

**ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE ZAMANLA DEĞİŞEN NABLA
DİNAMİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ**

Sezai YOZGAT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

NİSAN 2006

ANKARA

Sezai YOZGAT tarafından hazırlanan ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE ZAMANLA DEĞİŞEN NABLA DİNAMİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr.İbrahim Ethem ANAR

Üye : Prof.Dr.İrfan Baki YAŞAR

Üye : Prof.Dr.Muhsin MERT

Üye : Prof.Dr.Erdoğan ESİN

Üye : Yrd.Doç.Dr. Adil MISIR

Tarih : 25.04.2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Sezai YOZGAT

**ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE ZAMANLA DEĞİŞEN NABLA DİNAMİK
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ**

(Yüksek Lisans Tezi)

Sezai YOZGAT

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Nisan 2006

ÖZET

Bu tezde, diferensiyel denklemlerle ilgili birçok sonuun fark denklemleri ile eş değeri sonuçlara taşınabildiğii, bir zaman skalası üzerinde bazı temel özellikler ve dinamik denklemlerin başlangıç değeri probleminin çözüümü verilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.138
Anahtar Kelimeler : Zaman Skalası ,Dinamik Denklemler
Sayfa Adedi : 62
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR

**SOLUTION OF TIME VARYING NABLA DYNAMIC EQUATIONS ON
TIME SCALES**

(M.Sc. Thesis)

Sezai YOZGAT

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
April 2006**

ABSTRACT

In this thesis, we consider some results related with differential equations and carry them quite easily to equivalent results in difference equations and we give the solution of initial value problem of delta dynamic equations on time scales.

Science Code : 204.1.138

Key Words : Time Scales, Dynamic Equations

Page Number: 62

Adviser : Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR'a, arkadaşlarım Muhammet Tağı Dastcerdi ve Adnan Tuna'ya , manevi desteklerinden güç aldığım eşime ve oğluma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	ix
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR	xi
1. GİRİŞ	1
2. ZAMAN SKALASI	2
2.1. Temel Kavramlar ve Teoremler	2
3. DİFERENSİYEL VE TÜREV	6
3.1. Diferansiyellenebilirlik	6
4. İNTEGRAL	16
4.1. rd-Süreklilik ve Özellikleri	16
5. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİNAMİK DENKLEMLER	25
5.1. Hilger 'in Kompleks Düzlemi	25
5.2. Yeni Toplama Grubu	28
5.3. Üstel Fonksiyon	36
6. NABLA DİNAMİK DENKLEMLER	44
6.1. Nabla Dinamik Denklemlere Giriş	44
6.2. Nabla Üstel Fonksiyon	48

Sayfa

6.3. Nabla Üstel Fonksiyon Örnekleri	55
6.4. Homojen Olmayan Birinci Mertebeden Lineer Denklemler	55
KAYNAKLAR.....	61
ÖZGEÇMİŞ.....	62

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Noktaların şematik sınıflandırılması	4
Şekil 3.1. Bazı zaman skalaları.....	15
Şekil 5.1. Hilger'in kompleks düzlemi	26
Şekil 5.2. Hilger'in kompleks sayıları	27

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Noktaların sınıflandırılması	3
Çizelge 3.1. Zaman skalasına örnekler	15
Çizelge 4.1. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ için örnekler.....	20
Çizelge 5.1. Toplamsal tersler	32
Çizelge 6.1. Nabla üstel fonksiyonlar	55
Çizelge 6.2. Nabla üstel fonksiyonlar	55

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{T}$	Zaman skalası
f^{∇}	Hilger nabla türevi
Δf	İleri fark operatörü
σ	İleri sıçrama operatörü
ρ	Geri sıçrama operatörü
$\emptyset$	Boş küme
μ	Sıçrama arası fark
ν	Sıçrama arası fark
T^k	Türevi tanımladığımız fonksiyon
$f^{\nabla\nabla}$	Hilger ikinci nabla türev
$f^{\nabla\sigma}$	Hilger birinci nabla türevin ileri sıçraması
C_{ld}	Soldan yoğun sürekli fonksiyonlar kümesi
$\hat{\xi}$	Silindir dönüşümü
∇f	Geri fark operatörü

1.GİRİŞ

Bu tezde, diferensiyel denklemlerle ilgili birçok sonucun fark denklemleri ile eş değer sonuçlara taşınabildiği, bir zaman skalası üzerinde bazı temel özellikler ve dinamik denklemlerin başlangıç değer probleminin çözümü incelenecektir.

Son yıllarda üzerinde birçok çalışmalar yapılan zaman skalasının teorisini Stefan Hilger sürekli ve ayrık analizi birleştirmek amacıyla 1988 de kurmuştur.

Zaman skalası üzerinde dinamik denklemlerin çalışılması bu tür ayrışmaları açıklar , diferansiyel denklemlerden ve fark denklemlerinden iki ayrı sonuç elde edilmesini engeller.

Tezin ikinci bölümünde; $\mathbb{T}$ zaman skalası, temel tanım ve örnekler verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde; $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için Hilger delta türev, çarpma ve bölme kuralı tanıtılmış, türev alabilmeyle ilgili sonuçlar ve örnekler incelenmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde; integral ve süreklilikle ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde; Hilger' in kompleks düzlemi , üstel fonksiyonları tanıtmak için silindir dönüşümleri , üstel fonksiyonların özellikleri , birinci dereceden lineer dinamik denklemleri ve onlar için başlangıç değer problemlerinin çözümü zaman skalası üzerinde incelenmiştir.

Tezin altıncı bölümünde; nabla türev ve nabla dinamik denklemlere giriş yapılmıştır. Nabla üstel fonksiyonun birçok özelliğini kullanarak birinci dereceden lineer nabla dinamik denklemleri içeren başlangıç değer problemleri ve çözümleri ele alınmıştır.

$$y^\nabla = p(t)y , y(t_0) = 1$$

Başlangıç değer problemini çözerek bu çözüm, verilen zaman skalası ile ilişkili olarak üslü denklem olarak yazılmıştır.

2. ZAMAN SKALASI

2.1. Temel Tanımlar

2.1. Tanım

Bir zaman skalası, keyfi boş olmayan kapalı bir gerçel sayılar kümesidir.

$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ yani gerçel sayılar, tamsayılar, doğal sayılar, $[0,1] \cup [2,3]$ ve $[0,1] \cup \mathbb{N}_0$ kapalı aralıkları zaman skalasına örnektir. $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ ve $(0,1)$ aralığındaki sayılar zaman skalası değildir. Bu çalışmada zaman skalası $\mathbb{T}$ ile gösterilecektir. [1]

$\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu için f^Δ türevini;

i) $f^\Delta = f'$ alışılmış bilinen türev; $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

ii) $f^\Delta = \Delta f$ alışılmış bilinen ileri fark operatörü $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

şeklinde göstereceğiz.

2.2. Tanım

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için;

$\sigma(t) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü;

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

$\rho(t) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ geri sıçrama operatörü;

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

ile tanımlanır. Bu tanımda

$\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ ($\sigma(t) = t$ eğer $\mathbb{T}$ bir $\max t$ ye sahipse) ve

$\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ ($\rho(t)=t$ eğer $\mathbb{T}$ bir min t ye sahipse)

olur.

$\mu: \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu ;

$\mu(t) = \sigma(t) - t$ ile tanımlanır.

2.3. Tanım

Eğer $\sigma(t) > t$ ise t sağdan saçılımlı, $\rho(t) < t$ ise t soldan saçılımlıdır. Aynı anda sağdan saçılımlı ve soldan saçılımlı noktalar da izole nokta olarak adlandırılır.

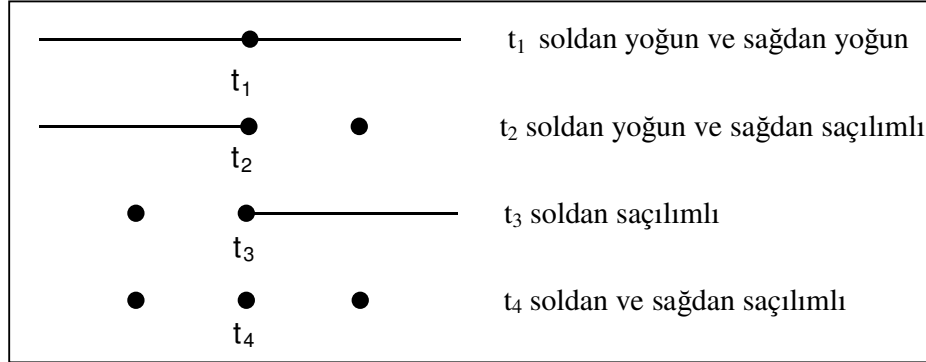
Ayrıca, $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise t sağdan yoğun

$t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t)=t$ ise t soldan yoğun denir. Aynı anda soldan ve sağdan yoğun olan noktalara yoğun denir.

Noktaların sınıflandırılması Çizelge 2.1 de noktaların şematik sınıflandırması da Şekil 2.1. de gösterilmiştir.

Çizelge 2.1. Noktaların sınıflandırılması

t sağdan saçılımlı	$t < \sigma(t)$
t sağdan yoğun	$t = \sigma(t)$
t soldan saçılımlı	$\rho(t) < t$
t soldan yoğun	$\rho(t) = t$
t izole	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t yoğun	$\rho(t) = t = \sigma(t)$



Şekil 2.1. Noktaların şematik sınıflandırılması

$\mathbb{T}$ zaman skalasından türetilmiş bir $\mathbb{T}^k$ kümesi,

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} - \{\sup \mathbb{T}\} & \sup \mathbb{T} < \infty \text{ soldan saçılımlı} \\ \mathbb{T} & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Not.

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f^\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)) \quad \forall t \in \mathbb{T}$ şeklinde tanımlanır.

2.1. Örnek

Aşağıdaki iki durumu inceleyelim.

i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\exists t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{ s \in \mathbb{R} : s > t \} = \inf(t, \infty) = t$$

ve benzer şekilde

$$\rho(t) = \sup \{ s \in \mathbb{R} : s < t \} = \sup(-\infty, t) = t$$

olur. Burada $\forall t \in \mathbb{R}$ noktası yoğundur. μ fonksiyonu

$$\mu(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{T} \text{ için}$$

olur.

ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $\exists t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf \{t+1, t+2, t+3, \dots\} = t+1$$

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \sup \{t-1, t-2, t-3, \dots\} = t-1$$

Burada $\forall t \in \mathbb{Z}$ noktası izoledir. μ fonksiyonu

$$\mu(t) \equiv 1 \quad \forall t \in \mathbb{T} \text{ için}$$

olur.

iii) Eğer $\mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ ise

$$\sigma(2^n) = 2^{n+1}, \quad \sigma(t) = 2t \quad \text{ve}$$

$$\rho(2^n) = 2^{n-1}, \quad \rho(t) = \frac{t}{2} \quad \text{burada } \forall t \in \mathbb{T} \text{ izole noktadır.}$$

3. DİFERENSİYEL VE TÜREV

3.1. Diferensiyellenebilirlik

3.1. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ olacak şekilde

$f^\Delta(t)$ türevi,

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U$$

şeklinde tanımlanır.

$\exists \delta > 0$ için t nin bir U komşuluğu vardır. $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ dir.

f^Δ , f fonksiyonunun delta (ya da Hilger) türevi olarak adlandırılır. [1]

3.1. Örnek

i) Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = \alpha$ ise,

$f^\Delta(t) \equiv 0$ dir. Burada $\alpha \in \mathbb{R}$ sabittir. $\forall \varepsilon > 0$ olması sebebiyle doğrudur.

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0 \cdot [\sigma(t) - s]| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in \mathbb{T}$$

ii) Eğer, $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ ise

$f^\Delta(t) \equiv 1$ dir. $\forall \varepsilon > 0$ olması sebebiyle doğrudur.

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 1 \cdot [\sigma(t) - s]| = |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in \mathbb{T}$$

Not.

i) $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t^2$ ile tanımlandığında,

$$f^{\Delta}(t) = t + \sigma(t)$$

ii) $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ $g, t > 0$ olacak şekilde $\forall t \in \mathbb{T}$ için $g(t) = \sqrt{t}$ ile tanımlandığında,

$$g^{\Delta}(t) = \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{\sigma(t)}} \text{ olur.}$$

3.1. Teorem

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Bu durumda ,

i) Eğer f, t de türevlenebilirse, f t de süreklidir.

ii) Eğer f, t de sürekli ve t sağdan saçılımlı ise, f t de türevlenebilir.

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}$$

iii) Eğer t sağdan yoğunsa, f t de türevlenebilir.

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

iv) Eğer f fonksiyonu t de türevlenebilirse;

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$$

İspat.

i) f fonksiyonu t de türevlenebilir ve $\varepsilon \in (0, 1)$ olsun.

$$\varepsilon^* = \varepsilon [1 + |f^{\Delta}(t)| + 2\mu(t)]^{-1} \quad \varepsilon^* \in (0, 1)$$

olarak tanımlayalım.

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - [\sigma(t) - s] f^{\Delta}(t)| \leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s|$$

olacak şekilde t nin bir U komşuluğu vardır.

Böylece, $\forall s \in U \cap (t - \varepsilon^*, t + \varepsilon^*)$ için

$$\begin{aligned}
 |f(t) - f(s)| &= |\{f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t) [\sigma(t) - s]\} - \{f(\sigma(t)) - f(t) - \mu(t)f^\Delta(t)\} + (t-s)f^\Delta(t)| \\
 &\leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s| + \varepsilon^* \mu(t) + |t-s| |f^\Delta(t)| \\
 &\leq \varepsilon^* [\mu(t) + |t-s| + \mu(t) + |f^\Delta(t)|] \\
 &< \varepsilon^* [1 + |f^\Delta(t)| + 2\mu(t)] \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

olur. Bu f fonksiyonunun t de sürekli olduğu sonucunu verir.

ii) f fonksiyonu t de sürekli ve t sağdan saçılımı olsun.

Süreklilikten;

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

olur. $\varepsilon > 0$ için

$$\left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \right| \leq \varepsilon$$

$\forall s \in U$ olacak şekilde t nin bir U komşuluğu vardır. $\forall s \in U$ için

$$\left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} [\sigma(t) - s] \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

sonucunu verir. Böylece;

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \text{ olur.}$$

iii) f fonksiyonu t de türevlenebilir ve t sağdan yoğun olsun.

$\varepsilon > 0$ için ,

$$\left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t) [\sigma(t) - s] \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

$\forall s \in U$ olacak şekilde t in bir U komşuluğu vardır. $\sigma(t) = t$ olduğunda

$$\left| [f(t) - f(s)] - f^{\Delta}(t)(t - s) \right| \leq \varepsilon |t - s| \quad \forall s \in U \text{ için}$$

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f^{\Delta}(t) \right| \leq \varepsilon$$

sonucunu verir. Böylece aranan $s \in U, s \neq t$ için

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \text{ olur.}$$

iv) Eğer $\sigma(t) = t$, $\mu(t) = 0$ ise;

$$f(\sigma(t)) = f(t) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t) \text{ olur.}$$

Eğer $\sigma(t) > t$ ise; (ii) den

$$f(\sigma(t)) = f(t) = \mu(t) \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t) \text{ olur.}$$

3.2. Teorem

$f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ da türevlenebilir olsun. Bu durumda;

i) $f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$$

şeklinde t de türevlenebilir.

ii) Her sabit α için, $\alpha f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\alpha.f)^{\Delta}(t) = \alpha.f^{\Delta}(t)$$

şeklinde t de türevlenebilir.

iii) $f.g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$$

$$f^{\Delta}(t)g(t) + f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t)$$

şeklinde t de türevlenebilir.

iv) Eğer $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}$,

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t).f(\sigma(t))}$$

şeklinde t de türevlenebilir.

v) Eğer $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t).g(t) - f(t).g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

şeklinde t de türevlenebilir.

İspat.

f ve g nin $t \in \mathbb{T}^k$ da delta türevlenebilir olsun.

i) $\varepsilon > 0$ olsun. Böylece

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s| \quad s \in U_1$$

$$|g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s| \quad s \in U_2$$

$U = U_1 \cap U_2$ olsun. $\forall s \in U$ için;

$$\begin{aligned} & |(f + g)(\sigma(t)) - (f + g)(s) - [f^\Delta(t) + g^\Delta(t)](\sigma(t) - s)| \\ &= |(f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s) + g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \\ &\leq |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| + |g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s| + \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s| \\ &= \varepsilon |\sigma(t) - s| \end{aligned}$$

iii) $\varepsilon \in (0, 1)$ olsun.

$$\varepsilon^* = \varepsilon \left[1 + |f(t)| + |g(\sigma(t))| + |g^\Delta(t)| \right]^{-1}$$

tanımlayalım. Böylece $\varepsilon^* \in (0, 1)$ dir ve buradan,

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U_1$$

$$|g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U_2$$

$|f(t) - f(s)| \leq \varepsilon^* \quad \forall s \in U_3$ olacak şekilde t nin U_1, U_2, U_3 komşulukları vardır. $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$ olsun. $s \in U$ için

$$|(fg)(\sigma(t)) - (fg)(s) - [f^\Delta(t)g(\sigma(t)) + f(t)g^\Delta(t)](\sigma(t) - s)|$$

$$= |[f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)]g(\sigma(t))$$

$$+ [g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)]f(t)|$$

$$+ [g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)]|f(s) - f(t)|$$

$$+ |(\sigma(t) - s)g^\Delta(t)[f(s) - f(t)]|$$

$$\leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s| |g(\sigma(t))| + \varepsilon^* |\sigma(t) - s| |f(t)|$$

$$+ \varepsilon^* \varepsilon^* |\sigma(t) - s| + \varepsilon^* |\sigma(t) - s| |g^\Delta(t)|$$

$$= \varepsilon^* |\sigma(t) - s| [|g(\sigma(t))| + |f(t)| + \varepsilon^* + |g^\Delta(t)|]$$

$$\leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s| [1 + |f(t)| + |g(\sigma(t))| + |g^\Delta(t)|]$$

$$= \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

olur.

$$v) \left(\frac{f}{g} \right)^\Delta(t) = \left(f \frac{1}{g} \right)^\Delta(t)$$

$$= f(t) \left(\frac{1}{g} \right)^\Delta(t) + f^\Delta(t) \frac{1}{g(\sigma(t))}$$

$$= -f(t) \frac{g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))} + f^\Delta(t) \frac{1}{g(\sigma(t))}$$

$$= \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

3.2. Tanım

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ f^{Δ} nın türevlenebilirliği $\mathbb{T}^{k^2} = (\mathbb{T}^k)^k$ nın üzerinde ikinci türev $f^{\Delta\Delta} = (f^{\Delta})^{\Delta} : \mathbb{T}^{k^2} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır. n. mertebeden türev $f^{\Delta^n} : \mathbb{T}^{k^n} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır.

$$\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t)) , \rho^2(t) = \rho(\rho(t))$$

olur. Genelleştirirsek;

$$\sigma^n(t) = t + nh \text{ ve } \rho^n(t) = t - nh \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

olur.

3.2. Örnek

$(fg)^{\Delta} = f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}$ ikinci türevini alalım.

$$\begin{aligned} ((fg)^{\Delta})^{\Delta} &= (f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta})^{\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + f^{\Delta\sigma}g^{\Delta} + f^{\sigma\Delta}g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + (f^{\Delta\sigma} + f^{\sigma\Delta})g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta} \end{aligned}$$

olur. Burada $f^{\Delta\sigma} = f^{\sigma\Delta}$ dir.

3.3. Örnek

$h > 0$ için

$$\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$$

olsun . Bu durumda ;

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf \{t + nh : n \in \mathbb{N}\} = t + h \quad t \in \mathbb{T} \text{ için}$$

olur ve benzer şekilde

$$\rho(t) = t - h$$

$\forall t \in \mathbb{T}$ noktası izole edilmiştir.

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + h - t = h \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

olur .Böylece bu örnekteki μ sabittir.

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

$$f^{\Delta\Delta}(t) = \frac{f^\Delta(\sigma(t)) - f^\Delta(t)}{\mu(t)}$$

$$= \frac{f^\Delta(t+h) - f^\Delta(t)}{h}$$

$$= \frac{\frac{f(t+2h) - f(t+h)}{h} - \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}{h}$$

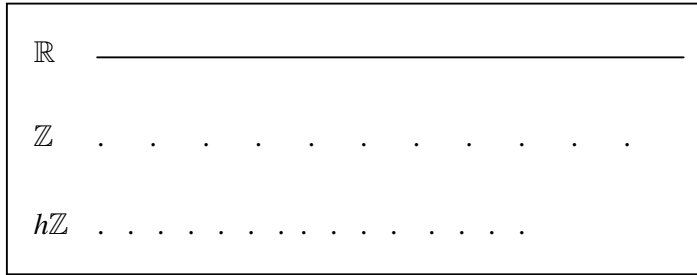
$$= \frac{f(t+2h) - f(t+h) - f(t+h) + f(t)}{h^2}$$

$$= \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}$$

olur. $f^{\Delta^n}(t)$ yi

$$f^{\Delta^n}(t) = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(t+kh)$$

şeklinde yazabiliriz.



Şekil 3.1 Bazı zaman skalaları

Çizelge 3.1 Zaman skalasına örnekler

$\mathbb{T}$	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$
	0	t	t
$\mathbb{Z}$	1	t+1	t-1
$h\mathbb{Z}$	h	t+h	t-h
$q^{\mathbb{N}}$	(q-1)t	qt	$\frac{t}{q}$
$2^{\mathbb{N}}$	t	2t	$\frac{t}{2}$
$\mathbb{N}_0^2$	$2\sqrt{t}+1$	$(\sqrt{t}+1)^2$	$(\sqrt{t}-1)^2$

4. İNTEGRAL

4.1. rd Süreklilik ve Özellikleri

4.1. Tanım

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan, $\mathbb{T}$ deki sağdan yoğun olan noktalarda sağdan limitleri ve soldan yoğun olan noktalarda soldan limitleri olan fonksiyonlara regüle fonksiyon denir.

4.2. Tanım

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan $\mathbb{T}$ deki sağdan yoğun noktalarda sürekli olan ve $\mathbb{T}$ deki soldan yoğun noktalarda soldan limitleri olan fonksiyona rd sürekli fonksiyon denir.

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ rd sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

şeklindedir.

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir ve türevleri sürekli olan fonksiyonların kümesi

$$C_{rd}^1 = C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki teorem rd sürekli ve regüle fonksiyonları içeren bazı sonuçları içermektedir.

4.1. Teorem

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon

- i) f sürekli ise f rd süreklidir.
- ii) f rd sürekli ise f regüledir.
- iii) Sıçrama operatörü σ , rd süreklidir.

iv) f regüle veya rd sürekli ise f^σ da regüle veya rd sürekli dir.

4.3. Tanım

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu $D \subset \mathbb{T}^k : \mathbb{T}^k \setminus D$ ve $\mathbb{T}$ nin sağdan saçılımlı elemanlarını içeren ve her noktasında f in diferensiyellenebilir olduğu durumlarda D ile ön diferensiyellenebilir.

4.2. Teorem Kompakt aralıktaki her regüle fonksiyon sınırlıdır.

İspat.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$|f(t_n)| > n \text{ ile } t_n \in [a, b] \quad \{t_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [a, b]$$

olduğundan dolayı $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ yakınsak alt dizisi vardır.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = t_0, \quad t_0 \in [a, b] \quad (4.1)$$

$\{t_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{T}$ ve $\mathbb{T}$ kapalı olduğundan dolayı $t_0 \in \mathbb{T}$ not edelim.(4.1) den t_0 izole değildir ve t_0 dan aşağıya yakınsayan bir alt dizi vardır. Her bir durumda $t \rightarrow t_0$ giderken $f(t)$ nin limiti regülerlikten dolayı sonlu olmak zorundadır.

Teorem 4.3. (Ortalama Değer Teoremi)

f ve g $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlanan reel değerli fonksiyonlar olsunlar ve her ikisi de D ile ön diferansiyellenebilir olsun. O zaman,

$$|f^\Delta(t)| \leq g^\Delta(t) \quad \forall t \in D \text{ için}$$

ve

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r) \quad \forall r, s \in \mathbb{T}, r \leq s \text{ için}$$

olur.

4.1. Sonuç

f ve g fonksiyonları D ile ön diferensiyallenebilir olsun.

(i) Eğer $U, r, s \in \mathbb{T}$ uç noktaları ile bir kompakt aralık ise,

$$|f(s) - f(r)| \leq \left\{ \sup_{t \in U \cap D} |f^\Delta(t)| \right\} |s - r|$$

olur.

(ii) Eğer $\forall t \in D$ için $f^\Delta(t) = 0$ ise, f bir sabit fonksiyondur.

(iii) Eğer $\forall t \in D$ için $f^\Delta(t) = g^\Delta(t)$ ise,

$$g(t) = f(t) + C \quad \forall t \in \mathbb{T} \text{ için}$$

olur.

4.4. Teorem (Ön anti türev)

f regüle fonksiyon olsun. D diferansiyellenme bölgesiyle ön diferansiyellenebilir bir F fonksiyonu;

$$F^\Delta(t) = f(t) \quad \forall t \in D \text{ için}$$

vardır.

4.4. Tanım

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ regüle bir fonksiyon olsun. f in belirsiz integrali

$$\int f(t) \Delta t = F(t) + C$$

şeklinde tanımlanır. C bir keyfi sabittir, F , f fonksiyonunun bir ön anti türevidir. Cauchy integrali

$$\int_r^s f(t) \Delta t = F(s) - F(r) \quad \forall r, s \in \mathbb{T} \text{ için}$$

şeklinde tanımlanır. $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$F^\Delta(t) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{T}^k \text{ için}$$

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun anti türevi olarak tanımlanır.

4.1. Örnek

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $a \neq 1$ ise

$$\int a^t \Delta t = ?$$

$$\left(\frac{a^t}{a-1} \right)^\Delta = \Delta \left(\frac{a^t}{a-1} \right) = \frac{a^{t-1} - a^t}{a-1} = a^t \quad \text{olduğundan,}$$

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + C$$

elde edilir.. Burada C keyfi bir sabittir.

4.5. Teorem (anti türev)

Her rd sürekli fonksiyonun bir anti türevi vardır. Eğer $t_0 \in \mathbb{T}$ ise ;

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) \Delta \tau \quad t \in \mathbb{T} \text{ için}$$

şeklinde tanımlanan $F(t)$, f in bir anti türevidir.

Çizelge 4.1. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ için örnekler

Zaman Skalası	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
Geri sıçrama operatörü $\rho(t)$	t	$t - 1$
İleri sıçrama operatörü $\sigma(t)$	t	$t + 1$
$\mu(t)$	0	1
$f^\Delta(t)$ türevi	$f'(t)$	$\Delta f(t)$
$\int_a^b f(t) \Delta(t)$ integrali	$\int_a^b f(t) dt$	$\sum_{t=a}^{b-1} f(t)$ (eğer $a < b$)
Rd-sürekli f	sürekli f	herhangi f

4.6. Teorem

$f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^k$ ise;

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta \tau = \mu(t)f(t)$$

İspat.

Teorem 4.5. ile f fonksiyonunun bir F anti türevi ortaya çıkar ve

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta \tau = F(\sigma(t)) - f(t)$$

$$= \mu(t) F^\Delta(t)$$

$$= \mu(t)f(t)$$

elde edilir.

4.7. Teorem

Eğer $f^\Delta \geq 0$, ise f azalan değildir.

İspat.

$[a, b]$ üzerinde $f^\Delta \geq 0$ ve $s, t \in \mathbb{T}$ ve $a \leq s \leq t \leq b$ olsun.

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f^\Delta(\tau) \Delta\tau \geq f(s) \text{ olur.}$$

4.8. Teorem

Eğer $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rd}$, ise;

$$(i) \int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t;$$

$$(ii) \int_a^b (\alpha f)(t) \Delta t = \alpha \int_a^b f(t) \Delta t;$$

$$(iii) \int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t;$$

$$(iv) \int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t;$$

$$(v) \int_a^b f(\sigma(t)) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t;$$

$$(vi) \int_a^b f(t) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t;$$

$$(vii) \int_a^a f(t) \Delta t = 0;$$

(viii) eğer (a, b) üzerinde $|f(t)| \leq g(t)$ ise,

$$\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta t;$$

(ix) eğer tüm $a \leq t < b$ için $f(t) \geq 0$ ise,

$$\int_a^b f(t) \Delta t \geq 0 \text{ olur.}$$

İspat.

Bu sonuçlar Tanım 4.4 Teorem 3.2 ve Teorem 4.3 ten çıkarılabilir. f ve g rd sürekli oldukları için, Teorem 4.5 e göre bunlar F ve G 'nin anti-türevlerine sahiptir. Teorem 3.2 (i) ye göre, $F + G$, $f + g$ nin bir anti-türevidir, öyle ki,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g)(t) \Delta t &= (F + G)(b) - (F + G)(a) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t . \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \Delta t &= F(b) - F(a) \\ &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ &= \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t . \end{aligned}$$

olur.

fg , $f^\sigma g^\Delta + f^\Delta g$ nin anti-türevi olduğu için,

$$\int_a^b (f^\sigma g^\Delta + f^\Delta g)(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a)$$

olur.

Teorem 4.8 de verilen tüm formüller f ve g nin sadece regüle fonksiyon olduğu durumlarda da geçerlidir.

4.9. Teorem

$a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olsun.

(i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt,$$

burada sağdaki integral Riemann integralidir.

(ii) Eğer $[a, b]$ iki izole noktadan oluşuyorsa,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a, b)} \mu(t) f(t) & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{t \in [b, a)} \mu(t) f(t) & a > b \end{cases}$$

(iii) Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}, h > 0$

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh) h & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh) h & a > b \end{cases}$$

(iv) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{t=a}^{b-1} f(t) & a > b \end{cases}$$

4.5. Tanım

Eğer $a \in \mathbb{T}$, $\sup \mathbb{T} = \infty$ ise ve f $[a, \infty)$ üzerinde rd sürekli ise, has olmayan integrali

$$\int_a^\infty f(t) \Delta t = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \Delta t$$

ile tanımlanır. Eğer limit varsa has olmayan integral yakınsak, limit yoksa integral ıraksaktır.

5. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİNAMİK DENKLEMLER

5.1. Hilger 'in Kompleks Düzlemi

5.1. Tanım

$f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Birinci dereceden dinamik denklem

$$y^\Delta = f(t, y, y^\sigma) \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer

$$f(t, y, y^\sigma) = f_1(t)y + f_2(t) \quad \text{veya} \quad f(t, y, y^\sigma) = f_1(t)y^\sigma + f_2(t)$$

f_1 ve f_2 fonksiyonları için (5.1) lineer denklem şeklinde yazılır.

$y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ (5.1) in çözümü olur.

Problem

$$y^\Delta = f(t, y, y^\delta), \quad y(t_0) = y_0 \quad t_0 \in \mathbb{T} \quad \text{ve} \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

başlangıç değer problemi olarak adlandırılır.

Eş. 5.1 in y çözümü $y(t_0) = y_0$ ile başlangıç değer probleminin çözümüdür.

$$y^\Delta = p(t)y, \quad y(t_0) = 1$$

Başlangıç değer problemini çözerek bu çözümü, verilen zaman skalası ile ilişkili olarak üslü denklem olarak yazacağız.

Şimdi Hilger kompleks düzleminin ne olduğunu açıklayalım.

5.2. Tanım

$h > 0$ için Hilger kompleks sayılarını , Hilger reel eksenini , Hilger alternatif eksenini ve Hilger sanal eksenini sırasıyla

$$\mathbb{C}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq -\frac{1}{h} \right\},$$

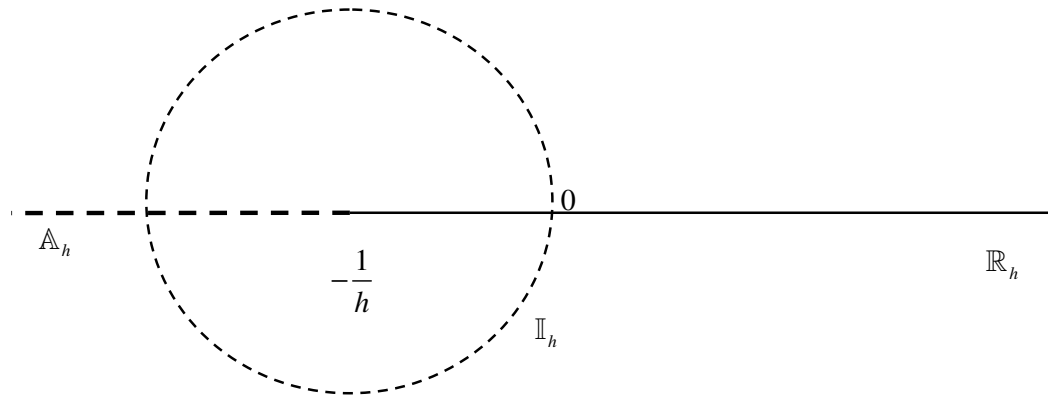
$$\mathbb{R}_h := \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad z > -\frac{1}{h} \right\},$$

$$\mathbb{A}_h := \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad z < -\frac{1}{h} \right\},$$

$$\mathbb{I}_h := \left\{ z \in \mathbb{C}_h : \left| z + \frac{1}{h} \right| = \frac{1}{h} \right\},$$

olarak tanımlanır.

$h=0$ için $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}, \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}, \mathbb{I}_0 = i\mathbb{R}, \mathbb{A}_0 = \emptyset$ olur.



Şekil 5.1 Hilger'in kompleks düzlemi

5.3. Tanım

$h > 0$ ve $z \in \mathbb{C}_h$, Hilger'in reel z parçası

$$\text{Re}_h(z) = \frac{|zh+1|-1}{h} \text{ ile}$$

ve Hilger'in sanal z parçası

$$\text{Im}_h(z) = \frac{\text{Arg}(zh+1)}{h}$$

ile tanımlanır.

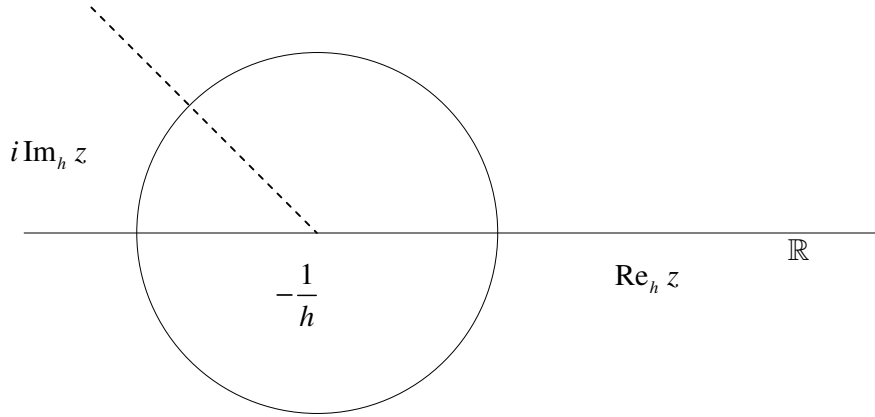
$\text{Arg}(z)$ z 'nin asal bağımsız değişkenini simgeler(örn $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$).

$$-\frac{1}{h} < \text{Re}_h(z) < \infty \text{ ve } -\frac{\pi}{h} < \text{Im}_h(z) \leq \frac{\pi}{h}$$

5.4. Tanım

$-\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h}$ Hilgerin sanal sayısı i_w ile tanımlanır.

$$i_w = \frac{e^{iwh} - 1}{h} \quad z \in C_h, i \text{Im}_h \in I_h \quad (5.2)$$



Şekil 5.2. Hilger'in kompleks sayıları

Teorem 5.1. eğer $-\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h}$ ise

$$|i_w|^2 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{wh}{2} \quad (5.3)$$

İspat.

Eş. 5.2 yi kullanarak şu sonucu elde ederiz.

$$\begin{aligned}
 |\dot{w}|^2 &= (\dot{w})(\overline{\dot{w}}) \\
 &= \left(\frac{e^{iwh} - 1}{h} \right) \left(\frac{e^{-iwh} - 1}{h} \right) \\
 &= \frac{2 - e^{iwh} - e^{-iwh}}{h^2} \\
 &= \frac{2}{h^2} (1 - \cos(wh)) \\
 &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{wh}{2}
 \end{aligned}$$

5.2. Yeni Toplama Grubu

5.2. Teorem

Eğer C_h üzerinde $\oplus$ işlemini

$$z \oplus w = z + w + zwh$$

ile tanımlarsak $(C_h, \oplus)$ Abel grubu olur.

İspat.

$z, w \in C_h$ ve $z \oplus w$ karmaşık sayılardır.

$$z \oplus w \neq -\frac{1}{h}$$

$$1 + h(z \oplus w) = 1 + h(z + w + zwh)$$

$$= 1 + hz + hw + hwzh$$

$$= (1 + hz)(1 + hw)$$

$$\neq 0$$

$C_h \oplus$ işlemi altında kapalıdır.

$z \oplus 0 = 0 \oplus z = z$ olduğundan $0, \oplus$ için toplamsal özdeş olur. $z \in C_h$ için z nin $\oplus$ altında ters toplamı bulmak için w için

$$z \oplus w = 0$$

Bundan sonra w için ;

$$z + w + zwh = 0$$

Böylece ;

$$w = -\frac{z}{1 + zh}$$

$\oplus$ işlemi altında z nin ters toplamı olur. $(C_h, \oplus)$ gruptur. Bu yüzden

$$z \oplus w = z + w + zwh$$

$$= w + z + wz h = w \oplus z$$

değişmeli olduğundan $(C_h : \oplus)$ Abel gruptur.

Not.

C_h üzerindeki $\oplus$ işleminin birleşme özelliği vardır.

5.3. Teorem

$z \in \mathbb{C}_h$ için

$$z = \text{Re}_h z \oplus i \text{Im}_h z \text{ olur.}$$

İspat.

$$z \in \mathbb{C}_h$$

$$\begin{aligned} \text{Re}_h z \oplus i \text{Im}_h z &= \frac{|zh+1|-1}{h} \oplus i \frac{\text{Arg}(zh+1)}{h} \\ &= \frac{|zh+1|-1}{h} \oplus \frac{\exp(i \text{Arg}(zh+1))-1}{h} \\ &= \frac{|zh+1|-1}{h} + \frac{\exp(i \text{Arg}(zh+1))-1}{h} \\ &\quad + \frac{|zh+1|-1}{h} \frac{\exp(i \text{Arg}(zh+1))-1}{h} h \\ &= \frac{1}{h} \{ |zh+1|-1 + \exp(i \text{Arg}(zh+1))-1 \} \\ &\quad + \{ (|zh+1|-1)(\exp(i \text{Arg}(zh+1))-1) \} \\ &= \frac{1}{h} \{ |zh+1| \exp(i \text{Arg}(zh+1))-1 \} \\ &= \frac{(zh+1)-1}{h} = z \end{aligned}$$

Not.

$n \in \mathbb{N}$ ve $z \in C_h$ üzerinde $\odot$ işlemi

$n \odot z = z \oplus z \oplus z \oplus \dots \oplus z$ şeklinde tanımlanır.

bu son denklemde sağ tarafta n tane terim vardır. Bu takdirde

$$n \odot z = \frac{(zh+1)^n - 1}{h} \text{ şeklinde olur..}$$

Teorem 5.2 de $z \in C_h$ olduğundan Θ işlemine göre z nin ters toplamı

$$\Theta z = \frac{-z}{1+zh} \quad (5.4)$$

şeklinde bulunur.

5.5. Tanım

Θ işlemini C_h üzerinde

$$z \ominus w = z \oplus (\Theta w) \quad (5.5)$$

ile tanımlarız

Not.

Eğer $z, w \in \mathbb{C}_h$, $h \geq 0$ için

$$(i) z \ominus z = 0$$

$$(ii) z \ominus w = \frac{z-w}{1+wh}$$

$$(iii) \text{ Eğer } h = 0 \text{ ise } z \ominus w = z-w \text{ olur.}$$

$$(iv) z \in \mathbb{C}_h \text{ ise } \bar{z} = \Theta z \text{ olur.}$$

$$(v) \Theta(iw) = \overline{iw}$$

özellikleri vardır.

Çizelge 5.1. Toplamsal tersler

z		0	1	i	$\frac{1}{h}$	$\frac{2}{h}$	$\frac{i-1}{h}$
Θz		0	$-\frac{1}{1+h}$	$\frac{1}{i-h}$	$-\frac{1}{2h}$	$-\frac{2}{h}$	$-\frac{i+1}{h}$

5.6. Tanım

Eğer $z \in C_h$ ise z nin genelleşmiş karesi

$$z^2 = (-z) (\Theta z) = \frac{z^2}{1+zh}$$

şeklinde tanımlanır.

5.4. Teorem

$z \in C_h$ için

$$(\Theta z)^2 = z^2 \quad (5.6)$$

$$1+zh = \frac{z^2}{z^2} \quad (5.7)$$

$$z+(\Theta z) = z^2 h \quad (5.8)$$

$$z \oplus z^2 = z + z^2 \quad (5.9)$$

$$z^2 \in R \Leftrightarrow z \in R_h \cup A_h \cup I_h \quad (5.10)$$

$$-\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h} \text{ için}$$

$$-(iw)^2 = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{wh}{2}\right), \quad (5.11)$$

İspat.

$z \in \mathbb{C}_h$ olsun.

$$(\Theta z)^2 = \frac{(\Theta z)^2}{1 + (\Theta z)h}$$

$$= \frac{\frac{z^2}{(1+zh)^2}}{1 + \frac{-zh}{1+zh}}$$

$$= \frac{z^2}{(1+zh)^2} \cdot \frac{1+zh}{1+zh-zh}$$

$$= \frac{z^2}{1+zh} = z^2$$

Eş. 5.7, Eş. 5.6 dan kolayca ispat edilebilir.

Eş. 5.8 i ispat etmek için

$$z + (\Theta z) = z + \frac{-z}{1+zh}$$

$$= \frac{z + z^2h - z}{1+zh}$$

$$= \frac{z^2}{1+zh} . h$$

$$= z^2 . h$$

Eş. 5.10 u ispatlamak için $z = u + iv$ olarak alalım.

$$z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(u+iv)^2}{(1+uh)+iuh} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (u^2 + 2iuv - v^2)(1+uh-ivh) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2uv(1+uh) - vh(u^2 - v^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow u^2vh + 2uv + v^3h = 0$$

$$\Leftrightarrow v=0 \text{ yada } u^2h + 2u + v^2h = 0$$

$$\Leftrightarrow v=0 \text{ yada } \left(u + \frac{1}{h}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{h^2}$$

$$\Leftrightarrow z \in R_h \cup A_h \cup I_h$$

Eş. 5.11 i ispatlamak için

$$-(iw)^2 = (iw)(\Theta(iw))$$

$$= (iw)(\overline{iw})$$

$$= |iw|^2$$

$$= \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{wh}{2}\right)$$

5.7. Tanım

$h>0$ için $\xi_h : \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{Z}_h$ silindir dönüşümü

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h} L \log(1+zh)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada Log asal logaritma fonksiyonudur. $h=0$ için $\xi_0(z) = z$ olur.

$h>0$ olduğunda $\mathbb{Z}_h$ yi silindir olur. Sınır çizgileri

$$Im(z) = -\frac{\pi}{h} \text{ ve } Im(z) = \frac{\pi}{h}$$

$\mathbb{Z}_h$ üzerindeki toplama

$$z + w = z + w \pmod{\frac{2\pi i}{h}} \quad z, w \in \mathbb{Z}_h \quad (5.12)$$

şeklinde tanımlanır.

Not.

$h>0$ için silindir dönüşümünün tersi

$$\xi_h^{-1}(z) = \frac{1}{h}(e^{zh} - 1)$$

$z \in \mathbb{Z}_h$ için $\xi_0^{-1}(z) = z$ olur.

5.5. Teorem

ξ_h Silindir dönüşümü $\mathbb{Z}_h$ üzerinde $+$ işlemi $(\mathbb{C}_h : \oplus)$ den $(\mathbb{Z}_h : +)$ grup homeomorfizmasıdır.

İspat.

$h>0$ ve $z, w \in \mathbb{C}_h$ olsun.

$$\xi_h(z \oplus w) = \frac{1}{h} \text{Log}(1 + (z \oplus w)h)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} \text{Log}(1 + zh + wh + zwh^2) \\
&= \frac{1}{h} \text{Log}((1 + zh)(1 + wh)) \\
&= \frac{1}{h} \text{Log}(1 + zh) + \frac{1}{h} \text{Log}(1 + wh) \\
&= \xi_h(z) + \xi_h(w)
\end{aligned}$$

Bu $h > 0$ durumunu ispatlar.

5.3. Üstel Fonksiyon

5.8. Tanım

$p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu regressive'dir.

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{T}^k \text{ için} \quad (5.13)$$

bütün regressive ve rd sürekli fonksiyonların dizimi

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathbb{T}) = \mathfrak{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanır.

Not.

$\mathfrak{R}$, $\oplus$ işlemine göre abel gruptur.

$$(p \oplus q)(t) = p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t) \quad \forall t \in \mathbb{T}^k \text{ için } p, q \in \mathfrak{R}$$

Not.

$p, q \in \mathfrak{R}$ ise $\ominus p$ ve $p \ominus q$ fonksiyonları

$$\begin{aligned}
(\Theta p)(t) &= \frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \quad \text{her } t \in \mathbb{T}^k \\
(p\Theta q)(t) &= (p\Theta(\Theta q))(t) \quad \forall t \in \mathbb{T}^k
\end{aligned} \tag{5.14}$$

ile tanımlanır.

$p, q \in \mathfrak{R}$ olduğunda

$$(i) \quad p\Theta p = 0$$

$$(ii) \quad \Theta(\Theta p) = p$$

$$(iii) \quad p\Theta q \in R$$

$$(iv) \quad p\Theta q = \frac{p - q}{1 - \mu p}$$

$$(v) \quad \Theta(p\Theta q) = q\Theta p$$

$$(vi) \quad \Theta(p\Theta q) = (\Theta p)\Theta(\Theta q)$$

özellikleri elde edilir.

5.9. Tanım

Eğer $p \in \mathfrak{R}$ ise üstel fonksiyon

$$e_p(t, s) = \exp \left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right) \quad s, t \in \mathbb{T} \tag{5.15}$$

şeklinde tanımlanır.

5.1. Lemma

Eğer $p \in \mathfrak{R}$ ise yarı grup özelliği

$$e_p(t, \tau) e_p(\tau, s) = e_p(t, s) \quad \forall \tau, s, t \in \mathbb{T}$$

şeklindedir.

İspat.

$p \in \mathfrak{R}$ olsun $\tau, s, t \in \mathbb{T}$ için Teorem 4.8 i kullanarak

$$\begin{aligned} e_p(t, \tau) e_p(\tau, s) &= \exp \left(\int_{\tau}^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right) \exp \left(\int_s^{\tau} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right) \\ &= \exp \left(\int_{\tau}^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau + \int_s^{\tau} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right) \\ &= \exp \left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right) \\ &= e_p(t, s) \end{aligned}$$

olur.

5.10. Tanım

Eğer $p \in \mathfrak{R}$ ise birinci dereceden dinamik denklem regressive olarak tanımlanır.

$$y^\Delta = p(t)y \tag{5.16}$$

5.6. Teorem

$y^\Delta = p(t)y$ denklemi regressive olsun.

$$y^\Delta = p(t)y \quad y(t_0) = 1 \quad t_0 \in \mathbb{T} \tag{5.17}$$

$e_p(., t_0)$ başlangıç değer probleminin çözümüdür.

İspat.

$t_0 \in \mathbb{T}^k$ ve $y^\Delta = p(t)y$ denklemi regressive olduğundan

$$e_p(t_0, t_0) = 1$$

olur.

$e_p(t, t_0)$, $y^\Delta = p(t)y(t)$ $t \in \mathbb{T}^k$ dinamik deklemini sağlar. İki durum vardır.

1.durum: $\sigma(t) > t$ Lemma 5.1 den

$$e_p^\Delta(t, t_0) = \frac{\exp\left(\int_{t_0}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) - \exp\left(\int_{t_0}^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)}{\mu(t)}$$

$$= \frac{\exp\left(\int_{t_0}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) - 1}{\mu(t)} e_p(t, t_0)$$

$$= \frac{e^{\xi_{\mu(t)}(p(t))\mu(t)} - 1}{\mu(t)} e_p(t, t_0)$$

$$= \xi_{\mu(t)}^{-1}(\xi_{\mu(t)}(p(t))) \cdot e_p(t, t_0)$$

$$= p(t) \cdot e_p(t, t_0)$$

2.durum : $\sigma(t) = t$ Lemma 5.1 i kullanarak

$$|y(t) - y(s) - p(t)y(t)(t-s)| = |e_p(t, t_0) - e_p(s, t_0) - p(t)e_p(t, t_0)(t-s)|$$

$$= |e_p(t, t_0)| |1 - e_p(s, t_0) - p(t)(t-s)|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| e_p(t, t_0) \right| \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau - e_p(s, t) + \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau - p(t)(t-s) \right| \\
&\leq \left| e_p(t, t_0) \right| \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau - e_p(s, t) \right| + \left| e_p(t, t_0) \right| \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau - p(t)(t-s) \right| \\
&\leq \left| e_p(t, t_0) \right| \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau - e_p(s, t) \right| + \left| e_p(t, t_0) \right| \left| \int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))] \Delta \tau \right|
\end{aligned}$$

İfadesi elde edilir. $\varepsilon > 0$ olsun burada U , t nin komşuluğudur. Böylece en son eşitsizliğin sağ tarafı $\varepsilon|t-s|$ den küçük olur. Ve böylece ispat tamamlanır.

$\sigma(t) = t$ ve $p \in C_{rd}$ olduğundan.

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) = \xi_0(p(t)) \quad (5.18)$$

olur. Bu U_1 in t ile komşuluğunu gösterir.

$$\left| \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t)) \right| < \frac{\varepsilon}{3|e_p(t, t_0)|} \quad \text{her } \tau \in U_1$$

$s \in U_1$ olduğunda,

$$\left| e_p(t, t_0) \right| \cdot \left| \int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))] \Delta \tau \right| < \frac{\varepsilon}{3} |t-s| \quad (5.19)$$

Daha sonra L'Hopital kuralı ile

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - z - e^{-z}}{z} = 0$$

Eğer $s \in U_2$ ise t nin U_2 komşuluğu vardır

$$\left| \frac{1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau - e_p(s, t)}{\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau} \right| < \mathcal{E}^*$$

$$\mathcal{E}^* = \min \left\{ 1, \frac{\mathcal{E}}{1 + 3|p(t)e_p(t, t_0)|} \right\}$$

$s \in U = U_1 \cap U_2$ Eş. 5.19 u kullanarak

$$\begin{aligned} & \left| e_p(t, t_0) \right| \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau - e_p(s, t) \right| < \left| e_p(t, t_0) \right| \mathcal{E}^* \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right| \\ & \leq \left| e_p(t, t_0) \right| \mathcal{E}^* \left\{ \left| \int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))] \Delta \tau \right| + |p(t)||t - s| \right\} \\ & \leq \left| e_p(t, t_0) \right| \mathcal{E}^* \left\{ \left| \int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))] \Delta \tau \right| + \left| e_p(t, t_0) \right| \mathcal{E}^* |p(t)||t - s| \right\} \\ & \leq \frac{\mathcal{E}}{3} |t - s| + \left| e_p(t, t_0) \right| \mathcal{E}^* |p(t)||t - s| \\ & \leq \frac{\mathcal{E}}{3} |t - s| + \frac{\mathcal{E}}{3} |t - s| \\ & \leq \frac{2\mathcal{E}}{3} |t - s| \end{aligned}$$

elde edilir.

5.7. Teorem

Eğer Eş. 5.16 regressive ise Eş. 5.17 nin tek çözümü $e_p(., t_0)$ olur.

İspat.

y Eş. 5.17 nin çözümü olsun. Teorem 3.2 ile

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{e_p(.,t_0)} \right)^\Delta(t) &= \frac{y^\Delta(t)e_p(t,t_0) - y(t)e_p^\Delta(t,t_0)}{e_p(t,t_0)e_p(\sigma(t),t_0)} \\ &= \frac{p(t)y(t)e_p(t,t_0) - y(t)p(t)e_p(t,t_0)}{e_p(t,t_0)e_p(\sigma(t),t_0)} = 0 \end{aligned}$$

Böylece

$$\frac{y(t)}{e_p(t,t_0)} \equiv \frac{y(t_0)}{e_p(t_0,t_0)} = \frac{1}{1} = 1$$

ve

$$y = e_p(.,t_0)$$

olur.

5.8. Teorem

$p, q \in \mathfrak{R}$ ise

$$(i) e_0(t, s) \equiv 1 \text{ ve } e_p(t, t) \equiv 1$$

$$(ii) e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)$$

$$(iii) \frac{1}{e_p(t, s)} = e_{\ominus p}(t, s)$$

$$(iv) e_p(t, s) = \frac{1}{e_p(s, t)} = e_{\ominus p}(s, t)$$

$$(v) e_p(t, s) e_p(s, \Gamma) = e_p(t, \Gamma)$$

$$(vi) e_p(t, s) e_q(t, s) = e_{p \ominus q}(t, s)$$

$$(vii) \frac{e_p(t, s)}{e_q(t, s)} = e_{p \ominus q}(t, s)$$

$$(viii) \left(\frac{1}{e_p(., t_0)} \right)^\Delta = - \frac{p(t)}{e_p^\sigma(., t_0)}$$

eşitlikleri vardır.

6.NABLA DİNAMİK DENKLEMLERİ

6.1 Nabla Dinamik Denklemlere Giriş

6.1. Tanım

Eğer $\mathbb{T}$, sağdan saçılımlı bir minimum m ye sahipse, $\mathbb{T}_k = \mathbb{T} - \{m\}$, diğer durumlarda, $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$ olur.

$\nu : \mathbb{T}_k \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu

$$\nu(t) = t - \rho(t)$$

ile tanımlanır.

6.2. Tanım

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_k$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $f^\nabla(t)$ nabla türevi

$$|f(\rho(t)) - f(s) - f^\nabla(t)(\rho(t) - s)| \leq \varepsilon |\rho(t) - s| \quad \forall s \in U$$

şeklinde tanımlanır.

$\exists \delta > 0$ için t nin bir U komşuluğu vardır.

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için, alışılmış türev olan $f^\nabla(t) = f'(t)$

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için de geri fark operatörü olan $f^\nabla(t) = \nabla f(t) = f(t) - f(t-1)$

$\alpha = \rho$ olması durumunda nabla türevinin alfa türevi olur. Bu bölümde verilen sonuçların birçoğu alfa türev durumuna göre genellenebilir.[2]

6.3. Tanım

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{T}$ deki soldan yoğun noktalarda sürekli ve $\mathbb{T}$ deki sağdan yoğun noktalarda sağ limitleri var olan soldan yoğun sürekli veya

ld sürekli fonksiyon denir

6.1. Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olursa f sürekli ise, f ld-sürekli.

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olursa herhangi bir fonksiyon ld-sürekli. f ld-sürekli olduğu zaman

$$F^\nabla(t) = f(t)$$

Bu durumda

$$\int_a^b f(t) \nabla t = F(b) - F(a)$$

olur..

6.1. Teorem

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_k$ olsun.

(i) Eğer f , t 'de nabla diferansiyellenebilir ise, f , t de sürekli.

(ii) Eğer f , soldan saçılımlı ve t de sürekli ise, f , t de

$$f^\nabla(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{v(t)} \quad \text{ile nabla diferansiyellenebilir.}$$

(iii) Eğer t , soldan yoğun ise, f , t de nabla diferansiyellenebilir.

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \quad \text{olur.}$$

(vi) Eğer f, t de nabla diferansiyellenebilir ise,

$$f^{\rho}(t) = f(t) - \nu(t) f^{\nabla}(t) \text{ olur.}$$

6.2. Teorem

$f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}_k$ için nabla diferansiyellenebilir olsun.

(i) $f + g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f + g)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t) + g^{\nabla}(t)$$

nabla diferansiyellenebilirdir.

(ii) $fg: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(fg)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t)g(t) + f^{\rho}(t)g^{\nabla}(t) = f(t)g^{\nabla}(t) + f^{\nabla}(t)g^{\rho}(t)$$

nabla diferansiyellenebilirdir

(iii) Eğer $g(t)g^{\rho}(t) \neq 0$ ise, $\frac{f}{g}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\nabla}(t) = \frac{f^{\nabla}(t)g(t) - f(t)g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\rho}(t)}$$

nabla diferansiyellenebilirdir

(iv) Eğer f ve f^{∇} sürekli ise,

$$\left(\int_{\alpha}^t f(t,s)\nabla s\right)^{\nabla} = f(\rho(t), t) + \int_{\alpha}^t f^{\nabla}(t,s)\nabla s \text{ olur.}$$

6.4. Tanım

$\forall t \in \mathbb{T}_k$ için $1 - \nu(t)p(t) \neq 0$ ise p fonksiyonu ν regresiftir denir.

$\mathbb{T}_k$ üzerindeki $\mathfrak{R}_\nu = \{p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ ld-sürekli ve } \nu\text{-regresiftir}\}$ olan fonksiyonların ν -regresif sınıflarını tanımlayalım.

Eğer $p, q \in \mathfrak{R}_\nu$ ise, $\oplus_\nu$ işlemini

$\forall t \in \mathbb{T}_k$ için $(p \oplus_\nu q)(t) = p(t) + q(t) - p(t)q(t)\nu(t)$ ile tanımlanır.

6.3. Teorem

$(\mathfrak{R}_\nu, \oplus_\nu)$ kümesi bir Abel gurubudur.

6.5. Tanım

$p \in \mathfrak{R}_\nu$ için

$\Theta_\nu p = -\frac{p}{1-p\nu}$ ile tanımlanır.

p 'nin genelleştirilmiş karesini de

$p^2 = (-p)(\Theta_\nu p) = \frac{p^2}{1-p\nu}$ ile tanımlanır.

6.4. Teorem

$p \in \mathfrak{R}_\nu$ için,

$$(i) (\Theta_\nu p)^2 = p^2$$

$$(ii) 1 - p\nu = \frac{p^2}{p^2}$$

$$(iii) p + (\Theta_\nu p) = -p^2 \cdot \nu$$

$$(iv) (p \oplus_v p^2 = p + p^2$$

6.2. Nabla Üstel Fonksiyon

6.6. Tanım

$h > 0$ için,

$$\mathbb{Z}_h = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < \text{Im}(z) < \frac{\pi}{h} \right\} \quad \text{ve} \quad \mathbb{C}_h = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{1}{h} \right\} \quad \text{olsun.}$$

ν -silindir dönüşümü

$$\hat{\xi}_h : \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{Z}_h$$

$$\hat{\xi}_h(z) := -\frac{1}{h} \text{Log}(1-zh) \quad (6.1)$$

ile tanımlanır.

Buradaki Log, asıl logaritma fonksiyonudur. $h = 0$ için

$$\forall z \in \mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \quad \text{için} \quad \hat{\xi}(z) = z \quad \text{tanımlanır.}$$

6.7. Tanım

Eğer $p \in \mathfrak{R}_\nu$ ise, nabla üstel fonksiyonu

$$s, t \in \mathbb{T} \quad \text{için} \quad \hat{e}_p(t, s) = \exp \left(\int_s^t \hat{\xi}_\nu(\tau) (p(\tau)) \nabla \tau \right) \quad (6.2)$$

ile tanımlanır.

6.1. Lemma (Yarıgrup Özelliği)

Eğer $p \in \mathfrak{R}_\nu$ ise

$$\forall s, t, r \in \mathbb{T} \text{ için } \hat{e}_p(t, r) \hat{e}_p(r, s) = \hat{e}_p(t, s)$$

yarıgrup özelliği elde edilir.

İspat.

$p \in \mathfrak{R}_\nu$ ve $s, t, r \in \mathbb{T}$ olsun. Tanım 6.7. gereğince

$$\begin{aligned} \hat{e}_p(t, r) \hat{e}_p(r, s) &= \exp\left(\int_r^t \hat{\xi}_\nu(\tau)(p(\tau)) \nabla \tau\right) \exp\left(\int_s^r \hat{\xi}_\nu(\tau)(p(\tau)) \nabla \tau\right) \\ &= \exp\left(\int_r^t \hat{\xi}_\nu(\tau)(p(\tau)) \nabla \tau + \int_s^r \hat{\xi}_\nu(\tau)(p(\tau)) \nabla \tau\right) \\ &= \exp\left(\int_s^t \hat{\xi}_\nu(\tau)(p(\tau)) \nabla \tau\right) \\ &= \hat{e}_p(t, s) \end{aligned}$$

durumunu elde edilir.

6.8. Tanım

Eğer $p \in \mathfrak{R}_\nu$ ise,

$$y^\nabla = p(t)y \tag{6.3}$$

lineer dinamik denklemine ν -regresif denir.

6.5. Teorem

Denklem (6.3)'ün ν -regresif olsun.

$$y^\nabla = p(t)y, \quad y(t_0) = 1 \quad t_0 \in \mathbb{T} \text{ için.} \quad (6.4)$$

$\hat{e}_p(., t_0)$ durumu, başlangıç değer probleminin çözümü olur.

İspat.

$t_0 \in \mathbb{T}_k$ ve denklem (6.3)'ün ν -regresif olsun. Öncelikle, $\hat{e}_p(t_0, t_0) = 1$ olduğuna dikkat edelim. Geriye $\hat{e}_p(t, t_0)$ durumunun $y^\nabla = p(t)y$ dinamik denkleminin şartlarını taşıdığını göstermek kalır. $t \in \mathbb{T}_k$ olsun. İki durum vardır. Önce, $\rho(t) < t$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \hat{e}_p^\nabla(t, t_0) &= \frac{\exp\left(\int_{t_0}^t \hat{\xi}_\nu(\tau)(p(\tau))\nabla\tau\right) - \exp\left(\int_{t_0}^{\rho(t)} \hat{\xi}_\nu(\tau)(p(\tau))\nabla\tau\right)}{\nu(t)} \\ &= \frac{1 - \exp\left(-\nu(t)\hat{\xi}_{\nu(t)}(p(t))\right)}{\nu(t)} \hat{e}_p(t, t_0) \\ &= \frac{\hat{e}_p(t, t_0)}{\nu(t)} \{1 - \exp[\text{Log}(1 - p(t)\nu(t))]\} \\ &= p(t) \cdot \hat{e}_p(t, t_0) \end{aligned}$$

Daha sonra, $\rho(t) = t$ olduğunu kabul edelim.

Eğer $y(t) = \hat{e}_p(t, t_0)$ ise,

$y^\nabla(t) = p(t)y(t)$ olduğunu gösteririz. Lemma 6.1. i kullanarak

$$\begin{aligned}
|y(t) - y(s) - p(t)y(t)(t-s)| &= |\hat{e}_p(t, t_0) - \hat{e}_p(s, t_0) - p(t)\hat{e}_p(t, t_0)(t-s)| \\
&= |\hat{e}_p(t, t_0)| \cdot |1 - \hat{e}_p(s, t) - p(t)(t-s)| \\
&\leq |\hat{e}_p(t, t_0)| \cdot |1 - \int_s^t \hat{\xi}_v(\tau)(p(\tau)) \nabla \tau - \hat{e}_p(s, t)| \\
&\quad + |\hat{e}_p(t, t_0)| \cdot |\int_s^t \hat{\xi}_v(\tau)(p(\tau)) \nabla \tau - p(t)(t-s)| \\
&\leq |\hat{e}_p(t, t_0)| \cdot |1 - \int_s^t \hat{\xi}_v(\tau)(p(\tau)) \nabla \tau - \hat{e}_p(s, t)| \\
&\quad + |\hat{e}_p(t, t_0)| \cdot |\int_s^t [\hat{\xi}_v(\tau)(p(\tau)) - \hat{\xi}_0(p(t))] \nabla \tau|
\end{aligned}$$

durumunu elde ederiz. $\varepsilon > 0$ durumu verilmiş olsun. Şimdi son eşitsizliğin sağ tarafı $\varepsilon|t-s|$ durumundan küçük olabilecek şekilde U dan t ye bir komşuluk olduğunu gösterelim ve ispat tamamlayalım. $\rho(t) = t$ ve $p \in C_{ld}$ olduğu için

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \hat{\xi}_v(\tau)(p(\tau)) = \hat{\xi}_0(p(t)) \quad (6.5)$$

olur. Bu durum U_1 den t ye bir komşuluk olduğunu gösterir, öyle ki

$$\forall \tau \in U_1 \text{ için } |\hat{\xi}_v(\tau)(p(\tau)) - \hat{\xi}_0(p(t))| < \frac{\varepsilon}{3|\hat{e}_p(t, t_0)|} \text{ olur.}$$

$s \in U_1$ olsun. O zaman

$$|\hat{e}_p(t, t_0)| \cdot |\int_s^t [\hat{\xi}_v(\tau)(p(\tau)) - \hat{\xi}_0(p(t))] \nabla \tau| < \frac{\varepsilon}{3}|t-s| \quad (6.6)$$

Daha sonra, L'Hopital kuralına göre

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - z - e^{-z}}{z} = 0,$$

yani, U_2 den t ye bir komşuluk vardır, öyle ki eğer $s \in U_2$ ve $s \neq t$ ise

$$\left| \frac{1 - \int_s^t \hat{\xi}_v(\tau)(p(t)) \nabla \tau - \hat{e}_p(s, t)}{\int_s^t \hat{\xi}_v(\tau)(p(t)) \nabla \tau} \right| < \varepsilon^* \text{ olur.}$$

Buradaki

$$\varepsilon^* = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1 + 3 \left| p(t) \hat{e}_p(t, t_0) \right|} \right\}, \text{dır.}$$

$s \in U := U_1 \cap U_2$ olsun. O zaman Eş 6.6'yı kullanarak

$$\begin{aligned} & \left| \hat{e}_p(t, t_0) \right| \cdot \left| 1 - \int_s^t \hat{\xi}_{v(\tau)}(p(\tau)) \nabla \tau - \hat{e}_p(s, t) \right| < \left| \hat{e}_p(t, t_0) \right| \varepsilon^* \left| \int_s^t \hat{\xi}_{v(\tau)}(p(\tau)) \nabla \tau \right| \\ & \leq \left| \hat{e}_p(t, t_0) \right| \cdot \varepsilon^* \left\{ \left| \int_s^t [\hat{\xi}_{v(\tau)}(p(\tau)) - \hat{\xi}_0(p(t))] \nabla \tau \right| + |p(t)| |t - s| \right\} \\ & \leq \left| \hat{e}_p(t, t_0) \right| \cdot \left| \int_s^t [\hat{\xi}_{v(\tau)}(p(\tau)) - \hat{\xi}_0(p(t))] \nabla \tau \right| + \left| \hat{e}_p(t, t_0) \right| \varepsilon^* |p(t)| |t - s| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{3} |t - s| + \frac{\varepsilon}{3} |t - s| \\ & = \frac{2\varepsilon}{3} |t - s| \end{aligned}$$

durumunu elde ederiz.

6.6. Teorem

Eğer Eş. 6.3 ν -regresif ise, $\hat{e}_p(\cdot, t_0)$ durumu, başlangıç değer probleminin Eş. 6.4 tek çözümüdür.

İspat. y nin Eş. 6.4 ün çözümü olduğunu kabul edelim nabla bölüm kuralını kullanarak,

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{\hat{e}_p(\cdot, t_0)} \right)^\nabla(t) &= \frac{y^\nabla(t) \hat{e}_p(t, t_0) - y(t) \hat{e}_p^\nabla(t, t_0)}{\hat{e}_p(t, t_0) \hat{e}_p(p(t), t_0)} \\ &= \frac{p(t)y(t) \hat{e}_p(t, t_0) - y(t)p(t) \hat{e}_p(t, t_0)}{\hat{e}_p(t, t_0) \hat{e}_p(p(t), t_0)} = 0 \end{aligned}$$

öyle ki $y, \hat{e}_p(\cdot, t_0)$ durumunun bir sabit bir katsayısı olsun; başlangıçtaki durum, bunların eşit olduğunu gösterir.

6.7. Teorem

$p, q \in \mathfrak{R}_\nu$ ve $s, t, r \in \mathbb{T}$ olsun.

$$(i) \quad \hat{e}_0(t, s) \equiv 1 \text{ ve } \hat{e}_p(t, t) \equiv 1;$$

$$(ii) \quad \hat{e}_p(p(t), s) = 1 - \nu(t)p(t) \hat{e}_p(t, s);$$

$$(iii) \quad \frac{1}{\hat{e}_p(t, s)} = \hat{e}_{\ominus \nu p}(t, s);$$

$$(iv) \quad \hat{e}_p(t, s) = \frac{1}{\hat{e}_p(s, t)} = \hat{e}_{\ominus \nu p}(s, t);$$

$$(v) \quad \hat{e}_p(t, r) \hat{e}_p(r, s) = \hat{e}_p(t, s)$$

$$(vi) \quad \hat{e}_p(t, s) \hat{e}_q(t, s) = \hat{e}_{p \oplus vq}(t, s);$$

$$(vii) \quad \frac{\hat{e}_p(t, s)}{\hat{e}_q(t, s)} = \hat{e}_{\ominus v p}(t, s);$$

$$(viii) \quad \left(\frac{1}{\hat{e}_p(t, s)} \right)^{\nabla} = \frac{-p(t)}{\hat{e}_p(t, s)}$$

olur.

6.8. Teorem

$p \in \mathfrak{R}_\nu$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun.

(i) Eğer $t \in \mathbb{T}$ için $1 - \nu(t)p(t) > 0$ ise, $\forall t \in \mathbb{T}$ için $\hat{e}_p(t, t_0) > 0$ olur;

İspat.

(i). Tanım (6.7) kullanılarak doğrudan gösterilebilir. $1 - \nu(t)p(t) > 0$ olduğu için, $t \in \mathbb{T}$ için $\text{Log}[1 - \nu(t)p(t)] \in \mathbb{R}$ olur, ve bu yüzden

$\forall t \in \mathbb{T}$ için $\hat{\xi}_{\nu(t)}(p(t)) \in \mathbb{R}$ olur.

Bu yüzden

$\forall t \in \mathbb{T}$ için $\hat{e}_p(t, t_0) = \exp \left(- \int_{t_0}^t \hat{\xi}_{\nu(\tau)}(p(\tau)) \nabla \tau \right) > 0$ olur.

6.3. Nabla Üstel Fonksiyon Örnekleri

Çizelge 6.1. Nabla üstel fonksiyonlar

$\mathbb{T}$	$\hat{e}_\alpha(t, t_0)$
$\mathbb{R}$	$e^{\alpha(t-t_0)}$
$\mathbb{Z}$	$\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{t-t_0}$
$h\mathbb{Z}$	$\left(\frac{1}{1-\alpha h}\right)^{(t-t_0)/h}$

Çizelge 6.2. Nabla üstel fonksiyonlar

$\mathbb{T}$	t_0	$p(t)$	$\hat{e}_p(t, t_0)$
$\mathbb{R}$	0	1	e^t
$\mathbb{Z}$	0	-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^t$
$h\mathbb{Z}$	0	1	$\left(\frac{1}{1-h}\right)^{t/h}$

6.4. Homojen Olmayan Birinci Mertebeden Lineer Denklemler

Bu bölümde önce homojen olmayan birinci mertebeden lineer denklem

$$y^\nabla = p(t)y + f(t) \quad (6.8)$$

ve buna karşılık gelen homojen denklem olan

$$y^\nabla = p(t)y \quad (6.9)$$

durumunu bir $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde çalışacağız.

6.9. Teorem

$y^\nabla = p(t)y$ denklemi ν -regresif ve $t_0 \in \mathbb{T}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ olsun.

$$y^\nabla = p(t)y, \quad y(t_0) = y_0 \quad (6.10)$$

Başlangıç değer probleminin tek çözümü olan problem

$$y(t) = e_p^\wedge(t, t_0)y_0$$

ile verilmiştir.

6.10. Tanım

$p \in \mathfrak{R}_\nu$ için

$$L_1 y(t) = y^\nabla(t) - p(t)y(t), \quad t \in \mathbb{T}_k \quad \text{ile}$$

bir $L_1 : C_{ld}^1 \rightarrow C_{ld}$ operatörünü tanımlanır.

Daha sonra, Eş. 6.9, $L_1 y = 0$; Eş. 6.8 de $L_1 y = f(t)$ şeklinde yazılabilir. L_1 , bir lineer operatör olduğundan, Eş. 6.8 in bir lineer dinamik denklem olduğunu söyleyebiliriz. $y \in C_{ld}^1$; ve $t \in \mathbb{T}_k$ durumu için $L_1 y(t) = f(t)$ olması koşuluyla y 'nin Eş. 6.8 in bir çözümü olduğunu söyleriz.

6.11. Tanım

Bir eşlenik operatör olan $L_1^* : C_{ld}^1 \rightarrow C_{ld}$

$$L_1^* x(t) = x^\nabla(t) + p(t)x^\rho(t), \quad t \in \mathbb{T}_k$$

ile tanımlanır.

6.2. Örnek

$x(t) = (1 - \alpha h)^{\frac{t}{h}}$, $t \in h\mathbb{Z}$ fonksiyonunun

$$x^\nabla + \alpha x^\rho(t), \quad t \in h\mathbb{Z}$$

eşlenik denkleminin bir çözümü olduğu görülür. Buradaki α , ν -regresif bir sabittir.

6.10. Teorem (Lagrange Özdeşliği)

Eğer $x, y \in C_{ld}^1$ ise,

$$\mathbb{T}_k \text{ üzerinde } x^\rho L_1 y + y L_1^* x = (xy)^\nabla \text{ olur.}$$

İspat.

$x, y \in C_{ld}^1$ olsun.

$$(xy)^\nabla = x^\rho y^\nabla + x^\nabla y = x^\rho (y^\nabla - py) + y(x^\nabla + px^\rho) = x^\rho L_1 y + y L_1^* x$$

Bir sonraki sonuç Lagrange özdeşliği gereğince elde edilir.

Teorem 6.11. $p \in \mathfrak{R}_\nu$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun.

$$x^\nabla = -p(t)x^\rho, \quad x(t_0) = x_0 \quad (6.11)$$

başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$x(t) = \hat{e}_{\ominus \nu p}(t, t_0) x_0 \text{ ile verilmiştir.}$$

homojen olmayan problem

$$x^\nabla = -p(t)x^\rho + f(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (6.12)$$

burada, $p \in \mathfrak{R}_v$ ve $f \in C_{ld}^1$ olduğunu kabul ettik. Şimdi de x 'in Eş. 6.12 nin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Eş. 6.12 deki dinamik denklemin her iki tarafını da integral katsayısı olan $\hat{e}_p(t, t_0)$ ile çarparak

$$\hat{e}_p(t, t_0) x^\nabla(t) + p(t) \hat{e}_p(t, t_0) x^\rho(t) = \hat{e}_p(t, t_0) f(t)$$

eşitliğini elde ederiz. Çarpım kuralını kullanarak

$$[\hat{e}_p(t, t_0)]^\nabla = \hat{e}_p(t, t_0) f(t)$$

elde ederiz. Her iki tarafın nabla integrallerini alarak

$$\hat{e}_p(t, t_0) x(t) - \hat{e}_p(t, t_0) x(t_0) = \int_{t_0}^t \hat{e}_p(\tau, t_0) f(\tau) \nabla \tau$$

elde ederiz. $x(t)$ durumunu çözerek

$$x(t) = \hat{e}_{\ominus v p}(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \hat{e}_{\ominus v p}(t, \tau) f(\tau) \nabla \tau$$

elde ederiz.

6.12. Teorem (Sabitlerin Değişimi)

Eş. 6.8 in regresif ve $t_0 \in \mathbb{T}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Başlangıç değer problemi olan

$$x^\nabla = -p(t)x^\rho + f(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (6.13)$$

durumunun tek çözümü

$$x(t) = \hat{e}_{\ominus v p}(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \hat{e}_{\ominus v p}(t, \tau) f(\tau) \nabla \tau \quad (6.14)$$

ile verilmiştir.

Not.

Teorem 6.7 (v) gereğince, başlangıç değer probleminin Eş. 6.13 alternatif bir çözüm biçimi

$$x(t) = \hat{e}_{\Theta \nu p}(t, t_0)[x_0 + \int_{t_0}^t \hat{e}_{\Theta \nu p}(t, \tau) f(\tau) \nabla \tau]$$

ile verilmiştir.

6.13. Teorem (Sabitlerin Değişimi).

Eş. 6.8 iin regresif ve $t_0 \in \mathbb{T}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Başlangıç değer problemi olan

$$y^\nabla = -p(t)y + f(t), \quad y(t_0) = y_0 \quad (6.15)$$

durumunun tek çözümü

$$y(t) = \hat{e}_p(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \hat{e}_p(t, \rho(\tau))f(\tau) \nabla \tau$$

ile verilmiştir.

İspat.

$y^\nabla = p(t)y + f(t)$ durumunu denk biçimde

$$y^\nabla = p(t)[y^\rho + \nu(t)y^\nabla] + f(t)$$

ve

$$[1 - \nu(t)p(t)]y^\nabla = p(t)y^\rho + f(t),$$

ve

$$y^\nabla = -(\Theta_v p)(t)y^\rho + \frac{f(\tau)}{1-v(t)p(t)}$$

şeklinde tekrar yazarız ve (6.15)'un çözümünü bulmak için Teorem 6.13 u

$$y(t) = \hat{e}_p(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \hat{e}_p(t, \tau) \frac{f(\tau)}{1-v(\tau)p(\tau)} \nabla \tau$$

şeklinde uygularız. Teorem 6.7 nin (ii) ve (v) bölümlerini kullanarak

$$\frac{\hat{e}_p(t, \tau)}{1-v(\tau)p(\tau)} = \frac{\hat{e}_p(t, \tau)}{\hat{e}_p(p(\tau), \tau)} = \hat{e}_p(t, \rho(\tau))$$

elde ederiz.

KAYNAKLAR

1. Bohner, M. and Peterson, A., “Dynamic Equations on Time Scales”, *Birkhauser*, Boston, 1-9 (2001).
2. Bohner, M. and Peterson, A., “Advances in Dynamic Equations on Time Scales” *Birkhauser*. Boston, 47-55 (2003).
3. Agarval, R., Bohner, M., O'Regan, D., Peterson, A., “Dynamic equations on time scales a survey”, *Journal of Computational and Applied Mathematic*, 141: 1-26 (2002).
4. Yaşar, B.İ., “Uygulamalı Matematik”, *Siyasal Kitapevi*, Ankara, 150-157 (2005).
5. Yaşar, B.İ., “Uygulamalı Diferensiyel Denklemler”, *Gazi Üniversitesi Yayını*, Ankara 70-76 (1997).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : YOZGAT, Sezai

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 20.11.1970 Yozgat

Medeni hali : Evli

Telefon : 0 (312) 361 84 14

e-mail : sezai_yozgat@hotmail.com.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	2006
Lisans	Ege Üniversitesi/ Matematik Bölümü	1996
Lise	Sorgun Lisesi	1988

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1998-2006	MEB	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Futbol, Bilgisayar teknolojileri, Elektronik