmiş ARIMA(2,1,1) Modelinin Sonuçları

Equation: EQ01 Workfile: PETROL\Untitled				
View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids				
Dependent Variable: DLX				
Method: Least Squares				
Date: 03/03/12 Time: 00:36				
Sample (adjusted): 1985M08 2012M02				
Included observations: 319 after adjustments				
Convergence achieved after 12 iterations				
Backcast: 1985M07				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.553040	0.173498	-3.187589	0.0016
AR(2)	0.208751	0.081720	2.554473	0.0111
MA(1)	0.851638	0.161045	5.288211	0.0000
R-squared	0.086784	Mean dependent var	0.003018	
Adjusted R-squared	0.081004	S.D. dependent var	0.087057	
S.E. of regression	0.083457	Akaike info criterion	-2.119611	
Sum squared resid	2.200962	Schwarz criterion	-2.084201	
Log likelihood	341.0779	Durbin-Watson stat	1.993506	
Inverted AR Roots	.26	-.81		
Inverted MA Roots	-.85			

Tablo 14: *lx* Serisi İçin Tahminlenmiş ARIMA(2,1,1) Modelinin Korelogramı

Correlogram of Residuals						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.002	0.002	0.0009	
		2	-0.007	-0.007	0.0188	
		3	0.012	0.012	0.0653	
		4	-0.040	-0.040	0.5950	0.440
		5	-0.078	-0.078	2.6045	0.272
		6	-0.093	-0.095	5.4507	0.142
		7	-0.029	-0.031	5.7344	0.220
		8	0.006	0.004	5.7478	0.332
		9	-0.026	-0.031	5.9655	0.427
		10	0.102	0.090	9.4150	0.224
		11	0.061	0.045	10.633	0.223
		12	0.004	-0.005	10.637	0.301
		13	-0.090	-0.101	13.340	0.205
		14	-0.028	-0.030	13.611	0.255
		15	-0.107	-0.100	17.473	0.133
		16	-0.086	-0.067	19.980	0.096
		17	-0.003	0.002	19.983	0.131
		18	0.008	-0.004	20.006	0.172
		19	0.026	0.006	20.232	0.210
		20	0.102	0.070	23.766	0.126
		21	-0.053	-0.094	24.725	0.133
		22	-0.002	-0.035	24.727	0.170
		23	-0.042	-0.040	25.338	0.189
		24	-0.030	-0.018	25.654	0.220
		25	0.079	0.109	27.818	0.182
		26	-0.024	0.004	28.012	0.215
		27	0.012	0.008	28.063	0.257
		28	0.031	-0.005	28.409	0.289
		29	-0.043	-0.074	29.062	0.308
		30	0.023	-0.016	29.247	0.349
		31	0.029	0.029	29.540	0.386
		32	-0.064	-0.053	30.984	0.366
		33	-0.026	0.002	31.233	0.404
		34	-0.042	-0.040	31.867	0.423
		35	0.004	-0.006	31.873	0.473
		36	0.054	0.037	32.923	0.471

Bu sonuçlara göre, parametre olasılık değerleri %10 ‘dan küçük, katsayılar mutlak değerce 1 ‘den küçük ve modelin korelogramının olasılık değerleri de %10 ‘dan büyük olduğu için ARIMA(2,1,1) modeli de uygun model olarak belirlenmiştir.

4.4. MODEL SEÇİMİ

Uygun modelin belirlenmesi aşamasında belirlenen üç modelden hangisi ile analize devam edileceğinin seçilmesi için üçüncü bölümde tanımlanan model seçim kriteri kullanılmıştır. Bu kriterler ile otoregresif sürecin derecesi (p) ve hareketli ortalama sürecinin derecesi (q) belirlenerek uygun model seçilmiş olur.

Bilgi kriterlerinden Akaike Bilgi Kriteri ve Schwarz Bilgi Kriteri model tahminlenmesinde belli kriterlere göre model seçimi yapılmasını gerektirmektedir. Bu işlem EViews programı aracılığı ile aşağıdaki şekilde gerçekleştirilmiş ve sonuçlar Tablo 9, 11 ve 13 de gösterilmiştir.

Quick/Estimate Equation..

Equation specification: dlx ar(1)

dlx ma(1)

dlx ar(1) ar(2) ma(1)

ARIMA(1,1,0), ARIMA(0,1,1) ve ARIMA(2,1,1) modellerinin AIC değeri sırasıyla -2,126641, -2,130047 ve -2,119611 olup SIC değerleri sırasıyla -2,114865, -2,118298 ve -2,084201 dir. AIC veya SIC değerlerinin en küçük olduğu model her ikisinde de ARIMA(0,1,1) modelidir. Bu model bir sonraki aşama için kullanılacak olan en uygun model olarak seçilmiştir.

4.5. SEÇİLEN MODELİN DOĞRULUĞUNUN KONTROLÜ

Petrol serisi için uygun olan ARIMA(0,1,1) modeli belirlenmiş ve model parametreleri tahmin edilmiştir. Bu işlemlerden sonra modelin doğruluğunun kontrol edilmesi gerekmektedir. Üçüncü bölümde anlatılmış olan model kontrol yöntemleri petrol serisi için uygulanıp sonuçlar aşağıda yorumlanmıştır.

ARIMA(0,1,1) modeli gerçekten seriye uygunsa tahmini artıklar ($\hat{z}_t$), gerçek artıklara (z_t) yakın olacaktır ve $\hat{z}_t$ 'nin otokorelasyon katsayıları $r_k(\hat{z}_t)$, model yeterliliği ile ilgili kanıtlar sağlayacaktır. Aşağıda uygulanmış olan yöntemler artıklara uygulanan model kontrol yöntemleridir.

4.5.1. Artıkların Otokorelasyonunun Kontrolü

ARIMA(0,1,1) modelinin tahmini θ_1 parametresi Tablo 4.9 'nin en altında -0,29 olarak bulunmuş olup model aşağıdaki gibi yazılır. $-1 < \hat{\theta}_1 = -0,29 < 1$ olduğu için çevirebilir bir MA sürecini ifade eder.

$$\begin{aligned}\nabla^d x_t &= \hat{\theta}(B) \hat{z}_t \\ (1-B)x_t &= (1-\hat{\theta}_1 B) \hat{z}_t \\ x_t - x_{t-1} &= \hat{z}_t - \hat{\theta}_1 \hat{z}_{t-1} \\ \hat{z}_t &= x_t - x_{t-1} - 0,29 \hat{z}_{t-1}\end{aligned}$$

Modeli tanımladıktan sonra artıklara uygulanan tanı kontrol yöntemlerinden artıkların otokorelasyonunun kontrolü yapılır. Bu yöntemi uygulamak için $\hat{z}_t$ değerleri hesaplanmış ve otokorelasyon katsayılarının $\mp 2/\sqrt{n}$ sınırları içerisinde dağılım gösterip göstermediği incelenmiştir. EViews programı aracılığıyla modelin artıkları ve artıkların otokorelasyon değerler aşağıdaki işlemler ile bulunmuştur.

EViews:

Proc/Make Residual Series:zsapka

EViews:

View/ Residual Test/Correlogram-Q-statistics

Oluşturulan *zsapka* serisinin korelogramı Tablo 15 de gösterilmiştir. Bulunan bu artıkların otokorelasyon değerleri $\mp 2/\sqrt{321} = \mp 0,1116$ değerinin üstüne ve altına gelmediği için modelin uygun olduğuna karar verilmiştir.

Artıkların otokorelasyonlarının kontrolü ile modelin uygunluğunu kontrol etmek tek başına çok güçlü bir kontrol sağlamamaktadır. Artıkların otokorelasyon kontrolü yapıldıktan sonra portmanto testi ile de daha güçlü bir kontrol sağlanmıştır.

Tablo 15: ARIMA(0,1,1) Modelinin Artıklarının (*zsapka*) Korelogramı

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.006	0.006	0.0109	0.917
		2	0.036	0.036	0.4299	0.807
		3	0.029	0.028	0.7013	0.873
		4	-0.061	-0.062	1.9031	0.754
		5	-0.059	-0.061	3.0399	0.694
		6	-0.104	-0.101	6.5854	0.361
		7	-0.011	-0.003	6.6281	0.469
		8	0.002	0.010	6.6295	0.577
		9	-0.012	-0.012	6.6763	0.671
		10	0.089	0.075	9.3162	0.502
		11	0.069	0.058	10.910	0.451
		12	-0.001	-0.016	10.911	0.537
		13	-0.089	-0.104	13.565	0.405
		14	-0.041	-0.039	14.122	0.441
		15	-0.108	-0.091	18.054	0.260
		16	-0.092	-0.066	20.927	0.181
		17	-0.006	0.005	20.940	0.229
		18	0.005	0.003	20.948	0.282
		19	0.024	0.001	21.150	0.329
		20	0.101	0.074	24.657	0.215
		21	-0.053	-0.094	25.634	0.221
		22	-0.000	-0.035	25.634	0.268
		23	-0.037	-0.028	26.103	0.296
		24	-0.039	-0.014	26.640	0.322
		25	0.085	0.113	29.171	0.257
		26	-0.030	0.003	29.482	0.290
		27	0.020	0.002	29.621	0.331
		28	0.031	-0.005	29.955	0.365
		29	-0.037	-0.065	30.430	0.393
		30	0.019	-0.021	30.553	0.438
		31	0.030	0.036	30.876	0.472
		32	-0.068	-0.058	32.545	0.440
		33	-0.022	0.002	32.712	0.481
		34	-0.044	-0.036	33.420	0.496
		35	0.007	0.002	33.436	0.544
		36	0.050	0.035	34.351	0.547

4.5.2. Portmanto İyi-Uyum Testi

Portmanto testinde her bir artık otokorelasyonlarının güven sınırları içerisinde olup olmadığını kontrol etmek yerine ilk M otokorelasyonun incelenmesine dayandırılmıştır. Buradaki M değeri yeterli sayıdaki otokorelasyon değerini ifade etmektedir. Bu örnek için $M=25$ alınmıştır. EViews programında bulunan *zsapka*

değerlerinden otokorelasyon katsayılarını tanımlanması gerekir. Excel dosyası ile bulunan bu ilk 25 otokorelasyon değerleri tanımlanmıştır.

EViews: File/New/Workfile
Frequeny: integer date
File/Import/Read Text-Lotus-Excel: rk

Bu işlem ile artıkların ilk 25 otokorelasyonları rk serisi olarak kaydedilmiştir.

Hesaplanması gereken Portmanto testi $Q = n \sum_{k=1}^M r_k^2(\hat{z})$ dir.

EViews:
*Komut satırı: series rkkare=rk*rk*
scalar rkkaretop=@sum(rkkare)
*scalar q=321*rkkaretop*

$series rkkare=rk*rk$ komutu ile $r_k^2(\hat{z})$, $scalar rkkaretop=@sum(rkkare)$ komutu ile

$\sum_{k=1}^M r_k^2(\hat{z})$ ve $scalar q=321*rkkaretop$ komutu ile de $Q = n \sum_{k=1}^M r_k^2(\hat{z})$ değerleri

bulunmuştur. Q değerinin 27,7301 değerini aldığı görülmüştür. Bu değer (M-p-q)=25-1=24 serbestlik dereceli %10 anlamlılık düzeyi ile Ki-Kare dağılımı gösterecektir. Dolayısıyla bulunan Q değeri, 24 serbestlik dereceli Ki-Kare değerinden küçük olduğu durumda modelin uygun olduğu söylenir. Karşılaştırılan χ^2 tablo değeri Ek'te verilen tabloya Ek 1.8 tablosuna göre 33,20 olarak bulunmuştur. Bu değer Q değerinden büyük olduğu için ARIMA(0,1,1) modeli uygundur.

4.5.3. Artıkların Karelerinin Kontrolü

Ele alınan petrol serisinin artıklarının birbirleriyle değil de karelerinin birbiriyle bağlantılı olduğu durumlarda artıkların kareleri ile hesaplanacak olan 3.1.19 formülündeki portmanto istatistiğine dayanan model kontrolü yapılmıştır.

Bu yöntem ile modelin uygunluğu kontrol edilirken ilk önce 3.1.18 formülündeki artıkların karelerin ($\hat{z}_t^2$) hesaplanması gerekir. Aşağıdaki komut ile *zsapkakare* serisi oluşturulmuştur.

EViews:

*Komut satırı: series zsapkakare=zsapka*zsapka*

Bundan sonra yapılacak olan işlem *zsapkakare* serisinin otokorelasyon katsayılarının ($r_k^*(\hat{z}_t^2)$) bulunmasıdır. Oluşturulan *zsapkakare* serisinin korelogramı aşağıdaki gibi bulunmuş ve Tablo 16 da gösterilmiştir.

EViews:

View/Correlogram...

Tablo 16: ARIMA(0,1,1) Modelinin Artıklarının Karelerinin (*zsapkakare*) Korelogramı

Correlogram of ZSAPKAKARE						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.163	0.163	8.5878	0.003
		2	0.087	0.062	11.065	0.004
		3	0.075	0.053	12.876	0.005
		4	0.039	0.015	13.370	0.010
		5	0.045	0.029	14.025	0.015
		6	0.258	0.249	35.971	0.000
		7	0.083	0.004	38.253	0.000
		8	0.005	-0.047	38.260	0.000
		9	-0.062	-0.098	39.518	0.000
		10	-0.000	0.013	39.518	0.000
		11	-0.069	-0.074	41.108	0.000
		12	-0.091	-0.142	43.860	0.000
		13	-0.027	-0.012	44.114	0.000
		14	-0.024	0.017	44.307	0.000
		15	-0.006	0.064	44.318	0.000
		16	-0.041	-0.042	44.884	0.000
		17	0.020	0.073	45.025	0.000
		18	-0.049	0.005	45.861	0.000
		19	-0.068	-0.046	47.462	0.000
		20	0.009	0.013	47.492	0.001
		21	0.035	0.013	47.923	0.001
		22	-0.021	-0.015	48.081	0.001
		23	0.038	0.001	48.593	0.001
		24	-0.020	-0.033	48.734	0.002
		25	-0.018	0.009	48.846	0.003
		26	-0.014	-0.008	48.912	0.004
		27	-0.027	-0.051	49.171	0.006
		28	0.015	0.028	49.246	0.008
		29	-0.059	-0.064	50.466	0.008
		30	-0.029	-0.009	50.756	0.010
		31	0.038	0.051	51.278	0.012
		32	-0.052	-0.047	52.230	0.013
		33	-0.028	0.007	52.519	0.017
		34	0.009	0.010	52.549	0.022
		35	-0.035	0.000	52.986	0.026
		36	-0.020	-0.006	53.132	0.033

Bulunan otokorelasyon katsayılarının ilk 25 değeri Excel dosyasına kaydederek yapılan işlemler aşağıda gösterilmiştir.

EViews: File/New/Workfile

Frequeny: integer date: Start date=1

End date=25

File/İmport/Read Text-Lotus-Excel: rkk

rkk serisi oluşturulduktan sonra modelin uygun olup olmadığının kontrol edildiği portmanto istatistiği $M=25$ ve $n=321$ için hesaplanmıştır.

$$Q_* = n \sum_{k=1}^M r_k^{*2}(\hat{z})$$

$$Q_*^* = n(n+2) \sum_{k=1}^M (n-k)^{-1} r_k^{*2}(\hat{z})$$

EViews:

Komut satırı: series rkktop=@sum(rkk)

*scalar QQ=rkktop*321*

QQ olarak adlandırılan artıkların kareleri ile hesaplanmış olan portmanto istatistiğinin değeri 115,9606 olarak bulunmuştur. Hesaplanan bu değerin χ^2 tablo değeri, $(M-p-q)=(25-1)=24$ serbestlik derecesi ve 0,10 anlamlılık düzeyi ile 33,20 dir. Q_* istatistiği χ^2 tablo değerinden büyük olduğu için ARIMA(0,1,1) modeli uygun değildir.

İkinci olarak da Q_*^* istatistiği, formüldeki gerekli işlemler aşağıdaki gibi Excel ile yapıldıktan sonra 114,3202 olarak bulunmuştur.

$$\begin{aligned}
Q_*^* &= 321(323) \sum_{k=1}^{25} (321-k)^{-1} r_k^{*2}(\hat{z}) \\
&= 321(323) \left[\frac{(0,163)^2}{320} + \frac{(0,087)^2}{319} + \dots + \frac{(-0,018)^2}{296} \right] \\
&= 114,32018903132700
\end{aligned}$$

Hesaplanan Q_*^* değeri 24 serbestlik dereceli ve 0,10 anlamlılık düzeyi ile χ^2 tablo değerinden (33,20) büyük olduğu için model uygun değildir.

Artıkların otokorelasyonları ile daha önce hesaplanmış olan Portmanto testi sonucuna göre modelin uygun olduğu ancak artıkların karelerinin otokorelasyon değerleri ile hesaplanan Portmanto testi sonucuna göre de modelin uygun olmadığı bulunmuştur. Bu sonuç petrol serisinin artıklarının karelerinin birbiriyle bağlantılı olmadığını göstermektedir.

4.5.4. Durbin-Watson Testi

Petrol serisi için uydurulan ARIMA(0,1,1) modelinin uygunluğunun kontrol edilmesinde kullanılan diğer test ise Durbin-Watson (DW) istatistiğidir. Bu istatistik değeri yaklaşık olarak 2 değerini aldığı anda petrol serisine uydurulan modelin uygun olduğu söylenir.

EViews programında tahmin edilen ARIMA(0,1,1) modelinin DW istatistiği Tablo 4.9 da otomatik olarak hesaplanmıştır. DW istatistiğinin değeri 1,9852 olduğu görülmektedir. Bu değer 2 değerine çok yakın olduğundan petrol verisine ARIMA (0,1,1) modeli uygun bulunmuştur.

4.5.6. Lagrange Çarpımı Testi

Lagrange Çarpımı testi, logaritması ve birinci farkı alınmış (dlx) petrol verisi için uygun olduğu araştırılan ARMA(0,1) modeli için uygulanmıştır. Test edilecek olan hipotez aşağıda gösterildiği gibidir;

$$H_0 = ARMA(0,1)$$

$$H_A = ARMA(0,1+m)$$

ARMA(0,q) modelinin genel hali 4.1 de verilmiştir.

$$H_0 = ARMA(0,q)$$

$$\hat{\theta}(B)z_t = x_t$$

$$(1 - \hat{\theta}_1 B - \dots - \hat{\theta}_q B^q)z_t = x_t$$

$$z_t = x_t + \hat{\theta}_1 z_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_q z_{t-q} \quad (4.1)$$

ARMA(0,1) modelinin parametresi $\hat{\theta}_1$ -0,29 bulunmuş ve model 4.2 denkleminde gösterilmiştir.

$$H_0 = ARMA(0,1)$$

$$(1 - \hat{\theta}B)\hat{z}_t = x_t$$

$$\hat{z}_t - \hat{\theta}_1 \hat{z}_{t-1} = x_t$$

$$\hat{z}_t = x_t + \hat{\theta}_1$$

$$\hat{z}_t = x_t - 0,29 \hat{z}_{t-1} \quad (4.2)$$

ARMA(0,q+m) modelinin açık şekli 4.3 de gösterilmiştir. Buradaki $\hat{b}_t$ modelin artıklarını ifade etmektedir.

$$H_A = ARMA(0,q+m)$$

$$\hat{\theta}(B)\hat{b}_t = x_t$$

$$(1 - \hat{\theta}_1 B - \dots - \hat{\theta}_{q+m} B^{q+m})\hat{b}_t = x_t$$

$$\hat{b}_t - \hat{\theta}_1 \hat{b}_{t-1} - \dots - \hat{\theta}_{q+m} \hat{b}_{t-(q+m)} = x_t$$

$$\hat{b}_t = x_t + \hat{\theta}_1 \hat{b}_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_{q+m} \hat{b}_{t-(q+m)} \quad (4.3)$$

ARMA(0,2) modelinin parametresi olan $\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_2$ bulunmuş ve 4.3 denkleminde yerine koyularak 4.4 denklemini elde edilmiştir.

$$H_A = ARMA(0,2)$$

$$(1 - \hat{\theta}_1 B - \dots - \hat{\theta}_{q+m} B^{q+m}) \hat{b}_t = x_t$$

$$\hat{b}_t = x_t + (-0,15 - 0,07i) \hat{b}_{t-1} + (-0,15 + 0,07i) \hat{b}_{t-2} \quad (4.4)$$

H_0 ve H_A hipotezlerinin artıkları ($\hat{z}_t$ ve $\hat{b}_t$) ile yeni bir model (4.5) oluşturulmuş ve bu modelden elde edilen artıklar $\hat{u}_t$ ile gösterilmiştir.

$$\hat{z}_t = \beta_1 \hat{b}_{t-1} + \beta_2 \hat{b}_{t-2} + \hat{u}_t \quad (4.5)$$

ARMA(0,1) modelindeki $\hat{z}_t$ nin yeni oluşturulan ARMA(0,2) modelinin artıkları $\hat{b}_t$, ile oluşturulan 4.5 deki yeni hataların ($\hat{u}_t$) kullanılarak test edildiği lagrange çarpanı istatistiğinde gerekli olan işlemler aşağıda gösterilmiş ve bunun sonucunda LM1 değeri 0,2084 olarak bulunmuştur. ARMA(0,3) modeli için LM2 istatistiğinin değeri 1,2859 ve ARMA(0,4) modeli için LM3 istatistiğinin değeri 1,4693 olarak bulunmuştur.

EViews:

```
Komut satırı: series lx=@log(x)
               series dlx=d(lx)
               series zkare=z*z
               scalar topzkare=@sum(zkare)
               series ukare=u*u
               scalar topukare=@sum(ukare)
               scalar lm1=321*(topzkare-topukare)/topzkare
```

EViews:

Komut satırı: series u2kare=u2*u2
scalar topu2kare=@sum(u2kare)
scalar lm2=321*(topzkare- topu2kare)/topzkare

EViews:

Komut satırı: series u3kare=u3*u3
scalar topu3kare=@sum(u3kare)
scalar lm3=321*(topzkare-topu3kare)/topzkare

3.1.32 de tanımlanan LM istatistiği $m=1,2,3$ değeri için sırasıyla 0,2084, 1,2859 ve 1,4693 olarak bulunmuştur. Bu değerler sırasıyla 1,2 ve 3 serbestlik dereceli 0,10 anlamlılık düzeyi ile χ^2 dağılımının tablo değerleri ($m=1, m=2$ ve $m=3$ için sırasıyla; 2,71, 4,61 ve 6,25) ile karşılaştırıldığında uydurulan ARMA(0,1) modeli reddedilemez. Petrol verilerine uygulanan bu sonuçlar diğer testlerde elde edilen sonuçlarla paralel yönde olup birbirlerini doğrulamaktadırlar.

SONUÇ

Bu tez çalışmasında zaman serisi modellerinin artıkları üzerine uygulanan tanı kontrol yöntemleri anlatılarak Euro bölgesi petrol varil fiyatları üzerine bir uygulama yapılmıştır. Bu uygulamanın sonucunda petrol serisini temsil edecek en uygun model bulunmuş ve uygunluğu bazı yöntemlerle kontrol edilmiştir.

Birinci bölümde zaman serisi verileri ve betimleyici fonksiyonları anlatılarak temel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde zaman serisi modellerinden AR, MA, ARMA ve ARIMA modellerinin özellikleri detaylı olarak incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise tahmin edilen modelin uygun olduğuna karar verilmesini sağlayan otoregresif ve hareketli ortalama derecelerinin belirlendiği bilgi kriterleri anlatılmıştır. Ayrıca modelin gerçekten uygun olup olmadığının kontrol edilmesi için incelenen serinin durağan olması şartını sağlaması gerektiğinden durağanlık özellikleri incelenmiştir. Petrol serisine uygun olduğu düşünülen ARIMA(0,1,1) modelinin uygunluğunun kontrol edilmesi için artıklara uygulanan tanı kontrol yöntemlerinden Artıkların Otokorelasyonunun Kontrolü, Portmanto İyi-Uyum Testi, Artıkların Karelerinin Kontrolü, Durbin Watson testi ve Lagrange Çarpanı Testi uygulanmıştır.

Uygulama aşamasında analizi yapılacak olan veri Avrupa Merkez Bankası'nın web sayfasından alınan Euro bölgesindeki petrol varil fiyatlarının 1985 - 2012 yılları arasındaki aylık değerleri kullanılmıştır. EViews paket programı kullanılarak model kontrol testlerinin istatistiksel hesaplamaları yapılmış ve elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

Petrol fiyatları verisine ARIMA(0,1,1), ARIMA(1,1,0) ve ARIMA(2,1,1) modelleri uygun bulunmuştur. Bu modellerden hangisinin seriyi daha iyi temsil edeceği AIC ve SIC kriterlerine göre belirlenmiş ve aralarından en küçük ACI ve SIC değerine sahip olan ARIMA(0,1,1) modeli seçilmiştir.

ARIMA(0,1,1) modelinin uygunluğunun araştırılması için artıklarının otokorelasyon kontrolü yapılmıştır. Bu kontrol yöntemine göre artıkların otokorelasyonları $\pm 0,1116$ değerini aşmadığından ARIMA(0,1,1) modeli uygun bulunmuştur.

Portmanto iyi-uyum testine göre artıkların ilk 25 otokorelasyonları için Q istatistiği 27,7301 olarak bulunmuş ve bu değer %10 anlamlılık düzeyi ve 24 serbestlik derecesi ile χ^2 tablo değerinden (33,20) küçük olduğu için model reddedilememiştir.

ARIMA(0,1,1) modelinin uygunluğunun araştırılması için artıklara uygulanan diğer bir test olan DW istatistiği hesaplanmıştır. DW istatistiği 1,9852 olarak bulunmuş ve 2 değerine çok yakın olduğu için ARIMA(0,1,1) modelinin uygun olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Son olarak modelin uygunluğunun kontrol edildiği Lagrange Çarpanı istatistiği $m=1,2,3$ değerleri için sırasıyla 0,2084, 1,2859 ve 1,4693 olarak bulunmuş, bu değerler %10 anlamlılık düzeyi, 1,2,3 serbestlik derecesi ile sırasıyla 2,71, 4,61 ve 6,25 olan χ^2 tablo değerleri ile karşılaştırılmıştır. $m=1$ için 0,2084 olarak bulunan LM istatistiği, $\chi^2_{m=1,0,10} = 2,71$ değerinden küçük olduğu için modelin ARIMA(0,1,1) reddedilemeyeceğine karar verilmiştir. Yani petrol serisine ARIMA(0,1,2) modeli uygun değildir. $m=2$ için 1,2859 bulunan LM istatistiği, $\chi^2_{m=2,0,10} = 4,61$ değerinde küçük olduğu için ARIMA(0,1,3) modelinin uygun olmayacağına karar verilmiştir. $m=3$ için ise bulunan LM istatistiği değeri 1,4693 dir. Bu değer $\chi^2_{m=3,0,10} = 6,25$ değerinden küçük olduğu için ARIMA(0,1,1) modeli reddedilemiştir. Bu sonuca göre H_0 hipotezinde doğruluğu araştırılan modele $m=1,2,3$ sayıda MA parametresinin eklenmesi uygun olmayacaktır.

Model tanı kontrol yöntemlerinden artıkların karelerinin otokorelasyonları ile hesaplanan portmanto istatistiği 115,9606 olarak bulunmuş ve bu değer $M=24$ serbestlik dereceli %10 anlamlılık düzeyi ile, χ^2 tablo değerleriyle karşılaştırılmıştır. 115,9606 değeri $\chi^2_{M=24,0,10} = 2,71$ değerinden büyük olduğundan ARIMA(0,1,1) modelinin uygun olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuca göre petrol serisinin artıkların karelerinin birbiriyle bağlantılı olmadığını söyleyebiliriz.

Artıklara uygulanan tanı kontrol yöntemlerinden Kümülatif Periodogram Testinin teorisi üçüncü bölümde anlatılmış ancak petrol serisi için uygulaması yapılmamıştır.

Bu tez çalışması süresince tez kapsamında olmayan ancak araştırmalarım sırasında model kontrolü aşamasında kullanılan Oran Testi ve Wald Testi, araştırılması gereken konular olarak belirlenmiştir. Tezin çalışması aşamasında zaman serisi modelleri ile ilgili yazılan bir çok tez ile karşılaşmış ancak modelin kontrol edilme aşamasında detaylı bir çalışma yapılmamıştır. Bu konuda detaylı bir çalışmanın yapılmamış olması nedeniyle artıklara uygulanan tanı kontrol yöntemlerinin daha geniş kapsamlı bir araştırma konusu olarak ele alınması önerilebilir.

KAYNAKÇA

- Abraham, B. ve Ledolter, J. (1983). *Statistical Methods for Forecasting*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Akdeniz, F. (2007). *Olasılık ve istatistik*. Adana: Nobel Kitapevi.
- Akdi, Y. (2003). *Zaman Serileri Analizi (Birim Kökler ve Kointegrasyon)*. Ankara: Bıçaklar Kitapevi.
- Anderson, O. D. (1977). *Time Series Analysis and Forecasting: The Box-Jenkins Approach*. London: Butterworth & Co.
- Asterious, D. ve Hall, S. G. (2007). *Applied Econometrics: A Modern Approach using Eviews and Microfit*. Basingstoke [England]: Palgrave Macmillan.
- Beran, J., Bhansali, R. J. ve Ocker, D., (1998). On Unified Model Selection for Stationary and Nonstationary Short- and Long-Memory Autoregressive Processes. *Biometrika*, 85(4): 921-934.
- Bisgaard, S. ve Kulahci, M. (2011). *Time Series Analysis and forecasting By Example*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Bowerman, B. L. ve O'Connell, R.T. (1979). *An Applied Approach: Time Series and Forecasting*. Boston: Duxbury Pres.
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M. ve Reinsel, G. C. (1994). *Time Series Analysis Forecasting and Control*. New Jersey: Prentice Hall.
- Brockwell, P. J. ve Davis, R. A., (1991). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer-Verlag.

Chatfield, C. (1989). *The Analysis of Time Series An Introduction*. London: Chapman & Hall.

Dinardo, J. ve Johnston, J. (1997). *Econometric Methods*. New York: McGraw-Hill.

Enders, W. (2004). *Applied Econometric Time Series*. New Jersey: Hoboken J. Wiley.

Godfrey, L. G., (1979). Testing The Adequacy of A Time Series Model. *Biometrika* 66(1): 67-72.

Granger, C. W. J. ve Newbold, P., (1986). *Forecasting Economic Time Series*. London: Academic Press.

Greene, W. H., (2003). *Econometric Analysis*. New Jersey: Prentice Hall.

Griffiths, W. E., Hill, R.C. ve Judge, G. G., (1993). *Learning and Practicing Econometrics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Gujarati, D. N., (2003). *Basic Econometrics*. New York: McGraw-Hill.

Hamilton, J. D., (1994). *Time Series Analysis*. New Jersey: Princeton University Pres.

Hannan, E.J. ve Quinn, B. G., (1979). The Determination of The Order of An Autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society Series B(Methodological)*. 41(2): 190-195.

Harold, D. (1963). *The Analysis of Economic Time Series*. Texas: The Principle Pres of Trinity University.

Heij, C., Boer, P de ., Franses P. H., Kloek, T., ve Dijk, H. K. Van, (2004). *Econometric Methods with Applications in Business and Econometrics*. New York: Oxford University Pres.

Hosking, J. R. M., (1980). Lagrange-Multiplier Tests of Time-Series Models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (methodological)*, 42(2): 170-181.

Kadılar, C., (2000). *Uygulamalı Çok Değişkenli Zaman Serileri Analizi*. Ankara: Bizim Büro Basımevi.

Kayım, H. (1985). *İstatistiksel Ön Tahmin Yöntemleri*. Ankara: Hacettepe Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Yayınları.

Ljung, G. M., (1986). Diagnostic Testing of Univariate Time Series Models. *Biometrika*, 73(3): 725-730.

Newbold, P., (1980). The Equivalence of Two Tests of Time Series Model Adequacy. *Biometrika* 67(2): 463-465.

Poskitt, D. S. ve Tremayne, A. R., (1980). Testing the Specification of a Fitted Autoregressive-Moving Average Model. *Biometrika*. 67(2): 359-363.

Shumway, R. H. ve Stoffer, D. S. (2011). *Time Series Analysis and Its Applications*. London: Springer.

Sevüktekin, M. ve Nargeleçekenler, M. (2007). *Ekonometrik Zaman Serileri Analizi: EViews Uygulamalı*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Silvey, S. D., (1959). The Lagrangian Multiplier Test. *The Annals of Mathematical statistics*. 30(2): 389-407.

Wei, W.W.S. (1994). *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*. New York: Addison-Wesley Publishing Company.

T.C. Başbakanlık Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK). (30 Nisan 2010). Mevsimsel Etkilerden Arındırılmış Temel İşgücü Göstergeleri. <http://www.tuik.gov.tr/PreHaberBultenleri.do?id=8401>. (19 Haziran 2011).

EK

EK 1 Çalışmada Kullanılan Örnek Veriler

Ek 1.1: 2005-2010 Yılları Arası Aylık Olarak Ölçülmüş, 25- 29 Yaşları Arası Türkiye Geneli İşsizlik Oranları Verileri (%).

	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Ocak	14,6	14,9	13,9	13,7	19	17,4
Şubat	14,7	14,9	13,8	13,7	19,2	17
Mart	13,7	14,3	12,8	13	19,4	16
Nisan	12,7	13,2	12,3	11,5	18	14,6
Mayıs	11,9	12	11,4	10,7	16,7	13,8
Haziran	12	12	11,7	11,5	16,1	13,6
Temmuz	11,7	12	11,6	12,5	16,1	14
Ağustos	12,1	12,5	11,8	13,3	17,3	14,4
Eylül	12,8	11,9	12	13,4	17,1	14,4
Ekim	13,3	11,8	12,1	13,5	17	14,2
Kasım	14,2	12,4	12,7	15,1	16,6	14,3
Aralık	14,2	13,2	12,9	16,8	17	14,9

Kaynak: Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK)

Ek 1.2: 2001-2010 Yılları Arasında Aylık Olarak Ölçülmüş Doğum Verileri.

	2001	2002	2003	2004	2005
Ocak	170343	155006	138608	141423	142087
Şubat	103444	103410	89511	94524	94093
Mart	107885	102144	101001	100642	100415
Nisan	102556	95952	92533	100736	97332
Mayıs	110369	99473	99508	102161	106662
Haziran	111707	102610	104613	105667	108383
Temmuz	119737	109722	109199	111024	110914
Ağustos	120941	108042	109113	110341	111261
Eylül	109554	99653	98703	98329	102960
Ekim	103631	96176	94795	94740	103049
Kasım	92523	89250	89501	90748	92161
Aralık	70312	67728	71358	71148	72518
	2006	2007	2008	2009	2010
Ocak	128370	130824	129776	121350	117412
Şubat	94518	93537	97582	91613	93410
Mart	103857	102404	102438	98542	101903
Nisan	97355	99771	102385	102577	97849
Mayıs	103611	107683	106520	102813	101953
Haziran	111657	109933	109523	106931	107591
Temmuz	114780	121751	119416	116181	111721
Ağustos	116913	117702	119261	115180	111187
Eylül	106648	110501	113874	114528	108296
Ekim	105320	109351	107380	104321	102121
Kasım	92839	99201	96893	95170	99718
Aralık	75502	81885	83723	85740	85809

Kaynak: TÜİK

Ek 1.3: 150 Rastgele Çekime Dayalı Bir Serinin Verileri.

Çekim sayısı		Çekim sayısı		Çekim sayısı		Çekim sayısı		Çekim sayısı		Çekim sayısı	
1	1,9	26	-4,9	51	-0,8	76	4,4	101	-1,9	126	2,0
2	-3,0	27	4,1	52	-2,9	77	2,6	102	-1,3	127	3,0
3	2,2	28	4,6	53	-4,4	78	-4,1	103	-0,4	128	0
4	-0,7	29	-0,7	54	1,3	79	3,4	104	-0,7	129	0,9
5	2,7	30	-0,9	55	2,9	80	0,1	105	-3,8	130	4,0
6	3,1	31	-1,0	56	2,0	81	2,0	106	-2,4	131	0,3
7	0,1	32	-0,6	57	1,4	82	0,2	107	-1,9	132	-3,7
8	-1,6		3,4	58	3,8	83	1,3	108	3,5	133	4,1
9	2,9	34	1,3	59	-4,1	84	3,0	109	4,1	134	-4,3
10	4,3	35	-4,6	60	4,4	85	-3,7	110	3,6	135	3,3
11	-3,1	36	0,7	61	3,2	86	3,4	111	-1,1	136	0,3
12	-1,5	37	2,8	62	-4,6	87	-3,2	112	1,7	137	3,0
13	1,3	38	-4,0	63	4,6	88	0,8	113	0,1	138	2,6
14	-4,3	39	-2,0	64	1,1	89	2,9	114	3,8	139	-3,5
15	1,5	40	1,2	65	1,3	90	-1,6	115	-1,6	140	0,6
15	4,1	41	-3,4	66	3,6	91	1,8	116	-1,5	141	-4,9
17	-2,9	42	3,9	67	-1,9	92	4,2	117	-4,6	142	-4,3
18	1,6	43	0,9	68	4,4	93	2,0	118	1,2	143	-3,3
19	-4,1	44	-4,5	69	-4,4	94	-4,4	119	2,2	144	-4,6
20	3,0	45	-0,9	70	2,0	95	-1,8	120	-2,3	145	4,2
21	-2,6	46	2,4	71	-3,6	96	-4,7	121	-2,1	146	0,6
22	-2,8	47	2,8	72	-4,4	97	3,6	122	2,0	147	-1,8
23	-1,2	48	-4,6	73	1,4	98	-0,7	123	-1,7	148	-2,2
24	4,4	49	-4,7	74	4,1	99	-2,3	124	1,0	149	4,9
25	1,7	50	-3,7	75	3,8	100	-3,8	125	-1,7	150	-2,1

Ek 1.4: Türkiye'nin 1969-2011 Yılları Arasında Aylık Olarak Ölçülmüş Dolar Cinsinden İthalat Değerleri.

	1969	1970	1971	1972	1973
Ocak	63.208.139	81.343.303	96.510.028	93.579.548	133.503.886
Şubat	68.795.673	79.687.064	93.103.156	118.768.312	127.884.932
Mart	74.348.199	77.982.029	95.850.802	109.570.163	201.659.666
Nisan	63.020.134	93.390.423	104.897.749	122.583.852	158.000.250
Mayıs	64.027.394	94.225.023	97.494.991	135.712.822	153.277.973
Haziran	80.033.590	100.627.538	119.104.203	133.572.821	185.396.010
Temmuz	76.239.137	104.116.985	118.952.768	134.691.781	181.072.494
Ağustos	62.154.283	50.225.494	81.075.542	113.121.912	136.432.094
Eylül	57.956.914	51.197.672	93.818.343	155.819.653	183.283.445
Ekim	59.817.900	48.991.557	83.327.580	123.696.090	182.790.359
Kasım	68.031.579	67.656.860	77.450.781	119.839.677	214.047.618
Aralık	63.603.386	98.160.470	109.254.532	201.593.190	228.867.194
	1974	1975	1976	1977	1978
Ocak	212.859.256	348.534.937	425.435.581	538.433.345	184.152.167
Şubat	227.665.465	365.747.580	319.986.259	405.253.882	495.313.828
Mart	284.139.698	461.155.683	502.155.156	461.376.448	283.162.831
Nisan	319.668.687	397.888.152	435.280.878	603.022.020	439.507.810
Mayıs	324.474.279	314.192.333	274.752.193	373.329.683	439.633.105
Haziran	295.478.567	536.667.195	400.121.825	581.470.350	396.673.530
Temmuz	252.130.452	421.037.640	531.146.418	427.581.111	293.434.082
Ağustos	303.346.069	352.561.677	428.853.658	631.907.720	244.724.240
Eylül	317.899.430	363.460.206	420.623.454	476.956.993	376.360.346
Ekim	302.518.769	328.655.022	443.707.061	369.784.027	417.560.499
Kasım	403.223.024	476.392.728	473.247.003	349.449.862	418.102.977
Aralık	534.097.563	372.264.933	473.337.567	577.712.372	610.399.150
	1979	1980	1981	1982	1983
Ocak	278.957.830	433.344.420	781.934.352	607.719.036	731.038.026
Şubat	389.553.895	595.309.372	843.742.129	667.497.972	758.648.598
Mart	525.843.769	370.069.035	677.547.093	684.525.695	859.564.139
Nisan	386.655.750	366.509.373	652.460.943	706.449.398	665.214.063
Mayıs	335.889.064	692.487.657	759.883.446	768.684.625	711.360.270
Haziran	486.926.898	556.877.166	669.112.912	734.613.977	724.525.835
Temmuz	271.963.072	629.953.736	777.098.752	678.237.691	629.599.295
Ağustos	334.095.459	584.052.116	663.038.852	654.002.005	764.450.011
Eylül	621.929.678	1.137.171.668	689.036.203	645.193.795	682.994.543
Ekim	436.863.933	966.607.544	657.244.630	720.487.522	792.057.919
Kasım	358.398.086	581.804.042	800.119.999	755.865.666	825.464.848
Aralık	642.354.177	995.177.976	962.154.553	1.219.388.106	1.090.084.540
	1984	1985	1986	1987	1988
Ocak	664.352.237	822.173.761	1.012.101.306	860.362.026	1.046.502.636
Şubat	694.452.914	685.254.913	857.808.916	998.783.510	1.128.709.067
Mart	821.388.768	928.317.403	941.788.222	981.232.903	1.318.501.178
Nisan	924.618.801	866.526.984	855.692.891	1.082.581.199	1.331.596.194
Mayıs	876.817.502	914.753.700	951.250.221	971.223.863	1.187.407.707
Haziran	845.969.859	801.589.331	832.997.214	983.788.612	1.262.471.796
Temmuz	893.660.306	940.757.714	893.753.355	1.221.952.882	981.607.164
Ağustos	830.785.950	893.249.119	809.610.338	998.967.746	1.136.614.544
Eylül	942.089.989	1.038.961.431	943.652.530	1.295.814.334	1.146.834.905
Ekim	917.351.972	1.044.505.372	901.734.836	1.393.700.645	1.068.872.798
Kasım	978.630.391	1.321.040.213	1.023.067.108	1.591.917.397	1.223.783.991
Aralık	1.366.913.662	1.086.246.404	1.081.314.352	1.777.481.791	1.502.495.827
	1989	1990	1991	1992	1993
Ocak	1.063.338.351	1.501.371.235	1.675.512.219	1.637.239.108	1.792.827.435
Şubat	1.045.521.222	1.491.067.744	1.419.474.091	1.553.530.158	2.004.288.051
Mart	1.210.186.424	1.714.185.217	1.820.898.779	1.751.346.380	2.110.911.447
Nisan	1.274.831.017	1.317.507.042	1.307.835.164	1.742.485.542	2.879.492.871
Mayıs	1.178.163.620	1.990.340.063	1.813.919.706	1.838.191.265	2.524.538.013
Haziran	1.354.268.298	1.567.432.889	1.623.891.267	1.904.238.649	2.374.164.998
Temmuz	1.266.563.767	1.523.853.839	1.761.179.992	2.036.431.178	2.469.378.538
Ağustos	1.388.450.095	2.007.348.406	1.737.937.728	1.867.289.944	2.596.406.226

Eylül	1.339.390.530	1.903.447.229	1.744.859.917	1.952.751.801	2.400.083.201
Ekim	1.546.216.358	2.423.789.008	1.869.297.671	1.904.891.019	2.317.187.792
Kasım	1.542.324.816	2.409.402.233	1.913.858.939	2.077.599.510	2.595.315.556
Aralık	1.582.888.417	2.452.380.685	2.358.348.398	2.605.060.561	3.363.775.401
	1994	1995	1996	1997	1998
Ocak	2.153.737.833	2.097.101.991	3.154.532.283	3.613.582.445	3.105.602.336
Şubat	1.751.886.347	2.282.660.718	2.860.522.730	3.100.081.258	3.875.013.502
Mart	1.981.470.395	2.473.986.182	3.742.739.825	3.831.445.530	4.363.698.376
Nisan	1.724.771.029	2.984.813.373	3.663.636.470	3.503.512.365	3.633.694.185
Mayıs	1.448.340.278	2.584.022.676	3.899.734.324	4.319.075.037	4.174.760.377
Haziran	1.780.776.252	3.046.488.619	3.421.920.834	3.872.634.841	4.167.460.561
Temmuz	1.606.377.043	2.876.390.522	3.913.323.490	4.133.727.664	4.192.462.020
Ağustos	1.890.033.263	3.192.027.185	3.521.377.325	4.158.745.249	3.729.410.359
Eylül	1.919.867.305	3.066.372.716	3.319.728.743	4.357.571.277	3.659.811.252
Ekim	2.059.535.133	3.212.556.524	3.604.392.782	4.373.908.420	3.637.665.831
Kasım	2.248.223.836	3.574.002.938	3.943.692.692	4.353.278.148	3.511.683.221
Aralık	2.705.000.313	4.318.587.332	4.581.040.998	4.941.158.439	3.870.129.882
	1999	2000	2001	2002	2003
Ocak	2.226.510.219	3.229.066.558	4.071.580.161	3.432.188.147	4.425.556.041
Şubat	2.788.101.731	3.931.495.487	3.594.475.642	3.038.170.509	4.186.023.107
Mart	3.045.149.277	4.164.052.899	3.108.974.945	3.938.696.101	5.755.548.940
Nisan	3.334.085.577	4.491.493.939	3.037.989.208	4.212.570.927	5.211.102.092
Mayıs	3.409.307.256	4.698.033.641	3.558.810.054	4.304.487.350	5.531.854.678
Haziran	3.586.516.943	4.964.508.582	3.298.940.752	3.936.731.156	5.727.244.155
Temmuz	3.618.067.053	4.677.509.469	3.436.567.033	4.599.927.501	6.267.433.163
Ağustos	3.178.334.915	4.879.027.603	3.502.144.416	4.418.816.547	5.974.766.858
Eylül	3.643.738.685	4.643.519.098	3.424.976.597	4.509.887.567	6.205.528.427
Ekim	3.559.047.825	5.024.136.228	3.364.478.598	4.830.104.042	6.575.387.520
Kasım	3.848.185.340	5.362.479.583	3.559.437.990	4.962.304.871	5.244.962.671
Aralık	4.434.227.210	4.437.497.416	3.440.707.557	5.369.912.610	8.234.284.406
	2004	2005	2006	2007	2008
Ocak	6.329.956.967	7.219.679.862	8.145.534.848	10.591.885.802	16.338.588.949
Şubat	6.139.441.840	8.323.736.797	9.796.220.249	11.383.177.908	16.026.520.648
Mart	8.451.887.708	10.196.352.932	11.605.026.095	13.234.192.452	16.812.088.342
Nisan	7.932.034.288	9.595.500.303	11.587.101.994	12.919.281.351	17.889.469.623
Mayıs	7.990.553.353	9.811.620.456	12.694.201.568	14.935.155.041	19.306.133.002
Haziran	8.467.764.892	9.947.498.949	12.465.724.883	14.265.946.850	19.476.568.081
Temmuz	8.728.466.074	9.596.123.042	11.709.384.290	15.214.033.523	20.557.428.101
Ağustos	7.883.361.768	10.272.181.394	12.276.087.577	14.681.667.960	19.251.335.340
Eylül	8.486.551.697	10.365.938.994	12.152.978.653	14.459.084.061	17.884.561.792
Ekim	8.087.591.965	10.089.811.653	11.199.556.782	15.626.532.491	14.942.454.486
Kasım	8.568.139.755	9.673.128.931	12.896.574.540	16.631.882.814	12.073.504.655
Aralık	10.474.015.661	11.682.577.594	13.047.782.669	16.119.874.248	11.404.921.090
	2009	2010	2011		
Ocak	9.281.137.649	11.691.248.394	16.903.450.452		
Şubat	9.074.663.754	11.781.611.175	17.519.749.114		
Mart	10.522.038.241	15.022.223.719	21.642.864.110		
Nisan	10.120.319.396	14.943.415.664	20.951.809.316		
Mayıs	10.867.698.195	14.726.092.099	21.105.133.503		
Haziran	12.500.590.854	15.233.114.061	21.603.216.264		
Temmuz	12.856.285.859	16.078.478.415	21.059.296.051		
Ağustos	12.811.165.960	15.434.037.076	19.677.480.391		
Eylül	12.485.004.285	15.643.757.883	21.202.394.457		
Ekim	12.772.506.117	17.296.679.730	19.915.196.831		
Kasım	12.617.535.430	17.134.768.305			
Aralık	15.019.475.471	20.558.905.331			

Kaynak: TÜİK

Ek 1.5: Türkiye'nin 1992-2008 Yılları Arasında Aylık Olarak Ölçülmüş Sanayi Üretim Endeksi Verileri (Toplam Sanayi Sektörünün Aylık Sanayi Üretim Endeksi, Baz Yılı: 1997=100,0)).

	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Ocak	76,8	79,4	86,2	79,3	89,1	89,1	91,3	83,7	86,3
Şubat	76,8	80,1	77,2	75,7	77,1	80,9	94,2	88,7	94,5
Mart	82,1	79,5	81	79,5	89,7	99,4	106	94,4	94,4
Nisan	71,7	82,4	73,8	83,8	82,8	89,6	91,3	96,1	100,5
Mayıs	80,6	83,2	69,6	79,3	91,4	102,6	106,8	102,9	107,5
Haziran	72,3	78,1	71,5	88,7	90,5	100,5	102,8	104	108,5
Temmuz	78,9	85,8	71,8	86	90,5	101,8	103,6	102,1	106,7
Ağustos	74,8	77	76,7	87	88	101,4	102,1	91,7	109,1
Eylül	85,4	90,4	83,9	88,8	90,6	110,1	110,2	102,4	110,6
Ekim	86,8	90,3	84,6	86,5	100	111,1	107,7	100	112,8
Kasım	83	87,1	84,7	93,9	99,3	106,1	102,6	102,4	113,2
Aralık	80,9	92,5	81,9	94,8	94,6	107,7	96,6	101,7	96,9
	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	
Ocak	93,8	91,2	106,6	112,2	117,8	111,7	128,5	143,4	
Şubat	90,8	85,8	89,3	102,4	113,3	119,8	129,5	139,2	
Mart	88,1	104,4	111,7	125,6	129,9	141,7	146,9	150,5	
Nisan	89,4	103,5	105,5	122,2	128,4	136,8	140,6	149,3	
Mayıs	96	107,6	110,8	129,6	132,7	143,5	152	155,8	
Haziran	96,1	103,9	113,1	131	133,3	146,7	151	152,8	
Temmuz	95,6	107,1	118	132,4	130,6	141,9	148,3	153,4	
Ağustos	98	104,6	114,7	124	132,4	138,4	147,1	141,1	
Eylül	101	111,7	124,2	130,8	141,6	147,4	151,1	143,2	
Ekim	97,7	110,8	122,5	123,5	132,2	136,4	147,8	135,7	
Kasım	97,2	106,6	108,6	118,1	129,9	145	156,7	130,4	
Aralık	89,4	102,9	123,5	128,6	138,2	142,3	140,9	106,2	

Kaynak: TÜİK

Ek 1.6: Bir Kimyasal Sürecin Sıcaklık Değerleri

1	26,6	46	19,6	91	24,4	136	21,1	181	24,4
2	27,0	47	19,6	92	24,4	137	20,9	182	24,2
3	27,1	48	19,6	93	24,4	138	20,8	183	24,2
4	27,1	49	19,6	94	24,4	139	20,8	184	24,1
5	27,1	50	19,6	95	24,5	140	20,8	185	24,1
6	27,1	51	19,7	96	24,5	141	20,8	186	24,0
7	26,9	52	19,9	97	24,4	142	20,9	187	24,0
8	26,8	53	20,0	98	24,3	143	20,8	188	24,0
9	26,7	54	20,1	99	24,2	144	20,8	189	23,9
10	26,4	55	20,2	100	24,2	145	20,7	190	23,8
11	26,0	56	20,3	101	24,0	146	20,7	191	23,8
12	25,8	57	20,6	102	23,9	147	20,8	192	23,7
13	25,6	58	21,6	103	23,7	148	20,9	193	23,7
14	25,2	59	21,9	104	23,6	149	21,2	194	23,6
15	25,0	60	21,7	105	23,5	150	21,4	195	23,7
16	24,6	61	21,3	106	23,5	151	21,7	196	23,6
17	24,2	62	21,2	107	23,5	152	21,8	197	23,6
18	24,0	63	21,4	108	23,5	153	21,9	198	23,6
19	23,7	64	21,7	109	23,5	154	22,2	199	23,5
20	23,4	65	22,2	110	23,7	155	22,5	200	23,5
21	23,1	66	23,0	111	23,8	156	22,8	201	23,4
22	22,9	67	23,8	112	23,8	157	23,1	202	23,3
23	22,8	68	24,6	113	23,9	158	23,4	203	23,3
24	22,7	69	25,1	114	23,9	159	23,8	204	23,3
25	22,6	70	25,6	115	23,8	160	24,1	205	23,4
26	22,4	71	25,8	116	23,7	161	24,6	206	23,4
27	22,2	72	26,1	117	23,6	162	24,9	207	23,3
28	22,0	73	26,3	118	23,4	163	24,9	208	23,2
29	21,8	74	26,3	119	23,2	164	25,1	209	23,3
30	21,4	75	26,2	120	23,0	165	25,0	210	23,3
31	20,9	76	26,0	121	22,8	166	25,0	211	23,2
32	20,3	77	25,8	122	22,6	167	25,0	212	23,1
33	19,7	78	25,6	123	22,4	168	25,0	213	22,9
34	19,4	79	25,4	124	22,0	169	24,9	214	22,8
35	19,3	80	25,2	125	21,6	170	24,8	215	22,6
36	19,2	81	24,9	126	21,3	171	24,7	216	22,4
37	19,1	82	24,7	127	21,2	172	24,6	217	22,2
38	19,0	83	24,5	128	21,2	173	24,5	218	21,8

39	18,9	84	24,4	129	21,1	174	24,5	219	21,3
40	18,9	85	24,4	130	21,0	175	24,5	220	20,8
41	19,2	86	24,4	131	20,9	176	24,5	221	20,2
42	19,3	87	24,4	132	21,0	177	24,5	222	19,7
43	19,3	88	24,4	133	21,0	178	24,5	223	19,3
44	19,4	89	24,3	134	21,1	179	24,5	224	19,1
45	19,5	90	24,4	135	21,2	180	24,4	225	19,0
								226	18,8

Kaynak: Box, Jenkins ve Reinsel, s.544

Ek 1.7: Euro Bölgesi 1985-2012 Yılları Arasında Aylık Olarak Ölçülmüş Ham Brent Petrol Varil Fiyatları.

	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
Ocak	-	25,2609	16,5182	13,3266	14,3176	16,7469	17,3363
Şubat	-	16,8622	15,2809	13,1823	14,2471	15,9543	13,3110
Mart	-	13,3181	15,6204	12,1130	16,0926	15,5888	14,6359
Nisan	-	12,5621	15,5698	13,3540	17,1334	14,3945	15,8340
Mayıs	36,6383	14,2754	15,9458	13,4537	16,5866	13,8889	16,2415
Haziran	35,4184	12,2961	16,4063	13,2715	16,3610	12,9999	15,9808
Temmuz	34,2709	10,0871	17,5500	13,1959	15,8494	14,1022	16,9726
Ağustos	33,8411	13,5117	17,0353	13,5542	15,5932	19,6245	16,8707
Eylül	34,6826	13,9921	16,0591	12,1240	16,6387	24,7658	16,9230
Ekim	33,4498	13,6932	16,3643	10,9670	16,8312	25,9843	18,1138
Kasım	34,1048	14,4211	14,6527	10,9201	16,5044	22,9635	16,7716
Aralık	29,5807	15,3397	13,4664	12,5971	16,5556	19,6288	14,0299
	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Ocak	13,8220	14,5630	12,5688	13,3426	13,5422	19,0961	14,3927
Şubat	14,2537	15,5528	12,2547	13,5011	13,3620	17,6215	13,5061
Mart	14,3985	15,9781	11,8740	12,8245	14,5735	17,0163	12,7433
Nisan	15,2454	15,5139	13,0261	13,6595	15,8357	15,8286	13,0170
Mayıs	15,6683	15,3603	13,8681	13,8754	14,9926	16,7818	13,0171
Haziran	16,1721	15,0512	14,2137	12,9011	14,5078	15,8726	12,2412
Temmuz	14,8679	14,7874	14,4743	11,8710	15,2648	16,6621	11,8878
Ağustos	14,1948	14,9624	13,9764	12,3954	15,7163	17,5709	11,2511
Eylül	14,7056	13,9188	13,1558	12,8179	17,7969	16,9914	11,8583
Ekim	15,3818	14,5146	13,0991	12,1219	19,0408	18,0412	11,1202
Kasım	15,5000	13,7115	13,7831	12,6176	17,8571	16,9764	10,1850
Aralık	14,7886	12,0738	13,2546	13,6362	18,8150	15,7648	8,7563
	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Ocak	9,5267	24,9276	27,4682	22,5709	28,2833	24,2096	33,6007
Şubat	9,4106	27,4256	29,8793	23,4545	29,8076	24,0717	35,2464
Mart	11,8780	28,1746	28,0598	27,8976	27,1826	26,6673	40,4137
Nisan	14,4228	24,5615	29,7733	29,2965	22,8764	27,6457	41,3922
Mayıs	14,8960	30,2532	32,6926	28,1191	21,9380	30,8791	39,4243
Haziran	15,6664	31,2514	32,4803	25,8120	23,3076	29,3277	45,7259
Temmuz	18,1469	30,4733	29,4168	25,9310	24,9572	30,7268	48,2549
Ağustos	19,3069	33,3047	28,7054	26,9925	26,4694	34,1204	52,0461
Eylül	21,6807	37,2103	28,7614	28,9213	23,9297	35,0205	52,1871
Ekim	20,7934	36,7711	23,8075	27,8898	24,7033	39,3565	49,3474
Kasım	23,4241	37,7163	21,6987	24,2473	24,6460	34,4724	47,8653
Aralık	24,8273	28,8488	21,4690	27,1056	24,0496	29,9761	48,5179
	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Ocak	52,4815	42,2269	62,4387	34,2974	53,9784	72,5877	86,2344
Şubat	51,8170	44,9066	64,0862	34,5613	54,4891	76,6326	89,7464
Mart	52,5811	47,2648	66,1209	36,5235	59,0665	82,1068	-
Nisan	57,5616	50,2325	69,8474	39,0474	63,9929	85,1395	-
Mayıs	55,7091	50,2504	80,1039	42,8033	61,6167	79,8296	-
Haziran	55,4378	52,5685	85,9319	49,5164	62,1816	79,0854	-
Temmuz	58,7493	55,2325	85,2843	46,4590	58,9178	81,7058	-
Ağustos	57,7940	52,3674	77,0383	51,1313	59,9151	76,7140	-
Eylül	50,2820	55,1692	69,9981	46,9331	59,8432	79,8159	-
Ekim	47,6976	57,7252	55,2039	49,7654	60,2167	78,9365	-
Kasım	46,7381	62,8231	43,1188	52,0729	63,1009	81,3574	-
Aralık	47,4282	62,7599	32,0770	51,6425	69,5780	81,6568	-

Kaynak: Avrupa Merkez Bankası

Ek 1. 8: Ki-Kare Kritik Değerler Tablosu (m serbestlik derecesi, α anlamlılık düzeyi)

m	$\alpha=0,995$	$\alpha=0,99$	$\alpha=0,975$	$\alpha=0,95$	$\alpha=0,9$	$\alpha=0,75$	$\alpha=0,5$	$\alpha=0,25$	$\alpha=0,1$	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,025$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,005$	$\alpha=0,001$
1	-	-	-	-	0,016	0,102	0,455	1,32	2,71	3,34	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,36	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	47,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

Kaynak: Box, Jenkins, Reinsel, 1994: 538