

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE DIAMOND TİPİNDE
TÜREV İÇEREN BAZI PROBLEMLER**

Ayşe Nur AKKILIÇ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Emrah YILMAZ

HAZİRAN-2019

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE DIAMOND TİPİNDE TÜREV
İÇEREN BAZI PROBLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Ayşe NUR AKKILIÇ
(171121107)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14 Mayıs 2019

Tezin Savunulduğu Tarih : 14 Haziran 2019

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Emrah YILMAZ (Fırat Üniversitesi)

Üye: Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU (Fırat Üniversitesi)

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Sertaç GÖKTAŞ (Mersin Üniversitesi)

HAZİRAN-2019

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanmasında ve yürütülmesinde, çalışmalarım süresince benden destek ve ilgisini esirgemeyen, bilgi ve hoşgörüsünden yararlandığım sayın hocam Doç. Dr. Emrah YILMAZ'a şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca çalışmalarım boyunca çeşitli sorularımı yanıtlayan ve benden yardımlarını, desteğini, sabrını ve bilgisini esirgemeyen Doç. Dr. Tuba GÜLŞEN hocama da teşekkür ederim.

Ayşe Nur AKKILIÇ

ELAZIĞ-2019



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
SEMBOLLER LİSTESİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. ZAMAN SKALASINDA TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1. Zaman Skalası ve Özellikleri	6
2.2. Delta ve Nabla Türevleri	7
2.3. Delta ve Nabla İntegralleri	13
2.4. Delta ve Nabla Üstel Fonksiyonlar	23
3. ZAMAN SKALASINDA DIAMOND- α TİPİNDE DİNAMİK DENKLEMLER.....	26
3.1. Diamond- α Türev	26
3.2. Diamond- α İntegral	28
3.3. Diamond- α Üstel Fonksiyon	31
3.4. Düzgün Zaman Skalası	32
3.5. Diamond- α Dinamik Denklemler.....	37
4. DIAMOND- α STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ	42
5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	53
KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ.....	60

ÖZET

Klasik manada Sturm-Liouville denklemi matematiksel fiziğin en önemli denklemlerinden birisidir. Başlangıçta, ısı iletimi problemlerinde yoğun olarak uygulanan Sturm-Liouville teorisi, günümüzde farklı fiziksel problemlere de uygulanmaktadır. Matematiksel fiziğin ihtiyacı gereği klasik Sturm-Liouville probleminde farklı genelleştirmeler yapılmış ve buna bağlı olarak lineer diferensiyel operatörler teorisi oluşturulmuştur. Bu çalışmada ise bu denklem bir zaman skalasında ele alınarak, diamond alfa tipinde Sturm-Liouville problemi tanımlanmıştır. Bu probleme ait özdeğerlerin basitliği, reelliği, farklı özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonların ortogonalitesi, alfa tipinde Lagrange eşitliği ve Green formülü verilmiştir. Ayrıca ele alınan problemin öz fonksiyonları için bir eşitlik bulunmuştur. Diamond alfa tipinde türev ve integral zaman skalasının işlem yapma açısından en sıkıntılı operatörleridir. Bunun nedeni diamond alfa tipinde türev ve integralin delta ve nabla türev ve integralinin kombinasyonu olmasıdır. Bu açıdan elde edilen öz fonksiyon oldukça önemlidir.

Anahtar Kelimeler: Zaman skalası, Diamond—alfa tipinde türev ve integral.

SUMMARY

Some problems which includes diamond type derivative on time scale

In classical terms, the Sturm-Liouville equation is one of the most important equations of mathematical physics. Initially, the Sturm-Liouville theory, applied extensively in heat conduction problems, is now applied in different physical problems. Different generalizations have been made in the classical Sturm-Liouville problem due to the need of mathematical physics and accordingly linear differential operators theory has been formed. In this study, this equation is considered on a time scale and the diamond alpha type Sturm-Liouville problem is defined. The simplicity of the eigenvalues of this problem, the real property, the orthogonality of the eigenvalues corresponding to the different eigenvalues, and the Lagrange equality and Green formula in the alpha type are given. In addition, an equality was found for the eigenfunctions of the problem. Diamond alpha-type derivative and integral on time scales are the most trouble operators in terms of processing. This is because the derivative and integral of diamond alpha type is a combination of delta and nabla derivative and integral. In this respect, obtained eigenfunction is very important.

Key Words: Time scales, Diamond–alpha type derivative and integral.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Bu kısımda tez içerisinde geçen şekillerin listesi yer almaktadır.

Şekil 1: Zaman skalasında noktaların sınıflandırılması.....6



SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$	: Doğal sayılar kümesi, Tam sayılar kümesi, Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	: Kompleks sayılar, Rasyonel sayılar, İrrasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{T}$	: Keyfi zaman skalası
$\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{T}_\kappa, \mathbb{T}_{\kappa}^\kappa$	: Zaman skalasından türetilmiş türevlenebilirlik bölgeleri
σ, ρ	: İleri sıçrama operatörü, geri sıçrama operatörü
μ, ν	: İleri ve geri graininess fonksiyonları
Δ	: Delta türev operatörü
Δf	: İleri fark operatörü
f^Δ	: f fonksiyonunun birinci mertebeden Δ -türevi
$f^{\Delta\Delta}$	: f fonksiyonunun ikinci mertebeden Δ -türevi
∇	: Nabla türev operatörü
∇f	: Geri fark operatörü
f^∇	: f fonksiyonunun birinci mertebeden ∇ -türevi
$f^{\nabla\nabla}$	: f fonksiyonunun ikinci mertebeden ∇ -türevi
$C_{rd}(\mathbb{T})$	: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde tanımlı rd -sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_{ld}(\mathbb{T})$	: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde tanımlı ld -sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_{rl}(\mathbb{T})$	: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde tanımlı rl -sürekli fonksiyonlar uzayı
$\diamond_\alpha$	: Diamond- α türev operatörü
$f^{\diamond_\alpha}$	: f fonksiyonunun birinci mertebeden diamond- α türevi
$f^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha}$	: f fonksiyonunun ikinci mertebeden diamond- α türevi
$L_p^{\diamond_\alpha}$	: p regresif fonksiyonuna göre diamond- α operatörü
$e_p^\Delta(t, s)$	: $s, t \in \mathbb{T}$ için genelleştirilmiş Δ üstel fonksiyon
$e_p^\nabla(t, s)$	: $s, t \in \mathbb{T}$ için genelleştirilmiş ∇ üstel fonksiyon
$e_p^{\diamond_\alpha}(t, t_0)$	: Diamond- α üstel fonksiyon
$E_p(t, t_0)$	: Kombine üstel fonksiyon
$\mathcal{R}$	: rd -sürekli ve regresif fonksiyonlar uzayı
$\mathcal{R}_\nu$	: ld -sürekli ve ν -regresif fonksiyonlar uzayı
$q^{\overline{\mathbb{Z}}}$	: Kuantum zaman skalası
$W_{\diamond_\alpha}$	: $\diamond_\alpha$ -Wronskian

1 GİRİŞ

Fark denklemleri matematikte ortaya atılan ilk teorilerden biri olup yaklaşık sekiz asırdır çalışılmaktadır. Bu teori, ayrıık zamanlarda meydana gelen olayların matematiksel olarak ifade edilmesinde kullanılmıştır. Fark denklemleriyle ilgili tarihteki ilk çalışmalar M.Ö. 2000 yıllarına dayanmaktadır. Bu çalışmalara, ilk defa bir denklemin köktünü bulma şeklinde Babilde rastlanmıştır [1]. Daha sonra *Arşimet*, *Öklid*, *Pisagor* gibi pek çok matematikçi de fark denklemleri ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Bunların dışında *Laplace*, sabit katsayılı homojen doğrusal fark denklemlerini, *Guichard* aynı denklemin homojen olmayan özel hallerini ve *Gelgrum* bu denklemlerin çözümlerinin asimptotik davranışını incelemiştir [2].

İlk olarak 17. yüzyılın ikinci yarısında, *Leibnitz* ve *Newton* tarafından başlatılıp, *Claurit*, *Frobenious*, *Euler* ve diğer birçok matematikçi tarafından ele alınan diferensiyel denklemler, fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler olarak ifade edilmiştir. Yani diferensiyel denklemler teorisinin temelinde, "doğada kopuklar yoktur" mantığı vardır. Bu yüzden diferensiyel denklemler teorisi, Fizik, Kimya, Biyoloji, Astronomi gibi temel bilimlerin yanısıra Ekonomi, İşletme gibi bazı sosyal bilimlerde de matematiksel ifade yöntemi olarak karşımıza çıkmaktadır.

Diferensiyel denklemler teorisi ile fark denklemleri teorisi arasında benzerlikler vardır. Süreklilik halleriyle verilen diferensiyel denklem, ayrıık benzeri olan fark denklemi ile ifade edilebilir. Ayrıca fark denklemleri, diferensiyel denklemlerin nümerik yaklaşıtımlarından da ortaya çıkabilir. Benzerliklerinin yanısıra diferensiyel denklemler teorisi ile fark denklemleri teorisi arasında önemli farklılıklar da bulunmaktadır. Bu farklılıklar matematiksel modellenin seçiminde zorluklar meydana getirmektedir. Doğada olayların kendi içinde sürekli ve kesikli olması durumlarının aynı anda olabileceği gerçeği yadsınamaz. Yani her doğa olayı süreklilik terimleri ile ifade edilemez. Bundan dolayı matematiksel olayların tümünü diferensiyel denklemler veya fark denklemleri ile ifade etmek mümkün olmaz. Dolayısıyla hem sürekli hem de ayrıık değişkenlerden oluşan matematiksel modeller üzerinde çalışılmasını sağlayan yeni bir teoriye ihtiyaç duyulmuştur. İşte bu teori zaman skalası teorisidir. Zaman skalası teorisi, 1987\88 yıllarında Alman matematikçi *Stephan Hilger* [3] tarafından ortaya konulmuştur. *Hilger* [4] bu konuyu danışmanı *Aulbach*'tan [5], [6], [7] almış ve bu konuda önemli sonuçlar elde etmiştir. *Hilger*'in amacı sürekli ve ayrıık analizi aynı çatı altında toplayan bir teori oluşturmaktır. Zaman skalası teorisi sayesinde, sürekli veya kesikli doğa olaylarının formülize edilebilmesi sağlanmaktadır.

Zaman skalası üzerinde tanımlanan denklemlere dinamik denklemler denir. Zaman skalasının

özel durumlarında dinamik denklemler, fark denklemi ya da diferensiyel denklem haline döndürür. Böylece fark denklemleri ve diferensiyel denklemler için farklı sonuçlar vermek yerine, ikisini de birleştiren bir denklem yazılabilir. Bununla birlikte, daha sonraki yıllarda yapılan çalışmalarda dinamik denklemler teorisinin sadece diferensiyel ve fark denklemleri için değil, zaman skalasının seçimine bağlı olarak, örneğin q -fark denklemleri gibi pek çok özel durum için de eşdeğer sonuçlar verdiği görülmüştür. Zaman skalasında dinamik denklemler ile ilgili kapsamlı bilgiler *Bohner ve Peterson'un* 2001 [8] ve 2003 [9] yıllarında yazdıkları kitaplarda yer almaktadır. 2016 yılında *Bohner ve Svetlin* [10] zaman skalası üzerinde çok değişkenli fonksiyonları açıklayan bir kitap yazmışlardır. Ayrıca belirtmelidir ki, zaman skalasında dinamik denklemlerin kuantum mekaniği, elektrik mühendisliği, sinir ağları, kombinatörler, ısı transferi, ekonomi ve popülasyon dinamiğine kadar birçok uygulaması vardır ([11], [12]).

Bu yeni teorisinin gelişmesiyle birlikte, hem pür hem de uygulamalı matematikte farklı türden dinamik denklemlerin çözümlerinin farklı özellikleri incelenerek geniş bir literatür oluşturulmuştur. Pür matematik dinamik denklemlerin çözümlerinin varlık teklik teoremleri üzerinde çalışırken, uygulamalı matematik ise çözümlerin kalitatif davranışları, yani çözümlerin salınımı, asimptotik davranışları, kararlılığı, periyodik yörüngeleri gibi özelliklerini incelemiştir.

Operatörlerin spektral teorisi, matematik, fizik ve mekaniğin pek çok alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları titreşim teorisinin problemleridir. Özellikle soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra Hilbert uzayında lineer öz eşlenik operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. Bu teori, 19. ve 20. yüzyıllarda bu konularda çalışan matematikçiler tarafından geliştirilerek üst seviyelere çıkarılmıştır. Bu çalışmalarda özdeğerler, öz fonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırmacı sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle veriler için asimptotik formüller bulunmuştur. Literatürde regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış ve spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatöre regüler, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları sonlu sayıda süreksiz nokta olan diferansiyel operatörlere singüler diferansiyel operatör denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. İlk defa 19. yüzyılda *Sturm* ve *Liouville* [13] tarafından ortaya konulmuştur. Sturm-Liouville teorisi bu iki matematikçinin 1829 ve 1836 yıllarında yaptığı çalışmalardan meydana gelmiştir. 1837 yılında *Sturm* ve *Liouville* kısa fakat oldukça önemli çalışmalarını "Journal de Mathe-

matica" adlı dergide yayımladılar. Bu çalışmada

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, 0 \leq x \leq 1,$$

diferensiyel denklemi için sınır değer problemini ele aldılar. Burada λ kompleks bir parametre, q ise $[0, 1]$ aralığında karesel integrallenebilen reel değerli bir fonksiyondur. Bu denklem literatürde *Sturm-Liouville* denklemi olarak bilinir. *Sturm* ve *Liouville* yukarıdaki denklemin

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0,$$

$$y(1) \cos \beta + y'(1) \sin \beta = 0,$$

sınır koşullarını sağlayan aşıkâr olmayan çözümlerini incelediler. Burada α ve β , $[0, 1]$ aralığında reel sayılardır. Bu koşullarla birlikte Sturm-Liouville denklemine, *Sturm-Liouville sınır değer* veya *özdeğer problemi* denir. Bu problemlerdeki spektral analize, bazı fizik problemlerinin bir sonucu olarak bakılabilir. Bir borudaki ses dalgaları, bir sicimin titreşimi ve bazı mekanik sistemler örnek olarak gösterilebilir [14].

$-y'' + q(x)y = \lambda y$ denkleminde, bir boyutlu zamandan bağımsız Schrödinger dalga denklemi de denir. Bu denklem zamana bağlı *Schrödinger* denkleminin Sturm-Liouville denkleminde bir indirgemesidir. Kuantum mekaniğinde bir parçacığın hareketini tanımlayan $\psi(x, y, z, t)$ dalga fonksiyonu

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + V(x, y, z)\psi,$$

şeklindeki Schrödinger denkleminin çözümüdür. Burada $\hbar$ Planc sabiti, μ parçacığın indirgenmiş kütlesi, V ise zamana bağlı olmayan potansiyel enerji fonksiyonudur. Bu denklemin bir boyutlu hali $\psi = \psi(x, t)$ olmak üzere

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi,$$

şeklindedir. Bir çok uygulamada bu denklem $\psi(x, t) = f(x)$ başlangıç şartı ile verilir. Bu denklem değişkenlerine ayırma metodu ile çözülürse

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} y''(x) + V(x)y(x) = Ey(x),$$

olur. Burada E ayırma sabitidir.

$$q(x) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(x) \text{ ve } \lambda = \frac{2\mu E}{\hbar^2},$$

alınırsa

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),$$

elde edilir. Burada q potansiyel alanı, y ise x noktasındaki dalga genliğini temsil eder. λ sistemin enerji seviyelerine karşılık gelir. Bütün enerji seviyelerinin mümkün olmadığını ve ayrık bir küme oluşturduğunu gösterir. Bu özdeğerlerin ya da enerji seviyelerinin ayrık bir küme oluşturmalarının kuantum mekaniğinde çok önemli sonuçları vardır.

Özdeğerler (veya karakteristik değerler) fiziksel bir sistemin sahip olabileceği özel değerlerde nasıl davrandıklarını belirlemek için önemlidir. Bu değerler sisteme ait özel bir enerji, özel bir frekans değeri, dalgaların girişimi veya kuvvet dengesinin sağlandığı bir duruma ait olabilir. Öz fonksiyonlar ise, fiziksel sistemin sahip olduğu özdeğerlerdeki (örneğin bir dalga) fonksiyonları olabilir. Titreşim yapan bir sistemin doğal frekansı ile dışarıdan uygulanan sürücü kuvvetin frekansı birbirine eşit veya yakın olması sistemin kararlılığı açısından veya malzemelerin elastik özelliklerinin incelendiği durumlarda, şekil bozukluklarının başladığı noktaların belirlenmesinde özfonksiyonların alacağı özdeğerler önemli olmaktadır. Bu tip problemler genel olarak spektral problemler olarakta bilinir. Spektral problemler düz ve ters olmak üzere ikiye ayrılır. Fiziksel büyüklükler verildiğinde, sistemin enerji seviyelerinin bulunması problemine düz problem denir. Frekansların, enerji seviyelerinin ya da matematiksel dil ile özdeğerlerin bilgisinden, fiziksel parametreleri yapılandırmaya ters problem denir. *Sturm-Liouville* ve *Dirac* operatörleri için spektral problemler Levitan ve Sargsjan [15] tarafından çalışılmıştır.

Fiziksel olarak oldukça önemli olan Sturm-Liouville sınır değer problemi ile ilgili zaman skalasında bir çok çalışma vardır. 1993 yılında *Erbe ve Hilger* [16] zaman skalasında Sturmian teoriyi çalışmışlardır. 1996 yılında *Bohner* [17] Sturm-Liouville fark denklemlerini incelemiştir. Sturm-Liouville sınır değer problemi için düz problem 1999 yılında *Agarwal, Bohner ve Wong* [18], [19] tarafından keyfi zaman skalası üzerinde incelendi. 2001 yılında *Agarwal, Bohner ve Peterson*, [20] zaman skalasında eşitsizlikleri çalıştı. 2002 yılında *Guseinov ve Kaymakçalan*, [21] zaman skalasında delta ve nabla integrali inceledi. *Atici ve Guseinov* [22] bu yıl içerisinde zaman skalası üzerinde sınır değer problemlerinin green fonksiyonlarını çalıştı. 2003 yılında *Guseinov* [23] integrallenebilmenin temellerini zaman skalasında inceledi ve önemli sonuçlar elde etti. 2007 yılında *Guseinov* [24] zaman skalası üzerinde Sturm-Liouville denklemi için açılım teoremlerini çalıştı. Aynı yıl içerisinde *Davidson, Rynne*, [25] self-adjoint sınır değer problemlerini zaman skalasında çalıştı. Buna ilaveten *Rynne*, [26] zaman skalasında L_2 uzayını tanımladı. 2008 yılında *Kong* [27] ayrık sınır şartlı Sturm-Liouville sınır değer problemini zaman skalasında çalıştı. *Amster, De Napoli ve Pinasco* [28] 2009 yılında zaman skalası üzerinde özdeğerlerin dağılımını inceledi. 2011 yılında *Zhang* [29] zaman skalası üzerinde genelleştirilmiş Sturm-Liouville dinamik sistemi için çok katlılık

sonuçları elde etti. *Bairamov, Aygar ve Koprubasi*, [30] 2011 yılında parametreye bağlı ayrık Sturm-Liouville denkleminin spektrumunu inceledi. 2012 yılında *Eckhardt ve Teschl* [31] zaman skalası üzerinde Sturm-Liouville operatörlerini inceledi. 2017 yılında *Ozkan* [32] parametreye bağlı sınır koşullarına sahip Sturm-Liouville problemini zaman skalasında inceledi. Aynı yıl *Allahverdiev, Eryilmaz ve Tuna*, [33] sınır koşullarında parametre bulunduran dissipative Sturm-Liouville problemini zaman skalasında inceledi. Bu yıl içerisinde yine *Zemánek*, [34] zaman skalası üzerinde Sturm-Liouville probleminin Weyl çözümlerini inceledi. Spektral teoremin zaman skalasında incelenmesine yönelik bunların dışında önemli sayıda çalışma vardır ([35-53]).

Sturm-Liouville probleminin zaman skalasında ele alınması hem sürekli hem de kesikli durumda bu problem için önemli sonuçlar verdi. Tüm bu genelleştirmeler bu problemin sonuçlarını da genelleştirmiştir. Bu çalışmada birçok açıdan önemli olan bu problemin diamond-alfa türev durumunda tanımlaması yapılacak ve spektral özellikleri yapılacaktır. Böylece fiziksel açıdan çok önemli bir yere sahip olan Sturm-Liouville problemi hem Δ - hem de ∇ -türevin kombinasyonu olan $\diamond_\alpha$ -türevi içerecek şekilde ele alınarak genelleştirilmiştir.

2 ZAMAN SKALASINDA TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Zaman skalası ve özellikleri

Tanım 2.1.1. (*Zaman skalası*) [8, 9] Reel sayıların boş olmayan, kapalı, keyfi bir alt kümesine *zaman skalası* denir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ile gösterilen reel sayılar, tam sayılar, doğal sayılar ve negatif olmayan tam sayılar kümesi zaman skalasına örnek olarak verilebilirler. Farklı olarak $[0, 1]$, $[2, 3]$, $\mathbb{N} \cup [0, 1]$ ve Cantor kümesi gibi kapalı alt kümeler de birer zaman skalasıdır. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $(0, 1)$ kümeleri ise zaman skalası değildir.

Tanım 2.1.2. (*İleri ve geri sıçrama operatörleri*) [8, 9] $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere, $t \in \mathbb{T}$ için, $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü

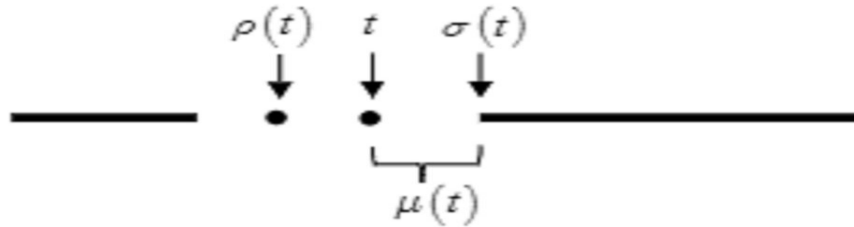
$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\},$$

$\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ geri sıçrama operatörü

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\},$$

ile tanımlanır. Burada $\forall t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) \geq t$ ve $\rho(t) \leq t$ ve $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$, $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ şeklindedir.

t noktası, $\mathbb{T}$ zaman skalasının maksimum noktası ise $\sigma(t) = t$, minimum noktası ise $\rho(t) = t$ olarak tanımlanır. $\sigma(t) > t$ ise t noktasına *sağ saçılmış nokta*, $\rho(t) < t$ ise t noktasına *sol saçılmış nokta* denir. t noktası hem sağ saçılmış hem de sol saçılmış ise *ayrık nokta* adını alır. $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise t noktasına *sağ yoğun nokta*, $t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise t noktasına *sol yoğun nokta* denir. Hem sağ yoğun hem de sol yoğun olan noktalara *yoğun nokta* adı verilir [54].



Şekil 1. Zaman skalasında noktaların sınıflandırılması

$\sigma(t)$ ileri sıçrama operatörü ile ileri graininess fonksiyonu $\mu(t)$ ve $\rho(t)$ geri sıçrama operatörü ile geri graininess fonksiyonu $\nu(t)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır [8, 9]:

$$\mu : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow [0, \infty), \mu(t) := \sigma(t) - t,$$

$$\nu : \mathbb{T}_\kappa \rightarrow [0, \infty), \nu(t) := t - \rho(t).$$

Burada $\mathbb{T}^\kappa$ ve $\mathbb{T}_\kappa$ kümeleri aşağıda tanımlı verilen türevlenebilirlik bölgeleridir. $\mathbb{T}$ üzerinde Δ ve ∇ türevlerinin tanımlanabilmesi için ilk olarak $\mathbb{T}$ den türetilen $\mathbb{T}^\kappa$ ve $\mathbb{T}_\kappa$ kümeleri tanımlanmalıdır.

Tanım 2.1.3. ($\mathbb{T}$ zaman skalasından türetilmiş kümeler) [8, 9] $\mathbb{T}^\kappa$ kümesi, $\mathbb{T}$ sol saçılımlı bir m supremum değerine sahip ise $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} - m$; diğer durumlarda $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$ şeklinde tanımlanır. $\mathbb{T}_\kappa$ kümesi, $\mathbb{T}$ sağ saçılımlı bir n infimum değerine sahip ise $\mathbb{T}_\kappa = \mathbb{T} - n$; diğer durumlarda $\mathbb{T}_\kappa = \mathbb{T}$ şeklinde tanımlanır. Başka bir ifade ile,

$$\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus \{m\}; & \sup \mathbb{T} = m \text{ ve } m \text{ sol saçılımlı ise} \\ \mathbb{T}; & \text{diğer hallerde} \end{cases},$$

$$\mathbb{T}_\kappa = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus \{n\}; & \inf \mathbb{T} = n \text{ ve } n \text{ sağ saçılımlı ise} \\ \mathbb{T}; & \text{diğer hallerde} \end{cases},$$

şeklindedir. Burada $\mathbb{T}^\kappa$ kümesine Δ türevlenebilirlik bölgesi, $\mathbb{T}_\kappa$ kümesine de ∇ türevlenebilirlik bölgesi denir. Ayrıca $\mathbb{T}_\kappa^\kappa = \mathbb{T}^\kappa \cap \mathbb{T}_\kappa \diamond_\alpha$ türevlenebilirlik bölgesi olup diamond-alfa ($\diamond_\alpha$) türev bu küme üzerinde tanımlanacaktır [55]. Burada $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall t \in \mathbb{T}$ için $f^\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$, $f^\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ise $f^\rho(t) = f(\rho(t))$ olarak tanımlanır.

Örnek 2.1.4. [10] $\mathbb{T} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ olsun. $\sup \mathbb{T} = 1$ ve $\rho(1) = \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} / \left(\frac{1}{2}, 1 \right] = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} / \{1\} \right\} \cup \{0\},$$

olur. Benzer şekilde $\inf \mathbb{T} = 0$ ve $\sigma(0) = 0$ olduğundan

$$\mathbb{T}_\kappa = \mathbb{T},$$

şeklindedir. O halde $\mathbb{T}_\kappa^\kappa = \mathbb{T}^\kappa \cap \mathbb{T}_\kappa = \mathbb{T} / \left(\frac{1}{2}, 1 \right]$ şeklinde gösterilebilir.

2.2 Delta ve nabla türevleri

Bu kısımda farklı iki operatör kullanılarak iki farklı türev tanımı yapılacaktır. Bunlardan birincisi σ ileri sıçrama operatörü ile tanımlanan Δ türev, diğeri ρ geri sıçrama operatörü ile tanımlanan ∇ türevdir. Zaman skalasında Δ ve ∇ türev ile süreklilik kavramlarını tanımlamak için, öncelikle komşuluk kavramına ihtiyaç vardır.

Tanım 2.2.1. [56] $U \subset \mathbb{T}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $U_\varepsilon(t) = \{s \in \mathbb{T} : |s - t| < \varepsilon\}$ kümesine t noktasının ε komşuluğu denir.

Tanım 2.2.2. [56] $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $t \in U(t_0)$ için, $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $U(t_0)$ komşuluğu bulunabiliyorsa $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $t = t_0$ noktasında sürekli denir.

Örnek 2.2.3. [56] $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} |t| & , t < 0 \\ t + 1 & , t \geq 0 \end{cases}$ fonksiyonu verilsin.

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise f fonksiyonu, $t = 0$ noktasında sürekli değildir.

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise f fonksiyonu, $\forall t \in \mathbb{Z}$ noktasında sürekli dir.

Tanım 2.2.4. (Hilger Delta Türev) [8, 9] $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ ve t noktasının bir $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ ($\delta > 0$) komşuluğundaki her s için

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|,$$

olacak şekilde bir $f^\Delta(t)$ sayısı mevcut ise, bu sayıya f fonksiyonunun t noktasındaki Hilger Δ (delta) türevi denir. $\forall t \in \mathbb{T}^\kappa$ için $f^\Delta(t)$ türevi mevcut ise, f fonksiyonu $\mathbb{T}^\kappa$ üzerinde Δ türevlenebilirdir denir ve $f^\Delta : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu f fonksiyonunun $\mathbb{T}^\kappa$ üzerindeki Δ türevi olarak adlandırılır. Yukarıdaki tanım aşağıdaki limit mevcut olmak üzere,

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s},$$

şeklinde de verilebilir. Şimdi Δ türevin süreklilik ile ilişkisi başta olmak üzere bazı önemli özellikleri aşağıdaki teoremd e verilecektir.

Teorem 2.2.5. [8, 9] $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ olsun.

- i. f , t noktasında Δ türevlenebilir ise, t noktasında sürekli dir.
- ii. f , t noktasında sürekli ve t sağ saçılmış nokta ise t noktasında Δ türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)},$$

şeklindedir.

iii. t noktası sağ yoğun ise f fonksiyonunun t noktasında Δ türevlenebilir olması ancak ve ancak

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

limitinin mevcut olması ile mümkündür. Bu durumda $\Delta-$ türev

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

şeklindedir.

iv. f, t noktasında Δ türevlenebilir ise

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t),$$

eşitliği mevcuttur.

Tanım 2.2.6. (*Nabla Türev*) [?] $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_\kappa$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve t noktasının bir $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ ($\delta > 0$) komşuluğundaki her s için

$$|[f(s) - f(\rho(t))] - f^\nabla(t)[s - \rho(t)]| \leq \varepsilon |s - \rho(t)|,$$

olacak şekilde bir $f^\nabla(t)$ sayısı mevcut ise, bu sayıya f fonksiyonunun t noktasındaki ∇ (nabla) türevi denir. $\forall t \in \mathbb{T}_\kappa$ için $f^\nabla(t)$ türevi mevcut ise f fonksiyonu $\mathbb{T}_\kappa$ üzerinde ∇ türevlenebilirdir denir ve $f^\nabla : \mathbb{T}_\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu f fonksiyonunun $\mathbb{T}_\kappa$ üzerindeki ∇ türevi olarak adlandırılır. Nabla türevin yukarıdaki tanımı aşağıdaki limit mevcut olmak üzere

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(\rho(s))}{t - \rho(s)},$$

şeklinde de verilebilir. Şimdi ∇ türevinin süreklilik ile ilişkisi ve bazı önemli özellikleri aşağıdaki teoremden verilecektir.

Teorem 2.2.7. [8, 9] $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_\kappa$ olsun.

- i.** f, t noktasında ∇ türevlenebilir ise, t noktasında süreklidir.
- ii.** f, t noktasında sürekli ve t sol saçılmış nokta ise, t noktasında ∇ türevlenebilirdir ve

$$f^\nabla(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)},$$

şeklindedir.

iii. t noktası sol yoğun ise, f fonksiyonunun t noktasında ∇ türevlenebilir olması ancak ve ancak

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

limitinin mevcut olması ile mümkündür. Bu durumda

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

şeklindedir.

iv. f, t noktasında ∇ türevlenebilir ise

$$f(\rho(t)) = f(t) - \nu(t)f^\nabla(t),$$

eşitliği mevcuttur.

Örnek 2.2.8. [57] $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$H_0 = 0, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

ifadesi *Harmonik Sayılar* olarak adlandırılır. $\mathbb{T} = \{H_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\sigma(H_n) = H_{n+1}, \rho(H_n) = H_{n-1}, \rho(H_0) = H_0,$$

ve

$$\begin{aligned} \mu(H_n) &= \sigma(H_n) - H_n \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada bir $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ -türevi

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \Rightarrow f^\Delta(H_n) = \frac{f(\sigma(H_n)) - f(H_n)}{\mu(H_n)} = \frac{f(H_{n+1}) - f(H_n)}{\frac{1}{n+1}} \\ &= (n+1)(f(H_{n+1}) - f(H_n)), \end{aligned}$$

olacaktır. Şimdi de $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun ∇ -türevini elde edelim.

$$\begin{aligned} \nu(H_n) &= H_n - \rho(H_n) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} f^\nabla(t) &= \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)} \Rightarrow f^\nabla(H_n) = \frac{f(H_n) - f(\rho(H_n))}{\nu(H_n)} = \frac{f(H_n) - f(H_{n-1})}{\frac{1}{n}} \\ &= n(f(H_n) - f(H_{n-1})) \end{aligned}$$

olacaktır.

Teorem 2.2.9. (*Delta Türev ve Nabla Türev İlişkisi*) [8, 9]

i. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{T}^\kappa$ için Δ -türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $f, \sigma(\rho(t)) = t$ şartını sağlayan her $t \in \mathbb{T}_\kappa$ için ∇ -türevlenebilirdir ve

$$f^\nabla(t) = f^\Delta(\rho(t)),$$

şeklindedir.

ii. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{T}_\kappa$ için ∇ -türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $f, \rho(\sigma(t)) = t$ şartını sağlayan her $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için Δ -türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = f^\nabla(\sigma(t)),$$

şeklindedir [8, 9].

Teorem 2.2.10. (*Delta Türevin Temel Kuralları*) [8, 9] $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^\kappa$ üzerinde Δ -türevlenebilir olsunlar. Bu durumda

- i. $f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında Δ -türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t),$$

şeklindedir.

- ii. $\forall c$ sabiti için $cf : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında Δ -türevlenebilirdir ve

$$(cf)^\Delta(t) = cf^\Delta(t),$$

şeklindedir.

- iii. $fg : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında Δ -türevlenebilirdir ve

$$\begin{aligned} (fg)^\Delta(t) &= f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) \\ &= f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t)), \end{aligned}$$

şeklindedir.

- iv. $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}$, t noktasında Δ -türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))},$$

şeklindedir.

- v. $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$, t noktasında Δ -türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))},$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.11. (*Nabla Türevin Temel Kuralları*) [8, 9] $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}_\kappa$ üzerinde ∇ -türevlenebilir olsunlar. Bu durumda

- i. $f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında ∇ -türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^\nabla(t) = f^\nabla(t) + g^\nabla(t),$$

şeklindedir.

- ii. $\forall c$ sabiti için $cf : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında ∇ -türevlenebilirdir ve

$$(cf)^\nabla(t) = cf^\nabla(t),$$

şeklindedir.

iii. $fg : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında ∇ -türevlenebilirdir ve

$$\begin{aligned}(fg)^\nabla(t) &= f^\nabla(t)g(t) + f(\rho(t))g^\nabla(t) \\ &= f(t)g^\nabla(t) + f^\nabla(t)g(\rho(t)),\end{aligned}$$

şeklindedir.

iv. $f(t)f(\rho(t)) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}, t$ noktasında ∇ -türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\nabla(t) = -\frac{f^\nabla(t)}{f(t)f(\rho(t))},$$

şeklindedir.

v. $g(t)g(\rho(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}, t$ noktasında ∇ -türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\nabla(t) = \frac{f^\nabla(t)g(t) - f(t)g^\nabla(t)}{g(t)g(\rho(t))},$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.12. [8, 9] c keyfi bir sabit ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ için

i. $f(t) = (t - c)^m$ ise

$$f^\Delta(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - c)^v (t - c)^{m-v-1},$$

$$f^\nabla(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\rho(t) - c)^v (t - c)^{m-v-1},$$

ii. $g(t) = \frac{1}{(t - c)^m}$ ise

$$g^\Delta(t) = - \sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(t) - c)^{m-v} (t - c)^{v+1}},$$

$$g^\nabla(t) = - \sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{(\rho(t) - c)^{m-v} (t - c)^{v+1}},$$

olur.

Sonuç 2.2.13. $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ olmak üzere $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun t noktasında Δ türevinin var olması ∇ türevinin de var olduğu anlamına gelmez. Aynı şekilde f fonksiyonunun t noktasında ∇ türevinin var olması Δ türevinin de var olduğu anlamına gelmez [58, 59].

Tanım 2.2.14. (Yüksek mertebeden Δ ve ∇ -türev) [8, 9] $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ her mertebeden Δ ve ∇ türevli bir fonksiyon olsun. f^Δ nın $\mathbb{T}^{\kappa^2}$ üzerindeki Δ türevi; $f^{\Delta\Delta} : \mathbb{T}^{\kappa^2} \rightarrow \mathbb{R}$, $(n-1)$. mertebeden Δ türevi, $n \in \mathbb{N}$ için $f^{\Delta^n} : \mathbb{T}^{\kappa^n} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır. f^∇ nın $\mathbb{T}_{\kappa^2}$ üzerindeki ∇ türevi $f^{\nabla\nabla} : \mathbb{T}_{\kappa^2} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde olup, $(n-1)$. mertebeden ∇ türevi, $f^{\nabla^n} : \mathbb{T}_{\kappa^n} \rightarrow \mathbb{R}$ olarak tanımlanır. Yukarıdaki tanımlamalar için,

$$\begin{aligned}\rho^0(t) &= \sigma^0(t) = t \\ f^{\Delta^0} &= f^{\nabla^0} = f \\ \mathbb{T}^{\kappa^0} &= \mathbb{T}_{\kappa^0} = \mathbb{T}\end{aligned}$$

eşitlikleri vardır.

Sonuç 2.2.15. [57] f ve g fonksiyonları ikinci mertebeden Δ veya ∇ türevlenebildikleri halde fg çarpım fonksiyonu genelde ikinci mertebeden türevlenemeyebilir.

i. f ve g fonksiyonları ikinci mertebeden Δ türevlenebilir ve f^σ, Δ türevlenebilir ise

$$\begin{aligned}\left((fg)^\Delta\right)^\Delta &= (f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta)^\Delta = f^{\Delta\Delta} g + f^{\Delta\sigma} g^\Delta + f^{\sigma\sigma} g^{\Delta\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta} g + (f^{\Delta\sigma} + f^{\sigma\Delta}) g^\Delta + f^{\sigma\sigma} g^{\Delta\Delta},\end{aligned}$$

şeklindedir.

ii. f ve g fonksiyonları ikinci mertebeden ∇ türevlenebilir ve f^ρ, ∇ türevlenebilir ise

$$\begin{aligned}\left((fg)^\nabla\right)^\nabla &= (f^\nabla g + f^\rho g^\nabla)^\nabla = f^{\nabla\nabla} g + f^{\nabla\rho} g^\nabla + f^{\rho\rho} g^{\nabla\nabla} \\ &= f^{\nabla\nabla} g + (f^{\nabla\rho} + f^{\rho\nabla}) g^\nabla + f^{\rho\rho} g^{\nabla\nabla},\end{aligned}$$

şeklindedir.

2.3 Delta ve nabla integralleri

İlk olarak Δ ve ∇ integrallenebilir fonksiyonlarını tanımlamak için bazı kavramların ifade edilmesi gerekmektedir.

Tanım 2.3.1. (Regüler fonksiyon) [8, 9] $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$ üzerindeki tüm sağ yoğun noktalarda sağ taraflı limitleri ve $\mathbb{T}$ üzerindeki tüm sol yoğun noktalarda sol taraflı limitleri var ise, f fonksiyonuna *regüler fonksiyon* denir.

Tanım 2.3.2. (*rd, ld, rl-süreklili fonksiyonlar uzayı*) [8, 9] $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{T}$ üzerindeki sağ yoğun noktalarda sürekli ve sol yoğun noktalarda sonlu limite sahip ise f

fonksiyonuna *rd-sürekli fonksiyon*, sol yoğun noktalarda sürekli ve sağ yoğun noktalarda sonlu limite sahip ise f fonksiyonuna *ld-sürekli fonksiyon*, hem sağ hem sol yoğun noktalarda sürekli ise f fonksiyonuna *rl-sürekli fonksiyon* denir. Bu tür fonksiyonların uzayları sırası ile

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}),$$

$$C_{ld} = C_{ld}(\mathbb{T}) = C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R}),$$

$$C_{rl} = C_{rl}(\mathbb{T}) = C_{rl}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \cap C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R}),$$

ile gösterilirler. Türevleri *rd-*, *ld-* ve *rl-sürekli* olan fonksiyonların uzayları sırası ile C_{rd}^1 , C_{ld}^1 , C_{rl}^1 şeklinde gösterilir.

Teorem 2.3.3. [8, 9] $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

- i. f sürekli ise, *rd* (veya *ld*, veya *rl*)—sürekli dir.
- ii. f *rd* (veya *ld*, veya *rl*)—sürekli ise, regülerdir.
- iii. σ operatörü *rd-sürekli*, ρ operatörü *ld-sürekli* dir.
- iv. f sürekli bir fonksiyon olmak üzere $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu regüler veya sürekli ise $f \circ g$ fonksiyonu da aynı özelliğe sahiptir.

Tanım 2.3.4. (Δ —anti türev) [56] $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^\kappa$ üzerinde Δ —türevlenebilir ve $\forall t \in \mathbb{T}^\kappa$ için $F^\Delta(t) = f(t)$ ise, F fonksiyonuna f nin Δ —anti türevi veya ilkeli denir.

Tanım 2.3.5. (*Bir fonksiyonun delta integrali*) [8, 9] $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu regüler olsun. Bu durumda F fonksiyonu f nin ön-anti Δ —türevi ve C keyfi bir sabit olmak üzere, f fonksiyonunun Δ integrali

$$\int f(t) \Delta t = F(t) + C,$$

şeklinde tanımlanır. f fonksiyonunun Cauchy Δ integrali ise $\forall r, s \in \mathbb{T}$ için

$$\int_r^s f(t) \Delta t = F(s) - F(r),$$

şeklindedir.

Teorem 2.3.6. (*Delta integralin varlığı*) [8, 9] Her *rd-sürekli* fonksiyon anti Δ —türeve sahiptir. Özel olarak $t_0 \in \mathbb{T}$ ise, $t \in \mathbb{T}$ için f fonksiyonunun anti Δ —türevi olan F fonksiyonu

$$F(t) := \int_{t_0}^t f(\tau) \Delta \tau,$$

şeklindedir. Benzer şekilde, her ld -süreklili fonksiyon anti ∇ -türeve sahiptir

Teorem 2.3.7. [8, 9] $f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ ise

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta\tau = \mu(t)f(t),$$

şeklindedir.

İspat: Bir önceki teoremden f fonksiyonunun F gibi bir anti Δ -türevi vardır ve

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta\tau = F(\sigma(t)) - F(t) = \mu(t)F^\Delta(t) = \mu(t)f(t),$$

şeklindedir.

Tanım 2.3.8. [10] (Zaman skalasında birinci tipten genelleştirilmiş integral) $f, [a, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $A \geq a$ olacak şekilde a noktasından zaman skalasının bir $A \in \mathbb{T}$ noktasına integrallenebilir olsun.

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^A f(t) \Delta t \right\},$$

limiti mevcut ise bu limite f fonksiyonunun $[a, \infty)$ aralığındaki birinci tip genelleştirilmiş integrali denir ve

$$\int_a^\infty f(t) \Delta t = \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^A f(t) \Delta t \right\}, \quad (2.3)$$

şeklinde gösterilir. Böyle bir durumda

$$\int_a^\infty f(t) \Delta t, \quad (2.4)$$

integrali vardır ve yakınsaktır denir. Eğer (2.3) limiti mevcut değilse (2.4) integrali iraksaktır denir. Burada $F^\Delta(t) = f(t)$ olmak üzere F fonksiyonu f in Cauchy integralidir.

Örnek 2.3.9. [10] $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun.

$$\int_1^\infty \frac{3t^2 + 3t + 1}{t^3(t+1)^3} \Delta t,$$

birinci çeşit genelleştirilmiş integrali verilsin. Burada $\sigma(t) = t + 1$ dir. $F(t) = \frac{1}{t^3}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
F^\Delta(t) &= -\frac{(\sigma(t))^2 + t\sigma(t) + t^2}{t^3(\sigma(t))^3} \\
&= -\frac{(t+1)^2 + t(t+1) + t^2}{t^3(t+1)^3} \\
&= -\frac{t^2 + 2t + 1 + t^2 + t + t^2}{t^3(t+1)^3} \\
&= -\frac{3t^2 + 3t + 1}{t^3(t+1)^3}
\end{aligned}$$

dir. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{3t^2 + 3t + 1}{t^3(t+1)^3} \Delta t &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{3t^2 + 3t + 1}{t^3(t+1)^3} \Delta t \\
&= -\lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A F^\Delta(t) \Delta t \\
&= -\lim_{A \rightarrow \infty} (F(A) - F(1)) \\
&= -\lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{A^3} - 1 \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olur. Dolayısı ile verilen integral yakınsaktır.

Örnek 2.3.10. $[10] \mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0}$ olsun.

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^3} \Delta t$$

birinci çeşit genelleştirilmiş integrali verilsin. $\sigma(t) = 2t$ ve $F(t) = \frac{1}{t^2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
F^\Delta(t) &= -\frac{\sigma(t) + t}{t^2(\sigma(t))^2} \\
&= -\frac{2t + t}{4t^4} \\
&= -\frac{3}{4t^3}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{t^3} \Delta t &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{1}{t^3} \Delta t \\
&= -\frac{4}{3} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A F^{\Delta}(t) \Delta t \\
&= -\frac{4}{3} \lim_{A \rightarrow \infty} (F(A) - F(1)) \\
&= -\frac{4}{3} \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{A^2} - 1 \right) \\
&= \frac{4}{3},
\end{aligned}$$

olur. Yani verilen integral yakınsaktır.

Tanım 2.3.11. [10] (Zaman Skalasında ikinci tipten genelleştirilmiş integral) $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $a, b \in \mathbb{T}$, $a < b$ ve b noktası sol yoğun nokta olmak üzere f fonksiyonu $[a, b)$ aralığında tanımlı olsun. Farzedelim ki f fonksiyonu $c < b$ olmak üzere her $[a, c]$ aralığında integrallenebilir ve $[a, b)$ üzerinde sınırsız olsun. O halde

$$\int_a^b f(t) \Delta t, \tag{2.5}$$

ifadesine ikinci tipten genelleştirilmiş integral denir. (2.5) integrali $t = b$ noktasında singülerdir. Eğer

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(t) \Delta t, \tag{2.6}$$

sol taraflı limiti mevcut ise (2.5) integrali mevcuttur ve yakınsaktır. Bu durumda (2.5) integralinin değeri

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(t) \Delta t,$$

şeklinde gösterilir. Eğer (2.6) limiti mevcut değilse (2.5) integrali mevcut değildir ya da ıraksaktır denir.

Örnek 2.3.12. [10] $\mathbb{T} = [0, 1] \cup 2^{\mathbb{N}}$ olmak üzere

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{1-t^2}, & t \in [0, 1] \text{ ise} \\ t^4, & t \in 2^{\mathbb{N}} \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin. $\int_0^8 \frac{1}{f(t)} \Delta t$ ikinci çeşit genelleştirilmiş integralini ele alalım.

$$\begin{aligned}
\int_0^8 \frac{1}{f(t)} \Delta t &= \int_0^1 \frac{1}{f(t)} \Delta t + \int_2^8 \frac{1}{f(t)} \Delta t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \Delta t + \int_2^8 \frac{1}{t^4} \Delta t \\
&= \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt + \frac{1}{t^4} \mu(t) \big|_{t=2} + \frac{1}{t^4} \mu(t) \big|_{t=4} \\
&= \lim_{c \rightarrow 1^-} \arcsin t \big|_{t=0}^{t=c} + \frac{2}{16} + \frac{4}{256} \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{9}{64},
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde verilen integral yakınsaktır.

Örnek 2.3.13. $[10]$ $\mathbb{T} = \{-1, 0\} \cup [1, 2]$ olsun. $I = \int_{-1}^2 \frac{t^3}{\sqrt{4-t^2}} \Delta t$ ikinci çeşit genelleştirilmiş integralini ele alalım.

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^0 \frac{t^3}{\sqrt{4-t^2}} \Delta t + \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{4-t^2}} \Delta t + \int_1^2 \frac{t^3}{\sqrt{4-t^2}} \Delta t \\
&= \frac{t^3 \mu(t)}{\sqrt{4-t^2}} \big|_{t=-1} + \frac{t^3 \mu(t)}{\sqrt{4-t^2}} \big|_{t=0} - \lim_{c \rightarrow 2^-} \int_1^c t^2 d\sqrt{4-t^2} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - \lim_{c \rightarrow 2^-} t^2 \sqrt{4-t^2} \big|_{t=1}^{t=c} + 2 \lim_{c \rightarrow 2^-} \int_1^c t^2 \sqrt{4-t^2} dt \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - \lim_{c \rightarrow 2^-} \int_1^c \sqrt{4-t^2} d(4-t^2) \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3} - \lim_{c \rightarrow 2^-} \frac{(4-t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \big|_{t=1}^{t=c} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3},
\end{aligned}$$

olur. O halde verilen integral yakınsaktır.

Tanım 2.3.14. $(\nabla$ -anti türev) $[56]$ $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}_\kappa$ üzerinde ∇ -türevlenebilir ve $\forall t \in \mathbb{T}_\kappa$ için $F^\nabla(t) = f(t)$ ise, F fonksiyonuna f nin ∇ -anti türevi veya ilkeli denir.

Teorem 2.3.15. (*Bir fonksiyonun nabla integrali*) [21] $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ld -sürekli olsun. Bu durumda $F^\nabla(t) = f(t)$ olacak şekilde bir F fonksiyonu vardır. C keyfi bir sabit olmak üzere, f fonksiyonunun ∇ integrali

$$\int f(t) \nabla t = F(t) + C,$$

şeklinde tanımlanır. f fonksiyonunun belirli ∇ integrali ise $\forall r, s \in \mathbb{T}$ için

$$\int_r^s f(t) \nabla t = F(s) - F(r),$$

şeklindedir.

Teorem 2.3.16. [8, 9] $f \in C_{ld}$ ve $t \in \mathbb{T}_\kappa$ ise

$$\int_{\rho(t)}^t f(\tau) \nabla \tau = v(t)f(t),$$

şeklindedir.

İspat: Bir önceki teoremden f fonksiyonunun F gibi bir anti ∇ -türevi vardır ve

$$\int_{\rho(t)}^t f(\tau) \nabla \tau = F(t) - F(\rho(t)) = \nu(t)F^\nabla(t) = v(t)f(t),$$

şeklindedir.

Teorem 2.3.17. (*Delta ve nabla integral özellikleri*) [8, 9] $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rl}$ olsun. Bu durumda

i.

$$\int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t,$$

$$\int_a^b [f(t) + g(t)] \nabla t = \int_a^b f(t) \nabla t + \int_a^b g(t) \nabla t.$$

ii.

$$\int_a^b (\alpha f) \Delta t = \alpha \int_a^b f(t) \Delta t, \int_a^b (\alpha f) \nabla t = \alpha \int_a^b f(t) \nabla t.$$

iii.

$$\int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t, \int_a^b f(t) \nabla t = - \int_b^a f(t) \nabla t.$$

iv.

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t, \int_a^b f(t) \nabla t = \int_a^c f(t) \nabla t + \int_c^b f(t) \nabla t.$$

v.

$$\int_a^b f(\sigma(t)) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t,$$

$$\int_a^b f(\rho(t)) g^\nabla(t) \nabla t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\nabla(t) g(t) \nabla t.$$

vi.

$$\int_a^b f(t) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t,$$

$$\int_a^b f(t) g^\nabla(t) \nabla t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\nabla(t) g(\rho(t)) \nabla t.$$

vii.

$$\int_a^a f(t) \Delta t = 0, \int_a^a f(t) \nabla t = 0.$$

şeklindedir. Burada v ve vi özellikleri Δ ve ∇ için kısmi integrasyon formülleri olarak bilinir.

Teorem 2.3.18. [8, 9] $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $a < b \in \mathbb{T}$ ve $f, g \in C_{rd}$ olsun. $\forall t \in [a, b]$ için

$$|f(t)| \leq g(t) \Rightarrow \left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta t,$$

$$f(t) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t) \Delta t \geq 0.$$

şeklindedir. Bu özellikler ∇ integral için de korunur.

Teorem 2.3.19. (Bazı zaman skalaları için delta integral alma kuralları) [8, 9] $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olsun.

i. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt,$$

dir. Burada sağ taraftaki integral bilinen Riemann integralidir.

ii. $[a, b]$ yalnızca ayrık noktalar içeriyorsa

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a, b)} \mu(t) f(t), & a < b \text{ ise} \\ 0, & a = b \text{ ise} \\ - \sum_{t \in [b, a)} \mu(t) f(t), & a > b \text{ ise} \end{cases},$$

şeklinde hesaplanır.

iii. $h > 0$ için $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h, & a < b \text{ ise} \\ 0, & a = b \text{ ise} \\ - \sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h, & a > b \text{ ise} \end{cases},$$

olur.

iv. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t), & a < b \text{ ise} \\ 0, & a = b \text{ ise} \\ - \sum_{t=b}^{a-1} f(t), & a > b \text{ ise} \end{cases},$$

şeklindedir.

Teorem 2.3.20. (Bazı zaman skalaları için nabla integral alma kuralları) [8, 9] $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{ld}$ olsun. Bu durumda

i. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t) \nabla t = \int_a^b f(t) dt,$$

dir. Burada sağ taraftaki integral bilinen Riemann integralidir.

ii. $[a, b]$ yalnızca ayrık noktalar içeriyorsa

$$\int_a^b f(t) \nabla t = \begin{cases} \sum_{t \in (a, b]} v(t) f(t), & a < b \text{ ise} \\ 0, & a = b \text{ ise} \\ - \sum_{t \in (b, a]} v(t) f(t), & a > b \text{ ise} \end{cases},$$

iii. $h > 0$ için $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ ise

$$\int_a^b f(t) \nabla t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a+h}{h}}^{\frac{b}{h}} f(kh)h, & a < b \text{ ise} \\ 0, & a = b \text{ ise} \\ - \sum_{k=\frac{b+h}{h}}^{\frac{a}{h}} f(kh)h, & a > b \text{ ise} \end{cases},$$

olur.

iv. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t) \nabla t = \begin{cases} \sum_{t=a+1}^b f(t), & a < b \text{ ise} \\ 0 & a = b \text{ ise} \\ - \sum_{t=b+1}^a f(t), & a > b \text{ ise} \end{cases},$$

şeklindedir.

Örnek 2.3.21. [57] $t \in \mathbb{T}$ ve $f(t) = t$ olsun. $\int_0^t f(s) \Delta s$ ve $\int_0^t f(s) \nabla s$, integrallerinin farklı zaman skalalarındaki sonuçları

$$\mathbb{T} = \mathbb{R} \text{ ise} \quad \int_0^t s \Delta s = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2}$$

$$\mathbb{T} = \mathbb{Z} \text{ ise} \quad \int_0^t s \Delta s = \sum_{s=0}^{t-1} s = 0 + 1 + 2 + \dots + (t-2) + (t-1) = \frac{(t-1)t}{2}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{T} = h\mathbb{Z} \text{ ise} \quad \int_0^t s \Delta s &= \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} f(sh)h = \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} sh^2 = h^2 \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} s \\ &= h^2 (0 + 1 + 2 + \dots + (\frac{t}{h} - 1)) = h^2 (\frac{t}{h} - 1) \frac{\frac{t}{h}}{2} = \frac{1}{2} (t - h) t, \end{aligned}$$

ve

$$\mathbb{T} = \mathbb{R} \text{ ise} \quad \int_0^t s \nabla s = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2}$$

$$\mathbb{T} = \mathbb{Z} \text{ ise} \quad \int_0^t s \nabla s = \sum_{s=1}^t s = 1 + 2 + \dots + (t-1) + t = \frac{(t+1)t}{2}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{T} = h\mathbb{Z} \text{ ise} \quad \int_0^t s \nabla s &= \sum_{k=1}^{\frac{t}{h}} f(sh)h = \sum_{k=1}^{\frac{t}{h}} sh^2 = h^2 \sum_{k=1}^{\frac{t}{h}} s \\ &= h^2 (1 + 2 + \dots + (\frac{t}{h})) = h^2 (\frac{t}{h}) (\frac{t}{h} + 1) \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (t + h) t, \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.3.22. [8, 9] $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^\Delta : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$, $f^\nabla : \mathbb{T}_\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli olsunlar.

Bu durumda aşağıdaki eşitlikler mevcuttur.

$$\begin{aligned} \left[\int_a^t f(t, s) \Delta s \right]^\Delta &= f(\sigma(t), t) + \int_a^t f^\Delta(t, s) \Delta s, \\ \left[\int_a^t f(t, s) \Delta s \right]^\nabla &= f(\rho(t), \rho(t)) + \int_a^t f^\nabla(t, s) \Delta s, \\ \left[\int_a^t f(t, s) \nabla s \right]^\Delta &= f(\sigma(t), \sigma(t)) + \int_a^t f^\Delta(t, s) \nabla s, \\ \left[\int_a^t f(t, s) \nabla s \right]^\nabla &= f(\rho(t), t) + \int_a^t f^\nabla(t, s) \nabla s. \end{aligned}$$

2.4 Delta ve Nabla Üstel Fonksiyonlar

Bu kısımda zaman skalası üzerinde tanımlanan genelleştirilmiş Δ ve ∇ üstel fonksiyonları ve özellikleri ifade edilecektir. İlk olarak $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde regresif, ν -regresif fonksiyonlar uzayı ve genelleştirilmiş Δ - ve ∇ - üstel fonksiyonların tanımları verilecektir.

Tanım 2.4.1. [64] (*Silindirik ve ν - silindirik dönüşüm*) $h > 0$ için $\mathbb{C}_h$ Hilger kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}_h := \{z \in \mathbb{C} : z \neq -\frac{1}{h}\}$ ve $\mathbb{Z}_h$ Hilger tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}_h := \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < \text{Im}(z) < \frac{\pi}{h}\}$ ile gösterilir. $h > 0$ olmak üzere silindirik (ξ_h) ve ν -silindirik $(\hat{\xi}_h)$ dönüşümleri

- i. $\xi_h : \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{Z}_h$ için $\xi_h(z) := \frac{1}{h} \text{Log}(1 + zh)$,
- ii. $\hat{\xi}_h : \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{Z}_h$ için $\hat{\xi}_h(z) := -\frac{1}{h} \text{Log}(1 - zh)$,

ile tanımlanırlar. $h = 0$ ve $\forall z \in \mathbb{C}$ için $\xi_0(z) = z$ dir.

Tanım 2.4.2. (*Regresif ve ν -regresif fonksiyon*) [8, 9], [57]

- i. $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, $\forall t \in \mathbb{T}^\kappa$ için

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0,$$

koşulu sağlamıyorsa *regresif fonksiyon* denir. Tüm rd -sürekli ve regresif fonksiyonların ailesi $\mathcal{R}$ ile gösterilir. $p \in \mathcal{R}$ ise $s, t \in \mathbb{T}$ için genelleştirilmiş Δ üstel fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$e_p(t, s) = \exp \left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right).$$

ii. $q : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, $\forall t \in \mathbb{T}_\kappa$ için

$$1 - v(t)q(t) \neq 0,$$

koşulu sağlanıyorsa ν -regresif fonksiyon denir. Tüm ld - süreklili ve ν -regresif fonksiyonlarının ailesi $\mathcal{R}_\nu$ ile gösterilir. $q \in \mathcal{R}_\nu$ ise $s, t \in \mathbb{T}$ için genelleştirilmiş ∇ üstel fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\hat{e}_q(t, t_0) = \exp \left(\int_s^t \hat{\xi}_{\nu(\tau)}(q(\tau)) \nabla \tau \right).$$

Tanım 2.4.3. (Regresif ve ν -regresif dinamik denklemler) [8, 9], [57]

i. $p \in \mathcal{R}$ için birinci mertebeden lineer $y^\Delta(t) = p(t)y(t)$ dinamik denklemine regresif dinamik denklem denir.

ii. $q \in \mathcal{R}_\nu$ için birinci mertebeden lineer $y^\nabla(t) = q(t)y(t)$ dinamik denklemine ν -regresif dinamik denklem denir.

Teorem 2.4.4. (Dinamik denklemlerde çözümün tekliği) [8, 9], [57]

i. $t_0 \in \mathbb{T}$ ve $y^\Delta(t) = p(t)y(t)$ dinamik denklemi regresif olsun. Bu durumda $e_p(t, t_0)$ Δ üstel fonksiyonu

$$y^\Delta(t) = p(t)y(t), y(t_0) = 1,$$

başlangıç değer probleminin tek çözümüdür.

ii. $t_0 \in \mathbb{T}$ ve $y^\nabla(t) = q(t)y(t)$ dinamik denklemi ν -regresif olsun. Bu durumda $\hat{e}_p(t, t_0)$ ∇ üstel fonksiyonu

$$y^\nabla(t) = q(t)y(t), y(t_0) = 1,$$

başlangıç değer probleminin tek çözümüdür.

Aşağıdaki teoremden Δ dinamik denkleminin çözüm fonksiyonu olan $e_p(t, t_0)$ Δ üstel fonksiyonu ile, ∇ dinamik denklemin çözüm fonksiyonu olan $\hat{e}_p(t, t_0)$ ∇ üstel fonksiyonu arasındaki ilişki verilecektir.

Teorem 2.4.5. [8, 9], [57]

i. p fonksiyonu sürekli ve regresif olacak şekilde

$$e_p(t, t_0) = \hat{e}_{\frac{p^\rho}{1+p^\rho}}(t, t_0)$$

eşitliği sağlanır.

ii. q fonksiyonu sürekli ve ν –regresif olmak üzere

$$\widehat{e}_q(t, t_0) = e_{\frac{q\sigma}{1+q\sigma\mu}}(t, t_0)$$

şeklindedir.



3 ZAMAN SKALASINDA DIAMOND-ALFA TİPİNDE DİNAMİK DENKLEMLER

Bu bölümde Δ ve ∇ türevlerinin lineer kombinasyonu olan diamond- α türevin tanımı verilerek, temel özellikleri incelenecektir.

3.1 Diamond- α Türev

Tanım 3.1.1 (*Diamond- α türev*) [60] $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ olsun. Bu durumda $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\exists \delta > 0$ için t noktasının bir U komşuluğundaki her s için $\mu_{ts} = \sigma(t) - s$ ve $\nu_{ts} = s - \rho(t)$ olmak üzere

$$\left| \alpha [f^\sigma(t) - f(s)] \nu_{ts} + (1 - \alpha) [f^\rho(t) - f(s)] \mu_{ts} - f^{\diamond_\alpha}(t) \mu_{ts} \nu_{ts} \right| < \varepsilon |\mu_{ts} \nu_{ts}|,$$

eşitsizliği sağlanırsa $f^{\diamond_\alpha}(t)$ ifadesine f fonksiyonunun $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ noktasındaki *diamond- α türevi* denir.

Teorem 3.1.2. [60] $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere f fonksiyonu $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ noktasında Δ ve ∇ türevlenebilir olsun. Bu durumda f fonksiyonu t noktasında $\diamond_\alpha$ türevlenebilirdir ve

$$f^{\diamond_\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha) f^\nabla(t),$$

şeklinde dir.

İspat: f^Δ ve f^∇ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ ve t noktasının U_1 ve U_2 komşuluklarındaki $\forall s \in U_1$ ve $\forall s \in U_2$ için

$$|[f^\sigma(t) - f(s)] - f^\Delta(t) \mu_{ts}| < \varepsilon |\mu_{ts}|,$$

$$|[f^\rho(t) - f(s)] - f^\nabla(t) \mu_{ts}| < \varepsilon |\nu_{ts}|,$$

olur. Buradan

$$|\alpha [f^\sigma(t) - f(s)] \nu_{ts} - \alpha f^\Delta(t) \nu_{ts} \mu_{ts}| < \alpha \varepsilon |\mu_{ts} \nu_{ts}|,$$

$$|(1 - \alpha) [f^\rho(t) - f(s)] \mu_{ts} - (1 - \alpha) f^\nabla(t) \mu_{ts} \nu_{ts}| < (1 - \alpha) \varepsilon |\mu_{ts} \nu_{ts}|,$$

elde edilir. Böylece $\forall s \in U = U_1 \cap U_2$ için

$$\begin{aligned} & \left| \alpha [f^\sigma(t) - f(s)] \nu_{ts} + (1 - \alpha) [f^\rho(t) - f(s)] \mu_{ts} - [\alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha) f^\nabla(t)] \mu_{ts} \nu_{ts} \right| \\ & \leq \left| \alpha [f^\sigma(t) - f(s)] \nu_{ts} - \alpha f^\Delta(t) \mu_{ts} \nu_{ts} \right| \\ & \quad + \left| (1 - \alpha) [f^\rho(t) - f(s)] \mu_{ts} - (1 - \alpha) f^\nabla(t) \mu_{ts} \nu_{ts} \right| \\ & < \alpha \varepsilon |\mu_{ts} \nu_{ts}| + (1 - \alpha) \varepsilon |\mu_{ts} \nu_{ts}| < \varepsilon |\mu_{ts} \nu_{ts}| \end{aligned}$$

olur. Böylece $f^{\diamond_\alpha}$ türevi mevcuttur ve $f^{\diamond_\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^\nabla(t)$ şeklindedir.

Tanım 3.1.3. [61] $f, t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ noktasında Δ ve ∇ türevlenebilir olsun. Bu durumda $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ için f fonksiyonunun $f^{\diamond_\alpha}(t)$ türevi

$$f^{\diamond_\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^\nabla(t),$$

olarak tanımlanır. Böylece f fonksiyonunun $\diamond_\alpha$ türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart Δ ve ∇ türevlenebilir olmasıdır. Bu tanımda $\alpha = 1$ alınırsa, $f^{\diamond_\alpha}(t) = f^\Delta(t)$ ve $\alpha = 0$ alınırsa, $f^{\diamond_\alpha}(t) = f^\nabla(t)$ bulunur.

Sonuç 3.1.4. [60] $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ noktası yoğun olsun. Bu durumda $f'(t)$ mevcut olacak şekilde

$$f^{\diamond_\alpha}(t) = f^\Delta(t) = f^\nabla(t) = f'(t),$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.5. [60] $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ noktasında $\diamond_\alpha$ -türevlenebilir olsunlar. Bu durumda

i. $f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ noktasında $\diamond_\alpha$ -türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^{\diamond_\alpha}(t) = f^{\diamond_\alpha}(t) + g^{\diamond_\alpha}(t),$$

şeklindedir.

ii. c herhangi bir sabit sayı olmak üzere, $cf : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ noktasında $\diamond_\alpha$ -türevlenebilirdir ve

$$(cf)^{\diamond_\alpha}(t) = cf^{\diamond_\alpha}(t),$$

şeklindedir.

iii. $fg : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ noktasında $\diamond_\alpha$ -türevlenebilirdir ve

$$(fg)^{\diamond_\alpha}(t) = f^{\diamond_\alpha}(t)g(t) + \alpha f^\sigma(t)g^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^\rho(t)g^\nabla(t),$$

şeklindedir.

iv. $g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t) \neq 0$ olmak üzere $\frac{1}{g} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ noktasında $\diamond_\alpha$ -türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{\diamond_\alpha}(t) = -\frac{(g^\sigma(t) + g^\rho(t))g^{\diamond_\alpha} - \alpha g^\sigma(t)g^\Delta(t) - (1 - \alpha)g^\rho(t)g^\nabla(t)}{g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t)},$$

şeklindedir.

v. $g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ noktasında $\diamond_\alpha$ -türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\diamond_\alpha}(t) = -\frac{f^{\diamond_\alpha}(t)g^\sigma(t)g^\rho(t) - \alpha f^\sigma(t)g^\rho(t)g^\Delta(t) - (1-\alpha)f^\rho(t)g^\sigma(t)g^\nabla(t)}{g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t)},$$

şeklinde dir.

Teorem 3.1.6. [62] $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ noktasında $\diamond_\alpha$ -türevlenebilir olsun.

Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- i. $f^{\diamond_\alpha \Delta}(t) = \alpha f^{\Delta \Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla \Delta}(t)$
- ii. $f^{\diamond_\alpha \nabla}(t) = \alpha f^{\Delta \nabla}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla \nabla}(t)$
- iii. $f^{\Delta \diamond_\alpha}(t) = \alpha f^{\Delta \Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\Delta \nabla}(t)$ ve $f^{\Delta \diamond_\alpha}(t) \neq f^{\diamond_\alpha \Delta}(t)$
- iv. $f^{\nabla \diamond_\alpha}(t) = \alpha f^{\nabla \Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla \nabla}(t)$ ve $f^{\nabla \diamond_\alpha}(t) \neq f^{\diamond_\alpha \nabla}(t)$
- v. $f^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha}(t) = \alpha^2 f^{\Delta \Delta}(t) + \alpha(1-\alpha)(f^{\nabla \Delta}(t) + f^{\Delta \nabla}(t)) + (1-\alpha)^2 f^{\nabla \nabla}(t)$ olduğundan $f^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha}(t) \neq \alpha^2 f^{\Delta \Delta}(t) + (1-\alpha)^2 f^{\nabla \nabla}(t)$ dir.

3.2 Diamond- α integral

Tanım 3.2.1. (*Diamond- α integral*) [60] $a, t \in \mathbb{T}$ ve $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\diamond_\alpha$ integrali, $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\int_a^t h(\tau) \diamond_\alpha \tau = \alpha \int_a^t h(\tau) \Delta \tau + (1-\alpha) \int_a^t h(\tau) \nabla \tau,$$

şeklinde tanımlanır. $\diamond_\alpha$ integral Δ ve ∇ integrallerinin lineer kombinasyonudur. Genelde $t \in \mathbb{T}$ için

$$\left(\int_a^t h(\tau) \diamond_\alpha \tau\right)^{\diamond_\alpha} = h(\tau),$$

eşitliği sağlanmaz. Örneğin; $\mathbb{T} = \{0, 1, 2\}$, $\alpha = 0$ ve $h(\tau) = \tau^2$, $\tau \in \mathbb{T}$ olsun. Buradan

$$\left(\int_a^t h(\tau) \diamond_\alpha \tau\right)_{t=1}^{\diamond_\alpha} = h(1) + 2\alpha(1-\alpha),$$

olur. Bu eşitlik ancak $\diamond_\alpha = \Delta$ ya da $\diamond_\alpha = \nabla$ olması halinde sağlanır [62].

Örnek 3.2.2. $a, t \in \mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3\}$, $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \int_a^t f(\tau) \diamond_\alpha \tau &= \alpha \int_a^t f(\tau) \Delta \tau + (1-\alpha) \int_a^t f(\tau) \nabla \tau \\ &= \alpha[0 + 1 + 2] + (1-\alpha)[0 + 1 + 2 + 3] \\ &= 6 - 3\alpha \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.3. (*Diamond- α integralin özellikleri*) [60] $a, b \in \mathbb{T}$, $c \in \mathbb{R}$ ve $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

i.

$$\int_a^b [f(\tau) + g(\tau)] \diamond_{\alpha} \tau = \int_a^b f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau + \int_a^b g(\tau) \diamond_{\alpha} \tau,$$

ii.

$$\int_a^b c f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = c \int_a^b f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau,$$

iii.

$$\int_a^b f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = - \int_b^a f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau,$$

iv.

$$\int_a^b f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = \int_a^c f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau + \int_c^b f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau,$$

v.

$$\int_a^a f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = 0,$$

eşitlikleri sağlar.

İspat: $\diamond_{\alpha}$ integralin tanımından yukarıdaki eşitlikler aşağıdaki şekilde ispatlanabilir.

i.

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(\tau) + g(\tau)] \diamond_{\alpha} \tau &= \alpha \int_a^b [f(\tau) + g(\tau)] \Delta \tau + (1 - \alpha) \int_a^b [f(\tau) + g(\tau)] \nabla \tau \\ &= \alpha \int_a^b f(\tau) \Delta \tau + \alpha \int_a^b g(\tau) \Delta \tau + (1 - \alpha) \int_a^b f(\tau) \nabla \tau + (1 - \alpha) \int_a^b g(\tau) \nabla \tau \\ &= \alpha \int_a^b f(\tau) \Delta \tau + (1 - \alpha) \int_a^b f(\tau) \nabla \tau + \alpha \int_a^b g(\tau) \Delta \tau + (1 - \alpha) \int_a^b g(\tau) \nabla \tau \\ &= \int_a^b f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau + \int_a^b g(\tau) \diamond_{\alpha} \tau. \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}\int_a^b cf(\tau)\diamond_{\alpha}\tau &= \alpha\int_a^b cf(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^b cf(\tau)\nabla\tau = c\left(\alpha\int_a^b f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^b f(\tau)\nabla\tau\right) \\ &= c\int_a^b f(\tau)\diamond_{\alpha}\tau.\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\tau)\diamond_{\alpha}\tau &= \alpha\int_a^b f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^b f(\tau)\nabla\tau \\ &= -\alpha\int_b^a f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_b^a f(\tau)\nabla\tau = -\int_b^a f(\tau)\diamond_{\alpha}\tau.\end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\tau)\diamond_{\alpha}\tau &= \alpha\int_a^b f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^b f(\tau)\nabla\tau \\ &= \alpha\int_a^c f(\tau)\Delta\tau + \alpha\int_c^b f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^c f(\tau)\nabla\tau + (1-\alpha)\int_c^b f(\tau)\nabla\tau \\ &= \alpha\int_a^c f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^c f(\tau)\nabla\tau + \alpha\int_c^b f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_c^b f(\tau)\nabla\tau \\ &= \int_a^c f(\tau)\diamond_{\alpha}\tau + \int_c^b f(\tau)\diamond_{\alpha}\tau.\end{aligned}$$

v.

$$\int_a^a f(\tau)\diamond_{\alpha}\tau = \alpha\int_a^a f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^a f(\tau)\nabla\tau = \alpha 0 + (1-\alpha)0 = 0,$$

Teorem 3.2.4. [63] f ve g , $[a, b]$ üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda $\forall t \in [a, b]$ için

i.

$$\begin{aligned}f(t) \geq 0 &\Rightarrow \int_a^b f(\tau)\diamond_{\alpha}\tau \geq 0, \\ f(t) \leq g(t) &\Rightarrow \int_a^b f(\tau)\diamond_{\alpha}\tau \leq \int_a^b g(\tau)\diamond_{\alpha}\tau,\end{aligned}$$

şeklinde.

ii. $f(t) \geq 0$ olmak üzere, $f(t) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\int_a^b f(\tau)\diamond_{\alpha}\tau = 0$ olmasıdır.

Sonuç 3.2.5. [61] $a, b \in \mathbb{T}$ olsun. Bu durumda

i. $a < b$ olmak üzere her sabit $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında $\diamond_\alpha$ -integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b f(\tau) \diamond_\alpha \tau = c(b - a),$$

şeklindedir.

ii. $[a, b]$ üzerinde her monoton $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında $\diamond_\alpha$ -integrallenebilirdir.

iii. $[a, b]$ üzerinde her sürekli $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında $\diamond_\alpha$ -integrallenebilirdir.

iv. $[a, b]$ üzerinde sadece sonlu sayıda süreksizlik noktasına sahip her sınırlı $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında $\diamond_\alpha$ -integrallenebilirdir.

v. $[a, b]$ üzerinde her düzenli $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında $\diamond_\alpha$ -integrallenebilirdir.

vi. $[a, b]$ üzerinde her sınırlı $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında $\diamond_\alpha$ -integrallenebilir olsun. Bu durumda f , $[a, b]$ nin her $[c, d]$ alt aralığında $\diamond_\alpha$ -integrallenebilirdir.

vii. f , $[a, b]$ aralığında $\diamond_\alpha$ -integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f|$ fonksiyonu da $\diamond_\alpha$ -integrallenebilirdir ve

$$\left| \int_a^b f(\tau) \diamond_\alpha \tau \right| \leq \int_a^b |f(\tau)| \diamond_\alpha \tau,$$

şeklindedir.

3.3 Diamond- α üstel fonksiyon

Tanım 3.3.1. (Diamond- α üstel fonksiyon) [57] $\diamond_\alpha$ dinamik denklemler, Δ ve ∇ dinamik denklemlerin bir lineer kombinasyonudur. Burada $\diamond_\alpha$ dinamik denklemlerde üstel fonksiyonu tanımlayabilmek için ilk olarak Δ ve ∇ üstel fonksiyonların kombinasyonları tanımlanacaktır.

Bu *kombine üstel fonksiyon* ${}_a E_p$, $p \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}_\nu$, $t, t_0 \in \mathbb{T}$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere

$${}_a E_p(t, t_0) = \alpha e_p(t, t_0) + (1 - \alpha) \widehat{e}_p(t, t_0),$$

şeklinde tanımlanır. Örneğin; $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $p(t) = \frac{1}{2}$ olmak üzere $t_0 = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} e_p(t, 0) &= \exp \left(\int_0^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right) \\ &= \exp \left(\int_0^t \text{Log} \frac{3}{2} \Delta \tau \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left(\text{Log} \frac{3}{2} \int_0^t \Delta \tau \right) \\
&= \exp \left(t \text{Log} \frac{3}{2} \right) \\
&= \left(\frac{3}{2} \right)^t
\end{aligned}$$

olur. $e_p(t, 0) = \left(\frac{3}{2} \right)^t$ çözümlü, $y^\Delta(t) = \frac{1}{2}y(t)$, $y(0) = 1$ başlangıç değeri probleminin tek çözümü olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\widehat{e}_p(t, 0) &= \exp \left(\int_0^t \widehat{\xi}_{\nu(\tau)}(p(\tau)) \nabla \tau \right) \\
&= \exp \left(\int_0^t \text{Log} 2 \nabla \tau \right) \\
&= \exp \left[\text{Log} 2 \left(\int_0^t \nabla \tau \right) \right] \\
&= \exp(t \text{Log} 2) \\
&= \exp(\text{Log} 2^t) \\
&= 2^t,
\end{aligned}$$

olmak üzere $\widehat{e}_p(t, 0) = 2^t$, $y^\nabla(t) = \frac{1}{2}y(t)$, $y(0) = 1$ başlangıç değeri probleminin tek çözümü olur. Bu durumda lineer kombine üstel fonksiyon $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$${}_a E_p(t, t_0) = \alpha \left(\frac{3}{2} \right)^t + (1 - \alpha) 2^t,$$

şeklinde olur.

Bu kısımda düzgün zaman skalaları üzerinde diamond- α dinamik denklemler ifade edilecektir. Bu amaçla öncelikle düzgün zaman skalası ve atomik düzgün zaman skalası tanımları verilecektir. Temel amaç atomik düzgün zaman skalaları üzerinde başlangıç değeri problemlerinin çakışık olduklarını ve her ikisinin tek çözüme sahip olduğunu göstermektir.

3.4 Düzgün Zaman Skalası

Tanım 3.4.1. (*Düzgün zaman skalası*) [64] $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. Bu durumda $\forall t \in \mathbb{T}$ için

- i. $\sigma(\rho(t)) = t$,
- ii. $\rho(\sigma(t)) = t$,

eşitlikleri sağlanıyorsa $\mathbb{T}$ ye *düzgün zaman skalası* denir.

Teorem 3.4.2. [64] $\mathbb{T}$ düzgün bir zaman skalası olmak üzere σ ve ρ operatörleri $\mathbb{T}$ üzerinde birbirlerinin ters operatörleridir ($\sigma^{-1} = \rho$ ve $\rho^{-1} = \sigma$).

Teorem 3.4.3. [64] $\mathbb{T}$ nin düzgün bir zaman skalası olması için gerek ve yeter şart

i. $\inf \mathbb{T}$ noktası sağ yoğun nokta ve $\sup \mathbb{T}$ noktası sol yoğun nokta,

ii. $\mathbb{T} - \{\inf \mathbb{T}, \sup \mathbb{T}\}$ kümesindeki tüm noktaların ya iki taraflı yoğun ya da iki taraflı ayrık olmasıdır.

$\mathbb{R}, h\mathbb{Z}$ ($h > 0$), $q^{\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Q}_q$ ve $[-\varepsilon, 0] \cup q^{\mathbb{Z}}$ ($\varepsilon > 0$) kümeleri düzgün zaman skalasına örneklerdir [57]. Burada $q^{\mathbb{Z}}$ zaman skalasına kuantum zaman skalası denir ve

$$\begin{aligned} q^{\mathbb{Z}} &= q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\} = \{q^k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} \\ &= \{\dots, \frac{1}{q^3}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q}, 0, 1, q, q^2, q^3, \dots\}, \end{aligned}$$

olup, bu kümenin her noktası ayrıktır. Dolayısıyla $t = q^k$ olmak üzere $\sigma(t) = qt$ ve $\rho(t) = \frac{t}{q}$ olur. $\sigma(\rho(t)) = t$ ve $\rho(\sigma(t)) = t$ olup $q^{\mathbb{Z}}$ bir düzgün zaman skalasıdır. Bununla birlikte $\mathbb{Q}_q$ kümesi

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_q &= \{-q^k, 0, q^k; k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\dots, -\frac{1}{q^3}, -\frac{1}{q^2}, -\frac{1}{q}, 0, 1, q, q^2, q^3, \dots\}, \end{aligned}$$

olup bu kümenin her noktası ayrıktır. Dolayısıyla $-q^k = t$ olmak üzere $\sigma(t) = tq$ ile $\rho(t) = \frac{t}{q}$ ve $\sigma(0) = 0$ olduğundan $\mathbb{Q}_q$ kümesi de bir düzgün zaman skalasıdır. Fakat $\mathbb{T} = [a, b] \cup [c, d]$ düzgün zaman skalası değildir. Gerçekten bu kümeden $\inf \mathbb{T} = a$ ve $\sup \mathbb{T} = d$ noktaları çıkarıldığında, kalan tüm noktalar tek taraflı ayrık ya da tek taraflı yoğun değildir.

Teorem 3.4.4. [64] $\mathbb{T}$ düzgün bir zaman skalası olsun. Bu durumda

$$\mathbb{T}_{\kappa}^{\kappa} = \mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T}_{\kappa} = \mathbb{T} \text{ ve } \sigma(\mathbb{T}) = \rho(\mathbb{T}) = \mathbb{T},$$

olur.

Düzgün zaman skalası üzerinde tanımlı diamond- α üstel fonksiyonların $\diamond_{\alpha}$ türevi aşağıda verilmiştir:

Teorem 3.4.5. [64] $\mathbb{T}$ düzgün bir zaman skalası, $t, t_0 \in \mathbb{T}$ ve $p \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}_{\nu}$ olsun. Bu durumda

$$e_p^{\diamond_{\alpha}}(t, t_0) = \left[\alpha p(t) + \frac{(1 - \alpha)p^{\rho}(t)}{1 + \nu(t)p^{\rho}(t)} \right] e_p(t, t_0),$$

$$\widehat{e}_p^{\diamond\alpha}(t, t_0) = \left[(1 - \alpha)p(t) + \frac{\alpha p^\sigma(t)}{1 - \mu(t)p^\sigma(t)} \right] \widehat{e}_p(t, t_0),$$

olur. ${}_a E_p(t, t_0)$ kombine üstel fonksiyonu $y^{\diamond\alpha}(t) = q(t)y(t)$, $y(t_0) = 1$ başlangıç değeri probleminin tek çözümüdür. Burada

$$q(t) = \alpha p(t) + \frac{(1 - \alpha)p^\rho(t)}{1 + \nu(t)p^\rho(t)},$$

biçimindedir.

Örnek 3.4.6. [57] $\mathbb{T} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $\alpha = 0.5$ olsun.

$$f^{\diamond\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^\nabla(t),$$

$$f^{\diamond\alpha}(t) = \frac{1}{2}f^\Delta(t) + \frac{1}{2}f^\nabla(t),$$

ve

$$\begin{aligned} 2f^{\diamond\alpha}(t) &= f^\Delta(t) + f^\nabla(t) \\ &= f(t+1) - f(t) + f(t) - f(t-1) \\ &= f(t+1) - f(t-1), \end{aligned}$$

olmak üzere $\diamond_\alpha$ dinamik denklemi $y^{\diamond\alpha}(t) = \frac{1}{2}y(t)$ olarak alınsın. Böylece

$$\begin{aligned} 2y^{\diamond\alpha}(t) &= y(t) \\ y(t+1) - y(t-1) &= y(t) \\ y(t+1) &= y(t) + y(t-1), \end{aligned}$$

olur. Bu denklemi çözebilmek için $y(t-1) = a^t$ alınırsa $y(t) = a^{t+1}$ ve $y(t+1) = a^{t+2}$ olur.

Bu ifadeler yukarıdaki denklemde yerine konulursa

$$\begin{aligned} a^{t+2} - a^{t+1} - a^t &= 0 \\ a^2t - a^1a^t - a^t &= 0 \\ a^t(a^2 - a^1 - 1) &= 0 \\ a_1 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

olup,

$$y_1(t) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{t+1}, \quad y_2(t) = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{t+1},$$

çözümleri elde edilir. Buradan genel çözüm

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

$$y(t) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1},$$

olarak bulunur. Tek çözüme ulaşabilmek için iki sınır ya da iki başlangıç koşulu kullanılacaktır. Koşullar $y(0) = 1$ ve $y(1) = 1$ olarak alınsın. Böylece

$$y(0) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1,$$

$$y(1) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1,$$

şeklindeki iki bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi için

$$-c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$c_2 \left(1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$c_2 \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4} \right) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$c_2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

bulunur. c_1 sabiti ise

$$c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

şeklindedir. O halde başlangıç koşullarını sağlayan tek çözüm

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1},$$

olur.

Düzgün zaman skalasında çözüm bulmayı geliştirebilmek adına verilen kapalı aralığı istenilen şekilde bölmeye çalışalım. Bu durum yeni bir tanım ile ifade edilecektir.

Tanım 3.4.7. (*Zaman skalasının parçalanışı*) [64] $\mathbb{T}$ düzgün zaman skalası, I boş olmayan sınırlı bir indis kümesi olsun. $\mathbb{T}$ zaman skalasının

$$\mathbb{T} = \bigcup_{i \in I} \mathbb{T}_i,$$

olacak şekilde bir $\mathcal{D} = \{\mathbb{T}_i : i \in I\}$ parçalanışı ele alınsın. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $\mathcal{D}$ ye $\mathbb{T}$ zaman skalasının sıralı, sonlu parçalanışı denir.

- i. $\forall i \in I \setminus \{\max I\}$ için $\mathbb{T}_i^* \cap \mathbb{T}_{i+1}^* = \emptyset$ ve $\min \mathbb{T}_1 = \min \mathbb{T}$, $\max \mathbb{T}_{\max I} = \max \mathbb{T}$ iken $\max \mathbb{T}_i = \min \mathbb{T}_{i+1}$,
- ii. $\forall \mathbb{T}_i, i \in I$ için düzgün zaman skalası,
- iii. $\forall t \in \mathbb{T}_i^*, i \in I$ için t noktası ya ayrık nokta ya da yoğun nokta,
- iv. $\forall \varepsilon > 0$ için boş olmayan $(s_i - \varepsilon, s_i) \cap \mathbb{T}_i^*$ ya da $(s_i, s_i + \varepsilon) \cap \mathbb{T}_{i+1}^*$ kümelerinden en az biri sadece ayrık noktalardan ibaret olmak üzere

$$S = \{s_i : s_i = \mathbb{T}_i^* \cap \mathbb{T}_{i+1}^*, i = 1, 2, \dots, n-1\},$$

kümesi vardır. Herhangi bir $i \in I$ için $\mathbb{T}_i \in \mathcal{D}$ ye *atomik zaman skalası* denir. $S = \{s_i : s_i = \mathbb{T}_i^* \cap \mathbb{T}_{i+1}^*, i = 1, 2, \dots, n-1\}$ kümesine $\mathcal{D}$ bölgesinde *değişim noktaları kümesi* denir. $\mathbb{T}$ düzgün zaman skalasının bir $\mathcal{D}$ parçalanışı sonlu ya da sonsuz olabilir. Burada $\mathbb{T}^* = \mathbb{T}/\{\min \mathbb{T}, \max \mathbb{T}\}$ şeklindedir.

Uyarı 3.4.8. [64] $\mathbb{T}$ zaman skalasının parçalanışından seçilen herhangi $\mathbb{T}_i$ atomik zaman skalasının aşikar olmayan parçalanışı yoktur. Yani atomik $\mathbb{T}_i$ zaman skalalarının parçalanışları sadece $\mathcal{D} = \{\mathbb{T}_i\}$ şeklindedir.

Uyarı 3.4.9. [64] Bir düzgün zaman skalasının atomik zaman skalaları cinsinden tek bir parçalanışı vardır.

Örnek 3.4.10. [64] Atomik zaman skalası için aşağıdaki durumları inceleyelim:

- i. $\mathbb{T} = \mathbb{R}_- \cup \overline{q^{\mathbb{Z}}}$ olmak üzere, $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2$ için $\mathbb{T}_1 := \mathbb{R}_- \cup \{0\}$ ve $\mathbb{T}_2 := \overline{q^{\mathbb{Z}}}$ birer sonlu atomik zaman skalası olacak şekilde $\mathbb{T}$ nin birer parçalanışdır.
- ii. $q \in \mathbb{Z}, q > 1$ olsun. Bu durumda $\mathbb{T} = \mathbb{Q}_q = \{-q^k, 0, q^k : k \in \mathbb{Z}\}$ olmak üzere $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2$ için $\mathbb{T}_1 := \{0, -q^k : k \in \mathbb{Z}\}$ ve $\mathbb{T}_2 := \{0, q^k : k \in \mathbb{Z}\}$ birer sonlu atomik zaman skalası olacak şekilde $\mathbb{T}$ nin birer parçalanışdır.
- iii. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun. $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 = \mathbb{Z}$ olduğundan $\mathbb{T}_1$ bir atomik zaman skalasıdır.

Herhangi bir düzgün zaman skalası sonlu ya da sonsuz şekilde ayrıştırılabilir. Sonsuz ayrıştırılan düzgün zaman skalası için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 3.4.11. [64] $\mathbb{T}_{2n} = [2n, 2n+1]$ ve $\mathbb{T}_{2n+1} = \{2n+1+0.5p, 2n+2-0.5p, p \in \overline{q^{\mathbb{Z}-\cup\{0\}}}\}$ için

$$\mathbb{T} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{T}_{2n} \cup \mathbb{T}_{2n+1}),$$

olmak üzere $\mathbb{T}$ düzgün zaman skalası sonsuz ayrıştırılabilir.

3.5 Diamond- α Dinamik Denklemler

Bu kısımda $\diamond_\alpha$ ile türetilmiş lineer dinamik denklemlerden bahsedilecektir. Burada $\diamond_\alpha$ dinamik denklemi Δ ve ∇ dinamik denklem şeklinde yazılarak birinci mertebeden lineer $\diamond_\alpha$ dinamik denklem oluşturulur.

Tanım 3.5.1. (*Birinci mertebeden diamond- α dinamik denklem*) [64] $\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $I \subseteq \mathbb{T}$ olsun. Bu durumda $F : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere I üzerinde birinci mertebeden $\diamond_\alpha$ dinamik denklemin kapalı formu

$$F\left(t, y(t), y^{\diamond_\alpha}(t)\right) = 0,$$

şeklindedir. F fonksiyonu $y(t)$ ve $y^{\diamond_\alpha}(t)$ fonksiyonuna göre lineer bir fonksiyon ise $\diamond_\alpha$ dinamik denklemin lineerdir denir.

f ve p düzgün zaman skalası üzerinde birer fonksiyon olmak üzere lineer $\diamond_\alpha$ dinamik denklemi $y^{\diamond_\alpha}(t) = p(t)y(t) + f(t)$ şeklindedir. $\diamond_\alpha$ türev tanımından

$$f^{\diamond_\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^\nabla(t),$$

olduğu bilinmektedir. Düzgün zaman skalasında $f^\Delta(t) = f^\nabla(\sigma(t))$ ve $f^\nabla(t) = f^\Delta(\rho(t))$ olduğu için $\diamond_\alpha$ türev

$$\begin{aligned} f^{\diamond_\alpha}(t) &= \alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^\nabla(t) \\ &= \alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^{\Delta\rho}(t) \\ &= \alpha f^{\nabla\rho}(t) + (1 - \alpha)f^\nabla(t), \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^{\Delta\rho}(t) &= p(t)y(t) + f(t) \\ \alpha f^{\nabla\rho}(t) + (1 - \alpha)f^\nabla(t) &= p(t)y(t) + f(t), \end{aligned}$$

yazılarak birinci mertebeden $\diamond_\alpha$ dinamik denklemi sadece Δ dinamik denklemi ya da sadece ∇ dinamik denklemi biçiminde yazılabilir.

Tanım 3.5.2. ($L_p^{\diamond_\alpha}$ operatörü) [64] $\forall t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa, L_p^{\diamond_\alpha} : C_{rl}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \rightarrow C_{rl}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ olmak üzere $L_p^{\diamond_\alpha}$ operatörü

$$L_p^{\diamond_\alpha}y(t) = y^{\diamond_\alpha}(t) - p(t)y(t),$$

şeklindedir. $\forall t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ için $L_p^{\diamond_\alpha}y(t) = f(t)$ ifadesini sağlayan $y \in C_{rl}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ fonksiyonuna $L_p^{\diamond_\alpha}y = f$ denkleminin *çözümü* denir.

Sonuç 3.5.3. [64] $L_p^{\diamond\alpha}$ operatörü $C_{rl}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ üzerinde lineerdir: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $y_1, y_2 \in C_{rl}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ için

$$L_p^{\diamond\alpha}(ay_1 + by_2) = aL_p^{\diamond\alpha}y_1 + bL_p^{\diamond\alpha}y_2,$$

ifadesi sağlanır.

İspat: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $y_1, y_2 \in C_{rl}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} L_p^{\diamond\alpha}(ay_1 + by_2)(t) &= (ay_1(t) + by_2(t))^{\diamond\alpha} - p(t)(ay_1(t) + by_2(t)) \\ &= ay_1^{\diamond\alpha}(t) + by_2^{\diamond\alpha}(t) - p(t)ay_1(t) - p(t)by_2(t) \\ &= ay_1^{\diamond\alpha}(t) - ap(t)y_1(t) + by_2^{\diamond\alpha}(t) - bp(t)y_2(t) \\ &= aL_p^{\diamond\alpha}y_1(t) + bL_p^{\diamond\alpha}y_2(t), \end{aligned}$$

olur.

Sonuç 3.5.4. [64] y_1 ve y_2 , $L_p^{\diamond\alpha}y = 0$ dinamik denkleminin çözümleri olsunlar. Bu durumda y_1 ve y_2 nin herhangi bir lineer kombinasyonu da $L_p^{\diamond\alpha}y = 0$ dinamik denkleminin çözümlüdür. Yani $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $L_p^{\diamond\alpha}y_1 = 0$ ve $L_p^{\diamond\alpha}y_2 = 0$ ise $L_p^{\diamond\alpha}(ay_1 + by_2) = 0$ olur.

Tanım 3.5.5. (Homojen ve homojen olmayan $\diamond_\alpha$ dinamik denklemler) [64] $L_p^{\diamond\alpha}y = f$ dinamik denklemi, $f(t) = 0$ ise homojen $\diamond_\alpha$ dinamik denklem, $f(t) \neq 0$ ise homojen olmayan $\diamond_\alpha$ dinamik denklem olarak adlandırılır.

Sonuç 3.5.6. [64] Homojen bir $\diamond_\alpha$ dinamik denklemin çözümü ile homojen olmayan bir $\diamond_\alpha$ dinamik denklemin çözümünün toplamı homojen olmayan bir $\diamond_\alpha$ dinamik denklemin çözümüdür.

İspat: $\forall w, v \in C_{rl}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ için $L_p^{\diamond\alpha}w = 0$ ve $L_p^{\diamond\alpha}v = f$ olsun. Bu durumda

$$L_p^{\diamond\alpha}(w + v) = L_p^{\diamond\alpha}w + L_p^{\diamond\alpha}v = 0 + f = f,$$

olur. Bu da f fonksiyonunun homojen olmayan bir $\diamond_\alpha$ dinamik denklemin çözümü olduğunu gösterir.

Teorem 3.5.7. [64] $\mathbb{T}$ bir atomik zaman skalası, $t_0 \in \mathbb{T}^*$, y_0 bir sabit, $p \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}_\nu$ olsun. Bu durumda $t \in \mathbb{T}^*$, $\alpha = [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} L_p^{\diamond\alpha}y &= 0, \\ y(t_0) &= y_0, \alpha(1 - \alpha)y(\rho(t_0)) = \alpha(1 - \alpha)y_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

ve $s \in \mathbb{T}^*$ için

$$\begin{aligned}\alpha\mu(s)y^{\Delta\Delta}(s) + (1 - p^\sigma(s)\mu(s))y^\Delta(s) - p^\sigma(s)y(s) &= 0 \\ y(\sigma(s_0)) &= y_0, \alpha(1 - \alpha)y(s_0) = a(1 - \alpha)y_0,\end{aligned}\tag{3.2}$$

şeklindeki sınır değer problemleri çıkarılır.

İspat: Burada $\alpha = 0, \alpha = 1$ ve $\alpha \in (0, 1)$ için üç adımda ispat yapılacaktır.

i. $\alpha = 0$ olsun. Bu durumda (3.1) başlangıç değer problemi

$$y^\nabla(t) = p(t)y(t), y(t_0) = y_0,\tag{3.3}$$

problemine, (3.2) problemi

$$(1 - p^\sigma(s)\mu(s))y^\Delta(s) - p^\sigma(s)y(s) = 0, y(\sigma(s_0)) = y_0,\tag{3.4}$$

problemine dönüştür. $\sigma(s) = t$ alınırsa $s = \rho(t)$ olup

$$(1 - p(t)\mu(\rho(t)))y^\Delta(\rho(t)) - p(t)y(\rho(t)) = 0,$$

yazılır. Düzgün zaman skalasında $y^\nabla(t) = y^\Delta(\rho(t))$ ve $\mu(\rho(t)) = \nu(t)$ ve $\nu(t)y^\nabla(t) = y(t) - y(\rho(t))$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}(1 - p(t)\nu(t))y^\nabla(t) - p(t)y(\rho(t)) &= 0 \\ y^\nabla(t) - p(t)\nu(t)y^\nabla(t) - p(t)y(\rho(t)) &= 0 \\ y^\nabla(t) - p(t)[y(t) - y(\rho(t))] - p(t)y(\rho(t)) &= 0 \\ y^\nabla(t) - p(t)y(t) + p(t)y(\rho(t)) - p(t)y(\rho(t)) &= 0 \\ y^\nabla(t) - p(t)y(t) &= 0\end{aligned}$$

olmak üzere $y^\nabla(t) = p(t)y(t)$, $y(t_0) = y_0$ formu elde edilir.

ii. $\alpha = 1$ için (3.1) problemi

$$y^\Delta(t) = p(t)y(t), y(t_0) = y_0,\tag{3.5}$$

problemine dönüştür. (3.2) problemi $\mu(t) = 0$ ve $\mu(t) \neq 0$ durumlarına göre incelenecektir.

$\mu(t) = 0$ alınırsa $\sigma(s) = s$ olacağı için (3.2) dinamik denklemi

$$y^\Delta(s) = p(s)y(s),\tag{3.6}$$

şeklinde bulunur. $\mu(t) \neq 0$ için

$$\begin{aligned}\mu(s)y^{\Delta\Delta}(s) + y^\Delta(s) - p(s)\mu(s)y^\Delta(s) - p(s)y(s) &= 0 \\ \mu(s)y^{\Delta\Delta}(s) + y^\Delta(s) - p(s)[y(\sigma(s)) - y(s)] - p(s)y(s) &= 0 \\ \mu(s)y^{\Delta\Delta}(s) + y^\Delta(s) - p(s)y(\sigma(s)) + p(s)y(s) - p(s)y(s) &= 0\end{aligned}$$

$$\mu(s)y^{\Delta\Delta}(s) = p(s)y(\sigma(s) - y^{\Delta}(s)),$$

olur ve bu (3.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$y^{\Delta}(\sigma(s)) - p(\sigma(s)) (\mu(s)y^{\Delta}(s) - y(s)) = 0,$$

elde edilir. Burada $t = \sigma(s)$ olmak üzere $y^{\Delta}(t) = p(t)y(t)$ elde edilir. Başlangıç koşulu $y(t_0) = y(\sigma(s_0)) = y_0$ olur.

iii. $\alpha \in (0, 1)$ ve $s = \rho(t)$ olsun. $t = \sigma(s)$ olmak üzere $\mathbb{T}$ düzgün zaman skalası olduğundan $\diamond_{\alpha}$ dinamik denklemi

$$f^{\diamond_{\alpha}}(t) = \alpha f^{\Delta}(t) + (1 - \alpha)f^{\Delta\rho}(t) = \alpha f^{\nabla\sigma}(t) + (1 - \alpha)f^{\nabla}(t), \quad (3.7)$$

şeklinde yazılabilir. $\mu(t) = 0$ için $\nu(t) = 0$ olur ve (3.1) dinamik denklemi $y^{\Delta}(s) = p(s)y(s)$ şekline döndürür. Bu durumda $\forall \alpha \in (0, 1)$ için $y^{\Delta}(s) = y^{\nabla}(s) = y^{\diamond_{\alpha}}(s)$ biçimindedir.

Son olarak $\mu(t) \neq 0$ için $\nu(t) \neq 0$ olmak üzere $\forall s \in \mathbb{T}$ noktalarını ayrık nokta olarak seçelim. Böylece (3.2) başlangıç değer probleminin dinamik denklemi

$$\mu(s)y^{\Delta\Delta}(s) = y^{\Delta}(\sigma(s)) - y^{\Delta}(s) = y^{\Delta}(t) - y^{\Delta}(\rho(t)) = y^{\Delta}(t) - y^{\nabla}(t), \quad (3.8)$$

olur ve yukarıdaki denklemler sadeleştirilirse

$$\alpha y^{\Delta}(t) + (1 - \alpha)y^{\nabla}(t) - p(t) (v(t)y^{\nabla}(t) - y(\rho(t))) = 0, \quad (3.9)$$

elde edilir. Buradan $y^{\diamond_{\alpha}}(t) = p(t)y(t)$ bulunur.

Teorem 3.5.8. [64] $\mathbb{T}$ bir atomik zaman skalası, $t_0 \in \mathbb{T}^*$, y_0 bir sabit, $p \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}_{\nu}$ olsun. Bu durumda (3.1) ve (3.2) sınır değer problemleri $\alpha \in [0, 1]$ için tek çözüme sahiptirler ve bu çözüm aynıdır.

İspat: $\alpha = 0$ için (3.1) ve (3.2) problemleri

$$y^{\nabla}(t) = p(t)y(t), y(t_0) = y_0,$$

şeklindeki ∇ başlangıç değer problemine döndürür ve bu denklemin çözümü tektir. $\alpha = 1$ için benzer şekilde (3.1) ve (3.2) problemleri

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y(t), y(t_0) = y_0,$$

şeklindeki Δ başlangıç değer problemine döndürür ve bu denklemin çözümü tektir. $\alpha \in (0, 1)$ alalım. Bu durumda $\nu(t) = 0$ ve $\nu(t) \neq 0$ şeklinde iki farklı yoldan gidilir.

Eğer $\nu(t) = 0$ ise atomik zaman skalasında $\mu(t) = 0$ ve $\sigma(t) = t = \rho(t)$ olup dinamik denklem $y^\Delta(t) = y^\nabla(t) = p(t)y(t)$, $y(t_0) = y_0$ olur. Bu ise $\alpha = 0$ veya $\alpha = 1$ durumları demektir. $\nu(t) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\mu(t) \neq 0$ olur. (3.2) problemi

$$\begin{aligned}\alpha [y^{\Delta\sigma}(s) - y^\Delta(s)] + y^\Delta(s) - p^\sigma(s)y^\sigma(s) &= 0 \\ \alpha y^\Delta(t) + (1 - \alpha)y^\Delta(\rho(t)) - p(t)y(t) &= 0 \\ \alpha y^\Delta(t) + (1 - \alpha)y^\nabla(t) - p(t)y(t) &= 0 \\ y^{\diamond\alpha}(t) - p(t)y(t) &= 0 \\ L_p^{\diamond\alpha}y &= 0\end{aligned}$$

olup, (3.1) dinamik denklemi elde edilir. Bu durumda (3.2) dinamik denklemi regresif formda

$$y^{\Delta\Delta}(s) + \frac{1 - p^\sigma(s)\mu(s)}{\alpha\mu(s)}y^\Delta(s) - \frac{p^\sigma(s)}{\alpha\mu(s)}y(s) = 0, \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir. O halde çözüm tektir. Burada $\tilde{p}(s) = \frac{1 - p^\sigma(s)\mu(s)}{\alpha\mu(s)}$ ve $\tilde{q}(s) = -\frac{p^\sigma(s)}{\alpha\mu(s)}$ alınırsa $\forall \alpha \in (0, 1)$ için

$$1 - \mu(s)\tilde{p}(s) + \mu^2(s)\tilde{q}(s) = 1 - \frac{1}{\alpha} \neq 0,$$

çözümü elde edilir.

4 DIAMOND- α STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

Bu kısımda diamond- α Sturm-Liouville problemi ele alınacak ve bu problemin özdeğerlerinin reelliği, basitliği; farklı özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonların ortogonalitesi; Wronskian tanımını kullanılarak Green formülü ve Lagrange eşitliği verilecektir. Ayrıca $\mathbb{T}$ bir düzgün zaman skalası olmak üzere özel durumda bu probleme ait öz fonksiyonların ifadesi elde edilecektir.

$$Ly = -y^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha} + p(t)y = \lambda y, t \in \mathbb{T}^*, \quad (4.1)$$

$$y^{\diamond_\alpha}(t_0) = y_0, \quad (4.2)$$

$$\alpha(1-\alpha)y^{\diamond_\alpha}(\rho(t_0)) = \alpha(1-\alpha)y_0, \quad (4.3)$$

şeklindeki probleme *diamond- α Sturm-Liouville problemi* denir. Bu problemin aşıkâr olmayan çözümleri varsa λ değerlerine bu probleme ait özdeğerler denir. Bu λ değerlerine karşılık gelen $y \in C_{rl}(\mathbb{T}^*)$ çözümlerine de öz fonksiyon denir. Burada $\alpha \in [0, 1]$, $p \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}_v$, $y_0 \in \mathbb{R}$ şeklindedir. İlk olarak bu problemle ilgili verilecek önemli teoremlerin ispatında kullanılacak bazı kavramları ifade edelim.

Tanım 4.1. y_1 ve y_2 $\diamond_\alpha$ -türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonların $\diamond_\alpha$ -Wronskianı

$$W_{\diamond_\alpha} = W_{\diamond_\alpha}(y_1(t), y_2(t)) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1^{\diamond_\alpha}(t) & y_2^{\diamond_\alpha}(t) \end{pmatrix},$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\forall t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ için $W_{\diamond_\alpha} \neq 0$ olmak üzere $Ly = 0$ şartını sağlayan y_1 ve y_2 fonksiyonlarına *lineer bağımsızdır* denir. Aksi taktirde bu fonksiyonlara *lineer bağımlıdır* denir.

Tanım 4.2. [8] $p \in C_{rd}$ ve $\mu p^2 \in \mathcal{R}$ olmak üzere $\cos_p$ ve $\sin_p$ *trigonometrik fonksiyonları*

$$\cos_p = \frac{e_{ip} + e_{-ip}}{2},$$

$$\sin_p = \frac{e_{ip} - e_{-ip}}{2i},$$

şeklinde tanımlanır. Burada ip ve $-ip$ fonksiyonlarının regresif olması halinde μp^2 fonksiyonu da regresif olur.

Tanım 4.3. $a, b \in \mathbb{T}$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere

$$L_2^{\diamond_\alpha}[a, b] = \left\{ f : \int_a^b f^2(t) \diamond_\alpha t < \infty \right\},$$

uzayına $[a, b]$ aralığında tanımlı karesel $\diamond_\alpha$ -integrallenebilen fonksiyonların uzayı denir. Bu uzayda iç çarpım $y_1, y_2 \in L_2^{\diamond_\alpha}[a, b]$ olmak üzere

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(t)y_2(t)\diamond_\alpha t,$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.4. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $a, b \in \mathbb{T}$, $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için $\diamond_\alpha$ -integrallenebilir olsun. Bu durumda

$$\int_a^b f^{\diamond_\alpha}(t)\diamond_\alpha t = (2\alpha^2 - 2\alpha + 1)f(t) \big|_a^b + \alpha(1 - \alpha)(f(\rho(t)) + f(\sigma(t))) \big|_a^b,$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Diamond- α integral tanımını kullanılırsa istenilen eşitlik

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{\diamond_\alpha}(t)\diamond_\alpha t &= \int_a^b (\alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^\nabla(t)) \diamond_\alpha t \\ &= \alpha \int_a^b (\alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^\nabla(t)) \Delta t + (1 - \alpha) \int_a^b (\alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^\nabla(t)) \nabla t \\ &= \alpha^2 \int_a^b f^\Delta(t) \Delta t + \alpha(1 - \alpha) \int_a^b f^\nabla(t) \Delta t + \alpha(1 - \alpha) \int_a^b f^\Delta(t) \nabla t \\ &\quad + (1 - \alpha)^2 \int_a^b f^\nabla(t) \nabla t \\ &= \alpha^2 \int_a^b f^\Delta(t) \Delta t + \alpha(1 - \alpha) \int_a^b f^\Delta(\rho(t)) \Delta t + \alpha(1 - \alpha) \int_a^b f^\nabla(\sigma(t)) \nabla t \\ &\quad + (1 - \alpha)^2 \int_a^b f^\nabla(t) \nabla t \\ &= \alpha^2 f(t) \big|_a^b + \alpha(1 - \alpha)f(\rho(t)) \big|_a^b + \alpha(1 - \alpha)f(\sigma(t)) \big|_a^b + (2\alpha^2 - 2\alpha + 1)f(t) \big|_a^b \\ &\implies \int_a^b f^{\diamond_\alpha}(t)\diamond_\alpha t = (2\alpha^2 - 2\alpha + 1)f(t) \big|_a^b + \alpha(1 - \alpha)(f(\rho(t)) + f(\sigma(t))) \big|_a^b \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.5. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $\forall t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ için $\diamond_\alpha$ integral-

lenebilir olsunlar. Bu durumda $\mathbb{T}$ zaman skalasında $\diamond_\alpha$ -kısmi integrasyon formülü

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{\diamond_\alpha}(t)g(t)\diamond_\alpha t &= (1-2\alpha+2\alpha^2)(fg)(t) \Big|_a^b + \alpha(1-\alpha) [(fg)^\rho(t) + (fg)^\sigma(t)] \Big|_a^b \\ &\quad + (1-\alpha) \int_a^b g^\nabla(t) [f^\sigma(t) - f^\rho(t)] \diamond_\alpha t - \int_a^b f^\sigma(t)g^{\diamond_\alpha} \diamond_\alpha t, \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat.

$$(fg)^{\diamond_\alpha}(t) = f^{\diamond_\alpha}(t)g(t) + \alpha f^\sigma(t)g^\Delta(t) + (1-\alpha)f^\rho(t)g^\nabla(t),$$

ifadesinin her iki tarafının $[a, b]$ aralığında $\diamond_\alpha$ integrali alınırsa

$$\int_a^b (fg)^{\diamond_\alpha}(t)\diamond_\alpha t = \int_a^b f^{\diamond_\alpha}(t)g(t)\diamond_\alpha t + \alpha \int_a^b f^\sigma(t)g^\Delta(t)\diamond_\alpha t + (1-\alpha) \int_a^b f^\rho(t)g^\nabla(t)\diamond_\alpha t$$

olur. Burada $\int_a^b f^{\diamond_\alpha}(t)g(t)\diamond_\alpha t$ integrali yalnız bırakılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{\diamond_\alpha}(t)g(t)\diamond_\alpha t &= (1-2\alpha+2\alpha^2)(fg)(t) \Big|_a^b + \alpha(1-\alpha) [(fg)^\rho(t) + (fg)^\sigma(t)] \Big|_a^b \\ &\quad - \alpha \int_a^b f^\sigma(t)g^\Delta(t)\diamond_\alpha t - (1-\alpha) \int_a^b f^\rho(t)g^\nabla(t)\diamond_\alpha t \\ &\quad - (1-\alpha) \int_a^b f^\sigma(t)g^\nabla(t)\diamond_\alpha t + (1-\alpha) \int_a^b f^\sigma(t)g^\nabla(t)\diamond_\alpha t \\ &= (1-2\alpha+2\alpha^2)(fg)(t) \Big|_a^b + \alpha(1-\alpha) [(fg)^\rho(t) + (fg)^\sigma(t)] \Big|_a^b \\ &\quad - \int_a^b f^\sigma(t) [\alpha g^\Delta(t) + (1-\alpha)g^\nabla(t)] \diamond_\alpha t \\ &\quad + (1-\alpha) \int_a^b g^\nabla(t) [f^\sigma(t) - f^\rho(t)] \diamond_\alpha t, \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{\diamond_\alpha}(t)g(t)\diamond_\alpha t &= (1-2\alpha+2\alpha^2)(fg)(t) \Big|_a^b + \alpha(1-\alpha) [(fg)^\rho(t) + (fg)^\sigma(t)] \Big|_a^b \\ &\quad + (1-\alpha) \int_a^b g^\nabla(t) [f^\sigma(t) - f^\rho(t)] \diamond_\alpha t - \int_a^b f^\sigma(t)g^{\diamond_\alpha} \diamond_\alpha t, \end{aligned}$$

elde edilir.

(4.1)-(4.3) $\diamond_\alpha$ Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin kümesi $\sigma(L) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ olsun. $\lambda \in \sigma(L)$ olmak üzere bu özdeğerin cebirsel çok katlılığı, karakteristik polinomun bir kökü olarak tekrar etme sayısıdır. Eğer bir özdeğerin cebirsel çok katlılığı 1 ise bu özdeğere basit özdeğer denir. Bu kavram spektral teoride oldukça önemlidir. Bu nedenle aşağıdaki teoremda (4.1)-(4.3) $\diamond_\alpha$ Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin basit olduğu ispat edilecektir. Basitliği göstermek için yukarıdaki tanım kullanılacağı gibi aynı özdeğere karşılık gelen öz fonksiyonların lineer bağımlı olduğu gösterilerek de ispat yapılabilir.

Teorem 4.6. (4.1)-(4.3) $\diamond_\alpha$ Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri basittir.

İspat: Aynı λ özdeğerine karşılık gelen iki farklı öz fonksiyon y_1 ve y_2 olsun.

$$Ly_1 = -y_1^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha} + p(t)y_1 = \lambda y_1,$$

$$Ly_2 = -y_2^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha} + p(t)y_2 = \lambda y_2,$$

eşitlikleri sırasıyla y_2 ve $-y_1$ ile çarpılıp, taraf tarafa toplanırsa

$$y_1 y_2^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha} - y_2 y_1^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha} = 0, \quad (4.4)$$

elde edilir. Burada amaç

$$\left(y_1 y_2^{\diamond_\alpha} - y_2 y_1^{\diamond_\alpha} \right)^{\diamond_\alpha} = 0,$$

eşitliğinin sağlandığını gösterebilmektir. $W_{\diamond_\alpha}(y_1, y_2) = y_1 y_2^{\diamond_\alpha} - y_2 y_1^{\diamond_\alpha}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} W_{\diamond_\alpha}(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{\diamond_\alpha} & y_2^{\diamond_\alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \alpha y_1^\Delta + (1-\alpha)y_1^\nabla & \alpha y_2^\Delta + (1-\alpha)y_2^\nabla \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \alpha y_1^\Delta & \alpha y_2^\Delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ (1-\alpha)y_1^\nabla & (1-\alpha)y_2^\nabla \end{vmatrix} \\ &= \alpha \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^\Delta & y_2^\Delta \end{vmatrix} + (1-\alpha) \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^\nabla & y_2^\nabla \end{vmatrix} \\ &= \alpha W_\Delta(y_1, y_2) + (1-\alpha) W_\nabla(y_1, y_2), \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$W_{\diamond_\alpha}(y_1, y_2) = \alpha [y_1 y_2^\Delta - y_1^\Delta y_2] + (1-\alpha) [y_1 y_2^\nabla - y_1^\nabla y_2], \quad (4.5)$$

olur. (4.5) eşitliğinin her iki tarafının $\diamond_\alpha$ -türevi alınır

$$\begin{aligned}
[W_{\diamond\alpha}(y_1, y_2)]^{\diamond\alpha} &= \alpha [\alpha (y_1 y_2^\Delta - y_1^\Delta y_2) + (1 - \alpha) (y_1 y_2^\nabla - y_1^\nabla y_2)]^\Delta \\
&\quad + (1 - \alpha) [\alpha (y_1 y_2^\Delta - y_1^\Delta y_2) + (1 - \alpha) (y_1 y_2^\nabla - y_1^\nabla y_2)]^\nabla \\
&= \alpha^2 (y_1 y_2^\Delta)^\Delta - \alpha^2 (y_1^\Delta y_2)^\Delta + \alpha(1 - \alpha) (y_1 y_2^\nabla)^\Delta - \alpha(1 - \alpha) (y_1^\nabla y_2)^\Delta \\
&\quad + \alpha(1 - \alpha) (y_1 y_2^\Delta)^\nabla - \alpha(1 - \alpha) (y_1^\Delta y_2)^\nabla + (1 - \alpha)^2 (y_1 y_2^\nabla)^\nabla \\
&\quad - (1 - \alpha)^2 (y_1^\nabla y_2)^\nabla \\
&= \alpha^2 (y_1^\Delta y_2^\Delta + y_1^\sigma y_2^{\Delta\Delta}) - \alpha^2 (y_1^\Delta y_2^\Delta + y_1^{\Delta\Delta} y_2^\sigma) + \alpha(1 - \alpha) (y_1^\Delta y_2^\nabla + y_1^\sigma y_2^{\nabla\Delta}) \\
&\quad - \alpha(1 - \alpha) (y_1^\nabla y_2^\Delta + y_1^{\nabla\Delta} y_2^\sigma) + \alpha(1 - \alpha) (y_1^\nabla y_2^\Delta + y_1^\rho y_2^{\Delta\nabla}) \\
&\quad - \alpha(1 - \alpha) (y_1^\Delta y_2^\Delta + y_1^{\Delta\nabla} y_2^\rho) + (1 - \alpha)^2 (y_1^\nabla y_2^\nabla + y_1^\rho y_2^{\nabla\nabla}) \\
&\quad - (1 - \alpha)^2 (y_1^\nabla y_2^\nabla + y_1^{\nabla\nabla} y_2^\rho) \\
&= \alpha^2 (y_1^\sigma y_2^{\Delta\Delta}) - \alpha^2 (y_1^{\Delta\Delta} y_2^\sigma) + \alpha(1 - \alpha) (y_1^\sigma y_2^{\nabla\Delta}) - \alpha(1 - \alpha) (y_1^{\nabla\Delta} y_2^\sigma) \\
&\quad + \alpha(1 - \alpha) (y_1^\rho y_2^{\Delta\nabla}) - \alpha(1 - \alpha) (y_1^{\Delta\nabla} y_2^\rho) + (1 - \alpha)^2 (y_1^\rho y_2^{\nabla\nabla}) \\
&\quad - (1 - \alpha)^2 (y_1^{\nabla\nabla} y_2^\rho) \\
&= \alpha^2 (y_1^\sigma y_2^{\Delta\Delta} - y_1^{\Delta\Delta} y_2^\sigma) + \alpha(1 - \alpha) [y_1^\sigma y_2^{\nabla\Delta} - y_1^{\nabla\Delta} y_2^\sigma + y_1^\rho y_2^{\Delta\nabla} - y_1^{\Delta\nabla} y_2^\rho] \\
&\quad + (1 - \alpha)^2 [y_1^\rho y_2^{\nabla\nabla} - y_1^{\nabla\nabla} y_2^\rho],
\end{aligned}
\tag{4.6}$$

elde edilir. (4.4) eşitliği yeniden ele alınırsa

$$y_1 y_2^{\diamond\alpha\diamond\alpha} - y_2 y_1^{\diamond\alpha\diamond\alpha} = 0,$$

$$\begin{aligned}
&y_1 (\alpha y_2^\Delta + (1 - \alpha) y_2^\nabla)^{\diamond\alpha} - y_2 (\alpha y_1^\Delta + (1 - \alpha) y_1^\nabla)^{\diamond\alpha} \\
&= y_1 \left[\alpha (\alpha y_2^\Delta + (1 - \alpha) y_2^\nabla)^\Delta + (1 - \alpha) (\alpha y_2^\Delta + (1 - \alpha) y_2^\nabla)^\nabla \right] \\
&\quad - y_2 \left[\alpha (\alpha y_1^\Delta + (1 - \alpha) y_1^\nabla)^\Delta + (1 - \alpha) (\alpha y_1^\Delta + (1 - \alpha) y_1^\nabla)^\nabla \right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 y_1 y_2^{\Delta\Delta} + \alpha(1 - \alpha) y_1 y_2^{\nabla\Delta} + \alpha(1 - \alpha) y_1 y_2^{\Delta\nabla} + (1 - \alpha)^2 y_1 y_2^{\nabla\nabla} \\
&\quad - \alpha^2 y_2 y_1^{\Delta\Delta} - (1 - \alpha) y_2 y_1^{\nabla\Delta} - \alpha(1 - \alpha) y_2 y_1^{\Delta\nabla} \\
&= \alpha^2 [y_1 y_2^{\Delta\Delta} - y_2 y_1^{\Delta\Delta}] + \alpha(1 - \alpha) [y_1 y_2^{\nabla\Delta} - y_2 y_1^{\nabla\Delta} + y_1 y_2^{\Delta\nabla} - y_2 y_1^{\Delta\nabla}] \\
&\quad + (1 - \alpha)^2 [y_1 y_2^{\nabla\nabla} - y_2 y_1^{\nabla\nabla}] \\
&= 0,
\end{aligned}
\tag{4.7}$$

olur. (4.6) ile (4.7) nin eşit olması için $y_1^\sigma = y_1$, $y_2^\sigma = y_2$, $y_1^\rho = y_1$, $y_2^\rho = y_2$ olması gerekir. Yani $y^\sigma = y$, $y^\rho = y$ noktalar çift taraflı yoğun olmalıdır. Dolayısıyla $\mathbb{T}$ zaman skalası düzgün zaman skalası olarak seçildiğinde

$$[W_{\diamond_\alpha}(y_1, y_2)]^{\diamond_\alpha} = \left(y_1 y_2^{\diamond_\alpha} - y_2 y_1^{\diamond_\alpha} \right)^{\diamond_\alpha} = 0,$$

elde edilir. Bu ise aynı λ özdeğerine karşılık gelen y_1 ve y_2 öz fonksiyonlarının lineer bağımlı olduğunu gösterir. Bu nedenle (4.1)-(4.3) probleminin özdeğerleri basittir. Çünkü her λ özdeğerine bir öz fonksiyon karşılık gelir.

Teorem 4.7. (4.1)-(4.3) $\diamond_\alpha$ Sturm-Liouville probleminin farklı özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonları ortogonaldır. Yani

$$\int_a^b y_1(t) y_2(t) \diamond_\alpha t = 0,$$

dır.

İspat: λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen öz fonksiyonlar y_1 ve y_2 olsunlar.

$$\begin{aligned} -y_1^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha} + p(t) y_1 &= \lambda_1 y_1, \\ -y_2^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha} + p(t) y_2 &= \lambda_2 y_2, \end{aligned}$$

eşitlikleri sırasıyla y_2 ve $-y_1$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} y_1 y_2^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha} - y_2 y_1^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha} &= (\lambda_1 - \lambda_2) y_1 y_2, \\ \left(y_1 y_2^{\diamond_\alpha} - y_2 y_1^{\diamond_\alpha} \right)^{\diamond_\alpha} &= (\lambda_1 - \lambda_2) y_1 y_2, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının $\diamond_\alpha$ -integrali alınırsa

$$\begin{aligned} (1 - 2\alpha + 2\alpha^2) (y_1 y_2) (t) \quad | \quad & \frac{b}{a} + \alpha(1 - \alpha) [(y_1 y_2)^\rho(t) + (y_1 y_2)^\sigma(t)] \Big|_a^b \\ & + (1 - \alpha) \int_a^b y_1^\nabla(t) [y_2^\sigma(t) - y_2^\rho(t)] \diamond_\alpha t \\ - \int_a^b y_2^\sigma(t) y_1^{\diamond_\alpha}(t) \diamond_\alpha t - (1 - 2\alpha + 2\alpha^2) (y_2 y_1) (t) \quad | \quad & \frac{b}{a} \\ - \alpha(1 - \alpha) [(y_2 y_1)^\rho(t) + (y_2 y_1)^\sigma(t)] \quad | \quad & \frac{b}{a} - (1 - \alpha) \int_a^b y_2^\nabla(t) [y_1^\sigma(t) - y_1^\rho(t)] \diamond_\alpha t \\ + \int_a^b y_1^\sigma(t) y_2^{\diamond_\alpha}(t) \diamond_\alpha t &= (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b y_1(t) y_2(t) \diamond_\alpha t, \end{aligned}$$

olur. $\mathbb{T}$, düzgün zaman skalası olmak üzere

$$\int_a^b \left[y_1(t) y_2^{\diamond \alpha}(t) - y_2(t) y_1^{\diamond \alpha}(t) \right] \diamond_{\alpha} t = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b y_1(t) y_2(t) \diamond_{\alpha} t,$$

elde edilir. Burada (4.7) eşitliği kullanılırsa $\lambda_1 \neq \lambda_2$ için

$$\int_a^b y_1(t) y_2(t) \diamond_{\alpha} t = 0,$$

olur.

Teorem 4.8. (4.1)-(4.3) $\diamond_{\alpha}$ Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: $\overline{\lambda_0}$, (4.1)-(4.3) probleminin reel olmayan özdeğeri ve buna karşılık gelen öz fonksiyon $\overline{y}(t, \lambda_0)$ olsun. Ortogonalite teoreminden

$$\begin{aligned} \int_a^b y(t, \lambda_0) \overline{y}(t, \lambda_0) \diamond_{\alpha} t &= 0, \\ \int_a^b |y(t, \lambda_0)|^2 \diamond_{\alpha} t &= 0, \\ \alpha \int_a^b |y(t, \lambda_0)|^2 \Delta t + (1 - \alpha) \int_a^b |y(t, \lambda_0)|^2 \nabla t &= 0, \end{aligned}$$

elde edilir. $\forall \alpha \in [0, 1]$ için λ_0 kompleks iken $y(t, \lambda_0) = 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Yani, λ_0 kompleks olamaz.

Teorem 4.9. $u, v \in L_2^{\diamond \alpha}[a, b]$ olmak üzere

- a. $(Lu)v - (Lv)u = [W_{\diamond_{\alpha}}(u, v)]^{\diamond \alpha},$
- b. $\langle Lu, v \rangle - \langle Lv, u \rangle = W_{\diamond_{\alpha}}(u, v) |_a^b,$

eşitlikleri vardır. Bu eşitliklere sırasıyla genelleştirilmiş Lagrange eşitliği ve Green formülü denir.

İspat:

- a. u, v öz fonksiyonları için

$$Lu = -u^{\diamond \alpha \diamond \alpha} + p(t)u = \lambda u,$$

$$Lv = -v^{\diamond \alpha \diamond \alpha} + p(t)v = \lambda v,$$

eşitlikleri sırasıyla v ve $-u$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}(Lu)v - (Lv)u &= v^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha} u - u^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha} v \\ &= \left(v^{\diamond_\alpha} u - u^{\diamond_\alpha} v \right)^{\diamond_\alpha} \\ &= [W_{\diamond_\alpha}(u, v)]^{\diamond_\alpha},\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

b. $L_2^{\diamond_\alpha}[a, b]$ uzayı üzerindeki iç çarpım kullanılırsa

$$\begin{aligned}\langle Lu, v \rangle &= \int_a^b \left(-u^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha} + p(t)u \right) v \diamond_\alpha t, \\ \langle Lv, u \rangle &= \int_a^b \left(-v^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha} + p(t)v \right) u \diamond_\alpha t, \\ \langle Lu, v \rangle - \langle Lv, u \rangle &= \int_a^b \left(-u^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha} v + p(t)uv + v^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha} u + p(t)vu \right) \diamond_\alpha t \\ &= \int_a^b \left(-u^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha} v + uv^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha} \right) \diamond_\alpha t \\ &= \int_a^b [W_{\diamond_\alpha}(u, v)]^{\diamond_\alpha} \diamond_\alpha t \\ &= (1 - 2\alpha + 2\alpha^2)W_{\diamond_\alpha}(u, v) \Big|_a^b + \alpha(1 - \alpha) [(W_{\diamond_\alpha}(u, v))^\rho + (W_{\diamond_\alpha}(u, v))^\sigma] \Big|_a^b \\ &= W_{\diamond_\alpha}(u, v) \Big|_a^b,\end{aligned}$$

olur. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 4.10. [65] $t, t_0 \in \mathbb{T}$, $p(t) = p$ ve $1 - v^2(t)p^2(t) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\forall t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ için

$$\sin_p^{\diamond_\alpha}(t, t_0) = \frac{p}{1 + v^2 p^2} \left((1 + \alpha v^2 p^2) \cos_p(t, t_0) + (1 - \alpha)vp \sin_p(t, t_0) \right),$$

$$\cos_p^{\diamond_\alpha}(t, t_0) = -\frac{p}{1 + v^2 p^2} \left((1 + \alpha v^2 p^2) \sin_p(t, t_0) - (1 - \alpha)vp \cos_p(t, t_0) \right),$$

dir.

Teorem 4.11. (4.1)-(4.3) ile verilen $\diamond_\alpha$ Sturm- Liouville probleminin öz fonksiyonu

$$\begin{aligned} y(t, \lambda) = & -\frac{8}{15}y^{\diamond_\alpha}(a, \lambda)\sin_\lambda(t, a) + \frac{1}{3}y(a, \lambda)[3\cos_\lambda(t, a) + \sin_\lambda(t, a)] \\ & + \frac{5}{4}\int_a^t \cos_\lambda(t, s)y(s, \lambda)\diamond_\alpha s - \frac{8}{15}\int_a^t p(s)y(s, \lambda)\sin_\lambda(t, s)\diamond_\alpha s, \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat:

$$\frac{1}{\lambda}\int_a^t p(s)y(s, \lambda)\sin_\lambda(t, s)\diamond_\alpha s = \frac{1}{\lambda}\int_a^t y^{\diamond_\alpha\diamond_\alpha}(s, \lambda)\sin_\lambda(t, s)\diamond_\alpha s + \int_a^t y(s, \lambda)\sin_\lambda(t, s)\diamond_\alpha s, \quad (4.8)$$

olmak üzere sağdaki ilk integrale $\diamond_\alpha$ -kısmi integrasyon formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}\int_a^t y^{\diamond_\alpha\diamond_\alpha}(s, \lambda)\sin_\lambda(t, s)\diamond_\alpha s &= \frac{1}{\lambda}\left[y^{\diamond_\alpha}(s, \lambda)\sin_\lambda(t, s)\right] \Big|_a^t - \frac{1}{\lambda}\int_a^t \left(y^{\diamond_\alpha}\right)^\sigma(s, \lambda)(\sin_\lambda(t, s))^{\diamond_\alpha}\diamond_\alpha s \\ &= \frac{1}{\lambda}y^{\diamond_\alpha}(t, \lambda)\sin_\lambda(t, t) - \frac{1}{\lambda}y^{\diamond_\alpha}(a, \lambda)\sin_\lambda(t, a) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda}\int_a^t y^{\diamond_\alpha}(s, \lambda)\frac{\lambda}{1+v^2\lambda^2}[(1+\alpha v^2\lambda^2)\cos_\lambda(t, s) \\ &\quad + (1-\alpha)v\lambda\sin_\lambda(t, s)]\diamond_\alpha s \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\lambda}y^{\diamond_\alpha}(a, \lambda)\sin_\lambda(t, a) - \frac{1}{1+v^2\lambda^2}\left[y(s, \lambda)\left((1+\alpha v^2\lambda^2)\cos_\lambda(t, s) + (1-\alpha)v\lambda\sin_\lambda(t, s)\right)\right] \Big|_{s=a}^t \\ &\quad + \frac{1}{1+v^2\lambda^2}\int_a^t y^\sigma(s, \lambda)\left[(1+\alpha v^2\lambda^2)\cos_\lambda(t, s) + (1-\alpha)v\lambda\sin_\lambda(t, s)\right]^{\diamond_\alpha}\diamond_\alpha s \\ &= -\frac{1}{\lambda}y^{\diamond_\alpha}(a, \lambda)\sin_\lambda(t, a) \\ &\quad - \frac{1}{1+v^2\lambda^2}\left[y(t, \lambda)\left((1+\alpha v^2\lambda^2)\cos_\lambda(t, t) + (1-\alpha)v\lambda\sin_\lambda(t, t)\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{1+v^2\lambda^2}y(a, \lambda)\left[(1+\alpha v^2\lambda^2)\cos_\lambda(t, a) + (1-\alpha)v\lambda\sin_\lambda(t, a)\right] \\ &\quad + \frac{1}{1+v^2\lambda^2}\int_a^t y(s, \lambda)\left[(1+\alpha v^2\lambda^2)\left(-\frac{\lambda}{1+v^2\lambda^2}\left((1+\alpha v^2\lambda^2)\sin_\lambda(t, s) - (1-\alpha)v\lambda\cos_\lambda(t, s)\right)\right)\right]\diamond_\alpha s \\ &\quad + \frac{1}{1+v^2\lambda^2}\int_a^t y(s, \lambda)\left[(1-\alpha)v\lambda\left(\frac{\lambda}{1+v^2\lambda^2}\left((1+\alpha v^2\lambda^2)\cos_\lambda(t, s) + (1-\alpha)v\lambda\sin_\lambda(t, s)\right)\right)\right]\diamond_\alpha s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\lambda}y^{\diamond_\alpha}(a, \lambda) \sin_\lambda(t, a) - \frac{(1 + \alpha v^2 \lambda^2)}{1 + v^2 \lambda^2}y(t, \lambda) \\
&\quad + \frac{1}{1 + v^2 \lambda^2}y(a, \lambda) [(1 + \alpha v^2 \lambda^2) \cos_\lambda(t, a) + (1 - \alpha)v\lambda \sin_\lambda(t, a)] \\
&\quad - \frac{\lambda(1 + \alpha v^2 \lambda^2)}{(1 + v^2 \lambda^2)^2} \int_a^t y(s, \lambda) [(1 + \alpha v^2 \lambda^2) \sin_\lambda(t, s) - (1 - \alpha)v\lambda \cos_\lambda(t, s)] \diamond_\alpha s \\
&\quad + \frac{(1 - \alpha)v\lambda^2}{(1 + v^2 \lambda^2)^2} \int_a^t y(s, \lambda) [(1 + \alpha v^2 \lambda^2) \cos_\lambda(t, s) + (1 - \alpha)v\lambda \sin_\lambda(t, s)] \diamond_\alpha s \\
&= -\frac{1}{\lambda}y^{\diamond_\alpha}(a, \lambda) \sin_\lambda(t, a) - \frac{(1 + \alpha v^2 \lambda^2)}{1 + v^2 \lambda^2}y(t, \lambda) \\
&\quad + \frac{1}{1 + v^2 \lambda^2}y(a, \lambda) [(1 + \alpha v^2 \lambda^2) \cos_\lambda(t, a) + (1 - \alpha)v\lambda \sin_\lambda(t, a)] \\
&\quad + \frac{1}{(1 + v^2 \lambda^2)^2} \int_a^t [-\lambda(1 + \alpha v^2 \lambda^2)^2 + (1 - \alpha)^2 v^2 \lambda^3] \sin_\lambda(t, s) y(s, \lambda) \diamond_\alpha s \\
&\quad + \frac{1}{(1 + v^2 \lambda^2)^2} \int_a^t 2[(1 - \alpha)v\lambda^2(1 + \alpha v^2 \lambda^2)] \cos_\lambda(t, s) y(s, \lambda) \diamond_\alpha s
\end{aligned}$$

olur. Eğer $v\lambda = 2$ seçilirse

$$\begin{aligned}
-\frac{\lambda(1 + \alpha v^2 \lambda^2)^2 + (1 - \alpha)^2 v^2 \lambda^3}{(1 + v^2 \lambda^2)^2} &= -\frac{\lambda(1 + 4\alpha)^2 + (1 - \alpha)^2 4\lambda}{(1 + 4)^2} = -1 \\
\lambda[-1 - 8\alpha - 16\alpha^2 + 4 - 8\alpha + 4\alpha^2] &= -25 \\
\lambda(-12\alpha^2 - 16\alpha + 3) &= -25
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\alpha = \frac{1}{2}$ olmak üzere $\lambda = \frac{25}{8}$ olur. Bu değerler (4.9) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} \int_a^t y^{\diamond_\alpha \diamond_\alpha}(s, \lambda) \sin_\lambda(t, s) \diamond_\alpha s &= -\frac{8}{25}y^{\diamond_\alpha}(a, \lambda) \sin_\lambda(t, a) - \frac{3}{5}y(t, \lambda) \\
&\quad + \frac{1}{5}y(a, \lambda) [3 \cos_\lambda(t, a) + \sin_\lambda(t, a)] \\
&\quad - \int_a^t \sin_\lambda(t, s) y(s, \lambda) \diamond_\alpha s + \frac{3}{4} \int_a^t \cos_\lambda(t, s) y(s, \lambda) \diamond_\alpha s
\end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.10) denklemi (4.8) de ele alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{8}{25} \int_a^t p(s) y(s, \lambda) \sin_\lambda(t, s) \diamond_\alpha s &= -\frac{8}{25} y^{\diamond_\alpha}(a, \lambda) \sin_\lambda(t, a) - \frac{3}{5} y(t, \lambda) \\
&+ \frac{1}{5} y(a, \lambda) [3 \cos_\lambda(t, a) + \sin_\lambda(t, a)] \\
&- \int_a^t \sin_\lambda(t, s) y(s, \lambda) \diamond_\alpha s + \frac{3}{4} \int_a^t \cos_\lambda(t, s) y(s, \lambda) \diamond_\alpha s \\
&+ \int_a^t \sin_\lambda(t, s) y(s, \lambda) \diamond_\alpha s,
\end{aligned}$$

olur. Buradan $y(t, \lambda)$ yalnız bırakılırsa

$$\begin{aligned}
y(t, \lambda) &= -\frac{8}{15} y^{\diamond_\alpha}(a, \lambda) \sin_\lambda(t, a) + \frac{1}{3} y(a, \lambda) [3 \cos_\lambda(t, a) + \sin_\lambda(t, a)] \\
&+ \frac{5}{4} \int_a^t \cos_\lambda(t, s) y(s, \lambda) \diamond_\alpha s - \frac{8}{15} \int_a^t p(s) y(s, \lambda) \sin_\lambda(t, s) \diamond_\alpha s,
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise verilen problemin öz fonksiyonunun ifadesidir.

5 SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bu çalışmada ilk olarak zaman skalasında temel kavramlar en yalın hali ile verilmiş ve diamond- α analizi ifade edilmiştir. Daha sonra Sturm-Liouville problemi, diamond tipinde kurularak bu problemin spektral özellikleri incelenmiştir. Diamond- α tipinde fonksiyonların türevini ve integralini almak oldukça sıkıntılı bir süreçtir. Kurulan diamond- α tipinde Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin reelliği, basitliği, farklı özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonların ortogonalitesi gibi özellikler bu zorluğa rağmen incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca bazı özel durumlar için bu problemin öz fonksiyonu bulunmuştur.

Ele alınan problemin özdeğerleri ve nodal noktaları (öz fonksiyonların sıfırları) için bir formül bulunursa düz problem yerine ters problem incelenebilir ve önemli sonuçlar elde edilebilir. Fakat diamond- α tipinde bu tür problemleri çalışmak ve ters problemi çözmek, problemin içerdiği türevin yapısı ve çözüm yapılırken ortaya çıkan integralin hesaplanması sırasında oluşan sıkıntılar nedeni ile oldukça zordur.

KAYNAKLAR

- [1] **Kelly, W.**, 2002. Theory of difference equations numerical methods and applications, second edition, 259-262, New York.
- [2] **Elaydi, S.**, 2005. An introduction to difference equations 3^{rd} edition, New York.
- [3] **Hilger, S.**, 1988. Ein Masskettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, *PhD thesis*, Universität Würzburg, Germany.
- [4] **Hilger, S.**, 1990. Analysis on measure chains- a unified approach to continuous and discrete calculus, *Results in Mathematics*, **18**(1-2), 18-56.
- [5] **Aulbach, B. and Hilger, S.**, 1990. Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale, *Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems*, Akademie Verlag, Berlin, **59**, 9-20.
- [6] **Aulbach, B.**, 1990. Analysis auf zeitmwngen, *Lecture notes*, University of Augsburg, Germany.
- [7] **Aulbach, B. and Hilger, S.**, 1990. A unified approach to continuous and discrete dynamics, *Qualitive theory of differential equaitons*. Szeged; 1988. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, North-Holland, Amsterdam, **53**, 37-56.
- [8] **Bohner, M. and Peterson, A.**, 2001. Dynamic equations on time scales, an introduction with applications, Boston (MA): Birkhäuser, Boston.
- [9] **Bohner, M. and Peterson, A.**, 2003. Advances in dynamic equations on time scales, Boston (MA): Birkhäuser, Boston.
- [10] **Bohner, M. and Svetlin, G.**, 2016. Multivariable dynamic calculus on time scales, Springer.
- [11] **Atici, F.M, Biles, D.C. and Lebedinsky, A.**, 2006. An application of time scales to economics, *Mathematical and Computer Modelling*, **43**, 718–726.
- [12] **Kac, V. and Cheung, P.**, 2002. Quantum calculus, *Springer-Verlag*, New York, Berlin, Heidelberg, **18**,18-56.
- [13] **Hinton, D.**, 2005. Sturm's 1836 oscillation results evolution of the theory in Sturm-Liouville theory, *Birkhäuser*, Basel, 1-27.

- [14] **Tülüce, Ş.**, 2010. Bir spektral problemin özdeğerlerinin sayısal analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, Selçuk Üniversitesi.
- [15] **Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S.**, 1970. Introduction to spectral theory, selfadjoint ordinary differential operators, *American Mathematical Society*.
- [16] **Erbe, L. and Hilger, S.** 1993. Sturmian theory on measure chains, *Differential Equations Dynamical Systems*, **1**(3), 223-246.
- [17] **Bohner, M.**, 1996. On disconjugacy for Sturm-Liouville difference equations, *Journal Difference Equations*, **2**(2), 227-237.
- [18] **Agarwal, R. P., Bohner, M. and Wong, J.Y.**, 1999. Sturm-Liouville eigenvalue problems on time scales, *Applied Mathematics and Computation*, **99**, 153-166.
- [19] **Agarwal, R. P. and Bohner, M.**, 1999. Basic calculus on time scales and some of its applications, *Results in Mathematics*, **35**(1-2), 3-22.
- [20] **Agarwal, R. P., Bohner, M. and Peterson, A.**, 2001. Inequalities on time scales: a survey, *Mathematical Inequalities and Applications*, **4**, 535-557.
- [21] **Guseinov, G.Sh. and Kaymakçalan, B.**, 2002. Basics of Riemann Δ and ∇ integration on time scales, *Journal of Difference Equations and Applications*, **8**(11), 1001-1017.
- [22] **Atici, F. M. and Guseinov, G. Sh.**, 2002. On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **141**, 75-99.
- [23] **Guseinov, G.Sh.**, 2003. Integration on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **285**, 107-127.
- [24] **Guseinov, G. Sh.**, 2007. Eigenfunction expansions for a Sturm-Liouville problem on time scales, *International Journal of Differential Equations*, **2**, 93-104.
- [25] **Davidson, F.A. and Rynne, B.P.**, 2007. Self-adjoint boundary value problems on time scales, *Electronic Journal of Differential Equations*, **175**, 1-10.
- [26] **Rynne, B.P.**, 2007. L_2 spaces and boundary value problems on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **328**(2), 1217-1236.
- [27] **Kong, Q.**, 2008. Sturm-Liouville problems on time scales with separated boundary conditions, *Results in Mathematics*, **52**(1-2), 111-121.

- [28] **Amster, P., De Napoli, P. and Pinasco, J.P.**, 2009. Detailed asymptotic of eigenvalues on time scales, *Journal Differential Equations Applications*, **15**, 225–231.
- [29] **Zhang, Y.**, 2011. Multiplicity results for a generalized Sturm-Liouville dynamical system on time scales, *Advances in Difference Equations*, 2011:24.
- [30] **Bairamov, E., Aygar, Y. and Koprubasi, T.**, 2011. The spectrum of eigenparameter-dependent discrete Sturm-Liouville equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **235**(16), 4519-4523.
- [31] **Eckhardt, J. and Teschl, G.**, 2012. Sturm–Liouville operators on time scales, *Journal of Difference Equations and Applications*, **18**, 1875-1887.
- [32] **Özkan, A.S.**, 2017. Sturm-Liouville operator with parameter-dependent boundary conditions on time scales, *Electronic Journal of Differential Equations*, **212**, 1–10.
- [33] **Allahverdiev, B. P., Eryilmaz, A. and Tuna, H.**, 2017. Dissipative Sturm-Liouville operators with spectral parameter in the boundary condition on bounded time scales, *Electronic Journal of Differential Equations*, **95**, 1-13.
- [34] **Zemánek, P.**, 2017. Principal solution in Weyl–Titchmarsh theory for second order Sturm–Liouville equation on time scales, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **2**, 1–18.
- [35] **Kaymakçalan, B., Lakshmikantham, V. and Sivasundaram, S.**, 1996. Dynamical systems on measure chains, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht.
- [36] **Chyan, C. J., Davis, J. M., Henderson, J. and Yin, W. K. C.**, 1998. Eigenvalue comparisons for differential equations on a measure chain, *Electronic Journal of Differential Equations*, **35**, 1-7.
- [37] **Zhang, Q. G. and Sun, H. R.**, 2001. Variational approach for Sturm-Liouville boundary value problems on time scales, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **36**(1-2), 219-232.
- [38] **Guseinov, G.Sh. and Kaymakçalan, B.**, 2002. On a disconjugacy criterion for second order dynamic equations on time scales, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **141**(1-2), 187-196.

- [39] **Erbe, L., Peterson, A. and Řehák, P.**, 2002. Comparison theorems for linear dynamic equations on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **275**(1), 418-438.
- [40] **Agarwal, R. P., Bohner, M. and O'Regan, D.**, 2002. Time scale boundary value problems on infinite intervals, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **141**, 27-34.
- [41] **Agarwal, R. P., Bohner, M., O'Regan, D. and Peterson, A.**, 2002. Dynamic equations on time scales: a survey, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **141**(1-2), 1-26.
- [42] **Bohner, M.**, 2004. Calculus of variations on time scales, *Dynamic Systems and Applications*, **13**, 339-349.
- [43] **Hilscher, R. and Zeidan, V.**, 2004. Calculus of variations on time scales; weak local piecewise C_{rd}^1 solutions with variable endpoints, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **289**, 143-166.
- [44] **Guseinov, G.Sh.**, 2005. Self-adjoint boundary value problems on time scales and symmetric Green's functions, *Turkish Journal of Mathematics*, **29**, 365-380.
- [45] **Gurses, M., Guseinov, G.Sh. and Silindir, B.**, 2005. Integrable functions on time scales, *Journal of Mathematical Physics*, **46**, 113510.
- [46] **Grace, S.R., Bohner, M. and Agarwal, R.P.**, 2009. On the oscillation of second-order half-linear dynamic equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, **15**(5), 451-460.
- [47] **Huseyinov, A. and Bairamov, E.**, 2009. On expansions in eigenfunctions for second order dynamic equations on time scales, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, **9**, 77-88.
- [48] **Zhang, Y. and Ma, L.**, 2010. Solvability of Sturm-Liouville problems on time scales at resonance, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **233**, 1785-1797.
- [49] **Erbe, L., Mert, R. and Peterson, A.**, 2012. Spectral properties of diffusion equation on time scales, *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 7671-7678.

- [50] **Aygar, Y. and Bohner, M.**, 2015. On the spectrum of eigenparameter-dependent quantum difference equations, *Applied Mathematics and Informations Sciences*, **9**(4), 1725-1729.
- [51] **Karpuz, B.**, 2016. Nonoscillation and oscillation of second order linear dynamic equations via the sequence of functions technique, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **18**(4), 889-903.
- [52] **Yaslan, İ.**, 2016. Existence of positive solutions for second-order impulsive boundary value problems on time scales, *Mediterranean Journal of Mathematics*, **13**(4), 1613-1624.
- [53] **Gulsen, T. and Yilmaz, E.**, 2017. Spectral theory of Dirac System on time scales, *Applicable Analysis*, **96**, 2684-2694.
- [54] **Uçar, D.**, 2010. Zaman skalasında bazı kısmi dinamik denklemlerin salımlılığı üzerine, *Doktora Tezi*, Afyon Kocatepe Üniversitesi.
- [55] **Rogers, Jr., J. W. and Sheng, Qin.**, 2007. Notes on the diamond dynamic derivative on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **326**(1), 228-241.
- [56] **Yılmaz, Z.**, 2013. Sonsuz aralık üzerinde lineer olmayan zaman skalası sınır değer problemleri, *Yüksek Lisans Tezi*, Pamukkale Üniversitesi.
- [57] **Celik, O. F. and Yantır, A.**, 2016. Diamond- α dynamic equations on time scales, *Master Thesis*, Yaşar University, Bornova, İzmir.
- [58] **Monika, D. and Torres, D.F.M.**, 2014. A general delta-nabla calculus of variations on time scales with applications to economics, *International Journal of Dynamical systems and Differential Equations*, **5**(1), 42-71.
- [59] **Caputo, M.C.**, 2010. Time scales: From nabla calculus to delta calculus and vice versa via duality, *International Journal of Difference equations*, **5**(1), 25-40.
- [60] **Davis, J.M., Fadag, M., Henderson, J. and Sheng, Q.**, 2006. An exploration of combined dynamic derivatives on time scales and their application, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **7**(3), 395-413.
- [61] **Malinowska, A.B. and Torres, D.F.M.**, 2008. The diamond alpha Riemann integral and mean value theorems on time scales, arXiv: 0804.4420v1 [math. CA].

- [62] **Atasever, N.**, 2011. On diamond alpha dynamic equations and inequalities, *Master Thesis*, Georgia Southern University.
- [63] **Ferreira, R.A.C., Sidi Ammi, M.R. and Torres, D.F.M.**, 2008. Diamond Jensen's inequality on time scales, *Journal of Inequalities and Applications*, Art. ID 576876, 13.
- [64] **Mozyrska, D. and Torres, D.F.M.**, 2009. A study of diamond alpha dynamic equations on regular time scales, arXiv: 0902.1380[math. CA].
- [65] **Mozyrska, D. and Torres, D.F.M.**, 2008. Diamond-alpha polynomial on time scales, arXiv: 0805. 0274v1 [math. CA].



ÖZGEÇMİŞ

Ad : Ayşe Nur
Soyad : Akkılıç
Doğum tarihi : 10/07/1994
Doğum Yeri : Elazığ/Karşıbağ

İletişim Numarası : 05442973687
E-mail adresi : akkilicaysenur@gmail.com

Eğitim durumu : Yüksek Lisans

- İlkokul : Fatih İlköğretim Okulu (2000-2004) (İstanbul)
- Ortaokul : Bakırköy Osmaniye İlköğretim Okulu (2004-2007) (İstanbul)
- Lise : Ataköy Anadolu Lisesi (2007-2011) (İstanbul)
- Üniversite : Fırat Üniversitesi (2011-2015)