



**ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE BİRİNCİ BASAMAKTAN DİNAMİK
DENKLEMLER İÇİN ULAM KARARLILIĞI**

Büşra AYDIN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Büşra AYDIN

01/07/2021

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE BİRİNCİ BASAMAKTAN DİNAMİK DENKLEMLER İÇİN ULAM KARARLILIĞI

(Yüksek Lisans Tezi)

Büşra AYDIN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2021

ÖZET

Bu araştırmada birinci basamaktan homogen olan ve homogen olmayan dinamik denklemler için zaman skalası üzerinde Ulam kararlılığı çalışılmıştır. Wisconsin üniversitesinde 1940 yılında yapılan bir konuşmada Stanislaw Ulam'ın sorduğu sorulardan birine ertesi yıl Hyres'in yanıtladığı cevapla ele alınan bu kararlılık teorisi şu anda Hyres-Ulam kararlılığı olarak bilinmektedir. Bu araştırmada öncelikle birinci basamaktan diferensiyel denklemler ardından da bu diferensiyel denklemlerde kararlılık ve fonksiyonel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı gibi temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Ardından zaman skalası konusunun temel kavramlarından olan delta (Hilger) türev, delta integral, kompleks Hilger düzlemi, genelleştirilmiş üstel fonksiyon ve birinci basamaktan lineer dinamik denklemlerin özellikleri incelenmiş olup bunlara ait tanımlar verilmiştir. Daha sonra Onitsuka ve Anderson'nun yaptıkları çalışmaları da dikkate alarak birkaç özel hallerde ayrık ve sürekli dinamik denklemleri içerisine alan sabit katsayılı birinci basamaktan lineer dinamik denklemlerin zaman skalası üzerinde Hyers-Ulam kararlılığı (HUS) çalışılmıştır. Burada bilhassa zaman skalasının granül fonksiyonuyla ilişkili birkaç parametre değerleri için minimum Hyers-Ulam kararlılık sabitleri araştırılmıştır. Son kısma geldiğimizde Yonghong Shen'in çalışması göz önünde bulundurularak öncelikle lineer birinci basamaktan dinamik denklemlerin eşlenik denklemin integral alma metodu uygulanarak Ulam kararlılığı ele alınmıştır. Ardından bu denklemin genelleştirilmiş üstel fonksiyonun özellikleri ve bu denklemin sonuçları vasıtasıyla lineer birinci basamaktan dinamik denklemin Ulam kararlılığı araştırılmıştır.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Zaman Skalası, Dinamik Denklemler, Hyers-Ulam Anlamında Kararlılık
Sayfa Adedi : 117
Danışman : Prof. Dr. Adil MISİR

ULAM STABILITY FOR FIRST ORDER DYNAMIC EQUATIONS ON TIME SCALE

(M. Sc. Thesis)

Büşra AYDIN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2021

ABSTRACT

In this research, Ulam stability in time scale for first order homogeneous and inhomogeneous dynamical equations was investigated. This stability theory, which was addressed by Hyres's answer to one of the questions Stanislaw Ulam asked in a speech at the University of Wisconsin in 1940, is known today as the Hyres-Ulam stability. In this research, basic definitions and concepts such as first-order differential equations and then stability in these differential equations and Hyers-Ulam stability of functional equations are given. Then, the basic concepts of time scale, delta (Hilger) derivative, delta integral, complex Hilger plane, generalized exponential function and first-order linear dynamical equations are examined and their definitions are given. Then, taking into account the work of M. Onitsuka and D. R. Anderson, Hyers-Ulam stability (HUS) is studied in the time scale of constant coefficient first order linear dynamical equations including discrete and continuous dynamical equations in a few special cases. Here, the minimum Hyres-Ulam stability constants are searched for a few parameter values related to the granule function of the time scale. When we come to the last part, Ulam stability is discussed by applying the method of integrating the conjugate equation of linear first order dynamical equations, taking into account the work of Yonghong Shen. Then, the Ulam stability of the linear first-order dynamical equation is investigated through the properties of the generalized exponential function of this equation and the results of this equation.

Science Code : 20406

Key Words : Time Scale, Dynamic Equations, Hyers-Ulam Stability

Page Number : 117

Supervisor : Prof. Dr. Adil MISIR

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın gerçekleştirilmesinde, bana daima vakit ayırıp büyük bir ilgi, sabır ve destekleri ile katkıda bulunan kıymetli danışmanım Prof. Dr. Adil MISİR'a teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum. Ayrıca anlayışları ve sevgileri ile her zaman yanımda olan sevgili babam Bayram AYDIN ve annem Hatice AYDIN'a teşekkür ediyorum.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR.....	3
2.1. Diferensiyel Denklem	3
2.2. Birinci Basamaktan Lineer Diferensiyel Denklemler	4
3. DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI.....	7
3.1. Sabit Katsayılı Lineer Diferensiyel Denklemlerin Kararlılığı	8
3.2. Lineer Sistemlerin Kararlılığı.....	10
3.2.1. Sabit katsayılı lineer sistemlerin kararlılığı	11
3.3. Değişken Katsayılı Sistemlerin Kararlılığı	12
4. FONKSİYONEL VE DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HYERS- ULAM KARARLILIĞI	15
4.1. Fonksiyonel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı.....	15
4.2. $y' = y$ Diferensiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı	17
4.3. $y' = \lambda y$ Diferensiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı	18
4.4. $y' + g(t)y = 0$ Diferensiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı.....	23
4.5. $y' + p(t)y = q(t)$ Diferensiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı	30
5. ZAMAN SKALASI KAVRAMI VE ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE HESAP	33

	Sayfa
5.1. Temel Tanım ve Kavramlar.....	33
5.2. Delta Türev	37
5.3. Delta İntegral	49
5.4. Birinci Basamaktan Lineer Dinamik Denklemler	56
5.5. Kompleks Hilger Düzlemi.....	57
5.6. Üstel Fonksiyon.....	63
5.7. Dinamik Eşitsizlikler.....	77
6. ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE BİRİNCİ BASAMAKTAN LİNEER DİNAMİK DENKLEMLERİN HYERS-ULAM KARARLILIĞI.....	81
6.1. Zaman Skalası Üzerinde Birinci Basamaktan Homogen Lineer Dinamik Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı	81
6.2. Zaman Skalası Üzerinde Birinci Basamaktan Homogen Olmayan Lineer Dinamik Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı.....	97
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	113
KAYNAKLAR	115
ÖZGEÇMİŞ	117

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 5.1. Noktaların Sınıflandırılması	35
Çizelge 5.2. Zaman Skalasına Örnekler	37
Çizelge 5.3. Toplamsal Tersler	61



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathcal{C}_{rd}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$	$\mathcal{A}$ kümesinden $\mathcal{B}$ kümesine rd-sürekli fonksiyonların kümesi
$\mathcal{R}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$	$\mathcal{A}$ kümesinden $\mathcal{B}$ kümesine regressiv fonksiyonların kümesi
$\int_a^b \Delta$	a noktasından b noktasına Delta integral
$ \cdot $	Mutlak değer
$\ \cdot\ $	Norm
$\subset$	Alt küme
$\inf$	İnfimum, Alt sınırların en büyüğü
$\sup$	Supremum, Üst sınırların en küçüğü
$\max$	Maksimum
$\min$	Minimum
$\exp(x)$	x sayısının e tabanındaki görüntüsü
$\operatorname{Re}(z)$	z sayısının reel kısmı

Kısaltmalar

Açıklamalar

HUS	Hyers-Ulam Sabiti
-----	-------------------

1. GİRİŞ

Fizik, mühendislik, tıp, biyoloji gibi fen bilimlerinin yanı sıra borsa ve sosyolojik birçok olayın bir diferensiyel denklem yardımıyla modellenenir. Bu yüzden diferensiyel denklemlerin çözümleri ve onların davranışlarını incelemek önemli bir çalışma alanıdır. Diferensiyel denklemler alanında çalışmalar hızlı bir şekilde ilerlemektedir. Bu alanda yapılan çalışmalar denklemin analitik çözümlerinin belirlenmesi, denklemin çözümünün davranışlarının incelenmesi ve denklemin çözümünün yaklaşık değerlerinin çeşitli metotlarla belirlenmesi olarak sırasıyla nicel, nitel ve nümeriksel olarak yapılmaktadır.

Çeşitli fonksiyonel denklemler için kararlılık problemi çalışması, Ulam tarafından 1940 yılının sonbaharında Wisconsin Üniversitesi'nde sunulan ilginç ve ünlü bir konuşma ile tetiklenmiştir. Ulam konuşmasında bir takım önemli çözülmemiş matematiksel problemleri tartışmıştır. Ertesi yıl Hyers, Ulam'ın sorusuna kısmi çözüm bulmayı başarmıştır. Bu yüzden bu tip kararlılık incelemeleri Hyers-Ulam kararlılığı (HUK) olarak bilinmektedir. 1978'de Rassias, Hyers'ın makalesinde kısmi cevabını doğrudan yaklaşım kullanarak genişletmiştir ve bu genişletme Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı (HURK) olarak bilinmektedir.

1993 yılında Obloza, diferensiyel denklemlerin Ulam kararlılığı çalışmasını başlatmıştır [11]. Daha sonra Alsina ve Ger, $y'(t) = y(t)$ lineer diferensiyel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığı ile ilgili çalışmalarını yayınlamışlardır. Kısa süre sonra Miura, Takahasi, Choda ve Miyajima çeşitli soyut uzaylarda $y'(t) = \lambda y(t)$ diferensiyel denkleminin Ulam kararlılığını sistematik olarak incelemişlerdir [11]. Böylece farklı türdeki diferensiyel denklemlerin Ulam kararlılığı ile ilgili birçok sonuç ortaya çıkmıştır. Doğrudan yöntem, integral çarpanı yöntemi, kuvvet serileri yöntemi, Laplace dönüşüm yöntemi, sabit nokta tekniği ve benzeri birçok yöntem diferensiyel denklemlerin Ulam kararlılığını incelemek için kullanılmıştır. Bu çalışmada zaman skalasında dinamik denklemlerin Ulam kararlılığı kavramı incelenmiştir.

1988'de Stefan Hilger sürekli ve fark analizini birleştirmek için zaman skalası kavramını ortaya atmıştır [9]. Zaman skalası hesabı diferensiyel denklemlerin ve fark denklemlerinin incelenmesi için benzersiz bir çerçeve sunmaktadır. Son yirmi yılda, zaman skalası hesabı ve karşılık gelen dinamik denklemler sistematik olarak incelenmiştir. 2013 yılında Andr s

ve M  sz  ros bazı lineer ve lineer olmayan dinamik denklemlerin ve integral denklemlerinin zaman skalasında Ulam kararlılığını doğrudan ve operasyonel y  ntemlerle incelemişlerdir [11].



2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Diferensiyel Denklem

2.1.1. Tanım

Genel anlamda x bağımsız y bağımlı değişken olmak üzere n . basamaktan bir diferensiyel denklem,

$$\mathcal{F}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

biçiminde yazılır. Denklem (2.1)'de $\mathcal{F}; x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ ve $y^{(n)}$ argümanlarının bir fonksiyonu olup $n \in \mathbb{N}$ dir. Ayrıca $y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ dir. Eğer (2.1) ifadesinden $y^{(n)}$, diğer bileşenler cinsinden çekilemiyorsa (yani türeğe göre çözilemiyorsa) (2.1) gösterimine diferensiyel denklemin *standart formu* denir. Eğer (2.1) denkleminde $y^{(n)}$ türevi, diğer bileşenler $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ cinsinden,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

olarak yazılabiliyorsa (yani türeğe göre çözölebiliyorsa) (2.2) ifadesine n . basamaktan diferensiyel denklemin *normal formu* denir [1].

2.1.2. Tanım

Bir $\mathcal{F}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$ diferensiyel denkleminde eğer $\mathcal{F}$ fonksiyonu $y, y', \dots, y^{(n)}$ değişkenlerinin bir lineer fonksiyonu ise diferensiyel denkleme bir *lineer diferensiyel denklem* denir. Bu tanıma göre n . basamaktan bir lineer diferensiyel denklemin genel formu

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x)$$

biçiminde olur. Burada $a_0, a_1, \dots, a_n$ ve q fonksiyonları bir $A \subset \mathbb{R}$ bölgesinde tanımlı fonksiyonlardır [1].

2.2. Birinci Basamaktan Lineer Diferensiyel Denklemler

2.2.1. Tanım

Genel olarak $\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)$ ve $\mathcal{C}(x)$ fonksiyonları bir $A \subset \mathbb{R}$ alt aralığında sürekli fonksiyonlar ve $\mathcal{A}(x) \neq 0$ olmasıyla,

$$\mathcal{A}(x)y' + \mathcal{B}(x)y = \mathcal{C}(x) \quad (2.3)$$

formundaki bir diferensiyel denkleme *birinci basamaktan lineer diferensiyel denklem* denir [1]. (2.3) lineer diferensiyel denklemi $\mathcal{A}(x) \neq 0$ olduğu yerde

$$y' + \mathcal{P}(x)y = \mathcal{Q}(x), x \in I \quad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir. (2.4) denkleminde *birinci basamaktan lineer diferensiyel denklemlerin standart formu* denir. Buradaki $\mathcal{P}(x)$ ve $\mathcal{Q}(x)$ fonksiyonları ise $\mathcal{P}(x) = \frac{\mathcal{B}(x)}{\mathcal{A}(x)}$ ve $\mathcal{Q}(x) = \frac{\mathcal{C}(x)}{\mathcal{A}(x)}$ şeklindedir. (2.4) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = \left(- \int \mathcal{P}(x) dx \right) \left\{ \int \left[\mathcal{Q}(x) \exp \left(\int \mathcal{P}(x) dx \right) \right] dx + c \right\}$$

olarak verilir. Burada c integrasyon sabitidir ve $\lambda(x) = \exp(\int \mathcal{P}(x) dx)$ ifadesi de (2.4) denkleminin integral çarpanı olarak bilinir [1].

Örnek

$$(1 + x^2)y' + 4xy = (1 + x^2)^{-2}, y(0) = 1$$

başlangıç değer problemini ele alalım. İlk olarak, denklemi standart formunda

$$y' + 4x(1 + x^2)^{-1}y = (1 + x^2)^{-3}, \mathcal{P}(x) = 4x(1 + x^2)^{-1}, \mathcal{Q}(x) = (1 + x^2)^{-3}$$

yazalım. Bu durumda denklemin integral çarpanı,

$$\lambda(x) = \exp\left(\int \mathcal{P}(x)dx\right) = \exp\left(\int \frac{4x}{1+x^2}dx\right) = \exp(2\ln(1+x^2)) = (1+x^2)^2$$

olur. Eğer denklemin standart formunun her iki tarafı integral çarpanı ile çarpılırsa,

$$(1+x^2)^2 y' + (1+x^2)^2 \frac{4x}{1+x^2} y = (1+x^2)^2 (1+x^2)^{-3}$$

veya

$$\frac{d}{dx}((1+x^2)^2 x) = (1+x^2)^{-1}$$

denklemini elde edilir. Bu eşitliği dx ile çarpıp her iki tarafın integralini alırsak

$$(1+x^2)^2 y = \int (1+x^2)^{-1} dx = \arctan x + c$$

eşitliği elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa denklemin genel çözümü,

$$y(x) = \frac{\arctan x + c}{(1+x^2)^2}$$

olarak bulunur. Eğer başlangıç koşulunu uygularsak $y(0) = \frac{0+c}{1} = c = 1$ bulunur. Böylece aranan çözüm,

$$y = \frac{\arctan x + 1}{(1+x^2)^2}$$

olarak elde edilir.



3. DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI

Bu kesimde bir diferensiyel denklemin çözümünün kararlılığı ve asimptotik kararlılığı hakkında bilgiler vereceğiz. Bu kavramları açıklayabilmek için ise basit bir örnekle başlayalım.

Örnek

$\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$y'(t) = \alpha y(t), y(t_0) = y_0 \quad (3.1)$$

başlangıç değer problemini ele alalım. $y(t) = ce^{\alpha t}$ bu başlangıç değer probleminin genel çözümüdür. Kabul edelim ki $t_0 = 0$ olsun. O zaman $y(t_0) = y(0) = c = y_0$ olduğundan $y(t) = y_0 e^{\alpha t}$ başlangıç değer probleminin çözümüdür. Diğer taraftan $y = 0$ bu denklemin aşıkâr çözümüdür. Bu yüzden $y_0 = 0$ ise aranan tek çözüm

$$y = 0$$

olur. $y_0 \neq 0$ ise aranan çözüm

$$y = y_0 e^{\alpha t}$$

modelindedir. Şimdi bu durumu irdeleyelim.

1) $\alpha = 0$ ise $y(t) = y_0$ çözüm olur. Bu durumda $y = y_0$ çözümüne (3.1) probleminin kararlı çözümü olur. Çünkü $y(t) = 0$ aşıkâr çözümü ile $y(t) = y_0$ çözümü arasındaki mesafe her t noktasında belli bir değerden küçük kalır.

2) $\alpha > 0$ ise $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \rightarrow \infty$ olduğundan $\lim_{t \rightarrow \infty} y_0 e^{\alpha t} = \begin{cases} +\infty, & y_0 > 0 \\ -\infty, & y_0 < 0 \end{cases}$ olur. Bu durumda $y = y_0 e^{\alpha t}$ çözümüne (3.1) probleminin kararsız çözümü olur. Çünkü $y(t) = 0$ doğrusu ile $y(t) = y_0 e^{\alpha t}$ eğrisi arasındaki mesafe birinde eğri $-\infty$ 'a doğru gittiği için ∞ 'a doğru gidecek, diğerinde eğri $+\infty$ 'a gittiği için aradaki mesafe belli bir t den sonra bir sayıdan küçük kalmayacak ve sürekli artarak büyüyecek.

3) $\alpha < 0$ ise $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \rightarrow 0$ olduğundan $\lim_{t \rightarrow \infty} y_0 e^{\alpha t} = \begin{cases} 0^+, y_0 > 0 \\ 0^-, y_0 < 0 \end{cases}$ olur. Bu durumda $y = y_0 e^{\alpha t}$ çözümüne (3.1) probleminin asimptotik kararlı çözümü olur. Çünkü $y(t) = 0$ aşıkâr çözümü ile $y(t) = y_0 e^{\alpha t}$ çözümü arasındaki mesafenin $t \rightarrow \infty$ limiti 0 olur. Dolayısıyla aralarındaki mesafe belli bir sabitten küçük kalır.

3.1. Sabit Katsayılı Lineer Diferensiyel Denklemlerin Kararlılığı

3.1.1. Lemma

$m \in \mathbb{N}_0$ ile $\alpha > 0$ olmak üzere $t > 0$ için, $t^m e^{-t\alpha} \leq c$ olacak şekilde bir $c = c(\alpha, m) > 0$ sayısı vardır [15].

3.1.2. Lemma

$\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}_0$ ve $\operatorname{Re} \lambda < \sigma$ olsun. Bu durumda her $t > 0$ için $|t^m e^{\lambda t}| \leq c e^{\sigma t}$ olacak şekilde bir $c > 0$ vardır [15].

3.1.3. Lemma

$p(\lambda)$, n . dereceden bir polinom ve $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ ler bu polinomun kökleri olsunlar. O halde eğer her $j = 1, 2, \dots, n$ için $\operatorname{Re} \lambda_j < \sigma$ özelliğini sağlıyorsa $L(D)y = 0$ denkleminin rastgele bir $y(t)$ çözümü için $|y(t)| \leq c e^{\sigma t}$, $t \geq 0$ olacak şekilde $c > 0$ mevcuttur [15].

3.1.4. Tanım

$t \geq 0$ alındığında $x(t) \in \mathbb{R}^n$ olsun ve $x'(t) = f(t, x(t))$ diferensiyel denklemi için f sürekli fonksiyonu ikinci bileşenine göre lokal lipschitzyan olsun. Denklemin $x(t_0) = x_0$ koşuluna uyan maksimal tanımlı çözümünü $t \rightarrow x(t, t_0, x_0)$ ile gösterelim. $\varphi: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de bu diferensiyel denklemin bir çözümü olsun. O halde,

1) Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ varsa öyle ki $|\varphi(t_0) - x_0| < \delta$ olduğunda $|\varphi(t) - x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ özelliği her $t \geq t_0$ için sağlanıyor ise φ çözümüne $[t_0, \infty)$ üzerinde *kararlıdır* denir.

2) Eğer φ çözümü kararlı ve (1) durumundaki gibi her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde bir $\delta_1 < \delta$ vardır öyle ki $|\varphi(t_0) - x_0| < \delta_1$ olduğunda $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t) - x(t, t_0, x_0)| = 0$ oluyor ise φ çözümüne *asimptotik kararlıdır* denir.

3) Eğer her $\delta > 0$ için bir $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki, bir x_0 noktası için $|\varphi(t_0) - x_0| < \delta$ olduğunda öyle bir $t_1 \in [t_0, \infty)$ noktası için $|\varphi(t_1) - x(t_1, t_0, x_0)| \geq \varepsilon$ kalıyorsa φ çözümüne *kararsızdır (kararlı değildir)* denir [2].

3.1.5. Teorem

$\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$ olarak alındığında,

$$P(\mathcal{D})z = z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + a_2 z^{(n-2)} + \dots + a_n z = 0 \quad (3.2)$$

sabit katsayılı lineer diferensiyel denkleminin karşılık gelen karakteristik polinom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

ve a_i ler sabit katsayılar olmak üzere Hurwitz matrisi

$$H_1 = (a_1), H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}, \dots$$

ve bu şekilde devam edilerek n . adımda $j > n$ olduğunda $a_j = 0$ olmak üzere

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda $P(\mathcal{D})z = 0$ denkleminin ait karakteristik denklemin sıfırlarının negatif reel kısımlı yani diferensiyel denkleminin çözümünün asimptotik kararlı olması için ancak ve ancak her $u = 1, 2, \dots, n$ için $\det H_u > 0$ olmasıdır [3].

Örnek

$y'' + 6y' + 3y = 0$ diferensiyel denkleminin çözümünün asimptotik kararlı olduğunu gösterelim. Bu denkleme karşılık gelen karakteristik denklem $\lambda^2 + 6\lambda + 3 = 0$ dır. $a_1 = 6$, $a_2 = 3$ olmak üzere, Hurwitz matrisleri sırasıyla $H_1 = 6 > 0$, $H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ olduğundan $\det H_2 = 18 > 0$ dır. Her $u = 1, 2$ için $\det H_u > 0$ olduğundan verilen denkleme ait karakteristik denkleminin sıfırları negatif reel kısımlıdır. O hâlde verilen denklem asimptotik kararlıdır.

Örnek

$y''' + 2y'' + y' - y = 0$ diferensiyel denkleminin çözümünün kararlı olmadığını gösterelim. Bu diferensiyel denkleme karşılık gelen karakteristik denklem $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ ve $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$ dır. Hurwitz matrisleri sırasıyla $H_1 = a_1 = 2$ olduğundan $\det H_1 = 2 > 0$, $H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ olduğundan $\det H_2 = -1 < 0$, $H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ olduğundan $\det H_3 = -3 < 0$ dır. Her $u = 1, 2, 3$ için $\det H_u > 0$ olmadığından verilen denkleme ait karakteristik denkleminin sıfırları negatif reel kısımlı değildir. O halde verilen denklem kararlı değildir.

3.2. Lineer Sistemlerin Kararlılığı

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

normal formundaki her diferensiyel denklem, n bilinmeyenli denklemden oluşan bir birinci basamaktan sisteme dönüştürülebilir. Şöyle ki

$$y = x_1, y' = x_2, y'' = x_3, \dots, y^{(n-1)} = x_n$$

olarak alırsak diferensiyel denklem,

$$y(t) = x_1$$

$$y'(t) = x_1'(t) = x_2(t)$$

$$y''(t) = x_2'(t) = x_3(t)$$

⋮

$$y^{(n-1)}(t) = x_{n-1}'(t) = x_n(t)$$

$$y^{(n)}(t) = x_n'(t) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

sistemine dönüşür. Eğer özel olarak, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}_{n \times 1}$ olarak tanımlanırsa

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}_{n \times 1} \text{ olur. Böylece yukarıda ulaşılan sistem}$$

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x(t) \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

olmak üzere bir matris denklemi formatında yazabiliriz. Gösterilmiştir ki, $x'(t) = \mathcal{A}(t)x(t)$ denkleminin genel çözümü $x_h(t)$ ve $x'(t) = \mathcal{A}(t)x(t) + \mathcal{G}(t)$ denkleminin bir özel çözümü $x_p(t)$ ise $x'(t) = \mathcal{A}(t)x(t) + \mathcal{G}(t)$ denklemin genel çözümü, $x(t) =$

$$x_h(t) + x_p(t) \text{ dir. Burada } \mathcal{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \text{ ve } \mathcal{G}(t) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \end{bmatrix}_{n \times 1} \text{ olarak alınmıştır [3].}$$

3.2.1. Sabit katsayılı lineer sistemlerin kararlılığı

Bu kesimde $\mathcal{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ bir sabit matris ve $t \in I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x(t) \end{bmatrix}_{n \times 1}$

bilinmeyen vektörü için $x'(t) = \mathcal{A}x(t)$ lineer homogen sistemini ele alacağız.

$$x'(t) = \mathcal{A}x(t), x(t_0) = x_0$$

başlangıç değer probleminin çözümü, $e^{\mathcal{A}t}$ matrisi $\mathcal{A}$ sabit matrisine karşılık gelen üstel matris olmak üzere, $x(t) = e^{\mathcal{A}t}x_0$ olduğu bilinmektedir. Bu sistemin bir denge noktası orijin olduğundan denge noktasındaki kararlılık karakterize edilebilir [3].

3.2.1. Teorem

$\mathcal{A}$ matrisi $n \times n$ tipinde bir matris, $\sigma(\mathcal{A})$ da $\mathcal{A}$ matrisinin spektrumu ($\mathcal{A}$ matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesinden oluşan küme) olmak üzere $x'(t) = \mathcal{A}x(t)$ lineer homogen sistemi için aşağıdakiler doğrudur.

- i) Eğer $Re(\sigma(\mathcal{A})) \leq 0$ ve $\mathcal{A}$ nın reel kısmı sıfır olan tüm özdeğerleri basit ise orijin bu denklemin kararlı sabit noktasıdır.
- ii) Eğer $Re(\sigma(\mathcal{A})) < 0$ ise orijin denklemin asimptotik kararlı çözümüdür.
- iii) Eğer $\mathcal{A}$ nın reel kısmı pozitif olan bir özdeğeri varsa orijin denklemin için kararsızdır [2].

3.3. Değişken Katsayılı Sistemlerin Kararlılığı

Bu kısımda $\mathcal{A}(t)$, $[0, \infty)$ üzerinde sürekli olarak alındığında

$$x'(t) = \mathcal{A}(t)x(t) \tag{3.3}$$

sistemini ele alalım.

3.3.1. Teorem

(3.3) sisteminin tüm çözümlerinin kararlı olması için gerek ve yeter şart (3.3) sisteminin tüm çözümlerinin sınırlı olmasıdır [3].

3.3.2. Teorem

$\mathcal{A}$ sabit matris ve $Re(\sigma(\mathcal{A})) < 0$ olsun. $c(t)$ matrisi de $[0, \infty)$ üzerinde sürekli ve

$$\int_0^{\infty} \|c(t)\| dt < \infty$$

özelliği olsun. Bundan dolayı

$$x'(t) = [\mathcal{A} + c(t)]x(t)$$

sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır [3].

3.3.3. Teorem

$\mathcal{A}$ sabit matris ve $Re(\sigma(\mathcal{A})) < 0$ olsun. $K > 0$ ve $\sigma < 0$ sayılarının $\|e^{\mathcal{A}t}\| \leq Ke^{\sigma t}$ olacak şekilde seçelim. $c(t)$ matrisi de $\|c(t)\| \leq c_0 < \frac{-\sigma}{K}$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda,

$$x'(t) = (\mathcal{A} + c(t))x(t)$$

denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır [3].



4. FONKSİYONEL VE DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HYERS-ULAM KARARLILIĞI

1821’de Cauchy “ $\mathcal{F}(x + y) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$ olacak şekilde $\mathcal{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sağlanması için ancak ve ancak $\mathcal{F}(x) = cx$ yazılmasıdır.” olduğunu göstermiştir. Ulam genel fonksiyonel denklemler için “Bir fonksiyonel denklemin yaklaşık çözümü varsa, bu çözüme yakın olan denklemin tam çözümü bulunabilir mi?” sorusunu ortaya koyduğu 1940 yılından bu yana son 80 yılda yapılan çeşitli araştırmaları incelenerek bu tür sorunların çözümüne bir açıklama getirilmiştir. Ulam 1940 yılında Wisconsin Üniversitesi Matematik Kulübünde çözülmemiş bazı problemlerin tartışıldığı bir konuşma yapmıştır. Bunlar arasında homomorfizmaların kararlılığı ile ilgili “ $\mathcal{G}_1$ ve $\mathcal{G}_2$, $d(.,.)$ metriğine sahip iki grup olsun. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde

$$d(f(xy), f(x)f(y)) \leq \varepsilon, \text{ her } x, y \in \mathcal{G}_1$$

eşitsizliğini sağlayan $f: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ fonksiyonu için $d(g(x), f(x)) \leq \delta$, her $x, y \in \mathcal{G}_1$ olacak şekilde bir $g: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ homomorfizması var ve $\delta > 0$ bulunabilir mi?” sorusunu da sormuştur. Cevabın olumlu olduğu durumda, fonksiyonel denklemin homomorfizmaları kararlı olarak adlandırılmıştır. Ulam’ın fonksiyonel denklemlerle ilgili sormuş olduğu kararlılık sorusuna ilk olarak $\mathcal{G}_1$ ve $\mathcal{G}_2$ nin Banach uzayları olması için D. H. Hyers kapsamlı bir şekilde cevap vermiş olmasından dolayı fonksiyonel denklemlerin kararlılığının bu formda incelenmesine Hyers-Ulam kararlılığı olarak isim verilmiştir. Elde ettiği sonuç aşağıdaki gibidir.

4.1. Fonksiyonel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı

4.1.1. Tanım

$\mathcal{T}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ dönüşüm olsun. Eğer tüm $x, y \in \mathcal{X}$ için $\|\mathcal{T}(x + y) - \mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y)\| < \delta$ olması durumunda $\delta > 0$ değeri mevcutsa $\mathcal{T}$ operatörüne δ – toplamsaldır denir [4].

4.1.2. Teorem

E ve E' birer Banach uzayı olmak üzere, $f: E \rightarrow E'$ ve δ – toplamsal bir dönüşüm olduğunda tüm $x \in E$ olarak alınırsa

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} \quad (4.1)$$

limiti vardır, $\ell(x)$ bir toplamsal dönüşümdür ve $\|f(x) - \ell(x)\| \leq \delta$ eşitsizliği her $x \in E$ için sağlanır. Ayrıca $\ell(x)$ bu eşitsizliği sağlayan tek toplamsal dönüşümdür [4].

Rassias, Cauchy $f(x+y) - f(x) - f(y)$ farkının koşulunu değiştirerek toplamsal fonksiyonel denklemler için Hyers-Ulam kararlılığını aşağıdaki teorem ile ispatlamıştır [17].

4.1.3. Teorem

$\varepsilon > 0$ ve $p \in [0,1)$ olmak üzere E_1 ve E_2 Banach uzayları olsun. Her $x, y \in E_1$ için $f: E_1 \rightarrow E_2$ fonksiyonu,

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

eşitsizliğini sağlasın. Herhangi bir $x \in E_1$ için

$$\|f(x) - \ell(x)\| \leq \frac{2\varepsilon}{2-2^p} \|x\|^p$$

olacak şekilde $\ell: E_1 \rightarrow E_2$ toplamsal dönüşümü vardır. Ayrıca her sabit $x \in E_1$ için $f(tx)$, t de sürekli ise ℓ lineer dönüşümdür [17].

Bu teorem, Teorem 4.1.2.'nin bir genellemesidir ve matematikçilerin ilgisini fonksiyonel denklemlerin kararlılık problemlerinin çalışmasına yönlendirmeye teşvik etmiştir. Rassias, Teorem 4.1.3.'ün $p < 0$ için de sağladığını fark etmiştir ve böyle bir teoremin $p > 1$ için de ispatlanıp ispatlanmayacağını sormuştur. Gajda ise bu soruya (4.1) limitinde n yerine $-n$ ile alınarak kanıtlanabileceğini söyleyerek yanıt vermiştir. Gajda, Teorem 4.1.3.'ün $p = 1$

noktası için genelleştirilemeyeceği tek kritik p değeri olduğunu söylemiştir ve aksine örnek oluşturarak $p = 1$ için yanlış olduğunu göstermiştir [17].

4.1.4. Teorem

$\varepsilon > 0$ ve $\mu = (1/6)\varepsilon$ olsun. $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$\phi(x) = \begin{cases} \mu, & x \in [1, \infty) \text{ için} \\ \mu x, & x \in (-1, 1) \text{ için} \\ -\mu, & x \in (-\infty, -1] \text{ için} \end{cases}$$

fonksiyonu olmak üzere $\mathcal{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(2^n x)}{2^n}, x \in \mathbb{R}$$

fonksiyonu tanımlansın. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için f fonksiyonu

$$|\mathcal{F}(x + y) - \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)| \leq \varepsilon(|x| + |y|)$$

sağlasın. Ancak $\delta \in [0, \infty)$ sabiti ve her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|\mathcal{F}(x) - \ell(x)| \leq \delta|x|$$

koşulunu sağlayan $\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ toplumsal dönüşümü yoktur. Yukarıdaki teorem $\mathcal{F}$ fonksiyonu $p = 1$ noktası için aksine örnek olmuştur [17].

4.2. $y' = y$ Diferansiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı

Diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam anlamında kararlılık problemi üzerine çalışmanın başlangıç noktası Obloza'nın olup bu problem üzerine ilk önemli çalışma Alsina ve Ger'in makalesidir [5]. Daha sonra diferansiyel denklemler için Hyers-Ulam kararlılığı Miura, Miyajima, Takahasi ve Choda tarafından genelleştirilmiştir. Şimdi birinci basamaktan

değişkenlerine ayrılabilen tipten diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını inceleyelim.

4.2.1. Tanım

$\varepsilon > 0$ verilmiş bir sayı, $f: \mathcal{A} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı türevlenebilir bir fonksiyon olduğunda, $|f'(x) - f(x)| < \varepsilon$, her $x \in \mathcal{A}$ için eşitsizliği sağlansın. Eğer bir $k > 0$ sayısı için $|f(x) - y(x)| \leq k\varepsilon$ ve $y'(x) = y(x)$ özelliği sağlanacak şekilde $y(x)$ ve $k \geq 0$ bulunabiliyorsa $y' = y$ denkleminde *Hyers-Ulam anlamında kararlıdır* denir [14].

4.2.2. Sonuç

$\varepsilon > 0$ verilsin. I , $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olsun. Tüm $t \in I$ için $\|u(t) - u'(t)\| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir dönüşümü için $v'(t) = v(t)$ ve tüm $t \in I$ için $\|u(t) - v(t)\| \leq 3\varepsilon$ olması durumunda bir $v: I \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonu vardır [5]. Bu sonuç, birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemin kararlılığını ve yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemi, kesirli integro-diferansiyel denklemi, Euler'in diferansiyel denklemlerini, zaman skalası üzerinde lineer dinamik denklemleri desteklemiştir [5].

4.3. $y' = \lambda y$ Diferansiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı

$\mathcal{X} \neq \{ \}$ bir kompleks Banach uzayı, $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon \geq 0$ verilmiş olsun. I da $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olsun.

4.3.1. Tanım

Eğer her $\|\varphi'(t) - \lambda\varphi(t)\| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan φ türevlenebilir fonksiyonu için $\|\varphi(t) - e^{\lambda t} x_\varphi\| \leq k\varepsilon$, $k > 0$ olacak şekilde $y' = \lambda y$ denkleminin bir $x_\varphi \in \mathcal{X}$ çözümü varsa $y' = \lambda y$ diferansiyel denkleminde I üzerinde *Hyers-Ulam anlamında kararlıdır* denir [17].

$y' = \lambda y$ diferansiyel denkleminin genel çözümünün $e^{\lambda t} x$, $x \in \mathcal{X}$ formundadır. Eğer

$$m(I, \lambda) = \inf\{e^{-Re\lambda t} : t \in I\},$$

$$M(I, \lambda) = \sup\{e^{-Re\lambda t} : t \in I\}$$

olarak tanımlarsak $0 \leq m(I, \lambda) \leq \infty$ ve $0 \leq M(I, \lambda) \leq \infty$ olduğu açıktır [6].

4.3.2. Teorem

$\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$ yukarıda verilen terimler ve $\varphi: I \rightarrow X$, $\|\varphi'(t) - \lambda\varphi(t)\| \leq \varepsilon$ özelliğinde bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $Re\lambda \neq 0$ ise, $\|\varphi(t) - e^{\lambda t}x_\varphi\| \leq \frac{1}{|Re\lambda|} \left(1 - \frac{m(I, \lambda)}{M(I, \lambda)}\right) \varepsilon$ olacak şekilde $t \in I$, $x_\varphi \in X$ vardır.

Özel olarak $m(I, \lambda) = 0$ ise x_φ elemanı $\sup_{t \in I} \|\varphi(t) - e^{\lambda t}x_\varphi\| < \infty$ olacak şekilde tektir.

ii) $Re\lambda = 0$ ve I nın çapı $\delta(I) < \infty$ ise $\|\varphi(t) - e^{\lambda t}x_\varphi\| < \varepsilon\delta(I)$ olacak şekilde $x_\varphi \in X$ vardır.

iii) $Re\lambda = 0$ ve $\delta(I) = \infty$ ise $y' = \lambda y$ diferensiyel denklemi Hyers-Ulam anlamında kararlı değildir [6].

İspat

$\mathcal{X}^*$ ile $\mathcal{X}$ in dual uzayını gösterelim. $\mathcal{X}^* = \{f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}, \text{sürekli}\} = \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ olsun. Herhangi $f \in \mathcal{X}^*$ için $\varphi_f: I \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $(\varphi_f)(t) := f(\varphi(t))$, $t \in I$ olarak tanımlayalım. $(\varphi_f)'(t) = f(\varphi'(t))$ olacak şekilde bir f elemanı alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} |(\varphi_f)'(t) - \lambda(\varphi_f)(t)| &= |f(\varphi'(t)) - \lambda f(\varphi(t))| \\ &= |f(\varphi'(t)) - f(\lambda\varphi(t))| \\ &\leq \|f\| |\varphi'(t) - \lambda\varphi(t)| \\ &\leq \varepsilon \|f\| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$h(t) := e^{-\lambda t}(\varphi_f)(t)$$

şeklinde tanımlayalım.

$$h'(t) = -\lambda e^{-\lambda t}(\varphi_f)(t) + e^{-\lambda t}(\varphi_f)'(t) = e^{-\lambda t}\{(\varphi_f)'(t) - \lambda(\varphi_f)(t)\}$$

eşitliğini elde edilir. Buradan

$$|h'(t)| \leq \varepsilon \|f\| |e^{-\lambda t}|$$

eşitsizliği sağlanır. Hesabın temel teoreminden

$$\int_s^t h'(\tau) d\tau = h(t) - h(s)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |h(t) - h(s)| &= \left| \int_s^t h'(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_s^t |h'(\tau)| d\tau \\ &\leq \varepsilon \|f\| \int_s^t |e^{-\lambda \tau}| d\tau \\ &\leq \varepsilon \|f\| \int_s^t e^{-\operatorname{Re} \lambda \tau} d\tau \\ &= \frac{\varepsilon \|f\|}{-\operatorname{Re} \lambda} (e^{-(\operatorname{Re} \lambda)t} - e^{-(\operatorname{Re} \lambda)s}) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

i) Kabul edelim ki $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ olsun. Buna göre yukarıda elde ettiğimiz eşitsizlikten her $s, t \in I$ için

$$\begin{aligned}
\left| f \left(e^{-\lambda t} \varphi(t) - e^{-\lambda s} \varphi(s) \right) \right| &\leq \frac{\varepsilon \|f\|}{|Re\lambda|} |e^{-(Re\lambda)t} - e^{-(Re\lambda)s}| \\
\|f\| \|e^{-\lambda t} \varphi(t) - e^{-\lambda s} \varphi(s)\| &\leq \frac{\varepsilon \|f\|}{|Re\lambda|} |e^{-(Re\lambda)t} - e^{-(Re\lambda)s}| \\
\|e^{-\lambda t} \varphi(t) - e^{-\lambda s} \varphi(s)\| &\leq \frac{\varepsilon}{|Re\lambda|} |e^{-(Re\lambda)t} - e^{-(Re\lambda)s}|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer

$$e^{-(Re\lambda)s} \searrow m(I, \lambda)$$

ise $e^{-\lambda s} \varphi(s)$ fonksiyonu X kümesi üzerinde yakınsak olur. $e^{-\lambda s} \varphi(s)$ fonksiyonunun yakınsadığı değere $x_\varphi \in X$ diyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t) - e^{-\lambda t} x_\varphi\| &= \|e^{\lambda t} (e^{-\lambda t} \varphi(t) - x_\varphi)\| \\
&= |e^{(Re\lambda)t}| \|e^{-\lambda t} \varphi(t) - x_\varphi\| \\
&= e^{(Re\lambda)t} \|e^{-\lambda t} \varphi(t) + e^{-\lambda s} \varphi(s) - e^{-\lambda s} \varphi(t) - x_\varphi\| \\
&\leq e^{(Re\lambda)t} \|e^{-\lambda t} \varphi(t) + e^{-\lambda s} \varphi(s)\| + e^{(Re\lambda)t} \|e^{-\lambda s} \varphi(s) - x_\varphi\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{|Re\lambda|} e^{(Re\lambda)t} |e^{-(Re\lambda)t} - e^{-(Re\lambda)s}| \\
&= \frac{\varepsilon}{|Re\lambda|} \left(1 - \frac{e^{-(Re\lambda)s}}{e^{-(Re\lambda)t}} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi kabul edelim ki $x \in X$ elemanı $\sup_{t \in I} |\varphi(t) - e^{\lambda t}| = c < \infty$

olacak şekilde olsun. Eğer $m(I, \lambda) = 0$ ise

$$\begin{aligned}
\|x - x_\varphi\| &\leq |e^{-\lambda t}| \{ \|e^{\lambda t} x - \varphi(t)\| + \|\varphi(t) - e^{\lambda t} x_\varphi\| \} \\
&\leq e^{-(Re\lambda)t} \left(c + \frac{\varepsilon}{|Re\lambda|} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $t \rightarrow \infty$ için $e^{-(Re\lambda)t} \rightarrow 0$ olduğundan $\|x - x_\varphi\| \rightarrow 0$ olur ki buradan $x = x_\varphi$ olmalıdır.

ii) Şimdi $Re\lambda = 0$ ve I nın çapı $\delta(I) < \infty$ olsun. Bu durumda daha önce elde ettiğimiz

$|h(t) - h(s)| \leq \varepsilon \|\mathcal{F}\| \int_s^t e^{-(\operatorname{Re}\lambda)\tau} d\tau$ eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(e^{-\lambda t} \varphi(t) - e^{-\lambda s} \varphi(s))| &\leq \varepsilon \|\mathcal{F}\| \int_s^t e^{-(\operatorname{Re}\lambda)\tau} d\tau \\ &\leq \varepsilon \|\mathcal{F}\| |t - s| \\ &\leq \varepsilon \|\mathcal{F}\| \delta(I) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\operatorname{Re}\lambda = 0$ için

$$\begin{aligned} \|e^{-\lambda t} \varphi(t) - e^{-\lambda s} \varphi(s)\| &\leq \|e^{-\lambda t} (\varphi(t) - e^{\lambda t} e^{-\lambda s} \varphi(s))\| \\ &\leq \|\varphi(t) - e^{\lambda t} e^{-\lambda s} \varphi(s)\| \\ &\leq \varepsilon \delta(I) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (i) durumunun ispatında $e^{-\lambda s} \varphi(s)$ fonksiyonunun yakınsadığı değeri x_φ olarak almıştık. O hâlde, $\|\varphi(t) - e^{\lambda t} x_\varphi\| < \varepsilon \delta(I)$ elde edilir.

iii) Eğer $\operatorname{Re} \neq 0$ ve $\delta(I) = \infty$ ise bu durumda $\|x_0\| = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathcal{X}$ bulabiliriz. $\varphi_0(t) = \varepsilon t e^{\lambda t} x_0$, $t \in I$ olarak tanımlayalım. O zaman

$$\begin{aligned} \|\varphi'_0(t) - \lambda \varphi_0(t)\| &= \|\varepsilon e^{\lambda t} x_0 + \varepsilon \lambda t e^{\lambda t} x_0 - \varepsilon \lambda t e^{\lambda t} x_0\| \\ &\leq \varepsilon |e^{\lambda t}| \|x_0\| \\ &\leq \varepsilon e^{(\operatorname{Re}\lambda)t} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Kabul edelim ki $k \geq 0$ ve $y_0 \in \mathcal{X}$ için $\|\varphi_0(t) - e^{\lambda t} y_0\| \leq k\varepsilon$ sağlansın. Bu durumda

$$|\varepsilon|t| \|x_0\| - \|y_0\|| \leq \|\varepsilon t x_0 - y_0\| \leq k\varepsilon$$

eşitsizliğinde her iki tarafı ε ile bölersek

$$|t| \leq k + \frac{\|y_0\|}{\varepsilon}$$

olup $k + \frac{\|y_0\|}{\varepsilon}$ toplamı sonlu olduğundan $\delta(I) = \infty$ olması ile çelişir. Böylece $y' = \lambda y$ diferensiyel denklemi Hyers-Ulam anlamında kararlı olamaz.

4.4. $y' + g(t)y = 0$ Diferensiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı

$\mathcal{X}$ reel veya kompleks Banach Uzayı ve $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olduğunda

$$\mathcal{C}(\mathcal{I}, \mathcal{X}) = \{f | f: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{X}, \text{sürekli} \}$$

$$\mathcal{C}^1(\mathcal{I}, \mathcal{X}) = \{f | f: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{X}, \text{sürekli ve türevlenebilir} \} \subset \mathcal{C}(\mathcal{I}, \mathcal{X})$$

ve

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(t)| : t \in \mathcal{I}\}$$

olsun. $T_h: \mathcal{C}^1(\mathcal{I}, \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{I}, \mathcal{X})$ lineer operatörünü $T_h u = u' + hu$ olarak tanımlayalım.

$\lambda(t) = e^{\int_0^t h(s)ds}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda, $u(t) := \frac{1}{\lambda(t)} \int_0^t \lambda(s)v(s)ds$ fonksiyonu $T_h u = v$ denklemini sağlar. Hakikaten,

$$u'(t) = -\frac{\lambda'(t)}{\lambda^2(t)} \int_0^t \lambda(s)v(s)ds + \frac{1}{\lambda(t)} \frac{d}{dt} \int_0^t \lambda(s)v(s)ds$$

sağlanır. Burada

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \lambda(s)v(s)ds = \lambda(t)v(t)$$

olduğundan,

$$u'(t) = -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} \frac{1}{\lambda(t)} \int_0^t \lambda(s)v(s)ds + v(t)$$

olarak yazılabilir.

$$u(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \int_0^t \lambda(s) v(s) ds$$

olduğundan

$$u'(t) = -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} u(t) + v(t)$$

olur. $\lambda'(t)$, $\lambda(t)$ yerlerine yazılırsa

$$u'(t) = -\frac{h(t) e^{\int_0^t h(s) ds}}{e^{\int_0^t h(s) ds}} u(t) + v(t)$$

eşitliğine ulaşılır. Sadeleştirmeler yapılırsa

$$u'(t) + h(t)u(t) = v(t)$$

eşitliği elde edilir. Bu ise

$$T_h u = v(t)$$

olduğunu gösterir. Tersine, $T_h u = v$ denkleminin genel çözümü

$$u(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \left\{ y_0 + \int_0^t \lambda(s) v(s) ds \right\}, y_0 \in \mathcal{X}$$

olarak yazılabilir [14].

4.4.1. Tanım

Eğer aşağıdakiler sağlanacak şekilde bir $k \geq 0$ sayısı varsa $\mathcal{T}_h$ operatörüne *Hyers-Ulam anlamında kararlıdır* denir.

$\|\mathcal{T}_h u - v\| \leq \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlayan tüm $\varepsilon \geq 0$, $v \in C(J, X)$, $u \in C^1(J, X)$ fonksiyonları için bir $u_0 \in C^1(J, X)$ vardır ki $\mathcal{T}_h u_0 = v$ ve $\|u - u_0\|_\infty \leq k\varepsilon$ sağlanır. Burada $k \geq 0$ sabitine $\mathcal{T}_h u$ operatörüne karşılık gelen *Hyers-Ulam kararlılık sabiti* denir. Eğer $\min\{k\}$ değeri varsa bu değere $\mathcal{T}_h u$ operatörünün *Hyers-Ulam Kararlılık Sabiti* denir [7]. Özel olarak $X = \mathbb{R}$ ve $h(t) = -1$ seçersek $\mathcal{T}_h u = 0$ denklemi $u' = u$ denklemine indirgenir ve bu Durum 4.2.'de incelenmiştir. Benzer şekilde $X \neq \{0\}$ bir Kompleks Banach Uzayı ve $h(t) = -\lambda \in \mathbb{C}$ seçilirse $\mathcal{T}_h u = 0$ denklemi $u' = \lambda u$ denklemine indirgenir ve bu Durum 4.3.'de incelenmiştir.

Kabul edelim ki $X \neq \{0\}$ bir Banach uzayı ve $t \in \mathbb{R}$ olduğunda $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\tilde{g}(t) = e^{\int_0^t g(s)ds}$$

sürekli bir fonksiyon olsun.

$$C_g := \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{|\tilde{g}(t)|} \int_t^\infty |\tilde{g}(s)| ds$$

$$D_g := \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{|\tilde{g}(t)|} \int_{-\infty}^t |\tilde{g}(s)| ds$$

$$E_g := \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{|\tilde{g}(t)|} \int_0^t |\tilde{g}(s)| ds$$

olarak tanımlayalım. Burada C_g , D_g ve E_g değerlerinin sonlu olmaları üzerine bir kısıtlama yoktur [14].

4.4.2. Teorem

$\hbar: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli ve $\mathcal{T}_\hbar: C'(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ lineer operatörü

$$(\mathcal{T}_\hbar u)(t) = u'(t) + \hbar(t)u(t)$$

olarak tanımlansın. Kabul edelim ki C_h , D_h ve E_h değerlerinden biri sonlu olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_h$ operatörü Hyers-Ulam anlamında kararlılığa sahiptir. İlaveten, $C_h < \infty$ veya $D_h < \infty$ ise $\|\mathcal{T}_h u - v\| < \infty$ eşitsizliğini sağlayan her $v \in C(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ ve $u \in C'(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ için bir $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ vardır ki $\mathcal{T}_h u_0 = v$ ve $\|u - u_0\|_\infty \leq \infty$ sağlanır [7].

İspat

Kabul edelim ki $\varepsilon \geq 0$, $v \in C(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ ve $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ için $\|\mathcal{T}_h u - v\| \leq \varepsilon$ sağlansın.

$w := \mathcal{T}_h u - v$ diyelim. Bu durumda $\mathcal{T}_h u = v + w$ olur.

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\check{\hbar}(t)} \left\{ u(0) + \int_0^t \check{\hbar}(s)(v(s) + w(s))ds \right\} \\ u(t) &= \frac{1}{\check{\hbar}(t)} \int_0^t \check{\hbar}(s)v(s)ds + \frac{1}{\check{\hbar}(t)} \left\{ u(0) + \int_0^t \check{\hbar}(s)w(s)ds \right\} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. İlk olarak, $C_h < \infty$ olduğunu kabul edelim, $\|w\| \leq \varepsilon$ olduğundan

$$\int_0^\infty \check{\hbar}(t)w(t)dt \in \mathcal{X}$$

dir. Bu yüzden her $t \in \mathbb{R}$ için

$$u(t) = \frac{1}{\check{\hbar}(t)} \int_0^t \check{\hbar}(s)v(s)ds + \frac{1}{\check{\hbar}(t)} \left\{ u_0 + \int_0^\infty \check{\hbar}(s)w(s)ds \right\} - \frac{1}{\check{\hbar}(t)} \left\{ \int_t^\infty \check{\hbar}(s)w(s)ds \right\}$$

olarak yazabiliriz. Her $t \in \mathbb{R}$ için

$$x_0 := u(0) + \int_0^\infty \check{h}(s)w(s)ds$$

ve

$$u_0(t) := \frac{1}{\check{h}(t)} \left\{ x_0 + \int_0^t \check{h}(s)v(s)ds \right\}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda,

$$\mathcal{T}_h u_0 = v$$

sağlanır.

$$u(t) = u_0(t) - \frac{1}{\check{h}(t)} \int_t^\infty \check{h}(s)w(s)ds$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_0(t)\| &= \frac{1}{|\check{h}(t)|} \left\| \int_t^\infty \check{h}(s)w(s)ds \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|\check{h}(t)|} \left\| \int_t^\infty \check{h}(s)ds \right\| \\ &\leq \varepsilon C_h \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde $\mathcal{T}_h$ operatörü Hyers-Ulam anlamında kararlıdır ve C_h sabiti de bir Hyers-Ulam kararlılık sabitidir. $D_h < \infty$ olduğunu kabul edelim. $\|w\| \leq \varepsilon$ (sınırlı) olduğundan

$$\int_{-\infty}^0 \tilde{h}(t)w(t)dt \in \mathcal{X}$$

dir. Bu yüzden her $t \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} u(t) = \frac{1}{\tilde{h}(t)} \int_0^t \tilde{h}(s)v(s)ds + \frac{1}{\tilde{h}(t)} \left\{ u(0) - \int_{-\infty}^0 \tilde{h}(s)w(s)ds \right\} \\ + \frac{1}{\tilde{h}(t)} \left\{ \int_{-\infty}^t \tilde{h}(s)w(s)ds \right\} \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Her $t \in \mathbb{R}$ için,

$$x_1 := u(0) - \int_{-\infty}^0 \tilde{h}(s)w(s)ds$$

ve

$$u_1(t) := \frac{1}{\tilde{h}(t)} \left\{ x_1 + \int_0^t \tilde{h}(s)v(s)ds \right\}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda, $\mathcal{J}_h u_1 = v$ sağlanır ve

$$u(t) = u_1(t) + \frac{1}{\tilde{h}(t)} \int_{-\infty}^t \tilde{h}(s)w(s)ds$$

dir. Böylece

$$\|u(t) - u_1(t)\| = \frac{1}{|\tilde{h}(t)|} \left\| \int_{-\infty}^t \tilde{h}(s)w(s)ds \right\|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{|\tilde{h}(t)|} \int_{-\infty}^t |\tilde{h}(s)| ds$$

$$\leq \varepsilon D_h$$

eşitsizliği sağlanır. O hâlde $\mathcal{T}_h$ operatörü Hyers-Ulam anlamında kararlıdır ve D_h sabiti de bir Hyers-Ulam kararlılık sabitidir.

Şimdi de $E_h < \infty$ olması durumunu ele alalım.

$$u_2(t) := \frac{1}{\tilde{h}(t)} \left\{ u(0) + \int_0^t \tilde{h}(s) v(s) ds \right\}, t \in \mathbb{R}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $\mathcal{T}_h u_2 = v$ sağlanır.

$$\|u(t) - u_2(t)\| = \frac{1}{|\tilde{h}(t)|} \left\| \int_0^t \tilde{h}(s) w(s) ds \right\|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{|\tilde{h}(t)|} \left| \int_0^t |\tilde{h}(s)| ds \right|$$

$$\leq \varepsilon E_h$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla D_h operatörü Hyers-Ulam anlamında kararlıdır ve E_h sabitide bir Hyers-Ulam kararlılık sabitidir.

Son olarak kabul edelim ki $C_h < \infty$ veya $D_h < \infty$ olsun. Bu durumda $u_0(t)$ nin tek olduğunu göstermeliyiz. Bunu göstermek için, $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ ve $v \in C(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ için $u_3(t)$ ve $u_4(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ fonksiyonları $\mathcal{T}_h u_j = v$ ve $\|u - u_j\| \leq M_j < \infty, (j = 3, 4)$ özelliklerini sağlasınlar. $\mathcal{T}_h u_j = v$ sağlandığından

$$u_j(t) = \frac{1}{\tilde{h}(t)} \left\{ x_j + \int_0^t \tilde{h}(s) v(s) ds \right\}$$

olacak şekilde x_j ler bulabiliriz. Buna göre

$$x_j = \tilde{h}(t)u_j(t) - \int_0^t \tilde{h}(s)v(s)ds$$

olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} \|x_3 - x_4\| &= \left\| \left(\tilde{h}(t)u_3(t) - \int_0^t \tilde{h}(s)v(s)ds \right) - \left(\tilde{h}(t)u_4(t) - \int_0^t \tilde{h}(s)v(s)ds \right) \right\| \\ &= \|\tilde{h}(t)u_3(t) - \tilde{h}(t)u_4(t)\| \\ &= |\tilde{h}(t)| \|u_3(t) - u_4(t)\| \\ &= |\tilde{h}(t)| \|u_3(t) - u_4(t) + u(t) - u(t)\| \\ &\leq |\tilde{h}(t)| (\|u(t) - u_3(t)\| + \|u(t) - u_4(t)\|) \\ &\leq |\tilde{h}(t)| (M_3 + M_4) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $|\tilde{h}(t)|$ nin $(-\infty, 0]$ veya $[0, \infty)$ üzerinde integrallenebilir olduğunu kullanarak $\inf_{t \in \mathbb{R}} |\tilde{h}(t)| = 0$ bulunur. Bu yüzden $x_3 = x_4$ olmalıdır. Bu da $x_3 = x_4$ demektir.

4.5. $y' + p(t)y = q(t)$ Diferensiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı

Burada $y \in C^1(I)$, $I = [t_0, t_1]$, $-\infty < t_0 < t_1 \leq \infty$ alındığında,

$$y' + p(t)y = q(t) \tag{4.7}$$

$$y(t_0) = y_0 \tag{4.8}$$

başlangıç değer probleminin Hyers-Ulam anlamında kararlılığını inceleyeceğiz.

4.5.1. Tanım

$|y' + p(t)y - q(t)| \leq \varepsilon \varphi(t)$ eşitsizliği $\varepsilon \geq 0$, $y \in C^1(I)$ ve uygun bir $\varphi(t)$ pozitif tanımlı fonksiyonu için sağlansın. Eğer (4.7)-(4.8) problemini sağlayan bir $x(t) \in C^1(I)$ fonksiyonu için $|y(t) - x(t)| \leq K\varepsilon \varphi(t)$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı varsa (4.7)-(4.8)

problemine *Hyers-Ulam-Rassias (HUR) anlamında kararlıdır* denir [8].

4.5.2. Tanım

Bir $\varepsilon \geq 0$ verilsin ve bir $y \in C^1(I)$ fonksiyonu $|y' + p(t)y - q(t)| \leq \varepsilon \varphi(t)$ eşitsizliğini uygun bir $\varphi(t)$ pozitif tanımlı bir fonksiyonu için sağlansın. Bu durumda (4.7)-(4.8) probleminin bir $x(t) \in C^1(I)$ çözümü var ve $|y(t) - x(t)| \leq K\varepsilon \varphi(t)$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $K > 0$ sayısı bulunabiliyor ve $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - y(t)) = 0$ oluyor ise (4.7) denklemine *Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta (HURG) anlamında kararlıdır* denir [8].

4.5.3. Teorem

Eğer $p(t)$ ve $q(t)$ fonksiyonları I üzerinde sürekli ve $y \in C^1(I)$ fonksiyonu (4.7) denkleminin (4.8) koşulunu sağlayan bir yaklaşık çözümü ise (4.7)-(4.8) problemi Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır [8].

4.5.4. Teorem

$p(t), q(t) \in C(\mathbb{R}), p(t) \geq c > 0$ ve $y \in C^1(\mathbb{R})$ fonksiyonu (4.7) denkleminin (4.8) koşulunu sağlayan bir yaklaşık çözümü ise (4.7)-(4.8) problemi Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta anlamında kararlıdır [8].



5. ZAMAN SKALASI KAVRAMI VE ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE HESAP

İlk defa 1998 yılında Stefen Hilger ele aldığı fiziksel problemin analizini yapabilmek için fark analiziyle sürekli analizin birleştirilmesi gerektiğini fark etmiştir. Zaman skalası kavramı da bundan sonra ortaya çıkmıştır.

5.1. Temel Tanım ve Kavramlar

5.1.1. Tanım

$\mathbb{R}$ reel sayıların, boş olmayan her kapalı olan alt kümesine bir *zaman skalası* denir. Zaman skalasının gösterimi $\mathbb{T}$ şeklindedir. Buradaki küme üzerindeki metrik, reel sayılardaki alışılmış metrik olarak alınacaktır. Kısacası $s, t \in \mathbb{T}$ olduğunda $d(s, t) = |s - t|$ olarak alınacaktır [9].

Örnek

Reel sayılar, tam sayılar, doğal sayılar, pozitif doğal sayılar, $[0,10]$, $\{1\}$, $[0,10] \cup \{1\}$ kümeleri bir zaman skalasıdır. $(1,5)$, $[1,5)$, rasyonel sayılar kümeleri zaman skalası değildir.

5.1.2. Tanım

Zaman skalasını $\mathbb{T}$ ile gösterelim. $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ *ileri sıçrama operatörü*,

$$\sigma(t) = \begin{cases} \inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\}, & t \neq \sup \mathbb{T} \text{ ise} \\ t, & t = \sup \mathbb{T} \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde verilir. Buna bağlı olarak $t \in \mathbb{T}$ için $\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ *geri sıçrama operatörü*,

$$\rho(t) = \begin{cases} \sup\{s \in \mathbb{T}: s < t\}, & t \neq \inf \mathbb{T} \text{ ise} \\ t, & t = \inf \mathbb{T} \text{ ise} \end{cases}$$

ile verilir [9].

Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $\sigma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ olmak üzere ileri sıçrama operatörü

$$\begin{aligned}\sigma(m) &= \begin{cases} \inf\{s \in \mathbb{Z}: s > m\}, & m \neq \sup\mathbb{Z} \text{ ise} \\ m, & m = \sup\mathbb{Z} \text{ ise} \end{cases} \\ &= \inf[m+1, m+2, m+3, \dots] \\ &= m+1 \text{ (} m \text{'den } m+1 \text{'e sıçramış oldu)}\end{aligned}$$

ve geri sıçrama operatörü

$$\begin{aligned}\rho(m) &= \begin{cases} \sup\{s \in \mathbb{Z}: s < m\}, & m \neq \inf\mathbb{Z} \text{ ise} \\ m, & m = \inf\mathbb{Z} \text{ ise} \end{cases} \\ &= \sup(\dots, m-3, m-2, m-1] \\ &= m-1 \text{ (} m \text{'den } m-1 \text{'e geri sıçramış oldu)}\end{aligned}$$

olur.

5.1.3. Tanım

$\mathbb{T}$ zaman skalası olmak üzere,

$$\mu: \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty), t \rightarrow \mu(t) = \sigma(t) - t$$

granül (graininess) fonksiyonu olarak tanımlanır [9].

5.1.4. Tanım (Noktanın Karakterizasyonu)

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $t \in \mathbb{T}$ olsun. Tanım 5.1.2.'e göre zaman skalasının elemanları

- i) $\sigma(t) = t$, $t \neq \sup\mathbb{T}$ ve $t < \sup\mathbb{T}$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sağ yoğun nokta* denir.
- ii) $\sigma(t) > t$ ve $t < \sup\mathbb{T}$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sağ saçılımlı nokta* denir.
- iii) $\rho(t) = t$, $t \neq \inf\mathbb{T}$ ve $t > \inf\mathbb{T}$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sol yoğun nokta* denir.
- iv) $\rho(t) < t$ ve $t > \inf\mathbb{T}$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sol saçılımlı nokta* denir.

- v) $\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına *izole (ayrık) nokta* denir.
vi) Ayrıca aynı anda sağ ve sol yoğun noktalara *yoğun nokta* denir.
şeklinde sınıflandırılır [9].

Noktaların sınıflandırılması Çizelge 5.1.'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.1. Noktaların Sınıflandırılması

t sağdan saçılımlı nokta	$\sigma(t) > t$ ve $t < \sup \mathbb{T}$
t sağdan yoğun nokta	$\sigma(t) = t, t \neq \sup \mathbb{T}$ ve $t < \sup \mathbb{T}$
t soldan saçılımlı nokta	$\rho(t) < t$ ve $t > \inf \mathbb{T}$
t soldan yoğun nokta	$\rho(t) = t, t \neq \inf \mathbb{T}$ ve $t > \inf \mathbb{T}$
t izole nokta	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t yoğun nokta	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

Örnek

Aşağıdaki durumları inceleyelim.

- i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa her $t \in \mathbb{R}$ için ileri sıçrama operatörü

$$\begin{aligned}
\sigma(t) &= \begin{cases} \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}, & t \neq \sup \mathbb{T} \text{ ise} \\ t, & t = \sup \mathbb{T} \text{ ise} \end{cases} \\
&= \inf(t, \infty) \\
&= t
\end{aligned}$$

benzer şekilde her $t \in \mathbb{R}$ için geri sıçrama operatörü

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= \begin{cases} \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}, & t \neq \inf \mathbb{T} \text{ ise} \\ t, & t = \inf \mathbb{T} \text{ ise} \end{cases} \\
&= \sup(-\infty, t) \\
&= t
\end{aligned}$$

olur. Burada her $t \in \mathbb{R}$ noktası yoğundur. μ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0$$

olarak bulunur. Dolayısıyla her $t \in \mathbb{R}$ bir yoğun noktadır.

ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alınırsa her $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = t + 1 \text{ ve } \rho(t) = t - 1$$

olduğunu yukarıdaki örnek de inceledik. Dolayısı ile $\mathbb{Z}$ tam sayılardan aldığımız her t noktası izoledir. Ayrıca granül fonksiyonu ise,

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + 1 - t = 1$$

olur.

iii) $\mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ kümesini ele alalım. Yığılma noktası olan 0 kümeye dahil olduğu için kapalı kümedir. $t \in \mathbb{T}$ olsun. O zaman $t = 2^n$ olacak şekilde en az bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde

$$\sigma(t) = 2^{n+1} = 2t$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\rho(t) = 2^{n-1} = \frac{1}{2}t$$

olur. Burada her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = 2t - t = t$$

olur.

iv) $\mathbb{T} = \{\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}_0\}$ olsun. $t \in \mathbb{T}$ olsun. O zaman $t = \sqrt{n}$ olacak şekilde en az bir $n \in \mathbb{N}_0$ vardır. Dolayısıyla

$$\sigma(t) = \sqrt{n+1} = \sqrt{t^2 + 1}$$

olur. Benzer şekilde $n = 0$ için

$$\rho(0) = 0, n \geq 1 \text{ için } \rho(t) = \sqrt{t^2 - 1}$$

olur.

5.1.5. Tanım

$\mathbb{T}$, zaman skalası olsun. Buradan

$$\mathbb{T}^K = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus \{m\}, & m = \sup \mathbb{T} \text{ ve } m \text{ sol saçılımlı ise} \\ \mathbb{T}, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

$$\mathbb{T}_K = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus \{\ell\}, & \ell = \inf \mathbb{T} \text{ ve } \ell \text{ sağ saçılımlı ise} \\ \mathbb{T}, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olarak tanımlanır [9].

Zaman skalasına ait bazı örnekler aşağıdaki Çizelge 5.2.'de belirtilmiştir.

Çizelge 5.2. Zaman Skalasına örnekler

$\mathbb{T}$	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$
$\mathbb{R}$	0	t	t
$\mathbb{Z}$	1	$t + 1$	$t - 1$
$h\mathbb{Z}$	h	$t + h$	$t - h$
$q\mathbb{Z} \cup \{0\}$	$(q - 1)t$	qt	t/q
$\mathbb{N}_0^2$	$2\sqrt{t} + 1$	$(\sqrt{t} + 1)^2$	$\begin{cases} (\sqrt{t} - 1)^2, t \neq 0 \\ 0, t = 0 \end{cases}$

5.2. Delta Türev

5.2.1. Tanım

$\mathbb{T}$, zaman skalası $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $t \in \mathbb{T}^K$ olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki koşulu sağlayacak şekilde bir $f^\Delta(t)$ sayısı bulunabiliyorsa $f^\Delta(t)$ sayısına f fonksiyonunun t noktasındaki Δ - delta türevi (Hilger türevi) denir [9].

Her $\varepsilon > 0$ için t nin bir $U_\delta(t) = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğu vardır ki her $s \in U_\delta(t)$ olmak üzere,

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca her $t \in \mathbb{T}^K$ için $f^\Delta(t)$ var ise $\mathbb{T}^K$ da f fonksiyonuna *delta türevlenebilir* denir. Biz özetle *türevlenebilir* diyeceğiz. Kısaca f fonksiyonunun delta türevini $f^\Delta: \mathbb{T}^K \rightarrow \mathbb{R}$ ile göstereceğiz [9].

Örnek

i) Sabit $c \in \mathbb{R}$ alındığında $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = c$ olarak tanımlanmışsa $f^\Delta(t) \equiv 0$ dır. Hakikaten tüm $s \in \mathbb{T}$ ve $\varepsilon > 0$ için,

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0(\sigma(t) - s)| = |c - c| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

elde edilir.

ii) $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ olarak tanımlanmışsa $f^\Delta(t) \equiv 1$ dir. Hakikaten tüm $s \in \mathbb{T}$ ve $\varepsilon > 0$ için,

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 1(\sigma(t) - s)| = |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

elde edilir.

5.2.2. Teorem

$\mathbb{T}$ üzerinde $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, ve $t \in \mathbb{T}^K$ alalım. O halde aşağıdaki durumlar doğrudur.

- i) f fonksiyonu t noktasında türevlenebiliyorsa t noktasında sürekli olur.
- ii) f fonksiyonu t noktasında sağ saçılımlı ve sürekliyse f fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir ve $f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}$ dir.

- iii) f fonksiyonu t noktasında sağ yoğun ve t noktasında sürekliyse $\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ limitinin mevcut olması halinde $f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ dir.
- iv) f fonksiyonu t noktasında delta türevlenebilirse $f(\sigma(t)) = f(t) - \mu(t)f^\Delta(t)$ sağlanır [9].

İspat

- i) Varsayalım ki f, t noktasında türevlenebilsin. $\varepsilon \in (0,1)$ olsun.

$$\varepsilon^* = \varepsilon [1 + |f^\Delta(t)| + 2\mu(t)]^{-1}$$

tanımlayalım ve $\varepsilon^* \in (0,1)$ alalım. Tanım 5.2.1.'e göre t nin $U_\delta(t)$ komşuluğu vardır öyle ki her $s \in U_\delta(t)$ noktası için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s|$$

olur. Bu nedenle her $s \in U \cap (t - \varepsilon^*, t + \varepsilon^*)$ için

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &= |\{f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]\} \\ &\quad - \{f(\sigma(t)) - f(t) - \mu(t)f^\Delta(t)\} + (t - s)f^\Delta(t)| \\ &\leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s| + \varepsilon^* \mu(t) + |t - s| |f^\Delta(t)| \\ &\leq \varepsilon^* [\mu(t) + |t + s| + \mu(t) + |f^\Delta(t)|] \\ &\leq \varepsilon^* [1 + |f^\Delta(t)| + 2\mu(t)] \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

dır. Böylece f, t noktasında süreklidir.

- ii) Kabul edelim ki f, t de sürekli ve t sağ saçılımlı nokta olsun. Sürekliliğe göre

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

dir. Dolayısıyla verilen $\varepsilon > 0$ için t nin bir $U_\delta(t) = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğu vardır

ki, her $s \in U_\delta(t)$ alınarak

$$\left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \right| \leq \varepsilon$$

sağlanır. Her $s \in U_\delta(t)$ için

$$\left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} [\sigma(t) - s] \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

olur. Dolayısıyla istenen sonuç

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

eşitliği elde edilir.

iii) Kabul edelim ki f , t de sürekli ve t sağ yoğun nokta olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. f fonksiyonunun t noktasında sürekli olduğundan t noktasının bir $U_\delta(t) = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğu vardır ki, her $s \in U_\delta(t)$ alındığında

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

olur. $\sigma(t) = t$ olduğundan her $s \in U_\delta(t)$ için

$$|[f(t) - f(s)] - f^\Delta(t)[t - s]| \leq \varepsilon |t - s|$$

eşitsizliği elde edilir. Tüm $s \in U_\delta(t)$ ve $s \neq t$ olmak üzere

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f^\Delta(t) \right| \leq \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla istenen sonuç

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

elde edilir.

iv) $t \in \mathbb{T}^K$ olduğundan $\sigma(t) = t$ ve $\sigma(t) > t$ olmak üzere iki durum vardır. $\sigma(t) = t$ ise $\mu(t) = \sigma(t) - t = 0$ buradan $f(\sigma(t)) = f(t)$ olur. Bu durumda

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t)$$

sağlanır. $\sigma(t) > t$ ise $\sigma(t) - t \neq 0$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(\sigma(t)) &= f(\sigma(t)) - f(t) \\ &= f(t) + \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}(\sigma(t) - t) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. t sağ saçılımı nokta olduğundan

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}$$

olur. O hâlde

$$\begin{aligned} f(\sigma(t)) &= f(t) + f^\Delta(t)(\sigma(t) - t) \\ &= f(t) + \mu(t)f^\Delta(t) \end{aligned}$$

olur.

Örnek

Aşağıda $\mathbb{T}$ zaman skalasının bazı durumlarını inceleyelim.

i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alalım. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. $t \in \mathbb{R}$ için $\sigma(t) = t$ olduğundan t sağ yoğun noktadır. O hâlde Teorem 5.2. (iii)'den $\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$ limiti varsa

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

olur.

ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. $t \in \mathbb{Z}$ alındığında $\sigma(t) = t + 1 > t$ olduğundan t sağ saçılımlı noktadır.

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+1) - f(t)}{t+1 - t} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

olur.

iii) $\mathbb{T} = \{\sqrt{3n+1} : n \in \mathbb{N}_0\}$, $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olduğunda $f(t) = t^2$ ve $t \in \mathbb{T}$ olduğundan t sağ saçılımlı noktadır.

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma(\sqrt{3n+1}) \\ &= \inf\{s \in \mathbb{T} : s > \sqrt{3n+1}\} \\ &= \inf\{\sqrt{3(n+1)+1}, \sqrt{3(n+2)+1}, \dots\} \\ &= \sqrt{3(n+1)+1} \\ &= \sqrt{3n+4} \\ &= \sqrt{t^2+3} \end{aligned}$$

olur. O hâlde

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= (t^2)^\Delta = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} \\ &= \frac{f(\sqrt{t^2+3}) - f(t)}{\sqrt{t^2+3} - t} \\ &= \frac{t^2 + 3 - t^2}{\sqrt{t^2+3} - t} \\ &= \frac{3}{\sqrt{t^2+3} - t} \end{aligned}$$

dir.

5.2.3. Teorem

$f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı $t \in \mathbb{T}^K$ da delta (Δ) türevli olan iki fonksiyon olarak alalım. O halde,

i) $(f + g): \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilen fonksiyon olduğundan

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$$

dir.

ii) Keyfi bir α sabiti için $\alpha f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilen fonksiyon olduğundan

$$(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t)$$

dir.

iii) $f g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilen fonksiyon olduğundan

$$(f g)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t)$$

dir. Burada $f g = g f$ dir.

iv) Eğer $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}$ türevlenebilen fonksiyon olduğundan

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

elde edilir.

v) Eğer $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

olur [9].

İspat

Kabul edelim ki f ve g fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^K$ da delta(Δ) türevli iki fonksiyon olsun.

i) $t \in \mathbb{T}^K$ olsun. O hâlde, $f^\Delta(t)$ mevcut olduğundan bir $U_{\delta_1}(t)$ vardır ki her $s \in U_{\delta_1}(t)$ alınarak

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s|$$

sağlanır. $g^\Delta(t)$ mevcut olduğundan bir $U_{\delta_2}(t)$ vardır ki her $s \in U_{\delta_2}(t)$ alındığında

$$|g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s|$$

dir. $U_\delta(t) = U_{\delta_1}(t) \cap U_{\delta_2}(t)$ ve her $s \in U_\delta(t)$ olsun. O hâlde

$$\begin{aligned} (f + g)^\Delta(t) &= |(f + g)(\sigma(t)) - (f + g)(s) - (f^\Delta(t) + g^\Delta(t))(\sigma(t) - s)| \\ &\leq |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \\ &\quad + |g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \\ &\leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Böylece $f + g$, t de süreklidir ve $(f + g)^\Delta = f^\Delta + g^\Delta$ elde edilir. Diğer ispatlar benzer şekildedir.

Örnek

$\mathbb{T} = \left\{ \frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N}_0 \right\} \cup \{0\}$ ve $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \sigma(t)$ olmak üzere $\sigma^\Delta(t)$ bulalım. Keyfi bir

$t \in \mathbb{T}^K = \mathbb{T} \setminus \{1\}$ alalım. Bu durumda t ya $\left\{ \frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ kümesine aittir ya da $t = 0$ dır.

Birinci durumda $t = \frac{1}{2n+1}$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}_0$ vardır. Eğer $t = \frac{1}{2n+1}$ ise

$$\sigma(t) = \sigma\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2(n-1)+1} = \frac{1}{2n-1} = \left(\frac{1}{t} - 2\right)^{-1} = \frac{t}{1-2t}$$

elde edilir ve $\sigma(t) > t$ olduğundan t sağ saçılımlıdır. O hâlde

$$\begin{aligned}
 \sigma^\Delta(t) &= \frac{\sigma(\sigma(t)) - \sigma(t)}{\sigma(t) - t} \\
 &= \frac{\frac{\sigma(t)}{1-2\sigma(t)} - \sigma(t)}{\sigma(t) - t} \\
 &= \frac{2(\sigma(t))^2}{(1-2\sigma(t))(\sigma(t) - t)} \\
 &= \frac{2\left(\frac{t}{1-2t}\right)^2}{\left[1-2\left(\frac{t}{1-2t}\right)\right]\left(\frac{t}{1-2t} - t\right)} \\
 &= \frac{2t^2}{(1-2t)^2} \frac{(1-2t)^2}{(1-2t-2t)2t^2} \\
 &= \frac{1}{1-4t}
 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\frac{1}{1-2t}$ ve $\frac{1}{1-4t}$ ifadelerini tanımsız yapan $t = \frac{1}{2}$ ve $t = \frac{1}{4}$ değerleri zaman skalasına ait olmadığı için gerekli kısaltmayı yapabildik ve dolayısıyla türevi tanımsız yapacak bir değer yoktur. Eğer $t = 0$ ise t sağ yoğun olduğundan

$$\sigma(0) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > 0\} = \inf\left\{\frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N}_0\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

olur. Yani $\sigma(0) = 0$ dır. O hâlde

$$f^\Delta(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s) - f(0)}{s - 0}$$

dir. $f = \sigma$ olarak verildiğinden

$$\sigma^\Delta(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sigma(s) - \sigma(0)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sigma(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1-2s} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1-2s} = 1$$

olur. O hâlde

$$\sigma^\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-4t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sigma^\Delta(t) = \frac{1}{1-4t}$$

olur.

5.2.4. Teorem

$m \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(t) = (t - \alpha)^m$ ise

$$f^\Delta(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - \alpha)^v (t - \alpha)^{m-v-1}$$

dır [9].

İspat

Tümevarım yöntemini kullanarak aşağıdaki adımları takip edelim.

i) $m = 0$ ise $f(t) = 1$ için

$$\sum_{v=0}^{0-1} (\sigma(t) - \alpha)^v (t - \alpha)^{0-v-1} = 0$$

olduğundan $f^\Delta(t) = 0$ dır.

ii) Önerme keyfi m için doğru olsun. Yani $f(t) = (t - \alpha)^m$ olduğunda

$$f^\Delta(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - \alpha)^v (t - \alpha)^{m-v-1}$$

olur.

iii) Önerme $m + 1$ için doğru olmalıdır.

$$F(t) := (t - \alpha)(t - \alpha)^m = (t - \alpha)f(t) = f(t)(t - \alpha)$$

olarak yazalım. Delta(Δ) türevini aldığımızda,

$$\begin{aligned} F^\Delta(t) &= (t - \alpha)f^\Delta(t) + f^\sigma(t)(t - \alpha)^\Delta \\ &= (t - \alpha) \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - \alpha)^v (t - \alpha)^{m-v-1} - (\sigma(t) - \alpha)^m \\ &= \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - \alpha)^v (t - \alpha)^{m-v} + (\sigma(t) - \alpha)^m \\ &= \sum_{v=0}^m (\sigma(t) - \alpha)^v (t - \alpha)^{m-v} \end{aligned}$$

elde edilir. O hâlde tümevarım yöntemine göre önerme doğrudur.

5.2.5. Teorem (Ara Değer Teoremi)

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $a < b$ ve $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere $[a, b)_{\mathbb{T}}$ aralığında sürekli ve Δ -türevlenebilir fonksiyon olsun. O zaman $f(a) = f(b)$ olduğundan

$$f^\Delta(\xi_2) \leq 0 \leq f^\Delta(\xi_1)$$

olacak şekilde $\xi_1, \xi_2 \in [a, b)_{\mathbb{T}}$ vardır [9].

İspat

$m = \min_{a \leq t \leq b} f(t) = f(\xi_1)$ ve $M = \max_{a \leq t \leq b} f(t) = f(\xi_2)$ olsun. Mevcut koşullarda,

i) $\sigma(\xi_1) > \xi_1$ ise $f^\Delta(\xi_1) = \frac{f(\sigma(\xi_1)) - f(\xi_1)}{\sigma(\xi_1) - \xi_1} \geq 0$ dır.

ii) $\sigma(\xi_1) = \xi_1$ ise $f^\Delta(\xi_1) = \lim_{s \rightarrow \xi_1} \frac{f(s) - f(\xi_1)}{s - \xi_1} \geq 0$ dır.

iii) $\sigma(\xi_2) > \xi_2$ ise $f^\Delta(\xi_2) = \frac{f(\sigma(\xi_2)) - f(\xi_2)}{\sigma(\xi_2) - \xi_2} \leq 0$ dır.

iv) $\sigma(\xi_2) = \xi_2$ ise $f^\Delta(\xi_2) = \lim_{s \rightarrow \xi_2} \frac{f(s) - f(\xi_2)}{s - \xi_2} \leq 0$ dır.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(t) = t^2$ olmak üzere $f(-4) = f(4) = 16$ dır. O hâlde ara değer teoremine göre öyle bir $\xi_1, \xi_2 \in [-4, 4]_{\mathbb{T}}$ bulabiliriz ki $f^\Delta(\xi_1) \leq 0 \leq f^\Delta(\xi_2)$ sağlanır.

$t \in \mathbb{Z}$ için $\sigma(t) = t + 1 > t$ olduğundan t sağ saçılımlı noktadır. Bu yüzden

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} \\ &= \frac{f(t+1) - f(t)}{t+1 - t} \\ &= f(t+1) - f(t) \\ &= (t+1)^2 - t^2 \\ &= 2t + 1 \end{aligned}$$

olur. Bunun yardımıyla aranan $\xi_1, \xi_2 \in [-4, 4]_{\mathbb{T}}$ değerlerini $f^\Delta(\xi_1) = 2\xi_1 + 1 \leq 0$ yardımıyla $\xi_1 \leq -\frac{1}{2}$ olarak belirlenir. Dolayısıyla ξ_1 değerini $\xi_1 \in \{-3, -2, -1\}$ olarak seçilebilir. Benzer şekilde $f^\Delta(\xi_2) = 2\xi_2 + 1 \geq 0$ yardımıyla $\xi_2 \geq -\frac{1}{2}$ olarak belirlenir. Dolayısıyla ξ_2 değerini $\xi_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ olarak seçebiliriz.

5.2.6. Teorem (Türevde Ortalama Değer Teoremi)

$g: [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve sürekli fonksiyon alınsın. Ayrıca g fonksiyonu $[a, b]_{\mathbb{T}}$ üzerinde Δ -türevlenebilir fonksiyon alınsın. Böylece,

$$g^\Delta(\xi_1) \leq \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \leq g^\Delta(\xi_2)$$

olması durumunda $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ vardır [13].

İspat

$\phi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $\phi(t) = g(t) - g(b) - \frac{g(b)-g(a)}{b-a}(t-a)$ olarak tanımlanırsa $\phi(t)$, $[a, b)_{\mathbb{T}}$ aralığında sürekli ve $[a, b)_{\mathbb{T}}$ üzerinde Δ -türevlenebilirdir. $\phi(t)$ fonksiyonu,

$$\phi(a) = g(a) - g(b) = \phi(b)$$

olur. O hâlde Teorem 5.2.5.'den öyle $\xi_1, \xi_2 \in [a, b)_{\mathbb{T}}$ değerleri bulunabilir ki

$$\phi^{\Delta}(\xi_1) \leq 0 \leq \phi^{\Delta}(\xi_2)$$

sağlanır. $\phi(t)$ fonksiyonun delta türevi,

$$\phi^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

olur. O hâlde Teorem 5.2.5.'den $\phi^{\Delta}(\xi_1) \leq 0 \leq \phi^{\Delta}(\xi_2)$ olmasını kullanırsak

$$\phi^{\Delta}(\xi_1) = g^{\Delta}(\xi_1) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \leq 0 \leq g^{\Delta}(\xi_2) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \phi^{\Delta}(\xi_2)$$

buradan da

$$g^{\Delta}(\xi_1) \leq \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \leq g^{\Delta}(\xi_2)$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

5.3. Delta İntegral

5.3.1. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon ve $\mathbb{T}$, bir zaman skalası olarak alınsın. O halde

i) Eğer f , zaman skalasının sağ yoğun olduğu noktalarda sonlu olacak şekilde bir sağ limite ve sol yoğun olduğu noktalarda sonlu olacak şekilde bir sol limite sahipse f fonksiyonuna $\mathbb{T}$ üzerinde *düzenlidir (regulated)* denir.

ii) Eğer f , zaman skalasının sağ yoğun olduğu noktalar da sağ sürekli sol yoğun olduğu noktalarda sonlu bir sol limite sahipse f fonksiyonuna $\mathbb{T}$ üzerinde *sağ yoğun (rd-sürekli) fonksiyon* adı verilir. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklindeki rd-sürekli fonksiyonların kümesi $C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile $C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}$ şeklinde gösterilebilir. $f \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ve $f^\Delta \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ifadelerinin sağlayan fonksiyonların oluşturduğu küme ise $C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile gösterilir.

iii) Eğer f , zaman skalasının sağ yoğun olduğu noktalarda sonlu bir sağ limite sahip, sol yoğun olduğu noktalarda sol sürekli ise f fonksiyonuna $\mathbb{T}$ üzerinde *sol yoğun (ld-sürekli) fonksiyon* adı verilir. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde ld-sürekli fonksiyonların kümesi $C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir [9].

5.3.2. Teorem

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ verilsin. Mevcut durumda,

- i) f fonksiyonu sürekliyse rd-sürekli.
- ii) f fonksiyonu rd-sürekliyse düzenlidir.
- iii) σ operatörü rd-sürekli.
- iv) f fonksiyonu rd-sürekli veya düzenliyse f^σ fonksiyonu da rd-sürekli veya düzenlidir.
- v) f fonksiyonu sürekli olsun. $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu rd-sürekli veya düzenli ise $f \circ g$ fonksiyonu da rd-sürekli veya düzenlidir [9].

5.3.3. Teorem

Eğer f , $\mathbb{T}$ üzerinde düzenli bir fonksiyon ise f fonksiyonunun $F^\Delta(t) = f(t)$ olacak şekilde bir F antitürevi vardır. Bu sebeple her $t \in D$ için D türevlenebilir bölgesiyle $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı öyle bir Δ -türevlenebilir F fonksiyonu vardır ki, $F^\Delta(t) = f(t)$ sağlanır [9].

5.3.4. Teorem (İntegralde Ortalama Değer Teoremi)

$f, g \in C(\mathbb{R})$ fonksiyonları $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlanmış olup f ve g aynı D bölgesinde ön-türevlenebilir olsun. O halde her $t \in D$ için $|f^\Delta(t)| \leq g^\Delta(t)$ eşitsizliği sağlanırsa, $t \geq s$

olmak üzere tüm $t, s \in \mathbb{T}$ alındığında

$$|f(t) - f(s)| \leq g(t) - g(s)$$

eşitsizliği geçerlidir [9].

5.3.5. Tanım

Düzenli $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. F fonksiyonu da $\mathbb{T}$ üzerinde f nin antitürevi olsun. Bu durumda f fonksiyonunun *belirsiz Δ -integrali*,

$$\int f(\eta) \Delta \eta = F(t) + c$$

olarak tanımlanır. Burada c keyfi bir sabittir. Cauchy integrali de

$$\int_s^t f(\eta) \Delta \eta = F(t) - F(s), t, s \in \mathbb{T}$$

ile tanımlanır [9].

Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alınsın. $k \neq -1$ sabit bir sayı olmak üzere $\int t^k \Delta t$ integralini hesap edelim.

$$\left(\frac{t^{k+1}}{k+1} \right)^\Delta = \Delta \left(\frac{t^{k+1}}{k+1} \right) = \frac{(k+1)t^k}{k+1} = t^k$$

elde edilir. Burada $k \neq -1$ olduğu için $\frac{1}{k+1}$ ifadesi tanımlıdır. Dolayısıyla türevi tanımsız yapacak bir değer yoktur. Bu durumda c sabit olmak üzere Tanım 5.3.5.'e göre

$$\int t^k \Delta t = \frac{t^{k+1}}{k+1} + c$$

elde edilir.

5.3.6. Teorem

Her rd-sürekli fonksiyonun bir antitürevi vardır. Özellikle bir $t_0 \in \mathbb{T}$ ve tüm $t \in \mathbb{T}$ için

$$\mathcal{F}(t) = \int_{t_0}^t f(\eta) \Delta\eta$$

ile tanımlı fonksiyon, f fonksiyonunun anti-türevidir [9].

5.3.7. Teorem

$f \in C_{rd}(\mathbb{T})$ ve $t \in \mathbb{T}^K$ olmak üzere,

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\eta) \Delta\eta = f(t) \mu(t)$$

sağlanır [9].

İspat

Teorem 5.3.6.'ya göre $\mathcal{F}$ fonksiyonu f fonksiyonunun antitürevi olduğundan

$$\begin{aligned} \int_t^{\sigma(t)} f(\eta) \Delta\eta &= \mathcal{F}(\sigma(t)) - \mathcal{F}(t) \\ &= \mu(t) \mathcal{F}^\Delta(t) \\ &= \mu(t) f(t) \end{aligned}$$

sağlanır.

Örnek

$\mathbb{T} = [1,2] \cup \{3\}$ zaman skolası olmak üzere, $\int_1^3 t^2 \Delta t$ değeri bulalım.

Verilen integrali

$$\begin{aligned} \int_1^3 t^2 \Delta t &= \int_1^2 t^2 \Delta t + \int_2^3 t^2 \Delta t \\ &= \int_1^2 t^2 dt + \int_2^{3=\sigma(2)} t^2 \Delta t \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Bu integralin birinci parçası klasik anlamda Riemann integralidir ve ikinci parçası da Teorem 5.3.7.'ye göre $\int_2^{3=\sigma(2)} t^2 \Delta t = \mu(2)f(2)$ olur. Bu yüzden,

$$\begin{aligned} \int_1^3 t^2 \Delta t &= \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) + \mu(2)f(2) \\ &= \frac{7}{3} + 4 \\ &= \frac{19}{3} \end{aligned}$$

elde edilir.

5.3.8. Teorem

$f^\Delta \geq 0$ ise f fonksiyonu artandır [9].

İspat

$[a, b]$ kapalı aralığında $f^\Delta \geq 0$ ve $s, t \in \mathbb{T}$ için $a \leq s \leq t \leq b$ olsun. O halde

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f^\Delta(\tau) \Delta \tau \geq f(s)$$

olduğundan ispat tamamlanır.

5.3.9. Teorem

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere $f, g \in C_{rd}(\mathbb{T})$, $a, b, c \in \mathbb{T}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Mevcut durumda

- i) $\int_a^b f(t) \Delta t = 0$,
- ii) $\int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t$,
- iii) $\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t$,
- iv) $\int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t$,
- v) $\int_a^b \alpha f(t) \Delta t = \alpha \int_a^b f(t) \Delta t$,
- vi) $\int_a^b f(\sigma(t)) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t$,
- vii) $\int_a^b f(t) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t$,
- viii) $[a, b]$ aralığında $|f(t)| \leq |g(t)|$ ise $\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \left| \int_a^b g(t) \Delta t \right|$,
- ix) Her $t \in [a, b]$ için $f(t) \geq 0$ oluyorsa bu durumda $\int_a^b f(t) \Delta t \geq 0$ dır[9].

İspat

$f, g \in C_{rd}(\mathbb{T})$ olduğundan Teorem 5.3.6.'ya göre $\mathcal{F}^\Delta(t) = f(t)$ ve $\mathcal{G}^\Delta(t) = g(t)$ olacak şekilde $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ fonksiyonları vardır. Buna göre $\int_a^b f(t) \Delta t = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$ dır. O hâlde,

- i) $\int_a^a f(t) \Delta t = \mathcal{F}(a) - \mathcal{F}(a) = 0$
- ii) $\int_a^b f(t) \Delta t = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) = -(\mathcal{F}(a) - \mathcal{F}(b)) = - \int_b^a f(t) \Delta t$
- iii) $\int_a^b f(t) \Delta t = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) = \mathcal{F}(c) - \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(c) = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t$
- iv) Teorem 5.2.3.'e göre $\mathcal{F} + \mathcal{G}, f + g$ nin antitürevidir. Böylece

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\mathcal{F} + \mathcal{G})\Delta t &= (\mathcal{F} + \mathcal{G})(b) - (\mathcal{F} + \mathcal{G})(a) \\
&= \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) + \mathcal{G}(b) - \mathcal{G}(a) \\
&= \int_a^b \mathcal{F}(t)\Delta t + \int_a^b \mathcal{G}(t)\Delta t
\end{aligned}$$

olur.

$$\text{v) } \int_a^b \alpha \mathcal{F}(t)\Delta t = \alpha \int_a^b \mathcal{F}(t)\Delta t$$

Diğer durumlar benzer şekilde ispatlanır.

Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olmak üzere, $\mathcal{F}(t) = 2t^2 + 8t + 4$ ve $\mathcal{G}(t) = \frac{1}{3}(2t^3 + 9t^2 + t + 1)$ olsun.

Teorem 5.2.3 (ii) ve Teorem 5.3.9'a göre

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^\Delta(t) &= \left[\frac{1}{3}(2t^3 + 9t^2 + t + 1) \right]^\Delta \\
&= \frac{1}{3}(2(t^3)^\Delta + 9(t^2)^\Delta + t^\Delta + 1^\Delta) \\
&= \frac{1}{3}(2((t+1)^3 - t^3) + 9((t+1)^2 - t^2) + t + 1 - t + 0) \\
&= \frac{1}{3}(2(3t^2 + 3t + 1) + 9(2t + 1) + 1) \\
&= \frac{1}{3}(6t^2 + 24t + 12) \\
&= 2t^2 + 8t + 4 \\
&= \mathcal{F}(t)
\end{aligned}$$

olur. Tanım 5.3.5.'e göre

$$\int \mathcal{F}(t)\Delta t = \int (2t^2 + 8t + 4)\Delta t$$

$$\begin{aligned}
&= \int (g(t))^{\Delta} \Delta t \\
&= \int \left(\frac{1}{3} (2t^3 + 9t^2 + t + 1) \right)^{\Delta} \Delta t \\
&= \frac{1}{3} (2t^3 + 9t^2 + t + 1) + c
\end{aligned}$$

elde edilir.

5.4. Birinci Basamaktan Lineer Dinamik Denklemler

5.4.1. Tanım

$\mathbb{T}$, zaman skalası $y: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ delta türevlenebilir fonksiyon olsun. $f: \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olarak alındığında

$$y^{\Delta}(t) = f(t, y(t), y^{\sigma}(t)) \quad (5.1)$$

denkleminde *birinci basamaktan dinamik denklem* denir. Eğer $t \in \mathbb{T}$ için $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ fonksiyonları yardımıyla

$$f(t, y(t), y^{\sigma}(t)) = f_1(t)y(t) + f_2(t)$$

veya

$$f(t, y(t), y^{\sigma}(t)) = f_1(t)y^{\sigma}(t) + f_2(t)$$

olarak yazılabiliyorsa (5.1) denkleminde *birinci basamaktan lineer dinamik denklem* denir. $t_0 \in \mathbb{T}$ ve $y_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, (5.1) denkleminin $y(t_0) = y_0$ koşuluna uyan $y(t)$ çözümünün belirlenmesi problemine bir *başlangıç değer problemi* denir. Buna göre birinci basamaktan başlangıç değer problemi

$$y^{\Delta}(t) = f(t, y(t), y^{\sigma}(t)), y(t_0) = t_0$$

şeklindedir. Eğer özel olarak $f_1(t) = p(t) \in C(\mathbb{T})$ ve $f_2(t) = 0$ seçilirse dinamik denklem $y^\Delta = p(t)y$ halini alır. Özel olarak $p(t) = 1$ seçimi için denklem $y^\Delta = y$ halini alacaktır. Bu denklemin $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olması halinde çözüm $y = ce^t$ olur [6]. O hâlde keyfi bir zaman skalası için $\mathbb{R}$ deki e^t in karşılığı olan üstel fonksiyon kurmalıyız.

5.5. Kompleks Hilger Düzlemi

5.5.1. Tanım

$h \geq 0$ olarak alındığında, *kompleks Hilger düzlemi (Hilger karmaşık sayıları), Hilger alternatif (yedek) eksen, Hilger reel eksen ve Hilger sanal çemberi* sırasıyla

$$\mathbb{C}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq -\frac{1}{h} \right\}, \mathbb{C}_0 := \mathbb{C}$$

$$\mathbb{A}_h := \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \text{ ve } z < -\frac{1}{h} \right\}, \mathbb{A}_0 := \emptyset$$

$$\mathbb{R}_h := \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \text{ ve } z > -\frac{1}{h} \right\}, \mathbb{R}_0 := \mathbb{R}$$

$$\mathbb{I}_h := \left\{ z \in \mathbb{C}_h : \left| z + \frac{1}{h} \right| = \frac{1}{h} \right\}, \mathbb{I}_0 = i\mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanır [9].

5.5.2. Tanım

$h > 0$, $z \in \mathbb{C}_h$ ve $\frac{-1}{h} < \text{Re}_h z < \infty$ olmak üzere, $z \in \mathbb{C}_h$ nin *Hilger reel kısmı*

$$\text{Re}_h z := \frac{|zh + 1| - 1}{h}$$

olarak ve $\frac{-\pi}{h} < \text{Im}_h z \leq \frac{\pi}{h}$ olmak üzere $z \in \mathbb{C}_h$ nin *sanal (imajiner) kısmı*

$$\text{Im}_h z := \frac{\text{Arg}(zh + 1)}{h}$$

ile tanımlanır. Burada $Arg(z)$, z 'nin esas argümentidir ($-\pi < Arg(z) < \pi$) [9].

5.5.3. Tanım

$h > 0$ ve $\frac{-\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h}$ olmak üzere iw ile gösterilen *Hilger'in pür imajiner sayısı*

$$iw := \frac{e^{iwh} - 1}{h}$$

şeklinde ifade edilmiştir. $z \in \mathbb{C}_h$ olması halinde $iIm_h(z) \in \mathbb{I}_h$ olur [9].

5.5.4. Teorem

Eğer $\frac{-\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h}$ ise

$$|iw|^2 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{wh}{2}$$

olur [9].

İspat

$$\begin{aligned} |iw|^2 &= (iw)(\overline{iw}) \\ &= \left(\frac{e^{iwh} - 1}{h} \right) \left(\frac{e^{-iwh} - 1}{h} \right) \\ &= \frac{1}{h^2} (e^{iwh} - 1)(e^{-iwh} - 1) \\ &= \frac{1}{h^2} (1 - e^{iwh} - e^{-iwh} + 1) \\ &= \frac{1}{h^2} [2 - (\cos(wh) + i\sin(wh)) - (\cos(wh) - i\sin(wh))] \\ &= \frac{2}{h^2} [1 - \cos(wh)] \\ &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{wh}{2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

5.5.5. Teorem

$\mathbb{C}_h$ üzerinde $\oplus$ ile gösterilen ‘‘circle plus’’ çember toplama işlemini

$$z \oplus w := z + w + zwh$$

ile tanımlarsak $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ bir abel grubu olur [9].

5.5.6. Teorem

$z \in \mathbb{C}_h$ ise

$$z = Re_h(z) \oplus im_h(z)$$

olur [9].

İspat

$$\begin{aligned}
 Re_h z \oplus im_h z &= \frac{|zh + 1| - 1}{h} \oplus i \frac{Arg(zh + 1)}{h} \\
 &= \frac{|zh + 1| - 1}{h} \oplus i \frac{e^{-Arg(zh+1)} - 1}{h} \\
 &= \frac{|zh + 1| - 1}{h} \oplus i \frac{e^{-Arg(zh+1)} - 1}{h} + h \left\{ \frac{|zh + 1| - 1}{h} i \frac{e^{-Arg(zh+1)} - 1}{h} \right\} \\
 &= \frac{1}{h} \{ |zh + 1| - 1 + e^{iArg(zh+1)} - 1 + (|zh + 1| - 1)(e^{iArg(zh+1)} - 1) \} \\
 &= \frac{1}{h} \{ |zh + 1| e^{iArg(zh+1)} - 1 \} \\
 &= \frac{1}{h} \{ zh + 1 - 1 \} \\
 &= z
 \end{aligned}$$

5.5.7. Tanım

$z \in \mathbb{C}_h, n \in \mathbb{N}$ olarak alındığında $\odot$ işlemi $n \odot z := z \oplus z \oplus z \oplus \dots \oplus z$ olarak alınır. Bu eşitlikte sağ tarafta n tane terim vardır. Bu sebeple

$$n \odot z = \frac{(zh + 1)^n}{h}$$

şeklindedir [9].

5.5.8. Tanım

$\oplus$ işlemi altında $z \in \mathbb{C}_h$ 'nin toplamsal tersi $\ominus z := \frac{-z}{1+zh}$ olur. Bu durumda $\mathbb{C}_h$ üzerindeki “circle minus” çember çıkarma $\ominus$ işlemini

$$z \ominus w := z \oplus (\ominus w)$$

ile tanımlarız [9].

5.5.9. Teorem

$z, w \in \mathbb{C}_h$ ve $h \geq 0$ için aşağıdakiler doğrudur.

- i) $z \ominus z = 0$
- ii) $z \ominus w = \frac{z-w}{1+wh}$
- iii) Eğer $h = 0$ ise $z \ominus w = z - w$
- iv) $z \in \mathbb{C}_h$ ise $\bar{z} = \ominus z$
- v) $\ominus(iw) = \overline{iw}$ dır[9].

İspat

- i) Tanım 5.5.8.'e göre

$$\begin{aligned}
z \ominus z &= z \oplus (\ominus z) \\
&= z \oplus \left(-\frac{z}{1+hz}\right) \\
&= z + \left(-\frac{z}{1+hz}\right) + \mu z \left(-\frac{z}{1+hz}\right) \\
&= \frac{z(1+hz) - z + hz(-z)}{1+hz} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Tanım 5.5.8.'e göre

$$\begin{aligned}
z \ominus w &= z \oplus (\ominus w) \\
&= z \oplus \left(-\frac{w}{1+hw}\right) \\
&= z + \left(-\frac{w}{1+hw}\right) + hzz \left(-\frac{w}{1+hw}\right) \\
&= \frac{z(1+hw) - w + hzz(-w)}{1+hw} \\
&= \frac{z - w}{1+hw}
\end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $h = 0$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
z \ominus w &= z \oplus (\ominus w) \\
&= z \oplus \left(-\frac{w}{1+0}\right) \\
&= z + (-w) + 0 \\
&= z - w
\end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıda bazı toplamsal ters örnekleri verilmiştir.

Çizelge 5.3. Toplamsal Tersler

z	0	1	i	$1/h$	$-2/h$	$i - 1/h$
$\ominus z$	0	$-1/(1+h)$	$1/(i-h)$	$-1/2h$	$-2/h$	$-i + 1/h$

5.5.10. Tanım

Eğer $z \in \mathbb{C}_h$ ise z nin *genelleştirilmiş karesi*,

$$z^{(2)} := (-z)(\ominus z) = (-z) \left(\frac{-z}{1+zh} \right) = \frac{z^2}{1+zh}$$

şeklinde tanımlanır [9].

5.5.11. Tanım

$h \geq 0$ verilsin. $\mathbb{Z}_h := \{z \in \mathbb{C}: \frac{-\pi}{h} < \text{Im}z < \frac{\pi}{h}\}$, $\mathbb{Z}_0 := \mathbb{C}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\xi_h: \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{Z}_h$, $z \in \mathbb{C}_h$ olmak üzere,

$$\xi_h(z) := \begin{cases} \frac{1}{h} \text{Log}(1+zh) & , h > 0 \\ z & , h = 0 \end{cases}$$

ile tanımlı ξ_h dönüşümüne *silindir dönüşümü* denir. Bu dönüşümün tersi de $\xi_h^{-1}: \mathbb{Z}_h \rightarrow \mathbb{C}_h$ olmak üzere

$$\xi_h^{-1} := \begin{cases} z & , h = 0 \\ \frac{1}{h}(e^{zh} - 1) & , h > 0 \end{cases}$$

şeklinde dir. Burada Log esas logaritma fonksiyonudur. $h = 0$ için $\xi_0(z) = z$ olur. $h > 0$ olduğunda $\mathbb{Z}_h$ ın bir kenarı diğer kenarı ile ucundan yapıştırılırsa bir silindir olur. Sınır çizgileri $\text{Im}(z) = \frac{-\pi}{h}$ ve $\text{Im}(z) = \frac{\pi}{h}$ şeklinde olur [9].

5.5.12. Tanım

$\mathbb{Z}_h$ üzerinde toplama işlemi $z, w \in \mathbb{Z}_h$ ise

$$z + w := z + w \left(\text{mod} \frac{2\pi i}{h} \right)$$

ile tanımlanır [9].

5.6. Üstel Fonksiyon

Üstel fonksiyonu tanımlamadan önce bazı gerekli tanımları verelim.

5.6.1. Tanım

$p: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, fonksiyonu verilsin. Eğer tüm $t \in \mathbb{T}$ için $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ oluyorsa p fonksiyonuna $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde *regressivdir* denir. $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı tüm regressiv ve rd-süreklili $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonların kümesini $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile gösterilir [9].

5.6.2. Tanım

$p, q \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ olarak alındığında

$$p(t) \oplus q(t) := p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t)$$

ile tanımlı $\oplus$ işlemine $\mathcal{R}$ üzerinde tanımlı *çember toplama işlemi* denir [9].

5.6.3. Tanım

$p, q \in \mathcal{R}$ için $\ominus p, p \ominus q$ fonksiyonları her $t \in \mathbb{T}^K$

$$(\ominus p)(t) := -\frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \tag{5.2}$$

$$(p \ominus q)(t) := (p \oplus (\ominus q))(t) \tag{5.3}$$

şeklindedir [9].

5.6.4. Teorem

$\mathcal{R}$ üzerinde çember fark işlemini $p, q \in \mathcal{R}$ olduğunda,

$$p(t) + q(t) = p(t) \oplus (\ominus q(t))$$

olarak alırsak aşağıdakiler doğrudur.

$$\text{i) } p \ominus p = 0$$

$$\text{ii) } \ominus (\ominus p) = p$$

$$\text{iii) } p \ominus q \in \mathbb{R}$$

$$\text{iv) } p \ominus q = \frac{p-q}{1+\mu q}$$

$$\text{v) } \ominus (p \ominus q) = q \ominus p$$

$$\text{vi) } \ominus (p \oplus) = (\ominus p) \oplus (\ominus q) \text{ [9].}$$

İspat

$p(t) \ominus q(t) = p(t) \oplus (\ominus q(t))$ ve Tanım 5.6.3.'e göre aşağıdakiler sağlanır.

$$\text{i) } p \ominus p = (p \oplus (\ominus p))$$

$$\begin{aligned} &= \left(p \oplus \left(-\frac{p}{1+\mu p} \right) \right) \\ &= p + \left(-\frac{p}{1+\mu p} \right) + \mu p \left(-\frac{p}{1+\mu p} \right) \\ &= \frac{p(1+\mu p) - p + \mu p(-p)}{1+\mu p} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \ominus (\ominus p) = \ominus \left(-\frac{p}{1+\mu p} \right)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\left(-\frac{p}{1+\mu p} \right)}{1+\mu \left(-\frac{p}{1+\mu p} \right)} \\ &= -\frac{\left(-\frac{p}{1+\mu p} \right)}{1-\frac{\mu p}{1+\mu p}} \end{aligned}$$

$$= p$$

$$\text{iv) } p \ominus q = p \oplus (\ominus q)$$

$$\begin{aligned} &= p \oplus \left(-\frac{q}{1 + \mu q} \right) \\ &= p + \left(-\frac{q}{1 + \mu q} \right) + \mu p \left(-\frac{q}{1 + \mu q} \right) \\ &= \frac{p(1 + \mu q) - q + \mu p(-q)}{1 + \mu q} \\ &= \frac{p - q}{1 + \mu q} \end{aligned}$$

$$\text{v) } \ominus (p \ominus q) = \ominus \left(\frac{p - q}{1 + \mu p} \right)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\left(\frac{p - q}{1 + \mu p} \right)}{1 + \mu \left(\frac{p - q}{1 + \mu p} \right)} \\ &= -\frac{\left(\frac{p - q}{1 + \mu p} \right)}{1 + \frac{\mu p - \mu q}{1 + \mu p}} \\ &= -\frac{p - q}{1 + \mu p} \\ &= \frac{q - p}{1 + \mu p} \end{aligned}$$

Diğer durumlar benzer şekilde ispatlanır.

5.6.5. Tanım

$p \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ olarak alalım. Zaman skalasında *genelleştirilmiş üstel fonksiyon* tüm $t, s \in \mathbb{T}$ olduğunda

$$e_p(t, s) := \exp \left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right)$$

olarak tanımlanır [9].

5.6.6. Lemma

$p \in \mathcal{R}$ ve tüm $r, s, t \in \mathbb{T}$ olmak üzere,

$$e_p(t, r)e_p(r, s) = e_p(t, s)$$

yarı grup özelliği vardır [9].

İspat

$p \in \mathcal{R}$ ise her $r, s, t \in \mathbb{T}$ olsun. Tanım 5.6.5.'e göre

$$\begin{aligned} e_p(t, r)e_p(r, s) &= \exp\left(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \exp\left(\int_s^r \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \\ &= \exp\left(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau + \int_s^r \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \\ &= \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \\ &= e_p(t, s) \end{aligned}$$

elde edilir.

5.6.7. Tanım

$p \in \mathcal{R}$ ise birinci basamaktan lineer dinamik denklem,

$$y^\Delta = p(t)y$$

regressiv olarak tanımlanır [9].

5.6.8. Teorem

$p \in \mathcal{R}$, $(1 + \mu(t)p(t) \neq 0)$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olarak alalım. Bu durumda $e_p(t, t_0)$ genelleştirilmiş üstel fonksiyonu

$$y^\Delta(t) = p(t)y(t), y(t_0) = 1$$

başlangıç değer probleminin tek çözümüdür [9].

İspat

Gösterilebilir ki $e_p^\Delta(t, t_0) = p(t)e_p(t, t_0)$ dir. Üstelik $e_p(t_0, t_0) = 1$ dir. Dolayısıyla $e_p(t, t_0)$ fonksiyonu verilen başlangıç değer probleminin bir çözümüdür. Bu çözümün tek çözüm olduğunu göstermek için kabul edelim ki denklemin bir başka çözümü $y(t)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \left(\frac{y(t)}{e_p(t, t_0)} \right)^\Delta &= \frac{y^\Delta(t)e_p(t, t_0) - e_p^\Delta(t, t_0)y(t)}{e_p(t, t_0)e_p(\sigma(t), t_0)} \\ &= \frac{p(t)y(t)e_p(t, t_0) - p(t)e_p(t, t_0)y(t)}{e_p(t, t_0)e_p(\sigma(t), t_0)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bunun anlamı

$$\frac{y(t)}{e_p(t, t_0)} = c = \text{sabit}$$

demektir. Diğer taraftan

$$\frac{y(t_0)}{e_p(t_0, t_0)} = 1$$

olduğundan $c = 1$ olmalıdır ki bu da $y(t) = e_p(t, t_0)$ olması ile mümkündür. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

5.6.9. Teorem (Sabitlerin Değişimi Metodu)

Kabul edelim ki $y^\Delta = p(t)y + f(t)$ birinci basamaktan homogen olmayan lineer denklemi regressiv olsun. Yani, $p \in \mathcal{R}$ olsun. Bu durum da $t_0 \in \mathbb{T}$ ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olduğunda

$$x^\Delta(t) = -p(t)x^\sigma(t) + f(t), x(t_0) = x_0$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$x(t) = x_0 e_{\ominus p}(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(t, \tau) f(\tau) \Delta \tau$$

dir [9].

İspat

Kabul edelim ki $x(t)$ denklemin çözümü olsun. Bu durumda denklemi $e_p(t, t_0)$ integral çarpanı ile çarparsak

$$x^\Delta(t) e_p(t, t_0) = -p(t) x^\sigma(t) e_p(t, t_0) + f(t) e_p(t, t_0)$$

elde ederiz. Buradan

$$(x(t) e_p(t, t_0))^\Delta = f(t) e_p(t, t_0)$$

elde ederiz. Eğer bu eşitliğin her iki tarafını t_0 dan t ye integrali alınırsa

$$\int_{t_0}^t (x(\tau) e_p(\tau, t_0))^\Delta \Delta \tau = \int_{t_0}^t f(\tau) e_p(\tau, t_0) \Delta \tau$$

olur ve

$$x(t)e_p(t, t_0) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau)e_p(\tau, t_0)\Delta\tau$$

elde ederiz. Eğer bu eşitliğin her iki tarafını $e_p(t, t_0)$ ile bölersek

$$x(t) = x(t_0)\frac{1}{e_p(t, t_0)} + \frac{1}{e_p(t, t_0)} \int_{t_0}^t f(\tau)e_p(\tau, t_0)\Delta\tau$$

buradan da

$$x(t) = x(t_0)\frac{1}{e_p(t, t_0)} + \int_{t_0}^t f(\tau)\frac{e_p(\tau, t_0)}{e_p(t, t_0)}\Delta\tau$$

elde ederiz. Eğer $\frac{1}{e_p(t, t_0)} = e_{\ominus p}(t, t_0)$ ve $e_p(t, \tau) = e_p(t, \tau)e_p(\tau, t_0)$ olduğunu kullanırsak

$$x(t) = x(t_0)e_{\ominus p}(t, t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau)\frac{e_p(\tau, t_0)}{e_p(t, \tau)e_p(\tau, t_0)}\Delta\tau$$

dolayısıyla

$$x(t) = x(t_0)e_{\ominus p}(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(t, \tau)f(\tau)\Delta\tau$$

elde ederiz.

5.6.10. Teorem (Sabitlerin Değişimi Metodu)

$y^\Delta = p(t)y + f(t)$ denklemi regressiv olsun. $t_0 \in \mathbb{T}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ ve $p, f \in \mathbb{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ olarak alındığında

$$y^\Delta = p(t)y + f(t), y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

verilmiş olan başlangıç değer probleminin tek çözümü,

$$y(t) = e_f(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau$$

ile belirlidir [9].

5.6.11. Teorem

$p, q \in \mathcal{R}$ olmak üzere,

$$\text{i) } e_0(t, s) \equiv 1, e_p(t, t) \equiv 1,$$

$$\text{ii) } e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s),$$

$$\text{iii) } \frac{1}{e_p(t, s)} = e_{\ominus p}(t, s),$$

$$\text{iv) } e_p(t, s) = \frac{1}{e_p(s, t)} = e_{\ominus p}(s, t),$$

$$\text{vii) } \left(\frac{1}{e_p(t, s)} \right)^\Delta = - \frac{p(t)}{e_p^\sigma(t, s)}$$

olur [9].

İspat

i) $p(t) = 0$ alındığında $y^\Delta = 0y$, $y(s) = 1$ başlangıç değer probleminin çözümü açıkça $y(t) \equiv 1$ fonksiyonudur ve bu problem Teorem 5.6.8.'e göre sadece bir çözüme sahiptir. Yani Teorem 5.6.8.'e göre $e_0(t, s) \equiv y(t) \equiv 1$ olur.

ii) Teorem 5.2.2 (iv) ve Teorem 5.6.8'e göre

$$\begin{aligned}
 e_p(\sigma(t), s) &= e_p^\sigma(t, s) \\
 &= e_p(t, s) + \mu(t)e_p^\Delta(t, s) \\
 &= e_p(t, s) + \mu(t)p(t)e_p(t, s) \\
 &= (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

iii)

$$y^\Delta = (\ominus p)(t)y, y(s) = 1 \quad (5.4)$$

başlangıç değer problemini düşünelim. (5.2) eşitliğinden, (5.4) dinamik denklemi regressivdir. Teorem 5.6.8.'den ve her sabit s değeri alındığında $y(t) = \frac{1}{e_p(t, s)}$ fonksiyonu (5.4) problemini sağlar. Ayrıca $y(s) = 1$ koşulu da sağlanır. Teorem 5.2.3. (iv)'den faydalanarak

$$\begin{aligned}
 y^\Delta(t) &= \left(\frac{1}{e_p(t, s)} \right)^\Delta (t) \\
 &= - \frac{e_p^\Delta(t, s)}{e_p(t, s)e_p(\sigma(t), s)} \\
 &= - \frac{p(t)e_p(t, s)}{e_p(t, s)e_p(\sigma(t), s)} \\
 &= - \frac{p(t)}{e_p(\sigma(t), s)} \\
 &= - \frac{p(t)}{(1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)} \\
 &= (\ominus p)(t)y(t)
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Teklik teoreminden istenen sonuç elde edilir.

iv) Tanım 5.6.5.'de ki genelleştirilmiş üstel fonksiyona göre

$$e_p(t, s) = \frac{1}{e_p(s, t)}$$

olur. Ayrıca buradaki fonksiyon $e_{\ominus p}(s, t)$ ye eşittir. Diğerleri de benzer şekilde ispatlanır.

5.6.12. Teorem

$p \in \mathcal{R}$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. Bu durumda

i) Eğer $\mathbb{T}^K$ üzerinde $1 + \mu(t)p(t) > 0$ ise her $t \in \mathbb{T}$ için

$$e_p(t, t_0) > 0$$

olur.

ii) Eğer $\mathbb{T}^K$ üzerinde $1 + \mu(t)p(t) < 0$ ise her $t \in \mathbb{T}$ için

$$e_p(t, t_0) = \alpha(t, t_0)(-1)^{n_t}$$

olur. Burada

$$\alpha(t, t_0) := \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{\log|1 + \mu(\tau)p(\tau)|}{\mu(\tau)} \Delta\tau\right) > 0$$

ve

$$n_t := \begin{cases} |[t_0, t)|, & t \geq t_0 \\ |[t, t_0)|, & t < t_0 \end{cases}$$

dır [9].

İspat

i) $1 + \mu(t)p(t) > 0$ olduğunda, her $t \in \mathbb{T}^K$ için $\text{Log}[1 + \mu(t)p(t)] \in \mathbb{R}$ olur. Bu nedenle

$$\xi_{\mu(t)}(p(t)) \in \mathbb{R}, \text{ her } t \in \mathbb{T}^K$$

dır. Bundan dolayı genelleştirilmiş üstel fonksiyonun tanımı gereği her $t \in \mathbb{T}$ için

$$e_p(t, t_0) > 0$$

olur.

ii) Benzer şekilde $1 + \mu(t)p(t) < 0$ olduğunda her $t \in \mathbb{T}^K$ için

$$\text{Log}[1 + \mu(t)p(t)] = \log|1 + \mu(t)p(t)| + i\pi$$

olur. Bu durumda $\mu(t)$ sıfırlanmadığı için ve Lemma 5.6.16'dan $n_t < \infty$ olur.

$$\begin{aligned} e_p(t, t_0) &= \exp\left(\int_{t_0}^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau\right) \\ &= \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{\text{Log}(1 + \mu(\tau)p(\tau))}{\mu(\tau)} \Delta\tau\right) \\ &= \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{\log|1 + \mu(\tau)p(\tau)| + i\pi}{\mu(\tau)} \Delta\tau\right) \\ &= \exp\left(\int_{t_0}^t \left\{ \frac{\log|1 + \mu(\tau)p(\tau)|}{\mu(\tau)} + \frac{i\pi}{\mu(\tau)} \right\} \Delta\tau\right) \\ &= \alpha(t, t_0) \exp\left(i\pi \int_{t_0}^t \frac{\Delta\tau}{\mu(\tau)}\right) \end{aligned}$$

dır. Euler formülünden

$$\exp\left(i\pi \int_{t_0}^t \frac{\Delta\tau}{\mu(\tau)}\right) = \cos\left(\pi \int_{t_0}^t \frac{\Delta\tau}{\mu(\tau)}\right) = \cos(n_t\pi) = (-1)^{n_t}$$

dır. Bu ise istenen sonuca götürür.

Teorem 5.6.12 (i)'e göre aşağıdaki tanımı yapabiliriz.

5.6.13. Tanım

$\mathcal{R}$ nin tüm pozitif regressiv elemanlarının kümesi

$$\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^+(\mathbb{T}) = \mathcal{R}^+(\mathbb{T}, \mathbb{R}) = \{p \in \mathcal{R} : 1 + \mu(t)p(t) > 0, \text{ her } t \in \mathbb{T}\}$$

ile tanımlıdır [9].

5.6.14. Teorem

$\mathcal{R}^+, \mathcal{R}'$ nin bir alt grubudur [9].

İspat

$\mathcal{R}^+ \subset \mathcal{R}$ ve $0 \in \mathcal{R}^+$ olduğu aşikârdır. Buradaki 0 her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) \equiv 0$ olacak şekilde bir fonksiyondur. $p, q \in \mathcal{R}^+$ olsun. $\mathbb{T}$ üzerinde $1 + \mu(t)p(t) > 0$ ve $1 + \mu(t)q(t) > 0$ olduğundan,

$$1 + \mu(t)(p(t) \oplus q(t)) = (1 + \mu(t)p(t))(1 + \mu(t)q(t)) > 0$$

olur. Bu sebeple $p \in \mathcal{R}^+, \mathbb{T}$ üzerinde $1 + \mu(t)p(t) > 0$ dır. Böylece $\mathbb{T}$ üzerinde

$$1 + \mu(\ominus p) = 1 - \frac{\mu p}{1 + \mu p} = \frac{1}{1 + \mu p} > 0$$

oldüğundan $\ominus p \in \mathcal{R}^+$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

5.6.15. Teorem (Üstel Fonksiyonun İşareti)

$f \in \mathcal{R}$, $t_0 \in \mathbb{T}$ olarak alalım. O hâlde,

i) $f \in \mathcal{R}^+$ ise tüm $t \in \mathbb{T}$ için

$$e_f(t, t_0) > 0$$

olur.

ii) $1 + \mu(t)f(t) < 0$ ifadesini sağlayan $t \in \mathbb{T}^K$ noktaları için

$$e_f(t, t_0)e_f(\sigma(t), t_0) < 0$$

olur [9].

5.6.16. Lemma

$p \in \mathcal{R}_{[a, b]}$ olarak alındığında tüm $t \in J$ için $1 + \mu(t)p(t) < 0$ olacak şekilde $J \subset [a, b]^K$ varsa, o zaman $|J| < \infty$ olur ve burada $|\dots|$ sembolü bir kümenin kardinalitesini gösterir [9].

5.6.17. Lemma

$p \in \mathcal{R}_{[a, b]}$ ve $s_0 \in [a, b]$ olsun. Varsayalım ki $\mathbb{T} = \{t_i : i \in \mathbb{N}\} \subset [a, b]^K$, $S = \{s_i : i \in \mathbb{N}\} \subset [a, b]^K$ ile

$$\dots < t_2 < t_1 < s_0 \leq s_1 < s_2 < \dots$$

olduğunu kabul edelim. Böylece tüm $t \in S \cup \mathbb{T}$ için $1 + \mu(t)p(t) < 0$ ve her $t \in [a, b]^K \setminus (S \cup \mathbb{T})$ için $1 + \mu(t)p(t) > 0$ elde edilir. Eğer $T = \emptyset$ ve $S = \emptyset$ ise o zaman $[a, s_1]$ üzerinde

$$e_p(\cdot, s_0) > 0,$$

olur. Ayrıca, $|S| = N \in \mathbb{N}$ ise

$$(-1)^i e_p(\cdot, s_0) > 0, [\sigma(s_i), s_{i+1}] \text{ üzerinde her } 1 \leq i \leq N - 1$$

ve $[\sigma(s_N), \ell]$ üzerinde

$$(-1)^N e_p(\cdot, s_0) > 0,$$

dır [11].

5.6.18. Teorem

$p \in \mathcal{R}$ ve $a, \ell, c \in \mathbb{T}$ olmak üzere eğer

$$[e_p(c, t)]^\Delta = -p[e_p(c, t)]^\sigma$$

ise

$$\int_a^\ell p(t) e_p(c, \sigma(t)) \Delta t = e_p(c, a) - e_p(c, \ell)$$

dır.

İspat

Teorem 5.6.11'den

$$\begin{aligned} p(t) e_p(c, \sigma(t)) &= p(t) e_{\ominus p}(\sigma(t), c) \\ &= p(t) [1 + \mu(t)(\ominus p)(t)] e_{\ominus p}(t, c) \\ &= p(t) \left[1 - \frac{\mu(t)p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \right] e_{\ominus p}(t, c) \\ &= p(t) \frac{1}{1 + \mu(t)p(t)} e_{\ominus p}(t, c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(\Theta p)(t)e_{\Theta p}(t, c) \\
&= -e_{\Theta p}^{\Delta}(t, c) \\
&= -[e_p(c, t)]^{\Delta}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Δ , t ye göre türevlenebilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\int_a^b p(t)e_p(c, \sigma(t))\Delta t &= - \int_a^b [e_p(c, t)]^{\Delta} \Delta t \\
&= e_p(c, a) - e_p(c, b)
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

5.7. Dinamik Eşitsizlikler

5.7.1. Teorem

$y, f \in C_{rd}$ ve $p \in \mathcal{R}^+$ olsun. Tüm $t \in \mathbb{T}$ alınarak

$$y^{\Delta}(t) \leq p(t)y(t) + f(t)$$

olmak üzere, tüm $t \in \mathbb{T}$ alındığında

$$y(t) \leq y(t_0)e_p(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau$$

olur.

İspat

Teorem 5.6.11 (ii)'den

$$[ye_{\Theta p}(t, t_0)]^{\Delta}(t) = y^{\Delta}(t)e_{\Theta p}(\sigma(t), t_0) + y(t)(\Theta p)(t)e_{\Theta p}(t, t_0)$$

$$\begin{aligned}
&= y^\Delta(t) e_{\ominus p}(\sigma(t), t_0) + y(t) \frac{(\ominus p)(t)}{1 + \mu(t)(\ominus p)(t)} e_{\ominus p}(\sigma(t), t_0) \\
&= [y^\Delta(t) - (\ominus (\ominus p))(t) y(t)] e_{\ominus p}(\sigma(t), t_0) \\
&= [y^\Delta(t) - p(t) y(t)] e_{\ominus p}(\sigma(t), t_0)
\end{aligned}$$

olur. $p \in \mathcal{R}^+$ ve Teorem 5.6.14'ten $\ominus p \in \mathcal{R}^+$ olur. Teorem 5.6.15 (i)'den $e_{\ominus p} > 0$ dır.

Dolayısıyla Teorem 5.6.11'den

$$\begin{aligned}
y(t) e_{\ominus p}(t, t_0) - y(t_0) &= \int_{t_0}^t [y^\Delta(\tau) - p(\tau) y(\tau)] e_{\ominus p}(\sigma(\tau), t_0) \Delta\tau \\
&\leq \int_{t_0}^t f(\tau) e_{\ominus p}(\sigma(\tau), t_0) \Delta\tau \\
&= \int_{t_0}^t f(\tau) e_p(t_0, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta\tau
\end{aligned}$$

olur.

5.7.2. Teorem

$a \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathcal{R}^+$ olsun. O hâlde, tüm $t \geq s$ alındığında

$$e_a(t, s) \geq 1 + a(t - s)$$

olur [9].

İspat

$a \in \mathcal{R}^+$ olmak üzere tüm $s, t \in \mathbb{T}$ olduğunda $e_a(t, s) > 0$ dır. Varsayalım ki $s, t \in \mathbb{T}$ için $t \geq s$ ve $y(t) = a(t - s)$ olsun. O hâlde,

$$ay(t) + a = a^2(t - s) + a \geq a = y^\Delta(t)$$

$y(s) = 0$ aldığımız zaman Teorem 5.7.1.'den ($p(t) = f(t) = a$) ve Teorem 5.6.18.'den faydalanarak

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \int_s^t e_a(t, \sigma(\tau)) a \Delta\tau \\ &= e_a(t, s) - 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} e_a(t, s) &\geq 1 + y(t) \\ &= 1 + a(t - s) \end{aligned}$$

olur. İspat tamamlanır.



6. ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE BİRİNCİ BASAMAKTAN LİNEER DİNAMİK DENKLEMLERİN HYERS-ULAM KARARLILIĞI

Bu kesimde önce homogen lineer dinamik denklemler için Hyers-Ulam kararlılığına ardından homogen olmayan lineer dinamik denklemler için Hyers-Ulam kararlılığını inceleyeceğiz.

6.1. Zaman Skalası Üzerinde Birinci Basamaktan Homogen Lineer Dinamik Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı

Bu bölümde $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde tanımlı

$$y^\Delta(t) - ay(t) = 0, a \in \mathbb{R} \quad (6.1)$$

formundaki sabit katsayılı birinci basamaktan lineer homogen dinamik denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını ele alacağız. Uygulamada en çok karşımıza çıkan $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ olması durumunda bu denklem aşağıdaki şekilde ifade edilir. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise (6.1) denklemi

$$y'(t) - ay(t) = 0, t \in \mathbb{R}$$

diferensiyel denklemine ve $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ olması halinde de ileri fark operatörü cinsinden

$$\Delta_h y(t) - ay(t) = 0$$

fark denklemine dönüştürür.

6.1.1. Tanım

Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $|\phi^\Delta(t) - a\phi(t)| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan her $\phi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|\phi(t) - y(t)| \leq K\varepsilon, t \in \mathbb{T}^K$$

olacak şekilde (6.1) denkleminin bir $y: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ çözümü ve $K > 0$ sabiti bulunabiliyorsa (6.1) denkleminde *Hyers-Ulam anlamında kararlıdır* denir [10].

6.1.2. Sonuç

Eğer $y(t)$, $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı ve delta türevi de mevcutsa $y^\Delta(t)$, $\mathbb{T}^K$ üzerinde mevcuttur. Fakat $t \in \mathbb{T}$ sağ saçılımlı nokta ve $a = \frac{-1}{\mu(t)}$ ise birinci basamaktan dinamik denklemler için $y^\Delta(t)$ den bahsedemeyiz. Eğer $a = \frac{-1}{\mu(t)}$ alırsak; hem (6.1) sabit katsayılı birinci basamaktan lineer homogen dinamik denklemlerin regressivliğini bozar hem de Teorem 5.2.3 (iv)'deki $\left(\frac{1}{y}\right)^\Delta(t) = -\frac{y^\Delta(t)}{y(t)y(\sigma(t))}$ delta türevini tanımsız yapar. Böyle bir sıkıntı ile karşılaşmamak için $a \neq \frac{-1}{\mu(t)}$ alacağız. Bu durumda $\mathbb{T}$ ve $\mathbb{T}^K$ nin $\mathbb{R}$ boş olmayan alt kümeleri seçeceğiz. Sağ saçılımlı $t \in \mathbb{T}^K$ alındığında $a \neq \frac{-1}{\mu(t)}$ dir [10].

Bu durum nedeniyle bundan sonraki tüm sonuçlarda; lemma, önerme ve teoremlerde $a \neq -\frac{1}{\mu(t)}$ alacağız. $\mathcal{R}$ regressiv ve $\mathcal{R}^+$ pozitif regressiv olmak üzere, $a \neq 0$ ve $a \in \mathcal{R}^+$, $a < 0$ ve $a \in \mathcal{R}^+$, $a \notin \mathcal{R}^+$ ve $a \in \mathcal{R}$ durumları incelenmiş ve sonuçları aşağıda verilmiştir.

6.1.3. Sonuç

$a = 0$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $\mathbb{T}$ zaman skalası olmak üzere $\phi(t) = \varepsilon t$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $|\phi^\Delta(t)| = \varepsilon$ sağlar. $a = 0$ olduğu zaman (6.1) denklemi $y^\Delta = 0$ olur. $y(t) \equiv c$ ise $a = 0$ olması halindeki bu denklemin genel çözümü olduğuna göre $|\phi(t) - y(t)| \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ olduğundan (6.1) denklemi Hyers-Ulam anlamında kararlı olmayacağı anlamına gelir [10].

6.1.4. Lemma

Bir $a \neq 0$ ve bir $a \in \mathcal{R}^+$ olduğunu varsayalım, diğer bir deyişle sağ saçılımlı herhangi bir $t \in \mathbb{T}^K$ için $a > \frac{-1}{\mu(t)}$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi sabit, $t_0 \in \mathbb{T}$ ve ϕ , $\mathbb{T}$ üzerinde gerçekteğerli bir fonksiyon olsun. O zaman

$$|\phi^\Delta(t) - a\phi(t)| \leq \varepsilon, \text{ her } t \in \mathbb{T}^K$$

eşitsizliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart

$$0 \leq \left[\left(\phi(t) - \frac{\varepsilon}{a} \right) e_{\ominus a}(t, t_0) \right]^\Delta \leq 2\varepsilon e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0)$$

eşitsizliği her $t \in \mathbb{T}^K$ için sağlanmasıdır. Burada $e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0)$ Teorem 5.6.11 (iii) 'de tanımlanmıştır [10].

İspat

Teorem 5.2.3 ve Teorem 5.6.11'i kullanarak her $t \in \mathbb{T}^K$ için

$$\begin{aligned} \left[\left(\phi(t) - \frac{\varepsilon}{a} \right) e_{\ominus a}(t, t_0) \right]^\Delta &= \left(\phi(t) - \frac{\varepsilon}{a} \right) (\ominus a) e_{\ominus a}(t, t_0) + \phi^\Delta(t) e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0) \\ &= \left(\phi(t) - \frac{\varepsilon}{a} \right) \left(\frac{-a}{1 + a\mu(t)} \right) \frac{1}{e_a(t, t_0)} + \phi^\Delta(t) e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0) \\ &= \left(\phi(t) - \frac{\varepsilon}{a} \right) \left(\frac{-a}{e_a(\sigma(t), t_0)} \right) + \phi^\Delta(t) e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0) \\ &= \left(\phi(t) - \frac{\varepsilon}{a} \right) (-a e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0)) + \phi^\Delta(t) e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0) \\ &= [\phi^\Delta(t) - a\phi(t) + \varepsilon] e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0) \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada

$$|\phi^\Delta(t) - a\phi(t)| \leq \varepsilon, \text{ her } t \in \mathbb{T}^K$$

olduğundan,

$$\left[\left(\phi(t) - \frac{\varepsilon}{a} \right) e_{\ominus a}(t, t_0) \right]^\Delta \leq 2\varepsilon e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0)$$

eşitsizliği elde edilir.

6.1.5. Lemma

$a < 0$, $a \in \mathcal{R}^+$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. O zaman

$$e_a(t, t_0) \geq 1 + a(t - t_0)$$

eşitsizliği her $t \in (-\infty, t_0]_{\mathbb{T}}$ için geçerlidir [10].

İspat

Her $t \in \mathbb{T}$ için $\phi(t) = \frac{-1}{a}$ olsun. Bu durumda $\mathbb{T}^K$ üzerinde

$$|\phi^\Delta(t) - a\phi(t)| = 1$$

olur. Bu sebeple $\varepsilon = 1$ alabiliriz. Lemma 6.1.4'ü kullanarak her $t \in \mathbb{T}^K$ için

$$0 \leq \left[\left(\phi(t) - \frac{1}{a} \right) e_{\ominus a}(t, t_0) \right]^\Delta = \frac{-2}{a} \left(e_{\ominus a}(t, t_0) \right)^\Delta$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$a < 0$ olduğundan $\mathbb{T}^K$ üzerinde $\left(e_{\ominus a}(t, t_0) \right)^\Delta \geq 0$ olur ve Teorem 5.6.11'e göre

$$0 < \frac{1}{e_a(t, t_0)} = e_{\ominus a}(t, t_0) \leq e_{\ominus a}(t_0, t_0) = \frac{1}{e_a(t_0, t_0)} = 1$$

her $t \in (-\infty, t_0]_{\mathbb{T}}$ için doğru olur. Şimdi $\mathbb{T}$ üzerinde

$$z(t) = e_a(t, t_0) - a(t - t_0) - 1$$

fonksiyonunu ele alalım. Yukarıdaki sonuçtan,

$$z^\Delta(t) = (e_a(t, t_0))^\Delta - a = a(e_a(t, t_0) - 1) \leq 0$$

eşitsizliğinin her $t \in (-\infty, \rho(t_0)]_{\mathbb{T}}$ için sağladığı görülür. Bu, $z(t)$ fonksiyonunun $(-\infty, t_0]_{\mathbb{T}}$ üzerinde artmayan bir fonksiyon olduğu anlamına gelir. Sonuç olarak her $t \in (-\infty, t_0]_{\mathbb{T}}$ için

$$z(t) \geq z(t_0) = e_a(t_0, t_0) - 1 = 0$$

elde edilir. Buradan

$$z(t) = e_a(t, t_0) - a(t - t_0) - 1$$

olduğundan

$$e_a(t, t_0) - a(t - t_0) - 1 \geq 0$$

olur. Sonuç olarak,

$$e_a(t, t_0) \geq a(t - t_0) + 1$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

6.1.6. Önerme

$t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sabiti ile $a \in \mathcal{R}^+$ alalım. $\varepsilon > 0$ keyfi sabit olsun. Varsayalım ki $\phi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, fonksiyonu $|\phi^\Delta(t) - a\phi(t)| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini her $t \in \mathbb{T}^K$ için sağlasın. $u: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, azalmayan bir fonksiyon ve $v: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, artmayan bir fonksiyon olarak alındığında

$$\phi(t) = u(t)e_a(t, t_0) + \frac{\varepsilon}{a} = v(t)e_a(t, t_0) - \frac{\varepsilon}{a}, \quad (6.2)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $a > 0$ ve $\max \mathbb{T} := \tau^*$ varsa

$$u(t) \leq u(\tau^*) < v(\tau^*) \leq v(t) \quad (6.3)$$

eşitsizliği her $t \in \mathbb{T}$ için geçerlidir.

ii) $a > 0$ ve $\max \mathbb{T}$ mevcut değilse, $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ vardır ve

$$u(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \leq v(t) \quad (6.4)$$

eşitsizliği her $t \in \mathbb{T}$ için geçerlidir.

iii) Sağ saçılımlı her $t \in \mathbb{T}$ için $\frac{-1}{\mu(t)} < a < 0$ ve $\min \mathbb{T} := \tau *$ mevcutsa,

$$v(t) \leq v(\tau *) < u(\tau *) \leq u(t) \quad (6.5)$$

eşitsizliği her $t \in \mathbb{T}$ için geçerlidir.

iv) Sağ saçılımlı her $t \in \mathbb{T}$ için $\frac{-1}{\mu(t)} < a < 0$ ve $\min \mathbb{T}$ mevcut değilse $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t)$ ve $\lim_{t \rightarrow -\infty} v(t)$ bulunur ve

$$v(t) \leq \lim_{t \rightarrow -\infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) \leq u(t) \quad (6.6)$$

eşitsizliği her $t \in \mathbb{T}$ için geçerlidir [10].

İspat

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sabiti ile $a \in \mathcal{R}^+$ alalım. Her $t \in \mathbb{T}$ için $1 + a\mu(t) > 0$ olur. $\mathbb{T}$ üzerinde $t \in \mathbb{T}$ için u ve v fonksiyonlarını

$$u(t) := \left(\phi(t) - \frac{\varepsilon}{a} \right) e_{\ominus a}(t, t_0) \text{ ve } v(t) := \left(\phi(t) + \frac{\varepsilon}{a} \right) e_{\ominus a}(t, t_0)$$

şeklinde tanımlayalım. $t \in \mathbb{T}$ için (6.2)'den

$$u(t)e_a(t, t_0) + \frac{\varepsilon}{a} = v(t)e_a(t, t_0) - \frac{\varepsilon}{a}$$

düzenlendiğinde,

$$u(t) = v(t) - \frac{2\varepsilon}{a} e_{\ominus a}(t, t_0), u(t) \begin{cases} < v(t): & a > 0 \\ > v(t): & \mu(t) > 0, \frac{-1}{\mu(t)} < a < 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

elde edilir. Lemma 6.1.4'ü kullanarak, her $t \in \mathbb{T}^K$ için

$$0 \leq \left[\left(\phi(t) - \frac{\varepsilon}{a} \right) e_{\ominus a}(t, t_0) \right]^\Delta \leq 2\varepsilon e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0)$$

geçerlidir. Burada $u(t) := \left(\phi(t) - \frac{\varepsilon}{a} \right) e_{\ominus a}(t, t_0)$ olduğundan, u azalmayıdır. Tanım 5.6.3 ve Teorem 5.6.11'den

$$\begin{aligned} \left(e_{\ominus a}(t, t_0) \right)^\Delta &= \ominus a e_{\ominus a}(t, t_0) \\ &= \frac{-a}{(1 + \mu(t)p(t))e_a(t, t_0)} \\ &= \frac{-a}{e_a(\sigma(t), t_0)} \\ &= -a e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0) \end{aligned}$$

olur. Böylece (6.7) ile

$$-2\varepsilon e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0) \leq v^\Delta(t) \leq 0, t \in \mathbb{T}$$

olur. Sonuç olarak v de artmayan fonksiyondur.

Şimdi (i) durumunu göz önüne alalım. Yukarıdaki sonuçlardan ve (i) 'deki varsayımlardan u nun $\mathbb{T}$ üzerindeki maksimumu $u(\tau^*)$ ve v nin $\mathbb{T}$ üzerindeki minimumu $v(\tau^*)$ olur. Eşitsizlik (6.3)'e baktığımızda (6.7)'den (i) sağlanır. (ii) durumunu düşünelim. $t_0 \in \mathbb{T}$ sabit olsun, (6.7) eşitsizliğinden bir $a > 0$ için

$$u(t) < v(t_0), t \in \mathbb{T}$$

vardır ve dolayısıyla u , $\mathbb{T}$ üzerinde sınırlıdır. Bu durumda $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ vardır. $a > 0$ olduğunda bir $a \in \mathcal{R}^+$ vardır. Teorem 5.7.2'den,

$$0 < e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0) \leq e_{\ominus a}(t, t_0) \leq \frac{1}{1 + a(t - t_0)}, t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$$

dır. Bundan dolayı

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_{\ominus a}(t, t_0) = 0$$

dır. (6.7) ve $a > 0$ olduğunu kullanarak $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ olur. Sonuç olarak, u azalmayan ve v artmayan olduğunda $t \in \mathbb{T}$ için (6.4) doğrudur, böylece (ii) doğru olur. (iii) ve (iv) için olan argümanlar yukarıda (i) ve (ii) için verilenlere benzerdir ve bu nedenle ispatları ihmal edilmiştir. Özellikle, $a < 0$ ve $a \in \mathcal{R}^+$ olduğunda sırasıyla Teorem 5.6.12 (i) ve Lemma 6.1.5 tarafından her $t \in \mathbb{T}$ için $\lim_{t \rightarrow -\infty} e_a(t, t_0) = \infty$ ve $e_a(t, t_0) > 0$ olur ve ispat tamamlanır.

6.1.7. Teorem

$\varepsilon > 0$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$ verilsin. Varsayalım ki bir $\phi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ delta-türevlenebilir fonksiyonu $a \in \mathcal{R}^+$ ve $a \neq 0$ için

$$|\phi^\Delta(t) - a\phi(t)| \leq \varepsilon, t \in \mathbb{T}^K$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $a > 0$ ve $\tau^* := \max \mathbb{T}$ varsa, (6.1) denkleminin herhangi bir çözümü y ve $|\phi(\tau^*) - y(\tau^*)| < \frac{\varepsilon}{a}$ sağlanıyorsa her $t \in \mathbb{T}$ için

$$|\phi(t) - y(t)| < \frac{\varepsilon}{a}$$

sağlanır.

ii) $a > 0$ ve $\max \mathbb{T}$ mevcut değilse $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t)e_{\ominus a}(t, t_0)$ var ve (6.1) denkleminin tek çözümü

$$y(t) := \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t)e_{\ominus a}(t, t_0) \right) e_a(t, t_0)$$

dır ve her $t \in \mathbb{T}$ için

$$|\phi(t) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon}{a}$$

sağlanır.

iii) $a < 0$, $a \in \mathcal{R}^+$ ile $\tau^* := \min \mathbb{T}$ varsa, (6.1) denkleminin herhangi bir çözümü y ve $|\phi(\tau^*) - y(\tau^*)| < \frac{\varepsilon}{|a|}$ sağlanıyorsa her $t \in \mathbb{T}$ için

$$|\phi(t) - y(t)| < \frac{\varepsilon}{|a|}$$

sağlanır.

iv) $a \in \mathcal{R}^+$, $a < 0$ ve $\min \mathbb{T}$ mevcut değilse $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t)e_{\ominus a}(t, t_0)$ var ve (6.1) denkleminin tek çözümü

$$y(t) := \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t)e_{\ominus a}(t, t_0) \right) e_a(t, t_0)$$

dır ve her $t \in \mathbb{T}$ için

$$|\phi(t) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon}{|a|}$$

sağlanır [10].

İspat

Önerme 6.1.6'dan, her $t \in \mathbb{T}$ için (6.2)'i sağlayan azalmayan bir

$$u: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, u(t) := \left(\phi(t) - \frac{\varepsilon}{a} \right) e_{\ominus a}(t, t_0)$$

fonksiyonu ve artmayan bir

$$v: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, v(t) := \left(\phi(t) + \frac{\varepsilon}{a} \right) e_{\ominus a}(t, t_0)$$

fonksiyonunu ele aldığımızda

$$\phi(t) = u(t)e_a(t, t_0) + \frac{\varepsilon}{a} = v(t)e_a(t, t_0) - \frac{\varepsilon}{a}$$

$\phi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bulabiliriz. Eğer $a > 0$ ise Teorem 5.7.2'den $\lim_{t \rightarrow \infty} e_a(t, t_0) = \infty$ olur.

Eğer $a < 0$ ise Lemma 6.1.5 tarafından $\lim_{t \rightarrow -\infty} e_a(t, t_0) = \infty$ olur ve $\mathbb{T}$ üzerinde Teorem 5.6.12 (i) tarafından $e_a(t, t_0) > 0$ elde edilir.

i) Önerme 6.1.6 (i) 'den, her $t \in \mathbb{T}$ için (6.3) eşitsizliğini inceleyelim. (6.1) denkleminin ve

$$|\phi(\tau^*) - y(\tau^*)| < \frac{\varepsilon}{a}$$

eşitsizliğinin herhangi bir çözümü $y(t)$ olduğunu kabul edelim. O halde, tüm $t \in \mathbb{T}$ için

$$y(t) := y(\tau^*)e_{\ominus a}(\tau^*, t_0)e_a(t, t_0)$$

olarak ifade edilir. (6.2), (6.3) ve $|\phi(\tau^*) - y(\tau^*)| < \frac{\varepsilon}{a}$ eşitsizliğini kullanarak

$$u(\tau^*) < y(\tau^*)e_{\ominus a}(\tau^*, t_0) < v(\tau^*)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikte

$$u(\tau^*) - y(\tau^*)e_{\ominus a}(\tau^*, t_0) < 0 \text{ ve } v(\tau^*) - y(\tau^*)e_{\ominus a}(\tau^*, t_0) > 0$$

olduğundan ve yukarıdaki sonuçlardan, her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{aligned}
\phi(t) - y(t) &\leq u(\tau^*)e_a(t, t_0) + \frac{\varepsilon}{a} - y(\tau^*)e_{\ominus a}(\tau^*, t_0)e_a(t, t_0) \\
&= (u(\tau^*) - y(\tau^*)e_{\ominus a}(\tau^*, t_0))e_a(t, t_0) + \frac{\varepsilon}{a} \\
&< \frac{\varepsilon}{a}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\phi(t) - y(t) &\geq v(\tau^*)e_a(t, t_0) - \frac{\varepsilon}{a} - y(\tau^*)e_{\ominus a}(\tau^*, t_0)e_a(t, t_0) \\
&= (v(\tau^*) - y(\tau^*)e_{\ominus a}(\tau^*, t_0))e_a(t, t_0) - \frac{\varepsilon}{a} \\
&> -\frac{\varepsilon}{a}
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak $\phi(t) - y(t) < \frac{\varepsilon}{a}$ ve $\phi(t) - y(t) > -\frac{\varepsilon}{a}$ olduğundan

$$|\phi(t) - y(t)| < \frac{\varepsilon}{a}$$

elde edilir. Böylece (i) sağlanır.

ii) Önerme 6.1.6 (ii) 'den, her $t \in \mathbb{T}$ için (6.4) eşitsizliğini incelersek $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{\ominus a}(t, t_0) = 0$ mevcut olduğu için ayrıca

$$\phi(t) = u(t)e_a(t, t_0) + \frac{\varepsilon}{a} = v(t)e_a(t, t_0) - \frac{\varepsilon}{a} \text{ ve } u(t) := \left(\phi(t) - \frac{\varepsilon}{a}\right)e_{\ominus a}(t, t_0)$$

kullanarak,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t)e_{\ominus a}(t, t_0) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(u(t) + \frac{\varepsilon}{a}e_{\ominus a}(t, t_0)\right) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} u(t)
\end{aligned}$$

var olduğunu görebiliriz. Şimdi her $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere,

$$y(t) := \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) e_{\ominus a}(t, t_0) \right) e_a(t, t_0)$$

fonksiyonunu ele alalım. O zaman $y(t)$, (6.1) denkleminin bir çözümüdür. (6.2) ve (6.4)'ü kullanarak her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{aligned} \phi(t) - y(t) &= \left(u(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) e_{\ominus a}(t, t_0) \right) e_a(t, t_0) + \frac{\varepsilon}{a} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{a} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \phi(t) - y(t) &= \left(v(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) e_{\ominus a}(t, t_0) \right) e_a(t, t_0) - \frac{\varepsilon}{a} \\ &\geq -\frac{\varepsilon}{a} \end{aligned}$$

elde ederiz. Yani, her $t \in \mathbb{T}$ için

$$|\phi(t) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon}{a}$$

sağlanır. Şimdi gösterelim ki $y(t)$, (6.1) denkleminin tek çözümüdür öyle ki her $t \in \mathbb{T}$ için

$$|\phi(t) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon}{a}$$

sağlanır. Her $t \in \mathbb{T}$ için $c \neq \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) e_{\ominus a}(t, t_0)$ ve $z(t) = c e_a(t, t_0)$ olsun. O zaman başlangıç değer problemi için çözüm olan $z(t)$, (6.1) denkleminin $y(t)$ dışındaki herhangi bir çözümüdür.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - c) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) e_{\ominus a}(t, t_0) - c \neq 0,$$

olduğundan görüyoruz ki

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t) - z(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left| (u(t) - c)e_a(t, t_0) + \frac{\varepsilon}{a} \right| = \infty$$

olur. Sonuç olarak (6.1) denkleminin tek çözümü $y(t)$ olur öyle ki her $t \in \mathbb{T}$ için

$$|\phi(t) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon}{a}$$

sağlanır. Böylece (ii) sağlanır. (iii) ve (iv) için olan argümanlar yukarıda (i) ve (ii) için verilenlere benzerdir ve bu nedenle atlanmıştır. İspat tamamlanır.

Teorem 6.1.7 ile aşağıdaki sonucu elde ederiz.

6.1.8. Sonuç

Eğer bir $a \in \mathcal{R}^+$ ve $a \neq 0$ ise $\mathbb{T}$ üzerinde $\frac{1}{|a|}$ HUS olmak üzere (6.1) denklemi, Hyers-Ulam kararlılığına sahiptir [10].

6.1.9. Sonuç

$a \in \mathcal{R}^+$ ve $a \neq 0$ olsun. $t_0 \in \mathbb{T}$ ve $\mathbb{T}$ nin alttan ve üstten sınırsız olduğunu varsayalım. Daha sonra (6.1) denklemi için $\mathbb{T}$ üzerinde minimum HUS $\frac{1}{|a|}$ olduğunu göstereceğiz. $t \in \mathbb{T}$ için

$$\phi(t) := e_a(t, t_0) + \frac{\varepsilon}{a}$$

fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $|\phi^\Delta(t) - a\phi(t)| = \varepsilon$ sağlanır. (6.1) denkleminin genel çözümü

$$y(t) \equiv ce_a(t, t_0)$$

olduğundan, eğer $a > 0$ ise Teorem 5.7.2'den $\lim_{t \rightarrow \infty} e_a(t, t_0) = \infty$ olur. Eğer $a < 0$ ise Lemma 6.1.5'ten $\lim_{t \rightarrow -\infty} e_a(t, t_0) = \infty$ olur. Yukarıdakilerden $c = 1$ olduğunda

$$|\phi(t) - y(t)| < \infty$$

olduğunu görebiliriz. $c = 1$ ise $\mathbb{T}$ üzerinde $|\phi(t) - y(t)| = \frac{\varepsilon}{|a|}$ olur. Bu, $\mathbb{T}$ üzerinde (6.1) için minimum HUS'nin $\frac{1}{|a|}$ dan büyük veya ona eşit olduğu anlamına gelir. Böylece, Sonuç 6.1.8 ile $\mathbb{T}$ üzerindeki (6.1) denklemi için minimum HUS'nin $\frac{1}{|a|}$ olduğu anlamına gelir.

Eğer $a \in \mathcal{R}$ fakat $a \notin \mathcal{R}^+$ ise, Teorem 6.1.7 ve Sonuç 6.1.8 geçerli değildir. Bu durumda aşağıdaki Teorem 6.1.10'dan yararlanabiliriz [10].

6.1.10. Teorem

$a \in \mathcal{R}$ fakat $a \notin \mathcal{R}^+$ ve $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olduğunu varsayalım öyle ki $\tau^* := \min \mathbb{T}$ var ve $\mathbb{T}$ üstten sınırsız olsun. Bu durumda

i) Eğer

$$K := \sup_{t \in \mathbb{T}} \int_{\tau^*}^t |e_a(t, \sigma(s))| \Delta s < \infty, \quad (6.8)$$

ise K , HUS olmak üzere $[\tau^*, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde (6.1) denklemi Hyers-Ulam kararlılığına sahiptir.

ii) Eğer $0 < m < M$ sabitleri varsa her $t \in \mathbb{T}$ için

$$0 < m \leq |e_a(t, \tau^*)| \leq M \quad (6.9)$$

ise (6.1) denkleminin HUS yoktur [10].

İspat

i) $\varepsilon > 0$ verildiğinde, [12, Teorem 5.1] ispatını göz önüne alarak

$$|\phi^\Delta(t) - a\phi(t)| \leq \varepsilon, \quad t \in [\tau^*, \infty)_{\mathbb{T}}$$

sağlayan bir $\phi \in C_{rd}^\Delta[\tau^*, \infty)_{\mathbb{T}}$ fonksiyonu olduğunu varsayalım. $t \in [\tau^*, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$q(t) := \phi^\Delta(t) - a\phi(t)$$

olsun. Teorem 5.6.10'u kullanarak

$$\phi(t) = \phi(\tau^*)e_a(t, \tau^*) + \int_{\tau^*}^t e_a(t, \sigma(s))q(s)\Delta s$$

olur.

$$y^\Delta - ay = 0, y(\tau^*) = \phi(\tau^*)$$

başlangıç değer probleminin tek çözümü $y \in C_{rd}^\Delta[\tau^*, \infty)_{\mathbb{T}}$ olsun. O hâlde

$$y(t) = \phi(\tau^*)e_a(t, \tau^*), t \in [\tau^*, \infty)_{\mathbb{T}}$$

ve

$$\begin{aligned} |\phi(t) - y(t)| &= \left| \int_{\tau^*}^t e_a(t, \sigma(s))q(s)\Delta s \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{\tau^*}^t |e_a(t, \sigma(s))|\Delta s \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle (6.8) eşitliği sağlanırsa (6.1) denklemi, $\mathbb{T}$ üzerinde Hyers-Ulam kararlılığına ve K , HUS'ne sahiptir.

ii) $\varepsilon > 0$ ve $0 < m < M$, (6.9) eşitsizliğindeki gibi olsun. Sonra $t \in \mathbb{T}$ için

$$\phi(t) := \frac{\varepsilon}{M} te_a(t, \tau^*)$$

alırsak eşitsizlik her $t \in \mathbb{T}$ için

$$|\phi^\Delta(t) - a\phi(t)| = \frac{\varepsilon}{M} |e_a(t, \tau^*)| \leq \varepsilon$$

olur. (6.1) denkleminin genel çözümü $y(t) = ce_a(t, \tau *)$ olduğundan $t \in \mathbb{T}$ ve herhangi bir $c \in \mathbb{R}$ için $t \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} |\phi(t) - y(t)| &= \left| \frac{\varepsilon}{M} t - c \right| |e_a(t, \tau *)| \\ &\geq m \left| \frac{\varepsilon}{M} t - c \right| \\ &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

olur. Bu durumda (6.1) denklemini HUS içermez.

Örnek

Bu örnekte, sonsuza giderken sıfıra yaklaşan sınırlı granüle sahip ayrık bir zaman skalası olduğunu düşünelim. $\mathbb{T} = \sqrt{\mathbb{N}_0} = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots\}$ ve $n_0 \in \mathbb{N}_0$ olsun. Bu durumda $\sqrt{n} \in \mathbb{T}$ için

$$\mu(\sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},$$

olur ve genelleştirilmiş üstel fonksiyon da

$$e_a(\sqrt{n}, \sqrt{n_0}) = \prod_{k=1}^{n-n_0} \left(1 + a\mu(\sqrt{k-1}) \right), n, n_0 \in \mathbb{N}_0$$

olur. $a \in \mathcal{R}^+$ ve $a \neq 0$ olduğunda $a \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$ olur, böylece Sonuç 6.1.8 sağlanır. Özellikle, $\varepsilon > 0$ ve sabit bir $n_0 \in \mathbb{N}_0$ verilsin. Varsayalım ki $\phi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ delta türevlenebilir bir fonksiyonun

$$|\phi^\Delta(\sqrt{n}) - a\phi(\sqrt{n})| \leq \varepsilon, \text{ her } n \in \mathbb{N}_0$$

eşitsizliğini sağlasın. Daha sonra Teorem 6.1.7 (ii)'den $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sqrt{n})e_{\ominus a}(\sqrt{n}, \sqrt{n_0})$ var ve her $n \in \mathbb{N}_0$ için $|\phi(\sqrt{n}) - x(\sqrt{n})| \leq \frac{\varepsilon}{a}$ olur. Burada

$$x(\sqrt{n}) := \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sqrt{n}) e_{\ominus a}(\sqrt{n}, \sqrt{n_0}) \right) e_a(\sqrt{n}, \sqrt{n_0})$$

olup (6.1) denkleminin tek çözümüdür. Başka bir ifadeyle (6.1), $a > 0$ için $\mathbb{T} = \sqrt{\mathbb{N}_0}$ üzerinde $\frac{1}{a}$ HUS'ne sahiptir. Şimdi $n_0 = 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$ ve $a \in \left(\frac{-1}{\mu(\sqrt{k_0})}, \frac{-1}{\mu(\sqrt{k_0-1})} \right)$ olsun. O zaman

$$1 + a\mu(0) < 1 + a\mu(1) < \dots < 1 + a\mu(\sqrt{k_0-1}) < 0 < 1 + a\mu(\sqrt{k_0}) < \dots < 1,$$

ve

$$e_a(\sqrt{n}, 0) = \prod_{k=1}^n \left(1 + a\mu(\sqrt{k-1}) \right) \begin{cases} < 0 & k_0 \text{ tek ise} \\ > 0 & : k_0 \text{ çift ise} \end{cases}$$

olur böylece $a \in \mathcal{R}$ fakat $a \notin \mathcal{R}^+$ olduğundan dolayı Teorem 6.1.7'nin koşullarını sağlamadığı için uygulanamaz. Böylelikle Teorem 6.1.10 (i)'den, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\sup_{t \in \mathbb{T}} \int_0^t |e_a(t, \sigma(s))| \Delta s = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{s=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{s+1} + \sqrt{s}} \right) \prod_{k=1}^{n-s-1} \left| 1 + \frac{a}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \right| < \infty \quad (6.10)$$

oluyorsa (6.1) denklemi bu zaman skalası için Hyers-Ulam kararlılığına sahiptir.

6.2. Zaman Skalası Üzerinde Birinci Basamaktan Homogen Olmayan Lineer Dinamik Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı

6.2.1. Tanım

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere,

$$F(t, y, y^\Delta, \dots, y^{\Delta^n}) = 0, t \in \mathbb{T}^{K^n} \quad (6.11)$$

n . basamaktan dinamik denklemini ele alalım. Eğer bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde, her $t \in \mathbb{T}^{K^n}$ için

$$|F(t, y, y^\Delta, \dots, y^{\Delta^n})| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan her $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, n -defa türevlenebilir fonksiyonu için (6.11) denkleminin bir $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ çözümü ve

$$|f(t) - g(t)| \leq K(\varepsilon) \quad (6.12)$$

eşitsizliğini sağlayan $K(\varepsilon)$ bulunabiliyorsa (6.11) dinamik denkleminin $\mathbb{T}^{K^n}$ üzerinde *Hyers–Ulam kararlı* denir. Burada $K = K(\varepsilon)$ sadece ε a bağlıdır ve $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K(\varepsilon) = 0$ dır. Eğer ε ve $K(\varepsilon)$ yerine sırasıyla iki kontrol fonksiyonu $\varphi(t)$ ve $\phi(t)$ ile değiştirilirse (6.11) dinamik denkleminin $\mathbb{T}^{K^n}$ üzerinde *Hyers–Ulam–Rassias kararlı (veya genelleştirilmiş Hyers–Ulam kararlı)* denir.

Bu bölümde farklı teknikler kullanarak $\mathbb{T}$ zaman skalasında, (6.14) eşlenik denkleminde integral çarpanı yöntemi kullanılarak (6.13) birinci basamaktan lineer dinamik denkleminin Ulam kararlılığını sonlu bir aralıkta elde edilecektir. Bununla birlikte, genelleştirilmiş üstel fonksiyonun özelliği ve (6.14) denklemi ile ilgili elde ettiğimiz sonuçlar (6.13) denkleminin Ulam kararlılığını ispatlanmasında yardımcı olmuştur. Sırasıyla birinci basamaktan lineer dinamik denklem ve eşlenik denklem

$$y^\Delta = p(t)y(t) + f(t) \quad (6.13)$$

$$x^\Delta = -p(t)x^\sigma + f(t) \quad (6.14)$$

olsun.

6.2.2. Teorem

$p \in \mathcal{R}_{[a,b]}^+$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu rd-sürekli olsun. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için, eğer $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ rd-sürekli türevlenebilir fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}^K$ için

$$|x^\Delta + p(t)x^\sigma - f(t)| \leq \varepsilon \quad (6.15)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa (6.14) denkleminin $h \in C_{rd}^1([a, b], \mathbb{R})$ sınıfından çözümü vardır öyle ki tüm $t \in [a, b]$ için

$$|x(t) - h(t)| \leq \varepsilon \int_a^b e_p(\tau, t) \Delta\tau \quad (6.16)$$

sağlanır [11].

İspat

(6.15)'e göre her $t \in [a, b]^K$ için

$$-\varepsilon \leq x^\Delta + p(t)x^\sigma - f(t) \leq \varepsilon \quad (6.17)$$

dır. $p \in \mathcal{R}_{[a, b]}^+$ olduğundan, her $t \in [a, b]$ için genelleştirilmiş üstel fonksiyon $e_p(t, a) > 0$ olduğunu biliyoruz. (6.17) eşitsizliğinin her iki tarafını $e_p(t, a)$ ile çarptığımızda

$$-\varepsilon e_p(t, a) \leq x^\Delta e_p(t, a) + p(t)e_p(t, a)x^\sigma - f(t)e_p(t, a) \leq \varepsilon e_p(t, a) \quad (6.18)$$

olur. $t_0 \in [a, b]$ olmak üzere herhangi bir $t \geq t_0$ için, (6.18) eşitsizliğinin her iki tarafını τ ya göre t_0 dan t ye integralini alırsak

$$\begin{aligned} -\varepsilon \int_{t_0}^t e_p(\tau, a) \Delta\tau &\leq \int_{t_0}^t (x^\Delta(\tau)e_p(\tau, a) + p(\tau)e_p(\tau, a)x^\sigma(\tau)) \Delta\tau - \int_{t_0}^t f(\tau)e_p(\tau, a) \Delta\tau \\ &\leq \varepsilon \int_{t_0}^t e_p(\tau, a) \Delta\tau \end{aligned} \quad (6.19)$$

daha sonra

$$-\varepsilon \int_{t_0}^t e_p(\tau, a) \Delta\tau \leq \int_{t_0}^t (x(\tau)e_p(\tau, a))^\Delta \Delta\tau - \int_{t_0}^t f(\tau)e_p(\tau, a) \Delta\tau \leq \varepsilon \int_{t_0}^t e_p(\tau, a) \Delta\tau$$

buradan

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \int_{t_0}^t e_p(\tau, a) \Delta \tau &\leq x(t) e_p(t, a) - x(t_0) e_p(t_0, a) - \int_{t_0}^t f(\tau) e_p(\tau, a) \Delta \tau \\
&\leq \varepsilon \int_{t_0}^t e_p(\tau, a) \Delta \tau
\end{aligned} \tag{6.20}$$

elde edilir. Eğer (6.20) eşitsizliğinin her iki tarafını $e_{\ominus p}(t, a)$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \int_{t_0}^t e_p(\tau, a) e_{\ominus p}(t, a) \Delta \tau &\leq x(t) - x(t_0) e_p(t_0, a) e_{\ominus p}(t, a) \\
&\quad - \int_{t_0}^t f(\tau) e_p(\tau, a) e_{\ominus p}(t, a) \Delta \tau \\
&\leq \varepsilon \int_{t_0}^t e_p(\tau, a) e_{\ominus p}(t, a) \Delta \tau
\end{aligned} \tag{6.21}$$

elde edilir. Teorem 5.6.6 ve Teorem 5.6.11 (iv)'e göre, (6.21) eşitsizliği

$$-\varepsilon \int_{t_0}^t e_p(\tau, t) \Delta \tau \leq x(t) - x(t_0) e_p(t_0, t) - \int_{t_0}^t f(\tau) e_p(\tau, t) \Delta \tau \leq \varepsilon \int_{t_0}^t e_p(\tau, t) \Delta \tau$$

olur. Eşdeğer olarak

$$\left| x(t) - x(t_0) e_p(t_0, t) - \int_{t_0}^t f(\tau) e_p(\tau, t) \Delta \tau \right| \leq \varepsilon \int_{t_0}^t e_p(\tau, t) \Delta \tau \tag{6.22}$$

benzer şekilde, herhangi bir $t \leq t_0$ için

$$\left| x(t) - x(t_0) e_p(t_0, t) + \int_t^{t_0} f(\tau) e_p(\tau, t) \Delta \tau \right| \leq \varepsilon \int_t^{t_0} e_p(\tau, t) \Delta \tau \tag{6.23}$$

elde edilir. Bu nedenle, herhangi bir $t \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned}
\left| x(t) - x(t_0) e_p(t_0, t) + \int_t^{t_0} f(\tau) e_p(\tau, t) \Delta \tau \right| &\leq \varepsilon \left| \int_{t_0}^t e_p(\tau, t) \Delta \tau \right| \\
&\leq \varepsilon \int_a^b e_p(\tau, t) \Delta \tau
\end{aligned} \tag{6.24}$$

olur. Eğer $h(t) := x(t_0)e_p(t_0, t) + \int_{t_0}^t f(\tau)e_p(\tau, t) \Delta\tau$ tanımlanırsa, $h(t)$ nin (6.14) eşlenik denkleminin bir çözümü olduğu kolayca doğrulanabilir. Bu da (6.24) eşitsizliği, (6.16) eşitsizliğini doğru olduğunu göstermektedir.

6.2.3. Sonuç

Teorem 6.2.2 gösteriyor ki (6.14) eşlenik denkleminin bir $x(t)$ çözümü verilmiş ise (6.14) eşlenik denkleminin $h(t)$ çözümü ile $x(t)$ arasındaki t_0 başlangıç noktasının seçiminden bağımsızdır [11].

6.2.4. Teorem

$p \in \mathcal{R}_{[a,b]}^+$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu rd-sürekli olsun. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için, eğer $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ rd-sürekli türevlenebilir fonksiyonu her $t \in [a, b]^K$ için

$$|y^\Delta - p(t)y - f(t)| \leq \varepsilon \quad (6.25)$$

eşitsizliğini sağlanıyorsa (6.13) denkleminin bir $g \in C_{rd}^1([a, b], \mathbb{R})$ sınıfından çözümü vardır öyle ki her $t \in [a, b]$ için,

$$|y(t) - g(t)| \leq \varepsilon \int_a^b e_p(t, \sigma(\tau)) \Delta\tau \quad (6.26)$$

sağlanır [11].

İspat

(6.25) eşitsizliğindeki y değerini $y^\sigma = y + \mu(t)y^\Delta$ formülünden çekip yerine yazarsak her $t \in [a, b]^K$ için

$$|(1 + \mu(t)p(t))y^\Delta - p(t)y^\sigma - f(t)| \leq \varepsilon \quad (6.27)$$

elde ederiz. $p \in \mathcal{R}_{[a,b]}^+$ olduğundan $1 + \mu(t)p(t) > 0$ olur. (6.27) eşitsizliğinin her iki tarafını $\frac{1}{1+\mu(t)p(t)}$ ile çarptığımızda,

$$\left| y^\Delta + (\ominus p)(t)y^\sigma - \frac{f(t)}{1+\mu(t)p(t)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{1+\mu(t)p(t)} \quad (6.28)$$

elde edilir. $p \in \mathcal{R}_{[a,b]}^+$ için $\ominus p \in \mathcal{R}_{[a,b]}^+$ olur. (6.28) eşitsizliğinin her iki tarafını $e_{\ominus p}(t, a)$ ile çarparsak

$$\left| y^\Delta e_{\ominus p}(t, a) + (\ominus p)(t)e_{\ominus p}(t, a)y^\sigma - \frac{f(t)e_{\ominus p}(t, a)}{1+\mu(t)p(t)} \right| \leq \frac{\varepsilon e_{\ominus p}(t, a)}{1+\mu(t)p(t)} \quad (6.29)$$

elde edilir. Teorem 5.6.11 (ii) ve (iv)'den (6.29) eşitsizliği,

$$\left| y^\Delta e_{\ominus p}(t, a) + (\ominus p)(t)e_{\ominus p}(t, a)y^\sigma - f(t)e_{\ominus p}(\sigma(t), a) \right| \leq \varepsilon e_{\ominus p}(\sigma(t), a) \quad (6.30)$$

$t_0 \in [a, b]$ olmak üzere herhangi bir $t \geq t_0$ için, (6.30) eşitsizliğinin her iki tarafını τ ya göre t_0 dan t ye integralini alırsak

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_0}^t (y^\Delta e_{\ominus p}(\tau, a) + (\ominus p)(\tau)e_{\ominus p}(\tau, a)y^\sigma) \Delta\tau - \int_{t_0}^t (f(\tau)e_{\ominus p}(\sigma(\tau), a)) \Delta\tau \right| \\ & \leq \varepsilon \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(\sigma(\tau), a) \Delta\tau \end{aligned}$$

daha sonra

$$\left| \int_{t_0}^t (ye_{\ominus p}(\tau, a))^\Delta \Delta\tau - \int_{t_0}^t (f(\tau)e_{\ominus p}(\sigma(\tau), a)) \Delta\tau \right| \leq \varepsilon \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(\sigma(\tau), a) \Delta\tau$$

buradan

$$\left| y(t)e_{\ominus p}(t, a) - y(t_0)e_{\ominus p}(t_0, a) - \int_{t_0}^t \left(f(\tau)e_{\ominus p}(\sigma(\tau), a) \right) \Delta\tau \right| \leq \varepsilon \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(\sigma(\tau), a) \Delta\tau$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafını $e_p(t, a)$ ile çarparsak,

$$\left| y(t) - y(t_0)e_{\ominus p}(t_0, a)e_p(t, a) - \int_{t_0}^t f(\tau)e_{\ominus p}(\sigma(\tau), a)e_p(t, a) \Delta\tau \right| \leq \varepsilon \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(\sigma(\tau), a)e_p(t, a) \Delta\tau$$

olur. Bu eşitsizlik, Teorem 5.6.6 ve Teorem 5.6.11 (iv) göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} \left| y(t) - y(t_0)e_{\ominus p}(t_0, t) - \int_{t_0}^t f(\tau)e_{\ominus p}(\sigma(\tau), t) \Delta\tau \right| &\leq \varepsilon \left| \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(\sigma(\tau), t) \Delta\tau \right| \\ &\leq \varepsilon \int_a^b e_{\ominus p}(\sigma(\tau), t) \Delta\tau \\ &= \varepsilon \int_a^b e_p(t, \sigma(\tau)) \Delta\tau \end{aligned} \quad (6.31)$$

olarak yazılabilir. $g(t) := y(t_0)e_{\ominus p}(t_0, t) - \int_{t_0}^t f(\tau)e_{\ominus p}(\sigma(\tau), t) \Delta\tau$ olarak alalım. $g(t)$ fonksiyonu (6.13) dinamik denkleminin bir çözümü olduğu görülmektedir. (6.31) eşitsizliğine göre (6.26) eşitsizliği açıktır.

6.2.5. Teorem

$p \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ fonksiyonu bazı $t^* \in [a, b]^K$ için $1 + \mu(t^*)p(t^*) < 0$ sağlansın ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ rd-sürekli olsun. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için, eğer $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ rd-sürekli türevlenebilir bir fonksiyonu her $t \in [a, b]^K$ için (6.15) eşitsizliği sağlıyorsa o zaman (6.14) eşlenik denkleminin bir $h \in C_{rd}^1([a, b], \mathbb{R})$ sınıfından çözümü vardır öyle ki her $t \in [a, b]^K$ için,

$$|x(t) - h(t)| \leq \varepsilon \int_a^b |e_p(\tau, t)| \Delta\tau \quad (6.32)$$

sağlanır [11].

İspat

Lemma 5.6.16'e göre $[a, b]$ kapalı aralığındaki nokta kümesinin $1 + \mu(t)p(t) < 0$ değeri sonludur. Böylece, $1 + \mu(t)p(t) < 0$ olacak şekilde her $t \in S \subset [a, b]^K$ varsa $|S| = N \in \mathbb{N}$ sonlu değeri vardır. Burada $a \leq s_1 < s_2 < \dots < s_N < b$ olsun. Ayrıca, her $t \in [a, b]^K \setminus S$ için $1 + \mu(t)p(t) > 0$ olur. Her bir $s_i \in S$ sağ saçılımı nokta olduğundan $\mu(s_i) = \sigma(s_i) - s_i \neq 0$ ve $1 + \mu(s_i)p(s_i) < 0$, ($i = 1, 2, \dots, N$) olur. Böylece,

$$[a, b] = [a, s_1] \cup (\cup_{i=1}^{N-1} [\sigma(s_i), s_{i+1}]) \cup [\sigma(s_N), b]$$

dir. Lemma 5.6.17'ye göre

$$[a, s_1] \text{ üzerinde } e_p(\cdot, a) > 0, [\sigma(s_N), b] \text{ üzerinde } (-1)^N e_p(\cdot, a) > 0$$

ve

$$\text{her } 1 \leq i \leq N-1 \text{ için } [\sigma(s_i), s_{i+1}] \text{ üzerinde } (-1)^i e_p(\cdot, a) > 0$$

dır. Kolaylık olması açısından, $a = \sigma(s_0)$ ve $b = s_{N+1}$ yazalım. Genel biçimde

$$\text{her } 0 \leq i \leq N \text{ için } [\sigma(s_i), s_{i+1}] \text{ üzerinde } (-1)^i e_p(\cdot, a) > 0$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca, (6.13) dinamik denkleminde (6.15) eşitsizliğini eşit olarak çıkarabiliriz. Herhangi bir $t \in [\sigma(s_i), s_{i+1}]$ için (6.15) eşitsizliğinin her iki tarafını $(-1)^i e_p(t, a)$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} (-1)^{i+1} \varepsilon e_p(t, a) &\leq (-1)^i \left(x^\Delta e_p(t, a) + p(t) x^\sigma e_p(t, a) \right) - (-1)^i f(t) e_p(t, a) \\ &\leq (-1)^i \varepsilon e_p(t, a) \end{aligned} \quad (6.33)$$

olur. İspat, $\sigma(s_i) = s_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N-1$) veya $\sigma(s_j) < s_{j+1}$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N$) olmasına bağlı olarak iki duruma ayrılmıştır.

Durum 1: $i_0 \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ olmak üzere $\sigma(s_{i_0}) = s_{i_0+1}$ varsa, s_{i_0+1} sol saçılımlı, yani izole bir nokta olacaktır. (6.33)'de i yerine i_0 ile değiştirirsek ve (6.33) eşitsizliğinin her iki tarafını da s_{i_0+1} den $\sigma(s_{i_0+1})$ 'e τ ya göre integralini alırsak

$$\begin{aligned} (-1)^{i_0+1} \varepsilon \int_{s_{i_0+1}}^{\sigma(s_{i_0+1})} e_p(\tau, a) \Delta \tau &\leq (-1)^{i_0} \int_{s_{i_0+1}}^{\sigma(s_{i_0+1})} (x^\Delta(\tau) e_p(\tau, a) \\ &\quad + p(\tau) x^\sigma e_p(\tau, a)) \Delta \tau - (-1)^{i_0} \int_{s_{i_0+1}}^{\sigma(s_{i_0+1})} f(\tau) e_p(\tau, a) \Delta \tau \\ &\leq (-1)^{i_0} \varepsilon \int_{s_{i_0+1}}^{\sigma(s_{i_0+1})} e_p(\tau, a) \Delta \tau \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} (-1)^{i_0+1} \varepsilon \int_{s_{i_0+1}}^{\sigma(s_{i_0+1})} e_p(\tau, a) \Delta \tau &\leq (-1)^{i_0} \left(x(\sigma(s_{i_0+1})) e_p(\sigma(s_{i_0+1}), a) - \right. \\ &\quad \left. x(s_{i_0+1}) e_p(s_{i_0+1}, a) \right) - (-1)^{i_0} \int_{s_{i_0+1}}^{\sigma(s_{i_0+1})} f(\tau) e_p(\tau, a) \Delta \tau \\ &\leq (-1)^{i_0} \varepsilon \int_{s_{i_0+1}}^{\sigma(s_{i_0+1})} e_p(\tau, a) \Delta \tau \end{aligned} \quad (6.34)$$

elde edilir. (6.34) eşitsizliğinin her iki tarafını $(-1)^{i_0} e_{\ominus p}(s_{i_0+1}, a)$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} -\varepsilon \int_{s_{i_0+1}}^{\sigma(s_{i_0+1})} e_p(\tau, s_{i_0+1}) \Delta \tau &\leq x(\sigma(s_{i_0+1})) e_p(\sigma(s_{i_0+1}), s_{i_0+1}) - x(s_{i_0+1}) \\ &\quad - \int_{s_{i_0+1}}^{\sigma(s_{i_0+1})} f(\tau) e_p(\tau, s_{i_0+1}) \Delta \tau \\ &\leq \varepsilon \int_{s_{i_0+1}}^{\sigma(s_{i_0+1})} e_p(\tau, s_{i_0+1}) \Delta \tau \end{aligned} \quad (6.35)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
& \left| x(s_{i_0+1}) - x(\sigma(s_{i_0+1})) e_p(\sigma(s_{i_0+1}), s_{i_0+1}) + \int_{s_{i_0+1}}^{\sigma(s_{i_0+1})} f(\tau) e_p(\tau, s_{i_0+1}) \Delta\tau \right| \\
& \leq \varepsilon \int_{s_{i_0+1}}^{\sigma(s_{i_0+1})} e_p(\tau, s_{i_0+1}) \Delta\tau
\end{aligned} \tag{6.36}$$

çıkarabiliriz. $h(t) := x(\sigma(s_{i_0+1})) e_p(\sigma(s_{i_0+1}), t) + \int_t^{\sigma(s_{i_0+1})} f(\tau) e_p(\tau, t) \Delta\tau$ seçelim. Açıkça $h(t)$, s_{i_0+1} izole noktasında $1 + \mu(s_{i_0+1})p(s_{i_0+1}) < 0$ olacak şekilde (6.14) eşlenik denkleminin bir çözümüdür.

Durum 2: $j_0 \in \{0, 1, \dots, N\}$ olmak üzere $\sigma(s_{j_0}) < s_{j_0+1}$ olursa, (6.33)'de i yerine j_0 ile değiştirirsek ve (6.33) eşitsizliğinin her iki tarafını herhangi bir $t \in [\sigma(s_{j_0}), s_{j_0+1}]$ için $\sigma(s_{j_0})$ den t ye τ argümanına göre integral alırsak

$$\begin{aligned}
(-1)^{j_0+1} \varepsilon \int_{\sigma(s_{j_0})}^t e_p(\tau, a) \Delta\tau & \leq (-1)^{j_0} \int_{\sigma(s_{j_0})}^t \left(x^\Delta e_p(\tau, a) + p(t) x^\sigma e_p(\tau, a) \right) \Delta\tau \\
& \quad - (-1)^{j_0} \int_{\sigma(s_{j_0})}^t f(\tau) e_p(\tau, a) \Delta\tau \\
& \leq (-1)^{j_0} \varepsilon \int_{\sigma(s_{j_0})}^t e_p(\tau, a) \Delta\tau
\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned}
(-1)^{j_0+1} \varepsilon \int_{\sigma(s_{j_0})}^t e_p(\tau, a) \Delta\tau & \leq (-1)^{j_0} \left(x(t) e_p(t, a) - x(\sigma(s_{j_0})) e_p(\sigma(s_{j_0}), a) \right) \\
& \quad - (-1)^{j_0} \int_{\sigma(s_{j_0})}^t f(\tau) e_p(\tau, a) \Delta\tau \\
& \leq (-1)^{j_0} \varepsilon \int_{\sigma(s_{j_0})}^t e_p(\tau, a) \Delta\tau
\end{aligned} \tag{6.37}$$

olur. Herhangi bir $t \in [\sigma(s_{j_0}), s_{j_0+1}]$ için (6.36) eşitsizliğinin her iki tarafını $(-1)^{j_0} e_{\ominus p}(t, a)$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \int_{\sigma(s_{j_0})}^t e_p(\tau, t) \Delta \tau &\leq x(t) - x(\sigma(s_{j_0})) e_p(\sigma(s_{j_0}), t) - \int_{\sigma(s_{j_0})}^t f(\tau) e_p(\tau, t) \Delta \tau \\
&\leq \varepsilon \int_{\sigma(s_{j_0})}^t e_p(\tau, t) \Delta \tau
\end{aligned} \tag{6.38}$$

olur. Böylece sonuç herhangi $t \in [\sigma(s_{j_0}), s_{j_0+1}]$ için

$$\left| x(t) - x(\sigma(s_{j_0})) e_p(\sigma(s_{j_0}), t) - \int_{\sigma(s_{j_0})}^t f(\tau) e_p(\tau, t) \Delta \tau \right| \leq \varepsilon \int_{\sigma(s_{j_0})}^t e_p(\tau, t) \Delta \tau \tag{6.39}$$

olur.

$$h(t) := x(\sigma(s_{j_0})) e_p(\sigma(s_{j_0}), t) + \int_{\sigma(s_{j_0})}^t f(\tau) e_p(\tau, t) \Delta \tau$$

olarak seçtiğimizde $h(t)$, $[\sigma(s_{j_0}), s_{j_0+1}]$ aralığında (6.14) eşlenik denkleminin bir çözümüdür. Yukarıdaki iki duruma dayanarak ve (6.36) ve (6.39) eşitsizlikleri ile birleştirildiğinde herhangi bir $t \in [a, b]^K$ için, (6.32) eşitsizliğini sağlayacak şekilde (6.14) eşlenik denkleminin karşılık gelen bir $h(t)$ çözümü vardır.

6.2.6. Sonuç

Teorem 6.2.5'teki (6.14) eşlenik denkleminin $h(t)$ çözümünün yapısının t değişkeninin değerine bağlıdır ve h çözümünün başlangıç değerinin t nin bulunduğu aralıkla ilişkilidir [11].

6.2.7. Teorem

$p \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ ile bazı $t^* \in [a, b]^K$ için $1 + \mu(t^*)p(t^*) < 0$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ rd- sürekli olsun. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için, $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ rd-sürekli türevlenebilir fonksiyonu her $t \in [a, b]^K$ için (6.25) eşitsizliğini sağlasın. O zaman (6.13) dinamik denkleminin bir $g \in C_{ra}^1([a, b], \mathbb{R})$ çözümü vardır öyle ki her $t \in [a, b]^K$ için

$$|y(t) - g(t)| \leq \varepsilon \int_a^b |e_p(t, \sigma(\tau))| \Delta\tau \quad (6.40)$$

sağlanır [11].

İspat

Teorem 6.2.4'teki gibi (6.25) eşitsizliğinden (6.27) eşitsizliğini elde edelim. Her $t \in [a, b]^K$ için (6.27) eşitsizliğinin her iki tarafının $\frac{1}{|1+\mu(t)p(t)|}$ ile çarparsak

$$\left| y^\Delta + (\ominus p)(t)y^\sigma - \frac{f(t)}{1+\mu(t)p(t)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{|1+\mu(t)p(t)|} \quad (6.41)$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 6.2.5'e göre herhangi bir $t \in [\sigma(s_i), s_{i+1}]$ için (6.41) eşitsizliğin her iki tarafını $(-1)^i e_{\ominus p}(t, a)$ ile çarparak

$$\begin{aligned} (-1)^{i+1} \varepsilon \frac{e_{\ominus p}(t, a)}{|1 + \mu(t)p(t)|} &\leq (-1)^i \left(y^\Delta e_{\ominus p}(t, a) + (\ominus p)(t)y^\sigma e_{\ominus p}(t, a) \right) \\ &\quad - (-1)^i f(t) e_p(\sigma(t), a) \\ &\leq (-1)^i \varepsilon \frac{e_{\ominus p}(t, a)}{|1 + \mu(t)p(t)|} \end{aligned}$$

elde ederiz. Teorem 6.2.5'in ispatındaki aynı argümanları kullanarak (6.13) dinamik denkleminin karşılık gelen bir $g(t)$ çözümünü oluşturabiliriz. Ayrıca, (6.40) eşitsizliği sağlanır.

Örnek

$[a, b]$ zaman skalası, $p(t) = 1$ ve $f(t) = \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$\left| x^\Delta + x^\sigma - \frac{1}{2} \right| < 1 := \varepsilon \quad (6.42)$$

eşitsizliğini göz önünde alalım. $\mathbb{R}$ de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ bir kapalı alındığında,

$$x^\Delta(t) = x'(t), x^\sigma(t) = x(t)$$

olur. $x(t) = e^{-t}$ fonksiyonunu alırsak kolayca görebiliriz ki

$$\left| x'(t) + x(t) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1 = \varepsilon$$

sağlanır. $h'(t) + h(t) - \frac{1}{2} = 0$ diferensiyel denkleminin genel çözümü $h(t) = ce^{-t} + \frac{1}{2}$ şeklindedir. $\mathbb{R}$ de $p(t) = 1$ olduğundan $e_p(\tau, t) = e^{\tau-t}$ dir. Teorem 6.2.2'ye göre

$$|x(t) - h(t)| = \left| ce^{-t} + \frac{1}{2} - e^{-t} \right| \leq \varepsilon \int_a^b e^{\tau-t} d\tau = e^{-t}(e^b - e^a) \quad (6.43)$$

olduğunu çıkarabiliriz. (6.43) eşitsizliğinde herhangi bir $t \in [a, b]$ olmak üzere

$$e^{-t}(e^a - e^b) \leq ce^{-t} + \frac{1}{2} - e^{-t} \leq e^{-t}(e^b - e^a)$$

şeklinde yazılır. Eşitsizlik düzenlendiğinde

$$e^a - e^b + 1 - \frac{1}{2}e^t \leq c \leq e^b - e^a + 1 - \frac{1}{2}e^t \quad (6.44)$$

eşitsizliği elde edilir. Herhangi bir $t \in [a, b]$ için (6.44)'ün sol tarafının üst sınırını t yerine a değerini yazarak, $\frac{1}{2}e^a + 1 - e^b$ ve (6.44)'ün sağ tarafının alt sınırını t yerine b değerini yazarak $\frac{1}{2}e^b + 1 - e^a$ şeklinde elde edilir. Bu nedenle (6.40) eşitsizliğinin verilen $x(t)$ çözümü için, uygun bir $c \left(\frac{1}{2}e^a + 1 - e^b \leq c \leq \frac{1}{2}e^b + 1 - e^a \right)$ sabiti seçtiğimiz sürece, $h' + h - \frac{1}{2} = 0$ diferensiyel denkleminin karşılık gelen $h(t) = ce^{-t} + \frac{1}{2}$ çözümü vardır öyle ki (6.43) eşitsizliğini sağlar. Sonuç olarak (6.43) eşitsizliğine göre herhangi bir $t \in [a, b]$ için

$$e^{-b}(e^b - e^a) \leq e^{b-a} - 1$$

olduğundan dolayı $h'(t) + h(t) - \frac{1}{2} = 0$ diferensiyel denklemi Hyers–Ulam anlamında kararlıdır.

Bu kesimi 2021 yılında Alghamdi, Aljhani, Bohner ve Hamza tarafından (6.13) denkleminde $p(t) = -\varphi(t)$ alınarak elde edilmiş HUS ile ilgili sonucu vererek bitirelim.

6.2.8. Teorem

X bir Banach uzayı, $\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $I = [a, b] \cap \mathbb{T}$ ($a < b$) olsun. Eğer herhangi bir $x_0 \in X$ için $y^\Delta + \varphi(t)y = f$ denkleminin $\phi(a) = x_0$ olacak şekilde bir ϕ çözümü varsa $L = (b - a)e_{|\varphi|}(b, a)$ bu denklemin HUS dir [16].

İspat

Kabul edelim ki her $t \in I^K$ için

$$\|y^\Delta(t) + \varphi(t)y(t) - f(t)\| \leq \varepsilon$$

olsun. $h(t) := y^\Delta(t) + \varphi(t)y(t) - f(t)$ olarak tanımlayalım. O zaman $h(t) + f(t) = y^\Delta(t) + \varphi(t)y(t)$ olur. $y(a) = x_0$ olarak alalım. Böylece [16, Lemma 2.1]'den

$$y(t) = x_0 - \int_a^t (\varphi(s)y(s) - (f(s) + h(s))) \Delta s, \text{ her } t \in I \quad (6.45)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\phi(t) = x_0 - \int_a^t (\varphi(s)\phi(s) - f(s)) \Delta s, \text{ her } t \in I \quad (6.46)$$

olarak yazabiliriz. (6.45) ve (6.46) tarafından,

$$\|y(t) - \phi(t)\| = \left\| \int_a^t h(s) \Delta s + \int_a^t (\varphi(s)(\phi(s) - y(s))) \Delta s \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_a^t \|h(s)\| \Delta s + \int_a^t |\varphi(s)| \|\phi(s) - y(s)\| \Delta s \\
&\leq \varepsilon(t - a) + \int_a^t |\varphi(s)| \|\phi(s) - y(s)\| \Delta s \\
&\leq \varepsilon(b - a) + \int_a^t |\varphi(s)| \|\phi(s) - y(s)\| \Delta s
\end{aligned}$$

elde ederiz. Eğer Gronwall eşitsizliğini kullanırsak [9, Teorem 6.4],

$$\begin{aligned}
\|y(t) - \phi(t)\| &\leq \varepsilon(b - a) + \int_a^t e_{|\varphi|}(t, \sigma(s)) |\varphi(s)| \varepsilon(b - a) \Delta s \\
&\leq \varepsilon(b - a) \left(1 + \int_a^t e_{|\varphi|}(t, \sigma(s)) |\varphi(s)| \Delta s \right) \\
&\leq \varepsilon(b - a) (1 + e_{|\varphi|}(t, a) - e_{|\varphi|}(t, t)) \\
&\leq \varepsilon(b - a) e_{|\varphi|}(t, a) \\
&\leq \varepsilon(b - a) e_{|\varphi|}(b - a) \\
&= L\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da teoremi ispatlar.



7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının giriş bölümünde çalışmalara hazırlayıcı nitelikte olan bilgiler verilmiştir. İkinci bölümünde birinci basamaktan lineer diferensiyel denklemlere ilişkin temel tanım ve kavramlar tanıtılıp örnek ile açıklanmıştır. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde ise diferensiyel ve fonksiyonel denklemlerin kararlılığı ile ilgili literatür taraması özetlenmiştir. Beşinci kesimde zaman skalası teorisi ele alınmış olup, delta türev, delta integral, birinci basamaktan dinamik denklemler, kompleks Hilger düzlemiyle beraber teoremlerde ve lemmalarda kullandığımız genelleştirilmiş üstel fonksiyon tanıtılıp birkaç örnek ile açıklanmıştır. Ardından altıncı bölümünün ilk kesiminde sabit katsayılı birinci basamaktan lineer homogen

$$y^\Delta(t) - ay(t) = 0, a \in \mathbb{R}$$

dinamik denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı ele alınmıştır. $t \in \mathbb{T}$ sağ saçılımlı ve $a = \frac{-1}{\mu(t)}$ olduğunda birinci basamaktan dinamik denklemler için $y^\Delta(t)$ den bahsedilemeyeceği açıklanmıştır. $a = 0$, $\phi(t) = \varepsilon t$ seçildiğinde ise yukarıdaki sabit katsayılı birinci basamaktan lineer homogen dinamik denklemin Hyers-Ulam kararlı olmayacağı gösterilmiştir. $\mathcal{R}$ regressiv ve $\mathcal{R}^+$ pozitif regressiv olarak alındığında, $a \neq 0$ ve $a \in \mathcal{R}^+$, $a < 0$ ve $a \in \mathcal{R}^+$, $a \notin \mathcal{R}^+$ ve $a \in \mathcal{R}$ durumları incelenmiş ve sonuçları verilmiştir. İkinci kesiminde ise farklı teknikler kullanılarak $\mathbb{T}$ zaman skalasında

$$x^\Delta = -p(t)x^\sigma + f(t)$$

eşlenik denkleme integralleme çarpanı yöntemi kullanılarak

$$y^\Delta = p(t)y + f(t)$$

denklemin ve eşlenik denkleminin Ulam kararlılığı ele alınmıştır. $p \in \mathcal{R}_{[a,b]}^+$ ve $p \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ olmak üzere iki farklı durumlarda eşlenik ve eşlenik olmayan birinci basamaktan lineer dinamik denklem modelleri üzerine Ulam kararlılığı incelenmiştir.

Bu tezde ele aldığımız fonksiyonel ve diferensiyel denklemlerin kararlılığı, zaman skalası üzerinde hesap ve lineer birinci basamaktan dinamik denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı alanında çalışacak olan bilim insanlarını bilgilendireceği ve çalışmalarında yardımcı olabileceği düşüncesindeyiz. Bu konuya ilgi duyan okuyucular önce birinci basamaktan homogen veya homogen olmayan lineer dinamik denklemler, ardından lineer olmayan birinci basamaktan dinamik denklemler ve daha sonra yüksek basamaktan lineer dinamik denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı hakkında incelemeler yapabilirler. Dolayısıyla buradan elde ettiği bilgileri birinci basamaktan lineer olmayan dinamik denklemler ya da yüksek basamaktan lineer dinamik denklemlere uygulayarak HUK ve HUS problemleri üzerine önemli sonuçlar elde edebilirler.



KAYNAKLAR

1. Mısır, A. (2016). *Teori teknik ve uygulamalı diferensiyel denklemler*. Gazi Kitapevi, Ankara.
2. Yanovsky, I. (2005). *Ordinary Differential Equations*. Graduate Level Problems and Solutions, 1-128.
3. Sanchez, D. A. (1968). *Ordinary Differential Equations and Stability Theory: An Introduction*, Dover Publications, Inc. New York, 1-174.
4. Hyers, D. H. (1941). On the stability of the linear functional equation. *Processdings of the National Academy of Sciences*, U.S.A. 27, 222-224.
5. Choubin, M., Javanshiri, H. (2021). A new approach to the Hyers-Ulam-Rassias stability of differential equations, *Results in Mathematics*, 1-14.
6. Takahasi, S. E., Miura, T., Miyajima, S. (2002). On the Hyers-Ulam stability of the Banach space-valued differential equation $y' = \lambda y$. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 39, 309-315.
7. Miura, T., Jung, S. M., Takahasi, S. E. (2003). A characterization of Hyers-Ulam stability of first order linear differential operators. *Journal of Mathematics Analysis and Application*, 286, 136-146.
8. Qurawai, M. N. (2014). On Hyers-Ulam-Rassias Stability for Bernoulli's and first order linear and nonlinear differential equations. *British Journal of Mathematics & Computer science*, 4(11), 1615-1628.
9. Bohner, M., Peterson, A. (2001). *Dynamic equations on time scales: An introduction with applications*, Birkhäuser, Boston, 1-78.
10. Anderson, D. R., Onitsuka, M. (2018). *Hyers-Ulam stability of first-order homogeneous linear dynamic equations on time scales*, *Demonstratio Mathematica*, 51:198-210.
11. Shen, Y. (2017). The Ulam stability of first order linear dynamic equations on time scales, *Result in Mathematics*, 72:1881-1895.
12. Anderson, D. R., Otto, J. (2015). Hyers-Ulam stability of linear differential equations with vanishing coefficients, *Communications in Applied Analysis*, 19, 15-30.
13. Georgiev, S. (2006). *Integral equations on time scales*. Atlantis Press, 21-22.
14. Uyar, N. K. (2019). *Lineer diferensiyel denklemlerin kararlılığı ve Hyers-Ulam kararlılığı*, Yüksek lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 15-26.
15. Kelley, W. G., Peterson, A. C. (2010). *The Theory of Differential Equations, Classical and Qualitative* (Second Edition). New York.

16. Alghamdi, M. A., Aljehani, A., Bohner, M., Hamza, A. E. (2021). Hyers-Ulam and Hyers-Ulam-Rassias stability of first-order linear dynamic equations, *Publications De L'institut Mathematique*, 109(123), 83-93.
17. Rassias, T. M. (2000). On The Stability of Functional Equations and a Problem of Ulam. *Acta Applicandae Mathematicae*, 62: 23–130.





GAZİ GELECEKTİR..