



**ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER VE
UYGULAMALARI**

Kıyasettin TAŞDEMİR

Yüksek Lisans Tezi

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

AĞRI 2023

(Her Hakkı Saklıdır)

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Kıyasettin TAŞDEMİR

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE BAZI İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

AĞRI-2023

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER VE
UYGULAMALARI

Kıyasettin TAŞDEMİR

Tez Danışman: Prof. Dr Ahmet Ocak AKDEMİR

Zaman skalası son zamanlarda, matematiğin diğer bilim dallarında yaygın olarak kullanılan bir konusudur. Bu çalışma sahası geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu tezde Kuramsal Temeller adlı bölümde zaman skalası kavramı, temel özellikleri ve zaman skalaları üzerinde delta türev, nabla türev, diamond- α türev, delta integral kavramlarının analizi ile ilgili bilgiler verilmiştir. Materyal ve Yöntem kısmında da konveks fonksiyonun tanımı ile Hölder, Minkowski, Cauchy-Schwarz, Jensen ve Ostrowski eşitsizliklerinin zaman skalası versiyonları ve uygulamalarına yer verilmiştir. Araştırma bulgular kısmında ise Ostrowski ve Jensen tipli eşitsizlikler ispatlarıyla birlikte verilmiş olup uygulamalarına değinilmiştir.

Anahtar sözcükler: Zaman skalası, Delta Türev, Nabla Türev, Delta İntegral, Diamond- α türev, Hölder, Minkowski, Cauchy-Schwarz, Jensen ve Ostrowski eşitsizlikleri.

ABSTRACT

Master

SOME INTEGRAL INEQUALITIES ON THE TIME SCALE AND APPLICATIONS

Kıyasettin TAŞDEMİR

Supervisor: Prof. Dr Ahmet Ocak AKDEMİR

Time scale is a topic that has been widely used in other branches of mathematics recently. This field of study has a wide range of applications. In this thesis, in the chapter called Theoretical Fundamentals, the concept of time scale, its basic properties and the analysis of delta derivative, nabla derivative, diamond- α derivative, delta integral concepts on time scales are given. In the Materials and Methods section, the definition of the convex function and the time scale versions and applications of Hölder, Minkowski, Cauchy-Schwarz, Jensen and Ostrowski inequalities are given. In the Findings part, Ostrowski and Jensen type inequalities are given with their proofs and their applications.

Keywords: Time scale, Delta Derivative, Nabla Derivative, Delta Integral, Diamond- α derivative, Hölder, Minkowski, Cauchy-Schwarz, Jensen and Ostrowski inequalities.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca, benden bilgi ve deneyimlerini esirgemeyen, çalışmalarımın tamamlanabilmesi için her türlü şartı sağlayan ve bana her zaman her türlü desteği sunan çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr Ahmet Ocak AKDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında değerli yardımları ile bana yardımcı olan arkadaşım Sayın Sinan ASLAN'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Eğitimim tüm süreçlerinde her türlü destekleriyle beni hiç yalnız bırakmayan aileme teşekkür ederim.

Kıyasettin TAŞDEMİR
Ocak2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR	v
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ	x

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ	1
----------------	---

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. Zaman Skalasında Temel Kavramlar	4
2.2. Zaman Skalasında Delta Türev	9
2.3. Zaman Skalasında İntegral.....	17
2.4. Zaman Skalasında Nabla Türev	23
2.5. Zaman Skalasında Nabla Anti Türevin Varlığı.....	26
2.6. Zincir Kuralı ve Uygulamaları	31
2.7. Diamond- α Dinamik Türevi	34
2.8. Diamond- α İntegrali	35
2.9. Zaman Skalasında Polinomlar	36

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	39
3.1. Hölder Eşitsizliği.....	39
3.2. Cauchy-Schwarz Eşitsizliği	40
3.3. Minkowski Eşitsizliği	41
3.4. Jensen Eşitsizliği	42
3.5. Ostrowski Eşitsizliği	44
3.6. Bazı Uygulamalar	45

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	49
4.1. Ostrowski tipli eşitsilikler	49
4.2. Jensen tipli eşitsizlikler	56
4.3. Bazı Uygulamalar	58

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	62
KAYNAKÇA	63
ÖZGEÇMİŞ	65



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 Noktaların sınıflandırılması.....6

Çizelge 2.2 Graininess fonksiyonu ve sıçrama operatörlerinin özel haller.....16



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Noktaların gösterimi.....	5
--------------------------------------	---



SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\mathbb{T}, \tilde{\mathbb{T}}$	Zaman Skalası
σ	İleri sıçrama operatörü
ρ	Geri sıçrama operatörü
μ	İleri sıçrama fonksiyonu
ϑ	Geri sıçrama fonksiyonu
κ_1^Δ	Hilger(Delta) türev
κ_1^∇	Nabla türev
$\Delta \kappa_1$	İleri fark operatörü
$\nabla \kappa_1$	Geri fark operatörü
C_{rd}	Sağda yoğun sürekli fonksiyonların kümesi
C_{ld}	Solda yoğun sürekli fonksiyonların kümesi
$\kappa_1^{\diamond_\alpha}$	Diamond- α türev
LHS	Eşitsizliğin sol tarafı
RHS	Eşitsizliğin sağ tarafı
$\mathbb{T}_K$	Zaman skolasında türetilmiş bir küme
$\mathbb{T}^K$	Zaman skolasında türetilmiş bir küme
$\mathbb{T}_K^K$	Zaman skolasında türetilmiş bir küme
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük veya Eşittir
$\geq$	Büyük veya Eşittir
ξ	Xi
ζ	Zeta

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ

Son zamanların dikkat çeken yeni çalışmalarından birisi de zaman skalası teorisidir. Zaman skalası 1988 yılında Stefan Hilger tarafından ortaya atılmıştır. Stefan Hilger diskret analiz ile sürekli analizi bir çatı altında birleştirmek amacıyla bu teoriyi ortaya atmıştır. Bunun için de her ikisini kapsayan bir küme almıştır ve bu kümeye zaman skalası demiştir. Daha sonra da örneklerde görülecektir ki zaman skalası reel sayılar olarak alınırsa sürekli analiz ile, tam sayılar alınırsa ise diskret analiz ile çakışmaktadır. Reel sayıların boştan farklı kapalı alt kümesine zaman skalası denir ve T ile gösterilir. $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ Cantor kümesi gibi $\mathbb{R}$ 'nin kapalı alt kümeleri birer zaman skalasıdır. Fakat, $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{C}, (0,1)$ birer zaman skalası değildir. Hemen akıllara neden kapalı alt kümeler diye bir soru gelebilir. Bunun sebebi reel sayıların açık alt kümelerinin yığılma noktalarının hepsini içermemesidir.

Sürekli analizdeki ve ayrık analizdeki hemen hemen her şey zaman skalasında tekrar tanımlanmıştır. Örneğin süreklilik, türev, integral, sınır değer problemi ve tümevarım gibi kavramlar. Buradan da anlaşılacağı gibi zaman skalası bildiklerimizi daha da genele taşımıştır. Yani zaman skalasında $T = \mathbb{R}$ ve $T = \mathbb{Z}$ birer özel haldir.

Zaman skalası diferansiyel ve fark denklemlerini birlikte ifade etmeyi sağlar. $\mathbb{R}$ de tanımlı diferansiyel denklemler veya $\mathbb{Z}$ de tanımlı fark denklemleri için bir sonuç vermek yerine, reel sayılar kümesinin kapalı bir alt kümesi olan T zaman skalasında tanımlanan genel bir dinamik denklem göz önüne alınabilir. Bu nedenle zaman skalası sadece $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ için değil aynı zamanda mümkün diğer uzaylar için de sonuç verme imkanı sağlar.

Günümüzde zaman skalası literatürünün gelişimine katkıda bulunan; M. Bohner, A. Peterson, G. Anastassiou, B. Karpuz, R. Agarwal vb. birçok araştırmacı bulunmaktadır. Bu tez çalışmasında zaman skalası için temel olarak; *Advances in Dynamic Equations on Time Scales* (Bohner and Peterson 2003), *Dynamic Equations on Time Scales* (Bohner and Peterson 2001) adlı kaynaklar kullanılmıştır. Ayrıca

zaman skalasındaki bazı eşitsizlikler için “Frontiers In Time Scales and Inequalities” (Anastassiou 2015) adlı kaynaktan yararlanılmıştır.

Umut Mutlu Özkan da zaman skalasında integral eşitsizlikleri alanında çalışma yapmış isimlerdendir. (Özkan 2007). Günümüzde zaman skalasında daha çok dinamik denklemler konusu çalışılmıştır. Bu tezde bazı integral eşitsizlikler, konvekslikle birlikte bağlantılı bir şekilde verilmiştir.

Konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edildiğinden ve geometrik olarak bir karşılaştırma içerdiğinden, konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Hardy, Littlewood, Pólya, Beckenbach, Bellman, Mitrinović, Pachpatte, Pečarić ve Fink gibi matematikçiler Konveks Fonksiyonlar ile Eşitsizlik Teorisi’ni bir arada inceleyerek çeşitli kitaplar ve çok sayıda makaleler yayınlamışlardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934’te Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılan “Inequalities” adlı kitaptır. (Hardy *et al.* 1952). İkinci çalışma ise E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961’de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren ve yine “Inequalities” adı verilen kitaptır. (Beckenbach and Bellman 1961). Daha sonra Mitrinović’in 1970 yılında yayınladığı ve farklı konulara da değindiği “Analytic Inequalities” adlı kitabı ikinci kitap olarak yerini almıştır. (Mitrinović 1970).

Eşitsizliğin konveks fonksiyonlar merkezli çalışılması C.F. Gauss, A.L. Cauchy ve P.L. Čebyšev ile gelişmeye başlamıştır. 19.-20. yy’da bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Bunların en önemlileri 1881 yılında Hermite tarafından elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği ve 1938 yılında Ostrowski tarafından elde edilen Ostrowski eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” isimli kaynakta bir araya getirilmiştir (Dragomir and Pearce 2000). Eşitsizlik ve konveks fonksiyonları ilişkilendirip bu alanda yoğun çalışmalar yapan birçok matematikçi vardır. Bu

isimler řu řekildedir: J. Pečarić, P. Cerone, G. Anastassiou, G.V. Milovanovic, A.M. Fink, A.W. Roberts, D.E.Varberg, R. Agarwal, N.S. Barnett, N. Ujević, S. Varořanec, P.S. Bullen, G. Toader, M. Alomari, F. Qi, C.E.M. Pearce, M. Darus, M.K. Bakula, M.E. Özdemir, A.O. Akdemir, E. Set, U.S. Kırmacı, A. Ekinçi, H. Yıldırım, M. Avcı Ardıç, M.Z. Sarıkaya, H. Kavurmacı Önalın, M. Gürbüz, Ç. Yıldız.

Yukarıda yapılan çalışmalar göz önünde bulundurularak bu çalışmada zaman skalası ele alınmış olup zaman skalası ile ilgili temel bilgiler, zaman skalasında türev, türevin uygulamaları, integral, integral özellikleri, integral uygulamaları, Hölder, Minkowski, Cauchy-Schwarz, Jensen ve Ostrowski gibi eşitsizliklerinin zaman skalası versiyonları ve uygulamalarına yer verilmiştir. Ayrıca konvekslik tanımı ile birlikte Araştırma Bulgular kısmında Lemma 4.1.1. ve Lemma 4.2.1. kullanılarak Ostrowski ve Jensen tipli eşitsizlikler ispatlarıyla verilmiş ve uygulamalarına değinilmiştir.

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerideki çalışmalarda temel teşkil edecek olan zaman skalasının tanımı, delta türevi, delta integrali ve temel özellikleri ile nabla türevi, nabla integrali ve temel özellikleri hakkında bilgi verilecektir. Zaman skalası analizi ile bağlantılı daha fazla bilgi için (Agarwal et al., 2001; Agarwal et al., 2002; Bohner and Peterson, 2001; Bohner and Peterson, 2003; Hilger1988). çalışmaları okuyuculara destek sağlayabilir.

2.1. Zaman Skalasında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Zaman skalası, gerçel sayılar kümesinin keyfi boş olmayan kapalı bir alt kümesidir. $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ $[0,1] \cup \mathbb{N}$ kapalı aralıkları zaman skalasına birer örnektir. Ama $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{C}, (0,1)$ açık aralığı ise birer zaman skalası değildir. Bu teori boyunca zaman skalası $\mathbb{T}$ ile gösterilecektir. $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı bir κ_1 fonksiyonunun delta türevi κ_1^Δ ile gösterilecektir. Farklı zaman skalaları üzerinde tanımlı fonksiyonların delta türevini anlayabilmek için aşağıdaki iki özel duruma bakılabilir.

- i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise bu taktirde $\kappa_1^\Delta = \kappa_1'$ alışılmış türev
- ii. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise bu taktirde $\kappa_1^\Delta = \Delta\kappa_1$ ileri fark operatörü

Genel teoride daha değişik zaman skalaları alınabilir.

Tanım 2.1.2. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $\xi \in \mathbb{T}$ için $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü

$$\sigma(\xi) = \inf\{\zeta \in \mathbb{T} : \zeta > \xi\}$$

ve $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ geri sıçrama operatörü

$$\rho(\xi) = \sup\{\zeta \in \mathbb{T} : \zeta < \xi\}$$

biçimde tanımlanır. Bu tanımda $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ (eğer $\mathbb{T}$ bir $\max \xi$ ye sahip ise $\sigma(\xi) = \xi$) ve $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ (eğer $\mathbb{T}$ bir $\min \xi$ ye sahip ise $\rho(\xi) = \xi$) olur (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.1.3. Graininess fonksiyonları $\mu, \nu : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere

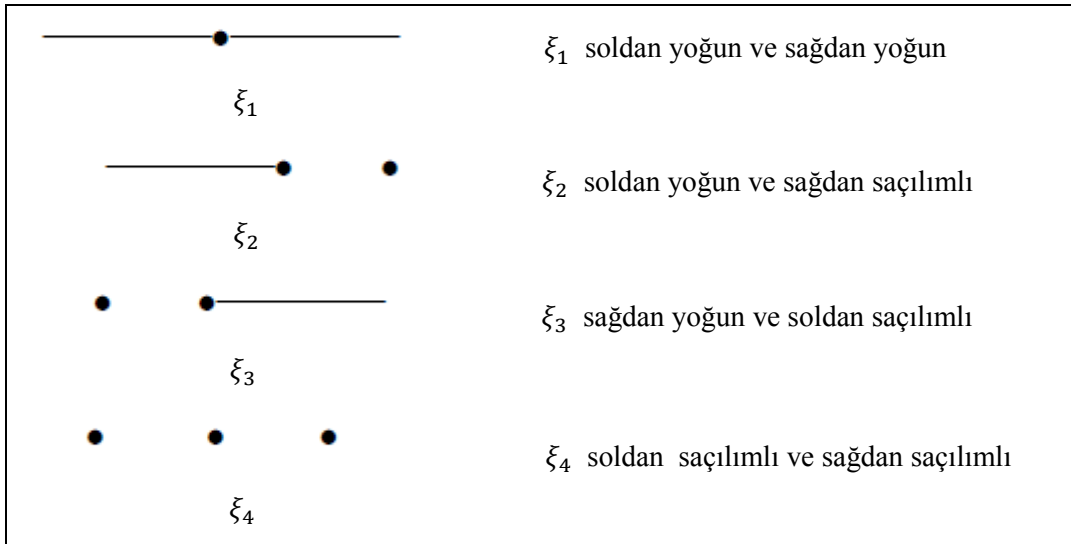
$$\mu(\xi) = \sigma(\xi) - \xi$$

ve

$$\nu(\xi) = \xi - \rho(\xi)$$

şeklinde tanımlanırlar.

Tanım 2.1.4. Eğer $\sigma(\xi) > \xi$ ise ξ sağdan saçılımlı, $\rho(\xi) < \xi$ ise ξ soldan saçılımlıdır. Hem sağdan saçılımlı hem soldan saçılımlı noktalara izole nokta denir. Ayrıca $\xi < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(\xi) = \xi$ ise ξ sağda yoğun, $\xi > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(\xi) = \xi$ ise ξ solda yoğun denir. Hem solda hem de sağda yoğun olan noktalara yoğundur denir. Şekil 2.1. de noktaların gösterimi ve Çizelge 2.1. de noktaların sınıflandırılması gösterilmiştir.



ξ sağdan saçılımlı	$\xi < \sigma(\xi)$
ξ sağdan yoğun	$\xi = \sigma(\xi)$
ξ soldan saçılımlı	$\rho(\xi) < \xi$
ξ soldan yoğun	$\rho(\xi) = \xi$
ξ izole	$\rho(\xi) < \xi < \sigma(\xi)$
ξ yoğun	$\rho(\xi) = \xi = \sigma(\xi)$

Çizelge 2.1. Noktaların Sınıflandırılması

$\sigma(\xi)$ ve $\rho(\xi)$ için Tanım 2.1.2. düşünüldüğünde, $\sigma(\xi)$ ve $\rho(\xi)$ $\mathbb{T}$ zaman skalasının elemanı olur. Çünkü $\mathbb{T}$ zaman skalası, $\mathbb{R}$ nin kapalı bir alt kümesidir. $\mathbb{T}$ zaman skalasından türetilmiş bir $\mathbb{T}^k$ kümesi; eğer soldan saçılımlı bir m maksimumuna sahip ise, $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - m$ diğer durumlarda $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ şeklinde olur (Bohner and Peterson 2001).

$\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\kappa_1^\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall \xi \in \mathbb{T}$ için $\kappa_1^\sigma(\xi) = \kappa_1(\sigma(\xi))$

şekline tanımlanır (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.1.1. Zaman skalasının $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ olduğu durumları inceleyelim.

i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\forall \xi \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(\xi) = \inf\{\zeta \in \mathbb{R}: \zeta > \xi\} = \inf(\xi, \infty) = \xi$$

$$\rho(\xi) = \sup\{\zeta \in \mathbb{R}: \zeta < \xi\} = \sup(-\infty, \xi) = \xi$$

$$\mu(\xi) = \sigma(\xi) - \xi = \xi - \xi = 0$$

$$\nu(\xi) = \xi - \rho(\xi) = \xi - \xi = 0$$

ve

$\forall \xi \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(\xi) = \xi = \rho(\xi)$$

olduğundan $\mathbb{R}$ tüm noktalarında yoğundur ve daima $\mu(\xi) = v(\xi) = 0$ dır.

ii. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun. $\forall \xi \in \mathbb{Z}$

$$\sigma(\xi) = \inf\{\zeta \in \mathbb{Z}: \zeta > \xi\} = \inf\{\xi + 1, \xi + 2, \xi + 3, \dots\} = \xi + 1$$

$$\rho(\xi) = \sup\{\zeta \in \mathbb{Z}: \zeta < \xi\} = \sup\{\xi - 1, \xi - 2, \xi - 3, \dots\} = \xi - 1$$

$$\mu(\xi) = \sigma(\xi) - \xi = (\xi + 1) - \xi = 1$$

$$v(\xi) = \xi - \rho(\xi) = \xi - (\xi - 1) = 1$$

ve $\forall \xi \in \mathbb{Z}$ için

$$\rho(\xi) < \xi < \sigma(\xi)$$

olduğundan $\mathbb{Z}$ tüm noktalarında saçılımlıdır ve daima $\mu(\xi) = v(\xi) = 1$ dir. Yukarıdaki iki durumda da $\mu(\xi)$, $v(\xi)$ fonksiyonlar sabittir. Her iki fonksiyon da zaman skalasında türevlerde kullanılır. Sabit ya da değişken olması farklı sonuçlar oluşturacağı için bu iki fonksiyonun zaman skalasında ayrı bir önemi vardır.

Örnek 2.1.2. $\mathbb{T} = [0,1] \cup \{2,3\}$ zaman skalası ele alınsın.

i.
$$\sigma(1) = \inf\{\zeta > 1: \zeta \in [0,1] \cup \{2,3\}\} = \inf\{\{2,3\}\} = 2$$

olup $\sigma(1) = 2 > 1$ yani $\sigma(\xi) > \xi$ olduğundan $\xi=1$ noktasında sağdan saçılımlı özelliği sağlanmış olur.

ii.
$$\sigma\left(\frac{1}{2}\right) = \inf\left\{\zeta > \frac{1}{2}: \zeta \in [0,1] \cup \{2,3\}\right\} = \inf\left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right] \cup \{2,3\}\right\} = \frac{1}{2}$$

olduğundan $\xi = \frac{1}{2}$ noktasında sağdan yoğun olma özelliği sağlanır.

iii.
$$\rho(2) = \sup\{\zeta < 2: \zeta \in [0,1] \cup \{2,3\}\} = \sup\{[0,1]\} = 1$$

olup $\rho(2) = 1 < 2$ olduğundan $\xi=2$ soldan saçılımlı nokta olduğu görülür.

$$\text{iv.} \quad \rho\left(\frac{1}{2}\right) = \sup\left\{\zeta < 2: \zeta \in [0,1] \cup \{2,3\}\right\} = \sup\left\{\left[0, \frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{1}{2}$$

olduğundan $\xi = \frac{1}{2}$ noktası soldan yoğun olma özeliği sağlanır.

Örnek 2.1.3. $\mathbb{T} = [0,1] \cup \{2,3\}$ zaman skalası için

$$\begin{aligned} \rho(3) &= \sup\{\zeta < 3: \zeta \in [0,1] \cup \{2,3\}\} \\ &= \sup\{[0,1] \cup \{2\}\} = 2 \end{aligned}$$

olduğundan $\xi = 3$ noktası soldan saçılımlı olup

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^K &= [0,1] \cup \{2,3\} - \{3\} \\ &= [0,1] \cup \{2\} = 2 \end{aligned}$$

ifadesi yazılabilir.

Örnek 2.1.4. Aşağıda tanımlanan her bir $\mathbb{T}$ zaman skalası için σ, ρ, μ, ν operatörlerini bulmaya çalışalım.

i. $\xi \in \mathbb{T} = \{2^n: n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ olsun. $\xi = 2^n$ için

$$\sigma(\xi) = \inf\{\zeta \in \mathbb{Z}: \zeta > \xi\} = \inf\{2^{n+1}, 2^{n+2}, \dots\} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2\xi$$

$$\rho(\xi) = \sup\{\zeta \in \mathbb{Z}: \zeta < \xi\} = \sup\{\dots, 2^{n-2}, 2^{n-1}\} = 2^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^n = \frac{\xi}{2}$$

$$\mu(\xi) = \sigma(\xi) - \xi = 2\xi - \xi = \xi$$

$$\nu(\xi) = \xi - \rho(\xi) = \xi - \frac{\xi}{2} = \frac{\xi}{2}$$

ii. $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\}$ ve $\forall \xi \in \mathbb{T}$ olsun. $\xi = \frac{1}{n}$ için $n = \frac{1}{\xi}$ olur.

$$\sigma(\xi) = \inf\{\zeta \in \mathbb{Z}: \zeta > \xi\} = \inf\left\{\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \dots\right\} = \frac{1}{n-1} = \frac{1}{\frac{1}{\xi}-1} = \frac{\xi}{1-\xi}$$

$$\rho(\xi) = \sup\{\zeta \in \mathbb{Z}: \zeta < \xi\} = \sup\{\dots, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\} = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{\xi}+1} = \frac{\xi}{1+\xi}$$

$$\mu(\xi) = \sigma(\xi) - \xi = \frac{\xi}{1-\xi} - \xi = \frac{\xi^2}{1-\xi}$$

$$v(\xi) = \xi - \rho(\xi) = \xi - \frac{\xi}{1+\xi} = \frac{\xi^2}{1+\xi}$$

2.2. Zaman Skalasında Delta Türev

Tanım 2.2.1. $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\xi \in \mathbb{T}^K$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ olacak şekilde $\exists \delta > 0$ için ξ nin bir U komşuluğu (yani $U = (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap \mathbb{T}$) için

$$|\kappa_1(\sigma(\xi)) - \kappa_1(\zeta) - \kappa_1^\Delta(\xi)[\sigma(\xi) - \zeta]| \leq \varepsilon |\sigma(\xi) - \zeta| \quad \forall \zeta \in U$$

eşitsizliği sağlanırsa $\kappa_1^\Delta(t)$ ifadesine κ_1 fonksiyonunun delta türevi denir (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.2.1.

i. Eğer $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall \xi \in \mathbb{T}$ için $\kappa_1(\xi) = \alpha$

ise $\kappa_1^\Delta(t) = 0$ olur. Burada $\alpha \in \mathbb{R}$ sabittir ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$|\kappa_1(\sigma(\xi)) - \kappa_1(\zeta) - 0[\sigma(\xi) - \zeta]| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(\xi) - \zeta|, \quad \forall \zeta \in \mathbb{T}$$

olması sebebi ile doğrudur.

ii. Eğer $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall \xi \in \mathbb{T}$ için $\kappa_1(\xi) = \xi$ ise $\kappa_1^\Delta(t) = 1$ olur

ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} |\kappa_1(\sigma(\xi)) - \kappa_1(\zeta) - 1[\sigma(\xi) - \zeta]| &= |\sigma(\xi) - \zeta - [\sigma(\xi) - \zeta]| \\ &= 0 \leq \varepsilon |\sigma(\xi) - \zeta|, \quad \forall \zeta \in \mathbb{T} \end{aligned}$$

Teorem 2.2.1. Eğer $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon ve $\xi \in \mathbb{T}^K$ olsun. Bu durumda

- i. Eğer κ_1 fonksiyonu ξ noktasında türevlenebilir ise κ_1 fonksiyonu ξ noktasında süreklidir.
- ii. Eğer κ_1 fonksiyonu ξ noktasında sürekli ve ξ noktası sağdan saçılımlı ise κ_1 fonksiyonu ξ noktasında türevlenebilirdir ve

$$\kappa_1^\Delta(\xi) = \frac{\kappa_1(\sigma(\xi)) - \kappa_1(\xi)}{\sigma(\xi) - \xi}.$$

- iii. Eğer ξ noktası sağdan yoğun ise κ_1 fonksiyonu ξ noktasında türevlenebilirdir ve

$$\kappa_1^\Delta(\xi) = \lim_{\zeta \rightarrow \xi} \frac{\kappa_1(\xi) - \kappa_1(\zeta)}{\xi - \zeta}$$

- iv. Eğer κ_1 fonksiyonu ξ noktasında türevlenebilir ise

$$(\kappa_1 \sigma(\xi)) = \kappa_1(\xi) + \mu(\xi) \kappa_1^\Delta(\xi)$$

dir (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.2.2. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumlarını inceleyim.

- i. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olsun. Teorem 2.2.1. (iii) den, $\kappa_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonun delta türev $\xi \in \mathbb{R}$ için

$$\kappa_1^\Delta(\xi) = \lim_{\zeta \rightarrow \xi} \frac{\kappa_1(\xi) - \kappa_1(\zeta)}{\xi - \zeta} = \kappa_1'(\xi)$$

dir.

- ii. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun. Teorem 2.2.1. (ii) den $\kappa_1: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonun delta türevi $\xi \in \mathbb{Z}$ için

$$\kappa_1^\Delta(\xi) = \frac{\kappa_1(\sigma(\xi)) - \kappa_1(\xi)}{\mu(\xi)} = \kappa_1(\xi + 1) - \kappa_1(\xi) = \Delta \kappa_1(\xi)$$

biçimindedir. Δ zaman skalasında fark operatörüdür ve

$$\Delta\kappa_1(\xi) = \kappa_1(\xi + 1) - \kappa_1(\xi)$$

şeklinde tanımlanır (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.2.3. $\kappa_1 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki tanımlar kullanarak $\kappa_1^\Delta(\xi)$ türevini bulalım.

i. $\kappa_1(\xi) = \sigma(\xi), \mathbb{T} := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}, \xi \in \mathbb{T}$

ii. $\kappa_1(\xi) = \xi^2 \mathbb{T} := \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}} = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}_0\}, \xi \in \mathbb{T}$

Cözüm:

i. $\kappa_1(\xi) = \sigma(\xi), \mathbb{T} := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}, \xi \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$

için her nokta yoğun olduğundan sağ yayılmıştır.

$$\sigma(\xi) = \frac{1}{\frac{1}{\xi} - 1} = \frac{\xi}{1 - \xi} \Rightarrow \mu(\xi) = \sigma(\xi) - \xi = \frac{\xi^2}{1 - \xi}$$

$$\sigma(\sigma(\xi)) = \frac{\xi}{1 - 2\xi}$$

$$\sigma^\Delta(\xi) = \frac{\sigma(\sigma(\xi)) - \sigma(\xi)}{\mu(\xi)} = \frac{\xi}{1 - 2\xi}$$

bulunur. Özel olarak $\xi = 0$ için

$$\sigma^\Delta(\xi) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\kappa_1(0) - \kappa_1(\zeta)}{0 - \zeta} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\sigma(\xi)}{\zeta} = \frac{\zeta}{1 - \zeta} = 1$$

olur.

ii. $\kappa_1(t) = \xi^2 \mathbb{T} := \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}} = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}_0\}, \xi \in \mathbb{T}$ kümesine ait her nokta yoğun olup

$$\sigma(\xi) = \sqrt{\xi^2 + 1} \Rightarrow \mu(\xi) = \sigma(\xi) - \xi = \sqrt{\xi^2 + 1} - \xi$$

$$\kappa_1^\Delta(\xi) = \frac{\kappa_1(\sigma(\xi)) - \kappa_1(\xi)}{\mu(\xi)} = \frac{\kappa_1(\sqrt{\xi^2 + 1}) - \kappa_1(\xi)}{\sqrt{\xi^2 + 1} - \xi} = \xi + \sqrt{\xi^2 + 1}$$

bulunur.

Teorem 2.2.2. $\kappa_1, \kappa_2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve $\xi \in \mathbb{T}^K$ noktasında türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Bu taktirde

- i. $\kappa_1 + \kappa_2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ toplam fonksiyonu da ξ noktasında türevlenebilir ve

$$(\kappa_1 + \kappa_2)^\Delta = \kappa_1^\Delta(\xi) + \kappa_2^\Delta(\xi).$$

- ii. Her sabit α için $\alpha\kappa_1 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da türevlenebilir ve

$$(\alpha\kappa_1)^\Delta = \alpha\kappa_1^\Delta(\xi).$$

- iii. $\kappa_1\kappa_2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da türevlenebilir ve

$$(\kappa_1\kappa_2)^\Delta(\xi) = \kappa_1(\xi)\kappa_2^\Delta(\xi) + \kappa_1^\Delta(\xi)\kappa_2(\sigma(\xi))$$

$$= \kappa_1^\Delta(\xi)\kappa_2(\xi) + \kappa_1(\sigma(\xi))\kappa_2^\Delta(\xi).$$

- iv. Eğer $\kappa_1(\xi)\kappa_1(\sigma(\xi)) \neq 0$ ise $\frac{1}{\kappa_1}$ fonksiyonu da türevlenebilir ve

$$\left(\frac{1}{\kappa_1}\right)^\Delta(\xi) = -\frac{\kappa_1^\Delta(\xi)}{\kappa_1(\xi)\kappa_1(\sigma(\xi))}$$

- v. Eğer $\kappa_2(\xi)\kappa_2(\sigma(\xi)) \neq 0$ ise $\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$ fonksiyonu da türevlenebilir ve

$$\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^\Delta(\xi) = \frac{\kappa_1^\Delta(\xi)\kappa_2(\xi) - \kappa_1(\xi)\kappa_2^\Delta(\xi)}{\kappa_2(\xi)\kappa_2(\sigma(\xi))}$$

şeklindedir (Bohne rand Peterson 2001).

Örnek 2.2.4. x, y, z fonksiyonları ξ noktasında Δ türevlenebilsin. Bu durumda ξ noktasında

$$(xyz)^\Delta = x^\Delta yz + x^\sigma y^\Delta z + x^\sigma y^\sigma z^\Delta$$

olduğunu ve bu durumun n tane fonksiyon için genelleştirilmiş versiyonuna ulaşılmaya çalışılmıştır.

$$\begin{aligned} (xyz)^\Delta &= (xy)^\Delta z + (xy)^\sigma z^\Delta = (x^\Delta y + x^\sigma y^\Delta)z + x^\sigma y^\sigma z^\Delta \\ &= x^\Delta yz + x^\sigma y^\Delta z + x^\sigma y^\sigma z^\Delta \end{aligned}$$

Şimdi bu formülün n tane fonksiyonun çarpımı için genelleştirilerek:

$$(x_1 x_2 x_3 \dots x_n) = x_1^\Delta \cdot x_2 \dots x_n + x_1^\sigma x_2^\Delta \dots x_n + \dots + x_1^\sigma x_2^\sigma \dots x_{n-1}^\sigma x_n^\Delta$$

elde edilir. Bunu daha kısa olarak

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^\Delta = \sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^{k-1} x_i^\sigma \right) x_k^\Delta \left(\prod_{i=k+1}^n x_i \right)$$

şeklinde göstermek mümkündür.

Teorem 2.2.3. $m \in \mathbb{N}$ ve α bir sabit olsun.

$$\text{i.} \quad \kappa_1(\xi) = (\xi - \alpha)^m$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon için,

$$\kappa_1^\Delta(\xi) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(\xi) - \alpha)^v (\xi - \alpha)^{m-1-v}$$

$$\text{ii.} \quad \kappa_2(\xi) = \frac{1}{(\xi - \alpha)^m}$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon için,

$$\kappa_2(\xi) = - \sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(\xi) - \alpha)^{m-v} (\xi - \alpha)^{v+1}}, (\sigma(\xi) - \alpha)(\xi - \alpha) \neq 0$$

eşitlikleri doğrudur (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.2.5. $\kappa_1(\xi) = \xi^2$, $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}}$ için κ_1 fonksiyonunun Δ türevini ifade ediniz.

Çözüm:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{\xi^2 + 1}$$

olup $\kappa_1(\xi) = (\xi - 0)^2$ formunda yazılırsa $m = 2$, $\alpha = 0$ olur.

Bu durumda istenenler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\kappa_1^\Delta(\xi) &= (\xi^2)^\Delta = \sum_{v=0}^1 (\sigma(\xi) - 0)^v \cdot (\xi - 0)^{1-v} \\ &= \sum_{v=0}^1 \left(\sqrt{\xi^2 + 1}\right)^v \cdot (\xi - 0)^{1-v} \\ &= \xi + \sqrt{\xi^2 + 1}\end{aligned}$$

Tanım 2.2.1. $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer κ_1^Δ fonksiyonu $\mathbb{T}^{K^2} = (\mathbb{T}^K)^K$ üzerinde türevlenebilir ise, κ_1 fonksiyonunun ikinci türevi $\kappa_1^{\Delta\Delta} = (\kappa_1^\Delta)^\Delta: \mathbb{T}^{K^2} \rightarrow \mathbb{R}$ dir. Benzer şekilde n yinci mertebeden türevi $\kappa_1^{\Delta^n}: \mathbb{T}^{K^n} \rightarrow \mathbb{R}$ biçimindedir.

Bu durumda

$$\sigma^2(\xi) = \sigma(\sigma(\xi))$$

ve

$$\rho^2(\xi) = \rho(\rho(\xi)).$$

Ayrıca

$$\sigma^0(\xi) = \rho^0(\xi) = \xi$$

$$f^{\Delta^0} = f$$

$$\mathbb{T}^{K^0} = \mathbb{T}$$

ile gösterilir (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.2.6. Keyfi bir zaman skalası için aşağıdaki fonksiyonların sırasıyla ikinci mertebeden türevleri aşağıdaki şekilde verilir.

i. $\kappa_1(\xi) = 1, \kappa_1^\Delta(\xi) = 0, \kappa_1^{\Delta^2}(\xi) = (\kappa_1^\Delta(\xi))^\Delta = 0$

ii $\kappa_1(\xi) = \xi^2, \kappa_1^\Delta(\xi) = \xi + \sigma(\xi), \kappa_1^{\Delta^2}(\xi) = (\kappa_1^\Delta(\xi))^\Delta$
 $= [\xi + \sigma(\xi)]^\Delta = 1 + \sigma^\Delta(\xi)$

Örnek 2.2.7. $\kappa_1(\xi) = \xi^2, \mathbb{T} = \mathbb{N}_0 := \left\{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}_0\right\}, \xi \in \mathbb{T}$

fonksiyonun ikinci türevi şu şekilde verilir.

Çözüm: $\kappa_1(\xi) = \xi^2, \mathbb{T} = \mathbb{N}_0, \kappa_1^\Delta(\xi) = 2\xi + \frac{1}{2}, \sigma(\xi) = \xi + \frac{1}{2}$

$$\kappa_1^{\Delta^2}(\xi) = (\kappa_1^\Delta(\xi))^\Delta = [\xi + \sigma(\xi)]^\Delta = \left[\xi + \frac{1}{2}\right]^\Delta = 2 + 0 = 2$$

Örnek 2.2.8. Genel olarak κ_1 ve κ_2 iki kez türevlenebilir olsa bile $\kappa_1\kappa_2$ iki kez türevlenemez. Çünkü,

$$(\kappa_1\kappa_2) = \kappa_1^\Delta\kappa_2 + \kappa_1^\sigma\kappa_2^\Delta$$

olduğundan κ_1 ve κ_2 iki kez türevlenebilir ve κ_1^σ türevlenebilir ise bu durumda,

$$\begin{aligned} (\kappa_1\kappa_2)^{\Delta\Delta} &= (\kappa_1^\Delta\kappa_2 + \kappa_1^\sigma\kappa_2^\Delta)^\Delta = \kappa_1^{\Delta\Delta}\kappa_2 + \kappa_1^{\Delta\sigma}\kappa_2^\Delta + \kappa_1^{\sigma\Delta}\kappa_2^{\Delta\Delta} + \kappa_1^{\sigma\sigma}\kappa_2^{\Delta\Delta} \\ &= \kappa_1^{\Delta\Delta}\kappa_2 + (\kappa_1^{\Delta\sigma} + \kappa_1^{\sigma\Delta})\kappa_2^\Delta + \kappa_1^{\sigma\sigma}\kappa_2^{\Delta\Delta} \end{aligned}$$

olur (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.2.9. $h > 0$ ve $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ olsun. Bu durumda $\xi \in \mathbb{T}$ için

$$\sigma(\xi) = \inf\{\zeta \in \mathbb{T} : \zeta > \xi\} = \inf\{\xi + nh : n \in \mathbb{N}\} = \xi + h$$

olur. Benzer şekilde

$$\rho(\xi) = \xi - h$$

biçimindedir. $\forall \xi \in \mathbb{T}$ noktası izole noktadır ve $\forall \xi \in \mathbb{T}$ için

$$\mu(\xi) = \sigma(\xi) - \xi = \xi + h - \xi = h \text{ dir.}$$

Böylece bu örnekte μ sabittir.

$\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\forall \xi \in \mathbb{T}$ için

$$\kappa_1^{\Delta}(\xi) = \frac{\kappa_1(\sigma(\xi)) - \kappa_1(\xi)}{\mu(\xi)} = \frac{\kappa_1(\xi + h) - \kappa_1(\xi)}{h}$$

yazılabilir. Buradan $\kappa_1^{\Delta\Delta}(\xi) = \frac{\kappa_1^{\Delta}(\sigma(\xi)) - \kappa_1^{\Delta}(\xi)}{\mu(\xi)}$

$$= \frac{\kappa_1^{\Delta}(\xi + h) - \kappa_1^{\Delta}(\xi)}{h}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{\kappa_1(\xi+2h) - \kappa_1(\xi+h)}{h} - \frac{\kappa_1(\xi+h) - \kappa_1(\xi)}{h}}{h} \\ &= \frac{\kappa_1(\xi + 2h) - \kappa_1(\xi + h) - \kappa_1(\xi + h) + \kappa_1(\xi)}{h^2} \\ &= \frac{\kappa_1(\xi + 2h) - 2\kappa_1(\xi + h) + \kappa_1(\xi)}{h^2} \end{aligned}$$

elde edilir. $\kappa_1^{\Delta^n}(\xi)$ türevi benzer olarak yazılabilir. Diğer bir yaklaşım olarak $\forall \xi \in \mathbb{N}_0$ için $\sigma^n(\xi) = \xi + nh$ ve $\rho^n(\xi) = \xi - nh$ dır.

Bazı zaman skalaları için hesaplanan μ graininess fonksiyonunun, σ ileri sıçrama operatörünün ve ρ geri sıçrama operatörünün farklı durumları aşağıda Çizelge 2.2. de verilmiştir (Bohner and Peterson 2001).

$\mathbb{T}$	$\mu(\xi)$	$\sigma(\xi)$	$\rho(\xi)$
$\mathbb{R}$	0	ξ	ξ
$\mathbb{Z}$	1	$\xi + 1$	$\xi - 1$
$q^{\mathbb{N}}$	$(q - 1)\xi$	$q\xi$	$\frac{\xi}{q}$
$\mathbb{N}_0^2$	$2\sqrt{\xi} + 1$	$(\sqrt{\xi} + 1)^2$	$(\sqrt{\xi} - 1)^2$

Çizelge 2.2. Graininess Fonksiyonu ve Sıçrama Operatörlerinin Özel Halleri

Teorem 2.2.4. (Leibniz Formülü). $S_k^{(n)}$ ile k tane σ , $n - k$ tane Δ içeren tüm kombinasyonların kümesini gösterebilir.

Eğer her $\Lambda \in S_k^{(n)}$ için κ_1^Λ mevcut ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(\kappa_1 \cdot \kappa_2)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} \kappa_1^\Lambda \right) \kappa_2^{\Delta^k}$$

sağlanır (Bohner and Peterson 2001).

2.3. Zaman Skalasında İntegral

Tanım 2.3.1. $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer κ_1 fonksiyonun $\mathbb{T}$ üzerinden sağdan yoğun olan bütün noktalarda sağdan limitleri ve soldan yoğun olan bütün noktalarda soldan limitleri var ise, κ_1 fonksiyonunu düzenli (regulated) fonksiyon denir.

Tanım 2.3.2. $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer κ_1 fonksiyonun $\mathbb{T}$ üzerinden sağdan yoğun noktalarda sürekli ve $\mathbb{T}$ üzerinden soldan yoğun olan noktalarda soldan limiti var ise, κ_1 fonksiyona rd –sürekli fonksiyon denir.

$\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı rd –sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

biçiminde gösterilir.

$\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı türevlenebilir ve türevleri rd –sürekli olan fonksiyonların kümesi

$$C_{rd}^1 = C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

şeklinde gösterilir (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.1. $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

- i. Eğer κ_1 fonksiyonu sürekli ise, κ_1 fonksiyonu rd –süreklidir.
- ii. Eğer κ_1 fonksiyonu rd –sürekli ise, κ_1 fonksiyonu düzenlidir.

- iii. σ ileri sıçrama operatörü rd süreklidir.
- iv. Eğer κ_1 fonksiyonu düzenli veya rd –süreklidir ise, κ_1^σ fonksiyonu da düzenli veya rd –süreklidir.
- v. κ_1 sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $\kappa_2: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı düzenli veya rd –süreklidir bir fonksiyon ise, $\kappa_1 \circ \kappa_2$ fonksiyonu da düzenli veya rd –süreklidir (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.3.3. $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. $D \subset \mathbb{T}^K$ ve $\mathbb{T}^K \setminus D$ bölgesi sayılabilir ve $\mathbb{T}$ nin sağdan saçılımlı elemanlarını içermeyen ve her bir $\xi \in D$ noktasında κ_1 fonksiyonu türevlenebilir ise, κ_1 fonksiyonu D türevlenebilir bölgesinde ön türevlenebilir (pre-diferensiyellenebilir) denir (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.2. Kompakt bir aralıkta her düzenli fonksiyon sınırlıdır (Bohner and Peterson 2001).

İspat: $\kappa_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olmasın. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|\kappa_1(\xi_n)| > n$ olacak şekilde $\xi_n \in [a, b]$ vardır. $\{\xi_n: n \in \mathbb{N}\} \subset [a, b]$ olduğundan $\{\xi_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ şeklinde yakınsak bir alt dizisi vardır. Yani $\exists \xi_0 \in [a, b]$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{n_k} = \xi_0$$

olur. $\mathbb{T}$ kapalı ve $\{\xi_{n_k}: k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{T}$ olmasından $\xi_0 \in \mathbb{T}$ dir.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{n_k} = \xi_0$$

olduğu için ξ_0 yoğun nokta olamaz ve dolayısıyla bu ξ_0 alttan veya üstten yakınsayan birer dizi vardır. Bu durumda $\xi \rightarrow \xi_0$ için $\kappa_1(\xi)$ nin regulated olmasından sonludur. Bu da bir çelişkidir.

Teorem 2.3.3. (Ortalama Değer Teoremi). κ_1 ve κ_2 fonksiyonları $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlanan reel değerli ve D türevlenebilir bölgesinde ön türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

$\forall \xi \in D$ için

$$|\kappa_1^\Delta(\xi)| \leq \kappa_2^\Delta(\xi)$$

şartı sağlanırsa, bu durumda $r \leq s$ olmak üzere $\forall r, s \in \mathbb{T}$ için

$$|\kappa_1(s) - \kappa_1(r)| \leq \kappa_2(s) - \kappa_2(r)$$

eşitsizliği elde edilir (Bohner and Peterson 2001).

Sonuç 2.3.1. κ_1 ve κ_2 , D bölgesinde pre-türevlenebilir olsunlar.

Bu durumda

i. Eğer U uç noktaları $r, s \in \mathbb{T}$ olan kompakt bir aralık ise

$$|\kappa_1(\xi) - \kappa_1(s)| \leq \left\{ \sup_{r \in U^k \cap D} |\kappa_1^\Delta(\xi)| \right\} |s - r|$$

eşitsizliği sağlanır.

ii. $\forall \xi \in D$ için $\kappa_1^\Delta(t) = 0$ ise κ_1 fonksiyonu sabit fonksiyondur.

iii. $\forall \xi \in D$ için $\kappa_1^\Delta(t) = \kappa_2^\Delta(t)$ ise o zaman $\forall \xi \in \mathbb{T}$ için

$$\kappa_2(\xi) = \kappa_1(\xi) + C$$

dir. Burada C sabittir.

Teorem 2.3.4. (Ön anti türevin varlığı) κ_1 düzenli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall \xi \in D$ için D türevlenebilir bölgesinde ön türevlenebilir bir

$$K_1^\Delta(\xi) = \kappa_1(\xi)$$

olacak biçimde bir K_1 fonksiyonu vardır (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.3.4. $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ düzenli bir fonksiyon ve κ_1 fonksiyonun ön anti türevi K_1 olsun. Bu durumda κ_1 fonksiyonun belirsiz integrali

$$\int \kappa_1(\xi) \Delta \xi = K_1(\xi) + C$$

şeklinde tanımlanır. Burada C keyfi bir sabittir. Cauchy integrali $\forall r, s \in \mathbb{T}$ için

$$\int_r^s \kappa_1(\xi) \Delta \xi = K_1(s) - K_1(r)$$

dır. Eğer $\forall \xi \in \mathbb{T}^K$ için

$$K_1^\Delta(\xi) = \kappa_1(\xi)$$

şartı sağlanıyor ise, $K_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun anti türevi denir (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.3.1. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $\kappa_1(\xi) = a^\xi$ ve $a \neq 1$ sabit olmak üzere

$$\int a^\xi \Delta \xi$$

integralini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \kappa_1^\Delta(\xi) &= \frac{\kappa_1(\sigma(\xi)) - \kappa_1(\xi)}{\sigma(\xi) - \xi} \\ &= \frac{a^{\sigma(\xi)} - a^\xi}{\sigma(\xi) - \xi}, \quad \sigma(\xi) = \xi + 1 \\ &= \frac{a^{\xi+1} - a^\xi}{t + 1 - t} \\ &= \frac{a^{\xi+1} - a^\xi}{1} \\ &= a^\xi(a - 1) \\ \left[\frac{a^\xi}{a - 1} \right]^\Delta &= \Delta \left(\frac{a^\xi}{a - 1} \right) = \frac{a^{\xi+1} - a^\xi}{a - 1} = a^\xi, \end{aligned}$$

olduğundan C sabit olmak üzere

$$\int a^\xi \Delta \xi = \frac{a^\xi}{a - 1} + C$$

elde edilir.

Teorem 2.3.5. (Anti türevin varlığı) Her rd –süreklı fonksiyonun bir anti türevi vardır. $\xi_0 \in \mathbb{T}$ ise κ_1 fonksiyonun anti türevi K_1 fonksiyonu için $\forall \xi \in \mathbb{T}$ için

$$K_1(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \kappa_1(\tau) \Delta \tau$$

şeklinde tanımlanır (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.6. $\kappa_1 \in C_{rd}$ ve $\xi \in \mathbb{T}^K$

$$\int_{\xi}^{\sigma(\xi)} \kappa_1(\tau) \Delta \tau = \mu(\xi) \kappa_1(\xi)$$

dir (Bohner and Peterson 2001).

İspat: Teorem 2.3.5.ten dolayı κ_1 nin bir K_1 anti türevi vardır ve

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\sigma(\xi)} \kappa_1(\tau) \Delta \tau &= K_1(\sigma(\xi)) - K_1(\xi) \\ &= \mu(\xi) K_1^{\Delta}(\xi) = \mu(\xi) \kappa_1(\xi) \end{aligned}$$

Teorem 2.3.7. Eğer $\kappa_1^{\Delta}(\xi) \geq 0$ ise, κ_1 fonksiyonu azalan değildir (Bohner and Peterson 2001).

İspat: $[a, b]$ de $\kappa_1^{\Delta}(\xi) \geq 0$ ve $\zeta, \xi \in \mathbb{T}$ için $a \leq \zeta \leq \xi \leq b$ olsun. Bu durumda

$$\kappa_1(\xi) = \kappa_1(\zeta) + \int_{\zeta}^{\xi} \kappa_1^{\Delta}(\tau) \Delta \tau \geq \kappa_1(\zeta)$$

olarak sonuç elde edilir.

Teorem 2.3.8. Eğer $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\kappa_1, \kappa_2 \in C_{rd}$ ise,

- i. $\int_a^b [\kappa_1(\xi) + \kappa_2(\xi)] \Delta \xi = \int_a^b \kappa_1(\xi) \Delta \xi + \int_a^b \kappa_2(\xi) \Delta \xi$
- ii. $\int_a^b (\alpha \kappa_1)(\xi) \Delta \xi = \alpha \int_a^b \kappa_1(\xi) \Delta \xi$
- iii. $\int_a^b \kappa_1(\xi) \Delta \xi = - \int_b^a \kappa_1(\xi) \Delta \xi$
- iv. $\int_a^b \kappa_1(\xi) \Delta \xi = \int_a^c \kappa_1(\xi) \Delta \xi + \int_c^b \kappa_1(\xi) \Delta \xi$
- v. $\int_a^b \kappa_1(\sigma(\xi)) \kappa_2^{\Delta}(\xi) \Delta \xi = (\kappa_1 \kappa_2)(b) - (\kappa_1 \kappa_2)(a) - \int_a^b \kappa_1^{\Delta}(\xi) \kappa_2(\xi) \Delta \xi$
- vi. $\int_a^b \kappa_1(\xi) \kappa_2^{\Delta}(\xi) \Delta \xi = (\kappa_1 \kappa_2)(b) - (\kappa_1 \kappa_2)(a) - \int_a^b \kappa_1^{\Delta}(\xi) \kappa_2(\sigma(\xi)) \Delta \xi$
- vii. $\int_a^a \kappa_1(\xi) \Delta \xi = 0$

- viii. Eğer $[a, b]$ üzerinde $|\kappa_1(\xi)| \leq \kappa_2(\xi)$ ise $\left| \int_a^b \kappa_1(\xi) \Delta \xi \right| \leq \int_a^b \kappa_2(\xi) \Delta \xi$,
- ix. Eğer bütün $a \leq \xi < b$ için $\kappa_1(\xi) \geq 0$ ise $\int_a^b \kappa_1(\xi) \Delta \xi \geq 0$,

dır (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.9. $a, b \in \mathbb{T}$ ve $\kappa_1 \in C_{rd}$ olsun. Bu durumda

- i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise, $\int_a^b \kappa_1(\xi) \Delta \xi = \int_a^b \kappa_1(\xi) d\xi$

olup eşitliğin sağ tarafındaki integral Riemann anlamındaki integraldir.

- ii. Eğer $[a, b]$ sadece izole noktaları içeriyor ise,

$$\int_a^b \kappa_1(\xi) \Delta \xi = \begin{cases} \sum_{\xi \in [a, b)} \mu(\xi) \kappa_1(\xi) & , & a < b \\ 0 & , & a = b \\ - \sum_{\xi \in [b, a)} \mu(\xi) \kappa_1(\xi) & , & a > b \end{cases}$$

- iii. Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$, $h > 0$ ise

$$\int_a^b \kappa_1(\xi) \Delta \xi = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} \kappa_1(hk) h & , & a < b \\ 0 & , & a = b \\ - \sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} \kappa_1(hk) h & , & a > b \end{cases}$$

- iv. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b \kappa_1(\xi) \Delta \xi = \begin{cases} \sum_{\xi=a}^{b-1} \kappa_1(\xi) & , & a < b \\ 0 & , & a = b \\ - \sum_{\xi=b}^{a-1} \kappa_1(\xi) & , & a > b \end{cases}$$

şeklinde (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.3.2. $a \in \mathbb{T}$ alalım. Burada $\mathbb{T}$ keyfi bir zaman skalası olmak üzere

$$\int_a^\xi 1 \Delta \zeta = \xi - a \quad ((\xi - a)^\Delta = \xi^\Delta - a^\Delta = 1 - 0)$$

şeklindedir. Ayrıca $\xi \in \mathbb{T}$ olmak üzere $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_0^\xi \zeta \Delta \zeta = \int_0^\xi \zeta d\zeta = \frac{\xi^2}{2}$$

şeklindedir. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_0^\xi \zeta \Delta \zeta = \sum_{\zeta=0}^{\xi-1} \zeta = 0 + 1 + 2 + \dots + (\xi - 2) + (\xi - 1) = \frac{(\xi - 1) \cdot \xi}{2}$$

şeklindedir. Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ ise

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \zeta \Delta \zeta &= \sum_{\zeta=0}^{\frac{\xi}{h}-1} \kappa_1(\zeta h) h = \sum_{\zeta=0}^{\frac{\xi}{h}-1} \zeta h^2 = h^2 \sum_{\zeta=0}^{\frac{\xi}{h}-1} \zeta = h^2 \left[0 + 1 + 2 + \dots + \left(\frac{\xi}{h} - 1 \right) \right] \\ &= h^2 \left(\frac{\xi}{h} - 1 \right) \cdot \frac{\xi}{h} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\xi - h) \cdot \xi \end{aligned}$$

şeklindedir.

2.4. Zaman Skalasında Nabla Türev

$\mathbb{T}$ zaman skalasından türetilmiş bir $\mathbb{T}_k$ kümesi, eğer $\mathbb{T}$ sağdan saçılımlı bir m minimumuna sahip ise, $\mathbb{T}_k = \mathbb{T} - \{m\}$ şeklinde tanımlanır.

$\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall \xi \in \mathbb{T}$ için $\kappa_1^\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\kappa_1^\rho(\xi) = \kappa_1(\rho(\xi))$$

şeklinde tanımlanır (Bohner and Peterson2001).

Tanım 2.4.1. $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\xi \in \mathbb{T}_k$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ olacak şekilde $\exists \delta > 0$ için ξ nin bir V komşuluğu (yani $V = (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap \mathbb{T}$) $\forall \zeta \in U$ için

$$|\kappa_1(\rho(\xi)) - \kappa_1(\zeta) - \kappa_1^\nabla(\xi)[\rho(\xi) - \zeta]| \leq \varepsilon |\rho(\xi) - \zeta|$$

eşitsizliği sağlanırsa $\kappa_1^\nabla(\xi)$ ifadesine κ_1 fonksiyonunun nabla türevi denir (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.4.1. $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\xi \in \mathbb{T}_K$ olsun. Böylece

- i. Eğer κ_1 fonksiyonu ξ noktasında nabla türevlenebilir ise, κ_1 fonksiyonu ξ noktasında sürekli dir.
- ii. Eğer κ_1 fonksiyonu ξ noktasında sürekli ve ξ noktası soldan saçılımlı ise, bu taktirde κ_1 fonksiyonu ξ noktasında nabla türevlenebilirdir ve

$$\kappa_1^\nabla(\xi) = \frac{\kappa_1(\xi) - \kappa_1(\rho(\xi))}{v(\xi)}$$

biçimindedir.

- iii. Eğer ξ noktası soldan yoğun ise κ_1 fonksiyonu ξ noktasında nabla türevlenebilirdir ve

$$\kappa_1^\nabla(\xi) = \lim_{\zeta \rightarrow \xi} \frac{\kappa_1(\xi) - \kappa_1(\zeta)}{\xi - \zeta}$$

şeklindedir.

- iv. Eğer κ_1 fonksiyonu ξ noktasında nabla türevlenebilir ise, bu durumda

$$\kappa_1(\rho(\xi)) = \kappa_1(\xi) - v(\xi)\kappa_1^\nabla(\xi)$$

dir (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.4.1. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\kappa_1^\nabla(\xi) = \kappa_1'(\xi)$ alışmış türev ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise, $\kappa_1^\nabla(\xi) = \nabla \kappa_1(\xi) = \kappa_1(\xi) - \kappa_1(\xi - 1)$ geri fark operatörü olarak yazılır (Bohner and Peterson2001).

Örnek 2.4.2. $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki tanımları kullanarak $\kappa_1^\nabla(\xi)$ türevi şu şekildedir.

- i. $\kappa_1(\xi) = \xi^2$, $\mathbb{T} = \left\{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$, $\xi \in \mathbb{T}$
- ii. $\kappa_1(\xi) = \xi^3$, $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}} = \left\{\sqrt[3]{n} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$, $\xi \in \mathbb{T}$

Çözüm :

- i. $\kappa_1(\xi) = \xi^2$, $\mathbb{T} = \left\{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$, $\xi \in \mathbb{T}$ her nokta da yoğun olup

$$\rho(\xi) = \frac{2\xi - 1}{2} \Rightarrow v(\xi) = \xi - \rho(\xi) = \xi - \frac{2\xi - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\kappa_1^\nabla(\xi) = \frac{\kappa_1(\xi) - \kappa_1(\rho(\xi))}{v(\xi)} = \frac{\xi^2 - \left(\frac{2\xi-1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} = 2\xi - \frac{1}{2}$$

- ii. $\kappa_1(\xi) = \xi^3$, $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}} = \left\{\sqrt[3]{n} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$, $\xi \in \mathbb{T}$ her noktada yoğun olup

$$\rho(\xi) = \sqrt[3]{\xi^3 - 1} \Rightarrow v(\xi) = \xi - \rho(\xi) = \xi - \sqrt[3]{\xi^3 - 1}$$

$$\kappa_1^\nabla(\xi) = \frac{\kappa_1(\xi) - \kappa_1(\rho(\xi))}{v(\xi)} = \frac{\xi^3 - (\sqrt[3]{\xi^3 - 1})^3}{\xi - \sqrt[3]{\xi^3 - 1}} = (\xi^3 - 1)^{\frac{2}{3}} + (\xi^3 - 1)^{\frac{1}{3}} \cdot \xi + \xi^2$$

olarak bulunur.

Teorem 2.4.2. $\kappa_1, \kappa_2: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve $\xi \in \mathbb{T}_K$ noktasında nabla türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Bu taktirde

- i. $\kappa_1 + \kappa_2: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ toplam fonksiyonu da ξ noktasında nabla türevlenebilirdir ve

$$(\kappa_1 + \kappa_2)^\nabla = \kappa_1^\nabla(\xi) + \kappa_2^\nabla(\xi)$$

olur.

- ii. Her sabit α için $\alpha\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da nabla türevlenebilirdir ve

$$(\alpha\kappa_1)^\nabla = \alpha\kappa_1^\nabla(\xi)$$

biçimindedir.

iii. $\kappa_1\kappa_2: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da nabla türevlenebilirdir ve

$$\begin{aligned} (\kappa_1\kappa_2)^\nabla(\xi) &= \kappa_1(\xi)\kappa_2^\nabla(\xi) + \kappa_1^\nabla(\xi)\kappa_2(\rho(\xi)) \\ &= \kappa_1^\nabla(\xi)\kappa_2(\xi) + \kappa_1(\rho(\xi))\kappa_2^\nabla(\xi) \end{aligned}$$

elde edilir.

iv. Eğer $\kappa_1(\xi)\kappa_1(\rho(\xi)) \neq 0$ ise $\frac{1}{\kappa_1}$ fonksiyonu da nabla türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{\kappa_1}\right)^\nabla(\xi) = -\frac{\kappa_1^\nabla(\xi)}{\kappa_1(\xi)\kappa_1(\rho(\xi))}$$

olur.

v. Eğer $\kappa_2(\xi)\kappa_2^\rho(\xi) \neq 0$ ise $\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$ fonksiyonu da nabla türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^\nabla(\xi) = \frac{\kappa_1^\nabla(\xi)\kappa_2(\xi) - \kappa_1(\xi)\kappa_2^\rho(\xi)}{\kappa_2(\xi)\kappa_2^\rho(\xi)}$$

şeklindedir (Bohner and Peterson 2001).

2.5. Zaman Skalasında Nabla Anti Türevin Varlığı

Tanım 2.5.1. $\forall \xi \in \mathbb{T}_K$ için $K_1^\nabla(\xi) = \kappa_1(\xi)$ şartı sağlanırsa $K_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun *nabla anti türevi* denir ve κ_1 fonksiyonunun integrali $\forall \xi \in \mathbb{T}$ için

$$\int_a^\xi \kappa_1(\tau) \nabla \tau = K_1(\xi) - K_1(a)$$

biçimindedir (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.5.2. $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\mathbb{T}$ üzerinde soldan yoğun noktalarda sürekli ve $\mathbb{T}$ üzerinde sağdan yoğun noktalarda sağdan limitleri olan fonksiyonuna ld-sürekli fonksiyonu denir (Bohner and Peterson,2001).

Teorem 2.5.1. Her ld –sürekli fonksiyonun, bir nabla anti türevi vardır (Bohner and Peterson2001).

Teorem 2.5.2. Eğer $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ld –sürekli ve $\forall \xi \in \mathbb{T}_K$ ise, böylece

$$\int_{\rho(\xi)}^{\xi} \kappa_1(\tau) \nabla \tau = v(\xi) \kappa_1(\xi)$$

dır (Bohner and Peterson2001).

Teorem 2.5.3. Eğer $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\kappa_1, \kappa_2: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ld-sürekli ise, bu taktirde

- i. $\int_a^b [\kappa_1(\xi) + \kappa_2(\xi)] \nabla \xi = \int_a^b \kappa_1(\xi) \nabla \xi + \int_a^b \kappa_2(\xi) \nabla \xi$
- ii. $\int_a^b (\alpha \kappa_1)(\xi) \nabla \xi = \alpha \int_a^b \kappa_1(\xi) \nabla \xi$
- iii. $\int_a^b \kappa_1(\xi) \nabla \xi = - \int_b^a \kappa_1(\xi) \nabla \xi$
- iv. $\int_a^b \kappa_1(\xi) \nabla \xi = \int_a^c \kappa_1(\xi) \nabla \xi + \int_c^b \kappa_1(\xi) \nabla \xi$
- v. $\int_a^b \kappa_1(\sigma(\xi)) \kappa_2^\nabla(\xi) \nabla \xi = (\kappa_1 \kappa_2)(b) - (\kappa_1 \kappa_2)(a) - \int_a^b \kappa_1^\nabla(\xi) \kappa_2(\xi) \nabla \xi$
- vi. $\int_a^b \kappa_1(\xi) \kappa_2^\nabla(\xi) \nabla \xi = (\kappa_1 \kappa_2)(b) - (\kappa_1 \kappa_2)(a) - \int_a^b \kappa_1^\nabla(\xi) \kappa_2(\sigma(\xi)) \nabla \xi$
- vii. $\int_a^a \kappa_1(\xi) \nabla \xi = 0$

ifadeleri elde edilir (Bohnerand Peterson 2001).

Teorem 2.5.4. $a, b \in \mathbb{T}$ ve $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, ld –sürekli olsun. Bu durumda

- i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $\int_a^b \kappa_1(\xi) \nabla \xi = \int_a^b \kappa_1(\xi) d\xi$

olmak üzere sağdaki integral Riemann anlamındaki integraldir.

- ii. Eğer $[a, b]$ sadece izole noktaları içeriyor ise,

$$\int_a^b \kappa_1(\xi) \nabla \xi = \begin{cases} \sum_{\xi \in (a,b]} v(\xi) \kappa_1(\xi) & , \quad a < b \\ 0 & , \quad a = b \\ - \sum_{\xi \in (b,a]} v(\xi) \kappa_1(\xi) & , \quad a > b \end{cases}$$

dir.

iii. Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$, $h > 0$ ise

$$\int_a^b \kappa_1(\xi) \nabla \xi = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a+h}{h}}^{\frac{b}{h}} \kappa_1(hk)h & , \quad a < b \\ 0 & , \quad a = b \\ - \sum_{k=\frac{b+h}{h}}^{\frac{a}{h}} \kappa_1(hk)h & , \quad a > b \end{cases}$$

iv. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b \kappa_1(\xi) \nabla \xi = \begin{cases} \sum_{\xi=a+1}^b \kappa_1(\xi) & , \quad a < b \\ 0 & , \quad a = b \\ - \sum_{\xi=b+1}^a \kappa_1(\xi) & , \quad a > b \end{cases}$$

şeklindedir (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.5.1. $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası ve $a, b \in \mathbb{T}$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b \frac{1}{\xi \sigma(\xi)} \Delta \xi = \frac{b-a}{ab}$$

dır.

İspat : $\left(\frac{1}{\xi}\right)^\Delta = -\frac{1}{\xi\sigma(\xi)}$ yani $\left(-\frac{1}{\xi}\right)^\Delta = \frac{1}{\xi\sigma(\xi)}$

bulunur. O halde

$$\int_a^b \frac{1}{\xi\sigma(\xi)} \Delta\xi = -\frac{1}{\xi} I_a^b = -\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{b-a}{ab}.$$

Örnek 2.5.2. $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası ve $a, b \in \mathbb{T}$, $a < b$ olsun.

$$1 = (\xi)^\Delta$$

olduğundan

$$\int_a^b \Delta\xi = \xi l_a^b = b - a$$

bulunur.

Örnek 2.5.3. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b \xi \Delta\xi = \frac{1}{2}(b-a)(b+a-1)$$

dır.

İspat: $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ halinde

$$\xi = \left(\frac{\xi^2 - \xi}{2}\right)^\Delta$$

olduğundan

$$\int_a^b \xi \Delta\xi = \frac{\xi^2 - \xi}{2} l_a^b = \frac{b^2 - b}{2} - \frac{a^2 - a}{2} = \frac{1}{2}(b-a)(b+a-1)$$

bulunur.

Sonuç 2.5.1. $\xi \in \mathbb{T}_K^K$ ve $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda κ_1 fonksiyonunu ξ de delta türevinin var olması nabla türevinin de var olduğu anlamına gelmez. Tersten düşünüldüğünde de geçerlidir (RogersJr. and Sheng2007).

İspat: $\mathbb{T} = [-2, -1] \cup [0, 1]$ zaman skalası için

$$\kappa_1(\xi) = \begin{cases} \xi \sin\left(\frac{1}{\xi}\right) & , \quad \xi \neq 0 \\ 0 & , \quad \xi = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu olmak üzere bu κ_1 fonksiyonu 0 noktasında süreklidir ve $0 \in \mathbb{T}$ noktasında sağda yoğun, soldan saçılımlıdır.

Teorem 2.2.1. (ii)'den dolayı κ_1 , 0 noktasında nabla türevlenebilir. Fakat 0 noktasında

$$\lim_{\zeta \rightarrow \xi} \frac{\kappa_1(\xi) - \kappa_1(\zeta)}{\xi - \zeta}$$

sonlu bir limiti yoktur. Böylece κ_1 , 0 noktasında delta türevlenebilir değildir.

Aynı κ_1 fonksiyonunun, 0 noktasında delta türevinin varlığında, nabla türevinin de var olduğu anlamına gelmeyeceğini göstermek için $\mathbb{T} = [-1, 0] \cup [1, 2]$ zaman skalası alınabilir.

Tanım 2.5.3. $a \in \mathbb{T}$, $\text{Sup } \mathbb{T} = \infty$ ve $\kappa_1; [0, \infty)$ da rd -süreklili ise bu durumda, genelleştirilmiş integral,

$$\int_a^\infty \kappa_1(\xi) \Delta \xi = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \kappa_1(\xi) \Delta \xi$$

olarak tanımlanır. Sağ taraftaki limit mevcut ise genelleştirilmiş integral "yakınsaktır", aksi taktirde "ıraksaktır" denir (Bohner and Peterson 2001).

2.6. Zincir Kuralı ve Uygulamaları

$\kappa_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\kappa_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. Eğer κ_2, ξ de diferensiyellenebilir ve κ_1 de $\kappa_2(\xi)$ de diferensiyellenebilir ise

$$(\kappa_1 \circ \kappa_2)' = \kappa_1'(\kappa_2(\xi)) \kappa_2'(\xi)$$

biçimindedir.

Şimdi verilecek örnek, zincir kuralının alışılmış anlamda tüm zaman skalaları üzerinde sağlanmayacağını gösterir.

Örnek 2.6.1. $\kappa_1, \kappa_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ olmak üzere $\kappa_1(\xi) = \xi^2$ ve $\kappa_2(\xi) = 2\xi$ olsunlar. Burada zaman skalası $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ dir. Şimdi tüm $\xi \in \mathbb{Z}$ için, bileşke fonksiyonun türevi:

$$\begin{aligned} (\kappa_1 \circ \kappa_2)^\Delta(\xi) &= (4\xi^2)^\Delta \\ &= 4\Delta(\xi^2) \quad (\mathbb{T} = \mathbb{Z}, \kappa_1^\Delta = \Delta\kappa_1) \\ &= 4[(\xi + 1)^2 - \xi^2] \\ &= 4(2\xi + 1) \\ &= 8\xi + 4 \end{aligned}$$

dir. Ayrıca ,

$$\begin{aligned} \kappa_1^\Delta(\kappa_2(\xi)) \kappa_2^\Delta(\xi) &= [(\xi^2)^\Delta \circ (2\xi)] (2\xi)^\Delta \quad (\mathbb{T} = \mathbb{Z}, \kappa_1^\Delta = \Delta\kappa_1) \\ &= \{[(\xi + 1)^2 - \xi^2] \circ (2\xi)\} \cdot 2(\xi + 1 - \xi) \\ &= (4\xi + 1) \cdot 2 \\ &= 8\xi + 2 \end{aligned}$$

olduğundan $(\kappa_1 \circ \kappa_2)^\Delta(\xi) \neq \kappa_1^\Delta(\kappa_2(\xi)) \kappa_2^\Delta(\xi)$ olur. Bunun nedeni zaman skalasının tam sayılar kümesi olarak seçilmesidir.

Teorem 2.6.1.(Zincir Kuralı) $\kappa_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $\kappa_2: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{T}^K$ da diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Ayrıca $\kappa_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $[\xi, \sigma(\xi)]$ reel aralığında bir c noktası vardır öyle ki

$$(\kappa_1 \circ \kappa_2)^\Delta(\xi) = \kappa_1'(\kappa_2(c)) \kappa_2^\Delta(\xi)$$

eşitliği sağlanır (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.6.2. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $\kappa_1(\xi) = \xi^2$, $\kappa_2(\xi) = 2\xi$ olmak üzere Teorem 2.5.2. yardımıyla

$$(\kappa_1 \circ \kappa_2)^\Delta(3) = \kappa_1'(\kappa_2(c)) \kappa_2^\Delta(3)$$

eşitliğinde c sayısını bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} (\kappa_1 \circ \kappa_2)^\Delta(\xi) &= (4\xi^2)^\Delta \\ &= 4\Delta(\xi^2) \\ &= 4[(\xi + 1)^2 - \xi^2] \\ &= 8\xi + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\kappa_1 \circ \kappa_2)^\Delta(3) &= 8.3 + 4 \\ &= 28 \end{aligned}$$

dir. κ_1 sürekliliğinden ve $\kappa_1(\xi) = \xi^2$, $\kappa_1'(\xi) = 2\xi$, $\kappa_2^\Delta(\xi) = (2\xi)^\Delta = 2$ oluşlarından,

$$\kappa_1'(\kappa_2(c)) \kappa_2^\Delta(\xi) = [(2\xi) \circ (2c)]. 2 = 8c$$

yazılır. Teorem 2.6.1. den

$$28 = 8c \Rightarrow c = \frac{7}{2}$$

bulunur. Burada $\xi = 3$, $c = \frac{7}{2} \in [3, \sigma(3)] = [3, 4]$

dir.

Teorem 2.6.2. $\mathbb{T}$ zaman skalası, ve $v: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ kesin olarak artan bir fonksiyon ve $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. $\tilde{\sigma}$ ile $\tilde{t}$ üzerindeki sıçrama fonksiyonunu ve $\tilde{\Delta}$ ile üzerindeki $\tilde{t}$ türevi gösterelim. Bu durumda

$$v \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ v$$

olur (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.6.3. Farzedelim ki $v: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ kesin olarak artan bir fonksiyon, ve $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ bir zaman skalası ve $\omega: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ alalım. Eğer $v^\Delta(\xi)$ ve $\omega^{\tilde{\Delta}}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{T}^K$ için varsa

$$(\omega \circ v)^\Delta = (\omega^{\tilde{\Delta}} \circ v)v^\Delta$$

olur (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.6.4. (Ters Fonksiyonun Türevi) Kabul edelim ki $v: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ kesin olarak artan bir fonksiyon ve $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{v^\Delta} = (v^{-1})^{\tilde{\Delta}} \circ v$$

dir. Burada $v^\Delta \neq 0$ dır (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.6.5. (Değişken Değiştirme). Farzedelim ki $v: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ kesin olarak artan bir fonksiyon, ve $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. Eğer $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ rd- sürekli bir fonksiyon ve v de rd- sürekli diferansiyellenebilir ise $a, b \in \mathbb{T}$ için

$$\int_a^b \kappa_1(\xi) v^\Delta(\xi) \Delta \xi = \int_{v(a)}^{v(b)} (\kappa_1 \circ v^{-1})(\zeta) \tilde{\Delta} \zeta$$

dir (Bohner and Peterson 2001).

2.7. Diamond- α Dinamik Türevi

Tanım 2.7.1. $\mathbb{T}$ zaman skalası, $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\xi \in \mathbb{T}_K$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\exists \delta > 0$ için ξ nin bir U komşuluğu (yani $U = (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap \mathbb{T}$), $\delta > 0$ için $\forall \zeta \in U$ için

$$\begin{aligned} & |\alpha[\kappa_1^\sigma(\xi) - \kappa_1(\zeta)]v_{\xi\zeta} + (1 - \alpha)[\kappa_1^\rho(\xi) - \kappa_1(\zeta)]\mu_{\xi\zeta} - \kappa_1^{\diamond_\alpha}(\xi)\mu_{\xi\zeta}v_{\xi\zeta}| \\ & < \varepsilon |\mu_{\xi\zeta}v_{\xi\zeta}| \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanırsa, $\mu_{\xi\zeta} = \sigma(\xi) - \zeta$ ve $v_{\xi\zeta} = \rho(\xi) - \zeta$ olmak üzere $\kappa_1^{\diamond_\alpha}(\xi)$ ifadesine $\mathbb{T}_K^K$ üzerinde κ_1 fonksiyonunun diamond- α türevi olarak tanımlanır (Rogers Jr. and Sheng, 2007).

Hatırlatma 2.7.1. Diamond- α dinamik türevin tanımında $\alpha = 1$ alınırsa, $\kappa_1^{\diamond_\alpha}(\xi)$ diamond- α dinamik türevi, $\kappa_1^\Delta(\xi)$ türeve ve $\alpha = 0$ alınırsa, $\kappa_1^\nabla(\xi)$ türeve indirgenir. Diamond- α dinamik türev birçok avantajlara sahiptir

Tanım 2.7.2. (Diamond- α dinamik türev) $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, ve $\kappa_1(\xi)$, $\mathbb{T}$ üzerinde Δ ve ∇ türevlenebilir olsun. $\xi \in \mathbb{T}$ için $\kappa_1(\xi)$ fonksiyonun $\kappa_1^{\diamond_\alpha}(\xi)$ türevi $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$\kappa_1^{\diamond_\alpha}(\xi) = \alpha \kappa_1^\Delta(\xi) + (1 - \alpha) \kappa_1^\nabla(\xi)$$

olarak tanımlanır. Böylece κ_1 diamond- α türevlenebilir olması için gerekli yeterli koşul κ_1 fonksiyonunun Δ ve ∇ türevlenebilirolmasıdır (Davis et al., 2006).

Teorem 2.7.1. $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere κ_1 fonksiyonu $\xi \in \mathbb{T}$ de hem Δ hem de ∇ türevlenebilirse; bu durumda κ_1 fonksiyonu ξ de $\diamond_\alpha$ türevlenebilirdir ve

$$\kappa_1^{\diamond_\alpha}(\xi) = \alpha \kappa_1^\Delta(\xi) + (1 - \alpha) \kappa_1^\nabla(\xi)$$

biçimindedir (Rogers Jr. and Sheng 2007).

Sonuç 2.7.1. $\xi \in \mathbb{T}$ noktası yoğun olmak üzere eğer $\kappa_1'(\xi)$ varsa

$$\kappa_1^{\diamond\alpha}(\xi) = \kappa_1^{\Delta}(\xi) = \kappa_1^{\nabla}(\xi) = \kappa_1'(\xi)$$

şeklindedir (RogersJr. and Sheng2007).

İspat: ξ noktası yoğun ve

$$\kappa_1'(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\kappa_1(\xi + h) - \kappa_1(\xi)}{h}$$

sonlu bir değeri olarak limiti mevcut olsun. ξ nin yeterli küçük bir U komşuluğundaki, $\forall \zeta, \xi \in U$ için $h = \zeta - \xi$ alınırsa

$$\kappa_1'(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\kappa_1(\xi + h) - \kappa_1(\xi)}{h} = \lim_{\zeta \rightarrow \xi} \frac{\kappa_1(\xi) - \kappa_1(\zeta)}{\xi - \zeta}$$

olur. O zaman Teorem 2.2.1.(iii) den dolayı $\kappa_1^{\Delta}(\xi) = \kappa_1'(\xi)$ dır. Teorem 2.4.1. (iii) den dolayı $\kappa_1^{\nabla}(\xi) = \kappa_1'(\xi)$

bulunur. Böylece Teorem 2.7.1. göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \kappa_1^{\diamond\alpha}(\xi) &= \alpha \kappa_1^{\Delta}(\xi) + (1 - \alpha) \kappa_1^{\nabla}(\xi) \\ &= \alpha \kappa_1'(\xi) + (1 - \alpha) \kappa_1'(\xi) \\ &= \kappa_1'(\xi) \end{aligned}$$

elde edilir

2.8. Diamond- α İntegrali

Tanım 2.8.1. $a, \xi \in \mathbb{T}$ ve $h: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. h nin $\diamond_{\alpha}$ integrali $\xi \in \mathbb{T}$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$\int_a^{\xi} h(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = \alpha \int_a^{\xi} h(\tau) \Delta \tau + (1 - \alpha) \int_a^{\xi} h(\tau) \nabla \tau$$

şeklinde tanımlanır. $\diamond_{\alpha}$ integral Δ ve ∇ integrallerinin lineer kombinasyonudur (Davis et al.,2006).

2.9. Zaman Skalasında Polinomlar

0'ın bir anti türevi 1, 1'in bir anti türevi ξ , fakat keyfi bir zaman skalası için ξ 'nin anti türevini bulmak neredeyse imkansızdır. ξ nin anti türevinin $\frac{\xi^2}{2}$ olduğu kesin değildir. $\frac{\xi^2}{2}$ nin türevi

$$\left(\frac{\xi^2}{2}\right)^\Delta = \frac{\xi + \sigma(\xi)}{2} = \xi + \frac{\mu(\xi)}{2}$$

dir. Burada $\mu(\xi)$, $\sigma(\xi)$ ye bağlı $\sigma(\xi)$ de zaman skalasının tanımına bağlı olarak değişir. $\frac{\xi^2}{2}$ fonksiyonu

$$\int_0^\xi \sigma(\tau) \Delta\tau$$

şeklinde mi ya da

$$\int_0^\xi \sigma \Delta\tau$$

şeklinde mi olacak. Şimdi aşağıdaki tanımlar dikkate alınırsa:

g_2 ve h_2 fonksiyonları sırasıyla

$$g_2(\xi, \zeta) = \int_0^\xi (\sigma(\tau) - \zeta) \Delta\tau$$

$$h_2(\xi, \zeta) = \int_0^\xi (\tau - \zeta) \Delta\tau$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda g_2 ve h_2 fonksiyonları arasında

$$\begin{aligned}
g_2(t, \zeta) &= \int_0^{\xi} (\sigma(\tau) - \zeta) \Delta \tau \\
&= \int_0^{\xi} [(\sigma(\tau) + \tau) - \tau - \zeta] \Delta \tau \\
&= \int_0^{\xi} ((\sigma(\tau) + \tau)) \Delta \tau - \int_0^{\xi} \tau \Delta \tau - \int_{\zeta}^{\xi} \zeta \Delta \tau \\
&= \int_{\zeta}^{\xi} (\tau^{2^{\Delta}}) \Delta \tau + \int_{\zeta}^{\xi} \tau \Delta \tau - \zeta(\xi - \zeta) \\
&= \int_{\zeta}^{\xi} \tau \Delta \tau + \xi^2 - \zeta^2 - \zeta(\xi - \zeta) = \int_{\zeta}^{\xi} (\tau - \xi) \Delta \tau = h_2(\zeta, \xi)
\end{aligned}$$

şeklinde bir ilişki bulunur.

Genelleştirilmiş polinomlar, Taylor formülünden dolayı ortaya çıkmıştır. Bu fonksiyonlar $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$g_k, h_k: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklindedir. g_0 ve h_0 her $\xi, \zeta \in \mathbb{T}$ için

$$g_0(\xi, \zeta) = h_0(\xi, \zeta) = 1$$

olup, $k \in \mathbb{N}_0$ için g_k ve h_k verilsin. Bu durumda g_{k+1} ve h_{k+1} fonksiyonları her $\zeta, \xi \in \mathbb{T}$ için

$$g_{k+1}(\zeta, \xi) = \int_{\zeta}^{\xi} g_k(\sigma(\tau), \zeta) \Delta \tau$$

ve

$$h_{k+1}(\zeta, \xi) = \int_{\zeta}^{\xi} h_k(\tau, \zeta) \Delta\tau$$

eşitlikleriyle tanımlanır.

ζ yi sabit düşünüp $h_k(\xi, \zeta)$ nin ξ ye göre türevi $h^\Delta(\xi, \zeta)$ ve $k \in \mathbb{N}, \xi \in \mathbb{T}^k$ için

$$h_k^\Delta(\xi, \zeta) = h_{k-1}(\xi, \zeta)$$

dir. Benzer şekilde $k \in \mathbb{N}, \xi \in \mathbb{T}^k$ için

$$g_k^\Delta(\xi, \zeta) = g_{k-1}(\sigma(\tau), \zeta)$$

dir (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.9.1. Yukarıdaki tanımlara göre aşıkarak her $\xi, \zeta \in \mathbb{T}$ için

$$g_1(\xi, \zeta) = h_1(\xi, \zeta) = \xi - \zeta$$

eşitliği sağlanır. Ancak $k > 1$ olduğu durumlarda g_k ve h_k fonksiyonları için böyle bir ifade bulmak kolay değildir (Bohner and Peterson 2001).

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Tanım 3.1. (Konveks Fonksiyon) $S = \mathbb{T}$ boştan farklı bir küme ve $\kappa_1: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in \mathbb{T}$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$\kappa_1(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha \kappa_1(x) + (1 - \alpha) \kappa_1(y)$$

şartı sağlanıyorsa κ_1 'ye konveks fonksiyon denir (Dinu 2008).

3.1. Hölder Eşitsizliği

Teorem 3.1.1. $a, b \in \mathbb{T}$ olsun. $rd -$ sürekli $\kappa_1, \kappa_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için $p > 1$ ve $q = \frac{p}{p-1}$ olduğunda

$$\int_a^b |\kappa_1(\xi) \kappa_2(\xi)| \Delta \xi \leq \left\{ \int_a^b |\kappa_1(\xi)|^p \Delta \xi \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \int_a^b |\kappa_2(\xi)|^q \Delta \xi \right\}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir (Agarwal et al. 2001).

İspat Negatif olmayan α ve β reel sayılar için

$$\alpha^{\frac{1}{p}} \cdot \beta^{\frac{1}{q}} \leq \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} \quad (3.1)$$

eşitsizliği geçerlidir. Genelliği bozmadan

$$\left\{ \int_a^b |\kappa_1(\xi)|^p \Delta \xi \right\} \cdot \left\{ \int_a^b |\kappa_2(\xi)|^q \Delta \xi \right\} \neq 0$$

olduğunu varsayalım.

$$\alpha(\xi) = \frac{|\kappa_1(\xi)|^p}{\int_a^b |\kappa_1(\tau)|^p \Delta \tau} \text{ ve } \beta(\xi) = \frac{|\kappa_2(\xi)|^q}{\int_a^b |\kappa_2(\tau)|^q \Delta \tau}$$

ifadelerine eşitsizlik (3.1) i uygulayıp ve çıkan eşitsizliğin a dan b ye integralini alırsak aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir.[Bu mümkündür çünkü karşımıza çıkan fonksiyonların hepsi rd –sürekli (sağ yoğun sürekli) dir.]

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \frac{|\kappa_1(\xi)|}{\left\{ \int_a^b |\kappa_1(\tau)|^p \Delta\tau \right\}^{\frac{1}{p}}} \cdot \int_a^b \frac{|\kappa_2(\xi)|}{\left\{ \int_a^b |\kappa_2(\tau)|^q \Delta\tau \right\}^{\frac{1}{q}}} \Delta\xi \\
&= \int_a^b \alpha^{1/p} \beta^{1/q} \Delta t \\
&\leq \int_a^b \left(\frac{\alpha(\xi)}{p} + \frac{\beta(\xi)}{q} \right) \Delta\xi = \int_a^b \left\{ \frac{1}{p} \cdot \frac{|\kappa_1(\xi)|^p}{\int_a^b |\kappa_1(\tau)|^p \Delta\tau} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|\kappa_2(\xi)|^q}{\int_a^b |\kappa_2(\tau)|^q \Delta\tau} \right\} \Delta\xi \\
&= \frac{1}{p} \cdot \int_a^b \left\{ \frac{|\kappa_1(\xi)|^p}{\int_a^b |\kappa_1(\tau)|^p \Delta\tau} \right\} \Delta\xi + \frac{1}{q} \int_a^b \left\{ \frac{|\kappa_2(\xi)|^q}{\int_a^b |\kappa_2(\tau)|^q \Delta\tau} \right\} \Delta\xi \\
&= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\int_a^b |\kappa_1(\tau)|^p \Delta\tau} \cdot \int_a^b |\kappa_1(\xi)|^p \Delta\xi + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\int_a^b |\kappa_2(\tau)|^q \Delta\tau} \cdot \int_a^b |\kappa_2(\xi)|^q \Delta\xi \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \left(q \text{ yerine } q = \frac{p}{p-1} \text{ yazılırsa} \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Bu da direkt olarak Hölder eşitsizliğinin gerçekleştiğini verir. Burada $p = q = 2$ alınırsa Cauchy-Schwarz eşitsizliği elde edilir.

3.2. Cauchy-Schwarz Eşitsizliği

Teorem 3.2.1. $a, b \in \mathbb{T}$ olsun. rd –sürekli $\kappa_1, \kappa_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı rd – sürekli fonksiyonlar olsun. Böylece

$$\int_a^b |\kappa_1(\xi)\kappa_2(\xi)|\Delta\xi \leq \sqrt{\left\{\int_a^b |\kappa_1(\xi)|^2\Delta\xi\right\}\left\{\int_a^b |\kappa_2(\xi)|^2\Delta\xi\right\}}$$

eşitsizliği elde edilir (Agarwal et al. 2001).

3.3. Minkowski Eşitsizliği

Teorem 3.3.1. $a, b \in \mathbb{T}$ ve $p > 1$ alalım. rd -süreklili $\kappa_1, \kappa_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için;

$$\left\{\int_a^b |(\kappa_1 + \kappa_2)(\xi)|^p \Delta\xi\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\int_a^b |\kappa_1(\xi)|^p \Delta\xi\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_a^b |\kappa_2(\xi)|^p \Delta\xi\right\}^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir (Agarwal et al. 2001).

İspat: Aşağıdaki sonuca ulaşmak için $q = p/(p-1)$ olarak Hölder eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned} \int_a^b |(\kappa_1 + \kappa_2)(\xi)|^p \Delta\xi &= \int_a^b |(\kappa_1 + \kappa_2)(\xi)|^{p-1} |(\kappa_1 + \kappa_2)(\xi)| \Delta\xi \\ &\leq \int_a^b |\kappa_1(\xi)| |(\kappa_1 + \kappa_2)(\xi)|^{p-1} \Delta\xi + \int_a^b |\kappa_2(\xi)| |(\kappa_1 + \kappa_2)(\xi)|^{p-1} \Delta\xi \\ &\leq \left\{\int_a^b |\kappa_1(\xi)|^p \Delta\xi\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_a^b |(\kappa_1 + \kappa_2)(\xi)|^{(p-1)q} \Delta\xi\right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left\{\int_a^b |\kappa_2(\xi)|^p \Delta\xi\right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[\left\{\int_a^b |\kappa_1(\xi)|^p \Delta\xi\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_a^b |\kappa_2(\xi)|^p \Delta\xi\right\}^{\frac{1}{p}}\right] \left[\int_a^b |(\kappa_1 + \kappa_2)(\xi)|^p \Delta\xi\right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \int_a^b |(\kappa_1 + \kappa_2)(\xi)|^p \Delta \xi \\
& = \left[\left\{ \int_a^b |\kappa_1(\xi)|^p \Delta \xi \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_a^b |\kappa_2(\xi)|^p \Delta \xi \right\}^{\frac{1}{p}} \right] \left[\int_a^b |(\kappa_1 + \kappa_2)(\xi)|^p \Delta \xi \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğin her iki tarafını $\left[\int_a^b |(\kappa_1 + \kappa_2)(\xi)|^p \Delta \xi \right]^{\frac{1}{q}}$ ya bölersek

$$\left\{ \int_a^b |(\kappa_1 + \kappa_2)(\xi)|^p \Delta \xi \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_a^b |\kappa_1(\xi)|^p \Delta \xi \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_a^b |\kappa_2(\xi)|^p \Delta \xi \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Minkowski eşitsizliğine ulaşırız.

3.4. Jensen Eşitsizliği

Zaman skalası üzerinde Jensen eşitsizliğinin ispatı hemen hemen klasik Jensen eşitsizliği gibidir. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise ispat klasik Jensen eşitsizliği gibidir.

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise Jensen eşitsizliği çok iyi bilinen aritmetik ortalama geometrik ortalama eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.4.1. (Jensen Eşitsizliği) $a, b \in \mathbb{T}$ ve $c, d \in \mathbb{R}$ olsun. $h: [a, b] \rightarrow (c, d)$ fonksiyonu rd- sürekli ve $F: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks (dışbükey) olsun. Bu durumda

$$F\left(\frac{\int_a^b h(\xi) \Delta \xi}{b - a}\right) \leq \frac{\int_a^b F(h(\xi)) \Delta \xi}{b - a}$$

eşitsizliği vardır (Agarwal et al. 2001).

İspat: $x_0 \in (c, d)$ alalım. O zaman [11, sayfa 109] dan öyle bir $\beta \in \mathbb{R}$ vardır ki bütün $x \in (c, d)$ için

$$F(x) - F(x_0) \geq \beta(x - x_0) \tag{3.2}$$

sağlanır.

g fonksiyonu rd - sürekli olduğundan

$x_0 = \frac{\int_a^b h(\tau) \Delta \tau}{b-a}$ iyi tanımlıdır. $F \circ h$ fonksiyonu da rd –sürekli olduğundan bundan dolayı

$$x = h(\xi)$$

ile eşitsizlik (3.2) e uygulanabilir ve istenen sonucu elde etmek için a 'dan b ' ye eşitsizliğin her iki tarafının integrali alınır.

$$\begin{aligned} & \int_a^b [F(h(\xi)) - F(x_0)] \\ & \geq \beta \int_a^b [h(\xi) - x_0] \Delta \xi = \beta \left[\int_a^b h(\xi) \Delta \xi - x_0(b-a) \right] \\ & = \beta \left[\int_a^b h(\xi) \Delta \xi - \frac{\int_a^b h(\tau) \Delta \tau}{b-a} (b-a) \right] = 0 \end{aligned}$$

Bu da doğrudan Jensen eşitsizliğini verir.

Lemma 3.4.1. $a, b, \zeta, \xi \in \mathbb{T}$, $a < b$ ve $\kappa_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise

$$\kappa_1(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \kappa_1^\sigma(\xi) \Delta \xi + \frac{1}{b-a} \int_0^1 k(\xi, \zeta) \kappa_1^\Delta(\zeta) \Delta \zeta$$

eşitliği elde edilir ve

$$k(\xi, \zeta) = \begin{cases} \zeta, & 0 \leq \zeta \leq \frac{\xi-a}{b-a} \\ \zeta - 1, & \frac{\xi-a}{b-a} \leq \zeta \leq 1 \end{cases}$$

dir (Ekinci 2018).

Lemma 3.4.2. (Montgomery Özdeşliği). $a, b, \zeta, \xi \in \mathbb{T}$, $a < b$ ve $\kappa_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise

$$\kappa_1(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \kappa_1^\sigma(\xi) \Delta \xi + \frac{1}{b-a} \int_a^b p(t, \zeta) \kappa_1^\Delta(\zeta) \Delta \zeta$$

eşitliği elde edilir ve

$$p(\xi, \zeta) = \begin{cases} \zeta - a, & a \leq \zeta < \xi \\ \zeta - b, & \xi \leq \zeta \leq b \end{cases}$$

dir (Bohner and Matthews 2008).

3.5. Ostrowski Eşitsizliği

Teorem 3.5.1. (Ostrowski Eşitsizliği) $a, b, \zeta, \xi \in \mathbb{T}$, $a < b$ ve $\kappa_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\left| \kappa_1(\xi) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \kappa_1^\sigma(\zeta) \Delta \zeta \right| \leq \frac{M}{b-a} (h_2(\xi, a) + h_2(\xi, b))$$

eşitsizliği vardır. $M = \sup_{a < \xi < b} |\kappa_1^\Delta(\xi)|$ dir (Bohner and Matthews 2008).

Sonuç 3.5.1. (Sürekli Durum) Teorem 3.5.1. de $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa

$$\left| \kappa_1(\xi) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\zeta) d\zeta \right| \leq M(b-a) \left[\frac{\left(\xi - \frac{a+b}{2} \right)^2}{(b-a)^2} + \frac{1}{4} \right]$$

eşitsizliği bulunur. $M = \sup_{a < \xi < b} |\kappa_1'(t)|$ dir. Bu da klasik Ostrowski eşitsizliğidir.

Sonuç 3.5.2. (Ayrık durum) Teorem 3.5.1. de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $a = 0$, $b = n$, $\zeta = j$, $\xi = i$ ve $\kappa_1(\xi) = x_k$ olsun. $M = \max_{1 \leq i \leq n-1} |\Delta x_i|$ olmak üzere

$$\left| x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \frac{M}{n} \left[\left| i - \frac{n+1}{2} \right|^2 + \frac{n^2+1}{4} \right]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik ayrık Ostrowski eşitsizliğidir.

Teorem 3.5.2. $\kappa_1: I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $I^\circ(I'nın \text{ içi})$ üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\kappa_1' \in L[a, b]$ ve $a, b \in I$ için $a < b$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $|\kappa_1'|$ konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\left| \kappa_1(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \kappa_1(u) du \right| \leq \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^3 \right] |\kappa_1'(b)| + \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^3 \right] |\kappa_1'(a)|$$

burada $x \in [a, b]$ dir (Alomari et al. 2010).

Teorem 3.5.3. (Hölder Eşitsizliği) $h, \kappa_1, \kappa_2 \in C_{rd}([a, b], [0, \infty))$ ve

$$\int_a^b h(x) \kappa_2^q(x) \Delta x > 0$$

olsun. Eğer $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

ise

$$\int_a^b h(x) \kappa_1(x) \kappa_2(x) \Delta x \leq \left(\int_a^b h(x) \kappa_1^p(x) \Delta x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b h(x) \kappa_2^q(x) \Delta x \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Wong et al.2006).

3.6. Bazı Uygulamalar

Örnek 3.6.1. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alalım. Aşıkar olarak $(0, \infty)$ aralığında $F(x) = -\log(x)$ dış bükay ve sükreklidir. Öyleyse $h: [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ sükrekli olduğunda

$$\log \int_0^1 h(\xi) d\xi \geq \int_0^1 \log h(\xi) d\xi$$

elde etmek için Teorem 3.4.1. den

$$F\left(\frac{\int_a^b h(\xi)\Delta\xi}{b-a}\right) \leq \frac{\int_a^b F(h(\xi))\Delta\xi}{b-a}$$

Jensen eşitsizliğinde $a = 0$ ve $b = 1$ alırsak

$$-\log\left(\frac{\int_0^1 h(\xi)\Delta\xi}{1-0}\right) \leq \frac{\int_0^1 -\log(h(\xi))d\xi}{1-0}$$

$$\Rightarrow \log\left(\int_0^1 h(\xi)d\xi\right) \geq \int_0^1 \log(h(\xi))d\xi$$

$$\Rightarrow \int_0^1 h(\xi)d\xi \geq \exp\left[\int_0^1 \log h(\xi)d\xi\right]$$

elde edilir (Agarwal et al. 2001).

Örnek 3.6.2. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $N \in \mathbb{N}$ alalım.

$$\frac{1}{N} \sum_{\xi=1}^N h(\xi) \geq \left\{ \prod_{\xi=1}^N h(\xi) \right\}^{\frac{1}{N}}$$

eşitsizliğini elde etmek için $g: \{1, 2, 3, \dots, N+1\} \rightarrow (0, \infty)$

için Teorem 3.4.1. de $a=1$ ve $b=N+1$ alarak Jensen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \log\left\{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N h(\xi)\right\} &= \log\left\{\frac{1}{N} \int_1^{N+1} h(\xi)\Delta\xi\right\} \\ &\geq \frac{1}{N} \int_1^{N+1} \log h(\xi)\Delta\xi \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\xi=1}^N \log h(\xi)$$

$$= \log \left\{ \prod_{\xi=1}^N h(\xi) \right\}^{\frac{1}{N}}$$

elde edilir ki bu da;

$$\frac{1}{N} \sum_{\xi=1}^N h(\xi) \geq \left\{ \prod_{\xi=1}^N h(\xi) \right\}^{\frac{1}{N}}$$

olması demektir. Bu da bilinen aritmetik ortalama, geometrik ortalama eşitsizliğidir (Agarwal et al. 2001).

Örnek 3.6.3. $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0}$ ve $N = \mathbb{N}$ alalım.

$$\frac{\sum_{k=0}^{N-1} 2^k h(2^k)}{2^N - 1} \geq \left\{ \prod_{k=0}^{N-1} (h(2^k))^{2^k} \right\}^{\frac{1}{(2^N - 1)}}$$

ifadesini bulmak için Teorem 3.4.1. den $a=1$, $b = 2^N$ ve $h: \{2^k: 0 \leq k \leq N\} \rightarrow (0, \infty)$ alınırsa

$$\log \left\{ \frac{\sum_{k=0}^{N-1} h(2^k)}{2^N - 1} \right\} = \log \left\{ \frac{\int_1^{2^N} h(\xi) \Delta \xi}{2^N - 1} \right\}$$

$$\geq \frac{\int_1^{2^N} \log h(\xi) \Delta \xi}{2^N - 1}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{N-1} 2^k \log h(2^k)}{2^N - 1}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \log(h(2^k))^{2^k}}{2^N - 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^N - 1} \log \left\{ \prod_{k=0}^{N-1} (h(2^k))^{2^k} \right\} \\
&= \log \left\{ \prod_{k=0}^{N-1} (h(2^k))^{2^k} \right\}^{\frac{1}{(2^N - 1)}}
\end{aligned}$$

elde edilir ki buda;

$$\frac{\sum_{k=0}^{N-1} 2^k h(2^k)}{2^N - 1} \geq \left\{ \prod_{k=0}^{N-1} (h(2^k))^{2^k} \right\}^{\frac{1}{(2^N - 1)}}$$

olması demektir (Agarwal et al. 2001).

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Ostrowski tipli eşitsilikler

Lemma 4.1.1. $\mathbb{T}, \tilde{\mathbb{T}}$ zaman skalaları ve $\kappa_1: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$, $I_{\mathbb{T}}^K$ üzerinde Δ -diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ ile $v = \frac{\xi - a}{b - a}$ olduğunu varsayalım. Eğer $|\kappa_1^\Delta|$, $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde konveks; $\kappa_1^\Delta \in C_{rd}(I, R)$ ve $a, b, \xi \in I_{\mathbb{T}}$, $a < b$ olursa aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\kappa_1(\xi) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \kappa_1^\sigma(\xi) \Delta \xi = (b-a) \int_0^1 k(\xi, \zeta) \kappa_1^\Delta(\zeta b + (1-\zeta)a) \tilde{\Delta} \zeta$$

Burada

$$k(\xi, \zeta) = \begin{cases} \zeta & , \quad 0 \leq \zeta < \frac{\xi - a}{b - a} \\ \zeta - 1 & , \quad \frac{\xi - a}{b - a} \leq \zeta \leq 1 \end{cases}$$

dir.

İspat: Öncelikle Lemma 3.4.2. deki Montgomery eşitliği hatırlatılır.

$$\kappa_1(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \kappa_1^\sigma(\xi) \Delta \xi + \frac{1}{b-a} \int_a^b p(\xi, \zeta) \kappa_1^\Delta(\zeta) \Delta \zeta \quad (4.1)$$

burada

$$p(\xi, \zeta) = \begin{cases} \zeta - a & , \quad a \leq \zeta < \xi \\ \zeta - b & , \quad \xi \leq \zeta \leq b \end{cases}$$

dir. Eğer (4.1) de Teorem 2.6.5. kullanılır ise aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b p(\xi, \zeta) \kappa_1^\Delta(\zeta) \Delta \zeta = \int_a^b p(\xi, \zeta) \kappa_1^\Delta(\zeta) v^\Delta(\zeta) \Delta \zeta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 p(v^{-1}(\xi), v^{-1}(\tau)) \kappa_1^\Delta(v^{-1}(\tau)) \tilde{\Delta} \tau \\
&= (b-a) \int_0^1 k(\xi, \tau) \kappa_1^\Delta(\tau b + (1-\tau)a) \tilde{\Delta} \tau
\end{aligned}$$

böylece ispat tamamlanır (Ekinci 2018).

Teorem 4.1.1. $\mathbb{T}$, $\tilde{\mathbb{T}}$ birer zaman skalası, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ ile $v = \frac{\xi-a}{b-a} = c$ olmak üzere $\kappa_1: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}^K$ üzerinde Δ -diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $a, b, \xi \in I_{\mathbb{T}}$ ve $a < b$ için $|\kappa_1^\Delta|$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde konveks ise $\kappa_1^\Delta \in C_{rd}(I, R)$ ve $c \in \tilde{\mathbb{T}}$ için.

$$\lambda_1 = \int_0^c \zeta \tilde{\Delta} \zeta \mu_1 = \int_c^1 (1-\zeta) \tilde{\Delta} \zeta \quad (4.2)$$

$$\lambda_2 = \int_0^c \zeta^2 \tilde{\Delta} \zeta \mu_2 = \int_c^1 (1-\zeta)^2 \tilde{\Delta} \zeta$$

olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\begin{aligned}
&\left| \kappa_1(\xi) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \kappa_1^\sigma(u) \Delta u \right| \\
&\leq (b-a) \{ (\lambda_2 + \mu_1 - \mu_2) |\kappa_1^\Delta(b)| + (\mu_2 + \lambda_1 - \lambda_2) |\kappa_1^\Delta(a)| \}
\end{aligned}$$

(Ekinci 2018).

İspat: Lemma 4.1.1 ve $\zeta \in \tilde{\mathbb{T}}$ için modülün özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \kappa_1(\xi) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \kappa_1^{\sigma}(\xi) \Delta \xi \right| \\
& \leq (b-a) \int_0^c |\zeta \kappa_1^{\Delta}[\zeta b + (1-\zeta)a]| \tilde{\Delta} \zeta \\
& \quad + \int_c^1 |(\zeta-1) \kappa_1^{\Delta}[\zeta b + (1-\zeta)a]| \tilde{\Delta} \zeta
\end{aligned}$$

ve $|\kappa_1^{\Delta}|$ fonksiyonu konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
& \int_0^c |\zeta \kappa_1^{\Delta}[\zeta b + (1-\zeta)a]| \tilde{\Delta} \zeta + \int_c^1 |(\zeta-1) \kappa_1^{\Delta}[\zeta b + (1-\zeta)a]| \tilde{\Delta} \zeta \\
& \leq \int_0^c \zeta [|\zeta \kappa_1^{\Delta}(b)| + (1-\zeta) |\kappa_1^{\Delta}(a)|] \tilde{\Delta} \zeta \\
& \quad + \int_c^1 |\zeta-1| [|\zeta \kappa_1^{\Delta}(b)| + (1-\zeta) |\kappa_1^{\Delta}(a)|] \tilde{\Delta} \zeta \\
& = \left(\int_0^c \zeta^2 \tilde{\Delta} \zeta + \int_c^1 (1-\zeta) \zeta \tilde{\Delta} \zeta \right) |\kappa_1^{\Delta}(b)| \\
& \quad + \left(\int_0^c \zeta (1-\zeta) \tilde{\Delta} \zeta + \int_c^1 (1-\zeta)^2 \tilde{\Delta} \zeta \right) |\kappa_1^{\Delta}(a)| \\
& = \left(\int_0^c \zeta^2 \tilde{\Delta} \zeta + \int_c^1 [(1-\zeta) - (1-\zeta)^2] \tilde{\Delta} \zeta \right) |\kappa_1^{\Delta}(b)| \\
& \quad + \left(\int_0^c [\zeta - \zeta^2] \tilde{\Delta} \zeta + \int_c^1 (1-\zeta)^2 \tilde{\Delta} \zeta \right) |\kappa_1^{\Delta}(a)|
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.1. Teorem 4.1.1 ve $M = \sup_{a < \xi < b} |\kappa_1^\Delta(\xi)|$ varsayımı altında Teorem 3.5.1 elde edilir.

Sonuç 4.1.2. (Sürekli Durum) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa Teorem 3.5.2. elde edilir.

Sonuç 4.1.3. (Ayrık Durum) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $a = 0$, $b = n$, $\zeta = j$, $\xi = i$ ve $\kappa_1(k) = x_k$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left| x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \frac{1}{6n} \{ [\kappa_2(i) + h(n-i+1)] |x_{n+1} - x_n| + [\kappa_2(n-i+1) + h(i)] |x_1 - x_0| \}$$

burada

$$\kappa_2(u) = u(u-1)(2u-1)$$

$$h(u) = u(u-1)(3n-2u-1)$$

dir.

İspat :

$$|\kappa_1^\Delta(b)| = |x_{n+1} - x_n|$$

$$|\kappa_1^\Delta(a)| = |x_1 - x_0|$$

yukarıdaki eşitlikler ve (4.2) deki dört integral hesaplanırsa istenen sonuç çıkarılır (Ekinici 2018).

Örnek 4.1.1. Sonuç 4.1.1 de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $\kappa_1(x) = x^2$ olmak üzere $a = 0$ $b = 12$ değerleri için eşitsizliğin sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

Çözüm:

$$\left| x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| = \left| i^2 - \frac{1}{12} \frac{(12) \cdot (13)(25)}{2} \right| = |i^2 - 162,5| = 162,5 - i^2$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6n} \{ [\kappa_2(i) + h(n-i)] |x_{n+1} - x_n| + [\kappa_2(n-i) + h(i)] |x_1 - x_0| \} \\
&= \frac{1}{72} \{ [\kappa_2(i) + h(n-i)] (25) + [\kappa_2(n-i) + h(i)] \} \\
&= \frac{1}{72} (39336 - 528i - 844i^2 + 96i^3)
\end{aligned}$$

buradan $LHS \leq RHS$ olduğu kolayca görülür.

Teorem 4.1.2. $\mathbb{T}$, $\tilde{\mathbb{T}}$ zaman skalaları ve $\kappa_1: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$, $I_{\mathbb{T}}^K$ üzerinde Δ -diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ ile $v = \frac{\xi-a}{b-a} = c$ olduğunu varsayalım. Eğer $|\kappa_1^\Delta|^q$, $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde konveks; $\kappa_1^\Delta \in C_{rd}(I, R)$ ve $a, b, \xi \in I_{\mathbb{T}}$, $a < b$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olursa aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned}
& \left| \kappa_1(\xi) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \kappa_1^\sigma(u) \Delta u \right| \\
& \leq (b-a)(\lambda_1 + \mu_1)^{\frac{1}{p}} \{ (\lambda_2 + \mu_1 - \mu_2) |\kappa_1^\Delta(b)|^q + (\mu_2 + \lambda_1 - \lambda_2) |\kappa_1^\Delta(a)|^q \}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \int_0^c \zeta \tilde{\Delta} \zeta \mu_1 = \int_c^1 (1-\zeta) \tilde{\Delta} \zeta \\
\lambda_2 &= \int_0^c \zeta^2 \tilde{\Delta} \zeta \mu_2 = \int_c^1 (1-\zeta)^2 \tilde{\Delta} \zeta
\end{aligned}$$

dir (Ekinci 2018).

İspat: Lemma 4.1.1. ve $\zeta \in \tilde{\mathbb{T}}$ için modülün özelliği kullanılırsa

$$\left| \kappa_1(\xi) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \kappa_1^\sigma(\xi) \Delta \xi \right| \leq (b-a) \int_0^1 |k(\xi, \zeta)| |\kappa_1^\Delta[\zeta b + (1-\zeta)a]| \tilde{\Delta} \zeta \quad (4.3)$$

Teorem 3.5.3.deki Hölder eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |k(\xi, \zeta)| |\kappa_1^\Delta[\zeta b + (1 - \zeta)a]| \tilde{\Delta} \zeta \\ & \leq \left(\int_0^1 |k(\xi, \zeta)| \tilde{\Delta} \zeta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |k(\xi, \zeta)| |\kappa_1^\Delta[\zeta b + (1 - \zeta)a]|^q \tilde{\Delta} \zeta \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

burada

$$\int_0^1 |k(\xi, \zeta)| \tilde{\Delta} \zeta = \int_0^c \zeta \tilde{\Delta} \zeta + \int_c^1 (1 - \zeta) \tilde{\Delta} \zeta = \lambda_1 + \mu_1$$

ve $|\kappa_1^\Delta|^q$ konveksliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |k(\xi, \zeta)| |\kappa_1^\Delta[\zeta b + (1 - \zeta)a]|^q \tilde{\Delta} \zeta \\ & \leq \int_0^1 |k(\xi, \zeta)| [\zeta |\kappa_1^\Delta(b)|^q + (1 - \xi) |\kappa_1^\Delta(b)|^q] \tilde{\Delta} \zeta \end{aligned}$$

Önceki teoremin ispatında kullanılan yöntem ile aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |k(\xi, \zeta)| [\zeta |\kappa_1^\Delta(b)|^q + (1 - \xi) |\kappa_1^\Delta(b)|^q] \tilde{\Delta} \zeta \\ & = (\lambda_2 + \mu_1 - \mu_2) |\kappa_1^\Delta(b)|^q + (\mu_2 + \lambda_1 - \lambda_2) |\kappa_1^\Delta(a)|^q \end{aligned}$$

Bu sonuçları (4.3) de yazarak istenen sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 4.1.4. (Sürekli Durum) Teorem 4.1.2. de $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa;

$$\left| \kappa_1(\xi) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \kappa_1^\sigma(u) \Delta u \right|$$

$$\leq (b-a)^{1-\frac{2}{p}} \left\{ \frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^3 \right] |\kappa_1'(b)| + \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^3 \right] |\kappa_1'(a)| \right\}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.1.5. (Ayrık Durum) Teorem 4.1.2. de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $a = 0$, $b = n$, $\xi = i$ ve $\kappa_1(k) = x_k$ alınırsa;

$$\left| x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right|$$

$$\leq \frac{n^{-\frac{1}{q}}}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \{ [\kappa_2(i) + h(n-i+1)] |x_{n+1} - x_n|^q + [\kappa_2(n-i+1) + h(i)] |x_1 - x_0|^q \}^{\frac{1}{q}} [r(i) + r(n-i+1)]^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\kappa_2(u) = u(u-1)(2u-1)$$

$$h(u) = u(u-1)(3n-2u+1)$$

$$r(u) = u(u-1)$$

dir (Ekinci 2018).

Sonuç 4.1.6. Teorem 4.1.2.de $M = \sup_{a < \xi < b} |\kappa_1^{\Delta}(\xi)|^q$ olarak kabul edilirse

$$\left| \kappa_1 \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \kappa_1^{\sigma}(\xi) \Delta \xi \right| \leq (b-a) \{ \lambda_1 + \mu_1 \} M$$

sonucu ortaya çıkar (Ekinci 2018).

4.2. Jensen tipli eşitsizlikler

Lemma 4.2.1. $\kappa_1 \in C((c, d), \mathbb{R})$ konveks ve $\forall x, \xi \in (c, d)$ için $a_\xi \in \mathbb{R}$ olsun. Öyle ki

$$\kappa_1(x) - \kappa_1(\xi) \geq a_\xi(x - \xi)$$

dir. Eğer f kesin konveks ise yukarıdaki eşitsizlikteki " $\geq$ " eşitsizlik işareti yerine " $>$ " işareti getirilir (Wong et al. 2006).

Teorem 4.2.1. (Zaman Skalasında Jensen Eşitsizliği) $\kappa_2 \in C_{rd}([a, b], (c, d))$ ve $h \in C_{rd}([a, b], \mathbb{R})$ için

$$\int_a^b |h(\zeta)| \Delta \zeta > 0$$

olsun. Burada $a, b \in \mathbb{T}$ ve $c, d \in \mathbb{R}$ dir. Eğer $\kappa_1 \in C((c, d), \mathbb{R})$ konveks ise aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$\kappa_1 \left(\frac{\int_a^b |h(\zeta)| \kappa_2(\zeta) \Delta \zeta}{\int_a^b |h(\zeta)| \Delta \zeta} \right) \leq \frac{\int_a^b |h(\zeta)| \kappa_1(\kappa_2(\zeta)) \Delta \zeta}{\int_a^b |h(\zeta)| \Delta \zeta}$$

Eğer κ_1 kesin konveks ise yukarıdaki eşitsizlikteki " $\leq$ " eşitsizlik işareti yerine " $<$ " işareti getirilir (Wong et al. 2006).

İspat: κ_1 konveks ve $\forall x, \xi \in (c, d)$ için Lemma 4.2.1.yikullanarak $a_\xi \in \mathbb{R}$ olduğundan

$$\kappa_1(x) - \kappa_1(\xi) \geq a_\xi(x - \xi)$$

eşitsizliği ortaya çıkar.

$$\xi = \frac{\int_a^b |h(\zeta)| \kappa_2(\zeta) \Delta \zeta}{\int_a^b |h(\zeta)| \Delta \zeta}$$

olsun. Böylece

$$\begin{aligned}
& \int_a^b |h(\zeta)| \kappa_1(\kappa_2(\zeta)) \Delta \zeta - \left(\int_a^b |h(\zeta)| \Delta \zeta \right) \kappa_1 \left(\frac{\int_a^b |h(\zeta)| \kappa_2(\zeta) \Delta \zeta}{\int_a^b |h(\zeta)| \Delta \zeta} \right) \\
&= \int_a^b |h(\zeta)| \kappa_1(\kappa_2(\zeta)) \Delta \zeta - \left(\int_a^b |h(\zeta)| \Delta \zeta \right) \kappa_1(\xi) \\
&= \int_a^b |h(\zeta)| \{ \kappa_1(\kappa_2(\zeta)) - \kappa_1(\xi) \} \Delta \zeta \geq a_\xi \int_a^b |h(\zeta)| \{ \kappa_2(\zeta) - \xi \} \Delta \zeta \\
&= a_\xi \left\{ \int_a^b |h(\zeta)| \kappa_2(\zeta) \Delta \zeta - \xi \int_a^b |h(\zeta)| \Delta \zeta \right\} \\
&= a_\xi \left\{ \int_a^b |h(\zeta)| \kappa_2(\zeta) \Delta \zeta - \xi \int_a^b |h(\zeta)| \kappa_2(\zeta) \Delta \zeta \right\} = 0
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.1. de $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.2.1. ($\mathbb{T} = \mathbb{R}$) $\kappa_2, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir ve $\int_a^b |h(x)| dx > 0$ olsun. Eğer $\kappa_1 \in C((c, d), \mathbb{R})$ fonksiyonu konveks ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\kappa_1 \left(\frac{\int_a^b |h(x)| \kappa_2(x) dx}{\int_a^b |h(x)| dx} \right) \leq \frac{\int_a^b |h(x)| \kappa_1(\kappa_2(x)) dx}{\int_a^b |h(x)| dx}$$

burada $\kappa_2([a, b]) \subseteq (c, d)$ dir (Wong et al. 2006).

Sonuç 4.2.2. ($\mathbb{T} = \mathbb{Z}$) κ_1 konveks bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $x_1, x_2, \dots, x_n$ ve $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$ ile $\sum_{k=1}^n c_k > 0$ için

$$\kappa_1 \left(\frac{\sum_{k=1}^n c_k x_k}{\sum_{k=1}^n c_k} \right) \leq \frac{\sum_{k=1}^n c_k \kappa_1(x_k)}{\sum_{k=1}^n c_k}$$

eşitsizliği yazılır (Wong et al. 2006).

Sonuç 4.2.3. Eğer κ_1 konveks koşulu κ_1 konkav olarak değiştirilirse yukarıdaki teorem ve sonuçlardaki eşitsizlik işaretleri “ $\geq$ ” ile değiştirmelidir (Wong et al. 2006).

Sonuç 4.2.4. Teorem 4.2.1. de $[a, b]$ aralığında $\kappa_2(\xi) \geq 0$ ve $[0, \infty)$ aralığında $\kappa_1(\xi) = \xi^\alpha$ olsun. κ_1 , $\alpha < 0$ veya $\alpha > 1$ için $[0, \infty)$ aralığında konveks ve $\kappa_1, \alpha \in (0, 1)$ için $[0, \infty)$ aralığında konkav olduğu açıktır. Öyleyse

$$\left(\frac{\int_a^b |h(\zeta)| \kappa_2(\zeta) \Delta \zeta}{\int_a^b |h(\zeta)| \Delta \zeta} \right)^\alpha \leq \frac{\int_a^b |h(\zeta)| \kappa_2^\alpha(\zeta) \Delta \zeta}{\int_a^b |h(\zeta)| \Delta \zeta}, \quad \text{eğer } \alpha < 0 \text{ ya da } \alpha > 1;$$

$$\left(\frac{\int_a^b |h(\zeta)| \kappa_2(\zeta) \Delta \zeta}{\int_a^b |h(\zeta)| \Delta \zeta} \right)^\alpha \geq \frac{\int_a^b |h(\zeta)| \kappa_2^\alpha(\zeta) \Delta \zeta}{\int_a^b |h(\zeta)| \Delta \zeta}, \quad \text{eğer } \alpha \in (0, 1)$$

dir (Wong et al. 2006).

Sonuç 4.2.5. Teorem 4.2.1. de $[a, b]$ aralığında $\kappa_2(\xi) > 0$ ve $(0, \infty)$ aralığında $\kappa_1(\xi) = \ln(\xi)$ olsun. κ_1 , $(0, \infty)$ aralığında konkav olduğu açıktır. Öyleyse

$$\ln \left(\frac{\int_a^b |h(\zeta)| \kappa_2(\zeta) \Delta \zeta}{\int_a^b |h(\zeta)| \Delta \zeta} \right) \geq \frac{\int_a^b |h(\zeta)| \ln(\kappa_2(\zeta)) \Delta \zeta}{\int_a^b |h(\zeta)| \Delta \zeta}$$

dir (Wong et al. 2006.)

4.3. Bazı Uygulamalar

Jensen eşitsizliği uygulanarak aşağıdaki üç teorem elde edilir.

Teorem 4.3.1. $p, h \in C_{rd}([a, b], [0, \infty))$ ile $\int_a^b p(\zeta) h(\zeta) \Delta \zeta > 0$ ve $\int_a^b \frac{p(\zeta)}{h(\zeta)} \Delta \zeta > 0$ olsun. O zaman

$$\frac{\int_a^b \frac{p(\zeta)}{h(\zeta)} \ln(h(\zeta)) \Delta \zeta}{\int_a^b \frac{p(\zeta)}{h(\zeta)} \Delta \zeta} < \frac{\int_a^b p(\zeta) h(\zeta) \ln(h(\zeta)) \Delta \zeta}{\int_a^b p(\zeta) h(\zeta) \Delta \zeta}$$

eşitsizliği yazılır (Wong et al. 2006).

İspat: $\kappa_1(x) = -\ln(x)$ kesin konveks olduğundan ve Jensen eşitsizliğinden (Teorem 4.2.1.) aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\kappa_1\left(\frac{\int_a^b p(\zeta) \frac{1}{h(\zeta)} \Delta\zeta}{\int_a^b p(\zeta) \Delta\zeta}\right) < \frac{\int_a^b p(\zeta) \kappa_1\left(\frac{1}{h(\zeta)}\right) \Delta\zeta}{\int_a^b p(\zeta) \Delta\zeta}$$

dir. Yani,

$$-\ln\left(\frac{\int_a^b p(\zeta) \frac{1}{h(\zeta)} \Delta\zeta}{\int_a^b p(\zeta) \Delta\zeta}\right) < \frac{-\int_a^b p(\zeta) \ln\left(\frac{1}{h(\zeta)}\right) \Delta\zeta}{\int_a^b p(\zeta) \Delta\zeta}$$

buradan

$$\ln\left(\frac{\int_a^b p(\zeta) \Delta\zeta}{\int_a^b p(\zeta) \frac{1}{h(\zeta)} \Delta\zeta}\right) < \frac{\int_a^b p(\zeta) \ln(h(\zeta)) \Delta\zeta}{\int_a^b p(\zeta) \Delta\zeta}$$

dir. Böylece

$$\frac{\int_a^b p(\zeta) \Delta\zeta}{\int_a^b p(\zeta) \frac{1}{h(\zeta)} \Delta\zeta} < \exp\left(\frac{\int_a^b p(\zeta) \ln(h(\zeta)) \Delta\zeta}{\int_a^b p(\zeta) \Delta\zeta}\right)$$

dir. Benzer şekilde

$$\frac{\int_a^b p(\zeta) h(\zeta) \Delta\zeta}{\int_a^b p(\zeta) \Delta\zeta} = \frac{\int_a^b p(\zeta) h(\zeta) \Delta\zeta}{\int_a^b p(\zeta) \frac{1}{h(\zeta)} \Delta\zeta} < \exp\left(\frac{\int_a^b p(\zeta) h(\zeta) \ln(h(\zeta)) \Delta\zeta}{\int_a^b p(\zeta) h(\zeta) \Delta\zeta}\right)$$

dir. Bundan ve Jensen eşitsizliği ile $\exp$ kesin konveks özelliğinden şu sonuç çıkar.

$$\exp\left(\frac{\int_a^b p(\zeta) \frac{1}{h(\zeta)} \ln(h(\zeta)) \Delta\zeta}{\int_a^b p(\zeta) \frac{1}{h(\zeta)} \Delta\zeta}\right) < \frac{\int_a^b p(\zeta) \frac{1}{h(\zeta)} \exp(\ln(h(\zeta))) \Delta\zeta}{\int_a^b p(\zeta) \frac{1}{h(\zeta)} \Delta\zeta} = \frac{\int_a^b p(\zeta) \frac{1}{h(\zeta)} h(\zeta) \Delta\zeta}{\int_a^b p(\zeta) \frac{1}{h(\zeta)} \Delta\zeta}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_a^b p(\zeta) \Delta \zeta}{\int_a^b \frac{p(\zeta)}{h(\zeta)} \Delta \zeta} < \exp \left(\frac{\int_a^b p(\zeta) \ln(h(\zeta)) \Delta \zeta}{\int_a^b p(\zeta) \Delta \zeta} \right) \\
& < \frac{\int_a^b p(\zeta) \exp(\ln(h(\zeta))) \Delta \zeta}{\int_a^b p(\zeta) \Delta \zeta} = \frac{\int_a^b p(\zeta) h(\zeta) \Delta \zeta}{\int_a^b p(\zeta) \Delta \zeta} \\
& < \exp \left(\frac{\int_a^b p(\zeta) h(\zeta) \ln(h(\zeta)) \Delta \zeta}{\int_a^b p(\zeta) h(\zeta) \Delta \zeta} \right)
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.2. (Hölder eşitsizliği) Daha önce Teorem 3.5.3. de verilmişti.

Teorem 4.3.3. $h, \kappa_1, \kappa_2 \in C_{rd}([a, b], [0, \infty))$ olsun. O zaman

(a)

$$\left[\left(\int_a^b h \kappa_1 \Delta x \right)^r + \left(\int_a^b h \kappa_2 \Delta x \right)^r \right]^{\frac{1}{r}} \leq \int_a^b h (\kappa_1^r + \kappa_2^r)^{\frac{1}{r}} \Delta x, \quad \text{eğer } r > 1;$$

(b)

$$\left[\left(\int_a^b h \kappa_1 \Delta x \right)^r + \left(\int_a^b h \kappa_2 \Delta x \right)^r \right]^{\frac{1}{r}} \geq \int_a^b h (\kappa_1^r + \kappa_2^r)^{\frac{1}{r}} \Delta x, \quad \text{eğer } 0 < r < 1$$

dir. (Wong et al. 2006).

İspat: (a) Açıkça $\varphi(x) = (1 + x^r)^{\frac{1}{r}}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında konveks ve Teorem 4.2.1. 'ü kullanılarak

$$\left[1 + \left(\int_a^b h(x) \kappa_1(x) \Delta x \right)^r \right]^{\frac{1}{r}} \leq \int_a^b h(x) (1 + \kappa_1^r(x))^{\frac{1}{r}} \Delta x$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte h ve κ_1 fonksiyonlarını sırasıyla $\frac{h\kappa_1}{\int_a^b h\kappa_1 \Delta x}$ ve $\frac{\kappa_2}{\kappa_1}$ ile değiştirilerek istenen sonuç elde edilir.

(b) Benzer şekilde ispatlanır.



BEŞİNCİ BÖLÜM

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada zaman skalası ile ilgili temel bilgilere yer verilmiştir. Daha sonra Hölder, Minkowski, Cauchy-Schwarz, Jensen ve Ostrowski eşitsizlikleri gibi temel eşitsizliklerin zaman skalası kullanılarak elde edilmiş yeni versiyonlarına yer verilmiştir. Araştırma Bulgular kısmında ise Ostrowski ve Jensen tipli eşitsizlikler ispatlarıyla verilmiş ve uygulamalarına değinilmiştir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar Lemma 4.1.1. ve Lemma 4.2.1.nin yeni ve genel versiyonlarını oluşturarak yeni sınırlar ve yaklaşımlar elde edebilirler.

KAYNAKÇA

- Agarwal, R., Bohner, M. and Peterson, A., Inequalities on time scales: A survey, Math. Inequal. Appl. 4, no. 4, 535-557, 2001.
- Agarwal, R. and Bohner, M., Basic calculus on time scales and some of its applications, Results Math., 35(1-2):3-22, 1999.
- Alomari, M. and Darus, M., (2010), Some Ostrowski's Type Inequalities for Convex Functions With Applications, RGMIA Res. Rep. Coll., 13(1).
- Anastassiou, G. 2015. Frontiers In Time Scales And Inequalities. World Scientific Publishing Company Inc.
- Beckenbach, E. and Bellman, R. 1961. Inequalities. Springer-Verlag, 198 pp., Berlin.
- Bohner, M., Matthews, T. and Tuna, A., Diamond-alpha Grüss type inequality on time scales. Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ., 3(1/2):234–247, 2011.
- Bohner, M., Peterson, A., "Dynamic equations on time scales: An introduction with applications", *Birkhäuser*, Boston, 1-78 (2001).
- Bohner, M. and Peterson, A. 2003. Advances in Dynamic Equations on Time Scales. Birkhäuser Basel.
- Bohner, M. and Matthews, T., Ostrowski inequalities on time scales, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 9, no. 1, Article 6, 8 pp, 2008.
- Davis, J.M., Fadag M., Henderson, J. and Sheng, Q., An exploration of combined dynamic derivatives on time scales and their applications, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 7(3), 395-413, 2006.
- Dinu, C. 2008. Convex Functions on Time Scales, Annals of the University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., (35), 87-96.
- Dragomir, S. and Pearce, C. 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications RGMIA Monographs <http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html> (10.10.2010).
- Ekinci, A. 2014. Klasik Eşitsizlikler Yoluyla Konveks Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Ekinci, A. (2019). Inequalities for convex functions on time scales. TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, 9(1), 64-72.

- Hardy, G., Littlewood, J. and Polya, G. (1952). Inequalities. 2 nd Ed, University Press, 324, United Kingdom.
- Hilger, S., Ein Mabkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmanigfaltigkeiten, PhD thesis, Univarsi. Würzburg, 1988.
- Mitrinović, D. S. 1970. Analytic Inequalities. Springer-Verlag, Berlin.
- Özkan, U. M. 2007. Zaman Skalasında İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi .
- Rogers Jr., J. W. and Sheng, Qin., Notes on the diamond dynamic derivative on time scales, *J. Math. Anal. Appl.*, 326(1), 228 241,2007.
- Wong, F., Yeh, C. and W.C., L. 2006. An Extension of Jensens Inequality on Time Scales. *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 113-120.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER	
Adı Soyadı	Kıyasettin Taşdemir
Doğum Yeri ve Tarihi	
EĞİTİM DURUMU	
Lisans Öğrenimi	
Yüksek Lisans Öğrenimi	
İŞ DENEYİMİ	
Çalıştığı Kurum	
İLETİŞİM BİLGİLERİ	
E-posta Adresi	