

**ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE ZAMANLA DEĞİŞEN DELTA
DİNAMİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ**

Uğur KARAMAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

NİSAN 2006

ANKARA

Uğur KARAMAN tarafından hazırlanan ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE ZAMANLA DEĞİŞEN DELTA DİNAMİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr.İbrahim Ethem ANAR

Üye : Prof.Dr.İrfan Baki YAŞAR

Üye : Prof.Dr.Muhsin MERT

Üye : Prof.Dr.Erdoğan ESİN

Üye : Yrd.Doç.Dr. Adil MISIR

Tarih : 25.04.2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Uğur KARAMAN

**ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE ZAMANLA DEĞİŞEN DELTA DİNAMİK
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ**

(Yüksek Lisans Tezi)

Uğur KARAMAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NİSAN 2006

ÖZET

Bu tezde, diferensiyel denklemlerle ilgili birçok sonuun fark denklemleri ile eş değer sonuçlara taşınabildiği, bir zaman skalası üzerinde bazı temel özellikler ve dinamik denklemlerin başlangıç değer probleminin çözümü verilmiştir.

**Bilim Kodu
Anahtar Kelimeler
Sayfa Adedi
Tez Yöneticisi**

**: 204.1.138
: Zaman Skalası ,Dinamik Denklemler
: 52
: Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR**

**SOLUTION OF TIME VARYING DELTA DYNAMIC EQUATIONS ON
TIME SCALES**

(M.Sc. Thesis)

Uğur KARAMAN

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
April 2006**

ABSTRACT

In this thesis, we consider some results related with differential equations and carry them quite easily to equivalent results in difference equations and we give the solution of initial value problem of delta dynamic equations on time scales.

Science Code : 204.1.138

Key Words : Time Scales, Dynamic Equations

Page Number: 52

Adviser : Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR'a, arkadaşım Muhammet Tağı Dastcerdi ve Adnan Tuna'ya, manevi desteklerinden güç aldığım eşime ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	viii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ.....	1
2. ZAMAN SKALASI	2
2.1. Temel Kavramlar ve Teoremler.....	2
3. DİFERENSİYEL VE TÜREV	6
3.1. Diferansiyellenebilirlik.....	6
4. İNTEGRAL	16
4.1. rd-Süreklilik ve Özellikleri	16
5. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİNAMİK DENKLEMLER	25
5.1.Hilger 'in Kompleks Düzlemi.....	25
5.2.Yeni Toplama Grubu.....	28
5.3.Üstel Fonksiyon	36
6. BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ	46
6.1.Homojen Olmayan Birinci Mertebeden Lineer Denklemler	46
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ.....	52

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Noktaların şematik sınıflandırılması	4
Şekil 3.1. Bazı zaman skalaları.....	15
Şekil 5.1. Hilger'in kompleks düzlemi	26
Şekil 5.2. Hilger'in kompleks sayıları	27

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Noktaların sınıflandırılması	3
Çizelge 3.1. Zaman skalasına örnekler	15
Çizelge 4.1. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ için örnekler	20
Çizelge 5.1. Toplamsal tersler	32
Çizelge 5.2. Delta üstel fonksiyonlar	45
Çizelge 5.3. Delta üstel fonksiyonlar	45

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
T	Zaman skalası
f^{Δ}	Hilger delta türevi
Δf	İleri fark operatörü
σ	İleri sıçrama operatörü
ρ	Geri sıçrama operatörü
$\emptyset$	Boş küme
μ	Sıçrama arası fark
T^k	Türevi tanımladığımız fonksiyon
$f^{\Delta\Delta}$	Hilger ikinci türev
$f^{\Delta\sigma}$	Hilger birinci türevin ileri sıçraması
C_{rd}	Sağdan yoğun sürekli fonksiyonlar kümesi
ξ	Silindir dönüşümü

1.GİRİŞ

Bu tezde, diferensiyel denklemlerle ilgili birçok sonucun fark denklemleri ile eş değer sonuçlara taşınabildiği, bir zaman skalası üzerinde bazı temel özellikler ve dinamik denklemlerin başlangıç değer probleminin çözümü incelenecektir.

Son yıllarda üzerinde birçok çalışmalar yapılan zaman skalasının teorisini Stefan Hilger sürekli ve ayrık analizi birleştirmek amacıyla 1988 de kurmuştur.

Zaman skalası üzerinde dinamik denklemlerin çalışılması bu tür ayrışmaları açıklar , diferansiyel denklemlerden ve fark denklemlerinden iki ayrı sonuç elde edilmesini engeller.

Tezin ikinci bölümünde; $\mathbb{T}$ zaman skalası, temel tanım ve örnekler verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde; $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için Hilger delta türev, çarpma ve bölme kuralı tanıtılmış, türev alabilmeyle ilgili sonuçlar ve örnekler incelenmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde; integral ve süreklilikle ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde; Hilger' in kompleks düzlemi , üstel fonksiyonları tanıtmak için silindir dönüşümleri , üstel fonksiyonların özellikleri , birinci dereceden lineer dinamik denklemleri ve onlar için başlangıç değer problemlerinin çözümü zaman skalası üzerinde incelenmiştir.

$$y^\Delta = p(t)y , y(t_0) = 1$$

Başlangıç değer problemini çözerek bu çözümü, verilen zaman skalası ile ilişkili olarak üslü denklem olarak yazılmıştır.

Tezin altıncı bölümünde; Üstel fonksiyonun birçok özelliğini kullanarak birinci dereceden lineer dinamik denklemleri içeren başlangıç değer problemleri ve çözümleri ele alınmıştır.

2. ZAMAN SKALASI

2.1. Temel Tanımlar

2.1. Tanım

Bir zaman skalası, keyfi boş olmayan kapalı bir gerçel sayılar kümesidir.

$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ yani gerçel sayılar, tamsayılar, doğal sayılar, $[0,1] \cup [2,3]$ ve $[0,1] \cup \mathbb{N}_0$ kapalı aralıkları zaman skalasına örnektir. $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ ve $(0,1)$ aralığındaki sayılar zaman skalası değildir. Bu çalışmada zaman skalası $\mathbb{T}$ ile gösterilecektir. [1]

$\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu için f^Δ türevini;

i) $f^\Delta = f'$ alışılmış bilinen türev; $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

ii) $f^\Delta = \Delta f$ alışılmış bilinen ileri fark operatörü $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

şeklinde göstereceğiz.

2.2. Tanım

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için;

$\sigma(t) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü;

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

$\rho(t) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ geri sıçrama operatörü;

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

ile tanımlanır. Bu tanımda

$\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ ($\sigma(t) = t$ eğer $\mathbb{T}$ bir $\max t$ ye sahipse) ve

$\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ ($\rho(t)=t$ eğer $\mathbb{T}$ bir min t ye sahipse)

olur.

$\mu: \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu ;

$\mu(t) = \sigma(t) - t$ ile tanımlanır.

2.3. Tanım

Eğer $\sigma(t) > t$ ise t sağdan saçılımlı, $\rho(t) < t$ ise t soldan saçılımlıdır. Aynı anda sağdan saçılımlı ve soldan saçılımlı noktalar da izole nokta olarak adlandırılır.

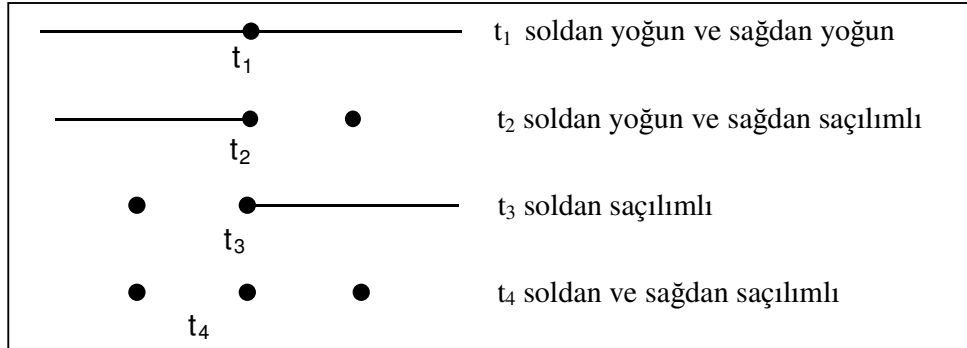
Ayrıca, $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise t sağdan yoğun

$t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t)=t$ ise t soldan yoğun denir. Aynı anda soldan ve sağdan yoğun olan noktalara yoğun denir.

Noktaların sınıflandırılması Çizelge 2.1 de noktaların şematik sınıflandırması da Şekil 2.1. de gösterilmiştir.

Çizelge 2.1. Noktaların sınıflandırılması

t sağdan saçılımlı	$t < \sigma(t)$
t sağdan yoğun	$t = \sigma(t)$
t soldan saçılımlı	$\rho(t) < t$
t soldan yoğun	$\rho(t) = t$
t izole	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t yoğun	$\rho(t) = t = \sigma(t)$



Şekil 2.1. Noktaların şematik sınıflandırılması

$\mathbb{T}$ zaman skalasından türetilmiş bir $\mathbb{T}^k$ kümesi,

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} - \{\sup \mathbb{T}\} & \sup \mathbb{T} < \infty \text{ soldan saçılımlı} \\ \mathbb{T} & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Not.

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f^\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)) \quad \forall t \in \mathbb{T}$ şeklinde tanımlanır.

2.1. Örnek

Aşağıdaki iki durumu inceleyelim.

i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\exists t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{ s \in \mathbb{R} : s > t \} = \inf(t, \infty) = t$$

ve benzer şekilde

$$\rho(t) = \sup \{ s \in \mathbb{R} : s < t \} = \sup(-\infty, t) = t$$

olur. Burada $\forall t \in \mathbb{R}$ noktası yoğundur. μ fonksiyonu

$$\mu(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{T} \text{ için}$$

olur.

ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $\exists t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf \{t+1, t+2, t+3, \dots\} = t+1$$

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \sup \{t-1, t-2, t-3, \dots\} = t-1$$

Burada $\forall t \in \mathbb{Z}$ noktası izoledir. μ fonksiyonu

$$\mu(t) \equiv 1 \quad \forall t \in \mathbb{T} \text{ için}$$

olur.

iii) Eğer $\mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ ise

$$\sigma(2^n) = 2^{n+1}, \quad \sigma(t) = 2t \quad \text{ve}$$

$$\rho(2^n) = 2^{n-1}, \quad \rho(t) = \frac{t}{2} \quad \text{burada } \forall t \in \mathbb{T} \text{ izole noktadır.}$$

3. DİFERENSİYEL VE TÜREV

3.1. Diferensiyellenebilirlik

3.1. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ olacak şekilde

$f^\Delta(t)$ türevi,

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U$$

şeklinde tanımlanır.

$\exists \delta > 0$ için t nin bir U komşuluğu vardır. $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ dir.

f^Δ , f fonksiyonunun delta (ya da Hilger) türevi olarak adlandırılır. [1]

3.1. Örnek

i) Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = \alpha$ ise,

$f^\Delta(t) \equiv 0$ dir. Burada $\alpha \in \mathbb{R}$ sabittir. $\forall \varepsilon > 0$ olması sebebiyle doğrudur.

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0 \cdot [\sigma(t) - s]| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in \mathbb{T}$$

ii) Eğer, $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ ise

$f^\Delta(t) \equiv 1$ dir. $\forall \varepsilon > 0$ olması sebebiyle doğrudur.

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 1 \cdot [\sigma(t) - s]| = |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in \mathbb{T}$$

Not.

i) $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t^2$ ile tanımlandığında,

$$f^{\Delta}(t) = t + \sigma(t)$$

ii) $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ $g, t > 0$ olacak şekilde $\forall t \in \mathbb{T}$ için $g(t) = \sqrt{t}$ ile tanımlandığında,

$$g^{\Delta}(t) = \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{\sigma(t)}}$$

3.1. Teorem

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Bu durumda ,

i) Eğer f, t de türevlenebilirse, f t de süreklidir.

ii) Eğer f, t de sürekli ve t sağdan saçılımlı ise, f t de türevlenebilir.

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}$$

iii) Eğer t sağdan yoğunsa, f t de türevlenebilir.

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

iv) Eğer f fonksiyonu t de türevlenebilirse;

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$$

İspat.

i) f fonksiyonu t de türevlenebilir ve $\varepsilon \in (0, 1)$ olsun.

$$\varepsilon^* = \varepsilon [1 + |f^{\Delta}(t)| + 2\mu(t)]^{-1} \quad \varepsilon^* \in (0, 1)$$

olarak tanımlayalım.

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - [\sigma(t) - s] f^{\Delta}(t)| \leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s|$$

olacak şekilde t nin bir U komşuluğu vardır.

Böylece, $\forall s \in U \cap (t - \varepsilon^*, t + \varepsilon^*)$ için

$$|f(t) - f(s)| = |\{f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t) [\sigma(t) - s]\} - \{f(\sigma(t)) - f(t) - \mu(t)f^\Delta(t)\} + (t-s)f^\Delta(t)|$$

$$\leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s| + \varepsilon^* \mu(t) + |t-s| |f^\Delta(t)|$$

$$\leq \varepsilon^* [\mu(t) + |t-s| + \mu(t) + |f^\Delta(t)|]$$

$$< \varepsilon^* [1 + |f^\Delta(t)| + 2\mu(t)]$$

$$= \varepsilon$$

olur. Bu f fonksiyonunun t de sürekli olduğu sonucunu verir.

ii) f fonksiyonu t de sürekli ve t sağdan saçılımlı olsun.

Süreklilikten;

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

olur. $\varepsilon > 0$ için

$$\left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \right| \leq \varepsilon$$

$\forall s \in U$ olacak şekilde t nin bir U komşuluğu vardır. $\forall s \in U$ için

$$\left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} [\sigma(t) - s] \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

sonucunu verir. Böylece;

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \text{ olur.}$$

iii) f fonksiyonu t de türevlenebilir ve t sağdan yoğun olsun.

$\varepsilon > 0$ için ,

$$\left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t) [\sigma(t) - s] \right| \leq \varepsilon \mid \sigma(t) - s \mid$$

$\forall s \in U$ olacak şekilde t in bir U komşuluğu vardır. $\sigma(t) = t$ olduğunda

$$\left| [f(t) - f(s)] - f^{\Delta}(t)(t - s) \right| \leq \varepsilon \mid t - s \mid \quad \forall s \in U \text{ için}$$

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f^{\Delta}(t) \right| \leq \varepsilon$$

sonucunu verir. Böylece aranan $s \in U, s \neq t$ için

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \text{ olur.}$$

iv) Eğer $\sigma(t) = t$, $\mu(t) = 0$ ise;

$$f(\sigma(t)) = f(t) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t) \text{ olur.}$$

Eğer $\sigma(t) > t$ ise; (ii) den

$$f(\sigma(t)) = f(t) = \mu(t) \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t) \text{ olur.}$$

3.2. Teorem

$f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ da türevlenebilir olsun. Bu durumda;

i) $f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$$

şeklinde t de türevlenebilir.

ii) Her sabit α için, $\alpha f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\alpha.f)^{\Delta}(t) = \alpha.f^{\Delta}(t)$$

şeklinde t de türevlenebilir.

iii) $f.g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$$

$$f^{\Delta}(t)g(t) + f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t)$$

şeklinde t de türevlenebilir.

iv) Eğer $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}$,

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t).f(\sigma(t))}$$

şeklinde t de türevlenebilir.

v) Eğer $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t).g(t) - f(t).g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

şeklinde t de türevlenebilir.

İspat.

f ve g nin $t \in \mathbb{T}^k$ da delta türevlenebilir olsun.

i) $\varepsilon > 0$ olsun. Böylece

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s| \quad s \in U_1$$

$$|g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s| \quad s \in U_2$$

$U = U_1 \cap U_2$ olsun. $\forall s \in U$ için;

$$\begin{aligned} & |(f + g)(\sigma(t)) - (f + g)(s) - [f^\Delta(t) + g^\Delta(t)](\sigma(t) - s)| \\ &= |(f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s) + g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \\ &\leq |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| + |g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s| + \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s| \\ &= \varepsilon |\sigma(t) - s| \end{aligned}$$

iii) $\varepsilon \in (0, 1)$ olsun.

$$\varepsilon^* = \varepsilon \left[1 + |f(t)| + |g(\sigma(t))| + |g^\Delta(t)| \right]^{-1}$$

tanımlayalım. Böylece $\varepsilon^* \in (0, 1)$ dir ve buradan,

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U_1$$

$$|g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U_2$$

$|f(t) - f(s)| \leq \varepsilon^* \quad \forall s \in U_3$ olacak şekilde t nin U_1, U_2, U_3 komşulukları vardır. $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$ olsun. $s \in U$ için

$$|(fg)(\sigma(t)) - (fg)(s) - [f^\Delta(t)g(\sigma(t)) + f(t)g^\Delta(t)](\sigma(t) - s)|$$

$$= |[f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)]g(\sigma(t))$$

$$+ [g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)]f(t)|$$

$$+ [g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)]|f(s) - f(t)|$$

$$+ |(\sigma(t) - s)g^\Delta(t)[f(s) - f(t)]|$$

$$\leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s| |g(\sigma(t))| + \varepsilon^* |\sigma(t) - s| |f(t)|$$

$$+ \varepsilon^* \varepsilon^* |\sigma(t) - s| + \varepsilon^* |\sigma(t) - s| |g^\Delta(t)|$$

$$= \varepsilon^* |\sigma(t) - s| [|g(\sigma(t))| + |f(t)| + \varepsilon^* + |g^\Delta(t)|]$$

$$\leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s| [1 + |f(t)| + |g(\sigma(t))| + |g^\Delta(t)|]$$

$$= \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

olur.

$$v) \left(\frac{f}{g} \right)^\Delta(t) = \left(f \frac{1}{g} \right)^\Delta(t)$$

$$= f(t) \left(\frac{1}{g} \right)^\Delta(t) + f^\Delta(t) \frac{1}{g(\sigma(t))}$$

$$= -f(t) \frac{g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))} + f^\Delta(t) \frac{1}{g(\sigma(t))}$$

$$= \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

3.2. Tanım

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ f^{Δ} nın türevlenebilirliği $\mathbb{T}^{k^2} = (\mathbb{T}^k)^k$ nın üzerinde ikinci türev $f^{\Delta\Delta} = (f^{\Delta})^{\Delta} : \mathbb{T}^{k^2} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır. n. mertebeden türev $f^{\Delta^n} : \mathbb{T}^{k^n} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır.

$$\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t)) , \rho^2(t) = \rho(\rho(t))$$

olur. Genelleştirirsek;

$$\sigma^n(t) = t + nh \text{ ve } \rho^n(t) = t - nh \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

olur.

3.2. Örnek

$(fg)^{\Delta} = f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}$ ikinci türevini alalım.

$$\begin{aligned} ((fg)^{\Delta})^{\Delta} &= (f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta})^{\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + f^{\Delta\sigma}g^{\Delta} + f^{\sigma\Delta}g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + (f^{\Delta\sigma} + f^{\sigma\Delta})g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta} \end{aligned}$$

olur. Burada $f^{\Delta^{\sigma}} = f^{\Delta\sigma}$ dir.

3.3. Örnek

$h > 0$ için

$$\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$$

olsun . Bu durumda ;

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf \{t + nh : n \in \mathbb{N}\} = t + h \quad t \in \mathbb{T} \text{ için}$$

olur ve benzer şekilde

$$\rho(t) = t - h$$

$\forall t \in \mathbb{T}$ noktası izole edilmiştir.

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + h - t = h \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

olur .Böylece bu örnekteki μ sabittir.

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

$$f^{\Delta\Delta}(t) = \frac{f^\Delta(\sigma(t)) - f^\Delta(t)}{\mu(t)}$$

$$= \frac{f^\Delta(t+h) - f^\Delta(t)}{h}$$

$$= \frac{\frac{f(t+2h) - f(t+h)}{h} - \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}{h}$$

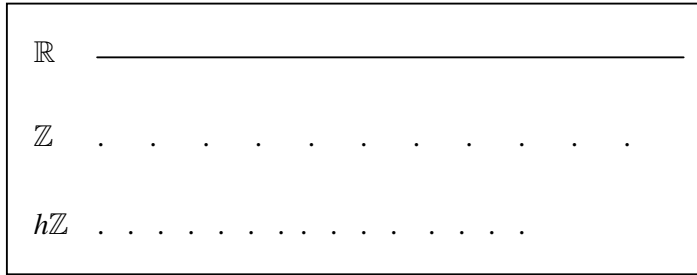
$$= \frac{f(t+2h) - f(t+h) - f(t+h) + f(t)}{h^2}$$

$$= \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}$$

olur. $f^{\Delta^n}(t)$ yi

$$f^{\Delta^n}(t) = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(t+kh)$$

şeklinde yazabiliriz.



Şekil 3.1 Bazı zaman skalaları

Çizelge 3.1 Zaman skalasına örnekler

$\mathbb{T}$	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$
	0	t	t
$\mathbb{Z}$	1	t+1	t-1
$h\mathbb{Z}$	h	t+h	t-h
$q^{\mathbb{N}}$	(q-1)t	qt	$\frac{t}{q}$
$2^{\mathbb{N}}$	t	2t	$\frac{t}{2}$
$\mathbb{N}_0^2$	$2\sqrt{t}+1$	$(\sqrt{t}+1)^2$	$(\sqrt{t}-1)^2$

4. İNTEGRAL

4.1. rd Süreklilik ve Özellikleri

4.1. Tanım

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan, $\mathbb{T}$ deki sağdan yoğun olan noktalarda sağdan limitleri ve soldan yoğun olan noktalarda soldan limitleri olan fonksiyonlara regüle fonksiyon denir.

4.2. Tanım

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan $\mathbb{T}$ deki sağdan yoğun noktalarda sürekli olan ve $\mathbb{T}$ deki soldan yoğun noktalarda soldan limitleri olan fonksiyona rd sürekli fonksiyon denir.

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ rd sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

şeklindedir.

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir ve türevleri sürekli olan fonksiyonların kümesi

$$C_{rd}^1 = C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki teorem rd sürekli ve regüle fonksiyonları içeren bazı sonuçları içermektedir.

4.1. Teorem

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon

- i) f sürekli ise f rd süreklidir.
- ii) f rd sürekli ise f regüledir.
- iii) Sıçrama operatörü σ , rd süreklidir.

iv) f regüle veya rd sürekli ise f^σ da regüle veya rd sürekli dir.

4.3. Tanım

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu $D \subset \mathbb{T}^k : \mathbb{T}^k \setminus D$ ve $\mathbb{T}$ nin sağdan saçılımlı elemanlarını içeren ve her noktasında f in diferensiyellenebilir olduğu durumlarda D ile ön diferensiyellenebilir.

4.2. Teorem Kompakt aralıktaki her regüle fonksiyon sınırlıdır.

İspat.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$|f(t_n)| > n \text{ ile } t_n \in [a, b] \quad \{t_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [a, b]$$

olduğundan dolayı $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ yakınsak alt dizisi vardır.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = t_0, \quad t_0 \in [a, b] \quad (4.1)$$

$\{t_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{T}$ ve $\mathbb{T}$ kapalı olduğundan dolayı $t_0 \in \mathbb{T}$ not edelim.(4.1) den t_0 izole değildir ve t_0 dan aşağıya yakınsayan bir alt dizi vardır. Her bir durumda $t \rightarrow t_0$ giderken $f(t)$ nin limiti regülerlikten dolayı sonlu olmak zorundadır.

Teorem 4.3. (Ortalama Değer Teoremi)

f ve g $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlanan reel değerli fonksiyonlar olsunlar ve her ikisi de D ile ön diferansiyellenebilir olsun. O zaman,

$$|f^\Delta(t)| \leq g^\Delta(t) \quad \forall t \in D \text{ için}$$

ve

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r) \quad \forall r, s \in \mathbb{T}, r \leq s \text{ için}$$

olur.

4.1. Sonuç

f ve g fonksiyonları D ile ön diferensiyallenebilir olsun.

(i) Eğer $U, r, s \in \mathbb{T}$ uç noktaları ile bir kompakt aralık ise,

$$|f(s) - f(r)| \leq \left\{ \sup_{t \in U \cap D} |f^\Delta(t)| \right\} |s - r|$$

olur.

(ii) Eğer $\forall t \in D$ için $f^\Delta(t) = 0$ ise, f bir sabit fonksiyondur.

(iii) Eğer $\forall t \in D$ için $f^\Delta(t) = g^\Delta(t)$ ise,

$$g(t) = f(t) + C \quad \forall t \in \mathbb{T} \text{ için}$$

olur.

4.4. Teorem (Ön anti türev)

f regüle fonksiyon olsun. D diferansiyellenme bölgesiyle ön diferansiyellenebilir bir F fonksiyonu;

$$F^\Delta(t) = f(t) \quad \forall t \in D \text{ için}$$

vardır.

4.4. Tanım

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ regüle bir fonksiyon olsun. f in belirsiz integrali

$$\int f(t) \Delta t = F(t) + C$$

şeklinde tanımlanır. C bir keyfi sabittir, F , f fonksiyonunun bir ön anti türevidir. Cauchy integrali

$$\int_r^s f(t) \Delta t = F(s) - F(r) \quad \forall r, s \in \mathbb{T} \text{ için}$$

şeklinde tanımlanır. $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$F^\Delta(t) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{T}^k \text{ için}$$

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun anti türevi olarak tanımlanır.

4.1. Örnek

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $a \neq 1$ ise

$$\int a^t \Delta t = ?$$

$$\left(\frac{a^t}{a-1} \right)^\Delta = \Delta \left(\frac{a^t}{a-1} \right) = \frac{a^{t-1} - a^t}{a-1} = a^t \quad \text{olduğundan,}$$

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + C$$

elde edilir.. Burada C keyfi bir sabittir.

4.5. Teorem (anti türev)

Her rd sürekli fonksiyonun bir anti türevi vardır. Eğer $t_0 \in \mathbb{T}$ ise ;

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) \Delta \tau \quad t \in \mathbb{T} \text{ için}$$

şeklinde tanımlanan $F(t)$, f in bir anti türevidir.

Çizelge 4.1. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ için örnekler

Zaman Skalası	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
Geri sıçrama operatörü $\rho(t)$	t	$t - 1$
İleri sıçrama operatörü $\sigma(t)$	t	$t + 1$
$\mu(t)$	0	1
$f^\Delta(t)$ türevi	$f'(t)$	$\Delta f(t)$
$\int_a^b f(t) \Delta(t)$ integrali	$\int_a^b f(t) dt$	$\sum_{t=a}^{b-1} f(t)$ (eğer $a < b$)
Rd-sürekli f	sürekli f	herhangi f

4.6. Teorem

$f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^k$ ise;

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta \tau = \mu(t)f(t)$$

İspat.

Teorem 4.5. ile f fonksiyonunun bir F anti türevi ortaya çıkar ve

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta \tau = F(\sigma(t)) - f(t)$$

$$= \mu(t) F^\Delta(t)$$

$$= \mu(t)f(t)$$

elde edilir.

4.7. Teorem

Eğer $f^\Delta \geq 0$, ise f azalan değildir.

İspat.

$[a, b]$ üzerinde $f^\Delta \geq 0$ ve $s, t \in \mathbb{T}$ ve $a \leq s \leq t \leq b$ olsun.

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f^\Delta(\tau) \Delta\tau \geq f(s) \text{ olur.}$$

4.8. Teorem

Eğer $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rd}$, ise;

$$(i) \int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t;$$

$$(ii) \int_a^b (\alpha f)(t) \Delta t = \alpha \int_a^b f(t) \Delta t;$$

$$(iii) \int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t;$$

$$(iv) \int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t;$$

$$(v) \int_a^b f(\sigma(t)) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t;$$

$$(vi) \int_a^b f(t) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t;$$

$$(vii) \int_a^a f(t) \Delta t = 0;$$

(viii) eğer (a, b) üzerinde $|f(t)| \leq g(t)$ ise,

$$\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta t;$$

(ix) eğer tüm $a \leq t < b$ için $f(t) \geq 0$ ise,

$$\int_a^b f(t) \Delta t \geq 0 \text{ olur.}$$

İspat.

Bu sonuçlar Tanım 4.4 Teorem 3.2 ve Teorem 4.3 ten çıkarılabilir. f ve g rd sürekli oldukları için, Teorem 4.5 e göre bunlar F ve G 'nin anti-türevlerine sahiptir. Teorem 3.2 (i) ye göre, $F + G$, $f + g$ nin bir anti-türevidir, öyle ki,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g)(t) \Delta t &= (F + G)(b) - (F + G)(a) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t . \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \Delta t &= F(b) - F(a) \\ &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ &= \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t . \end{aligned}$$

olur.

fg , $f^\sigma g^\Delta + f^\Delta g$ nin anti-türevi olduğu için,

$$\int_a^b (f^\sigma g^\Delta + f^\Delta g)(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a)$$

olur.

Teorem 4.8 de verilen tüm formüller f ve g nin sadece regüle fonksiyon olduğu durumlarda da geçerlidir.

4.9. Teorem

$a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olsun.

(i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt,$$

burada sağdaki integral Riemann integralidir.

(ii) Eğer $[a, b]$ iki izole noktadan oluşuyorsa,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a, b)} \mu(t) f(t) & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{t \in [b, a)} \mu(t) f(t) & a > b \end{cases}$$

(iii) Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}, h > 0$

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh) h & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh) h & a > b \end{cases}$$

(iv) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{t=a}^{b-1} f(t) & a > b \end{cases}$$

4.5. Tanım

Eğer $a \in \mathbb{T}$, $\sup \mathbb{T} = \infty$ ise ve f $[a, \infty)$ üzerinde rd sürekli ise, has olmayan integrali

$$\int_a^\infty f(t) \Delta t = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \Delta t$$

ile tanımlanır. Eğer limit varsa has olmayan integral yakınsak, limit yoksa integral ıraksaktır.

5. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİNAMİK DENKLEMLER

5.1. Hilger 'in Kompleks Düzlemi

5.1. Tanım

$f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Birinci dereceden dinamik denklem

$$y^\Delta = f(t, y, y^\sigma) \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer

$$f(t, y, y^\sigma) = f_1(t)y + f_2(t) \quad \text{veya} \quad f(t, y, y^\sigma) = f_1(t)y^\sigma + f_2(t)$$

f_1 ve f_2 fonksiyonları için (5.1) lineer denklem şeklinde yazılır.

$y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ (5.1) in çözümü olur.

Problem

$$y^\Delta = f(t, y, y^\delta), \quad y(t_0) = y_0 \quad t_0 \in \mathbb{T} \quad \text{ve} \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

başlangıç değer problemi olarak adlandırılır.

Eş. 5.1 in y çözümü $y(t_0) = y_0$ ile başlangıç değer probleminin çözümüdür.

$$y^\Delta = p(t)y, \quad y(t_0) = 1$$

Başlangıç değer problemini çözerek bu çözümü, verilen zaman skalası ile ilişkili olarak üslü denklem olarak yazacağız.

Şimdi Hilger kompleks düzleminin ne olduğunu açıklayalım.

5.2. Tanım

$h > 0$ için Hilger kompleks sayılarını , Hilger reel eksenini , Hilger alternatif eksenini ve Hilger sanal eksenini sırasıyla

$$\mathbb{C}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq -\frac{1}{h} \right\},$$

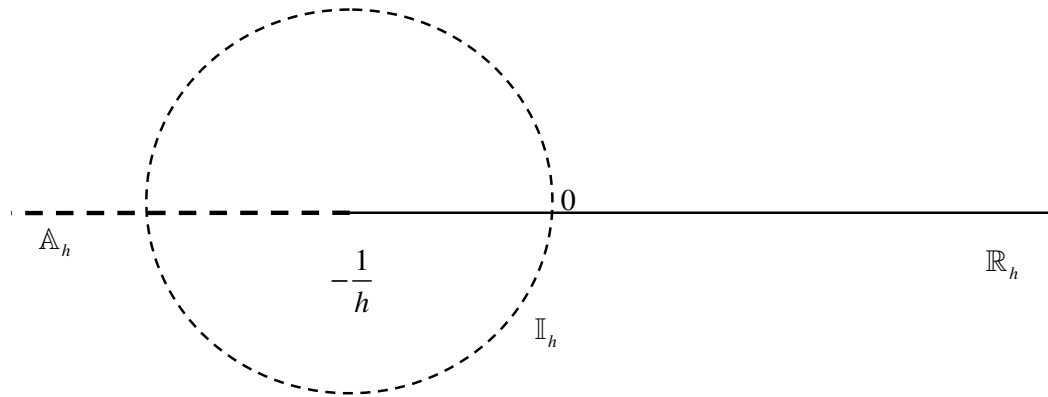
$$\mathbb{R}_h := \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad z > -\frac{1}{h} \right\},$$

$$\mathbb{A}_h := \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad z < -\frac{1}{h} \right\},$$

$$\mathbb{I}_h := \left\{ z \in \mathbb{C}_h : \left| z + \frac{1}{h} \right| = \frac{1}{h} \right\},$$

olarak tanımlanır.

$h=0$ için $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}, \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}, \mathbb{I}_0 = i\mathbb{R}, \mathbb{A}_0 = \emptyset$ olur.



Şekil 5.1 Hilger'in kompleks düzlemi

5.3. Tanım

$h > 0$ ve $z \in \mathbb{C}_h$, Hilger'in reel z parçası

$$\text{Re}_h(z) = \frac{|zh+1|-1}{h} \text{ ile}$$

ve Hilger'in sanal z parçası

$$\text{Im}_h(z) = \frac{\text{Arg}(zh+1)}{h}$$

ile tanımlanır.

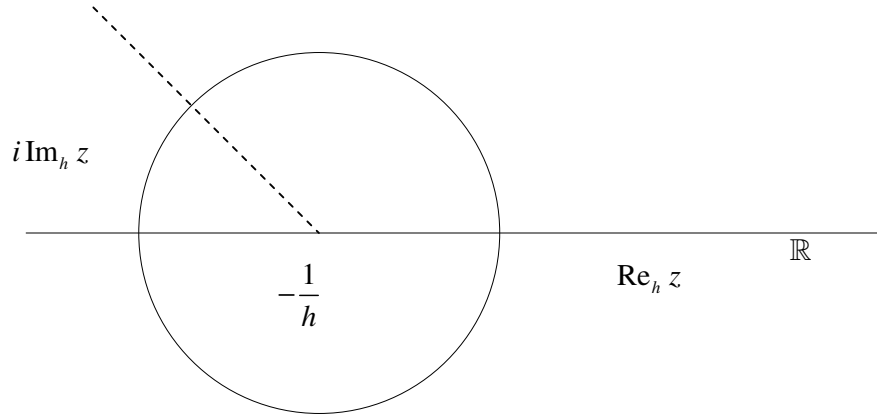
$\text{Arg}(z)$ z 'nin asal bağımsız değişkenini simgeler(örn $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$).

$$-\frac{1}{h} < \text{Re}_h(z) < \infty \text{ ve } -\frac{\pi}{h} < \text{Im}_h(z) \leq \frac{\pi}{h}$$

5.4. Tanım

$-\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h}$ Hilgerin sanal sayısı $\dot{i}_w$ ile tanımlanır.

$$\dot{i}_w = \frac{e^{iwh} - 1}{h} \quad z \in C_h, \dot{i} \text{Im}_h \in I_h \quad (5.2)$$



Şekil 5.2. Hilger'in kompleks düzlemi

Eğer $-\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h}$ ise

$$|\dot{i}_w|^2 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{wh}{2} \quad (5.3)$$

Eş. 5.2 yi kullanarak

$$\begin{aligned}
 |\dot{I}w|^2 &= (\dot{I}w)(\overline{\dot{I}w}) \\
 &= \left(\frac{e^{iwh} - 1}{h} \right) \left(\frac{e^{-iwh} - 1}{h} \right) \\
 &= \frac{2 - e^{iwh} - e^{-iwh}}{h^2} \\
 &= \frac{2}{h^2} (1 - \cos(wh)) \\
 &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{wh}{2}
 \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz

5.2. Yeni Toplama Grubu

5.2. Teorem

Eğer c_h üzerinde $\oplus$ işlemini

$$z \oplus w = z + w + zwh$$

ile tanımlarsak $(c_h, \oplus)$ Abel grubu olur.

İspat.

$z, w \in C_h$ ve $z \oplus w$ karmaşık sayılardır.

$$z \oplus w \neq -\frac{1}{h}$$

$$1 + h(z \oplus w) = 1 + h(z + w + zwh)$$

$$= 1 + hz + hw + hwzh$$

$$= (1 + hz)(1 + hw)$$

$$\neq 0$$

$C_h \oplus$ işlemi altında kapalıdır.

$z \oplus 0 = 0 \oplus z = z$ olduğundan $0, \oplus$ için toplamsal özdeş olur. $z \in C_h$ için z nin $\oplus$ altında ters toplamı bulmak için w için

$$z \oplus w = 0$$

Bundan sonra w için ;

$$z + w + zwh = 0$$

Böylece ;

$$w = -\frac{z}{1 + zh}$$

$\oplus$ işlemi altında z nin ters toplamı olur. $(C_h, \oplus)$ gruptur. Bu yüzden

$$z \oplus w = z + w + zwh$$

$$= w + z + wz h = w \oplus z$$

değişmeli olduğundan $(C_h : \oplus)$ Abel gruptur.

Not.

C_h üzerindeki $\oplus$ işleminin birleşme özelliği vardır.

5.3. Teorem

$z \in \mathbb{C}_h$ için

$$z = \text{Re}_h z \oplus i \text{Im}_h z \text{ olur.}$$

İspat.

$$z \in \mathbb{C}_h$$

$$\begin{aligned} \text{Re}_h z \oplus i \text{Im}_h z &= \frac{|zh+1|-1}{h} \oplus i \frac{\text{Arg}(zh+1)}{h} \\ &= \frac{|zh+1|-1}{h} \oplus \frac{\exp(i \text{Arg}(zh+1))-1}{h} \\ &= \frac{|zh+1|-1}{h} + \frac{\exp(i \text{Arg}(zh+1))-1}{h} \\ &+ \frac{|zh+1|-1}{h} \frac{\exp(i \text{Arg}(zh+1))-1}{h} h \\ &= \frac{1}{h} \{ |zh+1|-1 + \exp(i \text{Arg}(zh+1))-1 \} \\ &+ \{ (|zh+1|-1)(\exp(i \text{Arg}(zh+1))-1) \} \\ &= \frac{1}{h} \{ |zh+1| \exp(i \text{Arg}(zh+1)) - 1 \} \\ &= \frac{(zh+1)-1}{h} = z \end{aligned}$$

Not.

$n \in \mathbb{N}$ ve $z \in C_h$ üzerinde $\odot$ işlemi

$n \odot z = z \oplus z \oplus z \oplus \dots \oplus z$ şeklinde tanımlanır.

bu son denklemde sağ tarafta n tane terim vardır. Bu takdirde

$$n \odot z = \frac{(zh+1)^n - 1}{h} \text{ şeklinde olur..}$$

Teorem 5.2de $z \in C_h$ olduğundan Θ işlemine göre z nin ters toplamı

$$\Theta z = \frac{-z}{1+zh} \quad (5.4)$$

şeklinde bulunur.

5.5. Tanım

Θ işlemini C_h üzerinde

$$z \ominus w = z \oplus (\Theta w) \quad (5.5)$$

ile tanımlarız

Not.

Eğer $z, w \in \mathbb{C}_h$, $h \geq 0$ için

$$(i) z \ominus z = 0$$

$$(ii) z \ominus w = \frac{z-w}{1+wh}$$

$$(iii) \text{ Eğer } h = 0 \text{ ise } z \ominus w = z-w \text{ olur.}$$

$$(iv) z \in \mathbb{C}_h \text{ ise } \bar{z} = \Theta z \text{ olur.}$$

$$(v) \Theta(iw) = \overline{iw}$$

özellikleri vardır.

Çizelge 5.1. Toplamsal tersler

z		0	1	i	$\frac{1}{h}$	$\frac{2}{h}$	$\frac{i-1}{h}$
Θz		0	$-\frac{1}{1+h}$	$\frac{1}{i-h}$	$-\frac{1}{2h}$	$-\frac{2}{h}$	$-\frac{i+1}{h}$

5.6. Tanım

Eğer $z \in C_h$ ise z nin genelleşmiş karesi

$$z^2 = (-z) (\Theta z) = \frac{z^2}{1+zh}$$

şeklinde tanımlanır.

5.4. Teorem

$z \in C_h$ için

$$(\Theta z)^2 = z^2 \quad (5.6)$$

$$1+zh = \frac{z^2}{z^2} \quad (5.7)$$

$$z+(\Theta z) = z^2 h \quad (5.8)$$

$$z \oplus z^2 = z + z^2 \quad (5.9)$$

$$z^2 \in R \Leftrightarrow z \in R_h \cup A_h \cup I_h \quad (5.10)$$

$$-\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h} \text{ için}$$

$$-(iw)^2 = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{wh}{2}\right), \quad (5.11)$$

İspat.

$z \in \mathbb{C}_h$ olsun.

$$(\Theta z)^2 = \frac{(\Theta z)^2}{1 + (\Theta z)h}$$

$$= \frac{\frac{z^2}{(1+zh)^2}}{1 + \frac{-zh}{1+zh}}$$

$$= \frac{z^2}{(1+zh)^2} \cdot \frac{1+zh}{1+zh-zh}$$

$$= \frac{z^2}{1+zh} = z^2$$

Eş. 5.7, Eş. 5.6 dan kolayca ispat edilebilir.

Eş. 5.8 i ispat etmek için

$$z + (\Theta z) = z + \frac{-z}{1+zh}$$

$$= \frac{z + z^2h - z}{1+zh}$$

$$= \frac{z^2}{1+zh} .h$$

$$= z^2 .h$$

Eş. 5.10 u ispatlamak için $z = u + iv$ olarak alalım.

$$z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(u+iv)^2}{(1+uh)+iuh} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (u^2 + 2iuv - v^2)(1+uh-ivh) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2uv(1+uh) - vh(u^2 - v^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow u^2vh + 2uv + v^3h = 0$$

$$\Leftrightarrow v=0 \text{ yada } u^2h + 2u + v^2h = 0$$

$$\Leftrightarrow v=0 \text{ yada } \left(u + \frac{1}{h}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{h^2}$$

$$\Leftrightarrow z \in R_h \cup A_h \cup I_h$$

Eş. 5.11 i ispatlamak için

$$-(iw)^2 = (iw)(\Theta(iw))$$

$$= (iw)(\overline{iw})$$

$$= |iw|^2$$

$$= \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{wh}{2}\right)$$

5.7. Tanım

$h>0$ için $\xi_h : \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{Z}_h$ silindir dönüşümü

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h} L \log(1+zh)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada Log asal logaritma fonksiyonudur. $h=0$ için $\xi_0(z) = z$ olur.

$h>0$ olduğunda $\mathbb{Z}_h$ yi silindir olur. Sınır çizgileri

$$Im(z) = -\frac{\pi}{h} \text{ ve } Im(z) = \frac{\pi}{h}$$

$\mathbb{Z}_h$ üzerindeki toplama

$$z + w = z + w \pmod{\frac{2\pi i}{h}} \quad z, w \in \mathbb{Z}_h \quad (5.12)$$

şeklinde tanımlanır.

Not.

$h>0$ için silindir dönüşümünün tersi

$$\xi_h^{-1}(z) = \frac{1}{h}(e^{zh} - 1)$$

$z \in \mathbb{Z}_h$ için $\xi_0^{-1}(z) = z$ olur.

5.5. Teorem

ξ_h Silindir dönüşümü $\mathbb{Z}_h$ üzerinde $+$ işlemi $(\mathbb{C}_h : \oplus)$ den $(\mathbb{Z}_h : +)$ grup homeomorfizmasıdır.

İspat.

$h>0$ ve $z, w \in \mathbb{C}_h$ olsun.

$$\xi_h(z \oplus w) = \frac{1}{h} \text{Log}(1 + (z \oplus w)h)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} \text{Log}(1 + zh + wh + zwh^2) \\
&= \frac{1}{h} \text{Log}((1 + zh)(1 + wh)) \\
&= \frac{1}{h} \text{Log}(1 + zh) + \frac{1}{h} \text{Log}(1 + wh) \\
&= \xi_h(z) + \xi_h(w)
\end{aligned}$$

Bu $h > 0$ durumunu ispatlar.

5.3. Üstel Fonksiyon

5.8. Tanım

$p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu regressive'dir.

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{T}^k \text{ için} \quad (5.13)$$

bütün regressive ve rd sürekli fonksiyonların dizimi

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathbb{T}) = \mathfrak{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanır.

Not.

$\mathfrak{R}$, $\oplus$ işlemine göre abel gruptur.

$$(p \oplus q)(t) = p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t) \quad \forall t \in \mathbb{T}^k \text{ için } p, q \in \mathfrak{R}$$

Not.

$p, q \in \mathfrak{R}$ ise $\ominus p$ ve $p \ominus q$ fonksiyonları

$$\begin{aligned}
(\Theta p)(t) &= \frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \quad \text{her } t \in \mathbb{T}^k \\
(p \Theta q)(t) &= (p \Theta (\Theta q))(t) \quad \forall t \in \mathbb{T}^k
\end{aligned} \tag{5.14}$$

ile tanımlanır.

$p, q \in \mathfrak{R}$ olduğunda

$$(i) \quad p \Theta p = 0$$

$$(ii) \quad \Theta(\Theta p) = p$$

$$(iii) \quad p \Theta q \in \mathfrak{R}$$

$$(iv) \quad p \Theta q = \frac{p - q}{1 - \mu p}$$

$$(v) \quad \Theta(p \Theta q) = q \Theta p$$

$$(vi) \quad \Theta(p \Theta q) = (\Theta p) \Theta (\Theta q)$$

özellikleri elde edilir.

5.9. Tanım

Eğer $p \in \mathfrak{R}$ ise üstel fonksiyon

$$e_p(t, s) = \exp \left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right) \quad s, t \in \mathbb{T} \tag{5.15}$$

şeklinde tanımlanır.

5.1. Lemma

Eğer $p \in \mathfrak{R}$ ise yarı grup özelliği

$$e_p(t, \tau) e_p(\tau, s) = e_p(t, s) \quad \forall \tau, s, t \in \mathbb{T}$$

şeklindedir.

İspat.

$p \in \mathfrak{R}$ olsun $\tau, s, t \in \mathbb{T}$ için Teorem 4.8 i kullanarak

$$\begin{aligned} e_p(t, \tau) e_p(\tau, s) &= \exp \left(\int_{\tau}^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right) \exp \left(\int_s^{\tau} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right) \\ &= \exp \left(\int_{\tau}^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau + \int_s^{\tau} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right) \\ &= \exp \left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right) \\ &= e_p(t, s) \end{aligned}$$

olur.

5.10. Tanım

Eğer $p \in \mathfrak{R}$ ise birinci dereceden dinamik denklem regressive olarak tanımlanır.

$$y^\Delta = p(t)y \tag{5.16}$$

5.6. Teorem

$y^\Delta = p(t)y$ denklemi regressive olsun.

$$y^\Delta = p(t)y \quad y(t_0) = 1 \quad t_0 \in \mathbb{T} \tag{5.17}$$

$e_p(., t_0)$ başlangıç değer probleminin çözümüdür.

İspat.

$t_0 \in \mathbb{T}^k$ ve $y^\Delta = p(t)y$ denklemi regressive olduğundan

$$e_p(t_0, t_0) = 1$$

olur.

$e_p(t, t_0)$, $y^\Delta = p(t)y(t)$ $t \in \mathbb{T}^k$ dinamik deklemini sağlar. İki durum vardır.

1.durum: $\sigma(t) > t$ Lemma 5.1 den

$$e_p^\Delta(t, t_0) = \frac{\exp\left(\int_{t_0}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) - \exp\left(\int_{t_0}^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)}{\mu(t)}$$

$$= \frac{\exp\left(\int_{t_0}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) - 1}{\mu(t)} e_p(t, t_0)$$

$$= \frac{e^{\xi_{\mu(t)}(p(t))\mu(t)} - 1}{\mu(t)} e_p(t, t_0)$$

$$= \xi_{\mu(t)}^{-1}(\xi_{\mu(t)}(p(t))) \cdot e_p(t, t_0)$$

$$= p(t) \cdot e_p(t, t_0)$$

2.durum : $\sigma(t) = t$ Lemma 5.1 i kullanarak

$$|y(t) - y(s) - p(t)y(t)(t-s)| = |e_p(t, t_0) - e_p(s, t_0) - p(t)e_p(t, t_0)(t-s)|$$

$$= |e_p(t, t_0)| |1 - e_p(s, t_0) - p(t)(t-s)|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| e_p(t, t_0) \right| \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau - e_p(s, t) + \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau - p(t)(t-s) \right| \\
&\leq \left| e_p(t, t_0) \right| \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau - e_p(s, t) \right| + \left| e_p(t, t_0) \right| \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau - p(t)(t-s) \right| \\
&\leq \left| e_p(t, t_0) \right| \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau - e_p(s, t) \right| + \left| e_p(t, t_0) \right| \left| \int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))] \Delta \tau \right|
\end{aligned}$$

İfadesi elde edilir. $\varepsilon > 0$ olsun burada U , t nin komşuluğudur. Böylece en son eşitsizliğin sağ tarafı $\varepsilon|t-s|$ den küçük olur. Ve böylece ispat tamamlanır.

$\sigma(t) = t$ ve $p \in C_{rd}$ olduğundan.

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) = \xi_0(p(t)) \quad (5.18)$$

olur. Bu U_1 in t ile komşuluğunu gösterir.

$$\left| \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t)) \right| < \frac{\varepsilon}{3|e_p(t, t_0)|} \quad \text{her } \tau \in U_1$$

$s \in U_1$ olduğunda,

$$\left| e_p(t, t_0) \right| \cdot \left| \int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))] \Delta \tau \right| < \frac{\varepsilon}{3} |t-s| \quad (5.19)$$

Daha sonra L'Hopital kuralı ile

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - z - e^{-z}}{z} = 0$$

Eğer $s \in U_2$ ise t nin U_2 komşuluğu vardır

$$\left| \frac{1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau - e_p(s, t)}{\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau} \right| < \mathcal{E}^*$$

$$\mathcal{E}^* = \min \left\{ 1, \frac{\mathcal{E}}{1 + 3|p(t)e_p(t, t_0)|} \right\}$$

$s \in U = U_1 \cap U_2$ Eş. 5.19 u kullanarak

$$\begin{aligned} & \left| e_p(t, t_0) \right| \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau - e_p(s, t) \right| < \left| e_p(t, t_0) \right| \mathcal{E}^* \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right| \\ & \leq \left| e_p(t, t_0) \right| \mathcal{E}^* \left\{ \left| \int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))] \Delta \tau \right| + |p(t)||t - s| \right\} \\ & \leq \left| e_p(t, t_0) \right| \mathcal{E}^* \left\{ \left| \int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))] \Delta \tau \right| + |e_p(t, t_0)| \mathcal{E}^* |p(t)||t - s| \right\} \\ & \leq \frac{\mathcal{E}}{3} |t - s| + |e_p(t, t_0)| \mathcal{E}^* |p(t)||t - s| \\ & \leq \frac{\mathcal{E}}{3} |t - s| + \frac{\mathcal{E}}{3} |t - s| \\ & \leq \frac{2\mathcal{E}}{3} |t - s| \end{aligned}$$

elde edilir.

5.7. Teorem

Eğer Eş. 5.16 regressive Eş. 5.17 nin tek çözümü $e_p(., t_0)$ olur.

İspat.

y Eş. 5.17 nin çözümü olsun. Teorem 3.2 ile

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{e_p(.,t_0)} \right)^\Delta(t) &= \frac{y^\Delta(t)e_p(t,t_0) - y(t)e_p^\Delta(t,t_0)}{e_p(t,t_0)e_p(\sigma(t),t_0)} \\ &= \frac{p(t)y(t)e_p(t,t_0) - y(t)p(t)e_p(t,t_0)}{e_p(t,t_0)e_p(\sigma(t),t_0)} = 0 \end{aligned}$$

Böylece

$$\frac{y(t)}{e_p(t,t_0)} \equiv \frac{y(t_0)}{e_p(t_0,t_0)} = \frac{1}{1} = 1$$

ve

$$y = e_p(.,t_0)$$

olur.

5.8. Teorem

$p, q \in \mathfrak{R}$ ise

$$(i) e_0(t, s) \equiv 1 \text{ ve } e_p(t, t) \equiv 1$$

$$(ii) e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)$$

$$(iii) \frac{1}{e_p(t, s)} = e_{\ominus p}(t, s)$$

$$(iv) e_p(t, s) = \frac{1}{e_p(s, t)} = e_{\ominus p}(s, t)$$

$$(v)e_p(t,s)e_p(s,\Gamma)=e_p(t,\Gamma)$$

$$(vi)e_p(t,s)e_q(t,s)=e_{p\ominus q}(t,s)$$

$$(vii)\frac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)}=e_{p\ominus q}(t,s)$$

$$(viii)\left(\frac{1}{e_p(.,t_0)}\right)^\Delta=-\frac{p(t)}{e_p^\sigma(.,t_0)}$$

eşitlikleri vardır.

5.1. Örnek

$\mathbb{T}=h\mathbb{Z}$ $h>0$, $a\in\Re$ olsun.

$$a\in\mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{1}{h}\right\}$$

böylece

$$e_a(t,0)=(1+ah)^{\frac{1}{h}}\quad\forall\,t\in\mathbb{T}\tag{5.19}$$

Eş. 6.3 ü kullanarak

$$y(0)=(1+ah)^0=1$$

ve

$$y^\Delta(t)=\frac{y(t+h)-y(t)}{h}$$

$$=\frac{(1+ah)^{\frac{t+h}{h}}-(1+ah)^{\frac{t}{h}}}{h}$$

$$= \frac{(1+ah)^{\frac{1}{h}}(1+ah-1)}{h}$$

$$= a(1+ah)^{\frac{1}{h}}$$

$$= ay(t) \quad \text{elde edilir.}$$

5.2. Örnek

Zaman skalası $\mathbb{T} = q^{N_0}$ ve $p \in \mathfrak{R}$ olsun.

Problem

$$y^\Delta = p(t)y \quad y(1)=1$$

Eşitlik olarak yeniden yazabiliriz.

$$y^\sigma = (1+(q-1)tp(t))y \quad y(1)=1$$

Ve bu problemin çözümü açıkca şudur.

$$e_p(t,1) = \prod_{s \in T \cap (0,t)} (1+(q-1)sp(s)) \quad (5.20)$$

$$e_a(t,1) = \prod_{s \in T \cap (0,t)} (1+(q-1)as) \quad a \in \mathfrak{R}$$

$$e_a(t,1) = \prod_{s \in T \cap (0,t)} (1+as) \quad (5.21)$$

Şimdi aşağıdaki özel duruma bakalım.

$$p(t) = \frac{1-t}{(q-1)t^2} \quad t \in \mathbb{T}$$

$$e_a(t,1) = \prod_{s \in T \cap (0,t)} (1 + (q-1)sp(s))$$

$$= \prod_{s \in T \cap (0,t)} \left(1 + \frac{1-s}{s}\right)$$

$$= \prod_{n=0}^{k-1} \frac{1}{q^n}$$

$$= \frac{1}{q^{k(k-1)/2}}$$

$$= q^{\frac{k}{2}} q^{-\frac{k^2}{2}}$$

$$= \sqrt{t} e^{-\frac{\ln^2(t)}{2 \ln(q)}}$$

$t = q^k$ sonuuna ulaşırız.

izelge 5.2. stel fonksiyonlar

$\mathbb{T}$	$e_\alpha(t, t_0)$
$\mathbb{R}$	$e^{\alpha(t, t_0)}$
$\mathbb{Z}$	$(1 + \alpha)^{t-t_0}$
$h\mathbb{Z}$	$(1 + \alpha h)^{\frac{t-t_0}{h}}$
$\frac{1}{n}z$	$(1 + \frac{\alpha}{n})^{n(t-t_0)}$

izelge 5.3. stel fonksiyonlar

$\mathbb{T}$	t_0	$P(t)$	$e_p(t, t_0)$
$\mathbb{R}$	0	1	e^t
$\mathbb{Z}$	0	1	2^t
$h\mathbb{Z}$	0	1	$(1 + h)^{\frac{t}{h}}$
$\frac{1}{n}z$	0	1	$\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^t$

6. BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ

6.1. Homojen Olmayan Birinci Mertebeden Lineer Denklemler

$$y^\Delta = p(t)y + f(t) \quad (6.1)$$

ve $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki ilgili homojen denklem

$$y^\Delta = p(t)y \quad \text{dir.} \quad (6.2)$$

6.1. Teorem

Eş. 6.2 regressive olsun. $t_0 \in \mathbb{T}$ $y_0 \in \mathbb{R}$ başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$y^\Delta = p(t)y \quad y(t_0) = y_0 \quad (6.3)$$

$$y(t) = e_p(t, t_0)y_0$$

şeklindedir.

6.1. Tanım

$p \in \mathfrak{R}$ için önce bir operatör tanımlayalım. $L_1 : C_{rd}^1 \rightarrow C_{rd}$

$$L_1 y(t) = y^\Delta(t) - p(t)y(t) \quad t \in \mathbb{T}^k$$

Daha sonra Eş. 6.2 $L_1 y(t) = 0$ ve Eş. 6.1 $L_1 y(t) = f(t)$ formunda yazılabilir. L_1 lineer operatör olduğundan Eş. 6.1 lineer denklemdir..

$y \in C_{rd}^1$ ve $L_1 y(t) = f(t)$ olduğunda $\mathbb{T}$ üzerinde y nin bir çözümüdür.

6.2. Tanım

Eşlenik operatör $L_1^* : C_{rd}^1 \rightarrow C_{rd}$

$$L_1^* x(t) = x^\Delta(t) + p(t)x^\sigma(t) \quad t \in \mathbb{T}^k$$

şeklinde tanımlanır

6.1. Örnek

Fonksiyon

$$x(t) = (1 + ah)^{\frac{1}{h}} \quad t \in h\mathbb{Z}$$

eşlenik denklemin çözümüdür.

$$x^\Delta + ax^\sigma = 0 \quad t \in h\mathbb{Z}$$

burada a regressive sabittir.

6.2. Teorem

$p \in \mathfrak{R}$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun.

$$x^\Delta = -p(t)x^\sigma \quad x(t_0) = x_0 \tag{6.4}$$

Başlangıç değer probleminin tek çözümü,

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0$$

olur.

$$x^\Delta = -p(t)x^\sigma + f(t) \quad x(t_0) = x_0 \tag{6.5}$$

Dinamik denklemin her tarafını $e_p(t, t_0)$ ile çarparak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\left[e_p(., t_0)x \right]^\Delta(t) &= e_p(t, t_0)x^\Delta(t) + p(t)e_p(t, t_0)x^\sigma(t) \\
&= e_p(t, t_0) \left[x^\Delta(t) + p(t)x^\sigma(t) \right] \\
&= e_p(t, t_0)f(t)
\end{aligned}$$

t_0 dan t ye integral alalım.

$$e_p(t, t_0)x(t) - e_p(t_0, t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^t e_p(\tau, t_0)f(\tau)\Delta\tau \quad (6.6)$$

6.3. Tanım

Eş. 6.1 denklemi Eş. 6.2 regressive olduğunda regressive'dir ve $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ rd-sürekli'dir.

6.3. Teorem

Eş. 6.1 regressive ve $t_0 \in \mathbb{T}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$x^\Delta = -p(t)x^\sigma + f(t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (6.7)$$

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(t, \tau)f(\tau)\Delta\tau$$

şeklindedir.

İspat.

İlk olarak yukarıda verilen x başlangıç değer problemini çözdüğünü kolayca görüyoruz. Eğer x Eş. 6.2'nin çözümüyse Eş. 6.1'in de çözümü olduğu görülmektedir. Daha sonra,

$$e_p(t, t_0)x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t e_p(t, \tau)f(\tau)\Delta\tau$$

x için çözeriz ve

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \frac{e_p(\tau, t_0)}{e_p(t, t_0)}f(\tau)\Delta\tau$$

sonucuna ulaşırız.

6.4. Teorem (Sabitlerin Çeşitlenmesi)

Eş. 6.6 nın regressive olduğunu kabul edelim. $t_0 \in \mathbb{T}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Başlangıç değer probleminin.

$$y^\Delta = -p(t)y + f(t) , \quad y(t_0) = y_0 \quad (6.8)$$

tek çözümü

$$y(t) = e_p(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau$$

İspat.

Eşdeğer olarak $y^\Delta = p(t)y + f(t)$ yeniden yazarız.

$$y^\Delta = p(t)[y^\sigma - \mu(t)y^\Delta] + f(t)$$

$$(1 + \mu(t)p(t))y^\Delta = p(t)y^\sigma + f(t)$$

$$y^\Delta = -(\Theta p)(t)y^\sigma + \frac{f(t)}{1 + \mu(t)p(t)}$$

$$y(t) = y_0 e_p(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_p(t, \tau) \frac{f(\tau)}{1 + \mu(\tau)p(\tau)} \Delta \tau$$

$$\frac{e_p(t, \tau)}{1 + \mu(\tau)p(\tau)} = \frac{e_p(t, \tau)}{e_p(\sigma(\tau), \tau)} = e_p(t, \sigma(\tau))$$

sonucuna ulaşırız.

KAYNAKLAR

1. Bohner, M. and Peterson, A., “Dynamic Equations on Time Scales”, *Birkhauser*, Boston, 1-9 (2001).
2. Bohner, M. and Peterson, A., “Advances in Dynamic Equations on Time Scales” *Birkhauser*. Boston, 47-55 (2003).
3. Agarwal, R., Bohner, M., O'Regan, D., Peterson, A., “Dynamic equations on time scales a survey”, *Journal of Computational and Applied Mathematic*, 141: 1-26 (2002).
4. Yaşar, B.İ., “Uygulamalı Matematik”, *Siyasal Kitapevi*, Ankara, 150-157 (2005).
5. Yaşar, B.İ., “Uygulamalı Diferensiyel Denklemler”, *Gazi Üniversitesi Yayını*, Ankara, 70-76 (1997).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KARAMAN, Uğur

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 15.07.1978 Sungurlu

Medeni hali : Evli

Telefon : 0 (312) 271 32 20

e-mail : ukaramann@hotmail.com.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	2006
Lisans	Ankara Üniversitesi /Matematik Bölümü	2001
Lise	Çorum Atatürk Lisesi	1994

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2001-2006	MEB	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Futbol, bilgisayar teknolojileri, astronomi